CAPÍTULO 14

Integración

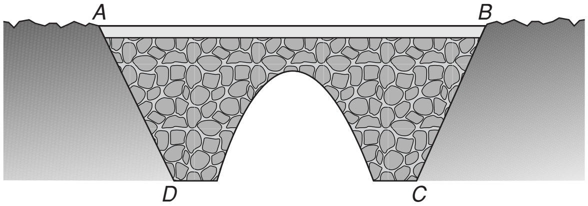
Quienquiera que haya tenido un negocio, conoce la necesidad de estimar costos con precisión. Cuando los trabajos se contratan de manera individual, la determinación de cuánto cuesta el trabajo, por lo general es el primer paso para decidir cuánto pedir.

Por ejemplo, un pintor debe determinar cuánta pintura utilizará en un trabajo. Como un galón de pintura cubrirá cierto número de pies cuadrados, la clave es determinar el área de la superficie que será pintada. Por lo general, esto sólo requiere de aritmética simple —las paredes y los techos son rectangulares, de modo que el área total es una suma de productos de base por altura.

Pero no todas las áreas son tan sencillas de calcular. Por ejemplo, suponga que el puente que se muestra abajo debe pulirse para remover el hollín. ¿Cómo calcularía el contratista, el número de pies cuadrados del área de la pared vertical de cada lado del puente?

Quizá el área podría ser estimada como tres cuarto del área del trapecio formado por los puntos A, B, C y D. Pero un cálculo más preciso, podría ser más adecuado si la cotización fuese para una docena de puentes del mismo tamaño (a lo largo de una vía de tren); esto requeriría un enfoque más refinado.

Si la forma del arco del puente puede describirse en forma matemática por medio de una función, el contratista podría utilizar el método introducido en este capítulo: integración. La integración tiene muchas aplicaciones, la más simple de las cuales es la determinación de áreas de regiones acotadas por curvas. Otras aplicaciones incluyen el cálculo de la deflexión total de una viga debido a una fuerza de flexión, el cálculo de la distancia recorrida bajo el mar por un submarino y el cálculo del pago de electricidad por una compañía que consume energía a diferentes tasas en el transcurso de un mes.



Los capítulos 10 al 13 trataron el cálculo diferencial. Diferenciamos una función y obtuvimos otra función que era su derivada. El *cálculo integral* se ocupa del proceso inverso. Dada la derivada de una función se debe encontrar la función original. La necesidad de hacer esto surge de manera natural. Por ejemplo, podemos tener una función de ingreso marginal y querer encontrar la función de ingreso a partir de ella. El cálculo integral también involucra un concepto de límite que nos permite determinar el límite de un tipo especial de suma, cuando el número de términos en la suma tiende a infinito. ¡Ésta es la verdadera fuerza del cálculo integral! Con él podemos calcular el área de una región que no pueda encontrarse con algún otro método conveniente.

OBJETIVO Definir la antiderivada y la integral indefinida, y aplicar fórmulas básicas de integración.

14.1 La integral indefinida

Dada una función f, si F es una función tal que

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

entonces F se llama *antiderivada* de f. Así,

una antiderivada de f es simplemente una función cuya derivada es f.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por la diferencial dx resulta $F'(x)dx = f(x)dx$. Sin embargo, como $F'(x)dx$ es la diferencial de F, se tiene que $dF = f(x)dx$. De aquí que podemos considerar una antiderivada de f como una función cuya diferencial es $f(x)dx$.

Definición

Una ***antiderivada*** de una función f es una función F tal que

$$F'(x) = f(x),$$

o en forma equivalente, en notación diferencial,

$$dF = f(x)\,dx.$$

Por ejemplo, como la derivada de x^2 es $2x$, x^2 es una antiderivada de $2x$. Sin embargo, no es la única antiderivada de $2x$, ya que

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(x^2 - 5) = 2x,$$

tanto $x^2 + 1$ como $x^2 - 5$ también son antiderivadas de $2x$. De hecho, es claro que como la derivada de una constante es cero, $x^2 + C$ es también una antiderivada de $2x$ para *cualquier* constante C. Así, $2x$ tiene un número infinito de antiderivadas. Lo más importante, es que *todas* las antiderivadas de $2x$ deben ser funciones de la forma $x^2 + C$, debido al siguiente hecho:

> Dos antiderivadas cualesquiera de una función difieren sólo en una constante.

Como $x^2 + C$ describe todas las antiderivadas de $2x$, podemos referirnos a ella como la *antiderivada más general* de $2x$, denotada por $\int 2x\,dx$, que se lee "*integral indefinida* de $2x$ con respecto a x". Así, escribimos

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

El símbolo $\int$ se llama **símbolo de integración,** $2x$ es el **integrando** y C la **constante de integración.** La dx es parte de la notación integral e indica la variable implicada. Aquí, x es la **variable de integración.**

En forma más general, la **integral indefinida** de cualquier función f con respecto a x se escribe $\int f(x)\,dx$ y denota la antiderivada más general de f. Como todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante, si F es cualquier antiderivada de f, entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{ donde } C \text{ es una constante.}$$

Integrar f significa encontrar $\int f(x)\,dx$. En resumen,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{si y sólo si} \quad F'(x) = f(x).$$

Principios en práctica 1

Determinación de una integral indefinida

Si el costo marginal es $f(q) = 28.3$, encuentre $\int 28.3\,dq$, que proporciona la forma de la función de costo.

EJEMPLO 1 Determinación de una integral indefinida

Encontrar $\int 5\,dx$.

Solución:

Estrategia: primero debemos encontrar (tal vez una palabra más apropiada sería "conjeturar") una función cuya derivada sea 5. Luego añadimos la constante de integración.

Como sabemos que la derivada de $5x$ es 5, $5x$ es una antiderivada de 5. Por tanto,

$$\int 5\,dx = 5x + C.$$

Advertencia Es **incorrecto** escribir

$$\int 5\,dx = 5x.$$

No olvide la constante de integración.

Usando las fórmulas de diferenciación vistas en los capítulos 10 y 11, hemos compilado una lista de fórmulas básicas de integración en la tabla 14.1. Estas fórmulas son fáciles de verificar. Por ejemplo, la fórmula 2 es cierta porque la derivada de $x^{n+1}/(n+1)$ es x^n para $n \neq -1$ (se debe tener $n \neq -1$ porque el denominador es 0 cuando $n = -1$). La fórmula 2 establece que la integral indefinida de una potencia de x (excepto x^{-1}) se obtiene incrementando el exponente de x en una unidad, al dividir esto entre el nuevo exponente y sumándole la constante de integración. La integral indefinida de x^{-1} se analizará en la sección 14.3.

TABLA 14.1 Fórmulas básicas de integración

1. $\int k\,dx = kx + C$, $\quad k$ es una constante.
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\quad n \neq -1$.
3. $\int e^x\,dx = e^x + C$.
4. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, $\quad k$ es una constante.
5. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Para verificar la fórmula 4, debemos comprobar que la derivada de $k\int f(x)\,dx$ es $kf(x)$. Como la derivada de $k\int f(x)\,dx$ es simplemente k veces la derivada de $\int f(x)\,dx$, que es $f(x)$, la fórmula 4 queda verificada. El lector debe verificar las otras fórmulas. La fórmula 5 puede extenderse a cualquier número de sumas o diferencias.

EJEMPLO 2 Integrales indefinidas de una constante y de una potencia de *x*

a. *Encontrar* $\int 1\,dx$.

Solución: por la fórmula 1 con $k = 1$,

$$\int 1\,dx = 1x + C = x + C.$$

Usualmente escribimos $\int 1\,dx$ como $\int dx$. Por lo que, $\int dx = x + C$.

b. *Encontrar* $\int x^5\,dx$.

Solución: por la fórmula 2 con $n = 5$,

$$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C.$$

■ ***Principios en práctica 2***

Integral indefinida de una constante por una función de *t*

Si la razón de cambio de los ingresos de una compañía puede modelarse por $\dfrac{dR}{dt} = 0.12t^2$, entonces determine $\int 0.12t^2\,dt$, que proporciona la forma de la función de ingreso de la compañía.

EJEMPLO 3 Integral indefinida de una constante por una función de *x*

Encontrar $\int 7x\,dx$.

Solución: por la fórmula 4 con $k = 7$ y $f(x) = x$,

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx.$$

Como x es x^1, por la fórmula 2 tenemos

$$\int x^1\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

donde C_1 es la constante de integración. Por tanto,

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\left[\frac{x^2}{2} + C_1\right] = \frac{7}{2}x^2 + 7C_1.$$

Como $7C_1$ sólo es una constante arbitraria, por simplicidad la reemplazamos por C. Así,

$$\int 7x\,dx = \frac{7}{2}x^2 + C.$$

No es necesario escribir todos los pasos intermedios al integrar. Con mayor sencillez, escribimos

$$\int 7x\,dx = (7)\frac{x^2}{2} + C = \frac{7}{2}x^2 + C.$$

Advertencia Sólo una factor *constante* del integrando puede "sacarse" al frente del signo de integral. Puesto que x no es constante, $\int 7x\,dx \neq 7x\int dx = (7x)(x + C) = 7x^2 + 7Cx.$

EJEMPLO 4 Integral de una constante por una función de *x*

Encontrar $\int -\frac{3}{5}e^x\,dx.$

Solución:

$$\int -\frac{3}{5}e^x\,dx = -\frac{3}{5}\int e^x\,dx \qquad \text{(Fórmula 4)}$$

$$= -\frac{3}{5}e^x + C \qquad \text{(Fórmula 3).}$$

Principios en práctica 3

Determinación de integrales indefinidas

Debido a una competencia nueva, el número de suscriptores a cierta revista está disminuyendo a una velocidad de $\frac{dS}{dt} = -\frac{480}{t^3}$ suscripciones por mes, donde t es el número de meses desde que la competencia entró al mercado. Determine la forma de la ecuación para el número de suscriptores a la revista.

EJEMPLO 5 Determinación de integrales indefinidas

a. *Encontrar* $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt.$

Solución: aquí, t es la variable de integración. Escribimos de nuevo el integrando de manera que podamos usar una fórmula básica. Como $1/\sqrt{t} = t^{-1/2}$, al aplicar la fórmula 2 obtenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C.$$

b. *Encontrar* $\int \frac{1}{6x^3}\,dx.$

Solución:

$$\int \frac{1}{6x^3}\,dx = \frac{1}{6}\int x^{-3}\,dx = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= -\frac{x^{-2}}{12} + C = -\frac{1}{12x^2} + C.$$

EJEMPLO 6 Integral indefinida de una suma

Encontrar $\int (x^2 + 2x)\,dx.$

Solución: por la fórmula 5,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \int x^2\,dx + \int 2x\,dx.$$

Ahora,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

y

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = (2)\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2 = x^2 + C_2.$$

Por lo que,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1 + C_2.$$

Por conveniencia reemplazamos la constante $C_1 + C_2$ por C. Así,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C.$$

Omitiendo los pasos intermedios, integramos simplemente término por término y escribimos

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + (2)\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + C.$$

Principios en práctica 4
Integral indefinida de una suma

La tasa de crecimiento de la población en una ciudad nueva es estimada por medio de $\frac{dN}{dt} = 500 + 300\sqrt{t}$, en donde t está en años. Encuentre $\int (500 + 300\sqrt{t})\,dt$.

Cuando la integración de una expresión incluye más de un término, sólo se necesita una constante de integración.

Principios en práctica 5
Integral indefinida de sumas y diferencias

Suponga que la tasa de ahorro en Estados Unidos está dada por $\frac{dS}{dt} = 2.1t^2 - 65.4t + 491.6$, en donde t es el tiempo en años y S es la cantidad de dinero ahorrado en miles de millones de dólares. Determine la forma de la ecuación para el monto de dinero ahorrado.

EJEMPLO 7 Integral indefinida de una suma y diferencia

Encontrar $\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1)\,dx.$

Solución:

$$\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1)\,dx$$

$$= 2\int x^{4/5}\,dx - 7\int x^3\,dx + 10\int e^x\,dx - \int 1\,dx \qquad \text{(Fórmulas 5 y 4)}$$

$$= (2)\frac{x^{9/5}}{\frac{9}{5}} - (7)\frac{x^4}{4} + 10e^x - x + C \qquad \text{(Fórmulas 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{10}{9}x^{9/5} - \frac{7}{4}x^4 + 10e^x - x + C.$$

A veces, para aplicar las fórmulas básicas de integración, es necesario efectuar primero operaciones algebraicas en el integrando, como se muestra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Uso de manipulaciones algebraicas para encontrar una integral indefinida

Encontrar $\int y^2(y + \frac{2}{3})\ dy$.

Solución: el integrando no concuerda con ninguna forma familiar de integración. Sin embargo, multiplicando los factores del integrando obtenemos

$$\int y^2(y + \tfrac{2}{3})\ dy = \int (y^3 + \tfrac{2}{3}y^2)\ dy$$

$$= \frac{y^4}{4} + \left(\frac{2}{3}\right)\frac{y^3}{3} + C = \frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{9} + C.$$

Advertencia En el ejemplo 8 multiplicamos primero los factores en el integrando. Observe que

La integral de un producto *no* es el producto de las integrales.

$$\int y^2(y + \tfrac{2}{3})\ dy \neq \left[\int y^2\ dy\right]\left[\int (y + \tfrac{2}{3})\ dy\right].$$

En términos más generales,

$$\int f(x)g(x)\ dx \neq \int f(x)\ dx \cdot \int g(x)\ dx.$$

EJEMPLO 9 Uso de manipulaciones algebraicas para encontrar una integral indefinida

a. *Encontrar* $\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{6}\ dx$.

Solución: al factorizar la constante $\frac{1}{6}$ y multiplicar los binomios, obtenemos

$$\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{6}\ dx = \frac{1}{6}\int (2x^2 + 5x - 3)\ dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[(2)\frac{x^3}{3} + (5)\frac{x^2}{2} - 3x\right] + C$$

$$= \frac{x^3}{9} + \frac{5x^2}{12} - \frac{x}{2} + C.$$

Otro enfoque algebraico de (b) es

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$$
$$= \int (x^3-1)x^{-2}\,dx$$
$$= \int (x - x^{-2})\,dx,$$

etcétera.

b. *Encontrar* $\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$.

Solución: podemos descomponer el integrando en fracciones, dividiendo cada término del numerador entre el denominador:

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)\,dx = \int (x - x^{-2})\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C.$$

Ejercicio 14.1

En los problemas del 1 al 52 encuentre las integrales indefinidas.

1. $\int 5\,dx.$ **2.** $\int \frac{1}{2}\,dx.$ **3.** $\int x^8\,dx.$ **4.** $\int 2x^{25}\,dx.$

5. $\int 5x^{-7}\,dx.$ **6.** $\int \frac{z^{-3}}{3}\,dz.$ **7.** $\int \frac{2}{x^{10}}\,dx.$

8. $\int \frac{7}{x^4\,dx}.$ **9.** $\int \frac{1}{y^{11/5}}\,dy.$ **10.** $\int \frac{7}{2x^{9/4}}\,dx.$

11. $\int (8+u)\,du.$ **12.** $\int (r^3+2r)\,dr.$ **13.** $\int (y^5-5y)\,dy.$

14. $\int (7-3w-9w^2)\,dw.$ **15.** $\int (3t^2-4t+5)\,dt.$ **16.** $\int (1+u+u^2+u^3)\,du.$

17. $\int (7+e)\,dx.$ **18.** $\int (5-2^{-1})\,dx.$ **19.** $\int \left(\frac{x}{7} - \frac{3}{4}x^4\right)\,dx.$

20. $\int \left(\frac{2x^2}{7} - \frac{8}{3}x^4\right)\,dx.$ **21.** $\int 6e^x\,dx.$ **22.** $\int \left(\frac{e^x}{3} + 2x\right)\,dx.$

23. $\int (x^{8.3} - 9x^6 + 3x^{-4} + x^{-3})\,dx.$ **24.** $\int (0.3y^4 - 8y^{-3} + 2)\,dy.$ **25.** $\int \frac{-2\sqrt{x}}{3}\,dx.$

26. $\int dw.$ **27.** $\int \frac{1}{4\sqrt[8]{x^2}}\,dx.$ **28.** $\int \frac{-3}{(2x)^2}\,dx.$

29. $\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}\right)\,dx.$ **30.** $\int \left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1}{x^4}\right)\,dx.$ **31.** $\int \left(\frac{3w^2}{2} - \frac{2}{3w^2}\right)\,dw.$

32. $\int \frac{4}{e^{-s}}\,ds.$ **33.** $\int \frac{2z-5}{7}\,dz.$ **34.** $\int \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}e^x\right)\,dx.$

35. $\int (x^e + 10e^x)\,dx.$ **36.** $\int \left(3y^3 - 2y^2 + \frac{e^y}{6}\right)\,dy.$ **37.** $\int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x})\,dx.$

38. $\int 0\,dx.$ **39.** $\int \left(-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5} - \frac{7}{2\sqrt{x}} + 6x\right)\,dx.$ **40.** $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\,dx.$

41. $\int (x^2+5)(x-3)\,dx.$ **42.** $\int x^4(x^3+8x^2+7)\,dx.$ **43.** $\int \sqrt{x}(x+3)\,dx.$

44. $\int (z+2)^2\,dz.$ **45.** $\int (2u+1)^2\,du.$ **46.** $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1\right)^2\,dx.$

47. $\int v^{-2}(2v^4 + 3v^2 - 2v^{-3})\,dv.$ **48.** $\int [6e^u - u^3(\sqrt{u}+1)]\,du.$ **49.** $\int \frac{z^4+10z^3}{2z^2}\,dz.$

50. $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{5x}\,dx.$ **51.** $\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x}\,dx.$ **52.** $\int \frac{(x^4 + 1)^2}{x^3}\,dx.$

53. Si $F(x)$ y $G(x)$ son tales que $F'(x) = G'(x)$, ¿es cierto que $F(x) - G(x)$ debe ser cero?

54. a. Encuentre una función F tal que $\int F(x)\,dx = xe^x + C.$

b. ¿Hay sólo una función F que satisfaga la ecuación dada en la parte (a), o existen muchas funciones?

55. Encuentre $\int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx.$

OBJETIVO Encontrar una antiderivada particular de una función que satisface ciertas condiciones. Esto implica la evaluación de una constante de integración.

14.2 INTEGRACIÓN CON CONDICIONES INICIALES

Si conocemos la razón de cambio, f', de la función f, entonces la función f misma es una antiderivada de f' (ya que la derivada de f es f'). Por supuesto hay muchas antiderivadas de f' y la más general es denotada por la integral indefinida. Por ejemplo, si

$$f'(x) = 2x,$$

entonces,

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C. \tag{1}$$

Esto es, *cualquier* función de la forma $f(x) = x^2 + C$ tiene su derivada igual a $2x$. Note que debido a la constante de integración, no conocemos $f(x)$ específicamente. Sin embargo, si f debe tener cierto valor para un valor particular de x, podemos determinar el valor de C y conocer así específicamente a $f(x)$. Por ejemplo, si $f(1) = 4$, de la ecuación (1) se tiene

$$f(1) = 1^2 + C,$$
$$4 = 1 + C,$$
$$C = 3.$$

Así,

$$f(x) = x^2 + 3.$$

Esto es, ahora ya conocemos la función particular $f(x)$ para la cual $f'(x) = 2x$ y $f(1) = 4$. La condición $f(1) = 4$, que da un valor de f para un valor específico de x, se llama *condición inicial* (o *valor en la frontera*).

Principios en práctica 1
Problema con condición inicial

La tasa de crecimiento de una especie de bacterias es estimada por medio de $\frac{dN}{dt} = 800 + 200e^t$, en donde N es el número de bacterias (en miles) después de t horas. Si $N(5) = 40{,}000$, determine $N(t)$.

EJEMPLO 1 Problema con condición inicial

Si y es una función de x tal que $y' = 8x - 4$ y $y(2) = 5$, encontrar y. [*Nota: $y(2) = 5$ significa que $y = 5$ cuando $x = 2$.*] *Encontrar también $y(4)$.*

Solución: aquí, $y(2) = 5$ es la condición inicial. Como $y' = 8x - 4$, y es una antiderivada de $8x - 4$:

$$y = \int (8x - 4)\,dx = 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^2 - 4x + C. \tag{2}$$

Podemos determinar el valor de C por medio de la condición inicial. Como $y = 5$ cuando $x = 2$, de la ecuación (2) tenemos

$$5 = 4(2)^2 - 4(2) + C,$$
$$5 = 16 - 8 + C,$$
$$C = -3.$$

Al reemplazar C por -3 en la ecuación (2) se obtiene la función que buscamos:

$$y = 4x^2 - 4x - 3. \tag{3}$$

Para encontrar $y(4)$, hacemos $x = 4$ en la ecuación (3):

$$y(4) = 4(4)^2 - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45.$$

Principios en práctica 2

Problema con condición inicial que incluye a y''

La aceleración de un objeto después de t segundos está dada por $y'' = 84t + 24$, la velocidad a los 8 segundos está dada por $y'(8) = 2891$ pies/seg, y la posición a los 2 segundos está dada por $y(2) = 185$ pies. Determine $y(t)$.

EJEMPLO 2 Problema con condiciones iniciales que implican a y''

Dado que $y'' = x^2 - 6$, $y'(0) = 2$, y $y(1) = -1$, encontrar y.

Solución:

Estrategia: para pasar de y'' a y, son necesarias dos integraciones: la primera nos lleva de y'' a y', y la otra de y' a y. Por tanto, se tendrán dos constantes de integración, que denotaremos como C_1 y C_2.

Como $y'' = \dfrac{d}{dx}(y') = x^2 - 6$, y' es una antiderivada de $x^2 - 6$. Por lo que,

$$y' = \int (x^2 - 6)\, dx = \frac{x^3}{3} - 6x + C_1. \tag{4}$$

Ahora, $y'(0) = 2$ significa que $y' = 2$ cuando $x = 0$; por tanto, de la ecuación (4), tenemos

$$2 = \frac{0^3}{3} - 6(0) + C_1.$$

De aquí, $C_1 = 2$, de modo que

$$y' = \frac{x^3}{3} - 6x + 2.$$

Por integración podemos encontrar y:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - 6x + 2\right) dx$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - (6)\frac{x^2}{2} + 2x + C_2,$$

así

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x + C_2. \tag{5}$$

Ahora, como $y = -1$ cuando $x = 1$, de la ecuación (5) tenemos

$$-1 = \frac{1^4}{12} - 3(1)^2 + 2(1) + C_2.$$

Así, $C_2 = -\frac{1}{12}$, por lo que

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}.$$

La integración con condiciones iniciales es útil en muchos casos prácticos como lo ilustran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Ingreso y educación

Para un grupo urbano particular, algunos sociólogos estudiaron el ingreso anual promedio actual y (en dólares) que una persona con x años de educación puede esperar recibir al buscar un empleo ordinario. Ellos estimaron que la razón a la que el ingreso cambia con respecto a la educación está dada por

$$\frac{dy}{dx} = 100x^{3/2}, \qquad 4 \leq x \leq 16,$$

donde $y = 28{,}720$ *cuando* $x = 9$. *Encontrar* y.

Solución: aquí y es una antiderivada de $100x^{3/2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} y &= \int 100x^{3/2}\ dx = 100 \int x^{3/2}\ dx \\ &= (100)\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C \\ y &= 40x^{5/2} + C. \end{aligned} \tag{6}$$

La condición inicial es que $y = 28{,}720$ cuando $x = 9$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (6), podemos determinar el valor de C:

$$\begin{aligned} 28{,}720 &= 40(9)^{5/2} + C \\ &= 40(243) + C \\ 28{,}720 &= 9720 + C. \end{aligned}$$

Por tanto, $C = 19{,}000$ y

$$y = 40x^{5/2} + 19{,}000.$$

EJEMPLO 4 Determinación de la función de demanda a partir del ingreso marginal

Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 2000 - 20q - 3q^2,$$

encontrar la función de demanda.

Solución:

Estrategia: al integrar dr/dq y usando una condición inicial, podemos encontrar la función de ingreso r. Pero el ingreso está dado también por la relación general $r = pq$, donde p es el precio por unidad. Así, $p = r/q$. Reemplazando r en esta ecuación por la función de ingreso, obtenemos la función de demanda.

Como dr/dq es la derivada del ingreso total r,

$$r = \int (2000 - 20q - 3q^2)\ dq$$

$$= 2000q - (20)\frac{q^2}{2} - (3)\frac{q^3}{3} + C,$$

o

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3 + C. \tag{7}$$

El ingreso es cero cuando q es cero.

Suponemos que **cuando no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es 0;** esto es, $r = 0$ cuando $q = 0$. Ésta es nuestra condición inicial. Sustituyendo estos valores en la ecuación (7) resulta

$$0 = 2000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C.$$

Aunque $q = 0$ da $C = 0$, esto en general no es cierto. Ocurre en esta sección porque las funciones de ingreso son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación cuando $q = 0$ puede producir un valor distinto de cero para C.

De aquí, $C = 0$ y

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3.$$

Para encontrar la función de demanda, usamos el hecho de que $p = r/q$ y sustituimos el valor de r.

$$p = \frac{r}{q} = \frac{2000q - 10q^2 - q^3}{q}.$$

$$p = 2000 - 10q - q^2.$$

■

EJEMPLO 5 Determinación del costo a partir del costo marginal

En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de \$4000. *Los costos fijos son costos como la renta y el seguro, que permanecen constantes a todos los niveles de producción en un periodo dado. Si la función de costo marginal dc/dq es*

$$\frac{dc}{dq} = 0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2,$$

donde c es el costo total (en dólares) de producir q libras de producto por semana, encontrar el costo de producir 10,000 *libras en una semana.*

Solución: como dc/dq es la derivada del costo total c,

$$c = \int [0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2]\ dq$$

$$= 0.000001\int (0.002q^2 - 25q)\ dq + \int 0.2\ dq.$$

Cuando q es cero, el costo total es igual al costo fijo.

$$c = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + C.$$

Aunque $q = 0$ da para C un valor igual al costo fijo, esto no es cierto en general. Ocurre en esta sección porque las funciones de costo son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación cuando $q = 0$ puede producir un valor para C que sea diferente del costo fijo.

Los costos fijos son constantes independientemente de la producción. Por tanto, cuando $q = 0$, $c = 4000$, lo cual es nuestra condición inicial. Sustituyendo encontramos que $C = 4000$, por lo que

$$c = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + 4000. \tag{8}$$

De la ecuación (8), cuando $q = 10{,}000$, $c = 5416\frac{2}{3}$. Así, el costo total de producir 10,000 libras de producto en una semana es de \$5416.67.

Ejercicio 14.2

En los problemas 1 y 2 encuentre y, sujeta a las condiciones dadas

1. $dy/dx = 3x - 4; \quad y(-1) = \frac{13}{2}$.

2. $dy/dx = x^2 - x; \quad y(3) = \frac{19}{2}$.

En los problemas 3 y 4, si y satisface las condiciones dadas, encuentre y(x) para el valor dado de x.

3. $y' = 4/\sqrt{x},\ y(4) = 10; \quad x = 9$.

4. $y' = -x^2 + 2x,\ y(2) = 1; \quad x = 1$.

En los problemas del 5 al 8 encuentre y, sujeta a las condiciones dadas.

5. $y'' = -x^2 - 2x; \quad y'(1) = 0,\ y(1) = 1$.

6. $y'' = x + 1; \quad y'(0) = 0,\ y(0) = 5$.

7. $y''' = 2x; \quad y''(-1) = 3,\ y'(3) = 10,\ y(0) = 13$.

8. $y''' = e^x + 1; \quad y''(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y(0) = 3$.

En los problemas del 9 al 12 dr/dq es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.

9. $dr/dq = 0.7$.

10. $dr/dq = 15 - \frac{1}{15}q$.

11. $dr/dq = 275 - q - 0.3q^2$.

12. $dr/dq = 10{,}000 - 2(2q + q^3)$.

En los problemas del 13 al 16 dc/dq es una función de costo marginal y los costos fijos están indicados entre llaves. En los problemas 13 y 14, encuentre la función de costo total. En los problemas 15 y 16 encuentre el costo total para el valor indicado de q.

13. $dc/dq = 1.35; \quad \{200\}$.

14. $dc/dq = 2q + 75; \quad \{2000\}$.

15. $dc/dq = 0.09q^2 - 1.2q + 4.5; \quad \{7700\}; \quad q = 10$.

16. $dc/dq = 0.000102q^2 - 0.034q + 5; \ \{10{,}000\}; \ q = 100$.

17. Dieta para ratas Un grupo de biólogos estudió los efectos alimenticios en ratas a las que se alimentó con una dieta en la que 10% era proteína.[1] La proteína consistió en levadura y harina de maíz.

El grupo encontró que en cierto periodo, la razón de cambio aproximada del aumento promedio de peso G (en gramos) de una rata, con respecto al porcentaje P de levadura en la mezcla proteínica fue

$$\frac{dG}{dP} = -\frac{P}{25} + 2, \qquad 0 \le P \le 100.$$

Si $G = 38$ cuando $P = 10$, encuentre G.

18. Polilla de invierno En Nueva Escocia[2] se llevó a cabo un estudio acerca de la polilla de invierno. Las larvas de la polilla caen al suelo de los árboles huéspedes. Se encontró que la razón (aproximada) con que la densidad y (número de larvas por pie cuadrado de suelo) cambia con respecto a la distancia x (en pies), desde la base de un árbol huésped es

$$\frac{dy}{dx} = -1.5 - x, \qquad 1 \le x \le 9.$$

Si $y = 57.3$ cuando $x = 1$, encuentre y.

19. Flujo de un fluido En el estudio del flujo de un fluido en un tubo de radio constante R, tal como la sangre en ciertas partes del cuerpo, puede considerarse que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio r, donde $0 \le r \le R$. La velocidad v del fluido es una función de r y está dada por[3]

$$v = \int -\frac{(P_1 - P_2)r}{2l\eta}\,dr,$$

[1] Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single–Cell Protein;* ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

[2] Adaptado de D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

[3] R. W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill, 1955).

donde P_1 y P_2 son las presiones en los extremos del tubo, η (una letra griega que se lee "eta") es la viscosidad del fluido y l es la longitud del tubo. Si $v = 0$ cuando $r = R$, demuestre que

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4l\eta}.$$

20. **Elasticidad de la demanda** El único productor de cierto artículo ha determinado que la función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = 100 - 3q^2.$$

Encuentre la elasticidad puntual de la demanda para el producto cuando $q = 5$. [*Sugerencia:* encuentre primero la función de demanda.]

21. **Costo promedio** Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es

$$\frac{dc}{dq} = 0.003q^2 - 0.4q + 40,$$

donde q es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de \$27.50 cuando $q = 50$ y los costos fijos son de \$5000, ¿cuál es el costo *promedio* de producir 100 unidades?

22. Si $f''(x) = 6x + 2$ y $f'(-1) = 5$, evalúe

$$f(1) - f(-1).$$

OBJETIVO Utilizar las fórmulas para $\int u^n\,du$, $\int e^u\,du$, y $\int \frac{1}{u}\,du$.

14.3 MÁS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

Regla de la potencia para integración

La fórmula

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \text{si } n \neq -1,$$

que se aplica a una potencia de x, puede generalizarse para manejar una potencia de una *función* de x. Suponga que u es una función diferenciable de x. Por medio de la regla de la potencia para diferenciación, si $n \neq -1$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)[u(x)]^n \cdot u'(x)}{n+1} = [u(x)]^n \cdot u'(x).$$

Así,

$$\int [u(x)]^n \cdot u'(x)\;dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

A ésta le llamamos la *regla de la potencia para integración*. Observe que $u'(x)dx$ es la diferencial de u, es decir du. En forma matemática breve, podemos reemplazar $u(x)$ por u y $u'(x)dx$ por du:

Regla de la potencia para integración

Si u es diferenciable, entonces

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \text{si } n \neq -1.$$

Es esencial que usted se dé cuenta de la diferencia entre la regla de la potencia para integración y la fórmula para $\int x^n\,dx$. En la regla de potencia, u representa una función, mientras que en $\int x^n\,dx$, x es la variable.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de la potencia para integración

a. *Determinar* $\int (x + 1)^{20}\, dx$.

Solución: como el integrando es una potencia de la función $x + 1$, haremos $u = x + 1$. Entonces $du = dx$, y la $\int (x + 1)^{20}\, dx$ tiene la forma $\int u^{20}\, du$. Por medio de la regla de la potencia para integración,

$$\int (x + 1)^{20}\, dx = \int u^{20}\, du = \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(x + 1)^{21}}{21} + C.$$

Observe que no damos nuestra respuesta en términos de u, sino en términos de x.

b. *Determinar* $\int 3x^2(x^3 + 7)^3\, dx$.

Solución: observamos que el integrando contiene una potencia de la función $x^3 + 7$. Hacemos $u = x^3 + 7$. Entonces $du = 3x^2 dx$. Por fortuna, $3x^2$ aparece como un factor en el integrando y puede usarse como parte de du. Así tenemos

Después de la integración, usted se puede sorprender de lo que le sucedió a $3x^2$; $3x^2$, junto con dx, forma la diferencial de u en la regla de la potencia.

$$\begin{aligned}\int 3x^2(x^3 + 7)^3\, dx &= \int (x^3 + 7)^3[3x^2\, dx] = \int u^3\, du \\ &= \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^3 + 7)^4}{4} + C.\end{aligned}$$

Para aplicar la regla de la potencia para integración, algunas veces debemos hacer un ajuste para obtener du en el integrando, como lo ilustra el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Ajuste de *du*

Encontrar $\int x\sqrt{x^2 + 5}\, dx$.

Solución: podemos escribir esto como $\int x(x^2 + 5)^{1/2}\, dx$. Observe que el integrando contiene una potencia de la función $x^2 + 5$. Si $u = x^2 + 5$, entonces $du = 2x\, dx$. Ya que el factor *constante* 2 en du *no* aparece en el integrando, esta integral no tiene la forma $\int u^n\, du$. Sin embargo, podemos poner la integral dada en esta forma por medio de la multiplicación y división del integrando por 2. Esto no cambia su valor. Así,

$$\int x(x^2 + 5)^{1/2}\, dx = \int \frac{2}{2}x(x^2 + 5)^{1/2}\, dx = \int \frac{1}{2}(x^2 + 5)^{1/2}[2x\, dx].$$

Moviendo el factor *constante* $\frac{1}{2}$ al frente del signo de integral, tenemos

$$\int x(x^2 + 5)^{1/2}\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2 + 5)^{1/2}[2x\, dx] \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right] + C.$$

Regresando en términos de x se obtiene

$$\int x\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{(x^2+5)^{3/2}}{3} + C.$$

En el ejemplo 2, necesitábamos el factor 2 en el integrando. En la ecuación (1) se insertó, y la integral se multiplicó al mismo tiempo por $\frac{1}{2}$. En términos más generales, si k es una constante diferente de cero, entonces

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{k}{k} f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int kf(x)\,dx.$$

Podemos ajustar los factores constantes, pero no los factores variables.

En efecto, podemos multiplicar el integrando por una constante diferente de cero, k, siempre y cuando compensemos esto multiplicando toda la integral por $1/k$. Tal manipulación **no puede** ser hecha con factores *variables*.

Advertencia Cuando use la forma $\int u^n\,du$, no descuide a du. Por ejemplo,

$$\int (4x+1)^2\,dx \neq \frac{(4x+1)^3}{3} + C.$$

La forma apropiada de resolver este problema es como sigue. Haciendo $u = 4x + 1$, tenemos $du = 4dx$. Así,

$$\int (4x+1)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (4x+1)^2[4\,dx] = \frac{1}{4}\int u^2\,du$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x+1)^3}{12} + C.$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla de la potencia para integración

a. *Encontrar* $\int \sqrt[3]{6y}\,dy$.

Solución: el integrando es $(6y)^{1/3}$, una potencia de una función. Tratamos de utilizar la regla de la potencia para integración. Si tomamos $u = 6y$, entonces $du = 6\,dy$. Como el factor 6 no aparece en el integrando, insertamos un factor de 6 y lo ajustamos con un factor de $\frac{1}{6}$ al frente de la integral. Entonces, tenemos

$$\int \sqrt[3]{6y}\,dy = \int (6y)^{1/3}\,dy = \frac{1}{6}\int (6y)^{1/3}[6\,dy] = \frac{1}{6}\int u^{1/3}\,du$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\frac{u^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{(6y)^{4/3}}{8} + C.$$

El ejemplo 3(a) puede resolverse sin el uso de la regla de la potencia, por medio de la reescritura del integrando como $\sqrt[3]{6}y^{1/3}$. Esto da la respuesta equivalente

$$\frac{3\sqrt[3]{6}}{4}y^{4/3} + C.$$

b. *Encontrar* $\int \frac{2x^3+3x}{(x^4+3x^2+7)^4}\,dx$.

Solución: podemos escribir esto como $\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}(2x^3 + 3x)\,dx$. Trataremos de utilizar la regla de la potencia para integración. Si $u = x^4 + 3x^2 + 7$, entonces $du = (4x^3 + 6x)\,dx$, que es dos veces la cantidad $(2x^3 + 3x)\,dx$ en la integral. Así, insertamos un factor de 2, y ajustamos con un factor de $\frac{1}{2}$ al frente de la integral, como sigue:

$$\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}(2x^3 + 3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}[2(2x^3 + 3x)\,dx] \qquad \text{(factores insertados)}$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}[(4x^3 + 6x)\,dx]$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-4}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{6u^3} + C$$

$$= -\frac{1}{6(x^4 + 3x^2 + 7)^3} + C \qquad \text{(de nuevo escribimos en términos de } x\text{).}$$

Al utilizar la regla de la potencia para integración, tenga cuidado cuando hace su elección de u. En el ejemplo 3(b), *no* puede adelantar mucho si, por ejemplo, elige $u = 2x^3 + 3x$. En ocasiones puede ser necesario que elija muchas opciones diferentes. No basta con sólo ver la integral. Intente algo, aun si se equivoca, ya que puede darle sugerencias de algo que puede funcionar. **El dominio de la integración sólo se alcanza después de muchas horas de práctica y estudio consciente.**

EJEMPLO 4 Una integral a la cual no se aplica la regla de la potencia

Encontrar $\int 4x^2(x^4 + 1)^2\,dx$.

Solución: si tomamos $u = x^4 + 1$, entonces $du = 4x^3dx$. Para obtener du en la integral, necesitamos un factor adicional de la *variable* x. Sin embargo, sólo podemos ajustar factores **constantes.** Así, no podemos utilizar la regla de la potencia. En lugar de eso, para encontrar la integral, primero debemos desarrollar $(x^4 + 1)^2$:

$$\int 4x^2(x^4 + 1)^2\,dx = 4\int x^2(x^8 + 2x^4 + 1)\,dx$$

$$= 4\int (x^{10} + 2x^6 + x^2)\,dx$$

$$= 4\left(\frac{x^{11}}{11} + \frac{2x^7}{7} + \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Integración de funciones con la exponencial natural

Ahora volvemos nuestra atención para integrar funciones exponenciales. Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}.$$

Para esta fórmula de diferenciación, la correspondiente fórmula de integración es

$$\int e^u \frac{du}{dx}\, dx = e^u + C.$$

Pero, $\dfrac{du}{dx}\, dx$ es la diferencial de u, es decir, du. Así,

$$\boxed{\int e^u\, du = e^u + C.} \tag{2}$$

Principios en práctica 1

Integrales que incluyen funciones exponenciales

Cuando un objeto se mueve de un entorno a otro, su temperatura T cambia a una tasa dada por $\dfrac{dT}{dt} = kCe^{kt}$, donde t es el tiempo (en horas) después de haber cambiado de entorno, C es la diferencia de temperaturas (original menos nueva) entre los entornos y k es una constante. Si el entorno original tiene una temperatura de 70°, la del nuevo es 60° y $k = -0.5$, determine la forma general de $T(t)$.

EJEMPLO 5 Integrales que incluyen funciones exponenciales

a. *Encontrar* $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\, dx$.

Solución: sea $u = x^2$. Entonces $du = 2x\, dx$, y por la ecuación (2),

$$\int 2xe^{x^2}\, dx = \int e^{x^2}[2x\, dx] = \int e^u\, du$$
$$= e^u + C = e^{x^2} + C.$$

b. *Encontrar* $\displaystyle\int (x^2 + 1)e^{x^3+3x}\, dx$.

Solución: si $u = x^3 + 3x$, entonces $du = (3x^2 + 3)\, dx = 3(x^2 + 1)\, dx$. Si el integrando tuviese un factor de 3, la integral tendría la forma $\displaystyle\int e^u\, du$. Así, escribimos

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 1)e^{x^3+3x}\, dx &= \frac{1}{3}\int e^{x^3+3x}[3(x^2 + 1)\, dx]\\ &= \frac{1}{3}\int e^u\, du = \frac{1}{3}e^u + C\\ &= \frac{1}{3}e^{x^3+3x} + C.\end{aligned}$$

Advertencia La fórmula de la regla de la potencia para $\displaystyle\int u^n\, du$ no se aplica a $\displaystyle\int e^u\, du$. Por ejemplo,

$$\int e^x\, dx \neq \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$$

Integrales que incluyen funciones logarítmicas

Como usted sabe, la fórmula de la potencia $\displaystyle\int u^n\, du = u^{n+1}/(n + 1) + C$ no se aplica cuando $n = -1$. Para manejar esa situación, es decir, $\displaystyle\int u^{-1}\, du = \int \frac{1}{u}\, du$, primero recordamos que

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

Parecería que $\int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$. Sin embargo, el logaritmo de u está definido sólo si u es positivo. Si $u < 0$, entonces $\ln u$ no está definido. Así,

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C, \qquad \text{con tal que } u > 0.$$

Por otra parte, si $u < 0$, entonces $-u > 0$ y $\ln(-u)$ está definido. Además,

$$\frac{d}{dx}[\ln(-u)] = \frac{1}{-u}(-1)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

En este caso $(u < 0)$,

$$\int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(-u) + C.$$

En resumen, si $u > 0$, entonces $\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$; si $u < 0$, entonces $\int \frac{1}{u}\,du = \ln(-u) + C$. Combinando estos casos, tenemos

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C. \tag{3}$$

En particular, si $u = x$, entonces $du = dx$, y

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C. \tag{4}$$

Principios en práctica 2

Integrales que incluyen $\frac{1}{u}\,du$

Si la tasa de memorización de un vocabulario de una lengua extranjera del estudiante promedio está dada por $\frac{dv}{dt} = \frac{35}{t+1}$, donde v es el número de palabras memorizadas del vocabulario en t horas de estudio, determine la forma general de $v(t)$.

EJEMPLO 6 Integrales que incluyen a $\frac{1}{u}\,du$

a. *Encontrar* $\int \frac{7}{x}\,dx$.

Solución: de la ecuación (4),

$$\int \frac{7}{x}\,dx = 7\int \frac{1}{x}\,dx = 7\ln|x| + C.$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, podemos escribir esta respuesta en otra forma:

$$\int \frac{7}{x}\,dx = \ln|x^7| + C.$$

b. *Encontrar* $\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx$.

Solución: sea $u = x^2 + 5$. Entonces $du = 2x\,dx$. De la ecuación (3),

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2+5}[2x\,dx] = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u| + C = \ln|x^2+5| + C.$$

Como $x^2 + 5$ siempre es positiva, podemos omitir las barras de valor absoluto:

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \ln(x^2+5) + C.$$

EJEMPLO 7 Una integral que incluye $\frac{1}{u}\,du$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{(2x^3+3x)\,dx}{x^4+3x^2+7}$.

Solución: si $u = x^4 + 3x^2 + 7$, entonces $du = (4x^3 + 6x)\,dx$, que es dos veces el numerador. Para aplicar la ecuación (3), insertamos un factor de 2 y lo ajustamos con un factor de $\frac{1}{2}$, como sigue:

$$\int \frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2+7}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+3x)}{x^4+3x^2+7}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^4+3x^2+7}[(4x^3+6x)\,dx]$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^4+3x^2+7| + C \qquad \text{(escribimos de nuevo)}$$
$$= \ln\sqrt{x^4+3x^2+7} + C \qquad \left(\frac{1}{2}\ln|u| = \ln u^{1/2}\right).$$

EJEMPLO 8 Una integral que incluye dos formas

Encontrar $\displaystyle\int \left[\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right] dw.$

Solución:

$$\int \left[\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right] dw = \int (1-w)^{-2}\,dw + \int \frac{1}{w-1}\,dw$$
$$= -1\int (1-w)^{-2}[-dw] + \int \frac{1}{w-1}\,dw.$$

La primera integral tiene la forma $\int u^{-2}\,du$ y la segunda tiene la forma $\int \frac{1}{v}\,dv$. Así,

$$\int \left[\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right] dw = -\frac{(1-w)^{-1}}{-1} + \ln|w-1| + C$$

$$= \frac{1}{1-w} + \ln|w-1| + C.$$

Para su comodidad, en la tabla 14.2 listamos las fórmulas básicas de integración analizadas hasta el momento. Suponemos que u es una función de x.

TABLA 14.2 Fórmulas básicas de integración

1.	$\int k\,du = ku + C,\quad k$ una constante
2.	$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.$
3.	$\int e^u\,du = e^u + C.$
4.	$\int \frac{1}{u}\,du = \ln\|u\| + C,\quad u \neq 0.$
5.	$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$
6.	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

Ejercicio 14.3

En los problemas del 1 al 80 encuentre las integrales indefinidas.

1. $\int (x+5)^7\,dx.$

2. $\int 15(x+2)^4\,dx.$

3. $\int 2x(x^2+3)^5\,dx.$

4. $\int (3x^2+14x)(x^3+7x^2+1)\,dx.$

5. $\int (3y^2+6y)(y^3+3y^2+1)^{2/3}\,dy.$

6. $\int (-12z^2-12z+1)(-4z^3-6z^2+z)^{18}\,dx.$

7. $\int \frac{5}{(3x-1)^3}\,dx.$

8. $\int \frac{4x}{(2x^2-7)^{10}}\,dx.$

9. $\int \sqrt{2x-1}\,dx.$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx.$

11. $\int (7x-6)^4\,dx.$

12. $\int x^2(3x^3+7)^3\,dx.$

13. $\int x(x^2+3)^{12}\,dx.$

14. $\int 9x\sqrt{1+2x^2}\,dx.$

15. $\int 4x^4(27+x^5)^{1/3}\,dx.$

16. $\int (3-2x)^{10}\,dx.$

17. $\int 3e^{3x}\,dx.$

18. $\int 2e^{2t+5}\,dt.$

19. $\int (2t+1)e^{t^2+t}\,dt.$

20. $\int -3w^2e^{-w^3}\,dw.$

21. $\int xe^{7x^2}\,dx.$

22. $\int x^3e^{4x^4}\,dx.$

23. $\int 6e^{-2x}\,dx.$ **24.** $\int x^4e^{-6x^5}\,dx.$ **25.** $\int \frac{1}{x+5}\,dx.$

26. $\int \frac{2x+1}{x+x^2}\,dx.$ **27.** $\int \frac{3x^2+4x^3}{x^3+x^4}\,dx.$ **28.** $\int \frac{9x^2-2x}{1-x^2+3x^3}\,dx.$

29. $\int \frac{6z}{(z^2-6)^5}\,dx.$ **30.** $\int \frac{1}{(8y-3)^3}\,dy.$ **31.** $\int \frac{4}{x}\,dx.$

32. $\int \frac{3}{1+2y}\,dy.$ **33.** $\int \frac{s^2}{s^3+5}\,ds.$ **34.** $\int \frac{2x^2}{3-4x^3}\,dx.$

35. $\int \frac{8}{5-3x}\,dx.$ **36.** $\int \frac{7t}{5t^2-6}\,dt.$ **37.** $\int \sqrt{5x}\,dx.$

38. $\int \frac{1}{(4x)^7}\,dx.$ **39.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx.$ **40.** $\int \frac{11}{3-2x}\,dx.$

41. $\int 2y^3e^{y^4+1}\,dx.$ **42.** $\int 5\sqrt{4x-3}\,dx.$ **43.** $\int v^2e^{-2v^3+1}\,dv.$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x^3+9}}\,dx.$ **45.** $\int (e^{-5x}+2e^x)\,dx.$ **46.** $\int 4\sqrt[3]{y+1}\,dy.$

47. $\int (x+1)(3-3x^2-6x)^3\,dx.$ **48.** $\int 2ye^{3y^2}\,dy.$ **49.** $\int \frac{x^2+2}{x^3+6x}\,dx.$

50. $\int (e^x-e^{-x}+e^{3x})\,dx.$ **51.** $\int \frac{16s-4}{3-2s+4s^2}\,ds.$ **52.** $\int (t^2+4t)(t^3+6t^2)^6\,dt.$

53. $\int x(2x^2+1)^{-1}\,dx.$ **54.** $\int (w^3-8w^7+1)(w^4-4w^8+4w)^{-6}\,dw.$

55. $\int -(x^2-2x^5)(x^3-x^6)^{-10}\,dx.$ **56.** $\int \frac{3}{5}(v-2)e^{2-4v+v^2}\,dv.$ **57.** $\int (2x^3+x)(x^4+x^2)\,dx.$

58. $\int (e^{3.1})^2\,dx.$ **59.** $\int \frac{18+12x}{(4-9x-3x^2)^5}\,dx.$ **60.** $\int (e^x-e^{-x})^2\,dx.$

61. $\int x(2x+1)e^{4x^3+3x^2-4}\,dx.$ **62.** $\int (u^2+3-ue^{7-u^2})\,du.$ **63.** $\int x\sqrt{(8-5x^2)^3}\,dx.$

64. $\int e^{-x/4}\,dx.$ **65.** $\int \left(\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx.$ **66.** $\int \frac{x^3}{e^{x^4}}\,dx.$

67. $\int (x^2+1)^2\,dx.$ **68.** $\int \left[x(x^2-16)^2-\frac{1}{2x+5}\right]dx.$ **69.** $\int \left[\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^5}{(x^6+1)^2}\right]dx.$

70. $\int \left[\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx.$ **71.** $\int \left[\frac{1}{3x-5}-(x^2-2x^5)(x^3-x^6)^{-10}\right]dx.$

72. $\int (r^3+5)^2\,dr.$ **73.** $\int \left[\sqrt{3x+1}-\frac{x}{x^2+3}\right]dx.$ **74.** $\int \left[\frac{2x}{x^2+3}-\frac{x^3}{(x^4+2)^2}\right]dx.$

75. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ **76.** $\int (e^4-2^e)\,dx.$ **77.** $\int \frac{1+e^{2x}}{4e^x}\,dx.$

78. $\int \frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t}-1}\,dt.$ **79.** $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\ln(x^2+2x)\,dx.$ **80.** $\int \sqrt[3]{x}\,e^{\sqrt[3]{8x^4}}\,dx.$

En los problemas del 81 al 84 encuentre y, sujeta a las condiciones dadas.

81. $y'=(3-2x)^2;\quad y(0)=1.$ **82.** $y'=\frac{x}{x^2+6};\quad y(1)=0.$

83. $y''=\frac{1}{x^2};\quad y'(-1)=1,\ y(1)=0.$ **84.** $y''=\sqrt{x+2};\quad y'(2)=\frac{1}{3},\ y(2)=-\frac{7}{15}.$

85. Bienes raíces La tasa de cambio del valor de una casa que cuesta \$350,000 puede modelarse por medio de $\frac{dV}{dt} = 8e^{0.05t}$, donde t es el tiempo en años desde que la casa fue construida y V es el valor (en miles de dólares) de la casa. Determine $V(t)$.

86. Tiempo de vida Si la tasa de cambio de la esperanza de vida l al nacer, de personas que nacen en Estados Unidos puede modelarse por $\frac{dl}{dt} = \frac{12}{2t + 50}$, en donde t es el número de años a partir de 1940 y la esperanza de vida fue de 63 años en 1940, encuentre la esperanza de vida para personas que nacieron en 1998.

87. Oxígeno en los vasos capilares En un análisis de la difusión del oxígeno en los vasos capilares,[4] se usan cilindros concéntricos de radio r como modelos de un capilar. La concentración C de oxígeno en el capilar está dada por

$$C = \int \left(\frac{Rr}{2K} + \frac{B_1}{r}\right) dr,$$

donde R es la razón constante con que el oxígeno se difunde en el capilar, y K y B_1 son constantes. Encuentre C (escriba la constante de integración como B_2).

88. Encuentre $f(2)$ si $f(\frac{1}{2}) = 1$ y $f'(x) = e^{2x-1} - 6x$.

[4]W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press. Inc., 1972).

OBJETIVO Analizar técnicas de manejo de problemas de integración más complejas, a saber, por medio de manipulación algebraica y por ajuste del integrando a una forma conocida. Integrar una función exponencial con una base diferente a e y determinar la función de consumo, dada la propensión marginal al consumo.

14.4 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Ahora que ha adquirido alguna práctica en resolver integrales indefinidas, consideraremos algunos problemas con mayor grado de dificultad.

Cuando se tienen que integrar fracciones, es necesario a veces efectuar una división previa para obtener formas de integración familiares, como se verá en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 División antes de la integración

a. *Encontrar* $\int \frac{x^3 + x}{x^2}\, dx.$

Solución: no es evidente una forma familiar de integración. Sin embargo, podemos descomponer el integrando en dos fracciones, dividiendo cada término del numerador entre el denominador. Entonces tenemos

Aquí partimos la integral.

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2}\, dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2}\right] dx = \int \left[x + \frac{1}{x}\right] dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

b. *Encontrar* $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1}\, dx.$

Solución: aquí el integrando es un cociente de polinomios en donde el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, y el denominador tiene más de un término. En tal caso, para integrar efectuamos primero la división hasta que el grado del residuo sea menor que el del divisor. Obtenemos

Aquí utilizamos la división larga para reescribir el integrando.

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1}\, dx = \int \left(x^2 + x + \frac{1}{2x + 1}\right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{2x + 1}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}[2\,dx]$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$$

EJEMPLO 2 Integrales indefinidas

a. *Encontrar* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^3}\,dx.$

Solución: podemos escribir esta integral como $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-2)^{-3}}{\sqrt{x}}\,dx$. Consideremos la regla de la potencia para integración con $u = \sqrt{x} - 2$. Entonces $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, y

Aquí la integral se ajusta a la forma en la que puede aplicarse la regla de la potencia para integración.

$$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^{-3}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int (\sqrt{x}-2)^{-3}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right]$$

$$= 2\int u^{-3}\,du = 2\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{u^2} + C = -\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2} + C.$$

b. *Encontrar* $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx.$

Solución: si $u = \ln x$, entonces $du = \dfrac{1}{x}\,dx$, y

Aquí la integral se lleva a la forma conocida $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du.$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\,dx\right) = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C,$$

c. *Encontrar* $\displaystyle\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}\,dw.$

Solución: si $u = \ln w$, entonces $du = \dfrac{1}{w}\,dw$. Aplicando la regla de la potencia para integración, tenemos

Aquí la integral se ajusta a la forma en la que se puede aplicar la regla de la potencia para integración.

$$\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}\,dw = 5\int (\ln w)^{-3/2}\left(\frac{1}{w}\,dw\right)$$

$$= 5\int u^{-3/2}\,du = 5\cdot\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{-10}{u^{1/2}} + C = -\frac{10}{(\ln w)^{1/2}} + C.$$

Integración de a^u

En la sección 14.3 integramos una función exponencial con base *e:*

$$\int e^u \, du = e^u + C.$$

Consideremos ahora la integral de una función exponencial con una base diferente a *e:*

$$\int a^u \, du.$$

Para encontrar esta integral, primero convertimos a^u en una función exponencial con base e por medio del uso de la propiedad 8 de la sección 5.3:

$$a = e^{\ln a}. \tag{1}$$

El ejemplo 3 ilustrará esto.

EJEMPLO 3 **Una integral que incluye $a^u \, du$**

Encontrar $\int 2^{3-x} \, dx.$

Solución:

Estrategia: queremos integrar una función exponencial con base 2. Para hacer esto, primero convertimos de base 2 a base e usando la ecuación (1) para escribir 2 en términos de e.

Como $2 = e^{\ln 2}$, tenemos

$$\int 2^{3-x} \, dx = \int (e^{\ln 2})^{3-x} \, dx = \int e^{(\ln 2)(3-x)} \, dx.$$

La última integral tiene un integrando de la forma e^u, donde $u = (\ln 2)(3 - x)$. Como $du = -\ln 2 \, dx$, tenemos

$$\int e^{(\ln 2)(3-x)} \, dx = -\frac{1}{\ln 2}\int e^{(\ln 2)(3-x)}[(-\ln 2) \, dx] \quad \left(\text{de la forma: } \int e^u \, du\right)$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}e^{(\ln 2)(3-x)} + C = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C.$$

Así,

$$\int 2^{3-x} \, dx = -\frac{1}{\ln 2}\,2^{3-x} + C.$$

Note que expresamos la respuesta en términos de una función exponencial con base 2, la base del integrando original.

Generalizando el procedimiento descrito en el ejemplo 3, podemos obtener una fórmula para integrar a^u:

$$\begin{aligned}\int a^u\,du &= \int (e^{\ln a})^u\,du = \int e^{(\ln a)u}\,du \\ &= \frac{1}{\ln a}\int e^{(\ln a)u}[(\ln a)\,du] && (\ln a \text{ es constante}) \\ &= \frac{1}{\ln a}e^{(\ln a)u} + C = \frac{1}{\ln a}(e^{\ln a})^u + C \\ &= \frac{1}{\ln a}a^u + C && (e^{\ln a} = a).\end{aligned}$$

De aquí, tenemos

$$\boxed{\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C.}$$

Aplicando esta fórmula a la integral del ejemplo 3 resulta

$$\begin{aligned}&\int 2^{3-x}\,dx && (a = 2, u = 3 - x) \\ &= -\int 2^{3-x}(-\,dx) && (du = -dx) \\ &= -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C,\end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido antes.

Aplicación de la integración

Ahora, consideraremos una aplicación de la integración que relaciona una función de consumo con la propensión marginal al consumo.

EJEMPLO 4 Determinación de una función de consumo a partir de la propensión marginal al consumo

Para cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por

$$\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}},$$

donde el consumo C es una función del ingreso nacional I. Aquí, I se expresa en miles de millones de slugs (50 *slugs* = \$0.01). *Determinar la función de consumo para el país si se sabe que el consumo es de* 10 *mil millones de slugs* ($C = 10$) *cuando* $I = 12$.

Solución: como la propensión marginal al consumo es la derivada de C, tenemos

$$\begin{aligned}C &= \int\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}\right)dI = \int \frac{3}{4}\,dI - \frac{1}{2}\int (3I)^{-1/2}\,dI \\ &= \frac{3}{4}I - \frac{1}{2}\int (3I)^{-1/2}\,dI.\end{aligned}$$

Si hacemos $u = 3I$, entonces $du = 3\,dI$ y

$$C = \frac{3}{4}I - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\int (3I)^{-1/2}[3\ dI]$$

$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{6}\frac{(3I)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C_1.$$

$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + C_1.$$

Éste es un ejemplo de un problema con condiciones iniciales.

Cuando $I = 12$, entonces $C = 10$, por lo que

$$10 = \frac{3}{4}(12) - \frac{\sqrt{3(12)}}{3} + C_1,$$

$$10 = 9 - 2 + C_1.$$

Por tanto $C_1 = 3$ y la función de consumo es

$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + 3.$$

Ejercicio 14.4

En los problemas del 1 al 56 determine las integrales indefinidas.

1. $\int \frac{2x^4 + 3x^3 - x^2}{x^3}\,dx.$
2. $\int \frac{9x^2 + 5}{3x}\,dx.$
3. $\int (3x^2 + 2)\sqrt{2x^3 + 4x + 1}\,dx.$
4. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 + 1}}\,dx.$
5. $\int \frac{15}{\sqrt{4 - 5x}}\,dx.$
6. $\int \frac{2xe^{x^2}\,dx}{e^{x^2} - 2}.$
7. $\int 4^{7x}\,dx.$
8. $\int 3^x\,dx.$
9. $\int 2x(7 - e^{x^2/4})\,dx.$
10. $\int \left(e^x + x^e + ex + \frac{e}{x}\right)dx.$
11. $\int \frac{6x^2 - 11x + 5}{3x - 1}\,dx.$
12. $\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{x - 5}\,dx.$
13. $\int \frac{3e^{2x}}{e^{2x} + 1}\,dx.$
14. $\int 6(e^{4-3x})^2\,dx.$
15. $\int \frac{e^{7/x}}{x^2}\,dx.$
16. $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + x - 2}{x - 2}\,dx.$
17. $\int \frac{2x^3}{x^2 - 4}\,dx.$
18. $\int \frac{5 - 4x^2}{3 + 2x}\,dx.$
19. $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{3\sqrt{x}}\,dx.$
20. $\int \frac{3e^s}{6 + 5e^s}\,ds.$
21. $\int \frac{5(x^{1/3} + 2)^4}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$
22. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.
23. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$
24. $\int \sqrt{t}(5 - t\sqrt{t})^{0.4}\,dt.$
25. $\int \frac{\ln^2(r + 1)}{r + 1}\,dr.$
26. $\int \frac{8x^3 - 6x^2 - ex^4}{3x^3}\,dx.$
27. $\int \frac{3^{\ln x}}{x}\,dx.$
28. $\int \frac{4}{x\ln(2x^2)}\,dx.$
29. $\int x\sqrt{e^{x^2+3}}\,dx.$
30. $\int \frac{x + 3}{x + 6}\,dx.$
31. $\int \frac{8}{(x + 3)\ln(x + 3)}\,dx.$
32. $\int (x^{e^2} + 2x)\,dx.$
33. $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^2 - 3}\,dx.$

34. $\displaystyle\int \frac{4x \ln \sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx.$

35. $\displaystyle\int \frac{6x\sqrt{\ln(x^2+1)^2}}{x^2+1}\,dx.$

36. $\displaystyle\int 3(x^2+2)^{-1/2} x e^{\sqrt{x^2+2}}\,dx.$

37. $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^4-1}} - \ln 4\right) dx.$

38. $\displaystyle\int \frac{x - x^{-2}}{x^2 + 2x^{-1}}\,dx.$

39. $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4}{x^3}\,dx.$

40. $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx.$

41. $\displaystyle\int \frac{x}{x-1}\,dx.$

42. $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\,dx.$

43. $\displaystyle\int \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+2}}\,dx.$

44. $\displaystyle\int \frac{7}{(2x+1)[1+\ln(2x+1)]^2}\,dx.$

45. $\displaystyle\int \frac{(e^{-x}+6)^2}{e^x}\,dx.$

46. $\displaystyle\int \left[\frac{1}{8x+1} - \frac{1}{e^x(8+e^{-x})^2}\right] dx.$

47. $\displaystyle\int (x^3 + ex)\sqrt{x^2+e}\,dx.$

48. $\displaystyle\int 2^{x \ln x}(1+\ln x)\,dx.$

49. $\displaystyle\int \sqrt{x}\sqrt{(8x)^{3/2}+3}\,dx.$

50. $\displaystyle\int \frac{3}{x(\ln x)^{1/2}}\,dx.$

51. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{s}}{e^{\sqrt{s^3}}}\,ds.$

52. $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{3x}\,dx.$

53. $\displaystyle\int e^{\ln(x+2)}\,dx.$

54. $\displaystyle\int dx.$

55. $\displaystyle\int \frac{\ln(xe^x)}{x}\,dx.$

56. $\displaystyle\int 2e^{x^2+\ln x}\,dx.$

En los problemas 57 y 58, dr/dq es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.

57. $\displaystyle\frac{dr}{dq} = \frac{200}{(q+2)^2}.$

58. $\displaystyle\frac{dr}{dq} = \frac{900}{(2q+3)^3}.$

En los problemas 59 y 60, dc/dq es una función de costo marginal. Encuentre la función de costo total, si los costos fijos en cada caso son de 2000.

59. $\displaystyle\frac{dc}{dq} = \frac{20}{q+5}.$

60. $\displaystyle\frac{dc}{dq} = 2e^{0.001q}.$

En los problemas del 61 al 63, dC/dI representa la propensión marginal al consumo. Encuentre la función de consumo sujeta a la condición dada.

61. $\displaystyle\frac{dC}{dI} = \frac{1}{\sqrt{I}}; \quad C(9) = 8.$

62. $\displaystyle\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}; \quad C(3) = \frac{11}{4}.$

63. $\displaystyle\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6\sqrt{I}}; \quad C(25) = 23.$

64. Función de costo La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = 10 - \frac{100}{q+10},$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades. Cuando se producen 100 unidades, el costo promedio es de \$50 por unidad. Con aproximación a la unidad de dólar más cercana, determine el costo fijo del fabricante.

65. Función de costo Suponga que la función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{100q^2 - 4998q + 50}{q^2 - 50q + 1},$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades.

a. Determine el costo marginal cuando se producen 50 unidades.

b. Si los costos fijos son de \$10,000, encuentre el costo total de producir 50 unidades.

c. Use el resultado de las partes (a) y (b) y diferenciales para aproximar el costo total de producir 52 unidades.

66. Función de costo La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{9}{10}\sqrt{q}\sqrt{0.04q^{3/4}+4},$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades. Los costos fijos son de \$360.

a. Determine el costo marginal cuando se producen 25 unidades.

b. Encuentre el costo total de producir 25 unidades.

c. Use los resultados de las partes (a) y (b) y diferenciales para estimar el costo total de producir 23 unidades.

67. Valor de la tierra Se estima que dentro de t años, contados a partir de ahora, el valor V (en dólares) de un acre de tierra cerca del pueblo fantasma de Cherokee, California, estará creciendo a razón de $\dfrac{8t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}$ dólares por año. Si el valor de la tierra es actualmente de \$500 por acre, ¿cuánto costará dentro de 10 años? Exprese su resultado al dólar más cercano.

68. Función de ingreso La función de ingreso marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dr}{dq} = \frac{3}{e^q + 2},$$

donde r es el ingreso total recibido (en dólares) cuando se producen y venden q unidades. Encuentre la función de demanda y exprésela en la forma $p = f(q)$. [*Sugerencia:* escriba nuevamente dr/dq al multiplicar numerador y denominador por e^{-q}.]

69. Ahorro La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{5}{(I + 2)^2}$$

donde S e I representan el ahorro y el ingreso totales nacionales, respectivamente, y están medidos en miles de millones de dólares. Si el consumo total nacional es de \$7.5 mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$8 mil millones, ¿para qué valor o valores de I el ahorro total nacional es igual a cero?

70. Función de consumo La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{1}{2} - \frac{1.8}{\sqrt[3]{3I^2}},$$

donde S e I representan el ahorro y el ingreso totales nacionales, respectivamente, y están medidos en miles de millones de dólares.

a. Determine la propensión marginal al consumo cuando el ingreso total nacional es de \$81 mil millones.
b. Determine la función de consumo si el ahorro es de \$3 mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$24 mil millones.
c. Use el resultado de la parte (b) para mostrar que el consumo es de \$54.9 mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$81 mil millones.
d. Use diferenciales y los resultados de las partes (a) y (c) para estimar el consumo cuando el ingreso total nacional es de \$78 mil millones.

OBJETIVO Introducir la notación sigma y dar fórmulas de sumas que se utilizarán en la sección siguiente.

14.5 SUMATORIA

Con el fin de prepararlo para otras aplicaciones de la integración, tendremos que analizar ciertas sumas.

Consideremos el cálculo de la suma S de los primeros n enteros positivos:

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n. \tag{1}$$

Si escribimos los términos del miembro derecho de la ecuación (1) en orden inverso tenemos

$$S = n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1. \tag{2}$$

Al sumar los miembros correspondientes de las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$\begin{array}{rcccccccc} S = & 1 & + & 2 & + \cdots + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & + & (n+1). \end{array}$$

En el miembro derecho de la última ecuación el término $(n + 1)$ aparece n veces. Así, $2S = n(n + 1)$, por lo que

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(suma de los primeros } n \text{ enteros positivos).} \tag{3}$$

Por ejemplo, la suma de los primeros 100 enteros positivos corresponde a $n = 100$ y es $100(100 + 1)/2$ o 5050.

Por conveniencia, para indicar una suma introduciremos la *notación sigma* o *de sumatoria*, llamada así por la letra griega Σ (sigma) que se usa. Por ejemplo, la notación

$$\sum_{k=1}^{3} (2k + 5)$$

denota la suma de aquellos números que se obtienen de la expresión $2k + 5$ al reemplazar primero k por 1, luego por 2 y finalmente por 3. Así,

$$\sum_{k=1}^{3}(2k+5) = [2(1)+5] + [2(2)+5] + [2(3)+5]$$
$$= 7 + 9 + 11 = 27.$$

La letra k se llama *índice de la sumatoria;* los número 1 y 3 son los *límites de la sumatoria* (1 es el *límite inferior* y 3 el *límite superior*). Los valores del índice comienzan en el límite inferior y toman valores enteros sucesivos hasta llegar al límite superior. El símbolo usado para el índice es "mudo", en el sentido de que no afecta a la suma de los términos. Puede usarse cualquier otra letra. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{3}(2j+5) = 7 + 9 + 11 = \sum_{k=1}^{3}(2k+5).$$

EJEMPLO 1 Notación sigma

a. *Evaluar* $\displaystyle\sum_{k=4}^{7}\frac{k^2+3}{2}$.

Solución: aquí, la suma comienza con $k = 4$. De modo que tenemos

$$\sum_{k=4}^{7}\frac{k^2+3}{2} = \frac{4^2+3}{2} + \frac{5^2+3}{2} + \frac{6^2+3}{2} + \frac{7^2+3}{2}$$
$$= \frac{19}{2} + \frac{28}{2} + \frac{39}{2} + \frac{52}{2} = 69.$$

b. *Evaluar* $\displaystyle\sum_{j=0}^{2}(-1)^{j+1}(j-1)^2$.

Solución:

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^{j+1}(j-1)^2$$
$$= (-1)^{0+1}(0-1)^2 + (-1)^{1+1}(1-1)^2 + (-1)^{2+1}(2-1)^2$$
$$= (-1) + 0 + (-1) = -2.$$

Para expresar la suma de los primeros n enteros positivos en notación sigma, podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Por la ecuación (3),

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.} \qquad (4)$$

Note en la ecuación (4) que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ es una función sólo de n, no de k.

EJEMPLO 2 Aplicación de la fórmula 4

a. *Evaluar* $\sum_{k=1}^{60} k$.

Solución: aquí, debemos encontrar la suma de los primeros 60 números enteros positivos. Por la ecuación (4) con $n = 60$,

$$\sum_{k=1}^{60} k = \frac{60(60+1)}{2} = 1830.$$

b. *Evaluar* $\sum_{k=1}^{n-1} k$.

Solución: aquí se deben sumar los primeros $n - 1$ enteros positivos. Reemplazando n por $n - 1$ en la ecuación (4), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Otra fórmula útil es la de la suma de los *cuadrados* de los primeros n enteros positivos:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{5}$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la fórmula 5

Evaluar $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$.

Solución: esta suma puede escribirse como $\sum_{k=1}^{6} k^2$. Por la ecuación (5) con $n = 6$,

$$\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6(6+1)[2(6)+1]}{6} = 91.$$

Concluimos con una propiedad de sigma. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales y c es una constante, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} cx_i &= cx_1 + cx_2 + \cdots + cx_n \\ &= c(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = c\sum_{i=1}^{n} x_i.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Esto significa que un factor constante puede “salir” del símbolo de sumatoria. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{5} 3i^2 = 3\sum_{i=1}^{5} i^2.$$

Por la ecuación (5), tenemos

$$\sum_{i=1}^{5} 3i^2 = 3\sum_{i=1}^{5} i^2 = 3\left[\frac{5(6)(11)}{6}\right] = 165.$$

Advertencia Aunque los factores constantes pueden “salir” del signo de suma, ninguna otra cosa puede salir.

Ejercicio 14.5

En los problemas del 1 al 10 evalúe la suma indicada.

1. $\sum_{k=1}^{5}(k+4)$.

2. $\sum_{k=12}^{15}(7-2k)$.

3. $\sum_{j=1}^{10}(-1)^j$.

4. $\sum_{j=0}^{5}2^j$.

5. $\sum_{n=2}^{3}(3n^2-7)$.

6. $\sum_{n=2}^{4}\frac{n+1}{n-1}$.

7. $\sum_{k=3}^{4}\frac{(-1)^k(k+1)}{2^k}$.

8. $\sum_{n=1}^{5}4$.

9. $\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^{k-1}(1-k^2)}{k}$.

10. $\sum_{n=1}^{4}(n^2+n)$.

En los problemas del 11 al 16 exprese las sumas dadas por medio de la notación sigma.

11. $1+2+3+\cdots+19$.

12. $7+8+9+10$.

13. $1+3+5+7$.

14. $2+4+6+8$.

15. $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$.

16. $3+6+9+12$.

En los problemas del 17 al 22 evalúe las sumas por medio de las ecuaciones (4) y (5).

17. $\sum_{k=1}^{450}k$.

18. $\sum_{k=1}^{10}k^2$.

19. $\sum_{j=1}^{6}4j$.

20. $\sum_{i=1}^{40}\frac{i}{2}$.

21. $\sum_{i=1}^{6}3i^2$.

22. $\sum_{j=1}^{8}\left(\frac{j}{2}\right)^2$.

23. Una compañía tiene un activo cuyo valor original es de \$3200 y no tiene valor de recuperación. El costo de mantenimiento anual es de \$100 y aumenta \$100 cada año. Demuestre que el costo promedio total anual C en un periodo de n años es

$$C = \frac{3200}{n} + 50(n+1).$$

Encuentre el valor de n que minimiza a C. ¿Cuál es el costo promedio anual para este valor de n?

OBJETIVO Explicar, por medio del concepto de área, la integral definida como un límite de una suma especial; evaluar integrales definidas sencillas por medio del proceso de límite.

14.6 La integral definida

La figura 14.1 muestra la región R limitada por las líneas $y = f(x) = 2x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = 1$. La región es simplemente un triángulo rectángulo. Si b y h son las longitudes de la base y de la altura, respectivamente, entonces, de geometría, el área A del triángulo es $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$ unidad cuadrada. Encontraremos ahora esta área por otro método, el cual como veremos posteriormente, se aplica a regiones más complejas. Este método implica la suma de áreas de rectángulos.

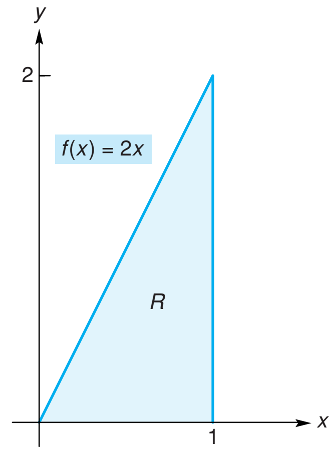


FIGURA 14.1 Región acotada por $f(x) = 2x$, $y = 0$, y $x = 1$
.

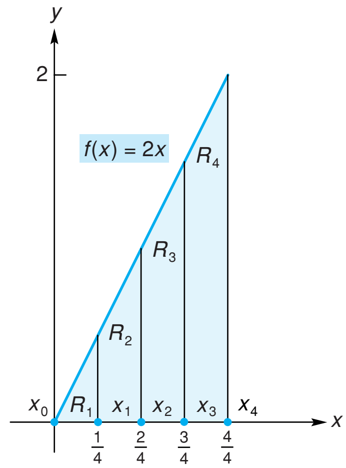


FIGURA 14.2 Cuatro subregiones de R.

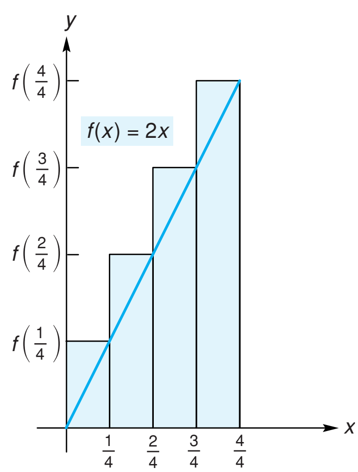


FIGURA 14.3 Cuatro rectángulos circunscritos.

Dividamos el intervalo $[0, 1]$ sobre el eje x, en cuatro subintervalos de igual longitud por medio de puntos igualmente separados, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, y $x_4 = \frac{4}{4} = 1$. (Véase la fig. 14.2.) Cada subintervalo tiene longitud de $\Delta x = \frac{1}{4}$. Estos subintervalos determinan cuatro subregiones de R: R_1, R_2, R_3 y R_4, como se indica.

Con cada subregión podemos asociar un rectángulo *circunscrito* (véase la fig. 14.3), esto es, un rectángulo cuya base es el correspondiente subintervalo y cuya altura es el valor *máximo* de $f(x)$ en cada subintervalo. Como f es una función creciente, el valor máximo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurre cuando x es el extremo derecho de éste. Así, las áreas de los rectángulos circunscritos asociados con las regiones R_1, R_2, R_3 y R_4 son $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$ y $\frac{1}{4}f(\frac{4}{4})$, respectivamente. El área de cada rectángulo es una aproximación al área de su correspondiente subregión. Así, la suma de las áreas de estos rectángulos, denotada por $\overline{S}_4$ (se lee "suma superior considerando 4 subintervalos"), aproxima el área A del triángulo. Tenemos

$$\begin{aligned}\overline{S}_4 &= \tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{2}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{3}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{4}{4})\\ &= \tfrac{1}{4}[2(\tfrac{1}{4}) + 2(\tfrac{2}{4}) + 2(\tfrac{3}{4}) + 2(\tfrac{4}{4})] = \tfrac{5}{4}.\end{aligned}$$

Usted puede verificar que es posible escribir $\overline{S}_4$ como $\overline{S}_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x$. El hecho de que $\overline{S}_4$ es mayor que el área real del triángulo era de esperarse, ya que $\overline{S}_4$ incluye áreas de regiones sombreadas que no pertenecen al triángulo (véase la fig. 14.3).

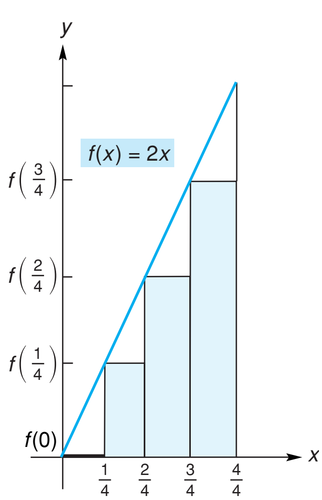


FIGURA 14.4 Cuatro rectángulos inscritos.

Por otra parte, con cada subregión podemos también asociar un rectángulo *inscrito* (véase la fig. 14.4), esto es, un rectángulo cuya base es el subintervalo correspondiente pero cuya altura es el valor *mínimo* de $f(x)$ en ese subintervalo. Como f es una función creciente, el valor mínimo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurrirá cuando x sea el extremo izquierdo de éste. Así, las áreas de los cuatro rectángulos inscritos asociados con R_1, R_2, R_3 y R_4 son $\frac{1}{4}f(0)$, $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$ y $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$, respectivamente. Su suma, denotada $\underline{S}_4$ (se lee "suma inferior considerando 4 intervalos") es también una aproximación al área A del triángulo. Tenemos

$$\begin{aligned}\underline{S}_4 &= \tfrac{1}{4}f(0) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{2}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{3}{4})\\ &= \tfrac{1}{4}[2(0) + 2(\tfrac{1}{4}) + 2(\tfrac{2}{4}) + 2(\tfrac{3}{4})] = \tfrac{3}{4}.\end{aligned}$$

Usando la notación sigma podemos escribir $\underline{S}_4 = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\Delta x$. Observe que $\underline{S}_4$ es menor que el área del triángulo porque los rectángulos no toman en cuenta aquella porción del triángulo que no está sombreada en la figura 14.4.

Como

$$\tfrac{3}{4} = \underline{S}_4 \leq A \leq \overline{S}_4 = \tfrac{5}{4},$$

decimos que $\underline{S}_4$ es una aproximación a A por *abajo* y $\overline{S}_4$ es una aproximación a A por *arriba*.

Si $[0, 1]$ se divide en más subintervalos, esperamos que ocurran mejores aproximaciones a A. Para probar esto, usemos seis subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{1}{6}$. Entonces $\overline{S}_6$ el área total de seis rectángulos circunscritos (véase la fig. 14.5), y $\underline{S}_6$, el área total de seis rectángulos inscritos (véase la fig. 14.6), son

$$\begin{aligned}\overline{S}_6 &= \tfrac{1}{6}f(\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{2}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{3}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{4}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{5}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{6}{6})\\ &= \tfrac{1}{6}[2(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{2}{6}) + 2(\tfrac{3}{6}) + 2(\tfrac{4}{6}) + 2(\tfrac{5}{6}) + 2(\tfrac{6}{6})] = \tfrac{7}{6}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\underline{S}_6 &= \tfrac{1}{6}f(0) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{2}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{3}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{4}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{5}{6})\\ &= \tfrac{1}{6}[2(0) + 2(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{2}{6}) + 2(\tfrac{3}{6}) + 2(\tfrac{4}{6}) + 2(\tfrac{5}{6})] = \tfrac{5}{6}.\end{aligned}$$

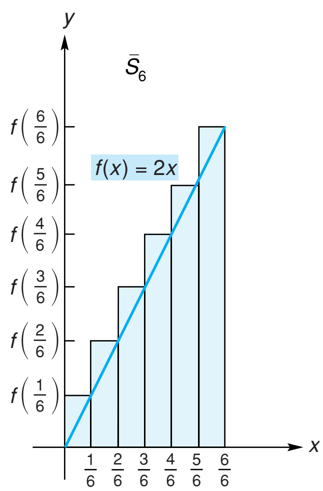


FIGURA 14.5 Seis rectángulos circunscritos.

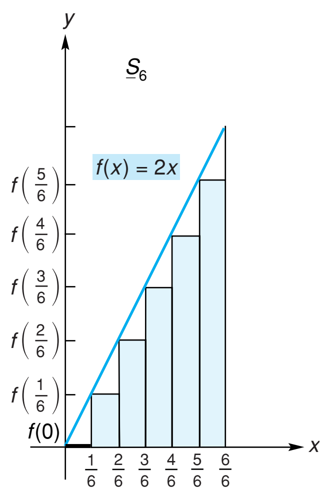


FIGURA 14.6 Seis rectángulos inscritos.

Observe que $\underline{S}_6 \leq A \leq \overline{S}_6$ y, con la notación apropiada, tanto $\overline{S}_6$ como $\underline{S}_6$ serán de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$. Es claro que usando seis subintervalos se obtuvo una mejor aproximación al área que con cuatro subintervalos, como era de esperarse.

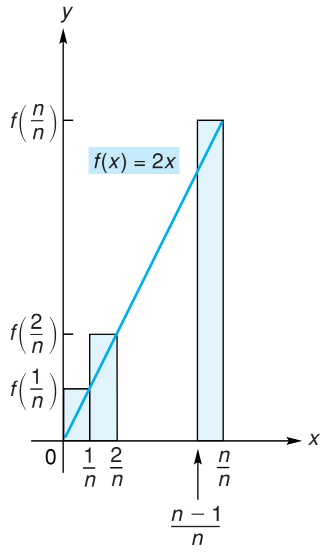


FIGURA 14.7 n rectángulos circunscritos.

En términos generales, si dividimos $[0, 1]$ en n subintervalos de igual longitud Δx, entonces $\Delta x = 1/n$ y los puntos extremos de los subintervalos son $x = 0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n$, y $n/n = 1$ (véase la fig. 14.7). El área de n rectángulos *circunscritos* es

$$\begin{aligned}\overline{S}_n &= \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right) \qquad (1)\\ &= \frac{1}{n}\left[2\left(\frac{1}{n}\right) + 2\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + 2\left(\frac{n}{n}\right)\right]\\ &= \frac{2}{n^2}[1 + 2 + \cdots + n] \qquad \left(\textit{al factorizar } \frac{2}{n} \text{ en cada término}\right).\end{aligned}$$

De la sección 14.5, la suma de los n primeros enteros positivos es $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Así,

$$\overline{S}_n = \left(\frac{2}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}.$$

Para n rectángulos *inscritos*, el área total determinada por los subintervalos (véase la fig. 14.8) es

$$\begin{aligned}\underline{S}_n &= \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right) \qquad (2)\\ &= \frac{1}{n}\left[2(0) + 2\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + 2\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\\ &= \frac{2}{n^2}[1 + \cdots + (n-1)].\end{aligned}$$

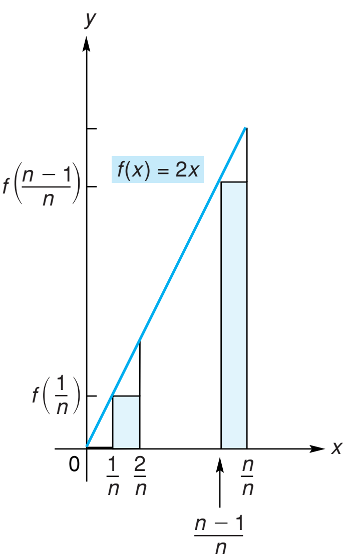


FIGURA 14.8 n rectángulos inscritos.

Sumando los primeros $n - 1$ enteros positivos, como hicimos en el ejemplo 2(b) de la sección 14.5, obtenemos

$$\underline{S}_n = \left(\frac{2}{n^2}\right)\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{n}.$$

De las ecuaciones (1) y (2) se observa nuevamente que $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ son sumas de la *forma* $\Sigma f(x)\Delta x$, es decir, $\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$ y $\underline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$.

Por la naturaleza de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ parece razonable, y de hecho es cierto, que

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n.$$

Conforme n crece, $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$ resultan ser mejores aproximaciones para A. De hecho, tomamos los límites de $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$, cuando n tienda a ∞ a través de valores enteros positivos:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Como $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ tienen el mismo límite común, a saber,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = 1, \tag{3}$$

y como

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n,$$

debemos considerar este límite como el área del triángulo. Así, $A = 1$ unidad cuadrada, lo cual concuerda con nuestro valor anterior.

Llamamos al límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, o sea 1, la *integral definida* de $f(x) = 2x$ sobre el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$, y denotamos esta cantidad escribiendo

$$\int_0^1 2x\,dx = 1. \tag{4}$$

La razón para usar el término *integral definida* y el simbolismo de la ecuación (4), será evidente en la siguiente sección. Los números 0 y 1 que aparecen con el signo $\int$ en la ecuación (4) se llaman *límites de integración*; 0 es el *límite inferior* y 1 es el *límite superior*.

En general, para una función f definida sobre el intervalo de $x = a$ a $x = b$, donde $a < b$, podemos formar las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, que se obtienen considerando los valores máximo y mínimo, respectivamente, en cada uno de n subintervalos de igual longitud Δx.[5] Ahora podemos establecer lo siguiente:

El límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ cuando $n \to \infty$, si éste existe, se llama **integral definida** de f sobre $[a, b]$ y se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Los números a y b se llaman **límites de integración;** a es el **límite inferior** y b es el **límite superior.** EL símbolo x se llama **variable de integración** y $f(x)$ es el **integrando.**

En términos de un proceso límite, tenemos

$$\sum f(x)\,\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

La integral definida es el límite de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$. Esta interpretación será útil en secciones posteriores.

Debemos aclarar dos puntos acerca de la integral definida. Primero, la integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$. De hecho, podemos pensar el signo de integral como una "S" alargada, que es la primera letra de "sumatoria". Segundo, para una función f arbitraria definida en un intervalo, podemos calcular las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ y determinar su límite común en caso de que exista. Sin embargo, algunos términos de las sumas pueden ser negativos, si $f(x)$ es negativa en puntos del intervalo. Estos términos no son áreas de rectángulos (un área nunca es negativa), por lo que el límite común puede no representar un área. Así, **la integral definida no es otra cosa que un número real y puede o no representar un área.**

Como vimos en la ecuación (3) $\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n$ es igual a $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$. Para una función arbitraria esto no siempre es cierto. Sin embargo, para las funciones que consideraremos, esos límites serán iguales y la integral definida siempre existirá. Para

[5]Aquí suponemos que los valores máximo y mínimo existen.

ahorrar tiempo, usaremos sólo el **extremo derecho** de cada subintervalo al calcular una suma. Para las funciones en esta sección, esta suma se denotará como S_n y corresponderá ya sea a $\underline{S}_n$ o bien a $\overline{S}_n$.

En general, en $[a, b]$, tenemos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

EJEMPLO 1 Cálculo de un área usando extremos derechos

Encontrar el área de la región en el primer cuadrante limitada por $f(x) = 4 - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $y = 0$.

Solución: en la figura 14.9 se da el bosquejo de la región. Se ve que el intervalo en el cual varía x es $[0, 2]$, que subdividimos en n subintervalos de igual longitud Δx. Como la longitud de $[0, 2]$ es 2, tomamos $\Delta x = 2/n$. Los extremos de los subintervalos son $x = 0, 2/n, 2(2/n), \ldots, (n-1)(2/n)$ y $n(2/n) = 2$, que se muestran en la figura 14.10. El diagrama también muestra los correspondientes rectángulos obtenidos usando el extremo derecho de cada subintervalo. El área de cada rectángulo es el producto de su

Principios en práctica 1
Cálculo de un área por medio de los extremos del lado derecho

Una compañía ha determinado que su función de ingreso marginal está dada por $R'(x) = 600 - 0.5x$, en donde R es el ingreso (en dólares) recibido cuando se venden x unidades. Determine el ingreso total recibido por la venta de 10 unidades, determinando el área en el primer cuadrante acotada por $y = R'(x) = 600 - 0.5x$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$, y $x = 10$.

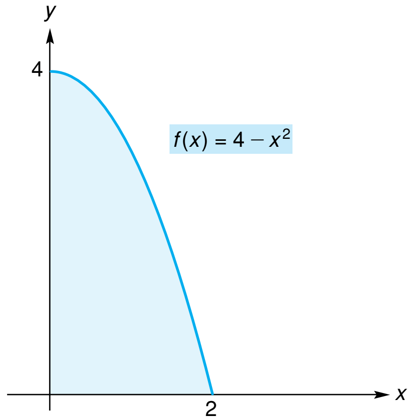


FIGURA 14.9 La región del ejemplo 1.

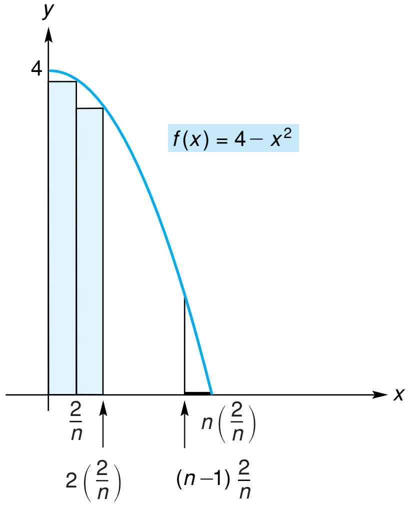


FIGURA 14.10 n subintervalos y los rectángulos correspondientes para el ejemplo 1.

ancho $(2/n)$ y su altura, que es el valor en el extremo derecho de su base. Al sumar estas áreas, obtenemos

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n} f\left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + \frac{2}{n} f\left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right] \\ &= \frac{2}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + f\left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right]\right] \\ &= \frac{2}{n}\left[\left\{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2\right\} + \left\{4 - \left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right]^2\right\} + \cdots + \left\{4 - \left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right]^2\right\}\right]. \end{aligned}$$

Como el número 4 aparece n veces en la suma, podemos simplificar S_n. Obtenemos

$$S_n = \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 - 2^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 - \cdots - n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\}\right].$$

De la sección 14.5, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, por lo que

$$S_n = \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= 8 - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} \qquad \text{(distribución)}$$

$$= 8 - \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}\right) \qquad \text{(expansión).}$$

Por último, se considera el límite de S_n cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[8 - \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[8 - \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{16}{3}.$$

Por consiguiente, el área de la región es de $\frac{16}{3}$ unidades cuadradas.

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida

Evaluar $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$.

Solución: queremos encontrar la integral definida de $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[0, 2]$. Así, tenemos que calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$. Pero este límite es precisamente el límite $\frac{16}{3}$ encontrado en el ejemplo 1, por ello concluimos que

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \frac{16}{3}.$$

No se le agregan unidades a la respuesta, ya que una integral definida es sólo un número sin dimensiones.

EJEMPLO 3 Integración de una función sobre un intervalo

Integrar $f(x) = x - 5$ *entre* $x = 0$ *y* $x = 3$; *esto es, evaluar* $\int_0^3 (x - 5)\,dx$.

Solución: primero dividimos $[0, 3]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = 3/n$. Los puntos extremos son $0,\ 3/n, 2(3/n),\ \ldots, (n-1)(3/n), n(3/n) = 3$ (véase la fig. 14.11). Usando los extremos derechos formamos la suma

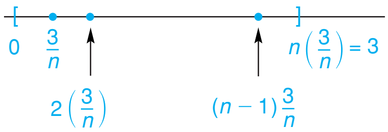


FIGURA 14.11 División de $[0, 3]$ en n subintervalos.

$$S_n = \frac{3}{n}f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{3}{n}f\left[2\left(\frac{3}{n}\right)\right] + \cdots + \frac{3}{n}f\left[n\left(\frac{3}{n}\right)\right].$$

Al simplificar, tenemos

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{n}\left[\left\{\frac{3}{n} - 5\right\} + \left\{2\left(\frac{3}{n}\right) - 5\right\} + \cdots + \left\{n\left(\frac{3}{n}\right) - 5\right\}\right] \\ &= \frac{3}{n}\left[-5n + \frac{3}{n}\{1 + 2 + \cdots + n\}\right] \\ &= \frac{3}{n}\left[-5n + \left(\frac{3}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}\right] \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= -15 + \frac{9}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= -15 + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Al calcular el límite, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[-15 + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = -15 + \frac{9}{2} = -\frac{21}{2}.$$

Por tanto,

$$\int_0^3 (x - 5)\, dx = -\frac{21}{2}.$$

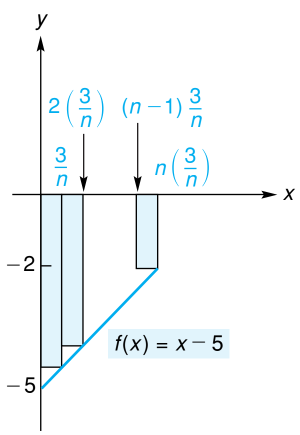


FIGURA 14.12 $f(x)$ es negativa en cada extremo derecho.

Observe que la integral definida en este caso es un número *negativo*. La razón es clara de la gráfica de $f(x) = x - 5$ en el intervalo $[0, 3]$. (Véase la fig. 14.12.) Como el valor $f(x)$ es negativo en cada extremo derecho, cada término en S_n debe también ser negativo. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n$, que es la integral definida, es negativo. Geométricamente, cada término en S_n es el valor negativo del área de un rectángulo (véase la fig. 14.12). Aunque la integral definida es sólo un número, aquí podemos interpretarla como la representación del valor negativo del área de la región limitada por $f(x) = x - 5, x = 0, x = 3$ y el eje x ($y = 0$).

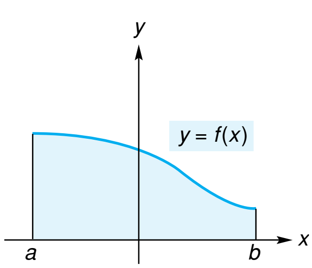


FIGURA 14.13 Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ representa el área.

En el ejemplo 3 se demostró que *la integral definida no tiene que representar un área*. De hecho, ahí la integral definida fue negativa. Sin embargo, si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $S_n \geq 0$ para todo valor de n. Por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} S_n \geq 0$, por lo que $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$. Además, está integral definida da el área de la región limitada por $y = f(x), y = 0, x = a$ y $x = b$ (véase la fig. 14.13).

Aunque el procedimiento que usamos para analizar la integral definida es suficiente para nuestros fines, no es riguroso. **Lo importante por recordar acerca de la integral definida es que es el límite de una suma especial.**

Tecnología

Aquí se presenta un programa para la calculadora gráfica TI-83 que estimará el límite de S_n cuando $n \to \infty$ para una función f definida en $[a, b]$.

```
PROGRAM:RIGHTSUM
Lbl 1
Input "SUBINTV",N
(B − A)/N → H
Ø → S
A + H → X
1 → I
Lbl 2
Y1 + S → S
X + H → X
I + 1 → I
If I ≤ N
Goto 2
H*S → S
Disp S
Pause
Goto 1
```

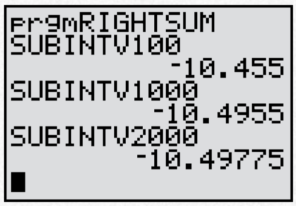


FIGURA 14.14 Los valores de S_n para $f(x) = x - 5$ en $[0, 3]$.

RIGHTSUM calculará S_n para un número dado n de subintervalos. Antes de ejecutar el programa, almacene $f(x)$, a y b como Y_1, A y B, respectivamente. Durante la ejecución del programa se le pedirá a usted indicar el número de subintervalos. El programa procederá entonces a exhibir el valor de S_n. Cada vez que oprima ENTER, el programa se repetirá. De esta manera, pueden obtenerse los valores de S_n para varios números de subintervalos. La figura 14.14 muestra valores de S_n ($n = 100$, 1000 y 2000) para la función $f(x) = x - 5$ en el intervalo $[0, 3]$. Cuando $n \to \infty$, se ve que $S_n \to -10.5$. Así estimamos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n \approx -10.5,$$

o, de manera equivalente,

$$\int_0^3 (x - 5)\, dx \approx -10.5,$$

lo cual concuerda con nuestro resultado del ejemplo 3. Es interesante notar que el tiempo requerido por una calculadora para calcular S_{2000} en la figura 14.14 fue mayor de 1.5 minutos.

Ejercicio 14.6

En los problemas del 1 al 4 esboce la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Aproxime el área de la región por medio de la suma indicada. Use el extremo derecho de cada subintervalo.

1. $f(x) = x, y = 0, x = 1$; $\quad S_3$.

2. $f(x) = 3x, y = 0, x = 1$; $\quad S_5$.

3. $f(x) = x^2, y = 0, x = 1$; $\quad S_3$.

4. $f(x) = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 1$; $\quad S_2$.

En los problemas 5 y 6, por medio de la división del intervalo indicado en n subintervalos de igual longitud, encuentre S_n para la función dada. Use el extremo derecho de cada subintervalo. No encuentre el $\lim_{n\to\infty} S_n$.

5. $f(x) = 4x$; $\quad [0, 1]$.

6. $f(x) = 2x + 1$; $\quad [0, 2]$.

En los problemas 7 y 8, (a) simplifique S_n y (b) encuentre $\lim_{n\to\infty} S_n$.

7. $S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \left(\frac{2}{n} + 1\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n} + 1\right)\right]$.

8. $S_n = \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(n \cdot \frac{2}{n}\right)^2\right]$.

En los problemas del 9 al 14 esboce la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Determine el área exacta de la región considerando el límite de S_n, cuando $n \to \infty$. Use el extremo derecho de cada subintervalo.

9. Región descrita en el problema 1.

10. Región descrita en el problema 2.

11. Región descrita en el problema 3.

12. Región descrita en el problema 4.

13. $f(x) = 2x^2, y = 0, x = 2$.

14. $f(x) = 9 - x^2, y = 0, x = 0$.

En los problemas del 15 al 20 evalúe la integral definida dada tomando el límite de S_n. Use el extremo derecho de cada subintervalo. Esboce la gráfica, en el intervalo dado, de la función por integrar.

15. $\int_0^2 3x\; dx$.

16. $\int_0^4 9\; dx$.

17. $\int_0^3 -4x\, dx$.

18. $\int_0^3 (2x - 9)\,dx.$ **19.** $\int_0^1 (x^2 + x)\,dx.$ **20.** $\int_1^2 (x + 2)\,dx.$

21. Encuentre $D_x\left[\int_2^3 \sqrt{x^2+1}\,dx\right]$ sin usar límites.

22. Encuentre $\int_0^3 f(x)\,dx$ sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 2x - 2, & \text{si } 1 \le x \le 2, \\ 2, & \text{si } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

23. Encuentre $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \le 1, \\ 2 - x, & \text{si } 1 \le x \le 2, \\ -1 + \dfrac{x}{2}, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

*En los problemas del 24 al 26 use un programa como el **RIGHTSUM,** para estimar el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a un decimal.*

24. $f(x) = x^3 + 1, y = 0, x = 2, x = 3.7.$

25. $f(x) = \sqrt{x}, y = 0, x = 1.3, x = 4.$

26. $f(x) = e^x, y = 0, x = 0, x = 1.$

*En los problemas del 27 al 30 use un programa como el **RIGHTSUM,** para estimar el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a un decimal.*

27. $\int_2^5 \frac{x+1}{x+2}\,dx.$ **28.** $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx.$ **29.** $\int_{-1}^2 (4x^2 + x - 13)\,dx.$ **30.** $\int_{0.1}^{0.2} \ln x\;dx.$

OBJETIVO Hacer un desarrollo informal del teorema fundamental del cálculo y utilizarlo para calcular integrales definidas. Obtener un cambio en los valores de la función cuando la tasa de cambio en la función es conocida.

14.7 El teorema fundamental del cálculo integral

Teorema fundamental

Hasta ahora, hemos considerado por separado los procesos de cálculo de la derivada y de la integral definida. Ahora juntaremos esas ideas fundamentales y desarrollaremos la importante relación que existe entre ellas. Como resultado, podremos evaluar las integrales definidas en forma más eficiente.

La gráfica de una función f está dada en la figura 14.15. Supongamos que f es continua en el intervalo $[a, b]$ y que su gráfica no cae debajo del eje x. Esto es, $f(x) \ge 0$. De la sección precedente, el área de la región debajo de la gráfica y arriba del eje x entre $x = a$ y $x = b$, está dada por $\int_a^b f(x)\,dx$. Consideraremos ahora otra manera de determinar está área.

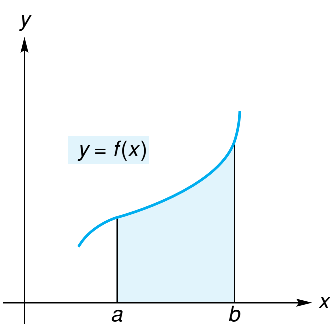


FIGURA 14.15 En $[a, b]$, f es continua y $f(x) \ge 0$.

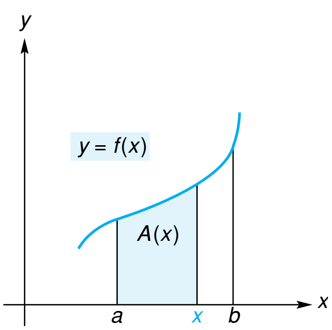


FIGURA 14.16 $A(x)$ es una función de área.

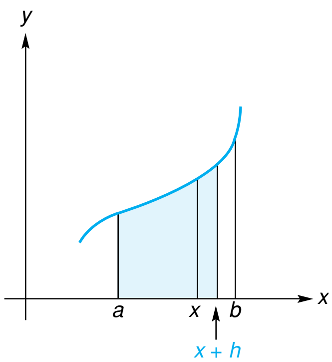


FIGURA 14.17 $A(x + h)$ proporciona el área de la región sombreada.

Supongamos que existe una función $A = A(x)$, a la cual nos referiremos como una función de área, que nos da el área de la región debajo de la gráfica de f y arriba del eje x, entre a y x, donde $a \leq x \leq b$. Esta región aparece sombreada en la figura 14.16. No confunda $A(x)$, que es un área, con $f(x)$, que es la altura de la gráfica en x.

Con base en su definición, podemos enunciar inmediatamente dos propiedades de A:

1. $A(a) = 0$, ya que no hay "área" entre a y a;
2. $A(b)$ es el área ente a y b; esto es

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Si x se incrementa en h unidades, entonces $A(x + h)$ es el área de la región sombreada en la figura 14.17. Por tanto, $A(x + h) - A(x)$ es la diferencia de las áreas en las figuras 14.17 y 14.16, o sea, el área de la región sombreada en la figura 14.18. Para una h suficientemente cercana a cero, el

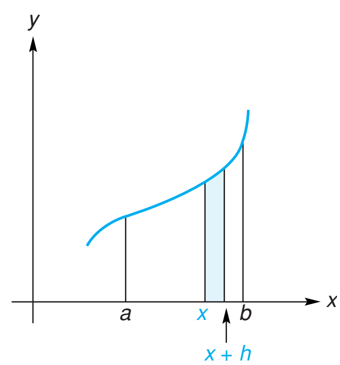


FIGURA 14.18 El área de la región sombreada es $A(x + h) - A(x)$.

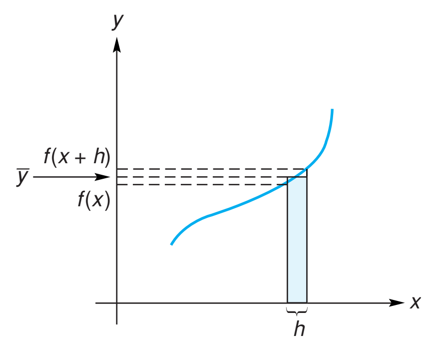


FIGURA 14.19 El área del rectángulo es la misma que el área de la región sombreada en la figura 14.18.

área de esta región es la misma que la de un rectángulo (véase la fig. 14.19) cuya base sea h y su altura algún valor $\bar{y}$ entre $f(x)$ y $f(x + h)$. Aquí $\bar{y}$ es una función de h. Así, el área del rectángulo es, por una parte, $A(x + h) - A(x)$, y por otra $h\bar{y}$, por lo que

$$A(x + h) - A(x) = h\bar{y}$$

o

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} = \bar{y} \qquad \text{(dividiendo entre } h\text{).}$$

Cuando $h \to 0$, $\bar{y}$ se aproxima al número $f(x)$, por lo que

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = f(x). \qquad \textbf{(1)}$$

Pero el miembro izquierdo es simplemente la deriva de A. La ecuación (1) se puede entonces escribir como

$$A'(x) = f(x).$$

Concluimos que la función de área A tiene la propiedad adicional de que su derivada A' es f. Esto es, A es una antiderivada de f. Ahora, supongamos que

F es *cualquier* antiderivada de f. Como A y F son antiderivadas de la misma función, difieren cuando mucho en una constante

$$A(x) = F(x) + C. \tag{2}$$

Recuerde que $A(a) = 0$. Por lo que, al evaluar ambos miembros de la ecuación (2) para $x = a$, resulta

$$0 = F(a) + C,$$

o

$$C = -F(a).$$

Así, la ecuación (2) se convierte en

$$A(x) = F(x) - F(a). \tag{3}$$

Entonces, si $x = b$, de la ecuación (3)

$$A(b) = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Pero recuerde que

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

De las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La relación entre una integral definida y la antidiferenciación ha resultado clara. Para encontrar $\int_a^b f(x)\,dx$ basta encontrar una antiderivada de f, digamos F, y restar el valor de F en el límite inferior a, de su valor en el límite superior b. Supusimos que f era continua y $f(x) \geq 0$ para poder usar el concepto de "área". Sin embargo, nuestro resultado es cierto para cualquier función continua,[6] y se conoce como el *teorema fundamental del cálculo integral*.

Teorema fundamental del cálculo integral

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La integral definida es un número, y una integral indefinida es una función.

Es importante que entienda la diferencia entre una integral definida y una integral indefinida. La **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$ es un **número definido** como el límite de una suma. El teorema fundamental establece que la **integral indefinida** $\int f(x)\,dx$ (una antiderivada de f), la cual es una **función** de x y está relacionada con el proceso de diferenciación, puede usarse para determinar ese límite.

[6] Si f es continua en $[a, b]$, puede demostrarse que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Supongamos que aplicamos el teorema fundamental para evaluar $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$. Aquí, $f(x) = 4 - x^2$, $a = 0$ y $b = 2$. Como una antiderivada de $4 - x^2$ es $F(x) = 4x - (x^3/3)$, se sigue que

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = F(2) - F(0) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0) = \frac{16}{3}.$$

Esto confirma nuestro resultado del ejemplo 2 de la sección 14.6. Si hubiésemos escogido $F(x)$ como $4x - (x^3/3) + C$, entonces

$$F(2) - F(0) = \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) + C\right] - [0 + C] = \frac{16}{3},$$

igual que antes. Ya que el valor escogido para C es irrelevante, por conveniencia lo escogeremos siempre igual a 0, como se hizo inicialmente. Por lo general, $F(b) - F(a)$ se abrevia escribiendo

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Por tanto, tenemos

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}.$$

Principios en práctica 1

Aplicación del teorema fundamental

El ingreso (en dólares) de una cadena de comida rápida está aumentando a una tasa de $f(t) = 10{,}000e^{0.02t}$, donde t está en años. Determine $\int_3^6 10{,}000e^{0.02t}\,dt$, que proporciona el ingreso total para la cadena entre el tercero y sexto años.

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema fundamental

Encontrar $\int_{-1}^3 (3x^2 - x + 6)\,dx$.

Solución: una antiderivada de $3x^2 - x + 6$ es

$$x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^3 (3x^2 - x + 6)\,dx \\
&= \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{-1}^3 \\
&= \left[3^3 - \frac{3^2}{2} + 6(3)\right] - \left[(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1)\right] \\
&= \left(\frac{81}{2}\right) - \left(-\frac{15}{2}\right) = 48.
\end{aligned}$$

Propiedades de la integral definida

Para $\int_a^b f(x)\,dx$ hemos supuesto que $a < b$. Ahora se definen los casos en que $a > b$ o $a = b$. Primero,

$$\text{si } a > b, \text{ entonces } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Esto es, al intercambiar los límites de integración se cambia el signo de la integral. Por ejemplo,

$$\int_2^0 (4 - x^2)\,dx = -\int_0^2 (4 - x^2)\,dx.$$

Si los límites de integración son iguales, tenemos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Algunas propiedades de la integral definida merecen mencionarse. La primera propiedad replantea más formalmente nuestro comentario de la sección anterior sobre áreas.

Propiedades de la integral definida

1. Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$.

2. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,$ donde k es una constante.

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

Las propiedades 2 y 3 son similares a las reglas para las integrales indefinidas porque una integral definida puede evaluarse, utilizando el teorema fundamental, en términos de una antiderivada. Se dan a continuación dos propiedades más de las integrales definidas.

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$

La variable de integración es una "variable muda" en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado, esto es, el mismo número.

Para ilustrar la propiedad 4, usted puede verificar, por ejemplo, que

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^2 t^2\,dt.$$

5. Si f es continua sobre un intervalo I, y a, b y c están en I, entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

La propiedad 5 significa que la integral definida en un intervalo puede expresarse en términos de integrales definidas en subintervalos. Así

$$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \int_0^1 (4 - x^2)\, dx + \int_1^2 (4 - x^2)\, dx.$$

Veremos ahora ejemplos de integración definida y calcularemos algunas áreas en la sección siguiente.

EJEMPLO 2 Uso del teorema fundamental

Encontrar $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\, dx.$

Solución: para encontrar una antiderivada del integrando, aplicaremos la regla de la potencia para integración:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\, dx &= \int_0^1 x^3(1 + x^4)^{-1/2}\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (1 + x^4)^{-1/2}[4x^3\, dx] = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(1 + x^4)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(2)^{1/2} - \frac{1}{2}(1)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

Advertencia En el ejemplo 2, el valor de la antiderivada $\frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}$ en el límite inferior es $\frac{1}{2}(1)^{1/2}$. **No** suponga que una evaluación en el límite cero da como resultado 0.

EJEMPLO 3 Evaluación de integrales definidas

a. *Encontrar* $\displaystyle\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3]\, dt.$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3]\, dt &= 4\int_1^2 t^{1/3}\, dt + \frac{1}{2}\int_1^2 (t^2 + 1)^3 [2t\, dt] \\
&= (4)\frac{t^{4/3}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(t^2 + 1)^4}{4}\Bigg|_1^2 \\
&= 3(2^{4/3} - 1) + \frac{1}{8}(5^4 - 2^4) \\
&= 3 \cdot 2^{4/3} - 3 + \frac{609}{8}, \\
&= 6\sqrt[3]{2} + \frac{585}{8}.
\end{aligned}$$

b. *Encontrar* $\displaystyle\int_0^1 e^{3t}\, dt.$

Solución:

$$\int_0^1 e^{3t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3t}[3\,dt]$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)e^{3t}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^3 - e^0) = \frac{1}{3}(e^3 - 1).$$

EJEMPLO 4 Determinación e interpretación de una integral definida

Evaluar $\int_{-2}^{1} x^3\,dx.$

Solución:

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

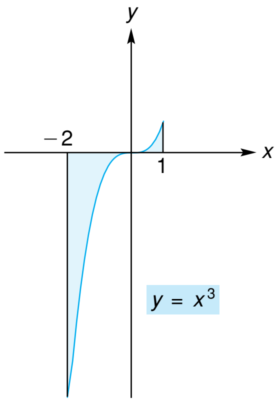


FIGURA 14.20 Gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$.

La razón por la que el resultado es negativo es clara si observamos la gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$. (Véase la fig. 14.20.) Para $-2 \le x < 0$, $f(x)$ es negativa. Como una integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$, se deduce que $\int_{-2}^{0} x^3\,dx$ no es sólo un número negativo, sino también el negativo del área de la región sombreada en el tercer cuadrante. Por otra parte, $\int_0^1 x^3\,dx$ es el área de la región sombreada en el primer cuadrante, ya que $f(x) \ge 0$ en $[0, 1]$. La integral definida en el intervalo entero $[-2, 1]$ es la suma *algebraica* de estos números, ya que, por la propiedad 5,

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx.$$

Así, $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$ no representa el área entre la curva y el eje x. Sin embargo, si se desea el área, ésta puede darse como el valor de

$$\left|\int_{-2}^{0} x^3\,dx\right| + \int_0^1 x^3\,dx.$$

Advertencia Recuerde que $\int_a^b f(x)\,dx$ es un límite de un suma. En algunos casos este límite representa un área. En otros no. Cuando $f(x) \ge 0$ en $[a, b]$, entonces la integral representa el área entre la gráfica de f y el eje x desde $x = a$ a $x = b$.

La integral definida de una derivada

Como una función f es una antiderivada de f', por el teorema fundamental tenemos

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \qquad (6)$$

Pero $f'(x)$ es la razón de cambio de f con respecto a x. De aquí que si conocemos la razón de cambio de f y es necesario encontrar la diferencia entre los valores de la función $f(b) - f(a)$, es suficiente con evaluar $\int_a^b f'(x)\,dx$.

■ ***Principios en práctica 2***

Cambio en los valores de una función

Un servicio administrativo determina que la tasa de incremento del costo de mantenimiento (en dólares por año) para un complejo privado de departamentos está dada por $M'(x) = 90x^2 + 5000$, en donde x es la edad del complejo de departamentos en años y $M(x)$ es el costo total (acumulado) de mantenimiento en x años. Determine el costo para los primeros cinco años.

EJEMPLO 5 Determinación de un cambio en los valores de la función por integración definida

La definición de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.6q + 2.$$

Si la producción actual es $q = 80$ unidades por semana, ¿cuánto más costará incrementar la producción a 100 unidades por semana?

Solución: la función de costo total es $c = c(q)$ y queremos encontrar la diferencia $c(100) - c(80)$. La razón de cambio de c es dc/dq; entonces, por la ecuación (6),

$$\begin{aligned} c(100) - c(80) &= \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq}\,dq = \int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq \\ &= \left[\frac{0.6q^2}{2} + 2q\right]\Bigg|_{80}^{100} = [0.3q^2 + 2q]\Big|_{80}^{100} \\ &= [0.3(100)^2 + 2(100)] - [0.3(80)^2 + 2(80)] \\ &= 3200 - 2080 = 1120. \end{aligned}$$

Si c está en dólares, entonces el costo de incrementar la producción de 80 a 100 unidades es \$1120. ■

Tecnología

Muchas calculadoras gráficas tienen la capacidad de estimar el valor de una integral definida. En una TI-83, para estimar

$$\int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq,$$

usamos el comando “fnInt(” como se indica en la figura 14.21. Los parámetros que deben proporcionarse con este comando son:

función que será integrada, variable de integración, límite inferior, límite superior.

Vemos que el valor de esta integral definida es de 1120, lo que concuerda con el resultado del ejemplo 5.

De manera similar, para estimar

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx$$

introducimos

$$\text{fnInt}(X^3, X, -2, 1),$$

o en forma alterna, si primero almacenamos x^3 como Y_1, podemos introducir

$$\text{fnInt}(Y_1, X, -2, 1).$$

En cada caso obtenemos -3.75, valor que concuerda con el resultado del ejemplo 4.

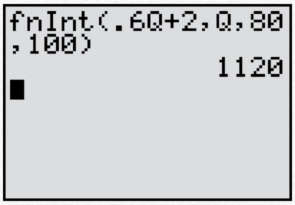


FIGURA 14.21 Estimación de $\int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq$.

Ejercicio 14.7

En los problemas del 1 al 43 evalúe la integral definida.

1. $\int_0^2 7\,dx.$ **2.** $\int_2^4 (1-e)\,dx.$ **3.** $\int_1^2 5x\,dx.$ **4.** $\int_0^5 -3x\,dx.$

5. $\int_{-3}^1 (2x-3)\,dx.$ **6.** $\int_{-1}^1 (4-9y)\,dy.$ **7.** $\int_2^3 (y^2-2y+1)\,dy.$ **8.** $\int_3^2 (2t-t^2)\,dt.$

9. $\int_{-2}^{-1} (3w^2-w-1)\,dw.$ **10.** $\int_8^9 dt.$ **11.** $\int_1^2 -4t^{-4}\,dt.$ **12.** $\int_1^2 \frac{x^{-2}}{2}\,dx.$

13. $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^5}\,dx.$ **14.** $\int_{1/2}^{3/2} (x^2+x+1)\,dx.$ **15.** $\int_{1/2}^3 \frac{1}{x^2}\,dx.$ **16.** $\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)dx.$

17. $\int_{-1}^1 (z+1)^5\,dz.$ **18.** $\int_1^8 (x^{1/3}-x^{-1/3})\,dx.$ **19.** $\int_0^1 2x^2(x^3-1)^3\,dx.$ **20.** $\int_1^3 (x+3)^3\,dx.$

21. $\int_1^8 \frac{4}{y}\,dy.$ **22.** $\int_{-(e^e)}^{-1} \frac{6}{x}\,dx.$ **23.** $\int_0^1 e^5\,dx.$ **24.** $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\,dx.$

25. $\int_0^2 x^2e^{x^3}\,dx.$ **26.** $\int_0^1 (3x^2+4x)(x^3+2x^2)^4\,dx.$ **27.** $\int_4^5 \frac{2}{(x-3)^3}\,dx.$

28. $\int_0^6 \sqrt{2x+4}\,dx.$ **29.** $\int_{1/3}^2 \sqrt{10-3p}\,dp.$ **30.** $\int_{-1}^1 q\sqrt{q^2+3}\,dq.$

31. $\int_0^1 x^2\sqrt[3]{7x^3+1}\,dx.$ **32.** $\int_0^{\sqrt{7}} \left[2x-\frac{x}{(x^2+1)^{5/3}}\right]dx.$ **33.** $\int_0^1 \frac{2x^3+x}{x^2+x^4+1}\,dx.$

34. $\int_a^b (m+ny)\,dy.$ **35.** $\int_0^1 (e^x-e^{-2x})\,dx.$ **36.** $\int_{-2}^1 8|x|\,dx.$

37. $\int_1^e 2(x^{-1}+x^{-2}-x^{-3})\,dx.$ **38.** $\int_1^2 \left(6\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx.$ **39.** $\int_1^3 (x+1)e^{x^2+2x}\,dx.$

40. $\int_3^4 \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx.$ **41.** $\int_0^2 \frac{x^6+6x^4+x^3+8x^2+x+5}{x^3+5x+1}\,dx.$

42. $\int_{-1}^1 \frac{2}{1+e^x}\,dx.$ [*Sugerencia:* multiplique el integrando por $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$.] **43.** $\int_0^2 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} 4x^2, & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2x, & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 2. \end{cases}$

---

44. Evalúe $\left(\int_2^3 x\,dx\right)^2 - \int_2^3 x^2\,dx.$

45. Suponga que $f(x) = \int_1^x 3\frac{1}{t^2}\,dt$. Evalúe $\int_e^1 f(x)\,dx.$

46. Evalúe $\int_{10}^{10} e^{x^2}\,dx + \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2\ln 2}\,dx.$

47. Si $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$ y $\int_3^2 f(x)\,dx = 3$, encuentre $\int_1^2 f(x)\,dx.$

48. Si $\int_1^4 f(x)\,dx = 6$, $\int_2^4 f(x)\,dx = 5$, y $\int_1^3 f(x)\,dx = 2$, encuentre $\int_2^3 f(x)\,dx.$

49. Evalúe $\int_1^2 \left(\frac{d}{dx}\int_1^2 e^{x^2}\,dx\right)dx$. [*Sugerencia:* no es necesario determinar $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$.]

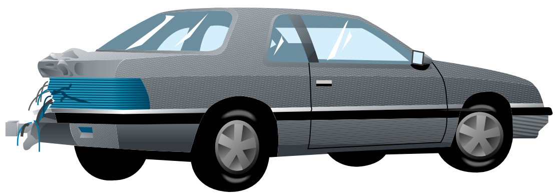
50. Suponga que $f(x) = \int_e^x \frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}\,dt$, donde $x > e$. Encuentre $f'(x)$.

51. Índice de severidad En un análisis de la seguridad en el tránsito, Shonle[7] considera cuánta aceleración puede tolerar una persona en un choque sin que se presenten en ella lesiones serias. El *índice de severidad* se define como

$$\text{I.S.} = \int_0^T \alpha^{5/2}\,dt,$$

[7] J.I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

donde α (la letra griega "alfa") se considera una constante implicada con la aceleración media ponderada y T es la duración del choque. Encuentre el índice de severidad.



52. Estadística En estadística, la media μ (letra griega "mu") de la función f de densidad de probabilidad continua, definida en el intervalo $[a, b]$ está dada por

$$\mu = \int_a^b [x \cdot f(x)]\, dx,$$

y la varianza σ^2 (letra griega "sigma") está dada por

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)\, dx.$$

Calcule μ y σ^2 si $a = 0, b = 1$ y $f(x) = 1$.

53. Distribución de ingresos El economista Pareto[8] ha establecido una ley empírica de distribución de ingresos superiores, que da el número N de personas que reciben x o más dólares. Si

$$\frac{dN}{dx} = -Ax^{-B},$$

donde A y B son constantes, obtenga una integral definida que dé el número total de personas con ingresos entre a y b, si $a < b$.

54. Biología En un estudio sobre mutación genética,[9] aparece la integral siguiente:

$$\int_0^{10^{-4}} x^{-1/2}\, dx.$$

Evalúe esta integral.

55. Flujo continuo de ingreso El valor actual (en dólares) de un flujo continuo de ingreso de \$2000 al año durante 5 años al 6% compuesto continuamente está dado por

$$\int_0^5 2000e^{-0.06t}\, dt.$$

Evalúe el valor actual, al dólar más cercano.

56. Biología En biología, con frecuencia surgen problemas que implican la transferencia de una sustancia entre compartimentos. Un ejemplo sería la transferencia del flujo sanguíneo a los tejidos. Evalúe la siguiente integral que se presenta en un problema de difusión[10] entre dos compartimentos:

$$\int_0^t (e^{-a\tau} - e^{-b\tau})\, d\tau,$$

aquí, τ (se lee "tau") es una letra griega; a y b son constantes.

57. Demografía Para cierta población, suponga que l es una función tal que $l(x)$ es el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Esta función se llama *función de la tabla de vida*. Bajo condiciones apropiadas, la integral

$$\int_x^{x+n} l(t)\, dt$$

da el número esperado de gente en la población que tiene entre exactamente x y $x + n$ años, inclusive. Si

$$l(x) = 10{,}000\sqrt{100 - x},$$

determine el número de personas que tienen exactamente entre 36 y 64 años, inclusive. Dé su respuesta al entero más cercano, ya que respuestas fraccionarias no tienen sentido.

58. Consumo de mineral Si c_0 es el consumo anual de un mineral en el tiempo $t = 0$, entonces bajo consumo continuo, la cantidad total de mineral usado en el intervalo $[0, t_1]$ es

$$\int_0^{t_1} c_0 e^{kt}\, dt,$$

donde k es la razón de consumo. Para un mineral de tierras raras se ha determinado que $c_0 = 3000$ unidades y $k = 0.05$. Evalúe la integral para estos datos.

59. Costo marginal La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q + 8.$$

Si c está en dólares, determine el costo de incrementar la producción de 65 a 75 unidades.

60. Costo marginal Repita el problema 59 si

$$\frac{dc}{dq} = 0.003q^2 - 0.6q + 40$$

y la producción aumenta de 100 a 200 unidades.

61. Ingreso marginal La función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{1000}{\sqrt{100q}}.$$

[8] G. Tintner, *Methodology of Mathematical Economics and Econometrics* (Chicago: University of Chicago Press, 1967), pág. 16.

[9] W. J. Ewens, *Population Genetics* (Londres: Methuen & Company Ltd., 1969).

[10] W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

Si r está en dólares, encuentre el cambio en el ingreso total del fabricante si la producción aumenta de 400 a 900 unidades.

62. Ingreso marginal Repita el problema 61 si

$$\frac{dr}{dq} = 250 + 90q - 3q^2$$

y la producción crece de 10 a 20 unidades.

63. Tasa de criminalidad Una socióloga está estudiando la tasa de crímenes en cierta ciudad. Ella estima que t meses después del principio del próximo año, el número total de crímenes cometidos se incrementará a razón de $8t + 10$ por mes. Determine el número total de crímenes que puede esperarse que se cometan el próximo año. ¿Cuántos crímenes puede esperarse que se cometan durante los últimos 6 meses de ese año?

64. Altas de hospital Para un grupo de personas hospitalizadas, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = \frac{81 \times 10^6}{(300 + t)^4},$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo dado de alta por día al término de t días. ¿Qué proporción ha sido dada de alta al final de 700 días?

65. Producción Imagine un país "unidimensional" de longitud $2R$ (véase la fig. 14.22).[11] Suponga que la producción de bienes en este país está distribuida en forma continua de frontera a frontera. Si la cantidad producida cada año por unidad de distancia es $f(x)$, entonces la producción total del país está dada por

$$G = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Evalúe G si $f(x) = i$, donde i es una constante.

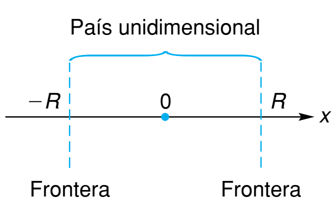


FIGURA 14.22 Diagrama para el problema 65.

66. Exportaciones Para el país "unidimensional" del problema 65, la cantidad E de exportaciones bajo ciertas condiciones, está dada por

$$E = \int_{-R}^{R} \frac{i}{2}\left[e^{-k(R-x)} + e^{-k(R+x)}\right] dx,$$

donde i y k son constantes ($k \neq 0$). Evalúe E.

67. Precio promedio de entrega En un análisis del precio de entrega de un artículo desde la fábrica hasta el cliente, DeCanio[12] afirma que el precio promedio de entrega pagado por los consumidores está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m + x)[1 - (m + x)]\,dx}{\int_0^R [1 - (m + x)]\,dx},$$

donde m es el precio en la fábrica, x la distancia y R la distancia máxima al punto de venta. DeCanio determina que

$$A = \frac{m + \frac{R}{2} - m^2 - mR - \frac{R^2}{3}}{1 - m - \frac{R}{2}}.$$

Verifíquelo.

En los problemas del 68 al 70 use el teorema fundamental del cálculo integral para determinar el valor de la integral definida. Verifique los resultados con su calculadora.

68. $\int_2^4 (7x + 3x^2)\,dx.$

69. $\int_0^4 \frac{1}{(4x + 4)^2}\,dx.$

70. $\int_0^1 e^{3t}\,dt$. Redondee su respuesta a dos decimales.

En los problemas del 71 al 74 estime el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a dos decimales.

71. $\int_{-1}^5 \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}\,dx.$

72. $\int_1^{3.4} x \ln^2 x\,dx.$

73. $\int_0^4 5\sqrt{t^2 + 3}\,dt.$

74. $\int_{-1}^1 \frac{6\sqrt{q + 1}}{q + 3}\,dq.$

[11] R. Taagepera, "Why the Trade/GNP Ratio Decrease with Country Size", *Social Science Research*, 5 (1976), 385-404.

[12] S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Reevaluation", *The Quartely Journal of Economics*, XCIX, núm. 2 (1984), 329-349.

OBJETIVO Utilizar bandas verticales y la integral definida para encontrar el área de la región entre una curva y el eje x.

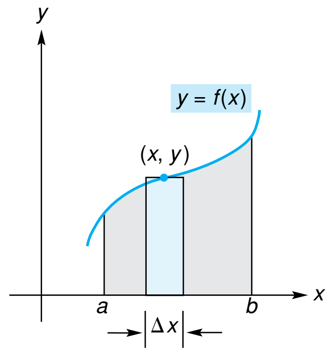


FIGURA 14.23 Región con elemento vertical.

14.8 ÁREA

En la sección 14.6 vimos que el área de una región puede encontrarse evaluando el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$, donde $f(x)\,\Delta x$ representa el área de un rectángulo. Este límite es un caso especial de una integral definida, por lo que puede encontrarse fácilmente usando el teorema fundamental.

Al usar la integral definida para determinar áreas, conviene hacer un esbozo de la región implicada. Consideremos el área de la región limitada por $y = f(x)$ y el eje x entre $x = a$ y $x = b$, donde $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$.(Véase la fig. 14.23.) Para plantear la integral, debe incluirse un rectángulo muestra en el esbozo, ya que el área de la región es un límite de sumas de áreas de rectángulos. Esto no sólo ayuda a entender el proceso de integración, también ayuda a encontrar áreas de regiones más complicadas. Dicho rectángulo (véase la fig. 14.23) se llama **elemento vertical de área** (o **franja vertical**). En el diagrama, el ancho del elemento vertical es Δx. La altura es el valor y de la curva. Por tanto, el rectángulo tiene un área de $y\,\Delta x$ o $f(x)\,\Delta x$. El área de la región entera se encuentra sumando las áreas de todos los elementos entre $x = a$ y $x = b$, y determinando el límite de esta suma, que es la integral definida. En forma simbólica, tenemos

$$\Sigma f(x)\,\Delta x \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \text{área.}$$

El ejemplo 1 ilustrará esto.

EJEMPLO 1 Uso de la integral definida para encontrar un área

Encontrar el área de la región limitada por la curva

$$y = 6 - x - x^2$$

y el eje x.

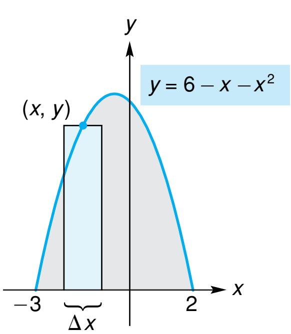


FIGURA 14.24 Región del ejemplo 1 con elemento vertical.

Solución: primero debemos esbozar la curva para poder visualizar la región. Como

$$y = -(x^2 + x - 6) = -(x - 2)(x + 3),$$

las intersecciones con el eje x son $(2, 0)$ y $(-3, 0)$. Usando las técnicas de graficación que vimos antes, obtenemos la gráfica y la región que se muestra en la figura 14.24. *Con esta región es crucial encontrar las intersecciones de la curva con el eje x, porque ellas determinan el intervalo en el cual las áreas de los elementos deben sumarse*. Esto es, *esos valores x son los límites de integración*. El elemento vertical mostrado tiene un ancho Δx y altura y. Por tanto, el área del elemento es $y\,\Delta x$. Sumando las áreas de todos estos elementos de $x = -3$ a $x = 2$ y tomando el límite mediante la integral definida, obtenemos el área:

$$\Sigma y\,\Delta x \rightarrow \int_{-3}^{2} y\,dx = \text{área.}$$

Para evaluar la integral debemos expresar el integrando en términos de la variable de integración x. Como $y = 6 - x - x^2$,

$$\text{área} = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2}$$

$$= \left(12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} - \frac{-27}{3}\right) = \frac{125}{6} \text{ unidades cuadradas.}$$

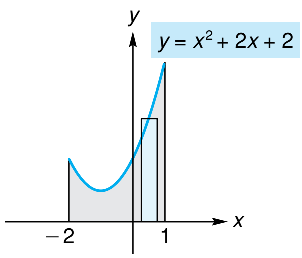


FIGURA 14.25 Diagrama para el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Determinación del área de una región

Encontrar el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 2x + 2$, el eje x y las líneas $x = -2$ y $x = 1$.

Solución: en la figura 14.25 se muestra un esbozo de la región. Tenemos

$$\text{área} = \int_{-2}^{1} y\,dx = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2x + 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{3} + 1 + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} + 4 - 4\right)$$

$$= 6 \text{ unidades cuadradas.}$$

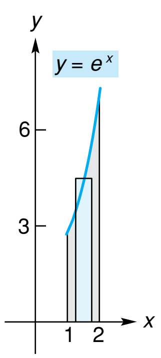


FIGURA 14.26 Diagrama para el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Determinación del área de una región

Encontrar el área de la región entre la curva $y = e^x$ y el eje x entre $x = 1$ y $x = 2$.

Solución: en la figura 14.26 se muestra un esbozo de la región.

$$\text{área} = \int_{1}^{2} y\,dx = \int_{1}^{2} e^x\,dx = e^x\Big|_{1}^{2}$$

$$= e^2 - e = e(e - 1) \text{ unidades cuadradas.}$$

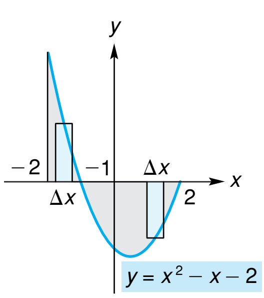


FIGURA 14.27 Diagrama para el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Un área que requiere dos integrales definidas

Encontrar el área de la región limitada por la curva

$$y = x^2 - x - 2$$

y la línea $y = 0$ (el eje x) entre $x = -2$ y $x = 2$.

Solución: en la figura 14.27 se muestra un esbozo de la región. Note que las intersecciones con el eje x son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

Advertencia Es erróneo apresurarse y escribir que el área es $\int_{-2}^{2} y\,dx$, por la siguiente razón: para el rectángulo izquierdo la altura es y. Sin embargo, para el rectángulo a la derecha, la y es negativa, por lo que su altura es el número positivo $-y$. Esto señala la importancia de esbozar la región.

En el intervalo $[-2, -1]$, el área del elemento es

$$y\,\Delta x = (x^2 - x - 2)\,\Delta x.$$

En $[-1, 2]$ el área es

$$-y\,\Delta x = -(x^2 - x - 2)\,\Delta x.$$

Así,

$$\text{área} = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)\,dx + \int_{-1}^{2} -(x^2 - x - 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4\right)\right]$$

$$- \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right]$$

$$= \frac{19}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

El ejemplo siguiente muestra el uso del área como una probabilidad en estadística.

EJEMPLO 5 Aplicación a la estadística

*En estadística, una **función de densidad** (de probabilidad) f de una variable x, donde x toma todos los valores en el intervalo $[a, b]$, tiene las siguientes propiedades:*

1. $f(x) \geq 0$.
2. $\int_a^b f(x)\,dx = 1$.
3. *La probabilidad de que x tome un valor entre c y d, que se escribe $P(c \leq x \leq d)$, donde $a \leq c \leq d \leq b$, se representa por el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x entre $x = c$ y $x = d$. Por tanto (véase la fig.* 14.28),

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx.$$

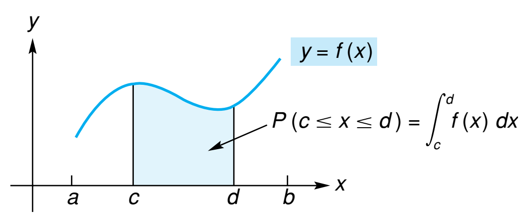


FIGURA 14.28 Probabilidad como un área.

Para la función de densidad $f(x) = 6(x - x^2)$, donde $0 \leq x \leq 1$, encontrar cada una de las siguientes probabilidades.

a. $P(0 \leq x \leq \frac{1}{4})$.

Solución: aquí $[a, b]$ es $[0, 1]$, c es 0 y d es $\frac{1}{4}$. Por la propiedad 3, tenemos

$$P(0 \leq x \leq \tfrac{1}{4}) = \int_0^{1/4} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_0^{1/4} (x - x^2)\,dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{1/4} = (3x^2 - 2x^3)\Big|_0^{1/4}$$

$$= \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3\right] - 0 = \frac{5}{32}.$$

b. $P(x \geq \frac{1}{2})$.

Solución: como el dominio de f es $0 \leq x \leq 1$, decir que $x \geq \frac{1}{2}$ significa $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Así,

$$P(x \geq \tfrac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_{1/2}^{1}(x - x^2)\,dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1/2}^{1} = (3x^2 - 2x^3)\Bigg|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 14.8

En los problemas del 1 al 34 use una integral definida para encontrar el área de la región limitada por la curva, el eje x y las líneas dadas. En cada caso primero haga el bosquejo de la región. Tenga cuidado con las áreas de regiones situadas debajo del eje x.

1. $y = 4x, \quad x = 2.$

2. $y = \frac{3}{4}x + 1, \quad x = 0, \quad x = 16.$

3. $y = 3x + 2, \quad x = 2, \quad x = 3.$

4. $y = x + 5, \quad x = 2, \quad x = 4.$

5. $y = x - 1, \quad x = 5.$

6. $y = 2x^2, \quad x = 1, \quad x = 2.$

7. $y = x^2, \quad x = 2, \quad x = 3.$

8. $y = 2x^2 - x, \quad x = -2, \quad x = -1.$

9. $y = x^2 + 2, \quad x = -1, \quad x = 2.$

10. $y = 2x + x^3, \quad x = 1.$

11. $y = x^2 - 2x, \quad x = -3, \quad x = -1.$

12. $y = 3x^2 - 4x, \quad x = -2, \quad x = -1.$

13. $y = 9 - x^2.$

14. $y = \frac{4}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2.$

15. $y = 1 - x - x^3, \quad x = -2, \quad x = 0.$

16. $y = e^x, \quad x = 1, \quad x = 3.$

17. $y = 3 + 2x - x^2.$

18. $y = \frac{1}{x^2}, \quad x = 2, \quad x = 3.$

19. $y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e.$

20. $y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e^2.$

21. $y = \sqrt{x + 9}, \quad x = -9, \quad x = 0.$

22. $y = x^2 - 2x, \quad x = 1, \quad x = 3.$

23. $y = \sqrt{2x - 1}, \quad x = 1, \quad x = 5.$

24. $y = x^3 + 3x^2, \quad x = -2, \quad x = 2.$

25. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 2.$

26. $y = x^2 - 4, \quad x = -2, \quad x = 2.$

27. $y = e^x, \quad x = 0, \quad x = 2.$

28. $y = |x|, \quad x = -2, \quad x = 2.$

29. $y = x + \frac{2}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2.$

30. $y = 6 - x - x^2.$

31. $y = x^3, \quad x = -2, \quad x = 4.$

32. $y = \sqrt{x - 2}, \quad x = 2, \quad x = 6.$

33. $y = 2x - x^2, \quad x = 1, \quad x = 3.$

34. $y = x^2 - x + 1, \quad x = 0, \quad x = 1.$

35. Dado que

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 16 - 2x, & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

determine el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y la línea $x = 3$. Incluya un esbozo de la región.

36. En condiciones de distribución uniforme continua, el concepto estadístico de la proporción de personas con ingresos entre a y t, donde $a \leq t \leq b$, es el área de la región entre la curva $y = 1/(b - a)$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = t$. Esboce la gráfica de la curva y determine el área de la región dada.

37. Suponga que $f(x) = x/8$, donde $0 \leq x \leq 4$. Si f es una función de densidad (remítase al ejemplo 5), encuentre cada uno de lo siguiente:

a. $P(0 \leq x \leq 1)$.
b. $P(2 \leq x \leq 4)$.
c. $P(x \geq 3)$.

38. Suponga $f(x) = 3(1 - x)^2$, donde $0 \leq x \leq 1$. Si f es una función de densidad (remítase al ejemplo 5), encuentre lo siguiente:

a. $P(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$.
b. $P(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2})$.
c. $P(x \leq \frac{1}{3})$.
d. Use el resultado de la parte (c) para determinar $P(x \geq \frac{1}{3})$.

39. Suponga $f(x) = 1/x$, donde $e \leq x \leq e^2$. Si f es una función de densidad (remítase al ejemplo 5), encuentre lo siguiente:

a. $P(3 \leq x \leq 5)$.
b. $P(x \leq 4)$.
c. $P(x \geq 3)$.
d. Verifique que $P(e \leq x \leq e^2) = 1$.

40. **a.** Sea r un número real, donde $r > 1$. Evalúe

$$\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx.$$

b. Su respuesta a la parte (a) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Esboce esta región.

c. Evalúe $\lim\limits_{r\to\infty}\left(\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx\right)$.

d. Su respuesta a la parte (c) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Esboce esta región.

En cada uno de los problemas del 41 al 44 use la integración definida para estimar el área de la región limitada por la curva, el eje x y las líneas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $\quad x = -2, \quad x = 1$.

42. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x + 3}}$, $\quad x = 3, \quad x = 6$.

43. $y = x^4 - 2x^3 - 2, \quad x = 1, \quad x = 3$.

44. $y = 1 + 3x - x^4$.

OBJETIVO Determinar el área de una región acotada por dos o más curvas por medio del uso de franjas verticales u horizontales.

14.9 ÁREA ENTRE CURVAS

Elementos verticales

Ahora encontraremos el área de una región encerrada por varias curvas. Igual que antes, nuestro procedimiento consistirá en dibujar un elemento muestra de área y usar la integral definida para “sumar” las áreas de todos los elementos.

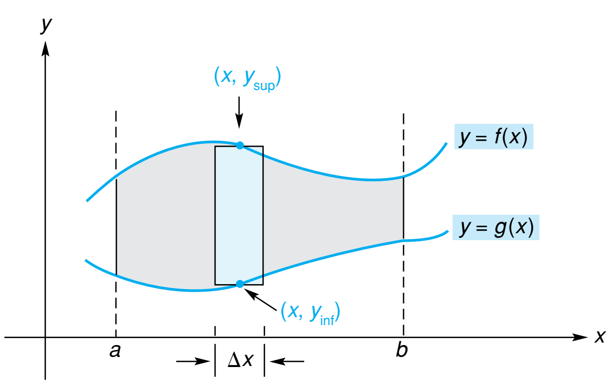


FIGURA 14.29 Región entre curvas.

Por ejemplo, considere el área de la región en la figura 14.29 que está limitada arriba y abajo por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y lateralmente por las líneas $x = a$ y $x = b$. El ancho del elemento vertical indicado es Δx y la altura es el valor y de la curva superior menos el valor y de la curva inferior, lo que escribiremos como $y_{sup} - y_{inf}$. El área del elemento es entonces

$$[y_{sup} - y_{inf}]\Delta x,$$

o

$$[f(x) - g(x)]\,\Delta x.$$

Al sumar las áreas de todos los elementos entre $x = a$ y $x = b$ por medio de la integral definida, obtenemos el área de la región:

$$\sum [f(x) - g(x)]\,\Delta x \rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \text{área}.$$

EJEMPLO 1 Determinación de un área entre dos curvas

Encontrar el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

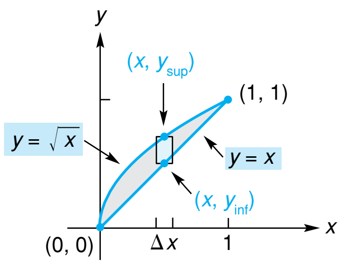


FIGURA 14.30 Diagrama para el ejemplo 1.

Solución: en la figura 14.30 se muestra un esbozo de la región. Para determinar dónde se intersecan las curvas, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x$. Eliminando y por sustitución, obtenemos

$$\sqrt{x} = x,$$

$$x = x^2 \qquad \text{(elevando ambos lados al cuadrado),}$$

$$0 = x^2 - x = x(x-1).$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1.$$

Si $x = 0$, $y = 0$; si $x = 1$, $y = 1$. Por lo que las curvas se intersecan en $(0, 0)$ y $(1, 1)$. El ancho del elemento del área indicado es Δx. Su altura es el valor y de la curva superior menos el valor y de la curva inferior:

$$y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}} = \sqrt{x} - x.$$

El área del elemento es entonces $(\sqrt{x} - x)\,\Delta x$. Sumando las áreas de todos estos elementos entre $x = 0$ y $x = 1$ por medio de la integral definida, obtenemos el área de toda la región:

Debe ser obvio para usted que el conocimiento de los puntos de intersección es importante en la determinación de los límites de integración.

$$\text{área} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^{1/2} - x)\,dx = \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6} \text{ unidad cuadrada.}$$

EJEMPLO 2 Determinación de un área entre dos curvas

Encontrar el área de la región limitada por las curvas $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$.

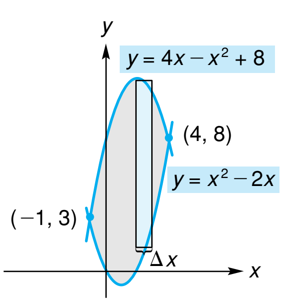


FIGURA 14.31 Diagrama para el ejemplo 2.

Solución: en la figura 14.31 se muestra un esbozo de la región. Para encontrar dónde se intersecan las curvas, resolvemos el sistema de ecuaciones $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$:

$$4x - x^2 + 8 = x^2 - 2x,$$

$$-2x^2 + 6x + 8 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$(x+1)(x-4)=0 \qquad \text{(factorizando)},$$

$$x=-1 \quad \text{o} \quad x=4.$$

Cuando $x = -1$, $y = 3$; cuando $x = 4$, $y = 8$. Las curvas se intersecan en $(-1, 3)$ y $(4, 8)$. El ancho del elemento indicado es Δx. La altura es el valor y de la curva superior menos el valor y de la curva inferior:

$$y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}} = (4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x).$$

Por tanto, el área del elemento es

$$[(4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)]\,\Delta x = (-2x^2 + 6x + 8)\,\Delta x.$$

Al sumar todas estas áreas desde $x = -1$ hasta $x = 4$, tenemos

$$\text{área} = \int_{-1}^{4} (-2x^2 + 6x + 8)\,dx = 41\tfrac{2}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

EJEMPLO 3 Área de una región con dos curvas superiores diferentes

Encontrar el área de la región entre las curvas $y = 9 - x^2$ y $y = x^2 + 1$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

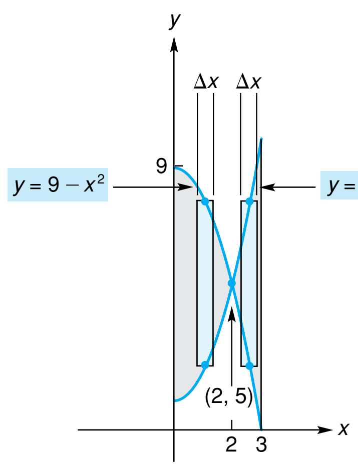


FIGURA 14.32 y_{sup} es $9 - x^2$ en $[0, 2]$ y es $x^2 + 1$ en $[2, 3]$.

Solución: en la figura 14.32 se muestra un esbozo de la región. Las curvas se intersecan cuando

$$9 - x^2 = x^2 + 1,$$

$$8 = 2x^2,$$

$$4 = x^2,$$

$$x = \pm 2 \qquad \text{(dos soluciones)}.$$

Cuando $x = \pm 2$, $y = 5$, por lo que los puntos de intersección son $(\pm 2, 5)$. Como estamos interesados en la región de $x = 0$ a $x = 3$, el punto de intersección que nos concierne es (2, 5). Note en la figura 14.32 que en la región a la *izquierda* del punto de intersección (2, 5), un elemento tiene

$$y_{\text{sup}} = 9 - x^2 \quad \text{y} \quad y_{\text{inf}} = x^2 + 1,$$

pero para un elemento a la *derecha* de (2, 5) ocurre lo contrario, esto es

$$y_{\text{sup}} = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad y_{\text{inf}} = 9 - x^2.$$

Entonces, entre $x = 0$ y $x = 2$, el área de un elemento es

$$\begin{aligned}(y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}})\,\Delta x &= [(9 - x^2) - (x^2 + 1)]\,\Delta x\\ &= (8 - 2x^2)\,\Delta x,\end{aligned}$$

pero entre $x = 2$ y $x = 3$, es

$$\begin{aligned}(y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}})\,\Delta x &= [(x^2 + 1) - (9 - x^2)]\,\Delta x\\ &= (2x^2 - 8)\,\Delta x.\end{aligned}$$

Por tanto, para encontrar el área de la región entera necesitamos *dos* integrales:

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_0^2 (8 - 2x^2)\,dx + \int_2^3 (2x^2 - 8)\,dx\\ &= \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2x^3}{3} - 8x\right)\Bigg|_2^3\\ &= \left[\left(16 - \frac{16}{3}\right) - 0\right] + \left[(18 - 24) - \left(\frac{16}{3} - 16\right)\right]\\ &= \frac{46}{3}\ \text{unidades cuadradas.}\end{aligned}$$

Elementos horizontales

Algunas veces el área puede ser más fácil de determinar sumando áreas de elementos horizontales en lugar de elementos verticales. En el ejemplo siguiente, se determinará el área por ambos métodos. En cada caso, el elemento de área determina la forma de la integral.

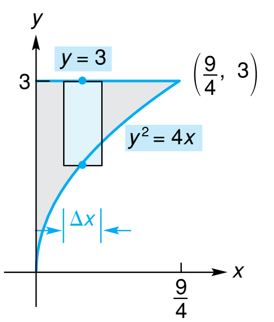


FIGURA 14.33 Elemento vertical de área.

EJEMPLO 4 Los métodos de elementos verticales y elementos horizontales

Encontrar el área de la región limitada para la curva $y^2 = 4x$ y las líneas $y = 3$ y $x = 0$ (el eje y).

Solución: en la figura 14.33 se da el esbozo de la región. Cuando las curvas $y = 3$ y $y^2 = 4x$ se intersecan, $9 = 4x$ por lo que $x = \frac{9}{4}$. Entonces el punto de intersección es $(\frac{9}{4}, 3)$. Como el ancho de la franja vertical es Δx, integramos con respecto a la variable x. De acuerdo con esto, y_{sup} y y_{inf} deben expresarse como funciones de x. Para la curva inferior $y^2 = 4x$ tenemos $y = \pm 2\sqrt{x}$. Pero $y \geq 0$ para la porción de esta curva que limita la región, por lo que usamos $y = 2\sqrt{x}$. La curva superior es $y = 3$. Entonces, la altura de la franja es

$$y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}} = 3 - 2\sqrt{x}.$$

Por consiguiente, la franja tiene un área de $(3 - 2\sqrt{x})\,\Delta x$ y queremos sumar todas estas áreas entre $x = 0$ y $x = \frac{9}{4}$,

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_0^{9/4} (3 - 2\sqrt{x})\,dx = \left(3x - \frac{4x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^{9/4}\\ &= \left[3\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}\right] - (0)\\ &= \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left[\left(\frac{9}{4}\right)^{1/2}\right]^3 = \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{4}\text{ unidades cuadradas.}\end{aligned}$$

Con elementos horizontales, el ancho es Δy, no Δx.

Consideremos ahora este problema desde el punto de vista de un **elemento horizontal de área** (o **franja horizontal**), como se muestra en la figura 14.34. El ancho del elemento es Δy. La longitud del elemento es el *valor x de la curva más a la derecha menos el valor x de la curva más a la izquierda*. El área del elemento es entonces

$$(x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\,\Delta y.$$

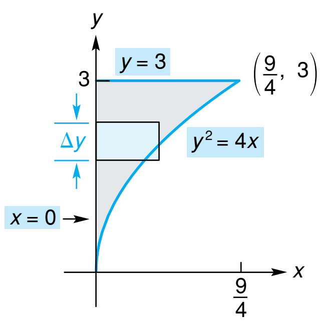


FIGURA 14.34 Elemento horizontal de área.

Queremos sumar todas estas áreas entre $y = 0$ y $y = 3$:

$$\sum (x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\,\Delta y \to \int_0^3 (x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\,dy.$$

Como la variable de integración es y, debemos expresar x_{der} y x_{izq} como funciones de y. La curva de más a la derecha es $y^2 = 4x$ o, en forma equivalente, $x = y^2/4$. La curva izquierda es $x = 0$. Así,

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_0^3 (x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\,dy\\ &= \int_0^3 \left(\frac{y^2}{4} - 0\right) dy = \frac{y^3}{12}\Bigg|_0^3 = \frac{9}{4}\text{ unidades cuadradas.}\end{aligned}$$

Note que para esta región las franjas horizontales hacen más fácil la evaluación (y el planteamiento) de la integral definida que una integral con franjas verticales. En todo caso, recuerde que **los límites de integración son los límites para la variable de integración.**

EJEMPLO 5 Ventajas al emplear elementos horizontales

Encontrar el área de la región limitada por las gráficas de $y^2 = x$ y $x - y = 2$.

Solución: el esbozo de la región se da en la figura 14.35. Las curvas se intersecan cuando $y^2 - y = 2$. Así, $y^2 - y - 2 = 0$ o, en forma equivalente, $(y + 1)(y - 2) = 0$, de donde $y = -1$ o $y = 2$. Esto da los puntos de intersección $(1, -1)$ y $(4, 2)$. Consideremos elementos verticales de área [véase la fig. 14.35(a)]. Despejando a y de $y^2 = x$, obtenemos $y = \pm\sqrt{x}$. Como se ve en la figura 14.35(a), a la *izquierda* de $x = 1$, el extremo superior del elemento se encuentra sobre $y = \sqrt{x}$ y el extremo inferior sobre $y = -\sqrt{x}$. A la *derecha* de $x = 1$, la curva superior es $y = \sqrt{x}$ y la curva inferior es $x - y = 2$ (o $y = x - 2$). Entonces, con franjas verticales son necesarias *dos* integrales para evaluar el área:

$$\text{área} = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\,dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x - 2)]\,dx.$$

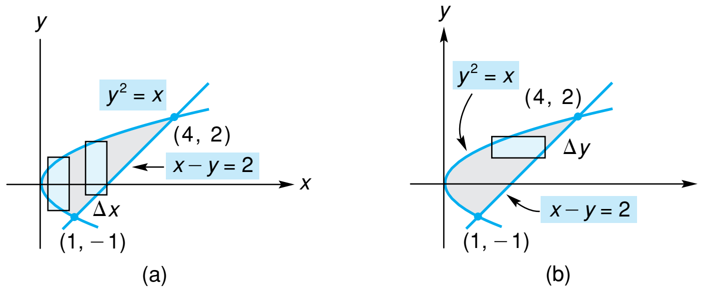


FIGURA 14.35 Región del ejemplo 5 con elementos verticales y horizontales.

Tal vez el uso de franjas horizontales pueda simplificar nuestro trabajo. En la figura 14.35(b), el ancho de la franja es Δy. La curva más a la derecha *siempre* es $x - y = 2$ (o $x = y + 2$) y la curva más a la izquierda siempre es $y^2 = x$ (o $x = y^2$). Por tanto, el área de la franja horizontal es $[(y + 2) - y^2]\Delta y$, por lo que el área total está dada por

$$\text{área} = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\, dy = \frac{9}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

Queda claro que usar franjas horizontales es la manera más conveniente de atacar este problema. Así sólo se requiere de una integral que es además mucho más sencilla de calcular.

Tecnología

Problema: estimar el área de la región limitada por las gráficas de

$$y = x^4 - 2x^3 - 2 \quad \text{y} \quad y = 1 + 2x - 2x^2.$$

Solución: en una calculadora TI-83, introducimos $x^4 - 2x^3 - 2$ como Y_1 y $1 + 2x - 2x^2$ como Y_2 y desplegamos sus gráficas. La región que nos ocupa se muestra sombreada en la figura 14.36; y_{sup} corresponde a Y_2 y y_{inf} a Y_1. Usando franjas verticales tenemos

$$\text{área} = \int_{A}^{B} (Y_2 - Y_1)\, dx,$$

donde A y B son los valores x de los puntos de intersección en los cuadrantes III y IV, respectivamente. Con la función de intersección encontramos A, como se indica en la figura 14.37. Este valor de x se almacena entonces como A (véase la fig. 14.38). De manera similar, encontramos el valor x del punto de intersección en el cuadrante IV, que almacenamos en B. Con el comando “fnInt(” (véase la fig. 14.38), estimamos que el área de la región es de 7.54 unidades cuadradas.

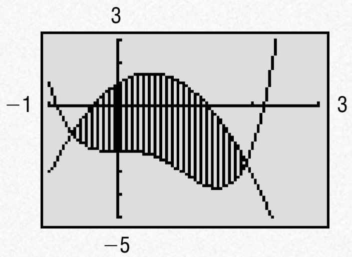


FIGURA 14.36 Gráficas de $Y_1(y_{\text{inf}})$ y $Y_2(y_{\text{sup}})$.

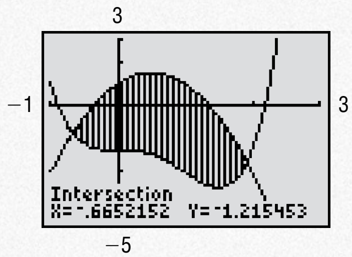


FIGURA 14.37 Punto de intersección en el tercer cuadrante.

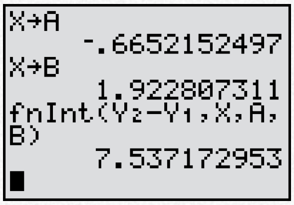


FIGURA 14.38 Almacenamiento de las abscisas de los puntos de intersección y estimación del área.

Ejercicio 14.9

En los problemas del 1 al 6 exprese en términos de una integral (o integrales) el área de la región sombreada. No evalúe su expresión.

1. Observe la figura 14.39.

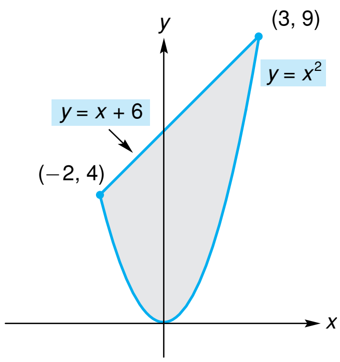


FIGURA 14.39 Región para el problema 1.

2. Observe la figura 14.40.

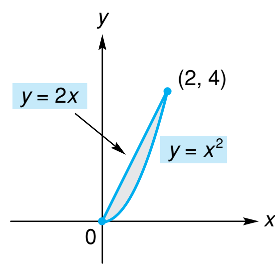


FIGURA 14.40 Región para el problema 2.

3. Observe la figura 14.41.

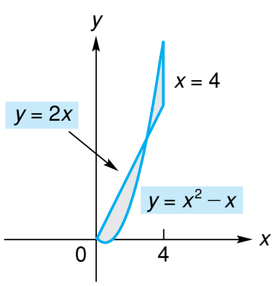


FIGURA 14.41 Región para el problema 3.

4. Observe la figura 14.42.

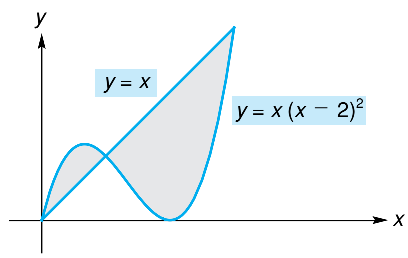


FIGURA 14.42 Región para el problema 4.

5. Observe la figura 14.43.

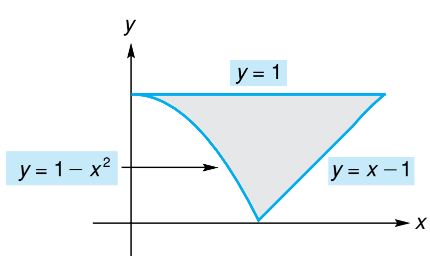


FIGURA 14.43 Región para el problema 5.

6. Observe la figura 14.44.

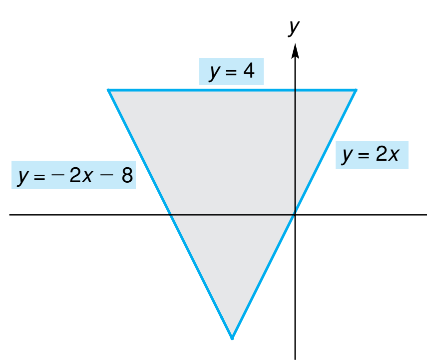


FIGURA 14.44 Región para el problema 6.

7. Exprese en términos de una sola integral el área total de la región a la izquierda de la recta $x = 2$, que se encuentra entre las curvas $y = x^2 - 4$ y $y = 11 - 2x^2$. *No* evalúe la integral.

8. Exprese en términos de una sola integral el área total de la región en el *cuarto* cuadrante, limitada por el eje x y las gráficas de $y^2 = x$ y $y = 2 - x$. *No* evalúe la integral.

En los problemas del 9 al 32 encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Asegúrese de encontrar los puntos de intersección requeridos. Considere si el uso de franjas horizontales hace más sencilla la integral que el uso de franjas verticales.

9. $y = x^2, \quad y = 2x.$

10. $y = x, \quad y = -x + 3, \quad y = 0.$

11. $y = x^2, \quad x = 0, \quad y = 4\ (x \geq 0).$

12. $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3.$

13. $y = x^2 + 2, \quad y = 8.$

14. $y^2 = x + 1, \quad x = 1.$

15. $x = 8 + 2y, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 3.$

16. $y = x - 4, \quad y^2 = 2x.$

17. $y = 4 - x^2, \quad y = -3x.$

18. $x = y^2 + 2, \quad x = 6.$

19. $y^2 = x, \quad y = x - 2.$

20. $y = x^2, \quad y = x + 2.$

21. $2y = 4x - x^2, \quad 2y = x - 4.$

22. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2.$

23. $y^2 = x, \quad 3x - 2y = 1.$

24. $y = 2 - x^2, \quad y = x.$

25. $y = 8 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = -1, \quad x = 1.$

26. $y^2 = 2 - x, \quad y = x + 4.$

27. $y = x^2, \quad y = 2, \quad y = 5.$

28. $y = x^3 - x$, eje x.

29. $y = x^3 - 1, \quad y = x - 1.$

30. $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}.$

31. $4x + 4y + 17 = 0, \quad y = \dfrac{1}{x}.$

32. $y^2 = -x, \quad x - y = 4, \quad y = -1, \quad y = 2.$

---

33. Encuentre el área de la región entre las curvas

$$y = x - 1 \qquad \text{y} \qquad y = 5 - 2x$$

entre $x = 0$ y $x = 4$.

34. Encuentre el área de la región entre las curvas

$$y = x^2 - 4x + 4 \qquad \text{y} \qquad y = 10 - x^2$$

entre $x = 2$ y $x = 4$.

35. Curva de Lorentz Una *curva de Lorentz* se utiliza para estudiar las distribuciones de ingresos. Si x es el porcentaje acumulativo de receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, y y es el porcentaje acumulativo de ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la recta $y = x$, en la figura 14.45, donde x y y se expresan como decimales. Por ejemplo, 10% de la gente recibe 10% de los ingresos totales, 20% de la gente recibe 20% de los ingresos, etcétera. Suponga que la distribución real está dada por la curva de Lorentz definida por

$$y = \tfrac{20}{21}x^2 + \tfrac{1}{21}x.$$

Observe, por ejemplo, que 30% de la gente sólo recibe 10% de los ingresos totales. El grado de desviación de la igualdad se mide por el *coeficiente de desigualdad*[13] para una curva de Lorentz. Este coeficiente se define como el área entre la curva y la diagonal, dividida entre el área bajo la diagonal:

$$\frac{\text{área entre la curva y la diagonal}}{\text{área bajo la diagonal}}.$$

Por ejemplo, cuando todos los ingresos son iguales, el coeficiente de desigualdad es cero. Encuentre el coeficiente de desigualdad para la curva de Lorentz definida antes.

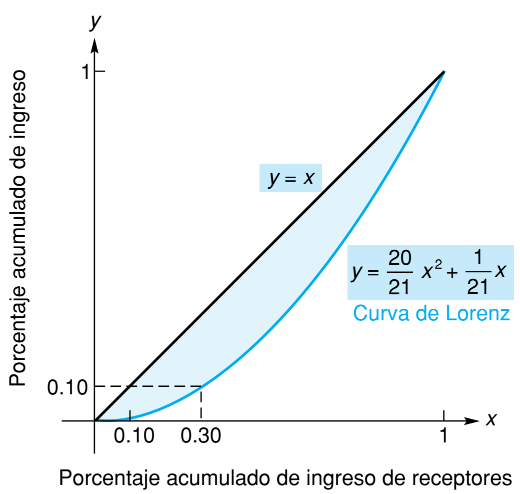


FIGURA 14.45 Diagrama para el problema 35.

36. Curva de Lorentz Encuentre el coeficiente de desigualdad en el problema 35, para la curva de Lorentz definida por $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$.

37. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = 4x$ y $y = mx$, donde m es una constante positiva.

38. a. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = 2x + 2$.

b. ¿Qué porcentaje del área en la parte (a) se encuentra arriba del eje x?

39. La región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 4$ está dividida en dos partes de igual área por la recta $y = k$, donde k es una constante. Encuentre el valor de k.

---

[13] G. Stigler, *The Theory of Price*, tercera edición (Nueva York: The Macmillan Company, 1966), págs. 293-294.

En los problemas del 40 al 44 estime el área de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

40. $y = 9x - 15 - x^2, \quad y = \dfrac{10}{x}.$

41. $y = \sqrt{25 - x^2}, \quad y = 7 - 2x - x^4.$

42. $y = x^3 - 8x + 1, \quad y = x^2 - 5.$

43. $y = x^5 - 3x^3 + 2x, \quad y = 3x^2 - 4.$

44. $y = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30, \quad y = x^3 + x^2 - 20x.$

OBJETIVO Desarrollar los conceptos económicos de excedente de los consumidores y excedente de los productores, los que están representados por áreas.

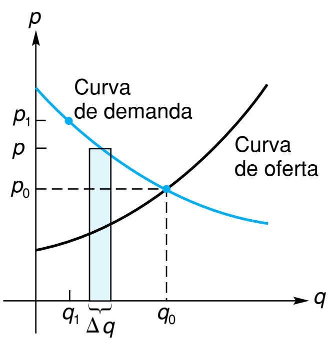


FIGURA 14.46 Curvas de oferta y demanda.

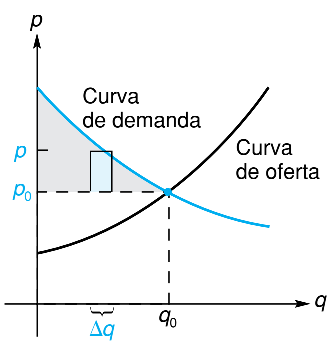


FIGURA 14.47 Beneficio para los consumidores por Δq unidades.

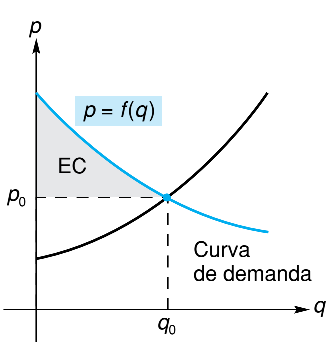


FIGURA 14.48 Excedente de los consumidores.

14.10 Excedente de los consumidores y de los productores

La determinación del área de una región tiene aplicaciones en economía. La figura 14.46 muestra una curva de oferta para un producto. La curva indica el precio p por unidad al que un fabricante venderá (o suministrará) q unidades. El diagrama también muestra la curva de demanda para el producto. Esta curva indica el precio por unidad al que los consumidores comprarán (o demandarán) q unidades. El punto (q_0, p_0) en el que las curvas se intersecan se llama *punto de equilibrio*. Aquí, p_0 es el precio por unidad al que los consumidores comprarán la misma cantidad q_0 de un producto que los productores desean vender a ese precio. En resumen, p_0 es el precio en el que se presenta estabilidad en la relación productor-consumidor.

Supongamos que el mercado está en equilibrio y el precio por unidad del producto es p_0. De acuerdo con la curva de demanda, hay consumidores que estarían dispuestos a pagar *más* que p_0. Por ejemplo, al precio p_1 por unidad, los consumidores comprarían q_1 unidades. Estos consumidores están beneficiándose del menor precio, inferior al de equilibrio p_0.

La franja vertical en la figura 14.46 tiene un área de $p\,\Delta q$. Esta expresión puede también considerarse como la cantidad total de dinero que los consumidores gastarían comprando Δq unidades de producto, si el precio por unidad fuese p. Como el precio es en realidad p_0, esos consumidores sólo gastan $p_0\,\Delta q$ en esas Δq unidades y se benefician así en la cantidad $p\,\Delta q - p_0\,\Delta q$. Esto puede escribirse como $(p - p_0)\,\Delta q$, que es el área de un rectángulo de ancho Δq y altura $p - p_0$ (véase la fig. 14.47). Sumando las áreas de todos los rectángulos entre $q = 0$ y $q = q_0$, por medio de integración definida, tenemos

$$\int_0^{q_0} (p - p_0)\,dq.$$

Esta integral, bajo ciertas condiciones, representa la ganancia total de los consumidores que están dispuestos a pagar más que el precio de equilibrio. Esta ganancia total se llama **excedente de los consumidores** y se abrevia EC. Si la función de demanda está dada por $p = f(q)$, entonces

$$\mathrm{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq.$$

De manera geométrica (véase la fig. 14.48), el excedente de los consumidores se representa por el área entre la recta $p = p_0$ y la curva de demanda $p = f(q)$ entre $q = 0$ y $q = q_0$.

Algunos de los productores también se benefician del precio de equilibrio, ya que están dispuestos a suministrar el producto a precios *menores* que p_0. Bajo ciertas condiciones, la ganancia total de los productores se representa en forma geométrica en la figura 14.49, por el área entre la recta $p = p_0$ y la curva de oferta $p = g(q)$ entre $q = 0$ y $q = q_0$. Esta ganancia, llamada **excedente de los productores,** y abreviada EP, está dada por

$$\mathrm{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq.$$

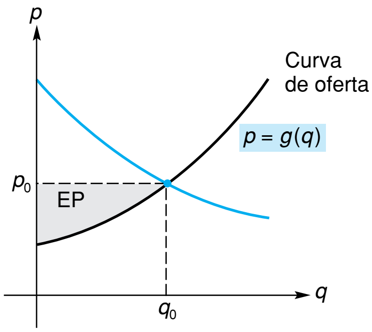


FIGURA 14.49 Excedente de los productores.

EJEMPLO 1 Determinación del excedente de los consumidores y de los productores

La función de demanda para un producto es

$$p = f(q) = 100 - 0.05q,$$

donde p es el precio por unidad (en dólares) de q unidades. La función de oferta es

$$p = g(q) = 10 + 0.1q.$$

Determinar el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio del mercado.

Solución: primero debemos encontrar el punto de equilibrio (p_0, q_0) resolviendo el sistema formado por las funciones $p = 100 - 0.05q$ y $p = 10 + 0.1q$. Igualamos las dos expresiones para p y resolvemos:

$$\begin{aligned} 10 + 0.1q &= 100 - 0.05q, \\ 0.15q &= 90, \\ q &= 600. \end{aligned}$$

Cuando $q = 600$, $p = 10 + 0.1(600) = 70$. Así, $q_0 = 600$ y $p_0 = 70$. El excedente de los consumidores es

$$\begin{aligned} \text{EC} &= \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq = \int_0^{600} (100 - 0.05q - 70)\, dq \\ &= \left(30q - 0.05\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 9000. \end{aligned}$$

El excedente de los productores es

$$\begin{aligned} \text{EP} &= \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\, dq = \int_0^{600} [70 - (10 + 0.1q)]\, dq \\ &= \left(60q - 0.1\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 18{,}000. \end{aligned}$$

Por tanto, el excedente de los consumidores es de \$9000 y el de los productores es de \$18,000.

EJEMPLO 2 Uso de franjas horizontales para encontrar el excedente de los consumidores y de los productores

La ecuación de demanda para un producto es

$$q = f(p) = \frac{90}{p} - 2$$

y la ecuación de oferta es $q = g(p) = p - 1$. *Determinar el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.*

Solución: al determinar el punto de equilibrio, tenemos

$$\begin{aligned} p - 1 &= \frac{90}{p} - 2, \\ p^2 + p - 90 &= 0, \\ (p + 10)(p - 9) &= 0. \end{aligned}$$

Así, $p_0 = 9$, por lo que $q_0 = 9 - 1 = 8$ (véase la fig. 14.50). Observe que la ecuación de demanda expresa a q como una función de p. Ya que el exce-

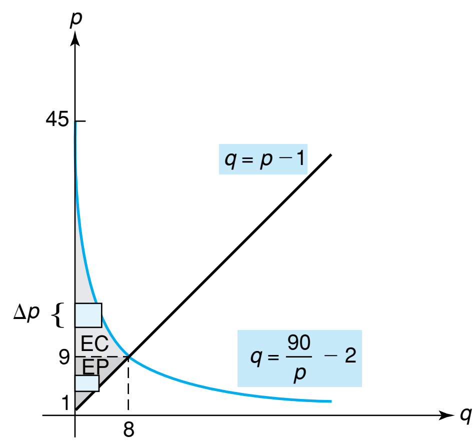


FIGURA 14.50 Diagrama para el ejemplo 2.

dente de los consumidores puede considerarse como un área, esta área puede determinarse por medio de franjas horizontales de ancho Δp y longitud $q = f(p)$. Las áreas de estas franjas se suman desde $p = 9$ hasta $p = 45$, por medio de integración con respecto a p:

$$\text{EC} = \int_9^{45} \left(\frac{90}{p} - 2\right) dp = (90 \ln |p| - 2p)\Big|_9^{45}$$

$$= 90 \ln 5 - 72 \approx 72.85.$$

Usando franjas horizontales para el excedente de los productores, se tiene

$$\text{EP} = \int_1^9 (p - 1)\, dp = \frac{(p-1)^2}{2}\Bigg|_1^9 = 32.$$

Ejercicio 14.10

En los problemas del 1 al 6, la primera ecuación es una ecuación de demanda y la segunda es una ecuación de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio del mercado.

1. $p = 22 - 0.8q$,
$p = 6 + 1.2q$.

2. $p = 1100 - q^2$,
$p = 300 + q^2$.

3. $p = \dfrac{50}{q + 5}$,
$p = \dfrac{q}{10} + 4.5$.

4. $p = 400 - q^2$,
$p = 20q + 100$.

5. $q = 100(10 - p)$,
$q = 80(p - 1)$.

6. $q = \sqrt{100 - p}$,
$q = \dfrac{p}{2} - 10$.

7. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 10\sqrt{100 - p}.$$

Calcule el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado, que ocurre a un precio de \$84.

8. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 400 - p^2,$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{q}{60} + 5.$$

Encuentre el excedente de los productores y de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

9. La ecuación de demanda para un producto es $p = 2^{11-q}$, y la ecuación de oferta es $p = 2^{q+1}$, donde p es el precio por unidad (en cientos de dólares) cuando q unidades se demandan o se ofrecen. Determine, al millar de unidades más cercano, el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

10. La ecuación de demanda para un producto es

$$(p + 20)(q + 10) = 800,$$

y la ecuación de oferta es

$$q - 2p + 30 = 0.$$

a. Verifique, por sustitución, que el equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 20$ y $q = 10$.
b. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

11. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = 60 - \frac{50q}{\sqrt{q^2 + 3600}},$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 10\ln(q + 20) - 26.$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

14.11 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 14.1 antiderivada integral indefinida $\int f(x)\,dx$ signo de integral integrando variable de integración constante de integración

Sección 14.2 condición inicial

Sección 14.3 regla de la potencia para integración

Sección 14.5 $\sum$ índice de sumatoria límites de sumatoria

Sección 14.6 integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ límite inferior de integración límite superior de integración

Sección 14.7 teorema fundamental del cálculo integral $F(x)\big|_a^b$

Sección 14.8 elemento vertical de área (franja vertical)

Sección 14.9 elemento horizontal de área (franja horizontal)

Sección 14.10 excedente de los consumidores excedente de los productores

Resumen

Una antiderivada de una función f es una función F tal que $F'(x) = f(x)$. Dos antiderivadas cualesquiera de f difieren cuando mucho en una constante. La antiderivada más general de f se llama integral indefinida de f y se denota $\int f(x)\,dx$. Así,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

donde C se llama constante de integración.

Algunas fórmulas básicas de integración son

$$\int k\,dx = kx + C, \quad k \text{ es una constante},$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \quad k \text{ es una constante},$$

$$\text{y} \quad \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Otra fórmula es la regla de la potencia para integración:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1.$$

Aquí, u representa una función diferenciable de x y du es su diferencial. Al aplicar la regla de la potencia a una integral dada, es importante que la integral se escriba en forma que coincida con la de la regla. Otras fórmulas de integración son

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$\text{y} \qquad \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C, \quad u \neq 0.$$

Si se conoce la razón de cambio de una función f, esto es, si f' se conoce, entonces f es una antiderivada de f'. Además, si sabemos que f satisface una condición inicial, entonces podemos encontrar la antiderivada particular. Por ejemplo, si nos dan una función de costo marginal dc/dq, por integración podemos encontrar la forma general de c. Esa forma implica una constante de integración. Sin embargo, si también nos dan los costos fijos (esto es, los costos implicados cuando $q = 0$), podremos determinar el valor de la constante de integración y así encontrar la función de costo particular c. De manera similar, si nos dan una función de ingreso marginal dr/dq, entonces por integración y usando el hecho de que $r = 0$ cuando $q = 0$, podemos determinar la función de ingreso particular r. Una vez conocida r, puede encontrarse la correspondiente ecuación de demanda usando la ecuación $p = r/q$.

La notación sigma es conveniente para representar sumas, y en particular es útil en la determinación de áreas. Para encontrar el área de la región limitada por $y = f(x)$ [donde $f(x) \geq 0$ y f es continua] y el eje x, entre $x = a$ y $x = b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud Δx. Si x_i es el extremo derecho de un subintervalo arbitrario, el producto $f(x_i)\,\Delta x$ es el área de un rectángulo. Si denotamos la suma de todas estas áreas de rectángulos para los n subintervalos por S_n, entonces el límite de S_n cuando $n \to \infty$ es el área de toda la región:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \text{área}.$$

Si se omite la restricción de que $f(x) \geq 0$, el límite anterior se define como la integral definida de f en $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En vez de evaluar integrales definidas usando límites, puede usarse el teorema fundamental del cálculo integral. En forma matemática,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f.

Algunas propiedades de la integral definida son

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad k \text{ es una constante,}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

y

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Si se conoce la razón de cambio de una función f, entonces un cambio en los valores de una función de f puede encontrarse con facilidad por medio de la fórmula

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Si $f(x) \geq 0$ y es continua en $[a, b]$, entonces la integral definida puede usarse para encontrar el área de la región limitada por $y = f(x)$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = b$. La integral definida puede usarse también para encontrar áreas de regiones más complicadas. En esos casos conviene dibujar un elemento de área de la región para plantear correctamente la integral definida. A veces conviene considerar elementos verticales y en otras es preferible usar elementos horizontales.

Una aplicación de la determinación de áreas tiene que ver con el excedente de los consumidores y de los productores. Suponga que el mercado para un producto está en equilibrio y que (q_0, p_0) es el punto de equilibrio (el punto de intersección de las curvas de demanda y oferta para el producto). El excedente de los consumidores, EC, corresponde al área entre $q = 0$ y $q = q_0$, limitada por arriba por la curva de demanda y abajo por la recta $p = p_0$. Entonces,

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq,$$

donde f es la función de demanda. El excedente de los productores, EP, corresponde al área, entre $q = 0$ y $q = q_0$, limitada por arriba por la recta $p = p_0$ y abajo por la curva de oferta. Así,

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq,$$

donde g es la función de oferta.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 40 determine las integrales.

1. $\int (x^3 + 2x - 7)\,dx$.
2. $\int dx$.
3. $\int_0^9 (\sqrt{x} + x)\,dx$.
4. $\int \frac{4}{5 - 3x}\,dx$.
5. $\int \frac{6}{(x + 5)^3}\,dx$.
6. $\int_4^{12} (y - 8)^{501}\,dy$.
7. $\int \frac{6x^2 - 12}{x^3 - 6x + 1}\,dx$.
8. $\int_0^2 xe^{4-x^2}\,dx$.
9. $\int_0^1 \sqrt[3]{3t + 8}\,dt$.
10. $\int \frac{5 - 3x}{9}\,dx$.
11. $\int y(y + 1)^2\,dy$.
12. $\int_0^1 10^{-8}\,dx$.
13. $\int \frac{\sqrt[4]{z} - \sqrt[3]{z}}{\sqrt{z}}\,dz$.
14. $\int \frac{(0.5x - 0.1)^4}{0.4}\,dx$.
15. $\int_1^2 \frac{t^2}{2 + t^3}\,dt$.
16. $\int \frac{4x^2 - x}{x}\,dx$.
17. $\int x^2\sqrt{3x^3 + 2}\,dx$.
18. $\int (2x^3 + x)(x^4 + x^2)^{3/4}\,dx$.
19. $\int (e^{2y} - e^{-2y})\,dy$.
20. $\int \frac{8x}{3\sqrt[3]{7 - 2x^2}}\,dx$.
21. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx$.
22. $\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx$.
23. $\int_{-2}^1 10(y^4 - y + 1)\,dy$.
24. $\int_7^{70} dx$.
25. $\int_{\sqrt{3}}^2 7x\sqrt{4 - x^2}\,dx$.
26. $\int_0^1 (2x + 1)(x^2 + x)^4\,dx$.
27. $\int_0^1 \left[2x - \frac{1}{(x + 1)^{2/3}}\right]dx$.
28. $\int_2^8 3(\sqrt{2x} - x + 4)\,dx$.
29. $\int \frac{\sqrt{t} - 3}{t^2}\,dt$.
30. $\int \frac{2z^2}{z - 1}\,dz$.
31. $\int_{-1}^0 \frac{x^2 + 4x - 1}{x + 2}\,dx$.
32. $\int \frac{(x^2 + 4)^2}{x^2}\,dx$.
33. $\int 9\sqrt{x}\sqrt{x^{3/2} + 1}\,dx$.
34. $\int \frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{2x}}\,dx$.
35. $\int_1^e \frac{e^{\ln x}}{x^2}\,dx$.
36. $\int \frac{6x^2 + 4}{e^{x^3+2x}}\,dx$.
37. $\int \frac{(1 + e^{3x})^2}{e^{-3x}}\,dx$.
38. $\int \frac{3}{e^{3x}(6 + e^{-3x})^2}\,dx$.
39. $\int 3\sqrt{10^{3x}}\,dx$.
40. $\int \frac{3x^3 + 3x^2 + 11x + 1}{x^2 + x + 3}\,dx$.

En los problemas 41 y 42 encuentre, y sujeta a las condiciones dadas.

41. $y' = e^{2x} + 3$, $y(0) = -\frac{1}{2}$.
42. $y' = \frac{x + 3}{x}$, $y(1) = 5$.

En los problemas del 43 al 50 determine el área de la región limitada por la curva, el eje x y las rectas dadas.

43. $y = x^2 - 1$, $x = 2$ $(y \geq 0)$.
44. $y = 4e^x$, $x = 0$, $x = 3$.
45. $y = \sqrt{x + 4}$, $x = 0$.
46. $y = x^2 - x - 2$, $x = -2$, $x = 2$.
47. $y = 5x - x^2$.
48. $y = \sqrt[4]{x}$, $x = 1$, $x = 16$.
49. $y = \frac{1}{x} + 3$, $x = 1$, $x = 3$.
50. $y = x^3 - 1$, $x = -1$.

En los problemas del 51 al 58 encuentre el área de la región limitada por las curvas dadas.

51. $y^2 = 4x$, $x = 0$, $y = 2$.
52. $y = 2x^2$, $x = 0$, $y = 2$ $(x \geq 0)$.
53. $y = x^2 + 4x - 5$, $y = 0$.
54. $y = 2x^2$, $y = x^2 + 9$.

55. $y = x^2 - 2x, \quad y = 12 - x^2.$

56. $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 3.$

57. $y = \ln x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1.$

58. $y = 1 - x, \quad y = x - 2, \quad y = 0, \quad y = 1.$

59. Ingreso marginal Si el ingreso marginal está dado por

$$\frac{dr}{dq} = 100 - \frac{3}{2}\sqrt{2q},$$

determine la correspondiente ecuación de demanda.

60. Costo marginal Si el costo marginal está dado por

$$\frac{dc}{dq} = q^2 + 7q + 6,$$

y los costos fijos son de 2500, determine el costo total para producir 6 unidades. Suponga que los costos están en dólares.

61. Ingreso marginal Una función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 275 - q - 0.3q^2.$$

Si r está en dólares, encuentre el incremento en el ingreso total del fabricante si la producción se incrementa de 10 a 20 unidades.

62. Costo marginal Una función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = \frac{500}{\sqrt{2q + 25}}.$$

Si c está en dólares, determine el costo implicado en incrementar la producción de 100 a 300 unidades.

63. Altas hospitalarias Para un grupo de personas hospitalizadas, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = 0.008e^{-0.008t},$$

donde $f(t)$ es la proporción de altas por día al final de t días de hospitalización. ¿Qué proporción del grupo es dada de alta al término de 100 días?

64. Gastos de un negocio Los gastos totales (en dólares) de un negocio para los próximos cinco años están dados por

$$\int_0^5 4000e^{0.05t}\, dt.$$

Evalúe los gastos.

65. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 9 - 2x$ y $y = x$ de $x = 0$ a $x = 4$.

66. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = x^2$ y $y = 4 - 3x$ entre $x = -1$ y $x = 2$.

67. Excedente de los consumidores y de los productores Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = 0.01q^2 - 1.1q + 30,$$

y su ecuación de oferta es

$$p = 0.01q^2 + 8.$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

68. Excedente de los consumidores Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = (q - 5)^2,$$

y la ecuación de oferta es

$$p = q^2 + q + 3,$$

donde p (en miles de dólares) es el precio de 100 unidades cuando q cientos de unidades son demandadas u ofrecidas. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

69. Biología En un estudio sobre mutación de genes[14], se tiene la ecuación

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q - \hat{q}} = -(u + v)\int_0^n dt$$

donde u y v son razones de mutación de genes, las q son frecuencias de genes y n es el número de generaciones. Suponga que todas las letras representan constantes, excepto q y t. Integre ambos miembros de la ecuación y luego utilice su resultado para demostrar que

$$n = \frac{1}{u + v}\ln\left|\frac{q_0 - \hat{q}}{q_n - \hat{q}}\right|.$$

70. Flujo de un fluido En el estudio del flujo de un fluido dentro de un tubo de radio constante, R, tal como el flujo de la sangre en ciertas partes del cuerpo, puede considerarse que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio r, donde $0 \le r \le R$. La velocidad v del fluido es una función de r y está dada por[15]

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta l},$$

donde P_1 y P_2 son las presiones en los extremos del tubo, η (letra griega "eta") es la viscosidad del fluido y l la longitud del tubo. La razón de volumen Q del fluido por el tubo está dado por

$$Q = \int_0^R 2\pi r v\, dr.$$

[14] W. B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis: Burgess Publishing Company, 1964).

[15] R. W. Stacy et. al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

Demuestre que $Q = \dfrac{\pi R^4(P_1 - P_2)}{8\eta l}$. Observe que R aparece como un factor elevado a la cuarta potencia. Así, duplicar el radio del tubo tiene por efecto incrementar el flujo por un factor de 16. La fórmula para la razón de volumen se llama *ley de Poiseuille*, en honor del fisiólogo francés Jean Poiseuille.

71. Inventario En un análisis de inventarios, Barbosa y Friedman[16] se refieren a la función

$$g(x) = \frac{1}{k}\int_1^{1/x} ku^r\, du,$$

donde k y r son constantes, $k > 0$, $r > -2$ y $x > 0$. Verifique la afirmación de que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^{r+2}}.$$

[*Sugerencia:* considere dos casos: cuando $r \neq -1$ y cuando $r = -1$].

En los problemas del 72 al 74 estime el área de la región limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

72. $y = 3x^3 + 6x^2 - 5x - 4, \quad y = 0.$

73. $y = x^3 - 2x - 3, \quad y = 4 + 2x - 3x^2.$

74. $y = x^3 - 2x - 3, \quad y = 2x^2 - x^3 - 4.$

75. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{200}{\sqrt{q + 20}},$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 2\ln(q + 10) + 5.$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

[16] L. C. Barbosa y M. Friedman, "Deterministic Inventory Lot Size Models —a General Root Law", *Management Science*, 24, núm. 8 (1978), 819-826.

Aplicación práctica

Precio de envío

Supongamos que usted es fabricante de un producto cuyas ventas tienen lugar dentro de R millas alrededor de su fábrica. Suponga que usted cobra a sus clientes a razón de s, en dólares por milla, por cada unidad de producto vendido. Si m es el precio unitario (en dólares) en la fábrica, entonces el precio unitario p de entrega a un cliente situado a x millas de la fábrica será el precio de la fábrica más el cargo por envío sx:

$$p = m + sx, \quad 0 \leq x \leq R. \qquad \textbf{(1)}$$

El problema es determinar el precio promedio de entrega de las unidades vendidas.

Supongamos que existe una función f tal que $f(t) \geq 0$ en el intervalo $[0, R]$ y que el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, entre $t = 0$ y $t = x$, representa el número total de unidades Q vendidas a clientes dentro de un radio de x millas de la fábrica [véase la fig. 14.51(a)]. Podemos referirnos a f como la distribución de la demanda. Como Q es una función de x y se representa por un área,

$$Q(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

En particular, el número total de unidades vendidas dentro del área del mercado es

$$Q(R) = \int_0^R f(t)\,dt$$

[véase la fig. 14.51(b)]. Por ejemplo, si $f(t) = 10$ y $R = 100$, entonces el número total de unidades vendidas dentro del área del mercado es

$$Q(100) = \int_0^{100} 10\,dt = 10t\Big|_0^{100} = 1000 - 0 = 1000.$$

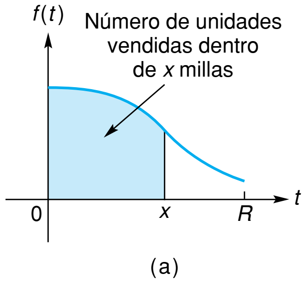
El precio de entrega promedio A está dado por

$$A = \frac{\text{ingreso total}}{\text{número total de unidades vendidas}}.$$

Como el denominador es $Q(R)$, A puede determinarse una vez que se conoce el ingreso total.

Para encontrar el ingreso total, consideremos primero el número de unidades vendidas en un intervalo. Si $t_1 < t_2$ [véase la fig. 14.52(a)], entonces el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, entre $t = 0$ y $t = t_1$, representa el número de unidades vendidas dentro de un radio de t_1 millas de la fábrica. De manera análoga, el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, entre $t = 0$ y $t = t_2$, representa el número de unidades vendidas dentro de t_2 millas de la fábrica. La diferencia entre esas áreas geométricamente es el área de la región sombreada en la figura 14.52(a), y representa el número de unidades vendidas entre t_1 y t_2 millas de la fábrica, lo cual es $Q(t_2) - Q(t_1)$. Así,

$$Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$



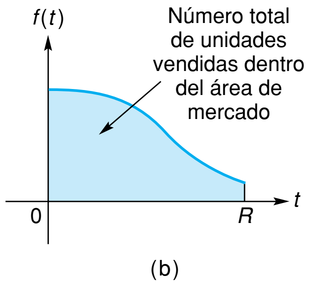


FIGURA 14.51 Número de unidades vendidas como un área.

Por ejemplo, si $f(t) = 10$, entonces el número de unidades vendidas a clientes situados entre 4 y 6 millas de la fábrica es

$$Q(6) - Q(4) = \int_4^6 10\,dt = 10t\Big|_4^6 = 60 - 40 = 20.$$

El área de la región sombreada en la figura 14.52(a), puede aproximarse por el área de un rectángulo [véase la fig. 14.52(b)], cuya altura es $f(t)$ y ancho Δt, donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Así, el número de unidades vendidas en el intervalo de longitud Δt es casi igual a $f(t)\Delta t$.

Como el precio de cada una de esas unidades es [de la ecuación (1)] casi $m + st$, el ingreso recibido es aproximadamente

$$(m + st)f(t)\,\Delta t.$$

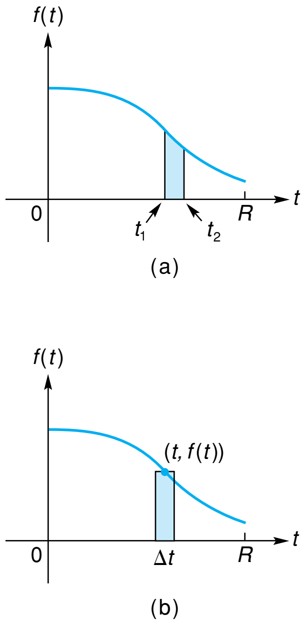


FIGURA 14.52 Número de unidades vendidas en un intervalo.

La suma de todos estos productos desde $t = 0$ hasta $t = R$, aproxima el ingreso total. La integración definida da

$$\sum (m + st)f(t)\,\Delta t \to \int_0^R (m + st)f(t)\,dt.$$

Así,

$$\text{ingreso total} = \int_0^R (m + st)f(t)\,dt.$$

En consecuencia, el precio promedio de envío A está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t)\,dt}{Q(R)}$$

o, en forma equivalente

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t)\,dt}{\int_0^R f(t)\,dt}.$$

Por ejemplo, si $f(t) = 10, m = 200, s = 0.25$ y $R = 100$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^R (m + st)f(t)\,dt &= \int_0^{100} (200 + 0.25t) \cdot 10\,dt \\ &= 10\int_0^{100} (200 + 0.25t)\,dt \\ &= 10\left(200t + \frac{t^2}{8}\right)\Big|_0^{100} \\ &= 10\left[\left(20{,}000 + \frac{10{,}000}{8}\right) - 0\right] \\ &= 212{,}500.\end{aligned}$$

Pero ya teníamos que,

$$\int_0^R f(t)\,dt = \int_0^{100} 10\,dt = 1000.$$

Por tanto, el precio promedio de envío es de $212{,}500/1000 = \$212.50$.

Ejercicios

1. Si $f(t) = 50 - 2t$, determine el número de unidades vendidas a clientes localizados (a) dentro de un radio de 5 millas de la fábrica, y (b) entre 10 y 15 millas.

2. Si $f(t) = 40 - 0.5t$, $m = 50$, $s = 0.20$ y $R = 80$, determine (a) el ingreso total; (b) el número total de unidades vendidas, y (c) el precio promedio de envío.

3. Si $f(t) = 900 - t^2$, $m = 100$, $s = 1$ y $R = 30$, determine (a) el ingreso total; (b) el número total de unidades vendidas, y (c) el precio promedio de envío. Si desea, utilice una calculadora gráfica.

4. En la práctica, ¿cómo hacen los vendedores de cosas como libros o ropa, para determinar los cobros por envío de un pedido? (Visite a un comerciante en línea para determinarlo.) ¿Usted cómo podría calcular el precio promedio de envío de sus productos? ¿El procedimiento es fundamentalmente diferente del visto en está aplicación práctica?

19. \$17; \$86,700. **21.** 4 pies por 4 pies por 2 pies.
23. 2 pulgadas; 128 pulgadas^3.
27. 130 unidades, $p = \$340$, $P = \$36{,}980$; 125 unidades, $p = \$350$, $P = \$34{,}175$. **29.** 250 por lote (4 lotes). **31.** 35.
33. 60 mi/h. **35.** 7; \$1000.
37. $5 - \sqrt{3}$ toneladas; $5 - \sqrt{3}$ toneladas.
41. 10 cajas; \$50.55.

EJERCICIO 13.2 (página 591)

1. $3\,dx$. **3.** $\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+6}}\,dx$. **5.** $-\frac{2}{x^3}\,dx$.
7. $\frac{2x}{x^2+7}\,dx$. **9.** $3e^{2x^2+3}(12x^2+4x+3)\,dx$.
11. $\Delta y = -0.14$, $dy = -0.14$.
13. $\Delta y = -2.5$, $dy = -2.75$.
15. $\Delta y \approx 0.073$, $dy = \frac{3}{40} = 0.075$. **17. a.** -1; **b.** 2.9.
19. 9.95. **21.** $4\frac{1}{32}$. **23.** -0.03. **25.** 1.01.
27. $\frac{1}{2}$. **29.** $\frac{1}{6p(p^2+5)^2}$. **31.** $-p^2$. **33.** $\frac{1}{33}$.
35. $-\frac{4}{5}$. **37.** 44; 41.80. **39.** 2.04. **41.** 0.7.
43. $(1.69 \times 10^{-11})\pi$ cm^3. **45. c.** 42 unidades.

EJERCICIO 13.3 (página 597)

1. -3, elástica. **3.** -1, elasticidad unitaria.
5. $-\frac{53}{52}$, elástica. **7.** $-\left(\frac{150}{e} - 1\right)$, elástica.
9. -1, elasticidad unitaria. **11.** $-\frac{9}{32}$, inelástica.
13. $-\frac{1}{2}$, inelástica.
15. $|\eta| = \frac{10}{3}$ cuando $p = 10$, $|\eta| = \frac{3}{10}$ cuando $p = 3$, $|\eta| = 1$ cuando $p = 6.50$. **17.** -1.2, 0.6% disminuye.
23. b. $\eta = -2.5$, elástica; **c.** 1 unidad;
d. Aumenta, ya que la demanda es elástica.
25. a. $\eta = -\frac{207}{15} \approx -13.8$, elástica; **b.** 27.6%; **c.** Ya que la demanda es elástica, la disminución del precio tiene como resultado un aumento de los ingresos.
27. $\eta = -1.6$; $\frac{dr}{dq} = 30$.
29. Máximo en $q = 5$; mínimo en $q = 95$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 13.4

1. 43 y 1958.

EJERCICIO 13.4 (página 602)

1. 0.25410. **3.** 1.32472. **5.** -2.38769. **7.** 0.33767.
9. 1.90785. **11.** 4.141. **13.** -4.99 y 1.94.
15. 13.33. **17.** 2.880. **19.** 3.45.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 13 (página 604)

1. 20. **3.** 300. **5.** \$2800. **7.** 200 pies por 100 pies.
9. a. 200, \$120; **b.** 300.
11. $\left[\frac{x^2}{x+5} + 2x\ln(x+5)\right]dx$. **13.** $\left(\frac{9}{10}\right)^\circ$.
15. 0.99. **17.** $\frac{1}{8y+7}$. **19.** Elástica. **21. a.** -1.
23. a. $\frac{200}{3} < p < 100$;
b. $\eta = -\frac{1}{3}$; la demanda disminuye en aproximadamente 1.67%.
25. 0.619 y 1.512.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 13 (página 606)

1. $F = \$40$, $V = \$20$; sí. **3.** No hay diferencia.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.1

1. $\int 28.3\,dq = 28.3q + C$.
2. $\int 0.12t^2\,dt = 0.04t^3 + C$.
3. $\int -\frac{480}{t^3}\,dt = \frac{240}{t^2} + C$.
4. $\int (500 + 300\sqrt{t})dt = 500t + 200t^{3/2} + C$.
5. $S(t) = 0.7t^3 - 32.7t^2 + 491.6t + C$.

EJERCICIO 14.1 (página 616)

1. $5x + C$. **3.** $\frac{x^9}{9} + C$. **5.** $-\frac{5}{6x^6} + C$.
7. $-\frac{2}{9x^9} + C$. **9.** $-\frac{5}{6y^{6/5}} + C$. **11.** $8u + \frac{u^2}{2} + C$.
13. $\frac{y^6}{6} - \frac{5y^2}{2} + C$. **15.** $t^3 - 2t^2 + 5t + C$.
17. $(7+e)x + C$. **19.** $\frac{x^2}{14} - \frac{3x^5}{20} + C$.
21. $6e^x + C$. **23.** $\frac{x^{9.3}}{9.3} - \frac{9x^7}{7} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^2} + C$.
25. $-\frac{4x^{3/2}}{9} + C$. **27.** $2\sqrt[8]{x} + C$.
29. $\frac{x^4}{12} + \frac{3}{2x^2} + C$. **31.** $\frac{w^3}{2} + \frac{2}{3w} + C$.
33. $\frac{1}{7}(z^2 - 5z) + C$. **35.** $\frac{x^{e+1}}{e+1} + 10e^x + C$.
37. $\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{12x^{5/4}}{5} + C$.
39. $-\frac{3x^{5/3}}{25} - 7x^{1/2} + 3x^2 + C$.
41. $\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{5x^2}{2} - 15x + C$. **43.** $\frac{2x^{5/2}}{5} + 2x^{3/2} + C$.
45. $\frac{4u^3}{3} + 2u^2 + u + C$. **47.** $\frac{2v^3}{3} + 3v + \frac{1}{2v^4} + C$.
49. $\frac{z^3}{6} + \frac{5z^2}{2} + C$. **51.** $x + e^x + C$.
53. No, $F(x) - G(x)$ debe ser una constante.
55. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.2

1. $N(t) = 800t + 200e^t + 6317.37$.
2. $y(t) = 14t^3 + 12t^2 + 11t + 3$.

EJERCICIO 14.2 (página 621)

1. $y = \frac{3x^2}{2} - 4x + 1$. **3.** 18.

5. $y = -\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{4x}{3} + \frac{1}{12}$.

7. $y = \frac{x^4}{12} + x^2 - 5x + 13$. **9.** $p = 0.7$.

11. $p = 275 - 0.5q - 0.1q^2$. **13.** $c = 1.35q + 200$.

15. 7715. **17.** $G = -\frac{P^2}{50} + 2P + 20$.

21. \$80 ($dc/dq = 27.50$ cuando $q = 50$ no es relevante para el problema).

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.3

1. $T(t) = 10e^{-0.5t} + C$. **2.** $35 \ln|t + 1| + C$.

EJERCICIO 14.3 (página 629)

1. $\frac{(x + 5)^8}{8} + C$. **3.** $\frac{(x^2 + 3)^6}{6} + C$.

5. $\frac{3}{5}(y^3 + 3y^2 + 1)^{5/3} + C$. **7.** $-\frac{5(3x - 1)^{-2}}{6} + C$.

9. $\frac{1}{3}(2x - 1)^{3/2} + C$. **11.** $\frac{(7x - 6)^5}{35} + C$.

13. $\frac{(x^2 + 3)^{13}}{26} + C$. **15.** $\frac{3}{5}(27 + x^5)^{4/3} + C$.

17. $e^{3x} + C$. **19.** $e^{t^2+t} + C$. **21.** $\frac{1}{14}e^{7x^2} + C$.

23. $-3e^{-2x} + C$. **25.** $\ln|x + 5| + C$.

27. $\ln|x^3 + x^4| + C$. **29.** $-\frac{3}{4}(z^2 - 6)^{-4} + C$.

31. $4 \ln|x| + C$. **33.** $\frac{1}{3} \ln|s^3 + 5| + C$.

35. $-\frac{8}{3} \ln|5 - 3x| + C$.

37. $\frac{2}{15}(5x)^{3/2} + C = \frac{2\sqrt{5}}{3}x^{3/2} + C$.

39. $\sqrt{x^2 - 4} + C$. **41.** $\frac{1}{2}e^{y^4 + 1} + C$.

43. $-\frac{1}{6}e^{-2v^3 + 1} + C$. **45.** $-\frac{1}{5}e^{-5x} + 2e^x + C$.

47. $-\frac{1}{24}(3 - 3x^2 - 6x)^4 + C$. **49.** $\frac{1}{3}\ln|x^3 + 6x| + C$.

51. $2 \ln|3 - 2s + 4s^2| + C$. **53.** $\frac{1}{4}\ln(2x^2 + 1) + C$.

55. $\frac{1}{27}(x^3 - x^6)^{-9} + C$. **57.** $\frac{1}{4}(x^4 + x^2)^2 + C$.

59. $\frac{1}{2}(4 - 9x - 3x^2)^{-4} + C$. **61.** $\frac{1}{6}e^{4x^3+3x^2-4} + C$.

63. $-\frac{1}{25}(8 - 5x^2)^{5/2} + C$.

65. $\frac{(2x)^{3/2}}{3} - \sqrt{2x} + C = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \sqrt{2}x^{1/2} + C$.

67. $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$.

69. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{6(x^6 + 1)} + C$.

71. $\frac{1}{3}\ln|3x - 5| + \frac{1}{27}(x^3 - x^6)^{-9} + C$.

73. $\frac{2}{9}(3x + 1)^{3/2} - \ln\sqrt{x^2 + 3} + C$. **75.** $2e^{\sqrt{x}} + C$.

77. $-\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + C$. **79.** $\frac{1}{4}\ln^2(x^2 + 2x) + C$.

81. $y = -\frac{1}{6}(3 - 2x)^3 + \frac{11}{2}$.

83. $y = -\ln|x| = \ln|1/x|$. **85.** $160e^{0.05t} + 190$.

87. $\frac{Rr^2}{4K} + B_1 \ln|r| + B_2$.

EJERCICIO 14.4 (página 635)

1. $x^2 + 3x - \ln|x| + C$. **3.** $\frac{1}{3}(2x^3 + 4x + 1)^{3/2} + C$.

5. $-6\sqrt{4 - 5x} + C$. **7.** $\frac{4^{7x}}{7 \ln 4} + C$.

9. $7x^2 - 4e^{(1/4)x^2} + C$.

11. $x^2 - 3x + \frac{2}{3}\ln|3x - 1| + C$.

13. $\frac{3}{2}\ln(e^{2x} + 1) + C$. **15.** $-\frac{1}{7}e^{7/x} + C$.

17. $x^2 + 4 \ln|x^2 - 4| + C$. **19.** $\frac{2}{9}(\sqrt{x} + 2)^3 + C$.

21. $3(x^{1/3} + 2)^5 + C$. **23.** $\frac{1}{2}(\ln^2 x) + C$.

25. $\frac{1}{3}\ln^3(r + 1) + C$. **27.** $\frac{3^{\ln x}}{\ln 3} + C$.

29. $e^{(x^2+3)/2} + C$. **31.** $8 \ln|\ln(x + 3)| + C$.

33. $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x^2 - 3| + C$.

35. $\ln^{3/2}[(x^2 + 1)^2] + C$.

37. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4 - 1} - (\ln 4)x + C$.

39. $x^2 - 8x - 6 \ln|x| - \frac{2}{x^2} + C$.

41. $x + \ln|x - 1| + C$. **43.** $\sqrt{e^{x^2} + 2} + C$.

45. $-\frac{(e^{-x} + 6)^3}{3} + C$. **47.** $\frac{1}{5}(x^2 + e)^{5/2} + C$.

49. $\frac{1}{36\sqrt{2}}[(8x)^{3/2} + 3]^{3/2} + C$.

51. $-\frac{2}{3}e^{-\sqrt{s^3}} + C$. **53.** $\frac{x^2}{2} + 2x + C$.

55. $\frac{\ln^2 x}{2} + x + C$. **57.** $p = \frac{100}{q + 2}$.

59. $c = 20 \ln|(q + 5)/5| + 2000$.

61. $C = 2(\sqrt{I} + 1)$. **63.** $C = \frac{3}{4}I - \frac{1}{3}\sqrt{I} + \frac{71}{12}$.

65. **a.** \$150 por unidad; **b.** \$15,000; **c.** \$15,300.
67. $2500 - 800\sqrt{5} \approx$ \$711 por acre. **69.** $I = 3$.

EJERCICIO 14.5 (página 640)

1. 35. **3.** 0. **5.** 25. **7.** $-\frac{3}{16}$. **9.** $-\frac{7}{6}$.

11. $\sum_{k=1}^{19} k$. **13.** $\sum_{k=1}^{4} (2k - 1)$. **15.** $\sum_{k=1}^{10} k^2$.

17. 101,475. **19.** 84. **21.** 273. **23.** 8; \$850.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.6

1. \$5975.

EJERCICIO 14.6 (página 648)

1. $\frac{2}{3}$ unidades cuadradas. **3.** $\frac{14}{27}$ unidades cuadradas.

5. $S_n = \frac{1}{n}\left[4\left(\frac{1}{n}\right) + 4\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + 4\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \frac{2(n+1)}{n}$.

7. **a.** $S_n = \frac{n+1}{2n} + 1$; **b.** $\frac{3}{2}$. **9.** $\frac{1}{2}$ unidades cuadradas.

11. $\frac{1}{3}$ unidades cuadradas. **13.** $\frac{16}{3}$ unidades cuadradas.

15. 6. **17.** −18. **19.** $\frac{5}{6}$. **21.** 0. **23.** $\frac{11}{4}$.

25. 4.3 unidades cuadradas. **27.** 2.4. **29.** −25.5.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.7

1. \$32,830. **2.** \$28,750.

EJERCICIO 14.7 (página 657)

1. 14. **3.** $\frac{15}{2}$. **5.** −20. **7.** $\frac{7}{3}$. **9.** $\frac{15}{2}$.

11. $-\frac{7}{6}$. **13.** 0. **15.** $\frac{5}{3}$. **17.** $\frac{32}{3}$. **19.** $-\frac{1}{6}$.

21. $4 \ln 8$. **23.** e^5. **25.** $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$. **27.** $\frac{3}{4}$.

29. $\frac{38}{9}$. **31.** $\frac{15}{28}$. **33.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **35.** $e + \frac{1}{2e^2} - \frac{3}{2}$.

37. $3 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}$. **39.** $\frac{e^3}{2}(e^{12} - 1)$. **41.** $6 + \ln 19$.

43. $\frac{47}{12}$. **45.** $6 - 3e$. **47.** 7. **49.** 0. **51.** $\alpha^{5/2}T$.

53. $\int_b^a -Ax^{-B}\,dx$. **55.** \$8639. **57.** 1,973,333.

59. \$220. **61.** \$2000. **63.** 696; 492. **65.** $2Ri$.
69. 0.05. **71.** 3.52. **73.** 55.39.

EJERCICIO 14.8 (página 663)

En los problemas del **1** *al* **33** *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

1. 8. **3.** $\frac{19}{2}$. **5.** 8. **7.** $\frac{19}{3}$. **9.** 9. **11.** $\frac{50}{3}$.

13. 36. **15.** 8. **17.** $\frac{32}{3}$. **19.** 1. **21.** 18.

23. $\frac{26}{3}$. **25.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$. **27.** $e^2 - 1$.

29. $\frac{3}{2} + 2\ln 2 = \frac{3}{2} + \ln 4$. **31.** 68. **33.** 2.

35. 19 unidades cuadradas. **37.** **a.** $\frac{1}{16}$; **b.** $\frac{3}{4}$; **c.** $\frac{7}{16}$.

39. **a.** $\ln\frac{5}{3}$; **b.** $\ln(4) - 1$; **c.** $2 - \ln 3$.

41. 1.89 unidades cuadradas.
43. 11.41 unidades cuadradas.

EJERCICIO 14.9 (página 670)

1. Área $= \int_{-2}^{3} [(x + 6) - x^2]\,dx$.

3. Área $=$
$$\int_0^3 [2x - (x^2 - x)]\,dx + \int_3^4 [(x^2 - x) - 2x]\,dx.$$

5. Área $= \int_0^1 [(y + 1) - \sqrt{1 - y}]\,dy$.

7. Área $= \int_{-\sqrt{5}}^{2} [(11 - 2x^2) - (x^2 - 4)]\,dx$.

En los problemas del **9** *al* **33** *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

9. $\frac{4}{3}$. **11.** $\frac{16}{3}$. **13.** $8\sqrt{6}$. **15.** 40. **17.** $\frac{125}{6}$.

19. $\frac{9}{2}$. **21.** $\frac{125}{12}$. **23.** $\frac{32}{81}$. **25.** $\frac{44}{3}$.

27. $\frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$. **29.** $\frac{1}{2}$. **31.** $\frac{255}{32} - 4\ln 2$.

33. 12. **35.** $\frac{20}{63}$. **37.** $\frac{8}{3m^3}$ unidades cuadradas.

39. $2^{4/3}$. **41.** 4.76 unidades cuadradas.
43. 7.26 unidades cuadradas.

EJERCICIO 14.10 (página 674)

1. EC = 25.6, EP = 38.4.
3. EC = 50 ln (2) − 25, EP = 1.25.
5. EC = 800, EP = 1000. **7.** \$426.67. **9.** \$254,000.
11. EC ≈ 1197, EP ≈ 477.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 14 (página 677)

1. $\frac{x^4}{4} + x^2 - 7x + C$. **3.** $\frac{117}{2}$.

5. $-3(x + 5)^{-2} + C$. **7.** $2\ln|x^3 - 6x + 1| + C$.

9. $\frac{11\sqrt[3]{11}}{4} - 4$. **11.** $\frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C$.

13. $\frac{4z^{3/4}}{3} - \frac{6z^{5/6}}{5} + C$. **15.** $\frac{1}{3}\ln\frac{10}{3}$.

17. $\frac{2}{27}(3x^3 + 2)^{3/2} + C$. **19.** $\frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y}) + C$.

21. $\ln|x| - \frac{2}{x} + C$. **23.** 111. **25.** $\frac{7}{3}$.

27. $4 - 3\sqrt[3]{2}$. **29.** $\frac{3}{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$. **31.** $\frac{3}{2} - 5\ln 2$.

33. $4(x^{3/2} + 1)^{3/2} + C$. **35.** 1. **37.** $\frac{(1 + e^{3x})^3}{9} + C$.

39. $\dfrac{2\sqrt{10^{3x}}}{\ln 10} + C$. **41.** $y = \dfrac{1}{2}e^{2x} + 3x - 1$.

En los problemas del **43** *al* **57** *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas*.

43. $\dfrac{4}{3}$. **45.** $\dfrac{16}{3}$. **47.** $\dfrac{125}{6}$. **49.** $6 + \ln 3$. **51.** $\dfrac{2}{3}$.

53. 36. **55.** $\dfrac{125}{3}$. **57.** $e - 1$.

59. $p = 100 - \sqrt{2q}$. **61.** \$1900. **63.** 0.5507.

65. 15 unidades cuadradas. **67.** $\text{EC} = 166\frac{2}{3}$, $\text{EP} = 53\frac{1}{3}$.

73. 24.71 unidades cuadradas. **75.** $\text{EC} \approx 1148$, $\text{EP} \approx 251$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 14 (página 680)

1. a. 225; **b.** 125.
3. a. \$2,002,500; **b.** 18,000; **c.** \$111.25.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.1

1. $S(t) = -40te^{0.1t} + 400e^{0.1t} + 4600$.
2. $P(t) = 0.025t^2 - 0.05t^2 \ln t + 0.05t^2(\ln t)^2 + C$.

EJERCICIO 15.1 (página 688)

1. $\dfrac{2}{3}x(x+5)^{3/2} - \dfrac{4}{15}(x+5)^{5/2} + C$.

3. $-e^{-x}(x+1) + C$. **5.** $\dfrac{y^4}{4}\left[\ln(y) - \dfrac{1}{4}\right] + C$.

7. $x[\ln(4x) - 1] + C$.

9. $10x(x+1)^{3/2} - 4(x+1)^{5/2} + C$
$= 2(x+1)^{3/2}(3x-2) + C$.

11. $-\dfrac{x}{2(2x+1)} + \dfrac{1}{4}\ln|2x+1| + C$.

13. $-\dfrac{1}{x}(1 + \ln x) + C$. **15.** $e^2(3e^2 - 1)$.

17. $\dfrac{1}{2}(1 - e^{-1})$, no se necesita integración por partes.

19. $2(9\sqrt{3} - 10\sqrt{2})$.

21. $2x(x-1)\ln(x-1) - x^2 + C$.

23. $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

25. $\dfrac{x^3}{3} + 2e^{-x}(x+1) - \dfrac{e^{-2x}}{2} + C$.

27. $\dfrac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + C$.

29. $\dfrac{2^{2x-1}}{\ln 2} + \dfrac{2^{x+1}x}{\ln 2} - \dfrac{2^{x+1}}{\ln^2 2} + \dfrac{x^3}{3} + C$.

31. $2e^3 + 1$ unidades cuadradas.

33. $\dfrac{298}{15}$ unidades cuadradas.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.2

1. $r(q) = \dfrac{5}{2}\ln\left|\dfrac{3(q+1)^3}{q+3}\right|$.
2. $V(t) = 150t^2 - 900\ln(t^2 + 6) + C$.

EJERCICIO 15.2 (página 695)

1. $\dfrac{12}{x+6} - \dfrac{2}{x+1}$. **3.** $1 + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{8}{x+4}$.

5. $\dfrac{4}{x+1} - \dfrac{9}{(x+1)^2}$. **7.** $\dfrac{3}{x} - \dfrac{2x}{x^2+1}$.

9. $2\ln|x| + 3\ln|x-1| + C = \ln|x^2(x-1)^3| + C$.

11. $-3\ln|x+1| + 4\ln|x-2| + C$
$= \ln\left|\dfrac{(x-2)^4}{(x+1)^3}\right| + C$.

13. $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{3x^2}{2} + 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1|\right] + C$
$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3x^2}{2} + \ln\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]^2\right) + C$.

15. $\ln|x| + 2\ln|x-4| - 3\ln|x+3| + C$
$= \ln\left|\dfrac{x(x-4)^2}{(x+3)^3}\right| + C$.

17. $\ln|x^6 + 2x^4 - x^2 - 2| + C$, no se requiere de fracciones parciales.

19. $\dfrac{4}{x-2} - 5\ln|x-1| + 7\ln|x-2| + C$
$= \dfrac{4}{x-2} + \ln\left|\dfrac{(x-2)^7}{(x-1)^5}\right| + C$.

21. $4\ln|x| - \ln(x^2+4) + C = \ln\left[\dfrac{x^4}{x^2+4}\right] + C$.

23. $-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \dfrac{2}{x-3} + C$.

25. $5\ln(x^2+1) + 2\ln(x^2+2) + C$
$= \ln[(x^2+1)^5(x^2+2)^2] + C$.

27. $\dfrac{3}{2}\ln(x^2+1) + \dfrac{1}{x^2+1} + C$.

29. $18\ln(4) - 10\ln(5) - 8\ln(3)$.

31. $11 + 24\ln\dfrac{2}{3}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 15.3 (página 701)

1. $\dfrac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C$. **3.** $-\dfrac{\sqrt{16x^2+3}}{3x} + C$.

5. $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x}{6+7x}\right| + C$. **7.** $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right| + C$.

9. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{4}{5}\ln|4+5x| - \dfrac{2}{3}\ln|2+3x|\right] + C$.

11. $\dfrac{1}{8}(2x - \ln[4 + 3e^{2x}]) + C$.

13. $2\left[\dfrac{1}{1+x} + \ln\left|\dfrac{x}{1+x}\right|\right] + C$. **15.** $1 + \ln\dfrac{4}{9}$.

17. $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-3} - 3\ln|x + \sqrt{x^2-3}|) + C$.

19. $\dfrac{1}{144}$. **21.** $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

23. $2\left(-\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{2x} + \ln|2x + \sqrt{4x^2+1}|\right) + C$.

25. $\dfrac{1}{9}\left(\ln|1+3x| + \dfrac{1}{1+3x}\right) + C$.

27. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}x}{\sqrt{7}-\sqrt{5}x}\right|\right) + C$.