Ejercicios resueltos del TP3. Parte 4.

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL:

Actividad 17. En una determinada ciudad, la cuota por contribuyente del impuesto municipal de automóviles sigue una distribución normal con media \$65 y desviación típica \$26.

X: "Cuota por contribuyente del impuesto municipal de automóviles".
$\mu = 65$
$\sigma = 26$
$X \sim N(65,26)$

a. ¿Qué porcentaje de contribuyentes paga una cuota comprendida entre \$26 y \$52?

a. En primer lugar, primero debemos calcular la probabilidad de que los contribuyentes paguen una cuota comprendida entre \$26 y \$52:

$P(26 \leq X \leq 52) = P\left(\frac{26-65}{26} \leq \frac{X-65}{26} \leq \frac{52-65}{26}\right) = P(-1.5 \leq Z \leq -0.5) = P(Z \leq -0.5) - P(Z \leq -1.5) =$

$= 0{,}3085 - 0.0668 = 0{,}2471.$

Cómo queremos ver el porcentaje debemos multiplicar esta probabilidad por 100, esto es, 0,2417.100=24,17%.

Por lo tanto, el porcentaje de contribuyentes que paga una cuota comprendida entre \$26 y \$52 es de **24,17%.**

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un contribuyente pague más de \$70 por el impuesto municipal?

b. $P(X > 70) = P\left(\frac{X-65}{26} > \frac{70-65}{26}\right) = P(Z > 0{,}19) = 1 - P(Z \leq 0{,}19) = 1 - 0{,}5753 = 0{,}4247$

Así, la probabilidad de que un contribuyente pague más de \$70 por el impuesto municipal es **0,4247**.

Actividad 18. La prueba WAIS es una prueba de inteligencia para adultos. La distribución de los resultados de esta prueba para personas mayores de 16 años es aproximadamente normal con media 100 y desviación típica de 15.

X: "Resultados de la prueba WAIS para personas mayores de 16 años"

μ = 100

σ = 15

$X \sim N(100,15)$

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo escogido al azar tenga un resultado de 105 o superior?

a. $P(X \geq 105) = P\left(\frac{X-100}{15} \geq \frac{105-100}{15}\right) = P(Z \geq 0{,}33) = 1 - P(Z < 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$

Por lo tanto, la probabilidad de que un individuo escogido al azar tenga un resultado de 105 o superior es **0,3707**.

b. ¿Qué porcentaje de personas tendrán resultados que varíen entre 90 y 110 puntos?

b. Para contestar esta pregunta, primero debemos calcular la probabilidad de que personas tengan resultados que varíen entre 90 y 110 puntos:

$$P(90 \leq X \leq 110) = P\left(\frac{90-100}{15} \leq \frac{X-100}{15} \leq \frac{110-90}{15}\right) = P(-0{,}66 \leq Z \leq 1{,}33)$$
$$= P(Z \leq 1{,}33) - P(Z \leq -0{,}66) = 0{,}7454 - 0{,}2545 = 0{,}4909$$

Ahora, calculamos el porcentaje: 0,4909.100 = 49,09%.

Entonces, el porcentaje de personas que tendrán resultados que varíen entre 90 y 110 puntos es **49,09%.**

Actividad 23. La variable extroversión se distribuye según el modelo normal con media 50 y desviación típica 10.

$X \sim N(50{,}10)$

Conteste a las siguientes preguntas:

a. Probabilidad de que los sujetos obtengan como mucho una puntuación de 35.

a. $P(X \leq 35) = P\left(\frac{X-50}{10} \leq \frac{35-50}{10}\right) = P(Z \leq -1.5) = 0{,}0668$

Por lo tanto, la probabilidad de que los sujetos obtengan como mucho una puntuación de 35 es **0,0668**.

b. Probabilidad de que los sujetos obtengan una puntuación mayor de 60 en extroversión.

b. $P(X > 60) = P\left(\frac{X-50}{10} > \frac{60-50}{10}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Así, la probabilidad de que los sujetos obtengan una puntuación mayor de 60 en extroversión es **0,1587**.

c. Calcular la puntuación en extroversión que deja por debajo de sí al 80% de los sujetos.

c. Para calcular la puntuación que deja por debajo de sí al 80% de los sujetos debemos plantear:

$$P(X \leq x) = 0{,}80$$

y encontrar el valor de *x*. Para ello, estandarizamos y calculamos con la tabla:

$$P(X \leq x) = 0{,}80 \rightarrow P\left(\frac{X-50}{10} \leq \frac{x-50}{10}\right) = 0{,}80 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-50}{10}\right) = 0{,}80$$

Luego, buscando en la tabla, el valor de $z = \frac{x-50}{10}$ para el cual la probabilidad da 0,80 obtenemos que:

$$0{,}85 = \frac{x-50}{10}$$

Despejamos *x* y obtenemos:

$$0{,}85.10 = x - 50$$
$$8{,}5 = x - 50$$
$$8{,}5 + 50 = x$$
$$58{,}5 = x$$

Por lo tanto, la puntuación en extroversión que deja por debajo de sí al 80% de los sujetos es **58,5**.

d. Probabilidad de observar un valor comprendido entre 42 y 59.

d. $P(42 \leq X \leq 59) = P\left(\frac{42-50}{10} \leq \frac{X-50}{10} \leq \frac{59-50}{10}\right) = P(-0{,}8 \leq Z \leq 0{,}9) = P(Z \leq 0{,}9) - P(Z \leq -0{,}8)$ = 0,8159 - 0,2119 = 0,604

Entonces, la probabilidad de observar un valor comprendido entre 42 y 59 es **0,604**.

e. Calcular los valores que acotan el 50% central de sujetos.

e. Para calcular los valores que acotan el 50% central de sujetos debemos calcular el valor que acota el 25% de sujetos y el valor que acota el 75% de sujetos. Entonces planteamos:

$$P(X \leq x_1) = 0{,}25$$

y

$$P(X \leq x_2) = 0{,}75$$

Hallamos los valores de x_1 y x_2 que me van a determinar los valores para los cuales se acotan el 50% central de sujetos. Entonces,

$$P(X \leq x_1) = 0{,}25 \rightarrow P\left(\frac{X-50}{10} \leq \frac{x_1-50}{10}\right) = 0{,}25 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{x_1-50}{10}\right) = 0{,}25$$

Luego, buscando en la tabla, el valor de $z_1 = \frac{x_1-50}{10}$ para el cual la probabilidad da 0,25 obtenemos que:

$$-0{,}67 = \frac{x_1-50}{10}$$

Despejamos x_1 y obtenemos:

$$-0{,}67.10 = x_1 - 50$$
$$-6{,}7 = x_1 - 50$$
$$-6{,}7 + 50 = x_1$$
$$43{,}3 = x_1$$

$$P(X \leq x_2) = 0{,}75 \rightarrow P\left(\frac{X-50}{10} \leq \frac{x_2-50}{10}\right) = 0{,}75 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{x_2-50}{10}\right) = 0{,}75$$

Luego, buscando en la tabla, el valor de $z_2 = \frac{x_2-50}{10}$ para el cual la probabilidad da 0,75 obtenemos que:

$$0{,}68 = \frac{x_2-50}{10}$$

Despejamos x_2 y obtenemos:

$$0{,}68.10 = x_2 - 50$$
$$6{,}8 = x_2 - 50$$
$$6{,}8 + 50 = x_2$$
$$56{,}8 = x_2$$

Así, los valores que acotan el 50% central de sujetos son **43,3** y **56,8**.

f. Si se extrae una muestra aleatoria de 25 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que su media aritmética sea mayor de 55?

f. $\bar{X}$ media aritmética.

n = 25

Entonces, $\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \sim N\left(50; \frac{10}{\sqrt{25}}\right) \sim N(50; 2)$. Por tanto, para calcular la probabilidad de que su media aritmética sea mayor de 55, planteamos:

$$P(\bar{X} > 55) = P\left(\frac{\bar{X}-50}{2} > \frac{55-50}{2}\right) = P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z \leq 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$

Así, la probabilidad de que su media aritmética sea mayor de 55 es **0,0062**.

Actividad 24. Un profesor ha calculado que el tiempo invertido por los estudiantes en hacer ejercicios sigue una distribución normal con media 150 minutos y una desviación estándar de 40 minutos.

X: “Tiempo invertido por los estudiantes en hacer ejercicios”

μ = 150 minutos

σ = 40 minutos

$X \sim N(150{,}40)$

a. ¿Cuántos minutos tarda un alumno si el 90% de sus compañeros tardan más que él?

a. Para hallar cuántos minutos tarda un alumno si el 90% de sus compañeros tardan más que él, planteamos:

$$P(X \leq x) = 0{,}10$$

y buscamos el valor de *x*. Para ello, estandarizamos y calculamos con la tabla:

$$P(X \leq x) = 0{,}10 \rightarrow P\left(\frac{X-150}{40} \leq \frac{x-150}{40}\right) = 0{,}10 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-150}{40}\right) = 0{,}10$$

Luego, hallando en la tabla, el valor de $z = \frac{x-150}{40}$ para el cual la probabilidad da 0,10 obtenemos que:

$$-1{,}28 = \frac{x-150}{40}$$

Despejamos *x* y obtenemos:

$$\begin{gathered} -1{,}28.40 = x - 150 \\ -51{,}2 = x - 150 \\ -51{,}2 + 150 = x \\ 98{,}8 = x \end{gathered}$$

Por lo tanto, un alumno tarda **98,8 minutos** si el 90% de sus compañeros tardan más que él.

b. ¿Cuántos minutos tarda un alumno si el 80% de sus compañeros tardan menos que él?

b. Para hallar cuántos minutos tarda un alumno si el 80% de sus compañeros tardan menos que él, planteamos:

$$P(X \leq x) = 0{,}80$$

y encontramos el valor de *x*. Para ello, estandarizamos y calculamos con la tabla:

$$P(X \leq x) = 0{,}80 \rightarrow P\left(\frac{X-150}{40} \leq \frac{x-150}{40}\right) = 0{,}80 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-150}{40}\right) = 0{,}80$$

Luego, buscando en la tabla, el valor de $z = \frac{x-150}{40}$ para el cual la probabilidad da 0,80 obtenemos que:

$$0{,}85 = \frac{x-150}{40}$$

Despejamos *x* y obtenemos:

$$0{,}85.40 = x - 150$$
$$34 = x - 150$$
$$34 + 150 = x$$
$$184 = x$$

Por lo tanto, un alumno tarda **184 minutos** si el 80% de sus compañeros tardan menos que él.

Actividad 25. Los puntos de un Test de Aptitud se describen según una normal con media 420 y desviación estándar de 80.
X: “Puntos de un Test de Aptitud”

$\mu = 420$

σ = 80

$X \sim N(420; 80)$

a. Se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que una puntuación esté entre 400 y 480?

a. $P(400 \leq X \leq 480) = P\left(\frac{400-420}{80} \leq \frac{X-420}{80} \leq \frac{480-420}{80}\right) = P(-0{,}25 \leq Z \leq 0{,}75) =$
$= P(Z \leq 0{,}75) - P(Z \leq -0{,}25) = 0{,}7734 - 0{,}4013 = 0{,}3721$
Por lo tanto, la probabilidad de que una puntuación esté entre 400 y 480 es **0,3721**.

b. ¿Cuál es la puntuación necesaria para estar entre el 10% mejor?

Para encontrar la puntuación necesaria para estar entre el 10% mejor, significa que debemos buscar el punto que te deje el 10% de los datos a la derecha y el 90% de los datos a la izquierda, es decir, hallar el percentil 90. Para ello, debemos plantear lo siguiente:

$$P(X \leq x) = 0{,}90$$

y encontrar el valor de *x*. Para ello, estandarizamos y calculamos con la tabla:

$$P(X \leq x) = 0{,}90 \rightarrow P\left(\frac{X-420}{80} \leq \frac{x-420}{80}\right) = 0{,}90 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-420}{80}\right) = 0{,}90$$

Luego, buscando en la tabla, el valor de $z = \frac{x-420}{80}$ para el cual la probabilidad da 0,90 obtenemos que:

$$1{,}29 = \frac{x-420}{80}$$

Despejamos *x* y obtenemos:

$$1{,}29.80 = x - 420$$
$$103{,}2 = x - 420$$
$$103{,}2 + 420 = x$$
$$523{,}2 = x$$

Así, la puntuación necesaria para estar entre el 10% mejor es **523,2**.

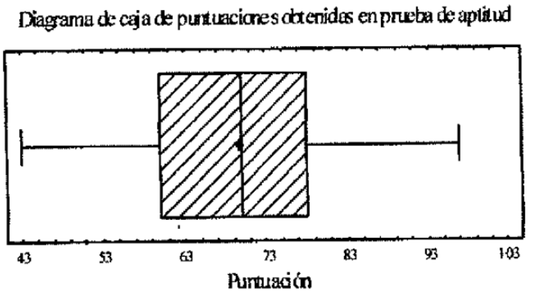
c. Sin hacer cálculos, determinar en cuál de los siguientes intervalos es más probable que esté la puntuación de una persona elegida al azar: [400,440] ó [440,480] ó [480,520] ó [520,560]. ¿Por qué?

c. Es más probable que esté en el intervalo [400,440] porque los datos están agrupados alrededor de la media que es 420.

Actividad 28. En un test de aptitud que se administró a 39 aspirantes a un cargo del Poder Judicial de la provincia de Santa Fe, se obtuvieron los resultados que se muestran a continuación en el diagrama de tallo y hojas y en el diagrama de caja. La escala de este test de aptitud va de 0 a 100 y se considera que a mayor valor dentro de la escala, mayor es la aptitud del aspirante con respecto al puesto que va a desempeñar. Ingresan aquellos aspirantes que obtienen un puntaje de 60 o más y sólo aquellos que obtienen un puntaje mayor a 75 pueden acceder a puestos de mayor jerarquía.

Diagrama de tallo y hojas

4|367
5|003899
6|0124577999
7|00113456788
8|234578
9|027



Media = 69,72 y desviación = 13,43

En base a la información descrita antes y a los diagramas, responde a las siguientes cuestiones:

a. ¿Sería adecuado afirmar que la distribución de las puntuaciones obtenidas por todos los aspirantes al Poder Judicial de la provincia de Santa Fe es aproximadamente normal? Justifica tu respuesta verificando **todas** las propiedades necesarias.

a. Si, es adecuado afirmar que la distribución de puntuaciones obtenidas por todos los aspirantes al Poder Judicial de la provincia de Santa Fe es aproximadamente normal.

ESTO LO JUSTIFICAN USTEDES CON LO APRENDIDO EN LAS UNIDADES 1, 2 Y 3.

b. En función de la conclusión dada en el ítem anterior, calcula la probabilidad de que un aspirante escogido al azar de la población de la que se tomó esta muestra tenga una puntuación mayor o igual a 80. Interpreta dicho resultado.

b. X: “Puntuaciones obtenidas en test de aptitud”. Variable continua.

$\mu = 69{,}72$

$\sigma = 13{,}43$

$X \sim N(69{,}72;\, 13{,}43)$

$$P(X \geq 80) = P\left(\frac{X - 69{,}72}{13{,}43} \geq \frac{80 - 69{,}72}{13{,}43}\right) = P(Z \geq 0{,}77) = 1 - P(Z < 0{,}77) = 1 - 0{,}7794 = 0{,}22$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un aspirante escogido al azar de la población de la que se tomó esta muestra tenga una puntuación mayor o igual a 80 es **0,22**. Esto significa que es **baja** la probabilidad de que un aspirante escogido al azar de la muestra tenga una puntuación mayor o igual a 80.

c. Para poder ingresar al Poder Judicial de la provincia de Santa Fe, ¿en qué percentil mínimo debería ubicarse un aspirante?

c. Ingresan aquellos aspirantes que obtienen un puntaje de 60 o más, entonces calculamos:

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X - 69{,}72}{13{,}43} \geq \frac{60 - 69{,}72}{13{,}43}\right) = P(Z \geq -0{,}72) = 1 - P(Z < -0{,}72) = 1 - 0{,}2358 = 0{,}76$$

Luego, multiplicando esta probabilidad por 100 obtenemos: 76%. Luego hacemos 100%-76%= 24%.
Así, el percentil mínimo que debería ubicarse un aspirante es el percentil 24, esto es, P_{24}.