Ejercicios resueltos del TP3. Parte 2.

PROBABILIDAD:

Actividad 9. El secretario del sindicato que agrupa a los trabajadores de una empresa, redactó una lista de demandas para presentarle al gerente de la empresa. Previamente, indagó acerca del grado de apoyo al paquete de demandas con el que contaba. Para ello, realizó un sondeo aleatorio entre los dos grupos principales de trabajadores: Maquinistas (M) e Inspectores (I). Tomó 30 trabajadores de cada grupo, obteniendo los siguientes resultados:

Grado de apoyo al paquete de demandas	**M**	**I**	**Total**
Apoyo fuerte	9	10	19
Apoyo leve	11	3	14
Indecisos	2	2	4
Levemente opuestos	4	8	12
Fuertemente opuestos	4	7	11
Total	**30**	**30**	**60**

a. Si se selecciona al azar a un trabajador del grupo sondeado,

i. ¿cuál es la probabilidad de que sea un maquinista?

La probabilidad de que sea un maquinista es P(M)=$\frac{30}{60}$=$\frac{1}{2}$=0,5.

ii. ¿cuál es la probabilidad de que esté indeciso?

La probabilidad de que esté indeciso es P(IND)=$\frac{4}{60}$=$\frac{1}{15}$.

iii. ¿qué es más probable que ocurra, que apoye el paquete o que se oponga a él?

Para contestar esta pregunta, debemos calcular la probabilidad de que apoye el paquete y, por otro lado, la probabilidad de que se oponga al paquete y luego ver cuál de las dos probabilidades es más grande. Entonces:

$P(AP)=P(AF)+P(AL)=\frac{19}{60}+\frac{14}{60}=\frac{33}{60}=\frac{11}{20}=0{,}55$

y

$P(OP)=P(LO)+P(FO)=\frac{12}{60}+\frac{11}{60}=\frac{23}{60}\cong 0{,}38$

Por lo tanto, es más probable que ocurra que apoye al paquete.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un maquinista, seleccionado al azar del grupo sondeado, apoye levemente al paquete? Interprete.

Para calcular la probabilidad de que un maquinista, seleccionado al azar del grupo sondeado, apoye levemente al paquete debemos calcular la probabilidad de que sea maquinista y que apoye levemente al paquete, esto es, hallamos la probabilidad de M∩AL, es decir:

$$P(M\cap AL)=\frac{11}{60}\cong 0{,}18$$

Lo que significa que es poco probable de que sea maquinista y apoye levemente al paquete.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un inspector, seleccionado al azar del grupo sondeado, esté fuertemente opuesto al paquete?

Para calcular la probabilidad de que un inspector, seleccionado al azar del grupo sondeado, esté fuertemente opuesto al paquete debemos calcular la probabilidad de que sea inspector y que esté fuertemente opuesto al paquete, esto es, hallamos la probabilidad de I∩FO, es decir:

$$P(I \cap FO) = \frac{7}{60} \cong 0{,}12$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un inspector, seleccionado al azar del grupo sondeado, está fuertemente opuesto al paquete es 0,12.

d. Si se selecciona al azar a un trabajador del grupo que apoya levemente el paquete, ¿cuál es la probabilidad de que sea un maquinista?

Dado que ya se seleccionó un trabajador del grupo que apoya levemente el paquete y debemos ver la probabilidad de que sea un maquinista entonces, lo que deberíamos calcular es la probabilidad condicional de que sea un maquinista dado que ya se seleccionó un trabajador del grupo que apoya levemente al paquete, es decir, debemos calcular:

$$P(M|AL) = \frac{P(M \cap AL)}{P(AL)} = \frac{\frac{11}{60}}{\frac{14}{60}} = \frac{11}{14} \cong 0{,}79$$

Por lo tanto, la probabilidad de que sea un maquinista es 0,79.

e. ¿Cambiarían si se tomara una nueva muestra de 30 trabajadores de cada grupo? ¿Por qué?

Si, cambiarían si se tomara una nueva muestra de 30 trabajadores de cada grupo porque las opiniones de cada individuo son distintas.

Actividad 11. Una pequeña presa hidroeléctrica tiene 4 compuertas que fallan y son reparadas de manera independiente una de la otra cuando se produce alguna falla. Por experiencia, se sabe que cada compuerta está fuera de servicio 4% de todo el tiempo.

E_1: "La compuerta 1 está fuera de servicio", $P(E_1)=\frac{4}{100}= 0{,}04$.

E_2: "La compuerta 2 está fuera de servicio", $P(E_2)=\frac{4}{100}= 0{,}04$.

E_3: "La compuerta 3 está fuera de servicio", $P(E_3)=\frac{4}{100}= 0{,}04$.

E_4: "La compuerta 4 está fuera de servicio", $P(E_4)=\frac{4}{100}= 0{,}04$.

E_1, E_2, E_3 y E_4 son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro compuertas estén fuera de servicio?

Para calcular la probabilidad de que las cuatro compuertas estén fuera de servicio, debemos calcular la probabilidad de que la compuerta 1 esté fuera de servicio y la compuerta 2 esté fuera de servicio y la compuerta 3 está fuera de servicio y la compuerta 4 esté fuera de servicio, esto es,

$$P(E_1\cap E_2\cap E_3\cap E_4) = P(E_1).\ P(E_2).\ P(E_3).\ P(E_4) = 0{,}04.\ 0{,}04.\ 0{,}04.\ 0{,}04 = (0{,}04)^4 = 0{,}00000256$$

En la primera igualdad, como cada evento es independiente, aplicamos propiedad de eventos independientes.

Por lo tanto, la probabilidad de que las cuatro compuertas estén fuera de servicio es 0,00000256.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro compuertas funcionen adecuadamente?

Si la compuerta 1 funciona adecuadamente, entonces definimos el evento como el complemento del E_1, esto es,

E_1^C: "La compuerta 1 funciona adecuadamente", $P(E_1^C) = 1-\frac{4}{100}= 1-0{,}04 = 0{,}96$. Por propiedad del complemento de una probabilidad.

De la misma manera para los otros eventos:

E_2^C: "La compuerta 2 funciona adecuadamente", $P(E_2^C) = 0{,}96$.

E_3^C: "La compuerta 3 funciona adecuadamente", $P(E_3^C) = 0{,}96$.

E_4^C: "La compuerta 4 funciona adecuadamente", $P(E_4^C) = 0{,}96$.

Entonces la probabilidad de que las cuatro compuertas funcionen adecuadamente está dada por:

$$P(E_1^C\cap E_2^C\cap E_3^C\cap E_4^C) = P(E_1^C).\ P(E_2^C).\ P(E_3^C).\ P(E_4^C) = 0{,}96.\ 0{,}96.\ 0{,}96.\ 0{,}96 = (0{,}96)^4 \cong 0{,}85.$$

En la primera igualdad, como cada evento es independiente, en este ejercicio, cada evento complementario es independiente, por tanto, aplicamos propiedad de eventos independientes.

c. Si la compuerta 1 está fuera de servicio, ¿cuál es la probabilidad de que las compuertas 2 y 3 también estén fuera de servicio?

Dado que ya se sabe que la compuerta 1 está fuera de servicio y debemos ver la probabilidad de que las compuertas 2 y 3 también estén fuera de servicio entonces, lo que deberíamos calcular es la probabilidad condicional de que las compuertas 2 y 3 también estén fuera de servicio dado que ya se sabe que la compuerta 1 está fuera de servicio, es decir, debemos calcular:

$$P(E_2 \cap E_3 | E_1) = P(E_2 \cap E_3) = P(E_2).\ P(E_3) = 0{,}04.\ 0{,}04 = (0{,}04)^2 = 0{,}0016.$$

La primera y segunda igualdades se deben a que los eventos son independientes, por tanto, aplicamos dos propiedades de eventos independientes dado en la teoría.

Así, la probabilidad de que las compuertas 2 y 3 también estén fuera de servicio es 0,0016.

Actividad 13. Un psicólogo escolar dispone de los datos de 10 niños de un colegio:

Niño	Sexo	Escolarización	CI
1	V	No	72
2	V	Sí	95
3	M	No	75
4	V	Sí	100
5	M	Sí	110
6	M	No	78
7	V	Sí	105
8	V	No	65
9	M	Sí	115
10	M	Sí	105

Se definen tres sucesos:

A: "El sujeto extraído es varón"

B: "El sujeto extraído está escolarizado"

C: "El sujeto extraído supera la media del grupo en CI"

Si se extrae un sujeto al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea varón?

La probabilidad de que sea varón es P(A)=$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ = 0,5.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que esté escolarizado?

La probabilidad de que esté escolarizado es P(B) = $\frac{6}{10}$ = 0,6.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que supere la media del grupo en CI?

Para calcular esta probabilidad, debemos calcular primero la media del grupo:

$$\overline{X} = \frac{72+95+75+100+110+78+105+65+115+105}{10} = 92$$

Entonces, hay 6 niños que superan la media del grupo en CI y 4 niños que no superan la media del grupo en CI. Por tanto, la probabilidad de que supere la media del grupo en CI es P(C) = $\frac{6}{10}$ = 0,6.

d. ¿Cuál es la probabilidad de que sea varón y esté escolarizado?

La probabilidad de que sea varón y esté escolarizado es $P(A \cap B) = \frac{3}{10}$ = 0,3.

e. ¿Cuál es la probabilidad de que sea varón y supere la media del grupo en CI?

La probabilidad de que sea varón y supere la media del grupo en CI es $P(A \cap C) = \frac{3}{10}$ = 0,3.

f. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y supere la media del grupo en CI?

La probabilidad de que sea mujer y supere la media del grupo en CI está dada por $P(A^c \cap C) = \frac{3}{10}$ = 0,3.

g. ¿Cuál es la probabilidad de que sea varón, esté escolarizado y supere la media del grupo en CI?

La probabilidad de que sea varón, esté escolarizado y supere la media del grupo en CI está dada por $P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{10}$ = 0,3.

h. Elabore la tabla de contingencia entre las variables sexo y escolarización.

	ESCOLARIZADO (B)	NO ESCOLARIZADO (B^C)	**TOTAL**
VARÓN (A)	3	2	**5**
MUJER (A^C)	3	2	**5**
TOTAL	**6**	**4**	**10**

Responda:

i. Dado que el sujeto extraído es un varón ¿Cuál es la probabilidad de que esté escolarizado?

La probabilidad de que esté escolarizado dado que el sujeto extraído es un varón es:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

ii. Dado que el sujeto extraído está escolarizado ¿Cuál es la probabilidad de que sea varón?

La probabilidad de que sea varón dado que el sujeto extraído está escolarizado es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

iii. Dado que el sujeto extraído es una mujer ¿Cuál es la probabilidad de que no esté escolarizada?

La probabilidad de que no esté escolarizado dado que el sujeto extraído es una mujer es:

$$P(B^C|A^C) = \frac{P(B^C \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Actividad 14. A un grupo de 100 sujetos se les pasa una prueba sobre “satisfacción con el estilo de vida” y otra sobre “depresión”. Los resultados indican que 40 sujetos superaron la media en satisfacción y 65 sujetos eran depresivos. Asimismo, dentro de los depresivos se encontró que sólo 10 obtenían puntuaciones superiores a la media en satisfacción.

Se definen dos sucesos: A: “Tener una puntuación superior a la media en satisfacción con el estilo de vida”

B: “Ser depresivo”

Tabla de contingencia:

	A	**A^C**	**TOTAL**
B	10	55	**65**
B^C	30	5	**35**
TOTAL	**40**	**60**	**100**

a. ¿Cuál es la probabilidad de que, al extraer un sujeto, sea depresivo?

La probabilidad de que, al extraer un sujeto, sea depresivo está dado por $P(B) = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$

b. ¿Son los sucesos A y B independientes?

Para ver si A y B son independientes debemos ver si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. Entonces, calculamos:

$P(A \cap B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ y $P(A).P(B) = \frac{40}{100} . \frac{65}{100} = \frac{2}{5} . \frac{13}{20} = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$.

Luego, $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$ por lo tanto, **los sucesos A y B NO son independientes**.

c. Si se ha seleccionado un sujeto que puntúa por encima de la media en satisfacción con el estilo de vida, ¿cuál es la probabilidad de que sea depresivo?

La probabilidad de que sea depresivo dado que se ha seleccionado un sujeto que puntúa por encima de la media en satisfacción con el estilo de vida, está dada por:

$$P(B|A)=\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

d. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos, A o B?

La probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos, A o B, es:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{40}{100} + \frac{65}{100} - \frac{10}{100} = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$.