

Clase 1: Conjunto numérico. Propiedades de la potencia. Ecuaciones lineales, cuadráticas y exponenciales

Conjuntos numéricos y enteros

El conjunto de los números naturales surge por la necesidad de contar. Los representamos con la letra N

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Si incluimos al cero en este conjunto, debemos escribir: $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Propiedades del conjunto N_0 :

- Es infinito.
- Tiene primer elemento, pero no último.
- Todo número, excepto el cero, tiene un antecesor.
- Todo número tiene un sucesor.
- Es discreto porque entre dos números cualesquiera existe una cantidad finita de números naturales.

Este conjunto es cerrado para la suma, multiplicación y potenciación, pero no para las demás operaciones. Para solucionar el problema de la resta se crearon los números enteros. El conjunto de los números enteros se denomina con la letra Z .

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Propiedades de este conjunto:

- Es infinito.
- No tiene primero ni último elemento.
- Todo número tiene un antecesor y un sucesor.
- Es discreto.

El conjunto de los números racionales

Los números racionales surgieron por la necesidad de medir, fraccionar y repartir. También solucionó el problema de la división. Ahora, la división en racionales verifica la ley de cierre (si operamos dos elementos de un mismo conjunto, el resultado es otro elemento del mismo conjunto).

Un número es racional cuando puede ser expresado como un cociente entre dos números enteros.

$$\frac{a}{b} \in Q \wedge a \in Z \wedge b \in Z - \{0\}$$

Los números racionales se expresan mediante una fracción o una expresión decimal. Al conjunto formado por todos los números racionales lo simbolizamos con la letra Q .

ATENCIÓN: En una fracción el denominador nunca puede ser cero. Además, es necesario tener en cuenta que los números naturales, los enteros y algunas expresiones decimales pueden ser expresados en forma de fracción, por lo tanto, todos ellos son números racionales.

- En una fracción, el denominador indica el número de partes iguales en que se divide el entero y el numerador, cuántas de esas partes se deben considerar.

$$\frac{A}{B} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{Numerador} \\ \rightarrow \text{Denominador} \end{array}$$

- La expresión decimal de un número racional se obtiene a partir del cociente entre el numerador y el denominador de una fracción.

$$\frac{4}{5} = 4 : 5 = 0,8$$

$$\frac{7}{3} = 7 : 3 = 2,333 \dots = 2, \hat{3}$$

$$\frac{5}{18} = 5 : 18 = 0,2777 \dots = 0,2\hat{7}$$

El conjunto de los números irracionales

Los números irracionales son números reales que no se pueden expresar como la razón entre dos números enteros (*como fracción*).

Algunos numero irracionales

Es la proporción que existe entre el perímetro o longitud de cualquier circunferencia y su diámetro.

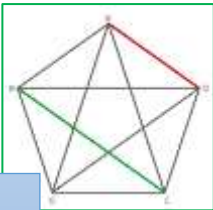


π

3,1415926535897932384626433832795

Numero FI, numero áureo, numero de oro

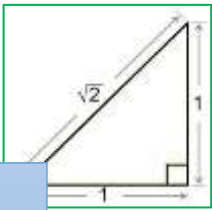
Es la proporción existente entre la diagonal de un pentágono regular y uno de sus lados.



φ

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749\dots$

Equivale a la longitud de la de un triángulo rectángulo isósceles, donde sus catetos miden 1 unidad.



$\sqrt{2}$

1,4142135623730950488016887242097

Aparece en los proceso de crecimiento y decrecimiento continuo, ejemplo en población de bacterias, etc.

e

2,7182818284590452353602874713527

Imagen original: http://agrega.juntadeandalucia.es/repositorio/22062017/95/es-an_2012091313_9142659/numeros_irracionales_AUM.jpg

Como se podrá ver, la representación decimal de todos los números irracionales tiene infinitas cifras decimales y no es periódica.



Para reforzar como clasifican los conjuntos numéricos, te invitamos a ver el siguiente video

https://www.youtube.com/shorts/wok_BKOaKm4?feature=share

Actividades

- I. Recordemos que propiedades tiene cada conjunto marcando con una cruz si cumplen dicha condición.

	Naturales $\mathbb{N}$	Enteros $\mathbb{Z}$	Racionales $\mathbb{Q}$	Irracionales $\mathbb{I}$
Tiene primer elemento				
Tiene último elemento				
Es un conjunto ordenado				
Es un conjunto denso				

- II. ¿Qué significa que el conjunto sea ordenado? ¿Qué significa que el conjunto sea denso?
- III. ¿Cuántos números naturales existe entre $\sqrt{5}$ y $\sqrt{10}$? ¿y cuantos racionales hay?
- IV. ¿Es posible indicar cuantos números racionales hay entre $\frac{1}{2}$ y 1? ¿e irracionales?
- V. Clasifica los siguientes números y justifique su elección

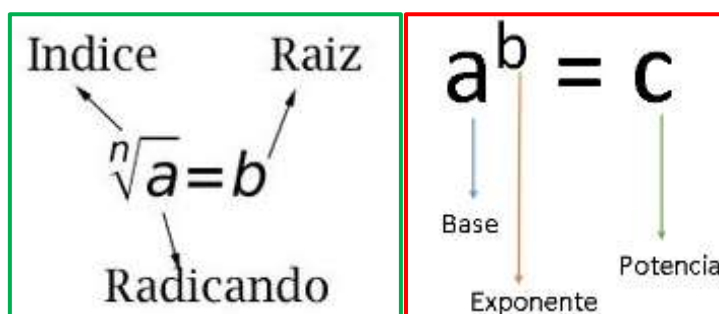
Número	Conjunto numérico a que pertenece	¿Por qué pertenece a ese conjunto numérico?
$\sqrt[2]{-6^2 + 6^2}$		
$-\frac{3\pi}{7}$		
$\frac{5}{2,5}$		
$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$		
$\sqrt{7^2 + 13}$		

Propiedades de la raíz y potencia en los reales

Recordemos un poco las propiedades de la potencia. Complete el cuadro para que se cumpla la igualdad

$a, b \in \mathbb{R} - \{0\}; \quad n, m \in \mathbb{N}$	
P1 $a^0 = \underline{\hspace{2cm}}$	$(-\sqrt{41})^0 =$
P2 $a^1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$(\pi + 7)^1 =$
P3 $a^{-n} = \underline{\hspace{2cm}}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{-2} =$
P4 $a^n \cdot a^m = a^{\underline{\hspace{2cm}}}$	$\pi^4 \cdot \pi^{-2} =$
P5 $a^n : a^m = a^{\underline{\hspace{2cm}}}$	$\frac{(\sqrt{3})^3}{\sqrt{3}} =$
P6 $(a^n)^m = a^{\underline{\hspace{2cm}}}$	$[(4\varphi)^2]^{\frac{1}{4}} =$
P7 $a^{n/m} = \underline{\hspace{2cm}}$	$-13^{4/3} =$
P8 $a^n \cdot b^n = \underline{\hspace{2cm}}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underline{\hspace{2cm}}$	$(\sqrt{5})^3 \cdot (\sqrt{125})^3 =$
P9 $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \underline{\hspace{2cm}}$	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{12}} =$
P10 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \underline{\hspace{2cm}}$	$5^{1/2} \cdot \sqrt{20} =$

Partes de la potencia y la raíz



Recuerda que cuando se aplica la propiedad de simplificación índice y exponente, se debe tener en cuenta si el índice y exponente es PAR o IMPAR

$$\begin{array}{ll} \sqrt[n]{a^n} = a & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sqrt[n]{a^n} = |a| & \text{si } n \text{ es par} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sqrt[3]{(-5)^3} = -5, & \sqrt[5]{2^5} = 2 \\ \sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3 & \end{array}$$

Actividades

1. Resolver aplicando propiedades y clasificar el resultado.

a) $-3^2 =$

g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

m) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{-\frac{1}{3}} =$

b) $(-3)^2 =$

h) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} =$

n) $7^{\frac{5}{2}} : 7^{\frac{1}{2}} =$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (-3)^2 =$

i) $\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} =$

o) $\sqrt[4]{2^2} =$

d) $5^4 \cdot 5^{-2} =$

j) $9^{-\frac{1}{2}} =$

p) $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{-5} =$

e) $10^7 : 10^3 =$

k) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$

q) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

f) $\left(\frac{5}{3}\right)^0 \cdot 2^{-1} =$

l) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} =$

r) $\sqrt[8]{9^{+2}} =$

2. Reduzcan a la mínima expresión aplicando propiedades

a) $m^3 \cdot m^5 =$

d) $\left(\frac{a^2}{a^3}\right)^{-1} =$

b) $(a^4 \cdot a)^2 =$

e) $\left(\frac{a^5 \cdot a}{a^9}\right)^{-2} =$

c) $\frac{m^4}{m^6} =$

f) $\left(\frac{4}{5}\right)^{12} : \left(\frac{5}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{20} =$

3. Estos pares de expresiones algebraicas son equivalentes. Expliquen por qué.

a. $x^5 \cdot x^2 \cdot x^{-3}$ y $\frac{x^7}{x^3}$

b. $(x^{10} \cdot x^{21})^3 : x^2$ y $\sqrt[3]{x^{277}}$

c. $\sqrt[3]{x^6 : x^2}$ y $\sqrt[3]{x} \cdot x$

4. Decidan si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Escriban cómo lo decidieron.

a. $a^{\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{a^2} = 1$ para cualquier valor de a .

b. $b^3 + b^3 = b^6$ para cualquier número real b .

c. $\sqrt{x^2} = x$ para todos los números reales x .

d. $(q^4)^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{q^3}$ para cualquier número q positivo.

e. $(2p+7)^2 = 4p^2 + 49$ para cualquier número real p .

f. No existe ningún número real cuyo cuadrado sea 101.

g. $\sqrt{a^2 + 36} = a + 6$ para cualquier número real positivo a .

h. $\sqrt[n]{a}$ no existe si n es un número natural par y a es un número real negativo.

i. Si a y b son números reales distintos de cero y c es un número natural cualquiera, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^c$.

5. Rodeen, en cada caso, las expresiones equivalentes a la dada. Expliquen cómo lo pensaron.

a. $\frac{7^4 \cdot 3^4}{7^{-2} \cdot 6^3} =$

i. $\frac{7^6}{3 \cdot 2^3}$

ii. $\frac{7^2 \cdot 3^2}{6^2}$

iii. $\frac{7^3 \cdot 1^4}{3^{-2} \cdot 2^3}$

iv. $\frac{7^6 \cdot 3}{2^3}$

v. $\frac{1^4 \cdot 3^2}{1^{-2} \cdot 6^3}$

b. $\frac{22^3 \cdot 2^5}{44^{12}} =$

i. $\frac{2^5}{22^9 \cdot 2^7}$

ii. $\frac{2^5}{2^9}$

iii. $\frac{1}{44^4}$

iv. $\frac{1}{22^9 \cdot 2^7}$

v. $\frac{1^4 \cdot 1^5}{1^{12}}$

6. ¿Cuánto debe valer “ x ” para que se verifique cada ecuación? Indica el conjunto solución como corresponde y realiza la verificación.

(a) $2^x = 32$

(c) $(3^x)^2 = 81$

(e) $2 \cdot 6^x = 432$

(b) $3^{x+1} = 27$

(d) $5^{x^2-3} = 15625$

(f) $-5 \cdot 7^{2x} = -245$

7. ¿Cuál de los siguientes calculo es el correcto? Justifique su respuesta

Prime cálculo

$$(-2)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-2)^6} = \sqrt{64} = 8.$$

Segundo cálculo:

$$(-2)^{\frac{6}{2}} = (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

Observemos los siguientes ejemplos

$$\blacksquare 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16} *$$

$$\blacksquare 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\blacksquare 5^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

$$\blacksquare (-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\blacksquare (-27)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-27)^{-1}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$

$$\blacksquare (-2)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^2} = \sqrt[5]{4}$$

$$\blacksquare (-4)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(-4)^5} = \sqrt[6]{-1024} \rightsquigarrow \text{no existe en } \mathbb{R} \text{ por ser índice par y radi-} \\ \text{cando negativo.} \ll$$

Como se pudo observar, hay que tener cuidado con las bases negativas con exponentes racionales. Para evitar estos inconvenientes, será de gran utilidad la siguiente fórmula que relaciona una **potencia con base negativa** con otra cuya base es positiva, siempre que el **exponente sea irreducible y tenga denominador impar**:

Más precisamente, sean m entero y n natural impar con m/n irreducible. Para $x > 0$ se tiene que

$$(-x)^{\frac{m}{n}} = (-1)^m x^{\frac{m}{n}}.$$

Ejemplo: Aplicando la fórmula anterior, tenemos que

$$(-2)^{\frac{4}{5}} = (-1)^4 2^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{4}{5}},$$

$$(-7)^{\frac{5}{3}} = (-1)^5 7^{\frac{5}{3}} = (-1) \cdot 7^{\frac{5}{3}}.$$

Actividades

1. Indiquen si las siguientes igualdades son válidas para cualquier par de números racionales a y b, e indiquen qué propiedad se está aplicando. Para las que no lo sean, muestre un contraejemplo.

(a) $2a^2 + 2a^2 = 4a^4$

(b) $\sqrt{9a^2} = 9a$

(c) $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(a+b)$

(d) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

(e) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

(f) $\sqrt{25b^2} = 5b$

(g) $(ab^2)^2 = ab^4$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones, e indica a qué conjunto numérico pertenece la solución

a) $x^{3/2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 7$

b) $(2m)^{1/2} - 10 = (-2)^{-1}$

c) $\sqrt{-2x^2 + 67} = 7$

d) $(8t)^{1/2} - 5 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^{-2}$

e) $(r^2 - 5)^{1/2} - 3 = -2$

3. Transforma cada una de las siguientes expresiones en una sola potencia, explique todo el procedimiento indicando las propiedades utilizadas

a) $(-2)^x \cdot (-2)^3 =$

b) $9^x \cdot 3^2 =$

c) $4^x \cdot 2^{x+1} =$

d) $3^{-x} \cdot 9 =$

e) $16^{x-2} \cdot 8^{2x+3} =$

f) $5^{2x+2} \cdot 25^{3-x} \cdot 125^x =$

g) $3^{x+2} \cdot 9^{x-1} \cdot 3^2 =$

h) $2^{x-1} \cdot 2^{x^2-1} \cdot 2^{3-x} =$

i) $\frac{4^{x-2}}{8^{x-1}} =$

j) $(5^{4^x})^{8^{x+1}} =$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones, indica el conjunto solución y clasifícalo según los conjuntos numéricos a los que pertenezca.

a. $2x + 3(x + 1) = 5 - 2(2x - 5)$

b. $\frac{1}{3} - \frac{4(x-5)}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{1}{2} - \frac{2(x+3)}{3}$

c. $\frac{x-2}{x-1} = \frac{x+3}{x-4}$

d. $|-2x + 5| = 8$

e. $4^x = \frac{1}{4}$

f. $9 \cdot 3^x = 1$

g. $\frac{0,3x}{\sqrt{1-\frac{4}{9} \cdot 2}} = \frac{3^{-2}}{\frac{1}{10}x}$

h. $\frac{-5(x+4)}{2} - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}x + \frac{5}{6}$

i. $2x^2 + 8 = 0$

j. $-\frac{5}{3} + \sqrt[4]{2x^5} = -\frac{7}{6}$

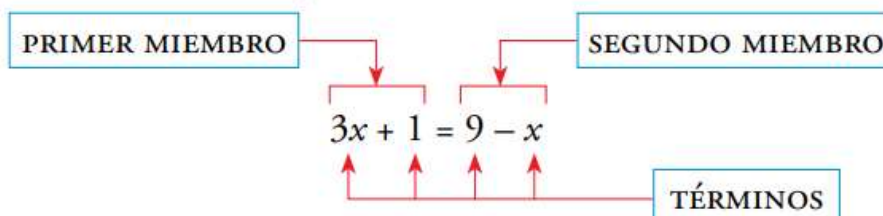
k. $4^x \cdot 2^{x+1} = 1$

l. $4(x^2 + 1) - x = -3x^2 + 2x + 8$

Ecuaciones

Una ecuación es una IGUALDAD en la que hay por lo menos una letra, INCÓGNITA o VARIABLE, que representa un número desconocido.

- **Miembros de una ecuación:** son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo de igualdad.
- **Términos:** son los sumandos que forman los miembros.



- **Incógnitas:** son las letras que aparecen en la ecuación.

Ejemplos

$3x + 1 = 9 - x \rightarrow$ Ecuación con una incógnita, x .

$5x + 3y = y + 2 \rightarrow$ Ecuación con dos incógnitas, x e y .

- **Soluciones:** son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

Ejemplo

$$3x + 1 = 9 - x \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \text{ es solución, ya que } 3 \cdot 2 + 1 = 9 - 2. \\ x = 1 \text{ no es solución, ya que } 3 \cdot 1 + 1 \neq 9 - 1. \end{array} \right.$$

- **Grado de una ecuación:** es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros, una vez reducida la ecuación.

Ejemplos

$3x + 1 = 9 - x \rightarrow$ Ecuación de primer grado.

$x^2 - 3x + 1 = 2x - 5 \rightarrow$ Ecuación de segundo grado.

- **Ecuaciones equivalentes:** dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas incógnitas y las mismas soluciones.

Ejemplo

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 1 = 9 - x \\ 4x = 8 \end{array} \right\} \text{ Son equivalentes. Las dos tienen como solución } x = 2.$$

Recuerda algunos procedimientos de cómo resolver ecuaciones



- Ecuaciones con propiedad distributiva: <https://youtu.be/O5b7Wk6uw-s>
- Ecuaciones con potencia y raíz: <https://youtu.be/9q90sFmsBUQ>
- Ecuaciones cuadráticas incompletas: <https://youtu.be/VEJ3leahb7Y>
- Ecuaciones cuadráticas completas: <https://youtu.be/BxrJmKdPHRs>

Actividades de repaso

Resolver, de ser posible, las siguientes ecuaciones, indica como corresponde el conjunto solución y **clasifica los números del conjunto solución**.

(a) $-\frac{1}{3}x^2 - 3 = -2$

(b) $\frac{1}{2}x + 4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x$

(c) $\frac{-2-x^3}{5} = 5$

(d) $(-8x + 4)^2 = 16$

(e) $\cos(2x^2 - 1) = 1$

(f) $(2x)^2 - 3 = 6$

(g) $2x^2 - 50 = 0$

(h) $x^2 + 3x = 0$

(i) $4x^2 + 6x = 0$

(j) $5x^2 + 45 = 0$

(k) $3x^2 + 4x - 4 = 0$

(l) $x^2 + 4x + 5 = 0$