El razonamiento matemático

Antes de comenzar a leer este libro, es necesario saber algo que será fundamental para la comprensión de cualquier texto matemático, así como también para lograr resolver los ejercicios en forma correcta: **el razonamiento utilizado en la matemática no es diferente al utilizado en la vida cotidiana**. Esto significa que para poder determinar (y demostrar) si un enunciado matemático es verdadero o falso, debe razonarse de la misma forma en que se lo hace para decidir si algo de la vida cotidiana es cierto o no.

La única diferencia es que no toda afirmación de la vida cotidiana es verdadera o falsa, pues depende del gusto o estado de ánimo de cada persona, entre otras cosas. Por ejemplo, este es el caso de las siguientes afirmaciones:

- ¡Qué frío hace!
- El rojo es el color más lindo.

En matemática, en cambio, se trabaja con oraciones que son enunciados. Un **enunciado** o **proposición** es una oración que admite uno y solo un valor de verdad: verdadero o falso. Es decir, las dos afirmaciones en la lista anterior *no* son enunciados, pero las siguientes *sí* lo son:

(a) El Sol es una estrella.

(b) Todas las personas tienen cabello color negro.

(c) Existen personas con cabello color negro.

Sin embargo, si en un debate con otra persona debemos defender o justificar nuestra respuesta sobre la veracidad o falsedad de cada una, será necesario usar argumentos correctos.

Para justificar la veracidad o falsedad de un enunciado, se debe dar una **demostración**. Las demostraciones tienen diversas formas, dependiendo del enunciado que se quiera probar: la falsedad de algunos enunciados puede demostrarse dando un **contraejemplo**, es decir, un ejemplo para el cual el enunciado no se cumpla, mientras que en ciertos casos bastará con un **ejemplo** para demostrar

Se agradece a la Dra. Manuela Busaniche por los comentarios y sugerencias sobre esta sección.

que el enunciado es verdadero. Nos encontraremos también con enunciados cuyo valor de verdad no podrá demostrarse ni con ejemplos ni con contraejemplos.

Para comprender lo anterior, volvamos a nuestra lista de enunciados. Si queremos demostrar que la afirmación (a) es **verdadera**, basta con buscar la definición de estrella, la cual, en forma breve, es la siguiente:

Estrella: Cuerpo celeste que emite radiación luminosa, calorífica, etc., producida por reacciones termonucleares.

Puesto que el Sol cumple con todos los requisitos de esta definición, esto demuestra que es una estrella. Es decir, el Sol satisface todas las propiedades involucradas en la definición de estrella, lo que prueba que lo es.

Ahora, si queremos demostrar que la afirmación (b) es **falsa**, es suficiente con indicar una sola persona que no tenga el cabello color negro (que sea falsa no significa que *ninguna* persona tiene cabello negro, sino que existe al menos una que no lo tiene. Parece obvia esta aclaración, pero a veces suele olvidarse esta lógica cuando se intenta argumentar sobre un enunciado matemático). En este caso, la persona indicada es nuestro "contraejemplo".

Finalmente, para probar que (c) es **verdadera**, será suficiente con indicar una persona con cabello negro (será nuestro "ejemplo"). Notar que esta misma persona serviría para demostrar que la siguiente afirmación es **falsa**:

No existen personas con cabello color negro.

Con lo anterior queda probado que **no** existe una receta de cómo demostrar la veracidad o falsedad de un enunciado, sino que dependerá de la forma en la que el mismo esté expresado. Será necesario razonar de manera lógica en cada caso, para determinar si se necesita dar una demostración mediante propiedades, un contraejemplo o un ejemplo, independientemente de que la afirmación sea verdadera o falsa.

Sin embargo, aunque no abordaremos aquí la teoría de demostraciones, es importante señalar algunas de las formas **incorrectas** que aparecen frecuentemente al momento de intentar probar la validez de algunas afirmaciones. Por ejemplo, si alguien afirma que:

Todas las personas de la ciudad de Santa Fe tienen cabello color negro,

no alcanzará con exponer ni una, ni dos, ni 500 personas con cabello de color negro, pues esas no son *todas* las personas sobre las cuales se está realizando la afirmación. Exhibir varios ejemplos en un conjunto de objetos satisfaciendo una propiedad, aunque sean muchos, no alcanza para demostrar que dicha propiedad vale para todo el conjunto. De hecho, aunque se exhiban miles de personas de la ciudad con cabello negro, bastará con encontrar una sola persona que no lo tenga para demostrar que es falsa.

En otras palabras, para demostrar que cierta propiedad vale para **todo** elemento en un cierto conjunto, no basta con chequear que valga para algunos, sino que habrá que verificar que vale para **todos los casos posibles**. Esto puede ser tedioso si estamos hablando de una cantidad elevada de elementos, y requerirá métodos específicos si se trata de una cantidad infinita de ellos. Esta situación es muy frecuente en las afirmaciones matemáticas, en las que las propiedades se enuncian, por ejemplo, para todos los números naturales o reales. En tal caso, cualquier cantidad de ejemplos que se presenten para demostrar la validez de la propiedad, no será suficiente, pues hay infinitos posibles. Sin embargo, un solo ejemplo resultará suficiente para demostrar su falsedad. Para ilustrar esto consideremos los dos enunciados matemáticos siguientes, sobre los cuales indicamos si son verdaderos o falsos:

(1) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, para todo par de números reales a y b. F

(2) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, para todo par de números reales a y b. V

? ¿Cómo podemos demostrar que (1) es falsa? En este caso, usando la misma lógica que en un debate sobre enunciados no matemáticos, bastará con exponer valores para los cuales la afirmación no se cumple, es decir, un par de números reales a y b tales que $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$. Por ejemplo, podemos tomar $a = 1$ y $b = 2$ para obtener, por un lado, $(a+b)^2 = 3^2 = 9$ y, por el otro, $a^2 + b^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Es claro que $9 \neq 5$, por lo que el par elegido es nuestro contraejemplo.

Sin embargo, para probar que (2) es verdadera no alcanzará con tomar diferentes pares de valores para a y b, y verificar que la igualdad vale, sino que deberemos demostrarlo para a y b generales. Para ello usaremos que $z^2 = z \cdot z$ para todo número real z, luego la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, y finalmente la propiedad conmutativa del producto para obtener

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2,$$

para cualesquiera a y b reales, lo que prueba que el enunciado (2) es verdadero.

“Si y solo si” versus “entonces”.

Si bien no abordaremos aquí de manera formal la lógica matemática, estas dos expresiones se utilizan mucho a lo largo del texto. Resulta entonces fundamental comprender su significado y sus diferencias, para evitar usarlas en forma incorrecta. Para ello las trabajaremos desde el lenguaje coloquial, ya que en matemática deben entenderse y aplicarse en el mismo sentido.

Aunque las expresiones "si", "entonces" y "solo si" aparecen frecuentemente en frases cotidianas, su significado no siempre es interpretado correctamente. Por ejemplo, supongamos que una persona afirma lo siguiente:

__Si__ gano la lotería, __entonces__ me compro un auto.

Aquí, los enunciados "gano la lotería" y "me compro un auto" se unen mediante el conectivo "entonces", y al primero se le antepone la palabra "si". Esto significa simplemente que la validez del primer enunciado, implica la validez del segundo. Solo eso. Sin embargo, las siguientes interpretaciones erróneas sobre la afirmación anterior suelen escucharse en el lenguaje cotidiano:

- Si *no* gana la lotería, entonces *no* se compra el auto. ✗
- Si se compró el auto, entonces es porque ganó la lotería. ✗

La primera interpretación es incorrecta, ya que la persona no dijo qué sucederá si no gana la lotería. Solamente afirmó algo que haría si la ganara. Con respecto a la segunda, la persona nunca dijo que ganar la lotería era la única forma de comprarse el auto. Quizás consiguió prestado el dinero para comprarlo, vendió algo para conseguirlo, o cualquier otra posibilidad.

Si A, entonces B. Cuando un enunciado de este tipo es verdadero, significa que si el enunciado A es verdad, entonces también lo es B. No establece nada para cuando A es falso. Tampoco significa que si B es verdadero, entonces A también. Se denota como $A \Rightarrow B$, y se lee también como "A implica B".

Lo que sí se puede deducir, suponiendo que la persona cumple con lo que afirma, es que:

- Si *no* se compró el auto, entonces *no* se ganó la lotería. ✓

ya que afirmó que si ganaba, lo compraba. Esto se conoce como el **contrarrecíproco** de la afirmación hecha, y establece que $A \Rightarrow B$ es equivalente a

$$\text{negación de } B \Rightarrow \text{negación de } A.$$

Volviendo a la lista anterior de interpretaciones incorrectas, la segunda habría sido correcta si la persona hubiera afirmado que:

Me compro un auto __solo si__ gano la lotería.

De nuevo, la expresión anterior *no* afirma que si gana la lotería entonces se compra un auto. Puede ocurrir que utilice todo el dinero para comprar otra cosa. Solo dice que ganar la lotería sería la única forma de comprarse un auto.

Esto nos conduce a pensar en un conectivo entre dos expresiones, que nos permita concluir que si cualquiera de ellas es cierta, la otra también. Para esto se combinan las expresiones anteriores, para formar lo que se conoce como "si y solo si":

Me compro un auto ***si y solo si*** *gano la lotería.*

De esta frase se deduce que:

- Si se compró el auto, entonces ganó la lotería. ✔
- Si ganó la lotería, entonces se comprará el auto. ✔
- Si *no* gana la lotería, entonces *no* se comprará el auto. ✔
- Si *no* se compró el auto, entonces *no* ganó la lotería. ✔

***A* si y solo si *B*.** Este conectivo se utiliza para relacionar dos enunciados matemáticos, y significa que la validez de cualquiera de ellos implica la validez del otro. Esto se denota simbólicamente como $A \Leftrightarrow B$, ya que significa ambas cosas a la vez: $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow A$.

Ejercicios

1. Considerar la siguiente afirmación:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \qquad \text{para todo par de números reales positivos } a \text{ y } b.$$

Para demostrar que es **falsa**, ¿debo probar que la igualdad nunca vale o debo hallar un par de números reales positivos a y b para los cuales no vale?

2. Considerar la siguiente afirmación:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \qquad \text{para todo par de números reales positivos } a \text{ y } b.$$

Para demostrar que es **verdadera**, ¿es suficiente con probar que la igualdad vale para muchos pares de números reales positivos a y b?

3–5. Para estos ejercicios, suponer que la persona cumple exactamente con lo que afirma, y determinar qué conclusiones pueden deducirse **con certeza** a partir de dicha afirmación.

3. “Si el examen comienza por la tarde, entonces iré caminando.”

(**a**) Si fue caminando, ¿entonces el examen comenzó por la tarde?
(**b**) Si el examen comienza por la noche, ¿entonces no irá caminando?
(**c**) Si no fue caminando, ¿entonces el examen no comenzó por la tarde?
(**d**) Si el examen comienza por la tarde, ¿entonces irá caminando?

4. “Iré caminando al examen solo si comienza por la tarde.”

(**a**) Si fue caminando, ¿entonces el examen comenzó por la tarde?
(**b**) Si el examen comienza por la noche, ¿entonces no irá caminando?
(**c**) Si no fue caminando, ¿entonces el examen no comenzó por la tarde?
(**d**) Si el examen comienza por la tarde, ¿entonces irá caminando?

5. “Iré caminando al examen si y solo si comienza por la tarde.”

(**a**) Si fue caminando, ¿entonces el examen comenzó por la tarde?
(**b**) Si el examen comienza por la noche, ¿entonces no irá caminando?
(**c**) Si no fue caminando, ¿entonces el examen no comenzó por la tarde?
(**d**) Si el examen comienza por la tarde, ¿entonces irá caminando?

6. Explicar por qué es erróneo el siguiente razonamiento: “Sergio me dijo que siempre antes de viajar en su auto, lo lleva al taller mecánico para que lo revisen. Recién vi su auto en el taller, así que debe estar por viajar”.