OBJETIVO Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables por medio de la técnica de eliminación por adición o por sustitución (en el capítulo 6 se mostrarán otros métodos).

4.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas con dos variables

Cuando una situación debe describirse matemáticamente, no es raro que surja un *conjunto* de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que el administrador de una fábrica establece un plan de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 piezas del tipo I y 9 piezas del tipo II. El modelo B requiere de 5 piezas del tipo I y 14 piezas del tipo II. De sus proveedores, la fábrica obtiene 335 piezas del tipo I y 850 piezas del tipo II cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir cada día, de modo que todas las piezas del tipo I y piezas del tipo II sean utilizadas?

Es buena idea construir una tabla que resuma la información importante. La tabla 4.2 muestra el número de piezas del tipo I y piezas del tipo II requeridas para cada modelo, así como el número total disponible.

TABLA 4.2

	Modelo A	Modelo B	Total disponible
Piezas tipo I	4	5	335
Piezas tipo II	9	14	850

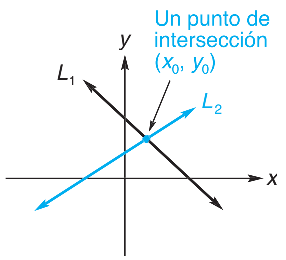


FIGURA 4.28 Sistema lineal (una solución).

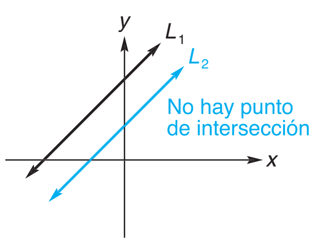


FIGURA 4.29 Sistema lineal (no hay solución).

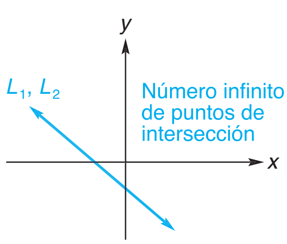


FIGURA 4.30 Sistema lineal (un número infinito de soluciones).

Suponga que hacemos x igual al número de artículos del modelo A fabricados cada día, y y igual al número de artículos del modelo B. Entonces éstos requieren de $4x + 5y$ piezas del tipo I y $9x + 14y$ piezas del tipo II. Como están disponibles 335 y 850 piezas del tipo I y II, respectivamente, tenemos

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & \textbf{(1)} \\ 9x + 14y = 850. & \textbf{(2)} \end{cases}$$

A este conjunto de ecuaciones le llamamos **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables (o incógnitas) x y y. El problema es encontrar valores de x y y para los cuales *ambas* ecuaciones sean verdaderas de manera *simultánea*. Estos valores se llaman *soluciones* del sistema.

Como las ecuaciones (1) y (2) son lineales, sus gráficas son líneas rectas; llamémoslas L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen la ecuación de esa línea; esto es, hacen a la ecuación verdadera. Por tanto, las coordenadas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Esto significa que un punto de intersección da una solución del sistema.

Si L_1 y L_2 se dibujan en el mismo plano, existen tres posibles situaciones:

1. L_1 y L_2 pueden intersecarse en exactamente un punto, digamos (x_0, y_0). (Véase la fig. 4.28). Por tanto, el sistema tiene la solución $x = x_0$ y $y = y_0$.
2. L_1 y L_2 pueden ser paralelas y no tener puntos en común (véase la fig. 4.29). En este caso no existe solución.
3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta (véase la fig. 4.30). Por tanto, las coordenadas de cualquier punto sobre la recta son una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.

Nuestro objetivo principal aquí es estudiar los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En esencia, remplazamos de manera sucesiva un sistema por otro que tenga la misma solución (esto es, remplazamos el sistema original por *sistemas equivalentes*), *pero cuyas ecuaciones tengan una forma progresivamente más adecuada para determinar la solución. En términos más precisos, buscamos un sistema equivalente que contenga una ecuación en la que una de las variables no aparezca* (*esto es, eliminar una de las variables*). Ilustraremos este procedimiento para el sistema propuesto originalmente:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & (3) \\ 9x + 14y = 850. & (4) \end{cases}$$

Para empezar, obtendremos un sistema equivalente en el que x no aparezca en una ecuación. Primero encontramos un sistema equivalente en el que los coeficientes de los términos en x en cada ecuación sean iguales excepto por el signo. Multiplicando la ecuación (3) por 9 [esto es, multiplicando ambos miembros de la ecuación (3) por 9] y multiplicando la ecuación (4) por -4 se obtiene

$$\begin{cases} 36x + 45y = 3015, & (5) \\ -36x - 56y = -3400. & (6) \end{cases}$$

Los miembros izquierdo y derecho de la ecuación (6) son iguales, de modo que cada miembro puede *sumarse* al correspondiente de la ecuación (5). Esto tiene como resultado

$$-11y = -385,$$

que sólo tiene una variable, como se planeó. Resolviéndola se obtiene

$$y = 35,$$

así obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 35, & (7) \\ -36x - 56y = -3400. & (8) \end{cases}$$

Al remplazar y en la ecuación (8) por 35, obtenemos

$$\begin{aligned} -36x - 56(35) &= -3400, \\ -36x - 1960 &= -3400, \\ -36x &= -1440, \\ x &= 40. \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = 35, \\ x = 40. \end{cases}$$

Podemos verificar nuestra respuesta sustituyendo $x = 40$ y $y = 35$ en *ambas* ecuaciones originales. En la ecuación (3) obtenemos $4(40 + 5(35) = 335$, o $335 = 335$. En la ecuación (4) obtenemos $9(40) + 14(35) = 850$, o bien, $850 = 850$. Por tanto, la solución es

$$x = 40 \quad \text{y} \quad y = 35.$$

Cada día el administrador debe planear la fabricación de 40 productos del modelo A y 35 del modelo B. El procedimiento efectuado se conoce como **eliminación por adición.** Aunque elegimos eliminar primero x, pudimos haber hecho lo mismo para y, mediante un procedimiento similar.

Principios en práctica 1

Método de eliminación por adición

Un especialista en computadoras tiene invertidos $200,000 para su retiro, parte al 9% y parte al 8%. Si el ingreso anual total por las inversiones es de $17,200, ¿cuánto está invertido en cada tasa?

EJEMPLO 1 Método de eliminación por adición

Utilizar eliminación por adición para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 3y + 2x = 3. \end{cases}$$

Solución: por conveniencia alineamos los términos en x y en y para obtener

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (9) \\ 2x + 3y = 3. & (10) \end{cases}$$

Para eliminar y, multiplicamos la ecuación (9) por 3 y la ecuación (10) por 4:

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (11) \\ 8x + 12y = 12. & (12) \end{cases}$$

Sumando la ecuación (11) a la (12) se obtiene $17x = 51$, de la cual $x = 3$. Tenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (13) \\ x = 3. & (14) \end{cases}$$

Al remplazar x por 3 en la ecuación (13) se obtiene

$$\begin{aligned} 9(3) - 12y &= 39, \\ -12y &= 12, \\ y &= -1, \end{aligned}$$

de modo que el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = -1, \\ x = 3. \end{cases}$$

La solución es $x = 3$ y $y = -1$. La figura 4.31 muestra una gráfica del sistema.

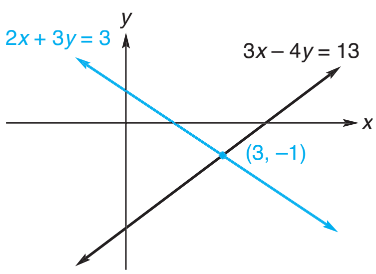


FIGURA 4.31 Sistema lineal del ejemplo 1; una solución.

El sistema del ejemplo 1,

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (15) \\ 2x + 3y = 3, & (16) \end{cases}$$

puede resolverse de otra manera. Primero elegimos una de las ecuaciones, por ejemplo, la ecuación (15), y despejamos una de las incógnitas en términos de la otra, digamos x en términos de y. Así la ecuación (15) es equivalente a $3x = 4y + 13$, o

$$x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3},$$

y obtenemos

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3}, & (17) \\ 2x + 3y = 3. & (18) \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x de la ecuación (17) en la ecuación (18) se obtiene

$$2\left(\frac{4}{3}y + \frac{13}{3}\right) + 3y = 3. \qquad (19)$$

De este modo ya eliminamos x. Resolviendo la ecuación (19), tenemos

$$\frac{8}{3}y + \frac{26}{3} + 3y = 3,$$

$$8y + 26 + 9y = 9 \qquad \text{(eliminando fracciones),}$$

$$17y = -17,$$

$$y = -1.$$

Al remplazar y en la ecuación (17) por -1, se obtiene $x = 3$, y el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -1, \end{cases}$$

como vimos antes, este método se llama **eliminación por sustitución.**

Principios en práctica 2

Método de eliminación por sustitución

A dos especies de ciervos, A y B, que viven en un refugio de vida salvaje se les da alimento extra en invierno. Cada semana reciben 2 toneladas de alimento en forma de croqueta y 4.75 toneladas de heno. Cada ciervo de la especie A requiere 4 libras de croquetas y 5 libras de heno. Cada ciervo de la especie B requiere 2 libras de las croquetas y 7 libras de heno. ¿Cuántos ciervos de cada especie se podrán sustentar con el alimento, de modo que todo el alimento se consuma cada semana?

EJEMPLO 2 Método de eliminación por sustitución

Utilizar eliminación por sustitución para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0, \\ 2x + 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Solución: es fácil resolver la primera ecuación para x. Esto da el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & (20) \\ 2x + 4y + 4 = 0. & (21) \end{cases}$$

Al sustituir $-2y + 8$ por x en la ecuación (21) se obtiene

$$2(-2y + 8) + 4y + 4 = 0,$$

$$-4y + 16 + 4y + 4 = 0.$$

Esta última ecuación se simplifica a $20 = 0$. Por tanto, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & (22) \\ 20 = 0. & (23) \end{cases}$$

Ya que le ecuación (23) *nunca* es verdadera, **no existe solución** para el sistema original. La razón es clara si observamos que las ecuaciones originales pueden escribirse en la forma pendiente-ordenada al origen como

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

y

$$y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Estas ecuaciones representan líneas rectas que tienen pendientes de $-\frac{1}{2}$, pero diferentes intersecciones y, 4 y -1. Esto es, especifican rectas paralelas diferentes (véase la fig. 4.32).

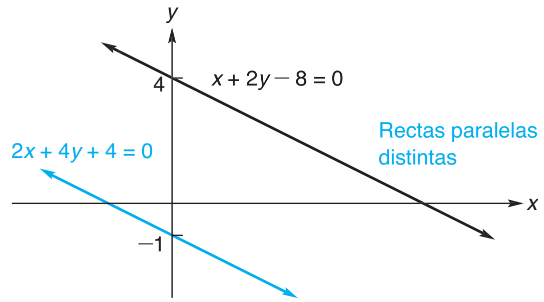


FIGURA 4.32 Sistema lineal del ejemplo 2; no hay solución.

▪ ***Principios en práctica 3***

Un sistema lineal con un número infinito de soluciones

Dos especies de peces, A y B, están criándose en una granja piscícola, en donde se les alimenta con dos suplementos vitamínicos. Todos los días reciben 100 gramos del primer suplemento y 200 gramos del segundo suplemento. Cada pez de la especie A requiere 15 mg del primer suplemento y 30 mg del segundo suplemento. Cada pez de la especie B requiere 20 mg del primer suplemento y 40 mg del segundo suplemento. ¿Cuántos peces de cada especie puede sustentar la granja de modo que todos los suplementos se consuman cada día?

EJEMPLO 3 Un sistema lineal con un número infinito de soluciones

Resolver

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(24)} \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y = 1. & \textbf{(25)} \end{cases}$$

Solución: empezamos eliminando x de la segunda ecuación. Multiplicando la ecuación (25) por -2, tenemos

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(26)} \\ -x - 5y = -2. & \textbf{(27)} \end{cases}$$

Sumando la ecuación (26) a la (27) se obtiene

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(28)} \\ 0 = 0. & \textbf{(29)} \end{cases}$$

Puesto que la ecuación (29) *siempre* es cierta, cualquier solución de la ecuación (28) es una solución del sistema. Ahora veamos cómo podemos expresar nuestra respuesta. De la ecuación (28) tenemos $x = 2 - 5y$, donde y puede ser cualquier número real, digamos r. Por tanto, podemos escribir $x = 2 - 5r$. La solución completa es

$$x = 2 - 5r,$$
$$y = r,$$

donde r es cualquier número real. En esta situación, r se denomina un **parámetro,** y decimos que tenemos una familia de soluciones con un parámetro. Cada valor de r determina una solución particular. Por ejemplo, si $r = 0$, entonces $x = 2$ y $y = 0$, es una solución; si $r = 5$, entonces $x = -23$ y $y = 5$ es otra solución. Es claro que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Es útil notar que al escribir las ecuaciones (24) y (25) en sus formas pendientes-intersección al origen, obtener ıos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \end{cases}$$

en el que ambas ecuaciones representan a la misma recta. De aquí que las rectas coincidan (véase la fig. 4.33) y las ecuaciones (24) y (25) sean equivalentes. La solución al sistema consiste en las parejas de coordenadas de todos los puntos sobre la recta $x + 5y = 2$, puntos que están dados por nuestra solución paramétrica.

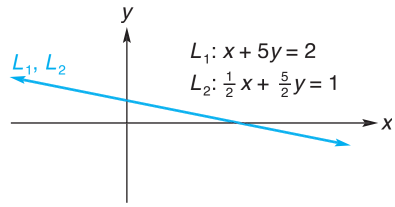


FIGURA 4.33 Sistema lineal del ejemplo 3; un número infinito de soluciones.

Tecnología

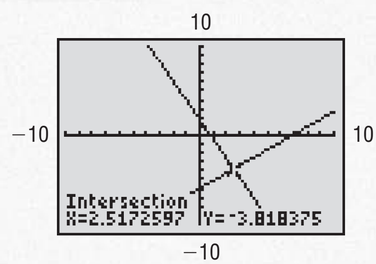


FIGURA 4.34 Solución gráfica del sistema.

Resolver de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 9x + 4.1y = 7, \\ 2.6x - 3y = 18. \end{cases}$$

Solución: primero resolvemos cada ecuación para y de modo que cada ecuación tenga la forma $y = f(x)$.

$$y = \frac{1}{4.1}(7 - 9x),$$

$$y = -\frac{1}{3}(18 - 2.6x).$$

Ahora introducimos estas funciones como Y_1 y Y_2, y las desplegamos sobre el mismo rectángulo de visualización (véase la fig. 4.34). Por último, ya sea utilizando la característica de trazado y acercamiento, o bien, la de intersección, estimamos la solución como $x = 2.52$ $y = -3.82$.

EJEMPLO 4 Mezcla

Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 litros de solución de ácido al 25% (25% del volumen es ácido). Si en existencia hay disponibles soluciones al 30% y al 18%, ¿cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?

Solución: sean x y y, respectivamente, el número de litros de las soluciones al 30% y 18% que deben mezclarse. Entonces

$$x + y = 500.$$

Para ayudar a visualizar la situación, dibujamos el diagrama en la figura 4.35. En 500 litros de una solución al 25%, habrá $0.25(500) = 125$ litros de ácido. Este ácido proviene de dos fuentes: $0.30x$ litros de la solución al 30% y $0.18y$ litros provienen de la solución al 18%. De aquí que,

$$0.30x + 0.18y = 125.$$

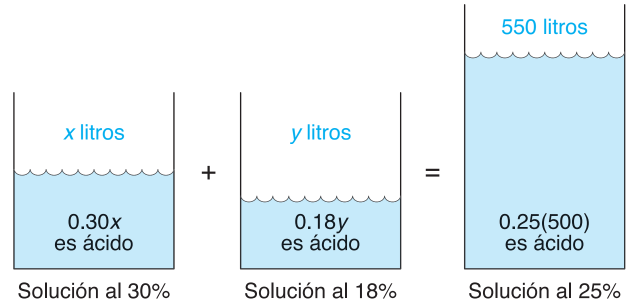


FIGURA 4.35 Problema de la mezcla.

Estas dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si resolvemos la primera para x obtenemos $x = 500 - y$. Sustituyendo en la segunda se obtiene

$$0.30(500 - y) + 0.18y = 125.$$

Resolviendo ésta para y, encontramos que $y = 208\frac{1}{3}$ litros. Así $x = 500 - 208\frac{1}{3} = 291\frac{2}{3}$ litros (véase la fig. 4.36).

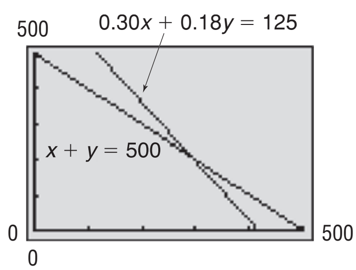


FIGURA 4.36 Gráfica para el ejemplo 4.

Sistemas con tres variables

Los métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables también pueden utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables. Una **ecuación lineal general con tres variables *x*, *y* y *z*** es una ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + Cz = D,$$

donde A, B, C y D son constantes y A, B y C no son todas cero. Por ejemplo, $2x - 4y + z = 2$ es una de tales ecuaciones. Una ecuación lineal general con tres variables representa geométricamente un *plano* en el espacio, y una solución al sistema de tales ecuaciones es la intersección de los planos. El ejemplo 5 muestra cómo resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

Principios en práctica 4
Resolución de un sistema lineal de tres variables

Una cafetería se especializa en mezclas de café. Con base en café de tipo A, tipo B y tipo C, el dueño quiere preparar una mezcla que venderá en \$8.50 por una bolsa de una libra. El costo por libra de estos cafés es de \$12, \$9 y \$7, respectivamente. La cantidad del tipo B debe ser el doble de la cantidad del tipo A. ¿Cuánto café de cada tipo estará en la mezcla final?

EJEMPLO 5 Resolución de un sistema lineal con tres variables

Resolver

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3, & (30)\\ -x + 2y + 2z = 1, & (31)\\ x - y - 3z = -6. & (32)\end{cases}$$

Solución: este sistema está constituido por tres ecuaciones lineales con tres variables. De la ecuación (32), $x = y + 3z - 6$. Sustituyendo este valor para x en las ecuaciones (30) y (31), obtenemos

$$\begin{cases} 2(y + 3z - 6) + y + z = 3,\\ -(y + 3z - 6) + 2y + 2z = 1,\\ x = y + 3z - 6.\end{cases}$$

Simplificando, se obtiene

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & \textbf{(33)} \\ y - z = -5, & \textbf{(34)} \\ x = y + 3z - 6. & \textbf{(35)} \end{cases}$$

Observe que x no aparece en las ecuaciones (33) y (34). Puesto que cualquier solución del sistema original debe satisfacer las ecuaciones (33) y (34), primero debemos considerar su solución:

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & \textbf{(33)} \\ y - z = -5. & \textbf{(34)} \end{cases}$$

De la ecuación (34), $y = z - 5$. Esto significa que podemos remplazar la ecuación (33) por

$$3(z - 5) + 7z = 15, \quad \text{o} \quad z = 3.$$

Como z es 3, podemos remplazar la ecuación (34) por $y = -2$. De aquí que el sistema anterior sea equivalente a

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

El sistema original se transforma en

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2, \\ x = y + 3z - 6, \end{cases}$$

de lo cual $x = 1$. La solución es $x = 1$, $y = -2$, y $z = 3$, que usted puede verificar.

■

Al igual que un sistema de dos variables puede tener una familia de soluciones con un parámetro, un sistema con tres variables puede tener una familia de soluciones con uno o dos parámetros.[6] Los dos ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 6 Familia de soluciones con un parámetro

Resolver

$$\begin{cases} x - 2y = 4, & \textbf{(35)} \\ 2x - 3y + 2z = -2, & \textbf{(36)} \\ 4x - 7y + 2z = 6. & \textbf{(37)} \end{cases}$$

Solución: observe que, ya que la ecuación (35) puede escribirse como $x - 2y + 0z = 4$, podemos considerar a las ecuaciones (35) a (37) como un sistema de tres ecuaciones lineales en las variables x, y y z. De la ecuación (35) tenemos $x = 2y + 4$. Podemos emplear esta ecuación y el método de sustitución para eliminar x de las ecuaciones (36) y (37):

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ 2(2y + 4) - 3y + 2z = -2, \\ 4(2y + 4) - 7y + 2z = 6. \end{cases}$$

[6]Nota para el profesor: los ejemplos 6 y 7 pueden omitirse sin pérdida de continuidad.

O de manera más sencilla,

$$\begin{cases} x = 2y + 4, & (38) \\ y + 2z = -10, & (39) \\ y + 2z = -10. & (40) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (40) por -1 se obtiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ y + 2z = -10, \\ -y - 2z = 10. \end{cases}$$

Sumando la segunda ecuación a la tercera se obtiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ y + 2z = -10, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Como la ecuación $0 = 0$ siempre es verdadera, en esencia podemos tratar con el sistema

$$\begin{cases} x = 2y + 4, & (41) \\ y + 2z = -10. & (42) \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación (42) para y, tenemos

$$y = -10 - 2z,$$

que expresa a y en términos de z. También podemos expresar a x en términos de z. De la ecuación (41),

$$\begin{aligned} x &= 2y + 4 \\ &= 2(-10 - 2z) + 4 \\ &= -16 - 4z. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{cases} x = -16 - 4z, \\ y = -10 - 2z. \end{cases}$$

Como no hay restricciones sobre z, esto sugiere una familia de soluciones paramétricas. Haciendo $z = r$, tenemos la familia de soluciones siguiente para el sistema dado:

$$\begin{aligned} x &= -16 - 4r, \\ y &= -10 - 2r, \\ z &= r, \end{aligned}$$

Son posibles otras representaciones paramétricas de la solución.

donde r puede ser cualquier número real. Entonces, vemos que el sistema dado tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, haciendo $r = 1$ se obtiene la solución particular $x = -20$, $y = -12$ y $z = 1$.

EJEMPLO 7 Familia de soluciones con dos parámetros

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 2x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$$

Solución: éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables. Eliminaremos x de la segunda ecuación multiplicándola primero por $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ -x - 2y - z = -4. \end{cases}$$

Sumando la primera ecuación a la segunda se obtiene

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación, obtenemos

$$x = 4 - 2y - z.$$

Como no existe restricción sobre y o z, éstos pueden ser números reales arbitrarios, lo que nos da una familia de soluciones con dos parámetros. Haciendo $y = r$ y $z = s$, encontramos que la solución del sistema es

$$x = 4 - 2r - s,$$

$$y = r,$$

$$z = s,$$

donde r y s pueden ser cualesquiera números reales. Cada asignación de valores a r y a s da una solución del sistema, de modo que existe un número infinito de soluciones. Por ejemplo, haciendo $r = 1$ y $s = 2$ se obtiene la solución particular $x = 0$, $y = 1$ y $z = 2$.

Ejercicio 4.4

En los problemas del 1 al 24 resuelva algebraicamente los sistemas.

1. $\begin{cases} x + 4y = 3, \\ 3x - 2y = -5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 2y = 9, \\ 5y - 4x = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -x + 2y = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5v + 2w = 36, \\ 8v - 3w = -54. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -p - q = -3, \\ 3p + 2q = 19. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y = -7, \\ 5x + 3y = -9. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ 5x + 9y = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 3x - 7y, \\ x + 5y - 2 = y + 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6, \\ \frac{21}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2, \\ \frac{3}{8}x + \frac{5}{6}y = -\frac{11}{2}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}w = \frac{1}{6}, \\ z + \frac{1}{2}w = \frac{2}{3}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4p + 12q = 6, \\ 2p + 6q = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ -10x + 6y = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + y + 6z = 3, \\ x - y + 4z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 3x + y + z = 1, \\ 4x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x - 7y + 4z = 2, \\ 3x + 2y - 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ -2x + y - 3z = 15, \\ \frac{3}{2}x + \frac{4}{5}y + 4z = 10. \end{cases}$

[7]**19.** $\begin{cases} x - 2z = 1, \\ y + z = 3. \end{cases}$

[7]**20.** $\begin{cases} 2y + 3z = 1, \\ 3x - 4z = 0. \end{cases}$

[7]**21.** $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

[7]**22.** $\begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x - 4y - 2z = 0, \\ -x + 2y + z = 0. \end{cases}$

[7]**23.** $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3, \\ 4x + 4y - 2z = 6. \end{cases}$

[7]**24.** $\begin{cases} x + 2y - 3z = -4, \\ 2x + y - 3z = 4. \end{cases}$

[7]Hace referencia a los conceptos de los ejemplos 6 y 7.

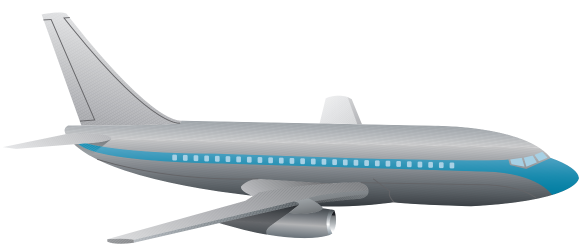
25. Mezcla Un fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 700 galones de una solución de ácido al 24%. En existencia tiene soluciones al 20% y 30%. ¿Cuántos galones de cada solución debe mezclar para surtir el pedido?

26. Mezcla Un jardinero tiene dos fertilizantes que contienen diferentes concentraciones de nitrógeno. Uno tiene 3% de nitrógeno y el otro tiene 11% de nitrógeno. ¿Cuántas libras de cada fertilizante debe mezclar para obtener 20 libras con una concentración de 9%?

27. Tejidos Una fábrica de tejidos produce un tejido hecho a partir de diferentes fibras. Con base en algodón, poliéster y nylon, el propietario necesita producir un tejido combinado que cueste \$3.25 por libra fabricada. El costo por libra de estas fibras es de \$4.00, \$3.00 y \$2.00, respectivamente. La cantidad de nylon debe ser la misma que la cantidad de poliéster. ¿Cuánto de cada fibra debe tener el tejido final?

28. Impuesto Una compañía tiene ingresos gravables por \$312,000. El impuesto federal es el 25% de la parte que queda después que el impuesto estatal ha sido pagado. El impuesto estatal es un 10% de la parte que queda después que el federal ha sido pagado. Encuentre los impuestos federal y estatal.

29. Velocidad de un aeroplano Un aeroplano recorre 900 millas en 3 horas con viento a favor. Le toma 3 horas 36 minutos el viaje de regreso volando en contra del viento. Encuentre la velocidad del aeroplano sin viento, calcule también la velocidad del viento.

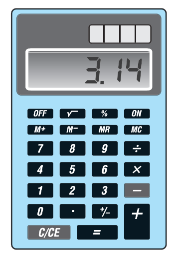


30. Velocidad de una balsa En un viaje en balsa tomó $\frac{3}{4}$ de hora recorrer 12 millas río abajo. El viaje de regreso tomó $1\frac{1}{2}$ horas. Encuentre la velocidad de la balsa con el agua en calma, y calcule la velocidad de la corriente.

31. Venta de muebles Un fabricante de comedores produce dos estilos, Early American y Contemporáneo. Por su experiencia, el administrador ha determinado que pueden venderse 20% más comedores Early American que Contemporáneo. En cada venta de un Early American hay una utilidad de \$250, mientras que se gana \$350 en cada Contemporáneo. Si en el año próximo, el administrador desea una ganancia total de \$130,000, ¿cuántas unidades de cada estilo deben venderse?

32. Encuesta A Encuestas Nacionales se le concedió un contrato para realizar una encuesta de preferencia de producto para Crispy Crackers. Un total de 250 personas fueron entrevistadas. Encuestas Nacionales reportó que a 62.5% más de las personas les gustaba Crispy Crakers que a las que no les gustaba. Sin embargo, el reporte no indicó que el 16% de las personas entrevistadas no habían contestado. ¿A cuántas de las personas entrevistadas les gustó Crispy Crakers? ¿A cuántas no? ¿Cuántas no contestaron?

33. Costo de igualación Productos Unidos, S. A., fabrica calculadoras y tiene plantas en las ciudades de Exton y Whyton. En la planta de Exton, los costos fijos son de \$7000 por mes, y el costo de producir cada calculadora es de \$7.50. En la planta de Whyton, los costos fijos son de \$8800 por mes y cada calculadora cuesta \$6 producirla. Si el mes siguiente, Productos Unidos debe producir 1500 calculadoras, ¿cuántas debe producir cada planta si el costo total en cada una debe ser el mismo?



34. Mezcla de café Un comerciante de café mezcla tres tipos de café que cuestan \$2.20, \$2.30 y \$2.60 por libra, para obtener 100 lb de café que vende a \$2.40 por libra. Si utiliza la misma cantidad de los dos cafés más caros, ¿cuánto de cada tipo debe utilizar en la mezcla?

35. Comisiones Una compañía paga a sus agentes de ventas con base en un porcentaje de los primeros \$100,000 en ventas, más otro porcentaje sobre cualquier cantidad que rebase esos \$100,000. Si un agente recibió \$8500 por ventas de \$175,000, y otro recibió \$14,800 por ventas de \$280,000, encuentre los dos porcentajes.

36. Utilidades anuales En reportes financieros, las utilidades de una compañía en el año actual (T) con frecuencia son comparadas con las del año anterior (L), pero los valores reales de T y L no siempre son dados. Este año una compañía tuvo una utilidad de \$20 millones más que el año pasado. Las utilidades fueron 25% mayores. A partir de estos datos determine T y L.

37. Producción La compañía Controles Universales fabrica unidades de control. Sus modelos nuevos son el Argón I y el Argón II. Para fabricar cada unidad de Argón I, usan 6 medidores y 3 controladores. Para fabricar cada unidad de Argón II, usan 10 medidores y 8 controladores. La compañía recibe un total de 760 medidores y 500 controladores diarios de sus proveedores. ¿Cuántas unidades de cada modelo puede producir diariamente? Suponga que se utilizan todas las partes.

38. Inversiones Una persona tiene dos inversiones y el porcentaje de ganancia por año en cada una de ellas es el mismo. Del total de la cantidad invertida $\frac{3}{10}$ de ella más \$600 se invirtieron en una empresa de riesgo, y al final de un año la persona recibió un rendimiento de \$384 de esa empresa. Si el rendimiento total después de un año fue de \$1120, encuentre la cantidad total invertida.

39. Producción Una compañía produce tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla siguiente. La compañía tiene en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, la compañía quiere utilizar todas sus existencias. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón reclinable	1 unidad	2 unidades	5 unidades

40. Inversiones Un total de \$35,000 se invirtieron a tres tasas de interés: 7, 8 y 9%. El interés en el primer año fue de \$2830, que no se reinvirtió. El segundo año la cantidad originalmente invertida al 9% devengó un 10%, y las otras tasas permanecieron iguales. El interés total en el segundo año fue de \$2960. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

41. Contratación de trabajadores Una compañía paga a sus trabajadores calificados \$15 por hora en su departamento de ensamblado. Los trabajadores semicalificados en ese departamento ganan \$9 por hora. A los empleados de envíos se les paga \$10 por hora. A causa de un incremento en los pedidos, la compañía necesita contratar un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamblado y envíos. Pagará un total de \$760 por hora a estos empleados. A causa de un contrato con el sindicato, deben emplearse el doble de trabajadores semicalificados que de trabajadores calificados. ¿Cuántos trabajadores semicalificados, calificados y empleados de envíos debe contratar la compañía?

42. Almacenamiento de un disolvente Un tanque de ferrocarril de 10,000 galones se llenará con disolvente de dos tanques de almacenamiento, A y B. El disolvente de A se bombea a una velocidad de 20 gal/min. El disolvente B se bombea a una velocidad de 30 gal/min. En general, ambas bombas operan al mismo tiempo. Sin embargo, a causa de un fusible fundido la bomba en A estuvo sin funcionar 10 minutos. ¿Cuántos galones de cada tanque de almacenamiento se utilizarán para llenar el tanque del ferrocarril?

43. Verifique su respuesta al problema 1 utilizando su calculadora gráfica.

44. Verifique su respuesta al problema 11 utilizando su calculadora gráfica.

45. Resuelva de manera gráfica el sistema.

$$\begin{cases} 0.24x - 0.34y = 0.04, \\ 0.11x + 0.21y = 0.75. \end{cases}$$

46. Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} x + \quad y = 2, \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}y = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a dos decimales.

47. Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 0.5736x - 0.3420y = 0, \\ 0.8192x + 0.9397y = 20. \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a un decimal.

OBJETIVO Utilizar la sustitución para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

4.5 SISTEMAS NO LINEALES

Un sistema de ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal se llama **sistema no lineal.** Con frecuencia podemos resolver un sistema no lineal por sustitución, como se hizo con los sistemas lineales. Los ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema no lineal

Resolver

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y - 7 = 0, & (1) \\ 3x - y + 1 = 0. & (2) \end{cases}$$