

Ecuaciones logarítmica y exponencial.

Como introducción de ecuaciones exponenciales, trabajaremos casos de ecuaciones que se resuelven con propiedades de la potencia y luego con equivalencia de expresiones.

Luego veremos casos en donde necesitaremos usar el logaritmo.

¿Qué son expresiones equivalentes?

Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se cumple la igualdad entre ambas expresiones siempre y se puede comprobar numéricamente cuando se le asigna cualquier valor a las literales que intervienen.

Por ejemplo:

$3n + 6$ es equivalente a $3(n + 2)$, porque al asignar un valor a "n", por ejemplo 5, las dos expresiones dan el mismo resultado:

$$3n + 6 = 3(5) + 6 = 15 + 6 = 21$$

$$3(n + 2) = 3(5 + 2) = 3(7) = 21$$

También se puede demostrar la equivalencia de dos expresiones por propiedades de las operaciones

Por ejemplo:

5^{2x+1} es equivalente a $25^x \cdot 5$ porque

$$5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^1$$

$$= (5^2)^x \cdot 5$$

$$= 25^x \cdot 5$$

Por la propiedad producto de potencia de igual base

Por las propiedades potencia de otra potencia y por la de exponente 1

Ecuaciones exponenciales

Decimos que una ecuación es *exponencial* cuando contiene a la incógnita en algún exponente. Observen dos ejemplos de cómo se pueden resolver.

$$1024 = 8 \cdot 2^x$$

$$2^{10} = 2^3 \cdot 2^x$$

$$2^{10} = 2^{3+x}$$

$$10 = 3 + x$$

$$x = 7$$

Planteamos la
igualdad entre
los exponentes.

$$3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$$

$$3^x + 3^x \cdot 3^2 = \frac{10}{3}$$

$$3^x \cdot (1 + 3^2) = \frac{10}{3}$$

$$3^x \cdot 10 = \frac{10}{3}$$

$$3^x = \frac{10}{3} : 10$$

$$3^x = \frac{1}{3}$$

$$3^x = 3^{-1}$$

$$x = -1$$

Expresamos el
segundo miembro
como una
potencia de 3.

Más ejemplos

$$a) 5^{x^2-5x+6} = 1 \rightarrow 5^{x^2-5x+6} = 5^0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$b) 2^{3x} = 0,5^{3x+2} \rightarrow 2^{3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2} \rightarrow 2^{3x} = (2^{-1})^{3x+2} \rightarrow 2^{3x} = 2^{-3x-2} \rightarrow 3x = -3x-2$$

$$\rightarrow 6x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{6} \rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$c) 4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 16 = 0 \rightarrow (4^x)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4^x + 16 = 0 \rightarrow (4^x)^2 - 8 \cdot 4^x + 16 = 0 \rightarrow \{ \text{Si } z = 4^x \}$$

$$\rightarrow z^2 - 8z + 16 = 0 \rightarrow (z-4)^2 = 0 \rightarrow z = 4 \xrightarrow{\text{Des hacemos el Cambio}} 4^x = 4 \rightarrow x = 1$$

Para seguir profundizando las herramientas para resolver las ecuaciones, te invitamos a ver los siguientes videos



- <https://youtu.be/XdaB464Gt4M>
- <https://youtu.be/hWcOgCeznRE?t=68>
- <https://youtu.be/YM5doTNqkZk>

Actividades

1. Unir con flechas las expresiones equivalentes, y fundamente su elección.

a) $(-2)^{2x}$

b) 8^x

c) $(-9)^{2x-2}$

d) 2^{1+2x}

e) $9:3^{2x}$

f) $16^2 \cdot 2^x$

g) $\sqrt[3]{4^x}$

h) $\sqrt[2]{3^x} \cdot \sqrt[2]{27}$

1. $2 \cdot 4^x$

2. 2^{4+x}

3. 4^x

4. 2^{3x}

5. $2^{\frac{2x}{3}}$

6. $3^{\frac{x+3}{2}}$

7. 3^{2-2x}

8. 3^{4x-4}

2. Transforma cada una de las siguientes expresiones en una sola potencia, explique todo el procedimiento indicando las propiedades utilizadas.

a) $(-2)^x \cdot (-2)^3 =$

b) $9^x \cdot 3^2 =$

c) $4^x \cdot 2^{x+1} =$

d) $3^{-x} \cdot 9 =$

e) $16^{x-2} \cdot 8^{2x+3} =$

f) $5^{2x+2} \cdot 25^{3-x} \cdot 125^x =$

g) $3^{x+2} \cdot 9^{x-1} \cdot 3^2 =$

h) $2^{x-1} \cdot 2^{x^2-1} \cdot 2^{3-x} =$

i) $\frac{4^{x-2}}{8^{x-1}} =$

j) $(5^{4x})^{8^{x+1}} =$

k) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} =$

l) $\frac{4^x \cdot 2^{3-x}}{2^{x+1} + 2^{2x-1}} =$

m) $\frac{3^{x+1} + 3^x}{2 \cdot 9^x} =$

Nota: En los incisos K, L y M pueden usar la herramienta "factor común".

3. Completen los espacios en blanco con números para que verifique la igualdad

a) $4^{\square} = 64$

c) $\square^{-2} = \frac{1}{4}$

e) $(-2)^{\square} \cdot (-1) = -16$

b) $\square^3 = -8$

d) $\square^3 \cdot 2 = 54$

f) $\square^2 : \frac{1}{2} = 128$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones, exprese el conjunto solución como corresponde, indica a que conjunto numérico¹ pertenece ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y realiza la verificación.

a) $4^x = \frac{1}{4}$

d) $9^{x+1} = 3$

g) $2^x + 2^x = 4$

b) $2^{x+1} = 8$

e) $4^x \cdot 2^{x+1} = 1$

h) $\frac{1}{2} \cdot 3^x + 3^x = \frac{3}{2}$

c) $9 \cdot 3^x = 27$

f) $27 \cdot 3^{x+2} - \frac{1}{3} = 0$

i) $5^x + 5^{x+1} - \frac{6}{25} = 0$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales, explique todo el procedimiento indicando las propiedades utilizadas. Luego compruebe si has llegado a la solución expuesta debajo de los incisos.

a) $2^{3x} = 0,5^{3x+2}$

e) $3^x + 3^{x+2} = 30$

i) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$

b) $3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$

f) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$

j) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9$

c) $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$

g) $\frac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3125$

k) $3^{-x} - 3^{-x} = \frac{728}{27}$

d) $7^{x+2} = 5.764.801$

h) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

l) $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x}$

Sol: a) $-1/3$; b) $\pm\sqrt{6}$; c) 11,54; d) 6; e) 1; f) 0; g) -2 y 4; h) 0 y 2; i) 3; j) ± 2 ; k) No; l) -1 y 2;

Desafío:

¿Qué número "x" verifica la siguiente igualdad $2^x = 3$?

En este caso aparece una nueva función matemática: LOGARITMO.

¹ <https://youtu.be/YfclzXCLiIA>

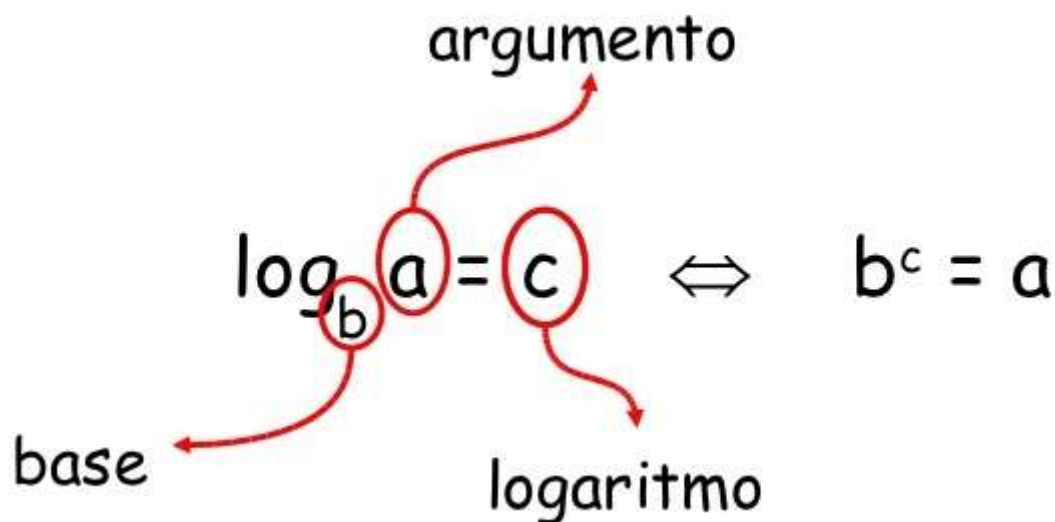
Logaritmo de un número real

Se llama **logaritmación** a la operación por la cual se calcula el exponente al que se tiene que elevar un número **a** positivo y distinto de 1 para obtener otro número **b**. Esto se escribe:

$\log_a b$ y se lee logaritmo en base **a** de **b**.

Se cumple que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Partes del logaritmo:



- 🍏 Cuando la base es **10**, se llaman **logaritmos decimales** y no se indica la base 10, es decir:

$$\cancel{\log_{10} P} = \log P = x \Leftrightarrow 10^x = P$$

- 🍏 Cuando la base es el número de Euler, $e = 2.71828\dots$, se llaman **logaritmos neperianos** o naturales y se expresan por **ln** en vez de $\log_e$, es decir:

$$\cancel{\log_e P} = \ln P = x \Leftrightarrow e^x = P$$

El Logaritmo y la exponencial son operaciones inversas como pasa con las potencias y las raíces.

Por ejemplo: calcular los siguientes logaritmos aplicando definición

a) $\log_2 32$

b) $\log_5 1/5$

c) $\log_4 2$

a) $\log_2 32 = x \rightarrow 2^x = 32 \rightarrow 2^x = 2^5 \rightarrow x = 5 \rightarrow \log_2 32 = 5$

b) $\log_5 \frac{1}{5} = x \rightarrow 5^x = \frac{1}{5} = 5^{-1} \rightarrow 5^x = 5^{-1} \rightarrow x = -1 \rightarrow \log_5 \frac{1}{5} = -1$

c) $\log_4 2 = x \rightarrow 4^x = 2 \rightarrow (2^2)^x = 2 \rightarrow 2^{2x} = 2 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

Como consecuencias inmediatas de la definición de logaritmo llegamos a:

- 🍏 El logaritmo de la unidad es siempre 0: $\log_a 1 = 0 \rightarrow a^0 = 1$
- 🍏 El logaritmo en cualquier base de la base es siempre 1: $\log_a a = 1 \rightarrow a^1 = a$
- 🍏 El logaritmo de una potencia de la base es siempre el exponente: $\log_a a^Q = Q \rightarrow a^Q = a^Q$

Pero además de estas tres, existen otras propiedades que los logaritmos verifican (siempre que "a" y "b" sean números positivos)

- **Logaritmo de un producto**

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

- **Logaritmo de una potencia**

$$\log_c a^b = b \cdot \log_c a$$

- **Logaritmo de un cociente**

$$\log_c \left(\frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b$$

- **Logaritmo de una raíz**

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_c a$$

- **Cambio de base**

$$\log_c a = \frac{\log_n a}{\log_n c}$$

La propiedad de cambio de base permite transformar un logaritmo dado en cierta base en otro logaritmo expresado en otra base que resulte más conveniente; por ejemplo, aquellas que aparecen en las calculadoras científicas.

$$1) \text{Log}_2 27 = \frac{\text{Log } 27}{\text{Log } 2} \approx 4,75$$

La secuencia de teclas sería la siguiente:

$$\boxed{\log} \boxed{2} \boxed{7} \boxed{\div} \boxed{\log} \boxed{2} \boxed{=}$$



$$2) \text{Log}_2 27 = \frac{\ln 27}{\ln 2} \approx 4,75$$

La secuencia de teclas sería la siguiente:

$$\boxed{\ln} \boxed{2} \boxed{7} \boxed{\div} \boxed{\ln} \boxed{2} \boxed{=}$$



Ejemplo de aplicación de propiedades

Evalúe las expresiones siguientes.

(a) $\log_4 2 + \log_4 32$

(b) $\log_2 80 - \log_2 5$

(c) $-\frac{1}{3} \log 8$

(a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32)$

Ley 1

$$= \log_4 64 = 3$$

Porque $64 = 4^3$

(b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right)$

Ley 2

$$= \log_2 16 = 4$$

Porque $16 = 2^4$

(c) $-\frac{1}{3} \log 8 = \log 8^{-1/3}$

Ley 3

$$= \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

Propiedad de exponentes negativos

$$\approx -0.301$$

Calculadora

Combine $3 \log x + \frac{1}{2} \log(x + 1)$ en un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$$3 \log x + \frac{1}{2} \log(x + 1) = \log x^3 + \log(x + 1)^{1/2}$$

$$= \log(x^3(x + 1)^{1/2})$$

Combine $3 \ln s + \frac{1}{2} \ln t - 4 \ln(t^2 + 1)$ en un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$$3 \ln s + \frac{1}{2} \ln t - 4 \ln(t^2 + 1) = \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2 + 1)^4 \quad \text{Ley 3}$$

$$= \ln(s^3 t^{1/2}) - \ln(t^2 + 1)^4 \quad \text{Ley 1}$$

$$= \ln\left(\frac{s^3 \sqrt{t}}{(t^2 + 1)^4}\right) \quad \text{Ley 2}$$

Actividad

1. Complete los espacios en blanco para que la afirmación sea verdadera

a) $5^3 = 125$ entonces $\log_{___} ___ = ___$

b) $\log_5 25 = 2$ entonces $___ = ___$

c) $6^{-2} = \frac{1}{36}$ entonces $\log_{___} ___ = ___$

d) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$ entonces $___ = ___$

2. Expresa los siguientes logaritmos de forma exponencial

A) $\log_5 25 = 2$

G) $\log_5 1 = 0$

B) $\log_{10} 0.1 = -1$

H) $\log_8 512 = 3$

C) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

I) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

D) $\log_3 81 = 4$

J) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

E) $\ln 5 = x$

K) $\ln y = 5$

F) $\ln(x + 1) = 2$

L) $\ln(x - 1) = 4$

3. Expresa las siguientes potencias de forma logarítmica

A) $5^3 = 125$

E) $10^{-4} = 0.0001$

B) $10^3 = 1000$

F) $81^{1/2} = 9$

C) $8^{-1} = \frac{1}{8}$

G) $2^{-3} = \frac{1}{8}$

D) $4^{-3/2} = 0.125$

H) $7^3 = 343$

4. Use la definición de logaritmo para hallar el valor de "x"

A) $\log_2 x = 5$

F) $\log_2 16 = x$

B) $\log_5 x = 4$

G) $\log_{10} 0.1 = x$

C) $\log_3 243 = x$

H) $\log_3 x = 3$

D) $\log_4 2 = x$

I) $\log_4 x = 2$

E) $\log_{10} x = 2$

J) $\log_5 x = 2$

5. Resuelvan aplicando las propiedades de logaritmo y sin usar la calculadora

a) $\log_2 (8 \cdot 32) = \dots\dots\dots$ c) $\log_4 64^6 = \dots\dots\dots$ e) $\log_3 (\sqrt[3]{81})^5 = \dots\dots\dots$

b) $\log_3 \left(27 \cdot \frac{9}{81}\right) = \dots\dots\dots$ d) $\log \left(\frac{10 \div 0,01}{0,001}\right) = \dots\dots\dots$

6. Expresa cada uno de los siguiente ejercicio es un solo logaritmo. Indica que propiedades haz utilizado y en dónde.

A) $\log 6 + \log 4$

D) $\log_3 10 - \log_3 5$

B) $\log_2(2x) - \log_2(x + 1)$ E) $2 \log x - \frac{1}{2} \log(x - 2)$

C) $5 \log_2 10 + 2 \log_2 13$ F) $5(2 \log x + 3 \log y - 2 \log z)$

7. Expresa como sumas o diferencias los siguientes logaritmos. Indica que propiedades haz utilizado y en dónde.

a) $\log \frac{5^2 \cdot 3}{11} =$ b) $\log \sqrt[5]{7^2 \cdot 5^3} =$ c) $\log \frac{\sqrt[3]{a^2}}{4b^3} =$ d) $\log \left[\frac{10}{a^4 \cdot b^3} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right] =$

8. (DESAFÍO) Resuelve las siguientes ecuaciones, exprese el conjunto solución como corresponde

a) $2^{2x-1} = 20$ b) $5^x \cdot 2^{x+2} = 8$ c) $\log_2(2x + 1) = 3$ d) $\log x + \log 2x = 7$

En la última actividad tuvieron resolver ecuaciones en donde están involucrada logaritmo.

Formalicemos estos procedimientos:

- Cuando la incógnita la tenemos en la base o hay un solo logaritmo en toda la ecuación, conviene despejar el logaritmo (dejarlo solo en un miembro) y aplicar la definición.

23.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_8 [2(x^3 + 5)] = 2$

Aplicando la definición de logaritmo, llegamos a:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \rightarrow \log_8 [2(x^3 + 5)] = 2 \Leftrightarrow 8^2 = 2(x^3 + 5)$$

Y operando:

$$8^2 = 2(x^3 + 5) \rightarrow 64 = 2(x^3 + 5) \rightarrow 32 = x^3 + 5 \rightarrow x^3 = 27 \rightarrow x^3 = 3^3$$

Queda claro que si dos potencias son iguales y sus exponentes también lo son, entonces sus bases también tienen que ser iguales:

$$\text{Si } x^3 = 3^3 \rightarrow x = 3$$

Verificamos para asegurarnos de no realizar logaritmos nulos o negativos y claramente si x es positivo, x^3 también lo es.

Por tanto, la solución es: $x=3$.

b) $\log_{2x+3}(81) = 2$

Aplicando la definición de logaritmo, llegamos a:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \rightarrow \log_{2x+3}(81) = 2 \rightarrow (2x+3)^2 = 81$$

Y operando:

$$(2x+3)^2 = 81 \rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 81 \rightarrow 4x^2 + 12x - 72 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$x^2 + 3x - 18 = 0 \rightarrow (x+6)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 3 \end{cases}$$

Verificamos para asegurarnos de no realizar logaritmos nulos o negativos y vemos que ambas soluciones son correctas.

Por tanto, las soluciones son: $x=3$ y $x=-6$.

c) $\log(2x-4) = 2$

Aplicando la definición de logaritmo y operando, llegamos a:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \rightarrow \log(2x-4) = 2 \rightarrow 10^2 = 2x-4 \rightarrow 104 = 2x \rightarrow x = 52$$

Solución que es válida porque no hace negativo al argumento.

Por tanto, $x=52$

- Cuando hay más de un logaritmo, conviene aplicar propiedades para que me que solo un logaritmo en un miembro o en ambos miembros.

24.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$

Si operamos un poco llegamos a:

$$\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2 \rightarrow \log(16-x^2) = 2 \cdot \log(3x-4)$$

Aplicando la propiedad de la potencia de un logaritmo:

$$\log(16-x^2) = 2 \cdot \log(3x-4) \rightarrow \log(16-x^2) = \log(3x-4)^2$$

Y si dos logaritmos son iguales, sus argumentos también lo son:

$$\text{Si } \log(16-x^2) = \log(3x-4)^2 \rightarrow (16-x^2) = (3x-4)^2 \rightarrow 16-x^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$16 - x^2 = 9x^2 - 24x + 16 \rightarrow 10x^2 - 24x = 0 \rightarrow x(5x - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{12}{5} \end{cases}$$

Desechamos la solución $x=0$ porque el logaritmo del cociente sería negativo.

Por tanto, la solución es $x=12/5$

$$b) \log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \cdot \log(5 - x)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos llegamos a:

$$\underbrace{\log 2 + \log(11 - x^2)}_{\text{Propiedad 5}} = \underbrace{2 \cdot \log(5 - x)}_{\text{Propiedad 7}} \rightarrow \underbrace{\log[2(11 - x^2)]}_{\text{Propiedad 9}} = \log(5 - x)^2 \rightarrow [2(11 - x^2)] = (5 - x)^2$$

Una ecuación de segundo grado, que resolviendo:

$$22 - 2x^2 = 25 - 10x + x^2 \xrightarrow{\text{Agrupamos}} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

No podemos olvidar que siempre hay que verificar si la solución o soluciones son correctas:

Si sustituimos $x=3$:

$$\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \cdot \log(5 - x) \rightarrow \log 2 + \log(11 - 9) = 2 \cdot \log(5 - 3) \rightarrow \log 2 + \log 2 = 2 \cdot \log 2 \quad c.q.d.$$

Si sustituimos $x=1/3$:

$$\begin{aligned} \log 2 + \log(11 - x^2) &= 2 \cdot \log(5 - x) \rightarrow \log 2 + \log\left(11 - \frac{1}{9}\right) = 2 \cdot \log\left(5 - \frac{1}{3}\right) \rightarrow \log 2 + \log\left(\frac{98}{9}\right) = 2 \cdot \log\left(\frac{14}{3}\right) \\ &\rightarrow \log\left(2 \cdot \frac{98}{9}\right) = \log\left(\frac{14}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{196}{9} = \frac{196}{9} \quad c.q.d. \end{aligned}$$

Siempre verifiquen que la solución no haga ni negativo ni anule el ARGUMENTO

Actividad:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, exprese el conjunto solución como corresponde, indica a que conjunto numérico pertenece ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y realiza la verificación.

a) $\log_x 27 = 3$

f) $\log x - \log 3 = 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(-x + 5) = 2$

g) $\log_2(8 \cdot x) + \log_2(4 \cdot x^2) = 8$

c) $\log x - \log 17 = 0$

h) $\log_5(x + 12) - \log_5(x + 3) = 1$

d) $\log_8(3 - 2x) = 0$

i) $\log(x - 8) + \log(x - 2) = \log(-8 - x)$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales, explique todo el procedimiento indicando las propiedades utilizadas. Luego compruebe si has llegado a la solución expuesta debajo de los incisos.

a) $\log(2x - 7) - \log(x - 1) = \log 5$

d) $2 \cdot \log x - 2 \cdot \log(x + 1) = 0$

g) $\frac{\log(10 - x)}{\log(3x - 4)} = 2$

b) $\log x - \log(x + 3) = 2 \cdot \log(x + 1)$

e) $\log x = \frac{2 - \log(x)}{\log(x)}$

h) $\frac{\log(35 - x^2)}{\log(5 - x)} = 3$

c) $4 \log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = 2 \cdot \log(x)$

f) $\log(25 - x^3) - 3 \log(4 - x) = 0$

i) $\log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$

Sol: **a)** $-2/3$; **b)** 1; **c)** 2; **d)** $-1/2$; **e)** 10; **f)** $\frac{4 \pm \sqrt{3}}{2}$; **g)** $12/5$; **h)** $5 - \sqrt{10}$; **i)** 25 y $5\sqrt{5}$