Repaso de parcial

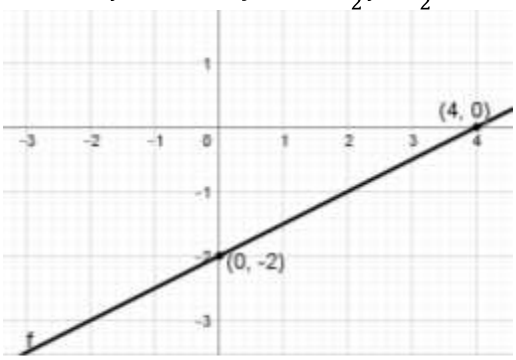
Actividad 1

A) Halle la función pedida en cada caso.

B) Realizar el análisis completo de cada función (dominio, conjunto imagen, raíces, ordenada al origen, intervalo de crecimiento y decrecimiento, conjunto positividad y negatividad, asíntotas –si posee- y vértice –si posee-).

C) Graficar las funciones.

1. Halla la ecuación de la recta que pase por los puntos (-1,2) y (4,3)
2. Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta $2x + y = 5$ y que pase por el punto (4,2)
3. Halla la ecuación de la recta paralela a $-\frac{1}{2}x + y + 1 = 0$ por el punto (1,4)
4. Halla la ecuación de la recta paralela a “f” (grafica) que pasa el punto de intersección entre las rectas $M: x - 3y + 5 = 0$ y $N: x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$



5. Halla la ecuación de la recta que pase por el vértice de la parábola $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 2$ y por el punto (1,-1)
6. Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a $-4x + 5y - 6 = 0$ y que pasa por el punto (-4,-2).
7. Halle la ecuación de la parábola tal que sus raíces sean $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$, y pase por el punto (1,12)
8. Halle la ecuación de la parábola tal que el vértice es (-3,-4) y la ordenada al origen es -8,5.
9. Halle la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (-5,4) y (-1,4) (Son puntos simétricos), y el mínimo es -4.
10. Halle la ecuación de la parábola con b=0 (coeficiente lineal), tiene vértice en $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ y pasa por el punto (-3,2)
11. Halle la ecuación de la parábola tal que $f(3) = -5$ y $f(-9) = -5$, y su valor máximo es $y_m = 4$
12. Halle la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (2,3), (4,1) y (5,-3)
13. Halle la ecuación de la parábola, tal que la función base $y = x^2$ se trasladó 3 unidades a la izquierda, 5 unidades hacia arriba, y pasa por el punto (-2,3).
14. Halle la ecuación de la función logaritmo $f(x) = \log(x - k) + h$ con asíntota vertical x=-5 y pasa por el punto (-4,-2)
15. Halle la ecuación de la función logaritmo $f(x) = \log_a(x - k)$ con asíntota vertical x=-2 y pasa por el punto (3,1)
16. Halle la ecuación de la función logaritmo $f(x) = -1 \cdot \log_a(x - k) + h$ con asíntota vertical en x=1, pasar por el punto (3,3), y la función base se trasladó 4 unidades hacia arriba.
17. Halle la ecuación de la función exponencial tal que la función base $y = a^x$ se traslado 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba, y pasa por el punto (1,5)
18. Halle la ecuación de la función exponencial $f(x) = a^{x-k} + h$ tal que la base es 2, presenta asíntota horizontal en y=-1, y su raíz es -4
19. Halle la ecuación de la función exponencial $f(x) = e^{x-k} + h$ tal que la función base se trasladó 1 unidad hacia arriba, y pasa por el punto (1,2)

Actividad 2: Resuelve los siguientes problemas

1. Las funciones

$$I(x) = -2x^2 + 51x \qquad\qquad G(x) = x^2 - 3x + 96$$

Con 0 ≤ x ≤ 18 representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una farmacia, en miles de euros, en función de los años, x, transcurridos desde su inicio hasta los 18 años.

a) ¿Cuántos años pasa para que se tenga un ingreso (bruto) de €172.000?

b) ¿Cuántos gastos hay en el primer año de la empresa? ¿Superan los ingresos (bruto)? ¿En qué condiciones estaría la empresa en ese momento?

c) Determine la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de x y represéntela gráficamente.

d) ¿En qué periodo del tiempo la empresa no tiene pérdida (beneficio positivo)?

e) ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, se alcanzó el máximo beneficios? Calcule el valor de ese beneficio.

2. Se administra 50 miligramos de cierto medicamento a un paciente. La cantidad de miligramos restantes en el torrente sanguíneo del paciente disminuye a la tercera parte cada 5 horas.

i. ¿Cuál es la fórmula de la función que representa la cantidad del medicamento restante en el torrente sanguíneo del paciente?

ii. ¿Cuántos miligramos del medicamento quedan en el torrente sanguíneo del paciente después de 3 horas?

iii. ¿Después de cuánto tiempo quedará solo 1 miligramo del medicamento del torrente sanguíneo del paciente?

3. Hace 5 años, la población de una pequeña comunidad indígena era de 500 personas. Como consecuencia de su integración con otras comunidades, a población ascendió a 4.000 personas. Suponiendo que la población crece de forma lineal:

a) Expresen mediante una formula la cantidad de habitantes en función del tiempo. Explique que representa cada parámetro de la ecuación explicita en el contexto del problema.
b) ¿En cuánto tiempo la población será de 10.000 habitantes?
c) Grafique la función.

4. El ingreso “R” por fabricar ropa cuando el precio “p” en colones por unidad de ropa está dado por

$$R(p) = -4p^2 + 2\,080\,000\,p$$

a) ¿Cuál es el ingreso que se obtiene por producir 10 unidades de ropa?
b) ¿Cuál es el ingreso que se obtiene por producir 15 unidades de ropa?
c) ¿Cuántas unidades de ropa se deben producir para alcanzar un ingreso máximo?
d) ¿Cuál es el ingreso máximo que se obtiene?

5. Por el alquiler de un coche cobran $100 diarios más $0.30 por kilómetro. Expresen mediante una formula el precio del alquiler del coche en un día en un función de los kilómetros recorridos. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿Cuál es el importe que se debe abonar en ese día?

6. Una compañía de aviación tiene una flota de 55 aviones, de los cuales hay 20 bimotores. Los restantes tienen tres o cuatros motores. Si en toda la flota hay 170 motores ¿Cuántos aviones de tres motores y cuantos de cuatros motores hay?

7. Despides de un naufragio, 129 ratas se las arreglan para nadar desde el naufragio a una isla desierta. La población de ratas en la isla crece exponencialmente, y después de 15 meses, habrá 280 ratas en la isla

a) Encuentre una función que modele la población en tiempo “t” meses después de la llegada de las ratas
b) ¿Cuál será la población 3 años después del naufragio?
c) ¿Cuándo llegara la población a ser 2000?

8. La cantidad inicial de bacterias en un cultivo es 500. Posteriormente, un biólogo hace un conteo de muestra de bacterias del cultivo y encuentra que la tasa de crecimiento relativa es 40% por hora.

(a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.

(b) ¿Cuál es la cantidad estimada después de 10 horas?

(c) ¿Cuándo llegará a 80,000 la cantidad de bacterias?

9. Un tipo de bacteria se duplica cada 6.5 horas. Si es que había 100 bacterias al inicio, responda a lo pedido:

a) ¿Cuál es la fórmula que modela la situación?

b) ¿Cuántas bacterias habrá después de 1 día y medio?

c) ¿En cuánto tiempo habrá 550 bacterias?

10. La población proyectada de una ciudad está dada por $p = 125000(1.11)^{\frac{t}{20}}$ donde t es el número de años a partir de 1995. ¿Cuál es la población que se pronostica para el año 2015?

11. A causa de una recesión económica, la población de cierta área urbana disminuye a razón de 1,5% anual. Al inicio había 350000 habitantes ¿Cuántos habrá después de tres años? De su respuesta al entero más cerrado.

12. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, y toma el antibiótico en esa hora.

a) ¿Cuál es la fórmula que modela la situación?

b) ¿Cuántas bacterias habrá a las 9:30 am en el organismo?

c) ¿En cuánto tiempo habrá la mitad de las bacterias que había a las 7 am?

13. Después de 3 días, una muestra de radón 222 se ha desintegrado a 58% de su cantidad original.

i. ¿Cuál es la vida media del radón 222?
ii. ¿Cuánto tiempo tomará para que la muestra se desintegre al 20% de su cantidad original?

14. En los intestinos humanos habita de manera habitual la bacteria *escherichia coli*. Una célula de esta bacteria se divide en 2 células cada 20 minutos. Considerando que la población inicial de un cultivo es de 60 células:

a. Encuentra la tasa decrecimiento relativa de la población.
b. Encuentra una expresión para la función que determine el tamaño de la población al minuto t.
c. Encuentra el número de bacterias en la población luego de 8 horas.
d. ¿En qué momento la población alcanza un tamaño de 20000 bacterias?

15. En una fiesta se sirve un tazón de sopa caliente a un temperatura de 210º. La temperatura ambiente era de 65º, y comienza a enfriarse según la ley de enfriamiento de Newton, de modo que su temperatura en a la hora es 202º.

a) ¿Cuál es la función que modela la situación?
b) ¿Cuál es la temperatura de la sopa después de tres horas?
c) ¿Después de cuánto tiempo la temperatura será de 100°F?

16. Los médicos emplean el yodo radiactivo como trazador para diagnosticar ciertos trastornos de la glándula tiroides. Este tipo de yodo, se desintegra de tal manera que la masa restante después de t días se determina mediante la función $\mathrm{m}\,(\mathbf{t}) = 6\mathrm{e}^{-0.871\mathrm{t}}$, donde m es la masa de yodo en gramos y t es el tiempo en días.

a. Encuentre la masa inicial de yodo.
b. ¿Cuánta masa queda después de veinte días?
c. ¿Cuántos días habrán transcurridos si se sabe que queda una masa de 0,57g?

17. Un cultivo de bacterias contiene 1500 bacterias inicialmente y se duplica en cada hora.

(a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.

(b) Encuentre el número de bacterias después de 24 horas

19. Se administra 50mg de una cierta droga médica a un paciente, el número de miligramos restante en el torrente sanguíneo del paciente después de t horas disminuye relativamente un 20%.

a) ¿Cuál es el modelo exponencial que representa la situación?
b) ¿Cuántos miligramos de la droga quedan en el torrente sanguíneo del paciente después de 3 horas?

20. Una sustancia radiactiva se desintegra en forma que la cantidad de masa restante, después de t días, está dada por la función $m(t) = 13e^{-0,015t}$ donde m(t) mide en kilogramos

a) ¿Cuál es la masa inicial?
b) ¿Cuánto de la masa resta después de 45 días?

21. Unos médicos usan yodo radiactivo como trazador en el diagnóstico de cierta enfermedad de las glándulas tiroides. Este tipo de yodo, inicialmente introducen 6 gramos en el cuerpo y tiene una vida media de desintegración de 7,95gr/días.

a) Encuentre la fórmula que calcula la masa restante de yodo después de t días
b) ¿Cuántos días paso, aproximadamente, para que haya 4,24gramos de yodo?
c) ¿Cuánta masa resta después de 20 días?

22. Hacer (o rehacer) los problemas de la sección 4.6 (paginas 95 al 97 del PDF) los problemas del 1 al 28

Actividad 3: Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justifique su respuesta.

1. Si una función cuadrática f(x) es cóncava hacia arriba, y su vértice es (-1,0), entonces su intervalo de crecimiento es $(0, \infty)$
2. Si una función cuadrática f(x) tiene conjunto positivo $(-2,8)$ significa que tiene un mínimo en x=3
3. Si una función cuadrática es cóncava hacia abajo, y su ordenada al origen es positiva, entonces interseca dos veces al eje x.
4. Si dos rectas se cortan y no son perpendiculares entonces son paralelas.
5. El módulo del vector $\overrightarrow{k.\boldsymbol{u}}$, siendo k un número real, es igual al módulo del vector $\vec{\boldsymbol{u}}$.
6. La distancia entre P=-1i+5j y Q=(3, 2, 7) es $\sqrt{134}$
7. Sea λ un número real cualquiera $|\lambda \cdot \vec{m}\,| = \lambda \cdot |\vec{m}\,|$
8. Una parábola concava hacia abajo con vértice en (1,2), puede pasar por el punto (-1,3)
9. El dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$ es $[2, +\infty)$
10. Un sistema de ecuaciones con dos rectas con la misma pendiente es un sistema incompatible.
11. El dominio de la función $y = \log(2-x)$ es $(-\infty, 2)$
12. La grafica de función $y = -2x^2 - 12x - 21$ es la parábola $y = -2x^2$ corrido 12 unidades hacia la derecha y 21 unidades hacia abajo.
13. Una función lineal, con ordenada al origen positivo, y pendiente negativa, la recta interseca al eje "x" en un valor positivo.
14. El modelo que representa la temperatura de una taza de café que inicialmente tiene una temperatura de 200ºF, se coloca en un cuarto que tiene una temperatura de 70ºF, y después de 10 minutos, la temperatura del café es 150ºF; es $y = 70º + 50ºe^{-10t}$
15. Ninguna función exponencial tiene como conjunto imagen $(-\infty, 0)$
16. La función $y = \frac{1}{2}(x+m)(x-n)$, siendo m>0 y n>0, tiene conjunto positivo $(-\infty, m) \cup (n, \infty)$.
17. La función exponencial $y = -2e^{x+3}$ pasa por el punto (3,-2).
18. Dado un vector en el plano, existen sólo dos vectores unitarios perpendiculares a él

Actividad 4:

1. i) Encuentre un vector en cada caso

a) Obtener el vector de módulo 3 y dirección igual a 120°.

b) Obtener un vector perpendicular a $\vec{\boldsymbol{a}}$ = (-1, 2, 4) y $\vec{\boldsymbol{b}}$ = 3**i**+1**k** cuyo módulo sea 3.

c) Encuentre un vector $\vec{v}$ de módulo 4, que resulte opuesto al vector $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$
d) Encuentre un vector $\vec{m}$ perependicular al vector $\vec{v}$, hallado en el inciso anterior, y con módulo 1
e) Halla las componentes de $\vec{w}$ sabiendo que es paralelo a $\vec{u}$ y su módulo es 4
f) Hallar un vector de R^2 cuya dirección sea 45° y su magnitud valga 10.
g) Sean los vectores (2, 4, 0) y (-3, 1, -1) obtener un vector perpendicular a ambos de magnitud 2.
h) Hallar un vector de R2 cuya dirección sea 60° y su magnitud valga 8.
i) Encontrar un vector v paralelo al obtenido en (h) pero con módulo 5.

ii) Grafique cada vector hallado en el inciso anterior y calcula su módulo.

2. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (2, -1, \alpha)$ y $\mathbf{v} = (5, 4, -1)$, determinar si es posible el valor de α para que los vectores **u + v** y **u - v** sean perpendiculares.

3. En cada caso averigüe el valor del coeficiente “a”, siempre que se pueda, para que se cumpla la condición pedida

a) El ángulo formado por $\vec{u} = (2{,}5)$ y $\vec{v} = (a, 2)$ es $\varphi = \cos^{-1} \frac{12}{\sqrt{145}}$

b) Los vectores $\vec{u} = \left(3, -\frac{2}{5}\right)$ y $\vec{v} = \left(-\frac{5}{2}, a\right)$ son paralelos.

c) El módulo de $\vec{u} = a\vec{\imath} + (a+17)\vec{\jmath}$ es 25

d) $(1, 0, a+1) \times (2, a, 5) = -12\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

e) $\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \left(2, \frac{7}{4}, -3\right)$ siendo $\vec{u} = \left(a, \frac{1}{2}, 5\right)$ y $\vec{v} = -3a\vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{5}{2}\vec{\jmath}$

Parcial 2023

Actividad 1:

Indicar la opción correcta y justifica tu elección.

1. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{\frac{1+4x}{-3}}$ es el conjunto

Opción A. $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$

Opción B. $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$

Opción C. $\left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$

Opción D. $\left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$

Opción E. Ninguna de las opciones anteriores

2. Es cierto que:

Opción A. La recta y = 3 no tiene pendiente.
Opción B. La recta x= 3 representa una función lineal.
Opción C. 4 es la pendiente de la recta $4x + 2y = 1$

Opción D. El punto (2;1) pertenece a la recta $y = -x + 3$

Opción E. Ninguna de las opciones anteriores son ciertas

3. El conjunto solución de la ecuación $4\log x = 2\log x + \log 4 + 2$ es

Opción A. $\{-20,0,20\}$
Opción B. $\{20,0\}$

Opción C. $\{20\}$
Opción D. Ninguna de las opciones anteriores.

4. Dos vectores son paralelos si

Opción A. Su producto escalar es 0

Opción B. Su producto vectorial es $\vec{0}$

Opción C. Sus módulos son iguales
Opción D. Ninguna de las opciones anteriores.

5. De la parábola $y = 4x - 2x^2 - 1$ es cierto que

Opción A. Es cóncava hacia arriba.
Opción B. No tiene raíces reales.

Opción C. Interseca al eje de las abscisas en -1.
Opción D. Ninguna de las opciones anteriores.

Actividad 2:

i. Sea $\vec{v} = 2\vec{i} + 12\vec{j} - 9\vec{k}$ y $\vec{w} = -3\vec{i} + \frac{27}{2}\vec{k} - b\vec{j}$, averigua el valor de “b” para que los vectores sean paralelos. B=18
ii. Sea $\vec{u} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$, halla el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$. $\varphi = 53{,}76º$
iii. Encuentre un vector $\vec{m}$ perpendicular a ambos vectores ($\vec{u}$ y $\vec{v}$) con módulo 4. $\vec{m} = \left(\frac{192}{\sqrt{2980}}, \frac{40}{\sqrt{2980}}, \frac{24}{\sqrt{2980}}\right)$

Actividad 3:

A. Halla una función en cada caso que verifique con lo pedido
   i. Una parábola con raíces en $x_1 = -1, x_2 = 3$ y tiene valor mínimo en $y_v = -12$
   $y = 3(x+1)(x-3)$
   ii. Una función logaritmo $f(x) = \log(x - k) + h$ con asíntota vertical x=-5 y pasa por el punto (-4,-2)
   $y = \log(x+5) - 2$

B. Analiza las funciones anteriores: Dominio, conjunto imagen, intersección con los ejes, máximo o mínimo (si posee), y asíntotas (si posee).

	$y = 3(x+1)(x-3)$	$y = \log(x+5) - 2$
Dominio	$\mathbb{R}$	$(-5, \infty)$
Conjunto Imagen	$[-12, \infty)$	$\mathbb{R}$
Raíces	$x_1 = -1, x_2 = 3$	$x = 95$
Ordenada al origen	$y = -9$	$y = -1{,}3$
Máximo o Mínimo	Mínimo y=-12, en x=1	-
Asíntotas	-	$x = -5$

Actividad 4:

I. La temperatura del agua colocada en una habitación que se encuentra a 25ºC baja de 100ºC a 80ºC en 10 minutos.

$$T(t) = 25 + 75e^{-0,03t}$$

a) Determinar la temperatura del agua al cabo de 50minutos. 41º aproximadamente (40,9)

b) ¿Cuándo la temperatura del agua será de 65ºC? A los 20 minutos y cuarto aproximadamente (20,27)

c) ¿Cuándo será igual a 30ºC? 1 hora y 20’ (87,31)

II. Resuelve las siguientes ecuaciones y especificar el conjunto solución.

a) $2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} = 7$ $CS = \{1\}$

b) $\log_2(6x-4) + \log_2(x-7) = 2$ $CS = \{7,1\}$