CAPÍTULO 9

Límites y continuidad

El filósofo Zenón de Elea era aficionado a las paradojas acerca del movimiento. Su más famosa era algo parecida a ésta. El guerrero Aquiles acepta correr una carrera en contra de una tortuga. Aquiles puede correr 10 metros por segundo y la tortuga sólo 1 metro por segundo, de modo que la tortuga tiene una ventaja de 10 metros de la línea de salida. Aun así, como Aquiles es mucho más rápido debe ganar. Pero en el tiempo que él haya cubierto sus primeros 10 metros y llegado al lugar en donde la tortuga inició, la tortuga ya avanzó 1 metro y aún lleva la delantera. Y después de que Aquiles haya cubierto ese metro, la tortuga ha avanzado 0.1 metro y aún llevaría la delantera. Y así sucesivamente. Por tanto, Aquiles estaría cada vez más cerca de la tortuga pero nunca la alcanzaría.

Por supuesto que la audiencia de Zenón sabía que algo estaba mal en el argumento. Nosotros podemos escribir una ecuación algebraica con el avance total de Aquiles a la izquierda, el de la tortuga a la derecha y t, que representa el tiempo en segundos en los cuales Aquiles se empareja con la tortuga:

$$(10 \text{ m/s})t = (1 \text{ m/s})t + 10 \text{ m}.$$

La solución es $t = 1\frac{1}{9}$ segundos, tiempo en el que Aquiles ha corrido $\left(1\frac{1}{9}\text{ s}\right)(10 \text{ m/s}) = 11\frac{1}{9}$ metros.

Lo que desconcertaba a Zenón y a sus escuchas es cómo podría ser que

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 11\frac{1}{9},$$

en donde el lado izquierdo representa una *suma infinita* y el lado derecho es un resultado finito. La solución moderna a este problema es el concepto de límite, que es el tema principal de este capítulo. El lado izquierdo de la ecuación es una serie geométrica infinita. Utilizando la notación de límite y la fórmula de la sección 8.3 para la suma de una serie geométrica, escribimos

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} 10^{1-n} = \lim_{k\to\infty} \frac{10\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = 11\frac{1}{9}.$$

OBJETIVO Estudiar límites y sus propiedades básicas.

9.1 LÍMITES

Tal vez ha estado usted en un estacionamiento en el que puede "aproximarse" al automóvil de enfrente, pero no quiere golpearlo ni tocarlo. Esta noción de estar cada vez más cerca de algo, pero sin tocarlo, es muy importante en matemáticas, y la cual está involucrada en el concepto de *límite*, en el que descansa el fundamento del cálculo. Básicamente, haremos que una variable "se aproxime" a un valor particular y examinaremos el efecto que tiene sobre los valores de la función.

Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

TABLA 9.1

$x < 1$		$x > 1$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.8	2.44	1.2	3.64
0.9	2.71	1.1	3.31
0.95	2.8525	1.05	3.1525
0.99	2.9701	1.01	3.0301
0.995	2.985025	1.005	3.015025
0.999	2.997001	1.001	3.003001

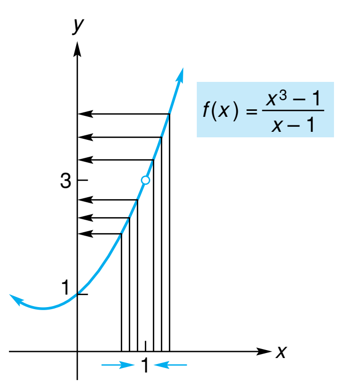


FIGURA 9.1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$

Aunque esta función no está definida en $x = 1$, quizá desee conocer acerca del comportamiento de los valores de la función cuando x se hace muy cercana a 1. La tabla 9.1 da algunos valores de x que son un poco menores y otros un poco mayores que 1, y sus correspondientes valores funcionales. Observe que cuando x toma valores más y más próximos a 1, sin importar si x se aproxima *por la izquierda* ($x < 1$) o *por la derecha* ($x > 1$), los valores correspondientes de $f(x)$ se acercan cada vez más a un solo número, el 3. Esto también es claro de la gráfica de f en la figura 9.1. Observe que aunque la función no está definida en $x = 1$ (como se indica por un pequeño círculo vacío), los valores de la función se acercan cada vez más a 3, conforme x se acerca más y más a 1. Para expresar esto, decimos que el **límite** de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 es 3 y escribimos

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

Podemos hacer $f(x)$ tan cercana a 3 como queramos, si escogemos un valor de x lo suficientemente cercano, pero diferente de 1. El límite existe en 1 aunque 1 no esté en el dominio de f.

También podemos considerar el límite de una función cuando x se aproxima a un número que está en el dominio. Examinemos el límite de $f(x) = x + 3$ cuando x tiende a 2 ($x \to 2$):

$$\lim_{x\to 2} (x + 3).$$

Obviamente, si x es cercana a 2 (pero diferente de 2), entonces $x + 3$ es cercano a 5. Esto también es claro de la tabla y la gráfica en la figura 9.2. Por tanto,

$$\lim_{x\to 2} (x + 3) = 5.$$

$x < 2$	
x	$f(x)$
1.5	4.5
1.9	4.9
1.95	4.95
1.99	4.99
1.999	4.999

$x > 2$	
x	$f(x)$
2.5	5.5
2.1	5.1
2.05	5.05
2.01	5.01
2.001	5.001

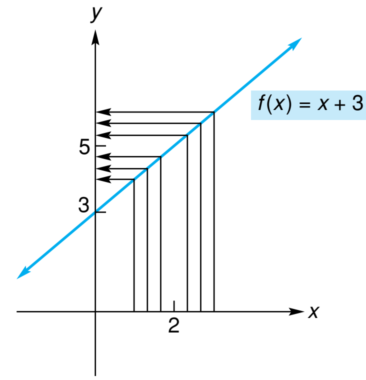


FIGURA 9.2 $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5.$

Aunque $x + 3$ es 5, cuando $x = 2$, esto no tiene relación con la existencia de un límite.

En general, para cualquier función f, tenemos la definición siguiente de un límite.

Definición

El **límite** de $f(x)$ cuando x se acerca (o tiende) a a, es el número L, escrito

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

siempre que $f(x)$ esté arbitrariamente cercana a L para toda x lo suficientemente cerca, pero diferente de a.

Enfatizamos que cuando debemos encontrar un límite, no estamos interesados en lo que le pasa a $f(x)$ cuando x es igual a a, sino sólo en lo que le sucede a $f(x)$ cuando x es cercana a a. Además, un límite debe ser independiente de la manera en que x se aproxima a a. Esto es, el límite debe ser el mismo si x se acerca a a por la izquierda o por la derecha (para $x < a$ o $x > a$, respectivamente).

EJEMPLO 1 Estimación de un límite a partir de una gráfica

a. *Estimar* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, *donde la gráfica de* f *está dada en la figura* 9.3(a).

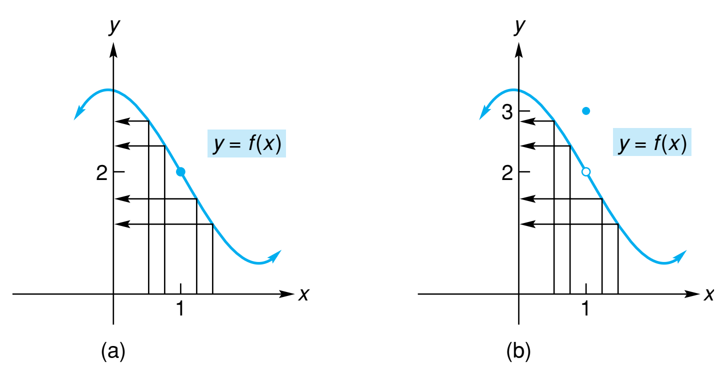


FIGURA 9.3 Investigación de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Solución: si vemos en la gráfica los valores de x cercanos a 1, advertimos que $f(x)$ está cercana a 2. Además, cuando x se aproxima cada vez más a 1, entonces $f(x)$ parece estar cada vez más cercana a 2. Así, estimamos que

$$\lim_{x \to 1} f(x) \text{ es } 2.$$

b. *Estimar* $\lim_{x \to 1} f(x)$, *donde la gráfica de f está dada en la figura* 9.3(*b*).

Solución: aunque $f(1) = 3$, este hecho no tiene importancia sobre el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1. Vemos que cuando x se aproxima a 1, entonces $f(x)$ parece aproximarse a 2. Por tanto, estimamos que

$$\lim_{x \to 1} f(x) \text{ es } 2.$$

Hasta aquí todos los límites que hemos considerado en realidad existen. Ahora veremos algunas situaciones en las que no existe un límite.

Principios en práctica 1

Límites que no existen

En matemáticas la función mayor entero, que se denota como $f(x) = [x]$, la utilizan todos los días los cajeros que dan cambio a los clientes. Esta función proporciona la cantidad de billetes para cada monto de cambio que se debe (por ejemplo, si a un cliente se le debe \$1.25 de cambio, él o ella obtendrían \$1 en billete; así, $[1.25] = 1$). Formalmente, $[x]$ se define como el mayor entero que es menor o igual a x. Haga la gráfica de f, la cual algunas veces se denomina función escalonada, en su calculadora gráfica en el rectángulo estándar de visualización (la encontrará en el menú de números; se denomina "parte entera"). Explore esta gráfica usando TRACE. Determine si existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

EJEMPLO 2 Límites que no existen

a. *Estimar* $\lim_{x \to -2} f(x)$, *si existe, donde la gráfica de f está dada en la figura* 9.4.

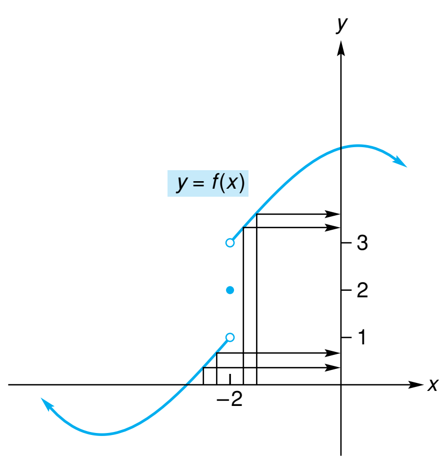


FIGURA 9.4 $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe.

Solución: cuando x tiende a -2 por la izquierda ($x < -2$), los valores de $f(x)$ parecen más cercanos a 1. Pero cuando x tiende a -2 por la derecha ($x > -2$), entonces $f(x)$ parece más cercana a 3. Por tanto, cuando x tiende a -2, los valores de la función no se acercan a un solo número. Concluimos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) \text{ no existe.}$$

Observe que el límite no existe aunque la función está definida en $x = -2$.

b. *Estimar* $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$, *sí existe.*

x	$f(x)$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.1	100
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

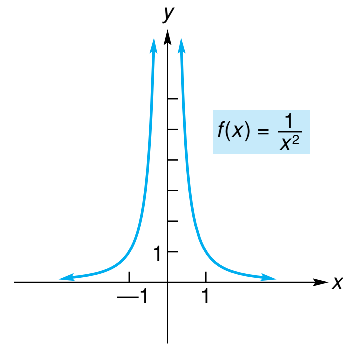


FIGURA 9.5 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ no existe.

Solución: sea $f(x) = 1/x^2$. La tabla de la figura 9.5 da los valores de $f(x)$ para algunos valores de x cercanos a 0. Conforme x se acerca más a 0, los valores de $f(x)$ se hacen más y más grandes, sin cota. También esto es claro de la gráfica. Ya que los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número cuando x tiende a 0,

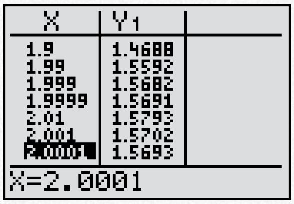
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \text{ no existe.}$$

Tecnología

Problema: estimar $\lim_{x\to 2} f(x)$ si

$$f(x) = \frac{x^3 + 2.1x^2 - 10.2x + 4}{x^2 + 2.5x - 9}.$$

Solución: un método para encontrar el límite es construir una tabla de valores de la función $f(x)$ cuando x es cercana a 2. De la figura 9.6, estimamos que el límite es 1.57. De manera alternativa, podemos estimar el límite a partir de la gráfica de f. La figura 9.7 muestra la gráfica de f con la ventana estándar de $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Primero hacemos varios acercamientos alrededor de $x = 2$ y obtenemos lo que se muestra en la figura 9.8. Después rastreando alrededor de $x = 2$, estimamos que el límite es 1.57.



X	Y1
1.9	1.4688
1.99	1.5592
1.999	1.5682
1.9999	1.5691
2.01	1.5793
2.001	1.5702
2.0001	1.5693

X=2.0001

FIGURA 9.6 $\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.57$.

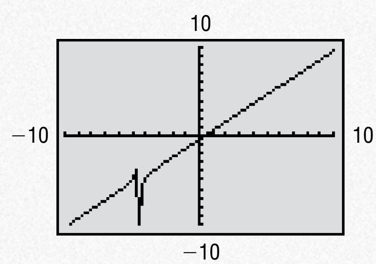


FIGURA 9.7 Gráfica de $f(x)$ en la ventana estándar.

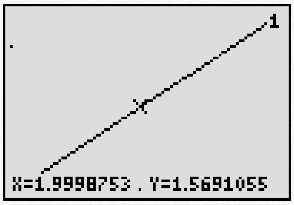


FIGURA 9.8 El acercamiento y trazado alrededor de $x = 2$ proporciona $\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.57$.

Propiedades de los límites

Para determinar límites no siempre hace falta calcular los valores de la función o hacer el esbozo de una gráfica. Existen también varias propiedades de los límites que podemos emplear. Las siguientes propiedades pueden parecerle razonables:

1. Si $f(x) = c$, es una función constante, entonces
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c.$$
2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$, para cualquier entero positivo n.

EJEMPLO 3 **Aplicación de las propiedades 1 y 2 de lo límites**

a. $\lim_{x\to 2} 7 = 7; \qquad \lim_{x\to -5} 7 = 7.$

b. $\lim_{x\to 6} x^2 = 6^2 = 36.$

c. $\lim_{t\to -2} t^4 = (-2)^4 = 16.$

Algunas otras propiedades de los límites son las siguientes:

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existe, entonces

3. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$

   Esto es, el límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia, respectivamente, de los límites.

4. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$

   Esto es, el límite de un producto es el producto de los límites.

5. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$, donde c es una constante.

   Esto es, el límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

Principios en práctica 2

Aplicación de las propiedades de los límites

El volumen de helio en un globo esférico (en centímetros cúbicos), como una función del radio, r, en centímetros, está dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Determine $\lim_{r\to 1} V(r)$.

EJEMPLO 4 **Aplicación de las propiedades de los límites**

a.
$$\lim_{x\to 2} (x^2 + x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} x \qquad \text{(propiedad 3)}$$
$$= 2^2 + 2 = 6 \qquad \text{(propiedad 2).}$$

b. La propiedad 3 puede aplicarse por extensión al límite de un número finito de sumas y diferencias. Por ejemplo,
$$\lim_{q\to -1} (q^3 - q + 1) = \lim_{q\to -1} q^3 - \lim_{q\to -1} q + \lim_{q\to -1} 1$$
$$= (-1)^3 - (-1) + 1 = 1.$$

c. $\lim_{x\to 2}[(x+1)(x-3)] = \lim_{x\to 2}(x+1)\cdot\lim_{x\to 2}(x-3)$ (propiedad 4)

$$= [\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1]\cdot[\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 3]$$

$$= (2+1)\cdot(2-3) = 3(-1) = -3.$$

d. $\lim_{x\to -2} 3x^3 = 3\cdot \lim_{x\to -2} x^3$ (propiedad 5)

$$= 3(-2)^3 = -24.$$

Principios en práctica 3

Límites de una función polinomial

La función de ingreso para cierto producto está dado por $R(x) = 500x - 6x^2$. Determine $\lim_{x\to 8} R(x)$.

EJEMPLO 5 Límites de una función polinomial

Sea $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ una función polinomial. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)$$

$$= c_n\cdot \lim_{x\to a} x^n + c_{n-1}\cdot \lim_{x\to a} x^{n-1} + \cdots + c_1\cdot \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} c_0$$

$$= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = f(a).$$

Si f es una función polinomial, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Esto es, el límite de una función polinomial cuando x tiende a a, sólo es el valor de la función en a.

El resultado del ejemplo 5 nos permite encontrar muchos límites cuando $x \to a$ con sólo sustituir a por x. Por ejemplo, podemos encontrar

$$\lim_{x\to -3}(x^3 + 4x^2 - 7)$$

sustituyendo -3 por x, ya que $x^3 + 4x^2 - 7$ es una función polinomial:

$$\lim_{x\to -3}(x^3 + 4x^2 - 7) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 7 = 2.$$

Del mismo modo,

$$\lim_{h\to 3}[2(h-1)] = 2(3-1) = 4.$$

Debemos insistir: no se calculan límites con sólo “sustituir”, a menos que podamos apoyarnos en alguna regla que cubra la situación. Pudimos encontrar los dos límites anteriores por sustitución directa porque tenemos una regla que se aplica a límites de funciones polinomiales. Sin embargo, el uso indiscriminado de la sustitución puede conducir a resultados erróneos. Para ilustrarlo, en el ejemplo 1(b) tenemos $f(1) = 3$, que no es el límite cuando $x \to 1$; en el ejemplo 2(a), $f(-2) = 2$, que no es el límite cuando $x \to -2$.

Las siguientes dos propiedades de límites tratan con cocientes y raíces.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existen, entonces

6. $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \qquad \text{si} \qquad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Esto es, el límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el denominador no tenga un límite de 0.

7. $$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}.$$[1]

Observe que en el ejemplo 6(a) el numerador y el denominador de la función son polinomios. En general, podemos determinar el límite de una función racional cuando $x \to a$ por medio de sustitución directa, siempre y cuando el denominador no sea 0 en a.

EJEMPLO 6 Aplicación de las propiedades 6 y 7 de los límites

a. $$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^3 + 4} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} (2x^2 + x - 3)}{\lim\limits_{x\to 1} (x^3 + 4)} = \frac{2 + 1 - 3}{1 + 4} = \frac{0}{5} = 0.$$

b. $$\lim_{t\to 4} \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{\lim_{t\to 4} (t^2 + 1)} = \sqrt{17}.$$

c. $$\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{x^2 + 7} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 3} (x^2 + 7)} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Límites y manipulación algebraica

Ahora consideremos límites para los cuales nuestras propiedades de los límites no se aplican, y no pueden evaluarse por sustitución directa. Nuestra técnica consistirá en realizar operaciones algebraicas sobre $f(x)$ de modo que obtengamos una forma en la cual nuestras propiedades de los límites puedan aplicarse.

Principios en práctica 4

Aplicación de las propiedades de los límites

La tasa de cambio de la productividad p (en número de unidades producidas por hora) aumenta con el tiempo de trabajo de acuerdo con la función

$$p = \frac{50(t^2 + 4t)}{t^2 + 3t + 20}.$$

Determine $\lim\limits_{t\to 2} p$.

EJEMPLO 7 Determinación de un límite por factorización y cancelación

Determinar $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Solución: cuando $x \to -1$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a cero. Ya que el límite del denominador es 0, *no podemos* utilizar la propiedad 6. Sin embargo, como lo que le suceda al cociente cuando x es igual a -1 no nos interesa, podemos suponer que $x \neq -1$ y simplificar la fracción:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{\cancel{(x + 1)}(x - 1)}{\cancel{x + 1}} = x - 1.$$

Esta manipulación algebraica (factorización y cancelación) sobre la función original $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ da lugar a una nueva función $x - 1$, que es igual a la función original para $x \neq -1$. Por tanto,

[1] Si n es par, requerimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ sea positiva.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x + 1)}(x - 1)}{\cancel{x + 1}} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2.$$

Observe que, aunque la función original no está definida en -1, *tiene* un límite cuando $x \to -1$.

Cuando tanto $f(x)$ como $g(x)$ se aproximan a 0 cuando $x \to a$, entonces el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

se dice que tiene la *forma* 0/0.

En el ejemplo 7 el método para encontrar un límite por sustitución directa no funciona. Reemplazando x por -1 se obtiene $0/0$, lo cual carece de significado. Cuando surge la forma indeterminada $0/0$, la operación algebraica (como en el ejemplo 7) puede dar lugar a una forma para la cual *pueda* determinarse el límite.

Al inicio de esta sección, encontramos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

por inspección de una tabla de valores de la función $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$, y también considerando la gráfica de f. Este límite tiene la forma $0/0$. Ahora lo determinaremos utilizando la técnica descrita en el ejemplo 7 (la técnica de factorización y cancelación).

EJEMPLO 8 Forma 0/0

Encontrar $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Solución: cuando $x \to 1$, el numerador y el denominador se aproximan a cero. De esta manera, trataremos de expresar el cociente en una forma diferente para $x \neq 1$. Factorizando, tenemos

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{\cancel{(x - 1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x - 1)}} = x^2 + x + 1.$$

(Alternativamente, la división daría el mismo resultado). Por tanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3,$$

como se mostró antes.

EJEMPLO 9 Forma 0/0

Si $f(x) = x^2 + 1$, *encontrar* $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

La expresión

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

se denomina *cociente de diferencias*. El límite del cociente de diferencias yace en el corazón del cálculo diferencial. Encontrará tales límites en el capítulo 10.

Solución:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x + h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h}.$$

Aquí tratamos a x como una constante porque h, no x, está cambiando. Cuando $h \to 0$, el numerador y el denominador se aproximan a 0. Por tanto, trataremos de expresar el cociente en forma tal que $h \neq 0$. Tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{[(x + h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[x^2 + 2xh + h^2 + 1] - x^2 - 1}{h}$$

Principios en práctica 5
Forma 0/0

La longitud de un material aumenta cuando se calienta de acuerdo con la ecuación $l = 125 + 2x$. La tasa a la cual la longitud aumenta está dada por

$$\lim_{h\to 0} \frac{125 + 2(x + h) - (125 + 2x)}{h}.$$

Calcule este límite.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x.$$

Un límite especial

Concluimos esta sección con una nota concerniente a uno de los límites más importantes, a saber

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}.$$

La figura 9.9 muestra la gráfica de $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Aunque $f(0)$ no existe, cuando $x \to 0$ es claro que el límite de $(1 + x)^{1/x}$ existe. Es aproximadamente 2.71828 y se denota por la letra e. Ésta, como recordará, simboliza la base del sistema de los logaritmos naturales. El límite

Este límite se utilizará en el capítulo 11.

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

en realidad puede considerarse como la definición de e.

x	$(1 + x)^{1/x}$
0.5	2.2500
0.1	2.5937
0.01	2.7048
0.001	2.7169

x	$(1 + x)^{1/x}$
−0.5	4.0000
−0.1	2.8680
−0.01	2.7320
−0.001	2.7196

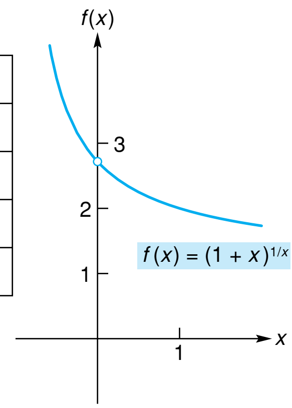


FIGURA 9.9 $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

Ejercicio 9.1

En los problemas del 1 al 4 utilice la gráfica de f para estimar cada límite, si existe.

1. La gráfica de f aparece en la figura 9.10.

a. $\lim_{x\to 0} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 1} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 2} f(x)$.

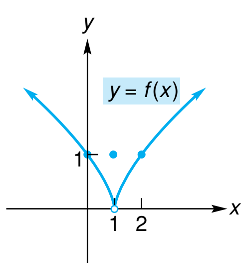


FIGURA 9.10 Diagrama para el problema 1.

2. La gráfica de f aparece en la figura 9.11.

a. $\lim_{x\to -1} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 0} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 1} f(x)$.

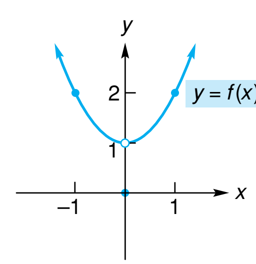


FIGURA 9.11 Diagrama para el problema 2.

3. La gráfica de f aparece en la figura 9.12.

a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$. **b.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. **c.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

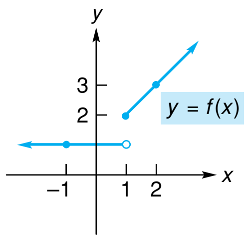


FIGURA 9.12 Diagrama para el problema 3.

4. La gráfica de f aparece en la figura 9.13.

a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$. **b.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. **c.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

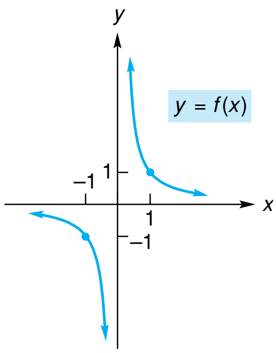


FIGURA 9.13 Diagrama para el problema 4.

En los problemas del 5 al 8 utilice su calculadora para completar la tabla, y use los resultados para estimar el límite dado.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$.

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$						

6. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

x	−2.1	−2.01	−2.001	−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$						

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

8. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$.

h	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

En los problemas del 9 al 34 encuentre los límites.

9. $\lim\limits_{x\to 2} 16$.

10. $\lim\limits_{x\to 3} 2x$.

11. $\lim\limits_{t\to -5} (t^2 - 5)$.

12. $\lim\limits_{t\to 1/2} (3t - 5)$.

13. $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - 3x^2 - 2x + 1)$.

14. $\lim\limits_{r\to 9} \dfrac{4r - 3}{11}$.

15. $\lim\limits_{t\to -3} \dfrac{t - 2}{t + 5}$.

16. $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{x^2 + 6}{x - 6}$.

17. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h^2 - 7h + 1}$.

18. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 - 2h - 4}{h^3 - 1}$.

19. $\lim\limits_{p\to 4} \sqrt{p^2 + p + 5}$.

20. $\lim\limits_{y\to 15} \sqrt{y + 3}$.

21. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 2x}{x + 2}$.

22. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x + 1}{x + 1}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.

24. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2 + 2t}{t^2 - 2t}$.

25. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$.

26. $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t - 2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 3x - 4}$.

30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x^2-x-6}$.

31. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^2+5x-14}$.

32. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+5x+4}$

33. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}$.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$.

---

35. Encuentre $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ tratando a x como una constante.

36. Encuentre $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)^2+5(x+h)-2x^2-5x}{h}$ tratando a x como una constante.

En los problemas del 37 al 42 encuentre $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

37. $f(x)=4-x$.

38. $f(x)=2x+3$.

39. $f(x)=x^2-3$.

40. $f(x)=x^2+x+1$.

41. $f(x)=x^2-3x$.

42. $f(x)=5-2x-3x^2$.

---

43. Encuentre $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ [*Sugerencia:* primero racionalice el numerador multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{x-2}+2$].

44. Encuentre la constante c de modo que $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+c}{x^2-5x+6}$ exista. Para ese valor de c, determine el límite. [*Sugerencia*: encuentre el valor de c para el cual $x-3$ es un factor del numerador.]

45. Planta de energía La eficiencia teórica máxima de una planta de energía está dada por

$$E=\frac{T_h-T_c}{T_h},$$

donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas respectivas del depósito más caliente y del más frío. Encuentre (a) $\lim\limits_{T_c\to 0} E$ y (b) $\lim\limits_{T_c\to T_h} E$.

46. Satélite Cuando un satélite de 3200 libras gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r pies, la energía total mecánica E del sistema Tierra-satélite está dada por

$$E=-\frac{7.0\times 10^{17}}{r}\text{ pies-libra.}$$

Encuentre el límite de E cuando $r\to 7.5\times 10^7$ pies.

En los problemas del 47 al 50 utilice una calculadora gráfica para graficar las funciones y luego estime los límites. Redondee sus respuestas a dos decimales.

47. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-24}{x^2-4}$.

48. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x}-8}$.

49. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x-\sqrt{x}-12}{4-\sqrt{x}}$.

50. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+2x^2-7x+4}$.

OBJETIVO Estudiar los límites laterales, límites infinitos y límites al infinito.

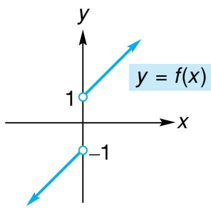


FIGURA 9.14
$\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

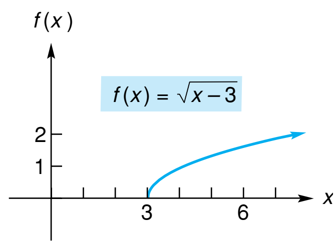
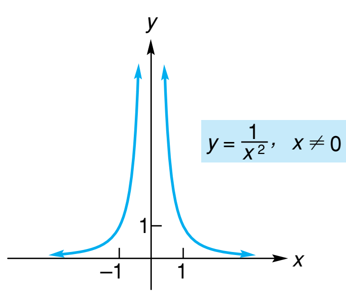


FIGURA 9.15
$\lim_{x\to 3^+} \sqrt{x-3} = 0.$



x	$f(x)$
±1	1
±0.5	4
±0.1	100
±0.01	10,000
±0.001	1,000,000

FIGURA 9.16 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$

9.2 LÍMITES (CONTINUACIÓN)

Límites laterales

La figura 9.14 muestra la gráfica de un función f. Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. Cuando x tiende a 0 *por la derecha*, $f(x)$ se aproxima a 1. Escribimos esto como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

Por otra parte, cuando x tiende a 0 *por la izquierda*, $f(x)$ se aproxima a -1 y escribimos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

Los límites como éstos se conocen como **límites laterales** (o **unilaterales**). De la sección anterior sabemos que el límite de una función cuando $x \to a$ es independiente de la manera en que x se aproxima a a. Por tanto, el límite existirá si y sólo si, ambos límites existen y son iguales. Entonces concluimos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ no existe.}$$

Como otro ejemplo de un límite lateral, considere $f(x) = \sqrt{x-3}$ cuando x tiende a 3. Ya que f está definida cuando $x \geq 3$, podemos hablar del límite cuando x tiende a 3 por la derecha. Si x es un poco mayor que 3, entonces $x - 3$ es un número positivo cercano a 0 y de este modo $\sqrt{x-3}$ es cercano a cero. Concluimos que

$$\lim_{x\to 3^+} \sqrt{x-3} = 0.$$

Este límite también es evidente si observamos la figura 9.15.

Límites infinitos

En la sección anterior consideramos límites de la forma 0/0; esto es, límites donde el numerador y el denominador se aproximan a cero. Ahora examinaremos límites donde el denominador se aproxima a cero pero el numerador tiende a un número diferente de 0. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.$$

Aquí, cuando x tiende a 0, el denominador tiende a 0 y el numerador tiende a 1. Investigaremos el comportamiento de $f(x) = 1/x^2$ cuando x es cercana a 0. El número x^2 es positivo y también cercano a 0. Por tanto, dividiendo 1 entre tal número da como resultado un número muy grande. En realidad, entre más cercana a 0 esté x, mayor es el valor de $f(x)$. Por ejemplo, véase la tabla de valores en la figura 9.16, la cual también muestra la gráfica de f. Es claro que cuando $x \to 0$ tanto por la izquierda como por la derecha, $f(x)$ aumenta sin cota. De aquí que no exista el límite en 0. Decimos que cuando $x \to 0$, $f(x)$ se vuelve infinito positivamente, y en forma simbólica expresamos este "límite infinito" escribiendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Esta advertencia es extremadamente importante.

Advertencia El uso del signo "igual" en esta situación no significa que el límite exista. Por el contrario, el símbolo (∞) aquí es una manera de decir específicamente que no hay límite e indica por qué no existe el límite.

Ahora considere la gráfica de $y = f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ (véase la fig. 9.17). Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, $1/x$ se hace infinito positivo; cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, $1/x$ tiende a infinito negativo. De modo simbólico estos límites infinitos son escritos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty .$$

x	$f(x)$
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10,000
−0.01	−100
−0.001	−1000
−0.0001	−10,000

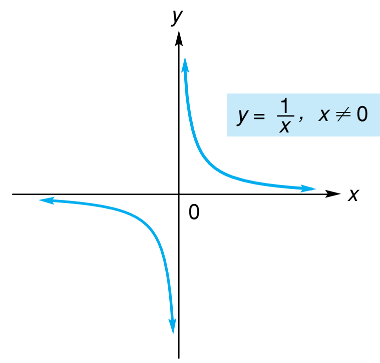


FIGURA 9.17 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Cualquiera de estos dos hechos implican que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

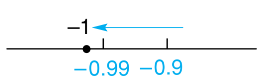


FIGURA 9.18 $x \to -1^+$.

EJEMPLO 1 Límites infinitos

Encontrar el límite (si existe).

a. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2}{x+1}$.

Solución: cuando x tiende a -1 por la derecha (piense en valores de x como $-0.9, -0.99$, y así sucesivamente, como se muestra en la figura 9.18), $x + 1$ tiende a 0 pero siempre es positivo. Como estamos dividiendo 2 entre números positivos que se aproximan a 0, los resultados, $2/(x + 1)$ son números positivos que se vuelven arbitrariamente grandes.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+1} = \infty,$$

y el límite no existe. Por un análisis similar, usted debe ser capaz de demostrar que

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty.$$

b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$.

Solución: cuando $x \to 2$, el numerador tiende a 4 y el denominador se aproxima a 0. Por tanto, estamos dividiendo números cercanos a 4 entre números cercanos a 0. Los resultados son números que se vuelven arbitrariamente grandes en magnitud. En esta fase podemos escribir

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2-4} \text{ no existe.}$$

Sin embargo, veremos si es posible utilizar el símbolo ∞ o $-\infty$ para ser más específicos acerca del "no existe". Obsérvese que

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}.$$

Como

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty,$$

entonces $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ no es ni ∞ ni $-\infty$.

El ejemplo 1 consideró límites de la forma $k/0$ donde $k \neq 0$. Es importante que distinga la forma $k/0$ de la forma $0/0$, que se estudió en la sección 9.1, pues se manejan en forma muy diferente.

EJEMPLO 2 Determinación de un límite

Encontrar $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t-2}{t^2-4}$.

Solución: cuando $t \to 2$, *ambos*, numerador y denominador, tienden a 0 (forma $0/0$). Así, primero simplificamos la fracción, como hicimos en la sección 9.1. y luego tomamos el límite:

$$\lim_{t \to 2} \frac{t-2}{t^2-4} = \lim_{t \to 2} \frac{t-2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t \to 2} \frac{1}{t+2} = \frac{1}{4}.$$

Límites al infinito

Ahora examinamos la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

cuando x se vuelve infinito, primero en sentido positivo y después en sentido negativo. De la tabla 9.2 podemos ver que cuando x aumenta sin cota tomando valores positivos, los valores de $f(x)$ se aproximan a 0. De la misma manera, cuando x disminuye sin cota tomando valores negativos, los valores de $f(x)$ se aproximan a 0. Estas observaciones son claras al ver la gráfica de la figura 9.17. Allí, cuando usted se mueve a la derecha sobre la curva tomando valores positivos de x, los correspondientes valores de y se aproximan a 0. Del mismo modo, cuando se mueve hacia la izquierda a lo largo de la curva por valores negativos

Usted debe ser capaz de obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$$

sin el beneficio de una gráfica o de una tabla. Desde el punto de vista conceptual, para $x \to \infty$, aumentar los valores del denominador en $1/x$ significa que la fracción se hace cada vez más pequeña en magnitud, esto es, cada vez más cercana a cero. De manera alterna, al dividir 1 entre un número positivo grande, se obtiene como resultado un número cercano a cero. Un argumento similar puede hacerse para el límite cuando $x \to -\infty$.

TABLA 9.2 Comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1000	0.001	−1000	−0.001
10,000	0.0001	−10,000	−0.0001
100,000	0.00001	−100,000	−0.00001
1,000,000	0.000001	−1,000,000	−0.000001

de x, los correspondientes valores de y se aproximan a cero. En forma simbólica, escribimos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Estos límites se conocen como *límites al infinito*.

Principios en práctica 1

Límites al infinito

La función de demanda para cierto producto está dada por $p(x) = \dfrac{10,000}{(x+1)^2}$, en donde p es el precio en pesos y x es la cantidad vendida. Haga la gráfica de esta función en su calculadora gráfica en la ventana $[0, 10] \times [0, 10{,}000]$. Utilice la función TRACE para determinar $\lim_{x\to\infty} p(x)$. Determine lo que le sucede a la gráfica y lo que esto significa con respecto a la función de demanda.

EJEMPLO 3 Límites al infinito

Encontrar el límite (si existe).

a. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{4}{(x-5)^3}$.

Solución: cuando x se vuelve muy grande, también lo hace $x - 5$. Como el cubo de un número grande también es grande, $(x - 5)^3 \to \infty$. Al dividir 4 entre números muy grandes se tiene como resultado números cercanos a cero. Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{(x-5)^3} = 0.$$

b. $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \sqrt{4-x}$.

Solución: cuando x se hace cada vez más negativa, $4 - x$ tiende a infinito positivo. Ya que la raíz cuadrada de números grandes son números grandes, concluimos que

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4-x} = \infty.$$

En nuestra siguiente exposición necesitamos un cierto límite, a saber, $\lim_{x\to\infty} 1/x^p$ donde $p > 0$. Conforme x se vuelve muy grande, también x^p. Al dividir 1 entre números grandes se tiene como resultado números cercanos a cero. Así $\lim_{x\to\infty} 1/x^p = 0$. En general,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0,$$

donde $p > 0$.[2] Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0.$$

[2]Para $\lim_{x\to-\infty} 1/x^p$, suponemos que p es tal que $1/x^p$ está definida para $x < 0$.

Ahora encontraremos el límite de la función racional

$$f(x) = \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1}$$

cuando $x \to \infty$. (Recuerde de la sección 3.2 que una función racional es un cociente de polinomios). Cuando x se vuelve cada vez más grande, *ambos,* numerador y denominador de $f(x)$, tienden a infinito. Sin embargo, la forma del cociente puede modificarse de modo que podamos sacar una conclusión de si tiene o no límite. Para hacer esto, dividimos el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que aparezca en el denominador. En este caso es x^2. Esto da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^2 + 5}{x^2}}{\dfrac{2x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^2}{x^2} + \dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4 + \dfrac{5}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}.$$

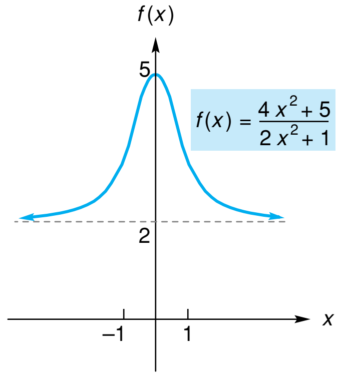


FIGURA 9.19 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

Como $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x^p = 0$ para $p > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \frac{4 + 5(0)}{2 + 0} = \frac{4}{2} = 2.$$

Del mismo modo, el límite cuando $x \to -\infty$ es 2. Estos límites son claros si observamos la gráfica de f en la figura 9.19.

Para la función anterior, hay una manera más sencilla de encontrar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Para valores *grandes* de x, el término que incluye la potencia más grande de x en el numerador, a saber, $4x^2$, domina la suma $4x^2 + 5$, y el término dominante en el denominador, $2x^2 + 1$, es $2x^2$. Por tanto, cuando $x \to \infty$, $f(x)$ puede aproximarse como $(4x^2)/(2x^2)$. Como resultado, para determinar el límite de $f(x)$, basta determinar el límite de $(4x^2)/(2x^2)$. Esto es,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2,$$

como vimos antes. En general, tenemos la regla siguiente:

Límites al infinito de funciones racionales

Si $f(x)$ es una *función racional* y a_nx^n y b_mx^m son los términos en el numerador y denominador, respectivamente, con las mayores potencias de x, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

Aplicamos esta regla a la situación donde el grado del numerador es mayor que el del denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-3x}{5-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{-2x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=\infty.$$

(Observe que en el último paso, cuando x se vuelve muy negativa, también lo hace x^3, además, $-\frac{1}{2}$ por un número muy negativo resulta ser muy grande positivo.) Del mismo modo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x}{5-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=-\infty.$$

De esta ilustración, hacemos la conclusión siguiente:

Si el grado del numerador de una *función racional* es mayor que el del denominador, entonces la función no tiene límite cuando $x\to\infty$ o cuando $x\to-\infty$.

Principios en práctica 2

Límites al infinito para funciones racionales

Los montos anuales de ventas, y, de cierta compañía (en miles de dólares) están relacionados con la cantidad de dinero que la compañía gasta en publicidad, x (en miles de pesos), de acuerdo con la ecuación $y(x)=\frac{500x}{x+20}$. Haga la gráfica de esta función en su calculadora gráfica en la ventana $[0, 1000]\times[0, 550]$. Utilice TRACE para explorar $\lim_{x\to\infty} y(x)$, y determine lo que esto significa para la compañía.

EJEMPLO 4 Límites al infinito de funciones racionales

Encontrar el límite (si existe).

a. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{7-2x+8x^2}$.

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

b. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{(3x-1)^2}$.

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(3x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{9x^2-6x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{9x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{9x}=\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{9}(0)=0.$$

c. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x^4}{x^4-x^3+2}$.

Solución: como el grado del numerador es mayor que el del denominador, no existe el límite. Con mayor precisión,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-x^4}{x^4-x^3+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^4}=\lim_{x\to\infty}x=\infty.$$

Advertencia La técnica anterior sólo se aplica a límites al *infinito* de funciones racionales. Para encontrar $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{7-2x+8x^2}$, no determinamos el límite de $\dfrac{x^2}{8x^2}$, ya que x no se aproxima a ∞ o a $-\infty$. En lugar de eso, tenemos

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}=\frac{0-1}{7-0+0}=-\frac{1}{7}.$$

Ahora consideremos el límite de la función polinomial $f(x) = 8x^2 - 2x$ cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} (8x^2 - 2x).$$

Ya que un polinomio es una función racional con denominador 1, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} (8x^2 - 2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2 - 2x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2}{1} = \lim_{x\to\infty} 8x^2.$$

Esto es, el límite de $8x^2 - 2x$ cuando $x \to \infty$ es el mismo que el límite del término que incluye a la mayor potencia de x, a saber, $8x^2$. Cuando x se vuelve muy grande, también $8x^2$. Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} (8x^2 - 2x) = \lim_{x\to\infty} 8x^2 = \infty.$$

En general, tenemos lo siguiente:

> Cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$), el límite de una *función polinomial* es el mismo que el de su término que involucra la mayor potencia de x.

Principios en práctica 3

Límites al infinito para funciones polinomiales

El costo C de producir x unidades de cierto producto está dado por $C(x) = 50{,}000 + 200x + 0.3x^2$. Utilice su calculadora gráfica para explorar $\lim_{x\to\infty} C(x)$ y determine lo que esto significa.

EJEMPLO 5 Límites al infinito para funciones polinomiales

a. $\lim_{x\to-\infty} (x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3$. Cuando x se vuelve muy negativa, también lo hace x^3. Por tanto,

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

b. $\lim_{x\to-\infty} (-2x^3 + 9x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^3 = \infty$, porque -2 veces un número muy negativo es un número positivo muy grande.

No utilice los términos dominantes cuando una función no es racional.

La técnica de poner atención a los términos dominantes para encontrar los límites cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ es válida para *funciones racionales*, pero no es necesariamente válida para otros tipos de funciones. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x). \qquad (1)$$

Obsérvese que $\sqrt{x^2 + x} - x$ no es una función racional. Es *incorrecto* inferir que como x^2 domina en $x^2 + x$, el límite en (1) es el mismo que

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2} - x) = \lim_{x\to\infty} (x - x) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0.$$

Puede demostrarse (véase el problema 62) que el límite en (1) no es 0, sino $\frac{1}{2}$.

Las ideas presentadas en esta sección se aplicarán ahora a una función definida por partes.

EJEMPLO 6 Límite de una función definida por partes

Si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \geq 1 \\ 3, & \text{si } x < 1 \end{cases}$, *encontrar el límite* (*si existe*).

a. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

Principios en práctica 4

Límites para una función definida por partes

Un plomero cobra \$100 por la primera hora de trabajo a domicilio y \$75 por cada hora (o fracción) posterior. La función de lo que le cuesta una visita de x horas es

$$f(x)=\begin{cases}\$100 \text{ si } & 0 < x \le 1,\\ \$175 \text{ si } & 1 < x \le 2,\\ \$250 \text{ si } & 2 < x \le 3,\\ \$325 \text{ si } & 3 < x \le 4.\end{cases}$$

Determine $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2.5} f(x)$.

Solución: aquí x se acerca a 1 por la derecha. Para $x > 1$, tenemos $f(x) = x^2 + 1$. Por lo que,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1).$$

Si x es mayor que 1, pero cercano a 1, entonces $x^2 + 1$ se acerca a 2. Por tanto,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1) = 2.$$

b. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

Solución: aquí x se acerca a 1 por la izquierda. Para $x < 1$, $f(x) = 3$. De aquí que,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3 = 3.$$

c. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Solución: queremos el límite cuando x se aproxima a 1. Sin embargo, de la regla de la función dependerá si $x \ge 1$ o $x < 1$. Así, debemos considerar límites laterales. El límite cuando x se aproxima a 1 existirá si y sólo si ambos límites laterales existen y son iguales. De las partes (a) y (b),

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \ne \lim_{x\to 1^-} f(x), \qquad \text{ya que } 2 \ne 3.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} f(x) \qquad \text{no existe.}$$

d. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.

Solución: para valores muy grandes de x, tenemos $x \ge 1$, de modo que $f(x) = x^2 + 1$. Así,

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} (x^2+1) = \lim_{x\to \infty} x^2 = \infty.$$

e. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Solución: para valores muy negativos de x, tenemos $x < 1$, de modo que $f(x) = 3$. Por lo que,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 3 = 3.$$

Todos los límites de las partes de la (a) a la (c) deben quedar claros a partir de la gráfica de f en la figura 9.20.

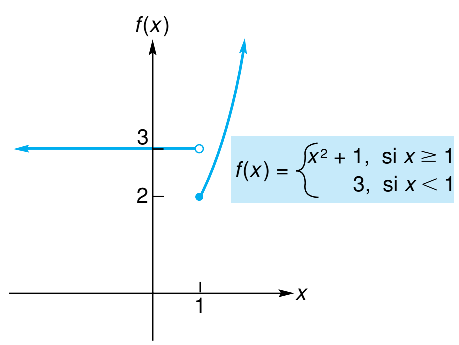


FIGURA 9.20 Gráfica de la función compuesta.

Ejercicio 9.2

1. Para la función f dada en la figura 9.21, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

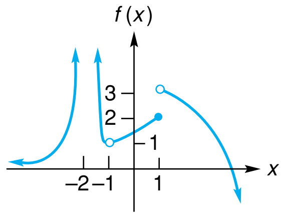


FIGURA 9.21 Diagrama para el problema 1.

a. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

c. $\lim_{x\to 1} f(x)$. **d.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

e. $\lim_{x\to -2^-} f(x)$. **f.** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

g. $\lim_{x\to -2} f(x)$. **h.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

i. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$. **j.** $\lim_{x\to -1^+} f(x)$.

k. $\lim_{x\to -1} f(x)$.

2. Para la función f dada en la figura 9.22, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

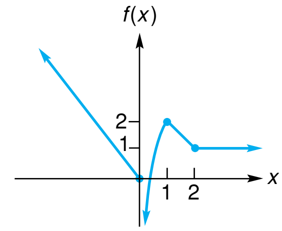


FIGURA 9.22 Diagrama para el problema 2.

a. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

c. $\lim_{x\to 0} f(x)$. **d.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

e. $\lim_{x\to 1} f(x)$. **f.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

g. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$. **h.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

En los problemas del 3 al 54 encuentre el límite. Si no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

3. $\lim_{x\to 3^+} (x-2)$.

4. $\lim_{x\to -1^+} (1-x^2)$.

5. $\lim_{x\to -\infty} 5x$.

6. $\lim_{x\to \infty} 3$.

7. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{6x}{x^4}$.

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5}{x-1}$.

9. $\lim_{x\to -\infty} x^2$.

10. $\lim_{t\to \infty} (t-1)^3$.

11. $\lim_{h\to 0^+} \sqrt{h}$.

12. $\lim_{h\to 5^-} \sqrt{5-h}$.

13. $\lim_{x\to 5} \dfrac{3}{x-5}$.

14. $\lim_{x\to 0^-} 2^{1/2}$.

15. $\lim_{x\to 1^+} (4\sqrt{x-1})$.

16. $\lim_{x\to 2^+} (x\sqrt{x^2-4})$.

17. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x+10}$.

18. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{2-3x}$.

19. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

20. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{7}{2x\sqrt{x}}$.

21. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x+8}{x-3}$.

22. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x-4}{3-2x}$.

23. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3+4x-3}$.

24. $\lim_{r\to \infty} \dfrac{r^3}{r^2+1}$.

25. $\lim_{t\to \infty} \dfrac{5t^2+2t+1}{4t+7}$.

26. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{3x^6-x+4}$.

27. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{7}{2x+1}$.

28. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2}{(4x-1)^3}$.

29. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3-4x-2x^3}{5x^3-8x+1}$.

30. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{7-2x-x^4}{9-3x^4+2x^2}$.

31. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x+3}{x^2-9}$.

32. $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{5x}{4-x^2}$.

33. $\lim_{w\to \infty} \dfrac{2w^2-3w+4}{5w^2+7w-1}$.

34. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{4-3x^3}{x^3-1}$.

35. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{6-4x^2+x^3}{4+5x-7x^2}$.

36. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x-x^3}{x^3+x+1}$.

37. $\lim_{x\to -5} \dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+5x}$.

38. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2+2t-8}{2t^2-5t+2}$.

39. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$.

40. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^3-x^2}{2x+1}$.

41. $\lim_{x\to 1^+} \left[1+\dfrac{1}{x-1}\right]$.

42. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+2x^2+1}{x^3-4}$.

43. $\lim_{x\to -7^-} \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-49}}$.

44. $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

45. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{5}{x+x^2}$.

46. $\lim_{x\to \infty} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

47. $\lim_{x\to 1} x(x-1)^{-1}$.

48. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{1}{2x-1}$.

49. $\lim_{x\to 0^+} \left(-\dfrac{3}{x}\right)$.

50. $\lim_{x\to 0} \left(-\dfrac{9}{x}\right)$.

51. $\lim_{x\to 0} |x|$.

52. $\lim_{x\to 0} \left|\dfrac{1}{x}\right|$.

53. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x}$.

54. $\lim_{x\to \infty} \left[\dfrac{2}{x}-\dfrac{x^2}{x^2-1}\right]$.

En los problemas del 55 al 58 determine los límites que se indican. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ en donde sea apropiado.

55. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \le 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases};$

a. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 2} f(x)$.

d. $\lim_{x\to\infty} f(x)$. **e.** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

56. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \le 1 \\ 2, & \text{si } x > 1 \end{cases};$

a. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 1} f(x)$.

d. $\lim_{x\to\infty} f(x)$. **e.** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

57. $g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ -x, & \text{si } x > 0 \end{cases};$

a. $\lim_{x\to 0^+} g(x)$. **b.** $\lim_{x\to 0^-} g(x)$. **c.** $\lim_{x\to 0} g(x)$.

d. $\lim_{x\to\infty} g(x)$. **e.** $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

58. $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ -x, & \text{si } x > 0 \end{cases};$

a. $\lim_{x\to 0^+} g(x)$. **b.** $\lim_{x\to 0^-} g(x)$. **c.** $\lim_{x\to 0} g(x)$.

d. $\lim_{x\to\infty} g(x)$. **e.** $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

---

59. Costo promedio Si c es el costo total en dólares para producir q unidades de un producto, entonces el costo promedio por unidad para una producción de q unidades está dado por $\bar{c} = c/q$. Así, si la ecuación de costo total es $c = 5000 + 6q$, entonces

$$\bar{c} = \frac{5000}{q} + 6.$$

Por ejemplo, el costo total para la producción de 5 unidades es \$5030, y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es \$1006. Por medio de la determinación de $\lim_{q\to\infty} \bar{c}$, demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio? Haga un bosquejo de la gráfica de la función costo promedio.

60. Costo promedio Repita el problema 59, dado que el costo fijo es \$12,000 y el costo variable está dado por la función $c_v = 7q$.

61. Población La población de cierta ciudad pequeña t años a partir de ahora se pronostica que será

$$N = 20{,}000 + \frac{10{,}000}{(t+2)^2}.$$

Determine la población a largo plazo, esto es, determine $\lim_{t\to\infty} N$.

62. Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \frac{1}{2}.$$

[*Sugerencia:* racionalice el numerador multiplicando la expresión $\sqrt{x^2+x} - x$ por

$$\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}.$$

Después exprese el denominador en una forma tal que x sea un factor.]

63. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes parasitados en un periodo es

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}.$$

Si la densidad de huésped estuviese aumentando sin cota, ¿a qué valor se aproximaría y?

64. Si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & \text{si } x < 2, \\ x^3 + k(x+1), & \text{si } x \ge 2, \end{cases}$ determine el valor de la constante k para la cual $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe.

En los problemas 65 y 66 utilice una calculadora para evaluar la función dada cuando $x = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001. Con base en sus resultados, saque una conclusión acerca de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

65. $f(x) = x^{2x}$.

66. $f(x) = x \ln x$.

---

67. Grafique $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 1/2^+} f(x)$.

68. Grafique $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2-x}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, si existe. Utilice el símbolo ∞ o $-\infty$, si es apropiado.

69. Grafique $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & \text{si } x < 2, \\ 2x + 5, & \text{si } x \ge 2. \end{cases}$ Utilice la gráfica para estimar cada uno de los límites siguientes, si existen.

a. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 2} f(x)$.

OBJETIVO Extender la noción de interés compuesto estudiado en los capítulos 5 y 8, para la situación en donde el interés es compuesto de manera continua. Desarrollar fórmulas para el monto total (compuesto) y el valor presente.

9.3 Interés compuesto continuamente

Cuando se invierte dinero a una tasa anual dada, el interés devengado cada año depende de la frecuencia con que se capitaliza el interés. Por ejemplo, se devenga más interés si la capitalización es mensual que si fuese semestral. Podemos obtener más interés capitalizándolo cada semana, diario, cada hora y así sucesivamente. Sin embargo, hay un interés máximo que puede ser devengado, el cual examinaremos ahora.

Suponga que un capital de P dólares se invierte durante t años a una tasa anual r. Si el interés se capitaliza k veces en un año, entonces la tasa por periodo de conversión es r/k, y hay kt periodos. De la sección 5.1, el monto total S está dado por

$$S = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}.$$

Si $k \to \infty$, el número de periodos de conversión aumenta de manera indefinida y la longitud de cada periodo se aproxima a cero. En este caso, decimos que el interés se **capitaliza** (o compone) **continuamente,** esto es, en cada instante. El monto total es

$$\lim_{k\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt},$$

que puede escribirse como

$$P\left[\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k/r}\right]^{rt}.$$

Por medio de una sustitución hacemos que el límite tenga una forma conocida.

Haciendo $x = r/k$, entonces cuando $k \to \infty$, tenemos $x \to 0$. Así, el límite dentro de los corchetes tiene la forma $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$, la cual, como vimos en la sección 9.1, es e.

Por tanto, tenemos la fórmula siguiente:

Monto total (compuesto) bajo interés continuo

La fórmula

$$S = Pe^{rt}$$

proporciona el monto acumulado S de un capital de P dólares después de t años, a una tasa de interés anual r compuesta de manera continua.

El interés de $5.13 es el monto máximo de interés compuesto que puede generarse a una tasa anual de 5%.

EJEMPLO 1 Monto total

Si se invierten $100 *a una tasa anual de* 5% *capitalizado continuamente, encontrar el monto total al final de*

a. 1 *año*. **b.** 5 *años.*

Solución:

a. aquí $P = 100$, $r = 0.05$ y $t = 1$, de modo que

$$S = Pe^{rt} = 100e^{(0.05)(1)} \approx \$105.13.$$

Podemos comparar este valor con el valor después de un año de una inversión de \$100 invertidos a una tasa de 5% compuesto cada semestre, es decir, $100(1.025)^2 \approx 105.06$. La diferencia no es significativa.

b. Aquí $P = 100$, $r = 0.05$ y $t = 5$, de modo que

$$S = 100e^{(0.05)(5)} = 100e^{0.25} \approx \$128.40.$$

Podemos encontrar una expresión que dé la tasa efectiva que corresponda a una tasa anual r compuesta continuamente (del capítulo 8, la tasa efectiva es la tasa equivalente compuesta anualmente). Si i es la correspondiente tasa efectiva, entonces después de 1 año el capital P se convierte en $P(1 + i)$. Esto debe ser igual a la cantidad que se acumulaba bajo interés continuo, Pe^r. Por tanto, $P(1 + i) = Pe^r$, de lo cual $1 + i = e^r$, así que $i = e^r - 1$.

Tasa efectiva bajo interés compuesto continuo

La tasa efectiva que corresponde a una tasa anual r capitalizada continuamente es

$$e^r - 1.$$

EJEMPLO 2 Tasa efectiva

Encontrar la tasa efectiva que corresponda a una tasa anual de 5% capitalizada continuamente.

Solución: la tasa efectiva es

$$e^r - 1 = e^{0.05} - 1 \approx 0.0513,$$

o 5.13%.

Si resolvemos $S = Pe^{rt}$ para P, obtenemos $P = S/e^{rt}$. En esta fórmula, P es el capital que debe invertirse ahora a una tasa anual r capitalizada continuamente, de modo que al final de t años el monto total sea S. Llamamos a P el **valor presente** de S.

Valor presente bajo interés continuo

La fórmula

$$P = Se^{-rt}$$

da el valor presente neto P de S dólares que se deben pagar al final de t años a una tasa anual r capitalizada continuamente.

EJEMPLO 3 Fondo de inversión

Un fondo de inversión se establece por medio de un solo pago, de modo que al final de 20 años se acumulen \$25,000 en el fondo. Si el interés es capitalizado continuamente a una tasa anual de 7%, ¿cuánto dinero (aproximado al dólar más cercano) debe pagarse inicialmente al fondo?

Solución: queremos el valor presente de $25,000 pagaderos dentro de 20 años. Por tanto,

$$P = Se^{-rt} = 25{,}000e^{-(0.07)(20)}$$
$$= 25{,}000e^{-1.4} \approx 6165.$$

Por tanto, deben pagarse $6165 inicialmente.

Ejercicio 9.3

En los problemas 1 y 2 encuentre el monto total y el interés compuesto si se invierten $4000 *durante 6 años y el interés se capitaliza continuamente a la tasa anual dada.*

1. $5\frac{1}{2}\%$. **2.** 9%.

En los problemas 3 y 4 encuentre el valor presente de $2500 *pagaderos dentro de 8 años, si el interés es compuesto continuamente a la tasa anual dada.*

3. $6\frac{3}{4}\%$. **4.** 8%.

En los problemas del 5 al 8 encuentre la tasa efectiva de interés que corresponde a la tasa anual dada capitalizada continuamente.

5. 4%. **6.** 7%. **7.** 3%. **8.** 9%.

9. Inversión Si se depositan $100 en una cuenta de ahorros que gana interés a una tasa anual de $4\frac{1}{2}\%$ capitalizada continuamente, ¿cuál será el valor de la cantidad al final de 2 años?

10. Inversión Si se invierten $1000 a una tasa anual de 3% capitalizada continuamente, encuentre el monto total al final de 8 años.

11. Redención de acciones La mesa directiva de una compañía acuerda redimir algunas de sus acciones preferentes en 5 años. En ese tiempo se requerirán $1,000,000. Si la compañía puede invertir dinero a una tasa de interés anual de 5% capitalizable continuamente, ¿cuánto debe invertir en este momento de modo que el valor futuro sea suficiente para redimir las acciones?

12. Fondo de inversión Un fondo de inversión se establece por un solo pago, de modo que al final de 30 años habrá $50,000 en el fondo. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de 6%, ¿cuánto dinero debe pagarse inicialmente?

13. Fondo de inversión Como un regalo para el vigésimo cumpleaños de su hija recién nacida, los Smith quieren darle una cantidad de dinero que tenga el mismo poder adquisitivo que $10,000 en la fecha de su nacimiento. Para hacer esto ellos realizan un solo pago inicial a un fondo de inversión establecido específicamente para este propósito.

a. Suponga que la tasa de inflación efectiva anual es de 4%. Dentro de 20 años, ¿cuál suma tendrá el mismo poder adquisitivo que $10,000 actuales? Redondee su respuesta al dólar más cercano.

b. ¿Cuál debe ser la cantidad de pago único inicial al fondo, si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de 6%? Redondee su respuesta al dólar más cercano.

14. Inversión En la actualidad, los Smith tienen $50,000 para invertir durante 18 meses. Tienen dos opciones para ello:

a. Invertir el dinero en un certificado que paga interés a la tasa nominal de 5% compuesto trimestralmente.

b. Invertir el dinero en una cuenta de ahorros que genera interés a la tasa anual de 4.5% compuesto de manera continua.

Con cada opción, ¿cuánto dinero tendrán dentro de 18 meses?

15. ¿Qué tasa anual compuesta de manera continua es equivalente a una tasa efectiva de 5%?

16. ¿Qué tasa anual r compuesta de manera continua es equivalente a una tasa nominal de 6% compuesto cada semestre? [*Sugerencia:* primero demuestre que $r = 2\ln(1.03)$.]

17. Anualidad continua Una anualidad en la que R dólares se pagan cada año por medio de pagos uniformes, que son pagados de manera continua, se llama *anualidad continua* o *flujo continuo de ingreso*. El valor presente de una anualidad continua durante t años es

$$R \cdot \frac{1 - e^{-rt}}{r},$$

en donde r es la tasa de interés anual compuesto continuamente. Determine el valor presente de una anualidad continua de $100 anuales durante 20 años al 5% compuesto de manera continua. Proporcione su respuesta al dólar más cercano.

18. Utilidad Suponga que un negocio tiene una utilidad anual de $40,000 durante los siguientes cinco años, y las utilidades se generan de manera continua durante el transcurso de cada año. Entonces las utilidades pueden considerarse como una anualidad continua (véase el problema 17). Si el dinero tiene un valor de 4% compuesto de manera continua, determine el valor presente de las utilidades.

19. Si un interés es compuesto de manera continua a una tasa anual de 0.07, ¿cuántos años le tomaría a un capital de P triplicarse? Proporcione su respuesta al año más cercano.

20. Si un interés es compuesto de manera continua, ¿a qué tasa anual un capital de P se duplicará en 10 años? Proporcione su respuesta al por ciento más cercano.

21. Opciones de ahorro El 1 de julio de 2001, el señor Green tenía \$1000 en una cuenta de ahorros en el Banco Nacional. Esta cuenta devengaba interés a una tasa anual de 3.5% compuesto continuamente. Un banco competidor intentó atraer nuevos clientes ofreciendo añadir de manera inmediata \$20 a cualquier cuenta nueva que se abriera con un depósito mínimo de \$1000, y que la nueva cuenta generaría interés a la tasa anual de 3.5% compuesto semestralmente. El señor Green decidió elegir una de las siguientes tres opciones el 1 de julio de 2001:

a. Dejar el dinero en el Banco Nacional.
b. Cambiar el dinero al banco competidor.
c. Dejar la mitad del dinero en el Banco Nacional y cambiar la otra mitad al banco competidor.

Para cada una de estas tres opciones, determine el monto acumulado del señor Green el 1 de julio de 2003.

22. Inversión

a. El 1 de noviembre de 1990, la señora Rodgers invirtió \$10,000 en un certificado de depósito a 10 años que pagaba interés a la tasa anual de 4% compuesto continuamente. Cuando el certificado maduró el 1 de noviembre de 2000, ella reinvirtió el monto total acumulado en bonos corporativos, los cuales devengan interés a la tasa de 5% compuesto anualmente. Al dólar más cercano, ¿cuál será el monto acumulado de la señora Rodgers el 1 de noviembre de 2005?

b. Si la señora Rodgers hubiese hecho una sola inversión de \$10,000 en 1990, cuya maduración fuese en 2005, con una tasa efectiva de interés de 4.5%, ¿el monto acumulado sería más o menos que en la parte (a), por cuánto (al dólar más cercano)?

23. Estrategia de inversión Suponga que usted tiene \$9000 para invertir.

a. Si los invierte con el Banco Nacional a la tasa nominal de 5% compuesto trimestralmente, determine el monto acumulado al final de un año.

b. El Banco Nacional también ofrece certificados en los que paga 5.5% compuesto continuamente. Sin embargo, se requiere un mínimo de \$10,000 de inversión. Ya que usted sólo tiene \$9000, el banco está dispuesto a darle un préstamo por un año por la cantidad adicional de \$1000 que usted necesita. El interés para este préstamo es una tasa efectiva de 8%, y tanto el capital como el interés se pagan al final del año. Determine si esta estrategia es preferible o no a la estrategia de la parte (a).

9.4 CONTINUIDAD

OBJETIVO Estudiar continuidad en el contexto de límites y determinar puntos de discontinuidad para una función.

Muchas funciones tienen la propiedad de que no hay "cortes" en sus gráficas. Por ejemplo, compare las funciones

$$f(x) = x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \neq 1, \\ 2, & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

cuyas gráficas aparecen en las figuras 9.23 y 9.24, respectivamente. Cuando $x = 1$, la gráfica de f no se corta, pero la de g sí tiene un corte. Poniéndolo de otra manera, si tuviera que trazar ambas gráficas con un lápiz, tendría que levantar el lápiz de la gráfica de g, cuando $x = 1$, pero no lo tendría que levantar de la gráfica de f. Estas situaciones pueden expresarse por medio de límites. Cuando x se aproxima a 1, compare el límite de cada función con el valor de la función en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1),$$

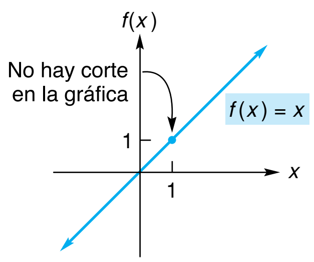


FIGURA 9.23 Continua en 1.

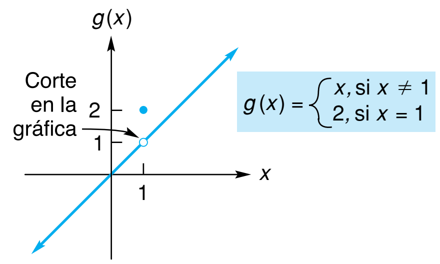


FIGURA 9.24 Discontinua en 1.

mientras que

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 1 \neq g(1) = 2.$$

El límite de f cuando $x \to 1$ es igual a $f(1)$, pero el límite de g cuando $x \to 1$ *no* es igual a $g(1)$. Por estas razones decimos que f es *continua* en 1 y g *discontinua* en 1.

Definición

Una función f es ***continua*** en a si y sólo si las siguientes tres condiciones se cumplen:

1. $f(x)$ está definida en $x = a$; esto es, a está en el dominio de f.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si f está definida en un intervalo abierto que contenga a a, excepto tal vez en a misma, y f no es continua en a, entonces se dice que f es ***discontinua*** en a, y a es llamada ***punto de discontinuidad.***

EJEMPLO 1 Aplicación de la definición de continuidad

a. *Mostrar que* $f(x) = 5$ *es continua en* 7.

Solución: debemos verificar que las tres condiciones se cumplan. Primera, $f(7) = 5$, de modo que f está definida en $x = 7$. Segunda,

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7} 5 = 5.$$

Por tanto, f tiene límite cuando $x \to 7$. Tercera,

$$\lim_{x\to 7} f(x) = 5 = f(7).$$

Por tanto, f es continua en 7 (véase la fig. 9.25).

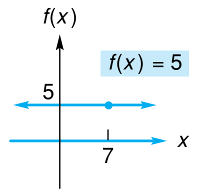


FIGURA 9.25 f es continua en 7.

b. *Demostrar que* $g(x) = x^2 - 3$ *es continua en* -4.

Solución: la función g está definida en $x = -4$; $g(-4) = 13$. También,

$$\lim_{x\to -4} g(x) = \lim_{x\to -4} (x^2 - 3) = 13 = g(-4).$$

Por tanto, g es continua en -4 (véase la fig. 9.26).

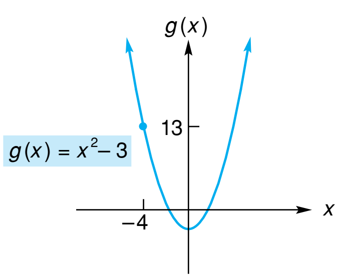


FIGURA 9.26 g es continua en -4.

Decimos que una función es *continua en un intervalo* si es continua en cada punto de ese intervalo. En esta situación, la gráfica de la función es conexa sobre el intervalo. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es continua en el intervalo [2, 5]. De hecho, en el ejemplo 5 de la sección 9.1, mostramos que para *cualquier* función polinomial f, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Esto significa que

Una función polinomial es continua en todo punto.

Se concluye que tal función es continua en todo intervalo. Decimos que las funciones polinomiales son **continuas en todas partes,** o de manera más sencilla, que son continuas.

EJEMPLO 2 Continuidad de funciones polinomiales

Las funciones $f(x) = 7$ y $g(x) = x^2 - 9x + 3$ son polinomiales. Por tanto, son continuas. Por ejemplo, son continuas en 3.

¿Cuándo es discontinua una función? Podemos decir que una función f definida en un intervalo abierto que contenga a a es discontinua en a, si

1. f no tiene límite cuando $x \to a$,

o bien

2. cuando $x \to a$, f tiene un límite diferente de $f(a)$.

Es obvio que si f no está definida en a, no es continua allí. Sin embargo, si f no está definida en a pero *sí está* definida para todos los valores cercanos, entonces no sólo no es continua en a, es discontinua allí. En la figura 9.27 podemos encontrar por inspección puntos de discontinuidad.

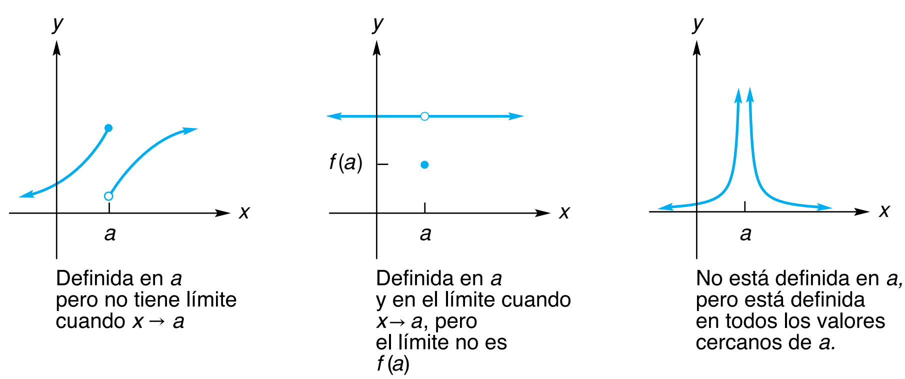


FIGURA 9.27 Discontinuidades en a.

EJEMPLO 3 Discontinuidades

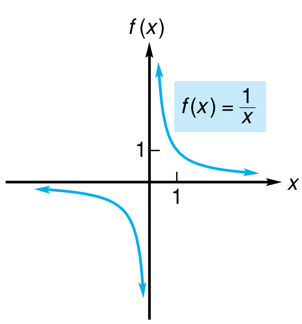


FIGURA 9.28 Discontinuidad infinita en 0.

a. Sea $f(x) = 1/x$ (véase la fig. 9.28). Observe que f no está definida en $x = 0$, pero está definida para cualquier otro valor de x cercana a cero. Así, f es discontinua en 0. Además, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Se dice que una función tiene **discontinuidad infinita** en a, cuando al menos uno de los límites laterales es ∞ o $-\infty$, cuando $x \to a$. De aquí que f tenga una *discontinuidad infinita* en $x = 0$.

b. Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(Véase la fig. 9.29). Aunque f está definida en $x = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. Por tanto, f es discontinua en 0.

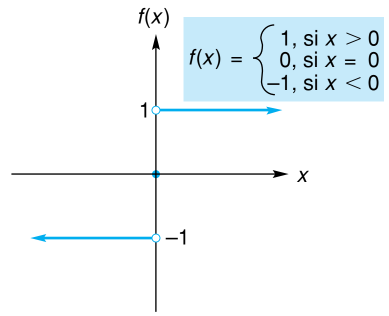


FIGURA 9.29 Función definida por partes discontinuas.

La propiedad siguiente indica dónde ocurren las discontinuidades de una función racional.

Discontinuidades de una función racional

Una función racional es discontinua en los puntos donde el denominador es 0, y es continua en cualquier otra parte.

¿La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x+1}$ es continua en todas partes? No, es discontinua en -1. Algunos estudiantes piensan que $f(x)$ siempre es 1, pero no es así. En realidad,

$$f(x) = 1 \text{ para } x \neq -1,$$

y f no está definida para $x = -1$.

EJEMPLO 4 Localización de discontinuidades para funciones racionales

Para cada una de las siguientes funciones, encontrar todos los puntos de discontinuidad.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$.

Solución: esta función racional tiene denominador

$$x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2),$$

que es 0 cuando $x = -4$ o $x = 2$. Así, f sólo es discontinua en -4 y 2.

b. $h(x) = \dfrac{x+4}{x^2+4}$.

Solución: para esta función racional, el denominador nunca es cero (siempre es positivo). De este modo, h no tiene discontinuidad.

EJEMPLO 5 Localización de discontinuidades para funciones definidas por partes

Para cada una de las funciones siguientes, encontrar todos los puntos de discontinuidad.

a. $f(x) = \begin{cases} x+6, & \text{si } x \geq 3, \\ x^2, & \text{si } x < 3. \end{cases}$

Solución: el único problema posible puede ocurrir cuando $x = 3$, ya que éste es el único lugar en el que la gráfica de f podría no ser conexa. Sabemos que $f(3) = 3 + 6 = 9$. Y puesto que

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x + 6) = 9$$

y

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 = 9,$$

podemos concluir que $\lim_{x\to 3} f(x) = 9 = f(3)$. De modo que la función es continua en 3, así como en todos los demás valores de x. Podemos obtener la misma conclusión por inspección de la gráfica de f en la figura 9.30.

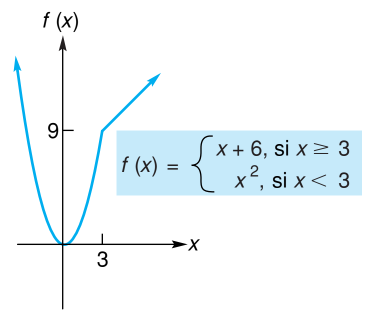


FIGURA 9.30 Función definida por partes continuas.

b. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x > 2, \\ x^2, & \text{si } x < 2. \end{cases}$

Solución: ya que f no está definida en $x = 2$, pero sí para toda x cercana, f es discontinua en 2 y continua para todas las demás x (véase la fig. 9.31).

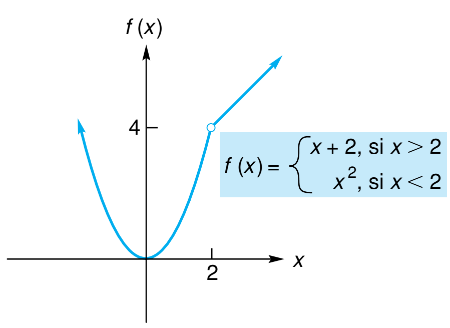


FIGURA 9.31 Discontinua en 2.

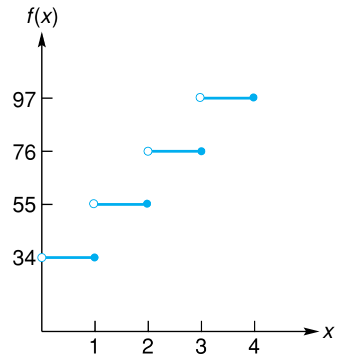


FIGURA 9.32 Función del servicio postal.

EJEMPLO 6 Función del "servicio postal"

La función del "servicio postal"

$$c = f(x) = \begin{cases} 34, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 55, & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 76, & \text{si } 2 < x \leq 3, \\ 97, & \text{si } 3 < x \leq 4, \end{cases}$$

da el costo c (en centavos) de enviar un paquete de peso x (onzas), $0 < x \leq 4$, en enero de 2001. Es claro de su gráfica en la figura 9.32 que f tiene discontinuidades en 1, 2 y 3, y que es constante para valores de x que están entre discontinuidades sucesivas. Tal función se conoce como *función escalón* a causa de la apariencia de su gráfica.

Hay otra manera de expresar continuidad aparte de la dada en la definición. Si tomamos la proposición

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Este método de expresar la continuidad en a, con frecuencia se utiliza en demostraciones matemáticas.

y reemplazamos x por $a + h$, entonces cuando $x \to a$ tenemos que $h \to 0$ (véase la fig. 9.33). Por tanto, la proposición

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

define continuidad en a.

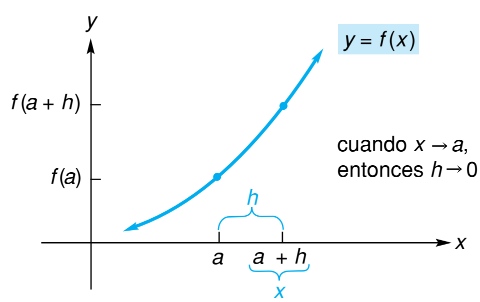


FIGURA 9.33 Diagrama para la continuidad en a.

Tecnología

A partir de la gráfica de una función debemos ser capaces de determinar dónde ocurre una discontinuidad. Sin embargo, es posible equivocarnos. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

es discontinua en $\pm$ 1, pero la discontinuidad en 1 no es clara de la gráfica de f en la figura 9.34. Por otra parte, la discontinuidad en -1 es obvia.

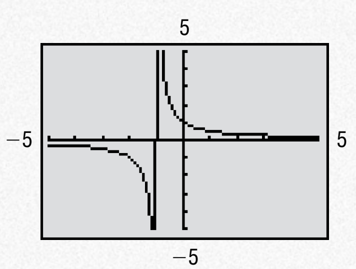


FIGURA 9.34 La discontinuidad en 1 no es evidente de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}.$

Con frecuencia es útil describir una situación por medio de una función continua. Por ejemplo, el programa de demanda de la tabla 9.3, indica el número de unidades de un producto que se demandará por semana a diversos precios. Esta información puede proporcionarse de manera gráfica, como en la figura 9.35(a), trazando cada pareja cantidad-precio como un punto. Es claro que esta gráfica no representa una función continua. Además, no nos da información del precio al cual, digamos, 35 unidades serán demandadas. Sin embargo, si conectamos los puntos de la figura 9.35(a) por medio de una curva suave [véase la fig. 9.35(b)], obtenemos una curva de demanda. De ella podríamos estimar que alrededor de \$2.50 por unidad, se demandarían 35 unidades.

TABLA 9.3 Programa de demanda

Precio/unidad, p	Cantidad/semana, q
\$20	0
10	5
5	15
4	20
2	45
1	95

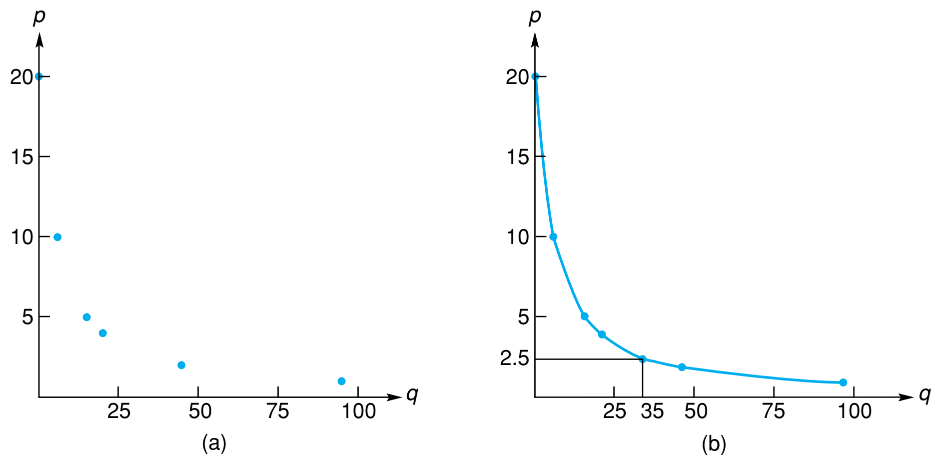


FIGURA 9.35 Vista de datos por medio de una función continua.

Con frecuencia es posible y útil describir una gráfica, como en la figura 9.35(b), por medio de una ecuación que define una función continua f. Tal función no sólo nos da una ecuación de demanda, $p = f(q)$, para anticipar los precios correspondientes a las cantidades demandadas, también permite efectuar un análisis matemático conveniente de las propiedades básicas de la demanda. Por supuesto que se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones como $p = f(q)$. Matemáticamente, f puede estar definida cuando $q = \sqrt{37}$, pero desde un punto de vista práctico, una demanda de $\sqrt{37}$ unidades, podría no tener significado para nuestra situación particular. Por ejemplo, si una unidad es un huevo, entonces una demanda de $\sqrt{37}$ huevos, no tiene sentido.

En general, desearemos ver situaciones prácticas en términos de funciones continuas, siempre que sea posible realizar mejores análisis de su naturaleza.

Ejercicio 9.4

En los problemas del 1 al 6 utilice la definición de continuidad para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

1. $f(x) = x^3 - 5x; \quad x = 2.$

2. $f(x) = \dfrac{x-3}{9x}; \quad x = -3.$

3. $g(x) = \sqrt{2-3x}; \quad x = 0.$

4. $f(x) = \dfrac{x}{8}; \quad x = 2.$

5. $h(x) = \dfrac{x-4}{x+4}; \quad x = 4.$

6. $f(x) = \sqrt[3]{x}; \ x = -1.$

En los problemas del 7 al 12 determine si la función es continua en los puntos dados.

7. $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}; \quad -2, 0.$

8. $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{6}; \quad 2, -2.$

9. $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}; \quad 3, -3.$

10. $h(x) = \dfrac{3}{x^2+4}; \quad 2, -2.$

11. $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \geq 2 \\ x^2, & \text{si } x < 2 \end{cases}; \quad 2, 0.$

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}; \quad 0, -1.$

En los problemas del 13 al 16 dé una razón del porqué la función es continua en todas partes.

13. $f(x) = 2x^2 - 3.$

14. $f(x) = \dfrac{x+2}{5}.$

15. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4}.$

16. $f(x) = x(1-x).$

En los problemas del 17 al 34 encuentre todos los puntos de discontinuidad.

17. $f(x) = 3x^2 - 3.$

18. $h(x) = x - 2.$

19. $f(x) = \dfrac{3}{x+4}.$

20. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4}.$

21. $g(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{5}.$

22. $f(x) = 0.$

23. $f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{x^2+2x-15}.$

24. $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x}.$

25. $h(x) = \dfrac{x-7}{x^3-x}.$

26. $f(x) = \dfrac{x}{x}.$

27. $p(x) = \dfrac{x}{x^2+1}.$

28. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4-1}.$

29. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \geq -1, \\ 1, & \text{si } x < -1. \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1, \\ x-1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{si } x > 2, \\ 3-2x, & \text{si } x < 2. \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 2, \\ x-1, & \text{si } x < 2. \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{x}, & \text{si } x \geq 3, \\ 2x-1, & \text{si } x < 3. \end{cases}$

35. Tarifa telefónica Supóngase que la tarifa telefónica de larga distancia para una llamada desde Hazleton, Pennsylvania, a los Ángeles, California, es de \$0.10 por el primer minuto y de \$0.06 por cada minuto o fracción adicional. Si $y = f(t)$ es una función que indica el cargo total y por una llamada de t minutos de duración, haga el bosquejo de la gráfica de f para $0 < t \leq 4\frac{1}{2}$. Utilice esta gráfica para determinar los valores de t en los cuales ocurren discontinuidades, donde $0 < t \leq 4\frac{1}{2}$.

36. La *función mayor entero*, $f(x) = [x]$, está definida como el entero más grande que es menor o igual a x, donde x es cualquier número real. Por ejemplo, $[3] = 3$, $[1.999] = 1$, $[\frac{1}{4}] = 0$ y $[-4.5] = -5$. Haga el bosquejo de la gráfica de esta función para $-3.5 \leq x \leq 3.5$. Utilice su bosquejo para determinar los valores de x en los cuales ocurren discontinuidades.

37. Inventario Haga el bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600, & \text{si } 0 \leq x < 5, \\ -100x + 1100, & \text{si } 5 \leq x < 10, \\ -100x + 1600, & \text{si } 10 \leq x < 15. \end{cases}$$

Una función como la anterior podría describir el inventario y de una compañía en el instante x. ¿f es continua en 2?, ¿es continua en 5?, ¿es continua en 10?

38. Grafique $g(x) = e^{-1/x^2}$. Ya que g no está definida en $x = 0$, pero sí para todos los valores cercanos a cero, g es discontinua en 0. Con base en la gráfica de g, ¿es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

continua en 0?

OBJETIVO Desarrollar técnicas para resolver desigualdades no lineales.

9.5 CONTINUIDAD APLICADA A DESIGUALDADES

En la sección 2.2 resolvimos desigualdades lineales. Ahora veremos cómo la noción de continuidad puede aplicarse para resolver una desigualdad no lineal, tal como $x^2 + 3x - 4 < 0$.

Recuerde (de la sección 3.4) que hay una relación entre las intersecciones x de la gráfica de una función g (esto es, los puntos en donde la gráfica corta al eje x) y las raíces de la ecuación $g(x) = 0$, que son llamados ceros de g. Si la gráfica de g tiene una intersección con el eje x $(r, 0)$, entonces $g(r) = 0$, de modo que r es una raíz de la ecuación $g(x) = 0$, y por tanto r es un cero de g. De aquí que de la gráfica de $y = g(x)$ en la figura 9.36, concluimos que r_1, r_2 y r_3 son ceros de g. Por otra parte, si r es cualquier raíz real de la ecuación $g(x) = 0$, entonces $g(r) = 0$, y como consecuencia $(r, 0)$ está en la gráfica de g. Esto significa que todos los ceros reales de g pueden representarse por los puntos donde la gráfica de g coincide con el eje x. También note en la figura 9.36 que los tres ceros determinan cuatro intervalos abiertos sobre el eje x:

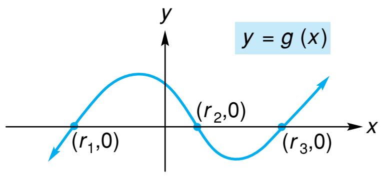


FIGURA 9.36 r_1, r_2, y r_3 son ceros de g.

$$(-\infty, r_1), \quad (r_1, r_2), \quad (r_2, r_3) \quad \text{y} \quad (r_3, \infty).$$

Para resolver $x^2 + 3x - 4 > 0$, hacemos

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1).$$

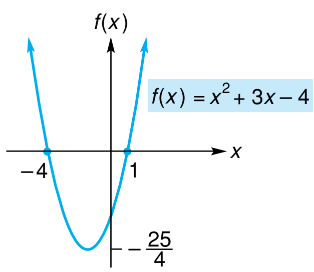


FIGURA 9.37 -4 y 1 son ceros de f.

Puesto que f es una función polinomial, es continua en todas partes. Los ceros de f son -4 y 1; de aquí que la gráfica de f tiene intersecciones con el eje x, $(-4, 0)$ y $(1, 0)$. (Véase la fig. 9.37.) Los ceros, o para ser más precisos, las intersecciones con el eje x, determinan tres intervalos sobre el eje x:

$$(-\infty, -4), \qquad (-4, 1) \qquad \text{y} \qquad (1, \infty).$$

Considere el intervalo $(-\infty, -4)$. Como f es continua en este intervalo, afirmamos que $f(x) > 0$, o bien, $f(x) < 0$ *en todo* el intervalo. Si no fuera éste el caso, entonces $f(x)$ cambiaría de signo en el intervalo. Debido a la continuidad de f, habría un punto donde la gráfica intersecaría al eje x, por ejemplo $(x_0, 0)$. (Véase la fig. 9.38.) Pero, entonces x_0 sería un cero de f. Esto no puede ser, ya que no hay ceros de f menores que -4. De aquí que $f(x)$ debe ser estrictamente positiva o estrictamente negativa en $(-\infty, -4)$. Un argumento similar se puede enunciar para cada uno de los otros intervalos.

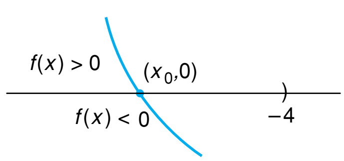


FIGURA 9.38 Cambio de signo para funciones continuas.

Para determinar el signo de $f(x)$ en cualquiera de los tres intervalos, es suficiente con determinarlo en cualquier punto del intervalo. Por ejemplo, -5 está en $(-\infty, -4)$ y

$$f(-5) = 6 > 0. \qquad \text{Entonces } f(x) > 0 \text{ en } (-\infty, -4).$$

Del mismo modo, 0 está en $(-4, 1)$ y

$$f(0) = -4 < 0. \qquad \text{Entonces } f(x) < 0 \text{ en } (-4, 1).$$

Por último, 3 está en $(1, \infty)$ y

$$f(3) = 14 > 0. \qquad \text{Entonces } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty).$$

(Véase el “diagrama de signos” en la figura 9.39). Por tanto,

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \quad \text{en} \quad (-\infty, -4) \text{ y } (1, \infty),$$

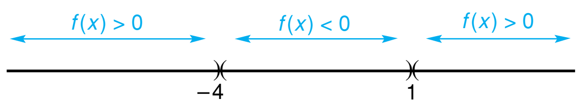


FIGURA 9.39 Diagrama de signos para $x^2 + 3x - 4$.

Observe la importancia de la continuidad en la solución de desigualdades.

de modo que hemos resuelto la desigualdad. Estos resultados son obvios de la gráfica de la figura 9.37. La gráfica está por arriba del eje x [esto es, $f(x) > 0$] en $(-\infty, -4)$ y $(1, \infty)$.

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad cuadrática

Resolver $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Solución: si $f(x) = x^2 - 3x - 10$, entonces f es una función polinomial (cuadrática) y, por tanto, continua en todas partes. Para encontrar los ceros (reales) de f, tenemos

$$x^2 - 3x - 10 = 0,$$
$$(x + 2)(x - 5) = 0,$$
$$x = -2, 5.$$

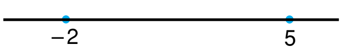


FIGURA 9.40 Ceros de $x^2 - 3x - 10$.

Los ceros -2 y 5 se muestran en la figura 9.40. Estos ceros determinan los intervalos

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 5) \quad \text{y} \quad (5, \infty).$$

Para determinar el signo de $f(x)$ en $(-\infty, -2)$, seleccionamos un punto en ese intervalo, digamos -3. El signo de $f(x)$ en todo $(-\infty, -2)$ es el mismo que el de $f(-3)$. Ya que

$$f(x) = (x + 2)(x - 5) \qquad \text{[forma factorizada de } f(x)\text{],}$$

tenemos

$$f(-3) = (-3 + 2)(-3 - 5) = (-)(-) = + .$$

[Observe cómo encontramos de manera conveniente el signo de $f(-3)$ utilizando los signos de los factores de $f(x)$]. Así, $f(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$. Para examinar los otros dos intervalos, seleccionamos los puntos 0 y 6. Encontramos que

$$f(0) = (0 + 2)(0 - 5) = (+)(-) = -,$$

de modo que $f(x) < 0$ en $(-2, 5)$ y

$$f(6) = (6 + 2)(6 - 5) = (+)(+) = +,$$

así que $f(x) > 0$ en $(5, \infty)$. Un resumen de nuestros resultados está en el diagrama de signos de la figura 9.41. Así, $x^2 - 3x - 10 < 0$ en $(-2, 5)$.

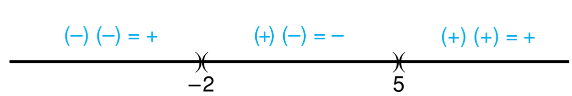


FIGURA 9.41 Diagrama de signos para $(x + 2)(x - 5)$.

EJEMPLO 2 Solución de una desigualdad polinomial

Resolver $x(x-1)(x+4) \leq 0$.

Solución: si $f(x) = x(x-1)(x+4)$, entonces f es una función polinomial y es continua en todas partes. Los ceros de f son 0, 1 y -4, que pueden verse en la figura 9.42. Estos ceros determinan cuatro intervalos:

$$(-\infty, -4), \quad (-4, 0), \quad (0, 1) \quad \text{y} \quad (1, \infty).$$

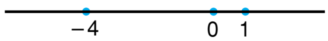


FIGURA 9.42 Ceros de $x(x-1)(x+4)$.

Ahora, en un punto de prueba en cada intervalo determinamos el signo de $f(x)$:

$$f(-5) = (-)(-)(-) = -, \qquad \text{así } f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -4);$$

$$f(-2) = (-)(-)(+) = +, \qquad \text{así } f(x) > 0 \text{ en } (-4, 0);$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = (+)(-)(+) = -, \qquad \text{así } f(x) < 0 \text{ en } (0, 1);$$

y

$$f(2) = (+)(+)(+) = +, \qquad \text{así } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty).$$

La figura 9.43 muestra un diagrama de signos para $f(x)$. Por tanto, $x(x-1)(x+4) \leq 0$ en $(-\infty, -4]$ y en $[0, 1]$. Observe que -4, 0 y 1 están incluidos en la solución porque satisfacen la igualdad (=) que es parte de la desigualdad ($\leq$).

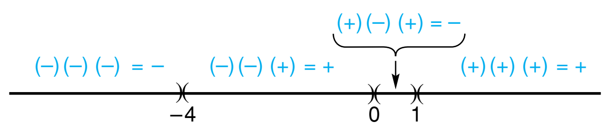


FIGURA 9.43 Diagrama de signos para $x(x-1)(x+4)$.

Principios en práctica 1

Resolución de una desigualdad polinomial

Una caja abierta se construye cortando un cuadrado de cada esquina de una pieza de metal de 8 por 10 pulgadas. Si cada lado de los cuadrados cortados es de x pulgadas de largo, el volumen de la caja está dado por $V(x) = x(8-2x)(10-2x)$. Este problema sólo tiene sentido cuando el volumen es positivo. Determine los valores de x para los que el volumen es positivo.

EJEMPLO 3 Solución de una desigualdad con función racional

Resolver $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x} \geq 0$.

Solución: sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x} = \dfrac{(x-1)(x-5)}{x}$. Para una función racional f, resolvemos la desigualdad considerando los intervalos determinados por los ceros de f y los puntos donde f es discontinua, puntos alrededor de los cuales el signo de $f(x)$ puede cambiar. Aquí los ceros son 1 y 5. La función es discontinua en 0 y continua en los demás puntos. En la figura 9.44 hemos colocado un círculo vacío en 0 para indicar que f no está definida allí. Entonces, consideremos los intervalos

$$(-\infty, 0), \quad (0, 1) \quad (1, 5) \quad \text{y} \quad (5, \infty).$$

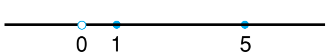


FIGURA 9.44 Ceros y puntos de discontinuidad para $\dfrac{(x-1)(x-5)}{x}$.

Al determinar el signo de $f(x)$ en un punto de prueba en cada intervalo, encontramos que:

$$f(-1) = \frac{(-)(-)}{(-)} = -, \qquad \text{así } f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, 0);$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-)(-)}{(+)} = +, \qquad \text{así } f(x) > 0 \text{ en } (0, 1);$$

$$f(2) = \frac{(+)(-)}{(+)} = -, \qquad \text{así } f(x) < 0 \text{ en } (1, 5);$$

y

$$f(6) = \frac{(+)(+)}{(+)} = +, \qquad \text{así } f(x) > 0 \text{ on } (5, \infty).$$

El diagrama de signos está dado en la figura 9.45. Por tanto, $f(x) \geq 0$ en $(0, 1]$ y en $[5, \infty)$. ¿Por qué 1 y 5 se incluyen, pero 0 se excluye? La figura 9.46 muestra la gráfica de f. Observe que la solución de $f(x) \geq 0$, consiste en todos los valores de x para los cuales la gráfica está en o sobre el eje x.

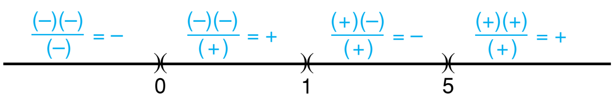


FIGURA 9.45 Diagrama de signo para $\dfrac{(x-1)(x-5)}{x}$.

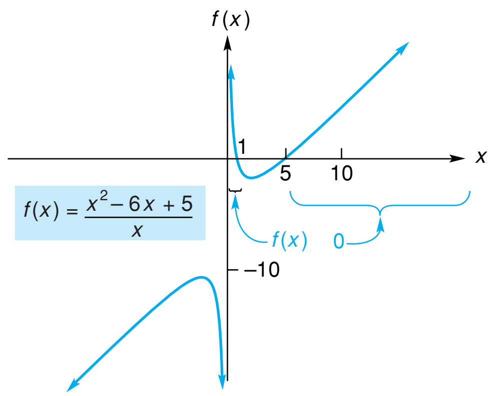


FIGURA 9.46 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x}$.

EJEMPLO 4 Solución de desigualdades no lineales

a. *Resolver* $x^2 + 1 > 0$.

Solución: la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales. Por tanto, $f(x) = x^2 + 1$ no tiene un cero real. También, f es continua en todas partes. Así, $f(x)$ siempre es positiva o siempre es negativa. Pero x^2 siempre es positiva o cero, de modo que $x^2 + 1$ siempre es positiva. Por tanto, la solución de $x^2 + 1 > 0$ es $(-\infty, \infty)$.

b. *Resolver* $x^2 + 1 < 0$.

Solución: de la parte (a), $x^2 + 1$ siempre es positiva, de modo que $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución.

Ejercicio 9.5

En los problemas del 1 al 26 resuelva las desigualdades con la técnica estudiada en esta sección.

1. $x^2 - 3x - 4 > 0$.

2. $x^2 - 8x + 15 > 0$.

3. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

4. $14 - 5x - x^2 \leq 0$.

5. $2x^2 + 11x + 14 < 0$.

6. $x^2 - 4 < 0$.

7. $x^2 + 4 < 0.$

8. $2x^2 - x - 2 \leq 0.$

9. $(x + 2)(x - 3)(x + 6) \leq 0.$

10. $(x - 5)(x - 2)(x + 8) \geq 0.$

11. $-x(x - 5)(x + 4) > 0.$

12. $(x + 2)^2 > 0.$

13. $x^3 + 4x \geq 0.$

14. $(x + 2)^2(x^2 - 1) < 0.$

15. $x^3 + 2x^2 - 3x > 0.$

16. $x^3 - 4x^2 + 4x > 0.$

17. $\dfrac{x}{x^2 - 9} < 0.$

18. $\dfrac{x^2 - 1}{x} < 0.$

19. $\dfrac{4}{x - 1} \geq 0.$

20. $\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} > 0.$

21. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 5} \geq 0.$

22. $\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 3x + 2} \geq 0.$

23. $\dfrac{3}{x^2 + 6x + 5} \leq 0.$

24. $\dfrac{2x + 1}{x^2} \leq 0.$

25. $x^2 + 2x \geq 2.$

26. $x^4 - 16 \geq 0.$

27. Ingresos Suponga que los consumidores compran q unidades de un producto cuando el precio de *cada uno* es de $20 - 0.1q$ dólares. ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso de las ventas no sea menor que \$750?

28. Administración forestal Una compañía taladora posee un bosque de forma rectangular, de 1×2 millas. La compañía quiere cortar una franja uniforme con árboles a lo largo de los lados externos del bosque. ¿Qué tan ancha debe ser la franja si se quiere conservar al menos $1\frac{5}{16}$ de millas^2 de bosque?

29. Diseño de un recipiente Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa, mediante el corte de un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 pulg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda utilizarse.

30. Participación en talleres Imperial Education Services (IES) está ofreciendo un curso de procesamiento de datos a personal clave en la compañía Zeta. El precio por persona es de \$50 y la compañía Zeta garantiza que al menos asistirán 50 personas. Suponga que el IES ofrece reducir el costo para *todos* en \$0.50 por cada persona que asista después de las primeras 50. ¿Cuál es el límite del tamaño del grupo que el IES aceptará, de modo que el ingreso total nunca sea menor que lo recibido por 50 personas?

31. Grafique $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 + 7x^2 - 5x + 4 \leq 0.$$

32. Grafique $f(x) = \dfrac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x}$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x} > 0.$$

Una manera original de resolver una desigualdad no lineal como $f(x) > 0$ es por inspección de la gráfica de $g(x) = f(x)/|f(x)|$, cuyo rango consiste sólo en 1 y −1:

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases} 1, \text{ si } f(x) > 0, \\ -1, \text{ si } f(x) < 0. \end{cases}$$

La solución de $f(x) > 0$ consiste en todos los intervalos para los cuales $g(x) = 1$. Utilizando esta técnica, resuelva las desigualdades de los problemas 33 y 34.

33. $6x^2 - x - 2 > 0.$

34. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3} < 0.$

9.6 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 9.1 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Sección 9.2 límites laterales $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

Sección 9.3 interés compuesto continuamente

Sección 9.4 continua discontinua continua en un intervalo continua en todas partes

Resumen

La noción de límite es el fundamento del cálculo. Decir que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, significa que los valores de $f(x)$ pueden acercarse mucho al número L cuando seleccionamos x lo suficientemente cercana a a. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, y c es una constante, entonces:

1. $\lim_{x\to a} c = c,$
2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n,$
3. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$
4. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$
5. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x),$
6. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0,$
7. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)},$
8. Si f es una función polinomial, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$

La propiedad 8 significa que el límite de una función polinomial cuando $x \to a$, puede encontrarse con sólo sustituir a por x. Sin embargo, con otras funciones, la sustitución puede conducir a la forma indeterminada $0/0$. En tales casos, operaciones algebraicas como la factorización y cancelación pueden dar una forma en la que el límite pueda determinarse.

Si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a por la derecha, entonces escribimos $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$. Si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a por la izquierda, entonces escribimos $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$. Estos límites se llaman límites laterales.

El símbolo de infinito, ∞, que no representa un número, se utiliza para describir límites. La proposición

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que cuando x crece sin cota, los valores de $f(x)$ se aproximan al número L. Una proposición similar se aplica cuando $x \to -\infty$, lo cual significa que x está disminuyendo sin cota. En general, si $p > 0$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0.$$

Si $f(x)$ aumenta sin cota cuando $x \to a$, entonces escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Del mismo modo, si $f(x)$ disminuye sin cota, tenemos $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Decir que el límite de una función es ∞ (o $-\infty$) no significa que el límite exista. Es una manera de decir que el límite no existe y decir *por qué* no hay límite.

Existe una regla para evaluar el límite de una función racional (cociente de dos polinomios) cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$. Si $f(x)$ es una función racional, y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son términos en el numerador y denominador respectivamente, con las potencias más grandes de x, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

En particular, cuando $x \to \infty$ o $x -\infty$, el límite de un polinomio es el mismo que el límite del término con la potencia más grande de x. Esto significa que para un polinomio no constante, el límite cuando $x \to \infty$ o $-\infty$, es ∞, o bien, $-\infty$.

Cuando el interés se capitaliza cada instante, decimos que es compuesto continuamente. Bajo capitalización continua a una tasa anual r por t años, la fórmula $S = Pe^{rt}$ da el monto total (compuesto) S de un capital de P dólares. La fórmula $P = Se^{-rt}$ da el valor presente P de S dólares. La tasa efectiva correspondiente a una tasa anual r capitalizada continuamente es $e^r - 1$.

Una función f es continua en a si y sólo si

1. $f(x)$ está definida en $x = a$,
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe,
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

De manera geométrica, esto significa que la gráfica de f no presenta corte cuando $x = a$. Si una función no es continua en a y está definida en un intervalo abierto que contenga a a, excepto posiblemente a a misma, entonces se dice que la función es discontinua en a. Las funciones polinomiales son continuas en todas partes, y las funciones racionales son discontinuas sólo en los puntos donde el denominador es cero.

Para resolver la desigualdad $f(x) > 0$ [o, $f(x) < 0$], primero encontramos los ceros reales de f y los valores de x para los cuales f es discontinua. Estos valores determinan intervalos, y en cada intervalo $f(x)$ siempre es positiva o siempre negativa. Para encontrar el signo en cualquiera de estos intervalos, basta con determinar el signo de $f(x)$ en cualquier punto del intervalo. Después que los signos se determinan para todos los intervalos, es fácil dar la solución de $f(x) > 0$ [o $f(x) < 0$].

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 28 encuentre los límites si existen. Si el límite no existe, establézcalo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

1. $\lim_{x\to -1} (2x^2 + 6x - 1)$.

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2}$.

3. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

4. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2}$.

5. $\lim_{h\to 0} (x + h)$.

6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

7. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 2x - 8}$.

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x - 5}$.

9. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2}{x + 1}$.

10. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{2x^2}$.

11. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3x - 2}{7x + 3}$.

12. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^4}$.

13. $\lim_{t\to 3} \dfrac{2t - 3}{t - 3}$.

14. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^6}{x^5}$.

15. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x + 3}{1 - x}$.

16. $\lim_{x\to 4} \sqrt{4}$.

17. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{(3x + 2)^2}$.

18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

19. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$.

20. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2 - x}{x - 2}$.

21. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{3x}$.

22. $\lim_{y\to 5^+} \sqrt{y - 5}$.

23. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^{100} + (1/x^2)}{e - x^{98}}$.

24. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\pi x^2 - x^5}{23x - 3x^4}$.

25. $\lim_{x\to 1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

26. $\lim_{x\to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{si } x < 3, \\ 6, & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$

27. $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{4 - x}$. [*Sugerencia:* Para $x > 4$, $\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{x - 4}\sqrt{x + 4}$.]

28. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x - 2}}$. [*Sugerencia:* Para $x > 2$, $\dfrac{x - 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2}$.]

29. Si $f(x) = 8x - 2$, encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

30. Si $f(x) = 2x^2 - 3$, encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

31. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, entonces el número de parásitos a lo largo de un periodo es

$$y = 23\left(1 - \frac{1}{1 + 2x}\right).$$

Si la densidad de huésped estuviese aumentando sin cota, ¿a qué valor se aproximaría y?

32. Relación presa-depredador Para una relación particular de presa-depredador, se determinó que el número y de presas consumidas por un depredador a lo largo de un periodo fue una función de la densidad de presas x (el número de presas por unidad de área). Suponga que

$$y = f(x) = \frac{10x}{1 + 0.1x}.$$

Si la densidad de presas aumentara sin cota, ¿a qué valor se aproximaría y?

33. Para una tasa de interés anual de 5% capitalizado continuamente, encuentre

a. El monto total de \$2500 después de 14 años.

b. El valor presente de \$2500 pagaderos dentro de 14 años.

34. Para una tasa de interés anual de 6% compuesto continuamente, encuentre:

a. El monto total de \$800 después de 11 años.
b. El valor presente de \$800 que se deben pagar dentro de 11 años.

35. Encuentre la tasa efectiva equivalente a una tasa anual de 6% capitalizada continuamente.

36. Determine la tasa efectiva equivalente a una tasa anual de 1% compuesta de manera continua.

37. Si un interés se devenga a la tasa anual de 5% compuesto continuamente, determine el número exacto de años requeridos para que un capital de P se duplique.

38. Inversión Los Smith han hecho dos inversiones: \$400 en la cuenta A, la cual devenga interés a la tasa de 6% compuesto semestralmente, y \$400 en la cuenta B, que genera interés a la tasa de 5.5% compuesto continuamente.

a. Calcule la tasa efectiva de interés para cada inversión.
b. ¿Cuál inversión tiene mayor valor al final de 5 años y por cuánto?

39. Utilizando la definición de continuidad, demuestre que $f(x) = x + 5$ es continua en $x = 7$.

40. Utilizando la definición de continuidad, demuestre que $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+4}$ es continua en $x = 3$.

41. Establezca si $f(x) = x/4$ es continua en todas partes. Dé una razón para su respuesta.

42. Establezca si $f(x) = x^2 - 2$ es continua en todas partes. Dé una razón para su respuesta.

En los problemas del 43 al 50 encuentre los puntos de discontinuidad (si los hay) para cada función.

43. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$.

44. $f(x) = \dfrac{0}{x^3}$.

45. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x^2+3}$.

46. $f(x) = (3-2x)^2$.

47. $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2+3x-4}$.

48. $f(x) = \dfrac{2x+6}{x^3+x}$.

49. $f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{si } x > -2, \\ 3x+6, & \text{si } x \leq -2. \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{si } x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

En los problemas del 51 al 58 resuelva las desigualdades dadas.

51. $x^2 + 4x - 12 > 0$.

52. $2x^2 - 6x + 4 \leq 0$.

53. $x^3 \geq 2x^2$.

54. $x^3 + 8x^2 + 15x \geq 0$.

55. $\dfrac{x+5}{x^2-1} < 0$.

56. $\dfrac{x(x+5)(x+8)}{3} < 0$.

57. $\dfrac{x^2+3x}{x^2+2x-8} \geq 0$.

58. $\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+1} \leq 0$.

---

59. Grafique $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-6x}{x^3-2x^2+6x-12}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

60. Grafique $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$. De la gráfica, estime $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

61. Grafique $f(x) = x \ln x$. Con base en la gráfica, estime el límite lateral $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

62. Grafique $f(x) = \dfrac{e^x-1}{(e^x+1)(e^{2x}-e^x)}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

63. Grafique $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 - x^2 + x - 6 \geq 0.$$

64. Grafique $f(x) = \dfrac{x^5+4}{x^3-1}$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{x^5+4}{x^3-1} \leq 0.$$

Aplicación práctica
Deuda nacional

El tamaño del déficit presupuestal de Estados Unidos es de gran interés para muchas personas, y con frecuencia un tema de qué hablar en las noticias. La magnitud del déficit afecta la confianza en la economía de Estados Unidos, tanto de inversionistas nacionales como de extranjeros, corporativos oficiales y líderes políticos. Hay quienes creen que para reducir su déficit el gobierno debería reducir los gastos, lo cual afectaría los programas de gobierno, o aumentar sus ingresos, posiblemente a través de un aumento en los impuestos.

Suponga que es posible reducir el déficit continuamente a una tasa anual fija. Esto es similar al concepto de interés compuesto continuamente, salvo que en lugar de agregar interés a una cantidad en cada instante, le restaría al déficit a cada instante. Veamos cómo podríamos modelar esta situación.

Suponga que el déficit D_o en el instante $t = 0$, se reduce a una tasa anual r. Además, suponga que hay k periodos de igual longitud en un año. Al final del primer periodo, el déficit original se reduce en $D_0\left(\frac{r}{k}\right)$, de modo que el déficit nuevo es

$$D_0 - D_0\left(\frac{r}{k}\right) = D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right).$$

Al final del segundo periodo, este déficit se reduce en $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\frac{r}{k}$, de modo que el déficit nuevo es

$$D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right) - D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\frac{r}{k}$$

$$= D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\left(1 - \frac{r}{k}\right)$$

$$= D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^2.$$

El patrón continúa. Al final del tercer periodo el déficit es $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^3$ y así sucesivamente. Al término de t años, el número de periodos es kt y el déficit es $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt}$. Si el déficit se reducirá a cada instante, entonces $k \to \infty$. Así, queremos encontrar

$$\lim_{k\to\infty} D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt},$$

que puede reescribirse como

$$D_0\left[\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{-k/r}\right]^{-r}.$$

Si se hace $x = -r/k$, entonces la condición $k \to \infty$ implica que $x \to 0$. De aquí que el límite dentro de los corchetes tenga la forma $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$, que es la bien conocida e. Por tanto, el déficit D_0 en el instante $t = 0$ se reduce continuamente a una tasa anual r, y t años después el déficit está dado por

$$D = D_0e^{-rt}.$$

Por ejemplo, suponga un déficit actual de \$5345 miles de millones y una tasa de reducción continua de 6% anual. Entonces el déficit dentro de t años contados a partir de ahora, está dado por

$$D = 5345e^{-0.06t},$$

en donde D está en miles de millones de dólares. Esto significa que dentro de 10 años, el déficit será $5345e^{-0.6} \approx \$2933$ miles de millones. La figura 9.47 muestra la gráfica de $D = 5345e^{-rt}$ para varias tasas r. Por supuesto, entre mayor sea el valor de r, más rápida es la reducción del déficit. Obsérvese que para $r = 0.06$, la deuda al final de 30 años aún es considerable (aproximadamente \$884 miles de millones).

Es importante observar que los elementos radiactivos que van en decremento también siguen el modelo de la reducción de la deuda continua $D = D_0e^{-rt}$.

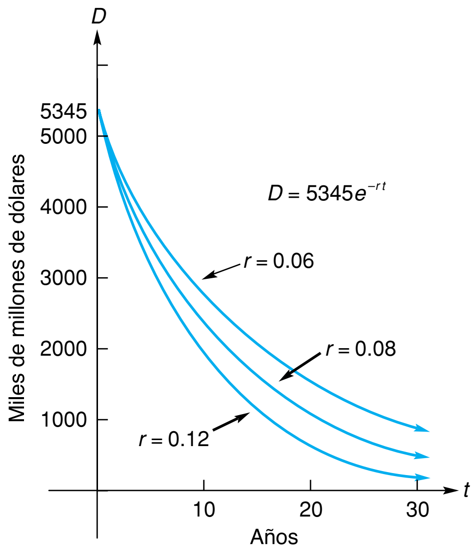


FIGURA 9.47 La deuda del presupuesto se reduce de manera continua.

Para determinar en que posición se encuentra actualmente el déficit nacional de Estados Unidos, visite uno de los relojes del déficit nacional en Internet. Usted puede encontrarlos buscando por "national debt clock" con un buscador.

Ejercicios

En los problemas siguientes, suponga un déficit nacional actual de \$5345 *miles de millones*.

1. Si el déficit se redujera a \$4500 miles de millones dentro de un año, ¿qué tasa anual de reducción continua del déficit estaría implicada? Proporcione su respuesta al porcentaje más cercano.
2. Para un reducción continua de déficit a una tasa anual de 6%, determine el número de años, contados a partir de ahora, para que el déficit se reduzca a la mitad. Proporcione su respuesta al año más cercano.
3. ¿Qué suposiciones fundamentan un modelo de reducción de déficit que utiliza una función exponencial? ¿Cuáles son las limitaciones de este enfoque?

Diferenciación

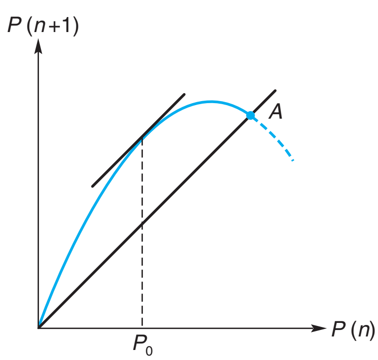
Las regulaciones del gobierno, por lo general, limitan el número de peces que pueden pescar de una zona de pesca, los barcos de pesca comerciales en una temporada. Esto previene la pesca excesiva, que agota la población de peces y deja, a la larga, pocos peces para capturar.

Desde una perspectiva estrictamente comercial, la regulación ideal permitiría obtener un máximo en el número de peces disponibles para la cosecha de cada año. La clave para determinar las regulaciones ideales es la función matemática llamada curva de reproducción. Para un hábitat de peces, esta función estima la población de peces de un año al siguiente, $P(n + 1)$, con base en la población actual, $P(n)$, suponiendo que no hay intervención externa (es decir, no hay pesca, ni influencia de depredadores, etc.).

La figura de abajo muestra una curva común de reproducción; en ella también está graficada la recta $y = x$, a lo largo de la cual las poblaciones $P(n)$ y $P(n + 1)$ serían iguales. Observe la intersección de la curva con la recta en el punto A. Éste es en donde, a consecuencia de la gran aglomeración en el hábitat, la población alcanza su tamaño máximo sostenible. Una población que tiene este tamaño en un año, tendrá el mismo tamaño el año siguiente.

Para cualquier punto en el eje horizontal, la distancia entre la curva de reproducción y la recta $y = x$ representa la pesca sostenible: el número de peces que pueden ser atrapados, después de que las crías han crecido hasta madurar, de modo que al final la población regrese al mismo tamaño que tenía un año antes.

Desde el punto de vista comercial, el tamaño de población óptima es aquél en donde la distancia entre la curva de reproducción y la recta $y = x$ es la mayor. Esta condición se cumple, en donde las pendientes de la curva de reproducción y la recta $y = x$ son iguales. Así, para una cosecha de peces máxima año tras año, las regulaciones deben tener como objetivo mantener la población de peces muy cerca de P_0.



Aquí, una idea central es la de la pendiente de una curva en un punto dado. Esa idea es el concepto central de este capítulo.

Comenzamos ahora el estudio del cálculo. Las ideas involucradas en cálculo son totalmente diferentes a las de álgebra y de la geometría. La fuerza e importancia de estas ideas y de sus aplicaciones las aclararemos más adelante en este libro. En este capítulo introduciremos la llamada derivada de una función, y usted aprenderá reglas importantes para encontrar derivadas. Verá también cómo se usa la derivada para analizar la razón de cambio de una cantidad, como la razón a la cual cambia la posición de un cuerpo.

OBJETIVO Desarrollar la idea de recta tangente a una curva, definir la pendiente de una curva, definir una derivada y darle una interpretación geométrica. Calcular derivadas por medio del uso de la definición de límite.

10.1 La derivada

Uno de los problemas principales de que se ocupa el cálculo es el de encontrar la pendiente de la *recta tangente* a un punto sobre una curva. Quizá en geometría usted vio que una recta tangente, o *tangente,* a un círculo es una recta que toca al círculo en un solo punto (véase la fig. 10.1). Sin embargo, esta idea de una tangente no es muy útil en otras clases de curvas. Por ejemplo, en la figura 10.2(a) las rectas L_1 y L_2 intersecan a la curva en exactamente un solo punto, P. Si bien L_2 no la veríamos como la tangente en este punto, L_1 sí lo es. En la figura 10.2(b) podríamos considerar de manera intuitiva que L_3 es la tangente en el punto P, aunque L_3, interseca a la curva en otros puntos.

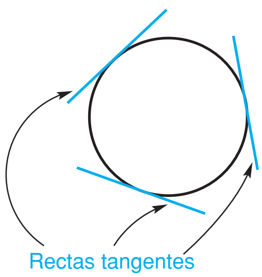


FIGURA 10.1 Rectas tangentes a un círculo.

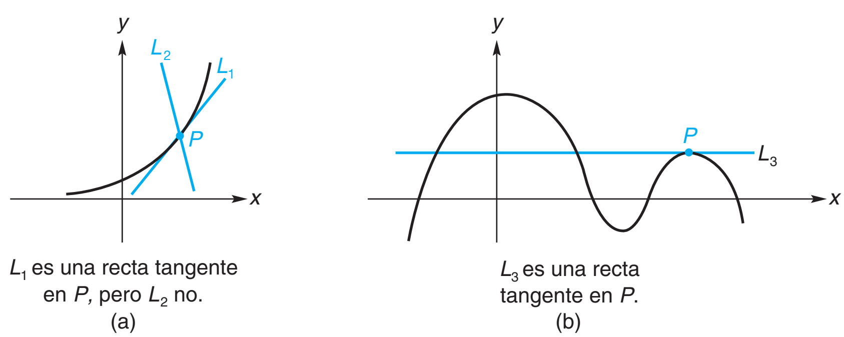


FIGURA 10.2 Recta tangente en un punto.

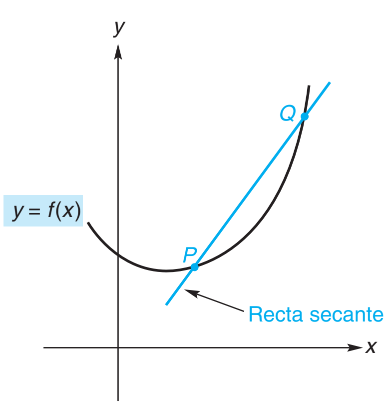


FIGURA 10.3 Recta tangente PQ.

De los ejemplos anteriores, usted puede ver que debemos abandonar la idea de que una tangente es simplemente una línea que interseca una curva en sólo un punto. Para obtener una definición conveniente de recta tangente, utilizamos el concepto de límite y la noción geométrica de *recta secante.* Una **recta secante** es una línea que interseca una curva en dos o más puntos.

Observe la gráfica de la función $y = f(x)$ en la figura 10.3. Queremos definir la recta tangente en el punto P. Si Q es un punto diferente sobre la curva, la línea PQ es una línea secante. Si Q se mueve a lo largo de la curva y se acerca a P por la derecha (véase la fig. 10.4), PQ', PQ'', etc., son líneas secantes características. Si Q se acerca a P por la izquierda, PQ_1, PQ_2, etc., son las secantes. *En ambos casos, las líneas secantes se acercan a la misma posición límite.* Esta posición límite común de las líneas secantes se define como la **recta tangente** a la curva en P. Esta definición parece razonable, y se aplica a curvas en general y no sólo a círculos.

Una curva no tiene necesariamente una recta tangente en cada uno de sus puntos. Por ejemplo, la curva $y = |x|$ no tiene una tangente en (0,0). Como puede ver en la figura 10.5, una recta secante que pasa por (0, 0) y un punto cercano a su derecha en la curva, siempre será la recta $y = x$. Así, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta $y = x$. Sin embargo, una recta secante que pase por (0,0) y un punto cercano a su izquierda sobre la

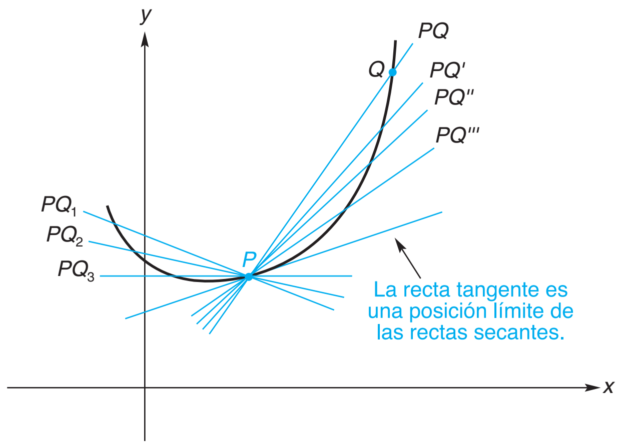


FIGURA 10.4 La recta tangente es una posición límite de las rectas secantes.

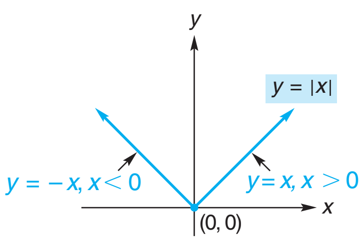


FIGURA 10.5 No hay recta tangente para la gráfica de $y = |x|$ en $(0, 0)$.

curva, siempre será la recta $y = -x$. Entonces, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta $y = -x$. Como no existe una posición límite común, no hay una recta tangente en (0,0).

Ahora que tenemos una definición conveniente de la tangente a una curva en un punto, podemos definir la *pendiente de una curva* en un punto.

Definición

La ***pendiente de una curva*** en un punto P es la pendiente, en caso de que exista, de la recta tangente en P.

Como la tangente en P es una posición límite de las líneas secantes PQ, consideremos la pendiente de la tangente como el valor límite de las pendientes de las rectas secantes conforme Q se acerca a P. Por ejemplo, consideremos la curva $f(x) = x^2$ y las pendientes de algunas rectas secantes PQ, donde $P = (1, 1)$. Para el punto $Q = (2.5, 6.25)$, la pendiente de PQ (véase la fig. 10.6) es

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6.25 - 1}{2.5 - 1} = 3.5.$$

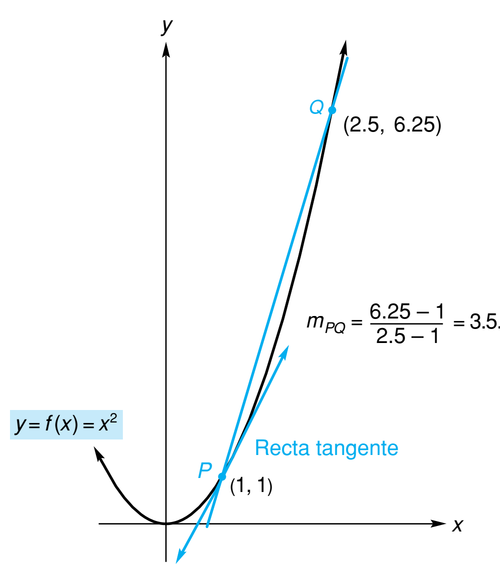


FIGURA 10.6 Recta secante a $f(x) = x^2$ que pasa por $(1, 1)$ y $(2.5, 6.25)$.

La tabla 10.1 incluye otros puntos Q sobre la curva, así como las correspondientes pendientes de PQ. Observe que conforme Q se acerca a P, las pendientes de las rectas secantes parecen aproximarse al valor 2. Entonces, podemos esperar que la pendiente de la recta tangente indicada en (1, 1) sea 2. Esto se confirmará luego en el ejemplo 1. Pero primero queremos generalizar nuestro procedimiento.

TABLA 10.1 Pendientes de rectas secantes a la curva $f(x) = x^2$ en $P = (1,1)$

Q	Pendiente de PQ
(2.5, 6.25)	$(6.25 - 1)/(2.5 - 1) = 3.5$
(2, 4)	$(4 - 1)/(2 - 1) = 3$
(1.5, 2.25)	$(2.25 - 1)/(1.5 - 1) = 2.5$
(1.25, 1.5625)	$(1.5625 - 1)/(1.25 - 1) = 2.25$
(1.1, 1.21)	$(1.21 - 1)/(1.1 - 1) = 2.1$
(1.01, 1.0201)	$(1.021 - 1)/(1.01 - 1) = 2.01$

Para la curva $y = f(x)$, en la figura 10.7 encontraremos una expresión para la pendiente en el punto $P = (x_1, f(x_1))$. Si $Q = (x_2, f(x_2))$, la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

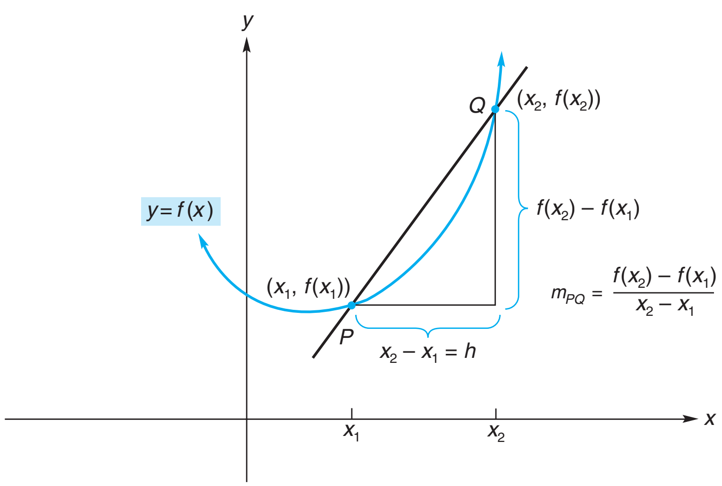


FIGURA 10.7 Recta secante que pasa por P y Q.

Si llamamos h a la diferencia $x_2 - x_1$, podemos escribir x_2 como $x_1 + h$. Aquí se debe tener que $h \neq 0$, porque si $h = 0$, entonces $x_2 = x_1$ y no existirá recta secante. De acuerdo con esto,

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

Conforme Q se mueve a lo largo de la curva hacia P, entonces x_2 se acerca a x_1. Esto significa que h se aproxima a cero. El valor límite de las pendientes de las rectas secantes, que es la pendiente de la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$, es el siguiente límite:

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec},$$

o de manera más precisa

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}. \quad (1)$$

En el ejemplo 1, usaremos este límite para confirmar nuestra conclusión anterior de que la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en $(1, 1)$ es igual a 2.

EJEMPLO 1 Determinación de la pendiente de una recta tangente

Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ *en el punto* $(1, 1)$.

Solución: la pendiente es el límite en la ecuación (1) con $f(x) = x^2$ y $x_1 = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - (1)^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.\end{aligned}$$

Así, la recta tangente a $y = x^2$ en $(1, 1)$ tiene pendiente igual a 2 (véase la fig. 10.6).

Podemos generalizar la ecuación (1) de manera que sea aplicable a cualquier punto $(x, f(x))$ sobre una curva. Si reemplazamos x_1 por x se obtiene una función, llamada *derivada* de f, cuya entrada es x y su salida es la pendiente de la recta tangente a la curva en $(x, f(x))$, siempre que la recta tangente *tenga* una pendiente (esto es, que la tangente no sea vertical). Tenemos así la definición siguiente, la cual constituye la base del cálculo diferencial.

Definición

La ***derivada*** de una función f es la función, denotado por f' (léase "f prima"), y definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

siempre que este límite exista. Si $f'(x)$ puede encontrarse, se dice que f es ***diferenciable*** y $f'(x)$ se llama derivada de f en x, o derivada de f con respecto a x. El proceso de encontrar la derivada se llama ***diferenciación.***

En la definición de la derivada, la expresión

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

se llama **cociente de diferencia** (cociente diferencial). Así, $f'(x)$ es el límite de un cociente de diferencia cuando $h \to 0$.

Cuide no ser desidioso cuando aplique la definición de derivada como un límite. Escriba $\lim\limits_{h\to 0}$ en cada paso, antes de tomar el límite. Por desgracia, algunos estudiantes descuidan tomar el límite final, y h aparece en sus respuestas. Ésta es una manera rápida de perder puntos en un examen.

EJEMPLO 2 Uso de la definición para encontrar la derivada

Si $f(x) = x^2$, encontrar la derivada de f.

Solución: al aplicar la definición de derivada se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

Observe que al tomar el límite tratamos a x como una constante, porque es h y no x la que está cambiando. Observe también que $f'(x) = 2x$ define una función de x, que podemos interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x, f(x))$. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces la pendiente es $f'(1) = 2(1) = 2$, que confirma el resultado del ejemplo 1.

Además de la notación $f'(x)$, otras formas para denotar a la derivada de $y = f(x)$ en x son

$\dfrac{dy}{dx}$	(se lee "de ye, de equis"),
$\dfrac{d}{dx}[f(x)]$	[de $f(x)$, de equis],
y'	(y prima),
$D_x y$	(de x de y),
$D_x[f(x)]$	[de x de $f(x)$].

Advertencia La notación $\dfrac{dy}{dx}$, que se denomina *notación de Leibniz*, **no** debe considerarse como una fracción, aunque parezca una. Es un símbolo sencillo para una derivada. Aún no hemos dado un significado a los símbolos individuales como dy y dx.

Si la derivada $f'(x)$ puede evaluarse en $x = x_1$, el *número* resultante $f'(x_1)$ se llama **derivada de f en x_1,** y se dice que f es *diferenciable* en x_1. Como la derivada nos da la pendiente de la recta tangente, se tiene:

> $f'(x_1)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $(x_1, f(x_1))$.

Otras dos notaciones para derivada de f en x_1 son

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} \quad \text{y} \quad y'(x_1).$$

EJEMPLO 3 **Determinación de una ecuación de una recta tangente**

Si $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$, *encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de* f *en* $(1, 7)$.

Solución:

> **Estrategia:** primero determinamos la pendiente de la recta tangente calculando la derivada y evaluándola en $x = 1$. Usamos este resultado y el punto $(1, 7)$ en la forma punto-pendiente de la ecuación para una línea recta, y así obtenemos la ecuación de la recta tangente.

Tenemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h)^2 + 2(x+h) + 3] - (2x^2 + 2x + 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h + 3 - 2x^2 - 2x - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} (4x + 2h + 2). \end{aligned}$$

Por lo que $\quad f'(x) = 4x + 2$

y $\quad f'(1) = 4(1) + 2 = 6.$

Así, la recta tangente a la gráfica en $(1, 7)$ tiene pendiente de 6. Una forma punto-pendiente de esta tangente es

$$y - 7 = 6(x - 1).$$

Acostumbraremos expresar una ecuación de la recta tangente en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} y - 7 &= 6x - 6, \\ y &= 6x + 1. \end{aligned}$$

Advertencia En el ejemplo 3 ***no*** es correcto decir que como la derivada es $4x + 2$, la recta tangente en $(1, 7)$ es $y - 7 = (4x + 2)(x - 1)$. La derivada debe **evaluarse** en el punto de tangencia para determinar la pendiente de la recta tangente.

EJEMPLO 4 **Determinación de la pendiente de una curva en un punto**

Encontrar la pendiente de la curva $y = 2x + 3$ *en el punto en que* $x = 6$.

Solución: la pendiente de la curva es la pendiente de la recta tangente. Si hacemos $y = f(x) = 2x + 3$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h) + 3] - (2x + 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2. \end{aligned}$$

Como $dy/dx = 2$, la pendiente cuando $x = 6$, o de hecho en cualquier punto, es 2. Observe que la curva es una línea recta que tiene la misma pendiente en cada punto.

EJEMPLO 5 Función con una recta tangente vertical

Encontrar $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x})$.

Solución: si hacemos $f(x) = \sqrt{x}$, se tiene

Debe familiarizarse con el proceso de racionalizar el *numerador.*

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Cuando $h \to 0$, tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Esto puede evitarse racionalizando el *numerador.*

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

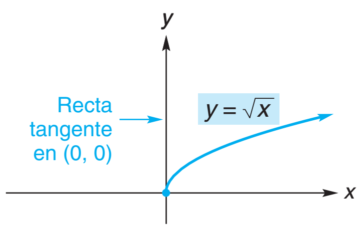


FIGURA 10.8 Recta tangente vertical en $(0, 0)$.

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Observe que la función original, $\sqrt{x}$, está definida para $x \geq 0$, pero su derivada $1/(2\sqrt{x})$, está definida sólo cuando $x > 0$. La razón para esto es evidente de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en la figura 10.8. Cuando $x = 0$, la tangente es una línea vertical, por lo que su pendiente no está definida.

Es conveniente que usted vea además de x y y otras variables involucradas en un problema. El ejemplo 6 ilustra el uso de otras variables.

En el ejemplo 5 vimos que la función $y = \sqrt{x}$ no es diferenciable cuando $x = 0$, porque la recta tangente es vertical en ese punto. Vale la pena mencionar que $y = |x|$ tampoco es diferenciable cuando $x = 0$, pero por una razón diferente: *no* existe recta tangente en ese punto (véase la fig. 10.5).

Con frecuencia, la notación de Leibniz es útil porque hace énfasis en las variables independiente y dependiente implicadas. Por ejemplo, si la variable p es una función de la variable q, se habla entonces de la derivada de p con respecto a q, que se escribe dp/dq.

EJEMPLO 6 Determinación de la derivada de p con respecto a q

Si $p = f(q) = \dfrac{1}{2q}$, *encontrar* $\dfrac{dp}{dq}$.

■ *Principios en práctica 1*

Determinación de la derivada de *H* con respecto a *t*

Si una pelota se lanza hacia arriba a una velocidad de 40 pies/seg desde una altura de 6 pies, su altura H en pies, después de t segundos, está dada por $H = 6 + 40t - 16t^2$. Determine $\dfrac{dH}{dt}$.

Solución:

$$\frac{dp}{dq} = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{2q}\right) = \frac{f(q+h) - f(q)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{2(q+h)} - \dfrac{1}{2q}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{q-(q+h)}{2q(q+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{q-(q+h)}{h[2q(q+h)]} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h[2q(q+h)]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2q(q+h)} = -\frac{1}{2q^2}.$$

Observe que cuando $q = 0$, ni la función ni la derivada existen.

Tenga en mente que la derivada de $y = f(x)$ en x no es otra cosa que un límite, a saber

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Aunque podemos interpretar la derivada como una función que da la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, esta interpretación sólo es una conveniencia geométrica que nos ayuda a entender su significado. El límite anterior puede existir independientemente de cualquier consideración geométrica. Como veremos después, existen otras interpretaciones útiles.

Tecnología

Muchas calculadoras gráficas tienen un dispositivo que permite estimar la derivada de una función en un punto. Con la calculadora TI-83 se emplea el comando "nDeriv", en el que debemos proporcionar la función, la variable y el valor de la variable (separados por comas) con el siguiente formato:

"nDeriv" (función, variable, valor de la variable).

Por ejemplo, la derivada de $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$ en $x = 1$ se estima en la figura 10.9. Así, $f'(1) \approx 0.866$.

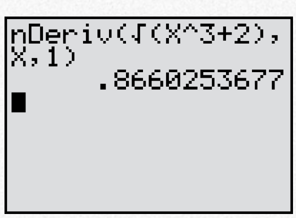


FIGURA 10.9 Derivada numérica.

Por otra parte, podemos usar el procedimiento del "límite del cociente de diferencia" para calcular esta derivada. Para usar el recurso tabular de una calculadora gráfica, podemos indicar $f(x)$ como Y_1. Entonces, para Y_2 damos la siguiente forma del cociente de diferencia:

$$(Y_1(1 + X) - Y_1(1))/X.$$

(Aquí la x desempeña la función de h.) La figura 10.10 muestra una tabla para Y_2 cuando x se aproxima a 0, tanto por la izquierda como por la derecha. Esta tabla sugiere fuertemente que $f'(1) \approx 0.866$.

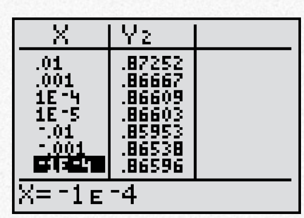


FIGURA 10.10 Límite de un cociente de diferencia cuando $x \to 0$.

Ejercicio 10.1

En los problemas 1 y 2 se da una función f y un punto P sobre su gráfica.

a. *Encuentre la pendiente de la recta secante PQ para cada punto $Q = (x, f(x))$, cuyo valor x está dado en la tabla. Redondee sus respuestas a cuatro decimales.*

b. *Use sus resultados de la parte (a) para calcular la pendiente de la recta tangente en P.*

1. $f(x) = x^3 + 3, P = (2, 11)$.

valor x de Q	3	2.5	2.2	2.1	2.01	2.001
m_{PQ}						

2. $f(x) = e^{2x}, P = (0, 1)$.

valor x de Q	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
m_{PQ}						

En los problemas del 3 al 18 emplee la definición de la derivada para encontrarla en cada caso.

3. $f'(x)$ si $f(x) = x$.

4. $f'(x)$ si $f(x) = 4x - 1$.

5. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = 4x + 7$.

6. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = -5x$.

7. $\dfrac{d}{dx}(5 - 4x)$.

8. $\dfrac{d}{dx}\left(2 - \dfrac{x}{4}\right)$.

9. $f'(x)$ si $f(x) = 3$.

10. $f'(x)$ si $f(x) = 7.01$.

11. $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 4x - 8)$.

12. y' si $y = 2x^2 + 5$.

13. $\dfrac{dp}{dq}$ si $p = 2q^2 + 5q - 1$.

14. $\dfrac{d}{dx}(x^2 - x - 3)$.

15. y' si $y = \dfrac{6}{x}$.

16. $\dfrac{dC}{dq}$ si $C = 7 + 2q - 3q^2$.

17. $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x + 2}$.

18. $g'(x)$ si $g(x) = \dfrac{2}{x - 3}$.

19. Encuentre la pendiente de la curva $y = x^2 + 4$ en el punto $(-2, 8)$.

20. Encuentre la pendiente de la curva $y = 2 - 3x^2$ en el punto $(1, -1)$.

21. Encuentre la pendiente de la curva $y = 4x^2 - 5$ cuando $x = 0$.

22. Encuentre la pendiente de la curva $y = \sqrt{x}$ cuando $x = 1$.

En los problemas del 23 al 28 encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

23. $y = x + 4$; $(3, 7)$.

24. $y = 2x^2 - 5$; $(-2, 3)$.

25. $y = 3x^2 + 3x - 4$; $(-1, -4)$.

26. $y = (x - 7)^2$; $(6, 1)$.

27. $y = \dfrac{3}{x - 1}$; $(2, 3)$.

28. $y = \dfrac{5}{1 - 3x}$; $(2, -1)$.

29. Operación bancaria Las ecuaciones pueden incluir derivadas de funciones. En un artículo sobre desregulación de la tasa de interés, Christofi y Agapos[1] resuelven la ecuación

$$r = \left(\frac{\eta}{1 + \eta}\right)\left(r_L - \frac{dC}{dD}\right)$$

para η (letra griega "eta"). Aquí r es la tasa de depósito pagada por los bancos comerciales, r_L es la tasa ganada por estos bancos, C es el costo administrativo de transformar los depósitos en activos que pagan rendimiento, D es el nivel de los depósitos de ahorro y η es la elasticidad de los depósitos con respecto a la tasa de depósito. Encuentre η.

En los problemas 30 y 31 utilice su calculadora gráfica para estimar las derivadas de las funciones en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

30. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x}$; $x = 1$, $x = -1$.

31. $f(x) = e^x(4x - 7)$; $x = 0$, $x = 1.5$.

[1] A. Christofi y A. Agapos, "Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification", *Review of Business and Economic Research,* XX, núm. 1 (1984), 39-49.

En los problemas 32 y 33 utilice el enfoque del "límite del cociente de diferencia" para estimar $f'(x)$ en los valores indicados de x. Redondee sus respuestas a tres decimales.

32. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+3}$; $x = 0.5$, $x = 10$.

33. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x^3 - 3}$; $x = 2$, $x = -4$.

---

34. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + x$ en el punto $(-2, 2)$. Grafique la curva y la recta tangente. Observe que la recta tangente es una buena aproximación a la curva cerca del punto de tangencia.

35. La derivada de $f(x) = x3 - x + 2$ es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Grafique f y su derivada f'. Observe que hay dos puntos sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal. Para los valores x de esos puntos, ¿cuáles son los valores correspondientes de $f'(x)$? ¿Por qué se esperan esos resultados? Observe los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva. En esos intervalos note que las rectas tangentes a la gráfica de f tienen pendientes positivas. Observe los intervalos en los que $f'(x)$ es negativa. En esos intervalos note que las rectas tangentes a la gráfica de f tienen pendientes negativas.

10.2 Reglas de diferenciación

OBJETIVO Desarrollar reglas de diferenciación básicas, fórmulas para la derivada de una constante, de x^n, de una constante por una función y de la suma y diferencia de funciones.

Quizá coincida con nosotros que la diferenciación directa de una función por medio de la definición de la derivada, puede ser un proceso tedioso. Por fortuna, existen reglas que permiten efectuar la diferenciación en forma por completo mecánica y eficiente. Con ellas se evita el uso directo de límites. Veremos algunas de esas reglas en esta sección.

Mostraremos primero que la derivada de una función constante es cero. Recuerde que la gráfica de una función constante, $f(x) = c$, es una línea horizontal (véase la fig. 10.11) que tiene pendiente nula en todo punto. Esto significa que $f'(x) = 0$, independientemente del valor de x. Como prueba formal de este resultado, aplicamos la definición de la derivada a $f(x) = c$:

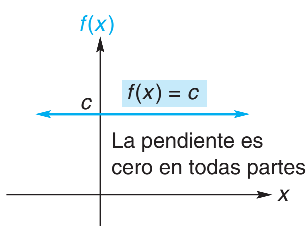


FIGURA 10.11 La pendiente de una función constante es 0.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Tenemos así nuestra primera regla:

Regla 1 Derivada de una constante

Si c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Esto es, la derivada de una función constante es cero.

EJEMPLO 1 Derivadas de funciones constantes

a. $\dfrac{d}{dx}(3) = 0$ porque 3 es una función constante.

b. Si $g(x) = \sqrt{5}$ entonces $g'(x) = 0$ porque g es una función constante. Por ejemplo, la derivada de g cuando $x = 4$ es $g'(4) = 0$.

c. Si $s(t) = (1{,}938{,}623)^{807.4}$, entonces $ds/dt = 0$.

La siguiente regla da una fórmula para la derivada de x elevada a una potencia constante, esto es, la derivada de $f(x) = x^n$. Una función de esta forma se llama **función potencia.** Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es una función potencia. Para demostrar la regla debemos desarrollar $(x + h)^n$. Recuerde que

$$(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

y

$$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

En ambos desarrollos los exponentes de x decrecen de izquierda a derecha, mientras que los de la h aumentan. Esto es cierto para el caso general $(x + h)^n$, donde n es un entero positivo. Puede demostrarse que

$$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + (\ \ )x^{n-2}h^2 + \cdots + (\ \ )xh^{n-1} + h^n,$$

donde los números faltantes dentro de los paréntesis son ciertas constantes. Esta fórmula se usa para probar la siguiente regla:

Regla 2 Derivada de x^n

Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},$$

siempre que x^{n-1} esté definida. Esto es, la derivada de una potencia constante de x es igual al exponente multiplicado por x elevada a una potencia menor en una unidad que la de la potencia dada.

Aunque la regla establece que n puede ser cualquier número real, nuestra demostración sólo es para enteros positivos. La demostración general no se da en este libro.

Demostración. Daremos una prueba para el caso en que n es un entero positivo. Si $f(x) = x^n$, al aplicar la definición de la derivada obtenemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x + h)^n - x^n}{h}.$$

De acuerdo con el desarrollo anterior de $(x + h)^n$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + (\ \ )x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h}.$$

En el numerador, la suma del primero y del último término es cero. Al dividir cada uno de los términos restantes entre h se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}[nx^{n-1} + (\ \ )x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}].$$

Cada término después del primero tiene h como factor y debe tender a 0 conforme $h \to 0$. Por tanto, $f'(x) = nx^{n-1}$.

EJEMPLO 2 Derivada de potencias de x

a. Según la regla 2, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$.

b. Si $f(x) = x = x^1$ entonces $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$. Así, la derivada de x con respecto a x es 1.

c. Si $f(x) = x^{-10}$, entonces $f'(x) = -10x^{-10-1} = -10x^{-11}$.

Cuando aplicamos una regla de diferenciación a una función, algunas veces la función debe reescribirse primero, de manera que tenga la forma apropiada para esa regla. Por ejemplo, para diferenciar $f(x) = \frac{1}{x^{10}}$ debemos escribirla primero en la forma f como $f(x) = x^{-10}$ y luego proceder como en el ejemplo 2(c).

EJEMPLO 3 Reescribir funciones en la forma x^n

a. Para diferenciar $y = \sqrt{x}$, escribimos $\sqrt{x}$ como $x^{1/2}$ de modo que tenga la forma x^n. Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b. Sea $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Para aplicar la regla 2, *debemos* reescribir $h(x)$ como $h(x) = x^{-3/2}$ de modo que tenga la forma x^n. Tenemos

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-3/2}) = -\frac{3}{2}x^{(-3/2)-1} = -\frac{3}{2}x^{-5/2}.$$

Advertencia En el ejemplo 3(b), no reescribimos $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ como $\frac{1}{x^{3/2}}$ y luego sólo derivamos el denominador; esto es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \neq \frac{1}{\frac{3}{2}x^{1/2}}.$$

Ahora que podemos decir inmediatamente que la derivada de x^3 es $3x^2$, surge la pregunta de qué hacer con la derivada de un *múltiplo* de x^3 tal como $5x^3$. Nuestra siguiente regla trata sobre la diferenciación de una constante por una función.

Regla 3 Regla del factor constante

Si f es una función diferenciable y c una constante, entonces $cf(x)$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

Esto es, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Demostración. Si $g(x) = cf(x)$, al aplicar la definición de la derivada de g se obtiene

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[c\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Pero $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es $f'(x)$; por lo que $g'(x) = cf'(x)$.

EJEMPLO 4 Diferenciación de una constante multiplicada por una función

Diferenciar las siguientes funciones.

a. $g(x) = 5x^3$.

Solución: aquí g es una constante (5) que multiplica a una función (x^3). Así

$$\frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= 5(3x^{3-1}) = 15x^2 \qquad \text{(Regla 2).}$$

b. $f(q) = \dfrac{13q}{5}$.

Solución:

Estrategia: primero reescribimos f como una constante por una función y luego aplicamos la regla 2.

Como $\dfrac{13q}{5} = \dfrac{13}{5}q$, f es el resultado de multiplicar la constante $\dfrac{13}{5}$ por la función q. Así,

$$f'(q) = \frac{13}{5}\frac{d}{dq}(q) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= \frac{13}{5} \cdot 1 = \frac{13}{5} \qquad \text{(Regla 2).}$$

c. $y = \dfrac{0.25}{\sqrt[5]{x^2}}$.

Solución: podemos expresar a y como una constante por una función:

$$y = 0.25 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = 0.25x^{-2/5}.$$

De aquí que,

$$y' = 0.25\frac{d}{dx}(x^{-2/5}) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= 0.25\left(-\frac{2}{5}x^{-7/5}\right) = -0.1x^{-7/5} \qquad \text{(Regla 2).}$$

Advertencia Para derivar $f(x) = (4x)^3$, usted puede estar tentado a escribir $f'(x) = 3(4x)^2$. **¡Esto es incorrecto!** ¿Ve usted por qué? La razón es que la regla 2 se aplica a una potencia de la variable x, **no** a una potencia de una expresión que incluya a x, tal como $4x$. Para aplicar nuestras reglas, debemos obtener una forma adecuada para $f(x)$. Podemos reescribir $(4x)^3$ como 4^3x^3 o $64x^3$. Así,

$$f'(x) = 64\frac{d}{dx}(x^3) = 64(3x^2) = 192x^2.$$

La regla siguiente se refiere a la derivada de sumas y diferencias de funciones.

Regla 4 Derivada de una suma o de una diferencia

Si f y g son funciones diferenciables, entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables y

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x).$$

Esto es, la derivada de la suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de sus derivadas.

Demostración. Para el caso de una suma, si $F(x) = f(x) + g(x)$, al aplicar la definición de la derivada de F se obtiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \qquad \text{(reagrupando)} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right].
\end{aligned}$$

Como el límite de una suma es la suma de los límites,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Pero esos dos límites son $f'(x)$ y $g'(x)$. Entonces,

$$F'(x) = f'(x) + g'(x).$$

La demostración para la derivada de una diferencia de dos funciones es similar a la anterior.

La regla 4 puede extenderse a la derivada de cualquier número de sumas y diferencias de funciones. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x) + h(x) + k(x)] = f'(x) - g'(x) + h'(x) + k'(x).$$

EJEMPLO 5 Diferenciación de sumas y diferencias de funciones

Diferenciar las siguientes funciones.

a. $F(x) = 3x^5 + \sqrt{x}$.

Principios en práctica 1

Diferenciación de sumas y diferencias de funciones

Si la función de ingreso para cierto producto es $r(q) = 50q - 0.3q^2$, determine la derivada de esta función, también conocida como el ingreso marginal.

Solución: aquí F es la suma de las dos funciones, $3x^5$ y $\sqrt{x}$. Por tanto,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{(Regla 4)}$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= 3(5x^4) + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{(Regla 2).}$$

b. $f(z) = \dfrac{z^4}{4} - \dfrac{5}{z^{1/3}}$.

Solución: para aplicar nuestras reglas, reescribimos $f(z)$ en la forma $f(z) = \frac{1}{4}z^4 - 5z^{-1/3}$. Como f es la diferencia de dos funciones,

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4}z^4\right) - \frac{d}{dz}(5z^{-1/3}) \qquad \text{(Regla 4)}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{d}{dz}(z^4) - 5\frac{d}{dz}(z^{-1/3}) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= \frac{1}{4}(4z^3) - 5\left(-\frac{1}{3}z^{-4/3}\right) \qquad \text{(Regla 2)}$$

$$= z^3 + \frac{5}{3}z^{-4/3}.$$

c. $y = 6x^3 - 2x^2 + 7x - 8$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^3) - \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$= 6\frac{d}{dx}(x^3) - 2\frac{d}{dx}(x^2) + 7\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$= 6(3x^2) - 2(2x) + 7(1) - 0$$

$$= 18x^2 - 4x + 7.$$

En los ejemplos 6 y 7 necesitamos reescribir la función dada en una forma en la que se apliquen nuestras reglas.

EJEMPLO 6 Evaluación de una derivada

Encontrar la derivada de $f(x) = 2x(x^2 - 5x + 2)$ *cuando* $x = 2$.

Solución: multiplicamos y luego diferenciamos cada término.

$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 4x.$$

$$f'(x) = 2(3x^2) - 10(2x) + 4(1)$$

$$= 6x^2 - 20x + 4,$$

$$f'(2) = 6(2)^2 - 20(2) + 4 = -12.$$

EJEMPLO 7 Determinación de una ecuación de una recta tangente

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{3x^2 - 2}{x}$$

cuando $x = 1$.

Solución:

Estrategia: primero encontramos $\frac{dy}{dx}$, que da la pendiente de la recta tangente en cualquier punto. Al evaluar $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$, obtenemos la pendiente de la recta tangente requerida. Luego determinamos la coordenada y del punto sobre la curva cuando $x = 1$. Finalmente, sustituimos la pendiente y ambas coordenadas del punto en la forma punto-pendiente para obtener la ecuación de la recta tangente.

Reescribimos y como una diferencia de dos funciones,

$$y = \frac{3x^2}{x} - \frac{2}{x} = 3x - 2x^{-1}.$$

Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = 3(1) - 2[(-1)x^{-2}] = 3 + \frac{2}{x^2}.$$

La pendiente de la recta tangente a la curva cuando $x = 1$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 3 + \frac{2}{1^2} = 5.$$

Para encontrar la coordenada y del punto sobre la curva en $x = 1$, sustituimos este valor de x en la ecuación de la *curva*. Esto da como resultado

$$y = \frac{3(1)^2 - 2}{1} = 1.$$

De aquí que el punto $(1, 1)$ está tanto sobre la curva como sobre la recta tangente. Entonces, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = 5(x - 1).$$

En la forma pendiente-ordenada al origen, tenemos

$$y = 5x - 4.$$

Advertencia Para obtener el valor de y del punto en la curva cuando $x = 1$, sustituimos en la ecuación de la *curva*, ¡no en la fórmula de la derivada!

Ejercicio 10.2

En los problemas del 1 al 74 diferencie las funciones.

1. $f(x) = 5$.
2. $f(x) = (\frac{11}{13})^{4/5}$.
3. $y = x^6$.
4. $f(x) = x^{21}$.
5. $y = x^{80}$.
6. $y = x^{6.1}$.
7. $f(x) = 9x^2$.
8. $y = 4x^3$.
9. $g(w) = 4w^5$.
10. $v(x) = x^e$.
11. $y = \frac{2}{3}x^4$.
12. $f(p) = \sqrt{3}p^4$.

13. $f(t) = \frac{t^9}{18}$.

14. $y = \frac{x^3}{3}$.

15. $f(x) = x + 3$.

16. $f(x) = 3x - 2$.

17. $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$.

18. $f(x) = 7x^2 - 5x$.

19. $g(p) = p^4 - 3p^3 - 1$.

20. $f(t) = -13t^2 + 14t + 1$.

21. $y = -x^8 + x^5$.

22. $y = -8x^4 + \ln 2$.

23. $y = -13x^3 + 14x^2 - 2x + 3$.

24. $V(r) = r^8 - 7r^6 + 3r^2 + 1$.

25. $f(x) = 2(13 - x^4)$.

26. $f(s) = 5(s^4 - 3)$.

27. $g(x) = \frac{13 - x^4}{3}$.

28. $f(x) = \frac{5(x^4 - 6)}{2}$.

29. $h(x) = 4x^4 + x^3 - \frac{9x^2}{2} + 8x$.

30. $f(x) = -3x^2 + \frac{9}{2}x + 2$.

31. $f(x) = \frac{3x^4}{10} + \frac{7}{3}x^3$.

32. $p(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{2x}{3}$.

33. $f(x) = x^{7/2}$.

34. $f(x) = 2x^{-14/5}$.

35. $y = x^{3/4} + 2x^{5/3}$.

36. $y = 5x^3 - x^{-2/5}$.

37. $y = 11\sqrt{x}$.

38. $y = \sqrt[3]{x^2}$.

39. $f(r) = 6\sqrt[3]{r}$.

40. $y = 4\sqrt[8]{x^2}$.

41. $f(x) = x^{-4}$.

42. $f(s) = 3s^{-2}$.

43. $f(x) = x^{-3} + x^{-5} - 2x^{-6}$.

44. $f(x) = 100x^{-3} + 10x^{1/2}$.

45. $y = \frac{1}{x}$.

46. $f(x) = \frac{2}{x^3}$.

47. $y = \frac{8}{x^5}$.

48. $y = \frac{1}{4x^5}$.

49. $g(x) = \frac{4}{3x^3}$.

50. $y = \frac{3}{2x^6}$.

51. $f(t) = \frac{1}{2t}$.

52. $g(x) = \frac{7}{9x}$.

53. $f(x) = \frac{x}{7} + \frac{7}{x}$.

54. $H(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}$.

55. $f(x) = -9x^{1/3} + 5x^{-2/5}$.

56. $f(z) = 3z^{1/4} - 12^2 - 8z^{-3/4}$.

57. $q(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$.

58. $f(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$.

59. $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

60. $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

61. $y = x^2\sqrt{x}$.

62. $f(x) = x^3(3x^2)$.

63. $f(x) = x(3x^2 - 10x + 7)$.

64. $f(x) = x^3(3x^6 - 5x^2 + 4)$.

65. $f(x) = x^3(3x)^2$.

66. $f(x) = \sqrt{x}(5 - 6x + 3\sqrt[4]{x})$.

67. $v(x) = x^{-2/3}(x + 5)$.

68. $f(x) = x^{3/5}(x^2 + 7x + 11)$.

69. $f(q) = \frac{4q^3 + 7q - 4}{q}$.

70. $f(w) = \frac{w - 5}{w^5}$.

71. $f(x) = (x + 1)(x + 3)$.

72. $f(x) = x^2(x - 2)(x + 4)$.

73. $w(x) = \frac{x^2 + x^3}{x^2}$.

74. $f(x) = \frac{7x^3 + x}{12\sqrt{x}}$.

Para cada curva en los problemas del 75 al 78 encuentre las pendientes en los puntos indicados.

75. $y = 3x^2 + 4x - 8$; $(0, -8), (2, 12), (-3, 7)$.

76. $y = 5 - 6x - 2x^3$; $(0, 5), (\frac{3}{2}, -\frac{43}{4}), (-3, 77)$.

77. $y = 4$; cuando $x = -4, x = 7, x = 22$.

78. $y = 2x - 3\sqrt{x}$; cuando $x = 1, x = 16, x = 25$.

En los problemas del 79 al 82 encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

79. $y = 4x^2 + 5x + 6$; $(1, 15)$.

80. $y = \frac{1 - x^2}{5}$; $(4, -3)$.

81. $y = \frac{2}{x^2}$; $(1, 2)$.

82. $y = -\sqrt[3]{x}$; $(8, -2)$.

83. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = 3 + x - 5x^2 + x^4$$

cuando $x = 0$.

84. Repita el problema 83 para la curva

$$y = \frac{\sqrt{x}(2 - x^2)}{x}$$

cuando $x = 4$.

85. Encuentre todos los puntos sobre la curva

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 - x^2$$

en los que la recta tangente es horizontal.

86. Repita el problema 85 para la curva

$$y = \frac{x^5}{5} - x + 1.$$

87. Encuentre todos los puntos sobre la curva

$$y = x^2 - 5x + 3$$

en los que la pendiente es 1.

88. Repita el problema 87 para la curva

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x + 4.$$

89. Si $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, evalúe la expresión

$$\frac{x - 1}{2x\sqrt{x}} - f'(x).$$

90. **Economía** Eswaran y Kotwal[2] estudian economías agrarias en las que hay dos tipos de trabajadores, permanentes y eventuales. Los trabajadores permanentes son empleados que tienen contratos a largo plazo y pueden recibir prestaciones como vacaciones y atención médica. Los trabajadores eventuales son empleados por día y efectúan trabajos menores y rutinarios como desherbado, recolección y trillado. La diferencia z en el costo del valor presente de contratar a un trabajador permanente y a uno eventual está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c,$$

donde w_p y w_c son los salarios de trabajo permanente y eventual, respectivamente, b es una constante y w_p es una función de w_c. Eswaran y Kotwal afirman que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b)\left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b}\right].$$

Verifique esta afirmación.

91. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 3x$ en el punto $(2, 2)$. Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por $(2, 2)$ y parece ser tangente a la curva.

92. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en el punto $(1, 1)$. Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por $(1, 1)$ y parece ser tangente a la curva.

[2] M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economies", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 162-177.

10.3 La derivada como una razón de cambio

OBJETIVO Explicar la tasa instantánea de cambio de una función por medio de la velocidad e interpretar la derivada como una tasa instantánea de cambio. Desarrollar el concepto "marginal", que se utiliza con frecuencia en administración y economía.

Hemos dado como interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Históricamente, una aplicación muy importante de la derivada implica el movimiento de un objeto viajando en línea recta. Esto nos da una manera conveniente de interpretar la derivada como una *razón de cambio.*

Para denotar el cambio en una variable x, por lo común, se usa el símbolo Δx (léase "delta x"). Por ejemplo, si x cambia de 1 a 3, entonces el cambio en x es $\Delta x = 3 - 1 = 2$. El nuevo valor de x $(= 3)$ es el viejo valor más el cambio, o $1 + \Delta x$. De manera similar, si t se incrementa en Δt, el nuevo valor es $t + \Delta t$. Usaremos la notación Δ en el análisis siguiente.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de la recta numérica de la figura 10.12 de acuerdo con la ecuación

$$s = f(t) = t^2,$$

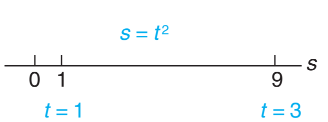


FIGURA 10.12 Movimiento a lo largo de una recta numérica.

donde s es la posición del objeto en el tiempo t. Esta ecuación se llama *ecuación de movimiento* y f se llama ***función de posición.*** Suponga que t está en segundos y s en metros. En $t = 1$, la posición es $s = f(1) = 1^2 = 1$, y en $t = 3$ la posición es $s = f(3) = 3^2 = 9$. En este intervalo de 2 segundos el objeto tuvo un cambio de posición, o *desplazamiento,* de $9 - 1 = 8$ metros y la *velocidad promedio* (v_{prom}) del objeto se define como

$$v_{\text{prom}} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{longitud intervalo de tiempo}} \tag{1}$$

$$= \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s}.$$

Decir que la velocidad promedio es de 4 m/s de $t = 1$ a $t = 3$, significa que *en promedio,* la posición del objeto cambia 4 m hacia la derecha cada segundo durante ese intervalo de tiempo. Sean Δs *y* Δt los cambios en los valores s y t, respectivamente. Entonces la velocidad promedio está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4 \text{ m/s} \qquad (\text{en el intervalo } t = 1 \text{ a } t = 3).$$

La razón $\Delta s/\Delta t$ se llama también **razón de cambio promedio de s con respecto a t** en el intervalo de $t = 1$ *a* $t = 3$.

Ahora, consideremos que el intervalo de tiempo sea de sólo 1 segundo (esto es, $\Delta t = 1$). Entonces, para el intervalo *más corto* de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t = 2$, tenemos $f(2) = 2^2 = 4$, por lo que

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{\Delta t} = \frac{4 - 1}{1} = 3 \text{ m/s}.$$

Con mayor generalidad, en el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$, el objeto se mueve de la posición $f(1)$ a la posición $f(1 + \Delta t)$. Su desplazamiento es entonces $f(1 + \Delta t) - f(1)$:

$$\Delta s = f(1 + \Delta t) - f(1).$$

Como el intervalo de tiempo tiene una duración Δt, la velocidad promedio del objeto está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}.$$

Si Δt se considerase cada vez más pequeño, la velocidad promedio en el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$ sería cercana a lo que podríamos llamar la *velocidad instantánea* en el tiempo $t = 1$, esto es, la velocidad en un *punto* en el tiempo ($t = 1$), en oposición a la velocidad en un *intervalo* de tiempo. Para algunos valores representativos de Δt entre 0.1 y 0.001, obtenemos las velocidades promedio anotadas en la tabla 10.2, que usted puede verificar.

TABLA 10.2

Duración del intervalo Δt	**Intervalo de tiempo,** $t = 1$ **a** $t = 1 + \Delta t$	**Velocidad promedio,** $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$
0.1	$t = 1$ a $t = 1.1$	2.1 m/s
0.07	$t = 1$ a $t = 1.07$	2.07 m/s
0.05	$t = 1$ a $t = 1.05$	2.05 m/s
0.03	$t = 1$ a $t = 1.03$	2.03 m/s
0.01	$t = 1$ a $t = 1.01$	2.01 m/s
0.001	$t = 1$ a $t = 1.001$	2.001 m/s

La tabla sugiere que conforme la duración del intervalo de tiempo se aproxima a cero, la velocidad promedio tiende al valor de 2 m/s. En otras palabras, cuando Δt tiende a 0, $\Delta s/\Delta t$ tiende 2 m/s. Definimos el límite de la velocidad promedio cuando $\Delta t \to 0$, como la **velocidad instantánea** (o simplemente la **velocidad**), v, en el tiempo $t = 1$. Se llama también la **razón de cambio instantánea** de s con respecto a t, en $t = 1$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{prom}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}.$$

Si pensamos en Δt como h, el límite a la derecha es simplemente la derivada de s con respecto a t en $t = 1$. Así, la velocidad instantánea del objeto en $t = 1$ es ds/dt en $t = 1$. Como $s = t^2$ y

$$\frac{ds}{dt} = 2t,$$

la velocidad en $t = 1$ es

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1} = 2(1) = 2 \text{ m/s},$$

lo que confirma nuestra conclusión anterior.

En resumen, si $s = f(t)$ es la función posición de un objeto que se mueve en línea recta, la velocidad promedio del objeto en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

y la velocidad en el tiempo t está dada por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

EJEMPLO 1 Determinación de la velocidad promedio y la velocidad

Supóngase que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta numérica está dada por $s = f(t) = 3t^2 + 5$, donde t está en segundos y s en metros.

a. *Encontrar la velocidad promedio en el intervalo* [10, 10.1].

b. *Encontrar la velocidad cuando $t = 10$.*

Solución:

a. Se tiene aquí, $t = 10$ y $\Delta t = 10.1 - 10 = 0.1$. Tenemos

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(10 + 0.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{f(10.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{311.03 - 305}{0.1} = \frac{6.03}{0.1} = 60.3 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

b. La velocidad v en el tiempo t está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t.$$

Cuando $t = 10$, la velocidad es

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=10} = 6(10) = 60 \text{ m/s}.$$

Observe que la velocidad promedio en el intervalo [10, 10.1] es cercana a la velocidad en $t = 10$. Esto era de esperarse porque la duración del intervalo es pequeña.

Nuestro análisis de la razón de cambio de s con respecto a t se aplica a *cualquier* función $y = f(x)$. Así, podemos enunciar lo siguiente:

Si $y = f(x)$, entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \text{tasa promedio de cambio} \\ \text{de } y \text{ con respecto a } x \\ \text{en el intervalo de } x \text{ a} \\ x + \Delta x \end{cases}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \text{tasa instantánea de cambio} \\ \text{de } y \text{ con respecto a } x. \end{cases} \tag{2}$$

Como la razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ en un punto es una derivada, es también la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de $y = f(x)$ en ese punto. Por conveniencia, a la razón de cambio instantánea la llamamos simplemente **razón de cambio.** La interpretación de una derivada como una razón de cambio es extremadamente importante.

Interpretemos ahora el significado de la razón de cambio de y con respecto a x. De la ecuación (2), si Δx (un cambio en x) es próximo a 0, entonces $\Delta y/\Delta x$ es cercano a dy/dx. Esto es,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x.} \tag{3}$$

Esto es, si x cambia en Δx, entonces el cambio en y, Δy, es aproximadamente dy/dx por el cambio en x. En particular,

si x cambia en 1, una estimación del cambio en y es $\dfrac{dy}{dx}$.

Principios en práctica 1

Estimación de ΔP por medio de dP/dp

Suponga que la utilidad, P, obtenida por medio de la venta de cierto producto a un precio de p por unidad, está dada por $P = f(p)$ y la tasa de cambio de esa utilidad con respecto al cambio en el precio es $\frac{dP}{dp} = 5$ en $p = 25$. Estime el cambio en la utilidad P, si el precio cambia de 25 a 25.5.

EJEMPLO 2 Estimación de Δy por medio de dy/dx

Suponga que $y = f(x)$ *y* $\frac{dy}{dx} = 8$ *cuando* $x = 3$. *Estimar el cambio en* y *si* x *cambia de* 3 *a* 3.5.

Solución: tenemos $dy/dx = 8$ y $\Delta x = 3.5 - 3 = 0.5$. El cambio en y está dado por Δy, entonces de (3),

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x = 8(0.5) = 4.$$

Observamos que como $\Delta y = f(3.5) - f(3)$, tenemos $f(3.5) = f(3) + \Delta y$. Por ejemplo, si $f(3) = 5$, entonces $f(3.5)$ puede estimarse como $5 + 4 = 9$.

Principios en práctica 2

Determinación de una razón de cambio

La posición de un objeto que se lanza hacia arriba a una velocidad de 16 pies/s desde una altura de 0 pies está dada por $y(t) = 16t - 16t^2$. Determine la tasa de cambio de y con respecto a t, y evalúela cuando $t = 0.5$. Utilice su calculadora gráfica para graficar $y(t)$. Utilice la gráfica para interpretar el comportamiento del objeto cuando $t = 0.5$.

EJEMPLO 3 Determinación de una razón de cambio

Encontrar la razón de cambio de $y = x^4$ *con respecto a* x *y evaluarla cuando* $x = 2$ *y cuando* $x = -1$. *Interpretar los resultados.*

Solución: la razón de cambio es

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3.$$

Cuando $x = 2$, $dy/dx = 4(2)^3 = 32$. Esto significa que si x aumenta una cantidad pequeña, y crece aproximadamente 32 veces esa cantidad. O en términos más sencillos, decimos que y está creciendo 32 veces más rápido que x. Cuando $x = -1$, entonces $dy/dx = 4(-1)^3 = -4$. El significado del signo menos en -4 es que y está *decreciendo* a un ritmo 4 veces superior al aumento de x.

EJEMPLO 4 Razón de cambio del precio con respecto a la cantidad

Sea $p = 100 - q^2$ *la función de demanda del producto de un fabricante. Encontrar la razón de cambio del precio* p *por unidad con respecto a la cantidad* q. *¿Qué tan rápido está cambiando el precio con respecto a* q *cuando* $q = 5$? *Suponga que* p *está en dólares.*

Solución: la razón de cambio de p con respecto a q es dp/dq.

$$\frac{dp}{dq} = \frac{d}{dq}(100 - q^2) = -2q.$$

Así,

$$\left.\frac{dp}{dq}\right|_{q=5} = -2(5) = -10.$$

Esto significa que cuando se demandan 5 unidades, un *incremento* de una unidad extra demandada corresponde a una disminución de aproximadamente \$10 en el precio por unidad, que los consumidores están dispuestos a pagar.

EJEMPLO 5 Razón de cambio de volumen

Un globo esférico está siendo inflado. Encontrar la razón de cambio de su volumen con respecto a su radio. Evalúe esta razón de cambio cuando el radio es de 2 pies.

Solución: la fórmula para el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. La razón de cambio de V con respecto a r es

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2.$$

Cuando $r = 2$ pies, la razón de cambio es

$$\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=2} = 4\pi(2)^2 = 16\pi\,\frac{\text{pies}^3}{\text{pies}}.$$

Esto significa que cuando el radio es de 2 pies, al cambiar el radio en 1 pie, el volumen cambiará aproximadamente 16π pies^3 .

EJEMPLO 6 Razón de cambio de la matrícula

Un sociólogo estudia varios programas que pueden ayudar en la educación de niños de edad preescolar en cierta ciudad. El sociólogo cree que x años después de iniciado un programa particular, $f(x)$ miles de niños estarán matriculados, donde

$$f(x) = \frac{10}{9}(12x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 12.$$

¿A qué razón cambiará la matrícula, (a) después de 3 años de iniciado el programa y (b) después de 9 años?

Solución: razón de cambio de $f(x)$ es

$$f'(x) = \frac{10}{9}(12 - 2x).$$

a. Después de 3 años la razón de cambio es

$$f'(3) = \frac{10}{9}[12 - 2(3)] = \frac{10}{9}\cdot 6 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

Así, la matrícula estará creciendo entonces a razón de $6\frac{2}{3}$ miles de niños por año.

b. Después de 9 años la razón de cambio es

$$f'(9) = \frac{10}{9}[12 - 2(9)] = \frac{10}{9}[-6] = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}.$$

Así, la matrícula estará *disminuyendo* entonces a razón de $6\frac{2}{3}$ miles de niños por año.

Aplicaciones de la razón de cambio a la economía

La **función de costo total** de un fabricante, $c = f(q)$, nos da el costo total c de producir y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama **costo marginal.** Así,

$$\text{costo marginal} = \frac{dc}{dq}.$$

Por ejemplo, suponga que $c = f(q) = 0.1q^2 + 3$ es una función de costo, donde c está en dólares y q en libras. Entonces,

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q.$$

El costo marginal cuando se producen 4 libras es dc/dq evaluado cuando $q = 4$:

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=4} = 0.2(4) = 0.80.$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 1 libra, desde 4 hasta 5 libras, entonces el cambio en el costo es aproximadamente de \$0.80. Esto es, la libra adicional cuesta casi \$0.80. En general, *interpretamos el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional producida.* [El costo real de producir una libra adicional más allá de 4 es $f(5) - f(4) = 5.5 - 4.6 = \$0.90$.]

Si c es el costo total de producir q unidades de un producto, entonces el **costo promedio por unidad** $\bar{c}$ es

$$\bar{c} = \frac{c}{q}. \tag{4}$$

Por ejemplo, si el costo total de 20 unidades es de \$100, entonces el costo promedio por unidad es $\bar{c} = 100/20 = \$5$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (4) por q obtenemos,

$$c = q\bar{c}.$$

Esto es, el costo total es el producto del número de unidades producidas multiplicado por el costo promedio unitario.

EJEMPLO 7 Costo marginal

Si la ecuación del costo promedio de un fabricante es

$$\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q},$$

encontrar la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 *unidades?*

Solución:

Estrategia: la función de costo marginal es la derivada de la función de costo total c. Por lo que primero encontramos c, multiplicando $\bar{c}$ por q.

Tenemos

$$\begin{aligned} c &= q\bar{c} \\ &= q\left[0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}\right]. \\ c &= 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 5q + 5000. \end{aligned}$$

Al diferenciar c, obtenemos la función de costo marginal:

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dq} &= 0.0001(3q^2) - 0.02(2q) + 5(1) + 0\\ &= 0.0003q^2 - 0.04q + 5.\end{aligned}$$

El costo marginal cuando se producen 50 unidades es

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=50} = 0.0003(50)^2 - 0.04(50) + 5 = 3.75.$$

Si c está en dólares y la producción se incrementa en 1 unidad, de $q = 50$ a $q = 51$, entonces el costo de la unidad adicional es aproximadamente de \$3.75. Si la producción se incrementa en $\frac{1}{3}$ de unidad desde $q = 50$, el costo de la producción adicional es aproximadamente de $(\frac{1}{3})(3.75) = \$1.25$.

Supongamos que $r = f(q)$ es la **función de ingreso total** para un fabricante. La ecuación $r = f(q)$ establece que el valor total de un dólar recibido al vender q unidades de un producto es r. El **ingreso marginal** se define como la razón de cambio del valor total recibido, con respecto al número total de unidades vendidas. Por consiguiente, el ingreso marginal es solamente la derivada de r con respecto a q:

$$\text{ingreso marginal} = \frac{dr}{dq}.$$

El ingreso marginal indica la rapidez a la que el ingreso cambia con respecto a las unidades vendidas. Lo interpretamos como el *ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción.*

EJEMPLO 8 Ingreso marginal

Supóngase que un fabricante vende un producto a \$2 por unidad. Si se venden q unidades, el ingreso total está dado por

$$r = 2q.$$

La función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}(2q) = 2,$$

que es una función constante. Entonces, el ingreso marginal es igual a 2 sin importar el número de unidades vendidas. Esto es lo que esperaríamos, ya que el fabricante recibe \$2 por cada unidad vendida.

Razones de cambio relativas y porcentuales

Para la función de ingreso total del ejemplo 8, $r = f(q) = 2q$, se tiene

$$\frac{dr}{dq} = 2.$$

Esto significa que el ingreso está cambiando a razón de \$2 por unidad, sin importar el número de unidades vendidas. Aunque ésta es una información valiosa, puede ser más significativa cuando se compara con la r misma. Por ejemplo, si $q = 50$, entonces $r = 2(50) = \$100$. Así, la razón de cambio del ingreso es $2/100 = 0.02$ **de r**. Por otra parte, si $q = 5000$, entonces $r = 2(5000) = \$10{,}000$, y la razón de cambio de r *es* $2/10{,}000 = 0.0002$ ***de r.*** Aunque r cambia a la misma razón en cada nivel, al compararla con r misma, esta razón es relativamente menor cuando $r = 10{,}000$ que cuando $r = 100$. Considerando el cociente

$$\frac{dr/dq}{r},$$

tenemos un medio de comparar la razón de cambio de r con r misma. Esta razón se llama *razón de cambio relativa* de r. Ya vimos antes que la razón de cambio relativa cuando $q = 50$ es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{100} = 0.02,$$

y cuando $q = 5000$, es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{10{,}000} = 0.0002.$$

Multiplicando las razones relativas por 100 obtenemos las *razones de cambio porcentuales.* La razón de cambio porcentual cuando $q = 50$, es $(0.02)(100) = 2\%$; cuando $q = 5000$, es $(0.0002)(100) = 0.02\%$. Así, por ejemplo, si se vende una unidad adicional a 50, el ingreso aumenta aproximadamente en 2%.

En general, para cualquier función f, tenemos la siguiente definición:

Definición

La ***razón de cambio relativa*** de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

La ***razón de cambio porcentual*** de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100.$$

■ ***Principios en práctica 3***

Razones de cambio relativa y porcentual

El volumen V de un recipiente en forma de cápsula con altura cilíndrica de 4 pies y radio r está dada por

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2.$$

Determine las tasas de cambio relativa y porcentual del volumen con respecto al radio, cuando el radio es de 2 pies.

EJEMPLO 9 Razones de cambio relativa y porcentual

Determinar las razones de cambio relativa y porcentual de

$$y = f(x) = 3x^2 - 5x + 25$$

cuando $x = 5$.

Solución: aquí

$$f'(x) = 6x - 5.$$

Como $f'(5) = 6(5) - 5 = 25$ y $f(5) = 3(5)^2 - 5(5) + 25 = 75$, la razón de cambio relativa de y cuando $x = 5$ es

$$\frac{f'(5)}{f(5)} = \frac{25}{75} \approx 0.333.$$

Al multiplicar 0.333 por 100 se obtiene la razón de cambio porcentual: $(0.333)(100) = 33.3\%$.

Ejercicio 10.3

1. Suponga que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta es $s = f(t) = t^3 + 2t$, donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ para el intervalo $[1, 1 + \Delta t]$, donde Δt está dado en la tabla siguiente:

Δt	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$						

Con base en sus resultados estime la velocidad cuando $t = 1$. Verifique sus cálculos usando diferenciación.

2. Si $y = f(x) = \sqrt{2x + 5}$, encuentre la razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[3, 3 + \Delta x]$, donde Δx está dado en la tabla siguiente:

Δx	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta y/\Delta x$						

Con base en sus resultados estime la razón de cambio de y con respecto a x cuando $x = 3$.

En cada uno de los problemas del 3 al 8 se da una función de posición, donde t está en segundos y s en metros.

a. *Encuentre la posición en el valor dado de t.*
b. *Encuentre la velocidad promedio para el intervalo dado.*
c. *Encuentre la velocidad en el valor dado de t.*

3. $s = t^2 - 3t$; $[4, 4.5]$; $t = 4$.

4. $s = \frac{1}{2}t + 1$; $[2, 2.1]$; $t = 2$.

5. $s = 2t^3 + 6$; $[1, 1.02]$; $t = 1$.

6. $s = -3t^2 + 2t + 1$; $[1, 1.25]$; $t = 1$.

7. $s = t^4 - 2t^3 + t$; $[2, 2.1]$; $t = 2$.

8. $s = t^4 - t^{5/2}$; $[0, \frac{1}{4}]$; $t = 0$.

9. Electricidad La corriente i en un resistor como función de la potencia P desarrollada en el resistor, está dada por $i = 2.6\sqrt{P}$. Encuentre la razón de cambio de i con respecto a P cuando $P = 4$.

10. Física El volumen V de cierto gas varía con la presión p de acuerdo con la ecuación $p = 150/V$. Encuentre la razón de cambio de p con respecto a V cuando $V = 5$.

11. Ingreso-educación Los sociólogos han estudiado la relación entre el ingreso y el número de años de educación en miembros de un grupo urbano particular. Ellos encontraron que una persona con x años de educación, antes de buscar empleo regular puede esperar recibir un ingreso anual medio de y dólares anuales, donde

$$y = 5x^{5/2} + 5900, \quad 4 \leq x \leq 16.$$

Encuentre la razón de cambio del ingreso con respecto al número de años de educación. Evalúela cuando $x = 9$.

12. Encuentre la razón de cambio del área A de un círculo con respecto a su radio r si

$$A = \pi r^2.$$

Evalúela cuando $r = 7$ pulgadas.

13. Temperatura de la piel La temperatura aproximada T de la piel en términos de la temperatura T_e del medio ambiente está dada por

$$T = 32.8 + 0.27(T_e - 20),$$

donde T y T_e están en grados Celsius.[3] Encuentre la razón de cambio de T con respecto a T_e.

14. Biología El volumen V de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ donde r es el radio. Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto al radio cuando $r = 6.5 \times 10^{-4}$ centímetros.

En los problemas del 15 al 20 se dan funciones de costo, donde c es el costo de producir q unidades de un producto. Para cada caso encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal para el valor o valores dados de q?

15. $c = 500 + 10q$; $q = 100$.

16. $c = 5000 + 6q$; $q = 36$.

17. $c = 0.3q^2 + 2q + 850$; $q = 3$.

18. $c = 0.1q^2 + 3q + 2$; $q = 3$.

19. $c = q^2 + 50q + 1000$; $q = 15, q = 16, q = 17$.

20. $c = 0.03q^3 - 0.6q^2 + 4.5q + 7700$; $q = 10, q = 20, q = 100$.

[3] R. W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

En los problemas del 21 al 24, $\bar{c}$ representa el costo promedio por unidad, que es una función del número q de unidades producidas. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores indicados de q.

21. $\bar{c} = 0.01q + 5 + \dfrac{500}{q}$; $q = 50$, $q = 100$.

22. $\bar{c} = 2 + \dfrac{1000}{q}$; $q = 25$, $q = 235$.

23. $\bar{c} = 0.00002q^2 - 0.01q + 6 + \dfrac{20{,}000}{q}$; $q = 100$, $q = 500$.

24. $\bar{c} = 0.001q^2 - 0.3q + 40 + \dfrac{7000}{q}$; $q = 10$, $q = 20$.

En los problemas del 25 al 28, r representa el ingreso total y es una función del número q de unidades vendidas. Encuentre la función de ingreso marginal y el ingreso marginal para los valores indicados de q.

25. $r = 0.7q$; $q = 8$, $q = 100$, $q = 200$.

26. $r = q(15 - \frac{1}{30}q)$; $q = 5$, $q = 15$, $q = 150$.

27. $r = 250q + 45q^2 - q^3$; $q = 5$, $q = 10$, $q = 25$.

28. $r = 2q(30 - 0.1q)$; $q = 10$, $q = 20$.

29. Fábrica de medias La función de costo total de una fábrica de medias es estimada por Dean[4] como

$$c = -10{,}484.69 + 6.750q - 0.000328q^2,$$

donde q es la producción en docenas de pares y c el costo total. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 5000$.

30. Planta de energía La función de costo total para una planta de energía eléctrica es estimada por Nordin[5] como

$$c = 32.07 - 0.79q + 0.02142q^2 - 0.0001q^3,$$

$$20 \leq q \leq 90,$$

donde q es la producción total en 8 horas (como porcentaje de la capacidad) y c el costo total en dólares del combustible. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 70$.

31. Concentración urbana Suponga que las 100 ciudades más grandes de Estados Unidos en 1920 se clasificaron de acuerdo con su extensión (áreas de las ciudades). Según Lotka,[6] la siguiente relación se cumple de manera aproximada:

$$PR^{0.93} = 5{,}000{,}000.$$

Aquí, P es la población de la ciudad con la clasificación R respectiva. Esta relación se llama *ley de la concentración urbana* para 1920. Despeje P en términos de R y luego encuentre qué tan rápido cambia la población con respecto a la clasificación.

32. Depreciación Según el método de depreciación lineal, el valor v de cierta máquina después de t años está dado por

$$v = 75{,}000 - 12{,}500t,$$

donde $0 \leq t \leq 10$. ¿Qué tan rápido cambia v con respecto a t cuando $t = 2$, $t = 3$ en cualquier momento?

33. Polilla de invierno En Nueva Escocia se llevó a cabo un estudio de la polilla de invierno (adaptado de Embree).[7] Las larvas de la polilla caen al pie de los árboles huéspedes a una distancia de x pies de la base del árbol, la densidad de larvas (número de larvas por pie cuadrado de suelo) fue de y, donde

$$y = 59.3 - 1.5x - 0.5x^2, \quad 1 \leq x \leq 9.$$

a. ¿Con qué rapidez cambia la densidad de larvas con respecto a la distancia desde la base del árbol cuando $x = 6$?

b. ¿Para qué valor de x la densidad de larvas decrece a razón de 6 larvas por pie cuadrado por pie?

34. Función de costo Para la función de costo

$$c = 0.4q^2 + 4q + 5,$$

encuentre la razón de cambio de c con respecto a q cuando $q = 2$. Además, ¿qué valor tiene $\Delta c/\Delta q$ en el intervalo $[2, 3]$?

En los problemas del 35 al 40 encuentre (a) la razón de cambio y con respecto a x, y (b) la razón de cambio relativa de y. En el valor dado de x encuentre (c) la razón de cambio de y, (d) la razón de cambio relativa de y, y (e) la razón de cambio porcentual de y.

35. $y = f(x) = x + 4$; $x = 5$.

36. $y = f(x) = 5 - 2x$; $x = 3$.

37. $y = 3x^2 + 7$; $x = 2$.

38. $y = 2 - x^2$; $x = 0$.

39. $y = 8 - x^3$; $x = 1$.

40. $y = x^2 + 3x - 4$; $x = -1$.

[4] J. Dean, "Statistical Cost Functions of a Hosiery Mill", *Studies in Business Administration*, XI, núm. 4 (Chicago: University of Chicago Press, 1941).

[5] J. A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves", *Econometrica*, 15 (1947), 231-235.

[6] A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956).

[7] D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

41. Función de costo Para la función de costo

$$c = 0.2q^2 + 1.2q + 4,$$

¿qué tan rápido cambia c con respecto a q cuando $q = 5$? Determine la razón de cambio porcentual de c con respecto a q cuando $q = 5$.

42. Materia orgánica/diversidad de especies En un análisis reciente de las aguas de mares poco profundos, Odum[8] afirma que en tales aguas la materia orgánica total y (en miligramos por litro) es una función de la diversidad x de las especies (en número de especies por mil individuos). Si $y = 100/x$, ¿con qué rapidez estará cambiando la materia orgánica total con respecto a la diversidad de especies cuando $x = 10$? ¿Cuál es la razón de cambio cuando $x = 10$?

43. Ingreso Para cierto fabricante, el ingreso r obtenido al vender q unidades de un producto está dado por

$$r = 30q - 0.3q^2.$$

(a) ¿Qué tan rápido cambia r con respecto a q? (b) Cuando $q = 10$, encuentre la razón de cambio relativo de r, y (c) encuentre la razón de cambio porcentual de r, al porcentaje más cercano.

44. Ingreso Repita el problema 43 para la función de ingreso dada por $r = 20q - 0.1q^2$ y $q = 100$.

45. Peso de una rama El peso de una rama de árbol está dado por $W = 2t^{0.432}$, donde t es el tiempo. Encuentre la razón de cambio relativa de W con respecto a t.

46. Respuesta a una descarga eléctrica Se realizó un experimento[9] psicológico para analizar la respuesta humana a descargas eléctricas (estímulos). Las personas recibieron descargas eléctricas de varias intensidades. La respuesta R a una descarga de intensidad I (en microamperes) debía ser un número que indicase la magnitud percibida relativa a la de una descarga “estándar”. A la descarga estándar se le asignó una magnitud de 10. Dos grupos de personas fueron objeto del estudio bajo condiciones ligeramente diferentes. Las respuestas R_1 y R_2 de los grupos primero y segundo a una descarga de intensidad I fueron

$$R_1 = \frac{I^{1.3}}{1855.24}, \quad 800 \le I \le 3500,$$

y

$$R_2 = \frac{I^{1.3}}{1101.29}, \quad 800 \le I \le 3500.$$

a. Para cada grupo, determine la razón de cambio relativa de la respuesta con respecto a la intensidad.
b. ¿Cómo son entre sí esos cambios?
c. En general, si $f(x) = C_1x^n$ y $g(x) = C_zx^n$, donde C_1 y C_2 son constantes, ¿cómo son entre sí las razones de cambio relativas de f y g?

47. Costo Un fabricante de bicicletas de montaña determinó que cuando se producen 20 bicicletas por día, el costo promedio es de \$150 y el costo marginal de \$125. Con base en esta información, determine el costo total de producir 21 bicicletas por día.

48. Costos marginal y promedio Suponga que la función de costo para cierto producto es $c = f(q)$. Si la razón de cambio relativa de c (con respecto a q) es $\frac{1}{q}$, demuestre que la función de costo marginal y la función de costo promedio son iguales.

En los problemas 49 y 50 utilice la capacidad de su calculadora gráfica para derivar de manera numérica.

49. Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000,$$

donde c está en dólares, encuentre el costo marginal cuando se producen 10 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.

50. La población P de una ciudad dentro de t años está dada por

$$P = 20{,}000e^{0.03t}.$$

Encuentre la razón de cambio de la población con respecto al tiempo t dentro de cuatro años. Redondee su respuesta al entero más cercano.

[8]H. T. Odum, “Biological Circuits and the Marine System of Texas”, en *Pollution and Marine Biology*, ed. T. A. Olsen y F. J. Burgess (Nueva York: Interscience Publishers, 1967).

[9]H. Babkoff, “Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses”, *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.

OBJETIVO Relacionar diferenciabilidad con continuidad.

10.4 Diferenciabilidad y continuidad

En la próxima sección haremos uso de la siguiente relación importante entre diferenciabilidad y continuidad:

Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Para establecer este resultado, supondremos que f es diferenciable en a. Entonces $f'(a)$ existe y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

Consideremos el numerador $f(a+h)-f(a)$ cuando $h \to 0$. Tenemos,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h\\ &= f'(a)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

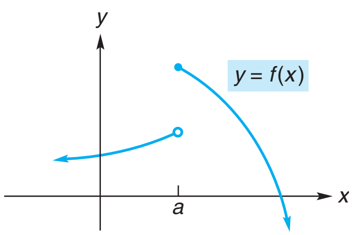


FIGURA 10.13 f no es continua en a, de modo que f no es diferenciable en a.

Entonces, $\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] = 0$. Esto significa que $f(a+h)-f(a)$ tiende a cero cuando $h \to 0$. En consecuencia,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a).$$

Como se estableció en la sección 9.4, esta condición significa que f es continua en a. Esto demuestra que f es continua en a cuando f es diferenciable ahí. Con mayor sencillez, decimos que **diferenciabilidad en un punto implica continuidad en ese punto.**

Si una función no es continua en un punto, no puede tener derivada ahí. Por ejemplo, la función de la figura 10.13 es discontinua en a. La curva no tiene tangente en ese punto, por lo que la función no es diferenciable ahí.

EJEMPLO 1 Continuidad y diferenciabilidad

a. Sea $f(x) = x^2$. Su derivada $2x$ está definida para toda x, por lo que $f(x) = x^2$ debe ser continua para toda x.

b. La función $f(p) = \dfrac{1}{2p}$ no es continua en $p = 0$, porque f no está definida ahí. La derivada no existe en $p = 0$.

El recíproco del enunciado de que la diferenciabilidad implica continuidad es *falso*. Esto es, es falso que continuidad implique diferenciabilidad. En el ejemplo 2 veremos una función que es continua en un punto, pero no es diferenciable ahí.

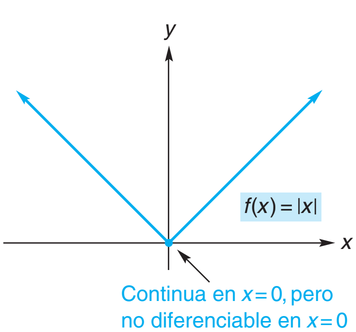


FIGURA 10.14 Continuidad no implica diferenciabilidad.

EJEMPLO 2 Continuidad no implica diferenciabilidad

La función $y = f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ (véase la fig. 10.14). Como lo mencionamos en la sección 10.1, no existe recta tangente en $x = 0$. Entonces la derivada no existe ahí. Esto demuestra que la continuidad *no* implica diferenciabilidad.

OBJETIVO Determinar derivadas por medio de la aplicación de las reglas del producto y del cociente, y desarrollar los conceptos de propensión marginal al consumo y propensión marginal al ahorro.

10.5 Reglas del producto y del cociente

La ecuación $F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$, expresa $F(x)$ como un producto de dos funciones: $x^2 + 3x$ y $4x + 5$. Para encontrar $F'(x)$ usando sólo nuestras reglas previas, multiplicamos primero las funciones. Luego diferenciamos el resultado, término por término:

$$F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5) = 4x^3 + 17x^2 + 15x,$$
$$F'(x) = 12x^2 + 34x + 15. \tag{1}$$

Sin embargo, en muchos problemas que implican diferenciar un producto de funciones, la multiplicación no es tan sencilla como en este caso. En ocasiones, ni siquiera es práctico intentarlo. Por fortuna, existe una regla para diferenciar un producto, y tal regla evita tener que efectuar las multiplicaciones. Como la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas, podría pensarse que la derivada de un producto de dos funciones es el producto de sus derivadas. **No** es éste el caso, como lo muestra la regla siguiente.

Regla 5 Regla del producto

Si f y g son funciones diferenciables, entonces el producto fg es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Esto es, la derivada del producto de dos funciones es la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera.

$$\frac{d}{dx}(\text{producto}) = (\text{primera})\begin{pmatrix}\text{derivada de}\\ \text{la segunda}\end{pmatrix} + (\text{segunda})\begin{pmatrix}\text{derivada de}\\ \text{la primera}\end{pmatrix}.$$

Demostración. Si $F(x) = f(x)g(x)$, entonces por la definición de la derivada de F,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Ahora empleamos un "truco". Sumando y restando $f(x + h)g(x)$ en el numerador, tenemos

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x)}{h}.$$

Al ordenar nuevamente los términos obtenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)] + [f(x+h)g(x) - f(x)g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Como hemos supuesto que f y g son diferenciables, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

y

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x).$$

La diferenciabilidad de f implica que f es continua, y de la sección 9.4,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Entonces,

$$F'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del producto

Si $F(x) = (x^2+3x)(4x+5)$, encontrar $F'(x)$.

Solución: consideraremos a F como un producto de dos funciones:

$$F(x) = \underbrace{(x^2+3x)}_{f(x)}\underbrace{(4x+5)}_{g(x)}.$$

Entonces podemos aplicar la regla del producto:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \\ &= \underbrace{(x^2+3x)}_{\text{Primera}} \underbrace{\frac{d}{dx}(4x+5)}_{\substack{\text{Derivada}\\ \text{de la}\\ \text{segunda}}} + \underbrace{(4x+5)}_{\text{Segunda}} \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2+3x)}_{\substack{\text{Derivada}\\ \text{de la}\\ \text{primera}}} \\ &= (x^2+3x)(4) + (4x+5)(2x+3) \\ &= 12x^2 + 34x + 15 \qquad \text{(simplificando).} \end{aligned}$$

Esto concuerda con nuestro resultado previo [véase la ecuación (1)]. Aunque aquí la regla del producto no parece tener mucha utilidad práctica, veremos que hay ocasiones en que es práctico usarla.

Advertencia Vale la pena repetir que la derivada del producto de dos funciones **no** es el producto de sus derivadas. Por ejemplo, $\frac{d}{dx}(x^2+3x) = 2x+3$ y $\frac{d}{dx}(4x+5) = 4$, pero del ejemplo 1,

$$\frac{d}{dx}[(x^2+3x)(4x+5)] = 12x^2+34x+15 \neq (2x+3)4.$$

Principios en práctica 1
Aplicación de la regla del producto

Un puesto de tacos por lo general vende 225 tacos por día a \$2 cada uno. Una investigación de un estudiante de administración le dice que por cada \$0.15 de disminución en el precio, el puesto vendería 20 tacos más por día. La función de ingreso para el puesto de tacos es $R(x) = (2 - 0.15x)(225 + 20x)$, donde x es el número de disminuciones de \$0.15 en el precio. Determine $\frac{dR}{dx}$.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla del producto

Si $y = (x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$, *encontrar* dy/dx.

Solución: al aplicar la regla del producto se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = (x^{2/3} + 3)\frac{d}{dx}(x^{-1/3} + 5x) + (x^{-1/3} + 5x)\frac{d}{dx}(x^{2/3} + 3)$$

$$= (x^{2/3} + 3)(-\tfrac{1}{3}x^{-4/3} + 5) + (x^{-1/3} + 5x)(\tfrac{2}{3}x^{-1/3})$$

$$= \tfrac{25}{3}x^{2/3} + \tfrac{1}{3}x^{-2/3} - x^{-4/3} + 15.$$

De manera alterna, podríamos haber encontrado la derivada sin la regla del producto, determinando primero el producto $(x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$, y diferenciando luego el resultado término por término.

EJEMPLO 3 Diferenciación de un producto de tres factores

Si $y = (x + 2)(x + 3)(x + 4)$, *encontrar* y'.

Solución:

Estrategia: nos gustaría utilizar la regla del producto, pero ésta se aplica sólo cuando se tienen *dos* factores. Considerando los primeros dos factores como uno solo, podemos tratar a y como un producto de dos funciones:

$$y = [(x + 2)(x + 3)](x + 4).$$

La regla del producto da

$$y' = [(x + 2)(x + 3)]\frac{d}{dx}(x + 4) + (x + 4)\frac{d}{dx}[(x + 2)(x + 3)]$$

$$= [(x + 2)(x + 3)](1) + (x + 4)\frac{d}{dx}[(x + 2)(x + 3)].$$

Aplicando de nuevo la regla del producto, tenemos

$$y' = (x + 2)(x + 3) + (x + 4)\left[(x + 2)\frac{d}{dx}(x + 3) + (x + 3)\frac{d}{dx}(x + 2)\right]$$

$$= (x + 2)(x + 3) + (x + 4)[(x + 2)(1) + (x + 3)(1)].$$

Después de simplificar, obtenemos

$$y' = 3x^2 + 18x + 26.$$

Otras dos maneras de encontrar la derivada son:

1. Multiplicar los primeros dos factores de y para obtener

$$y = (x^2 + 5x + 6)(x + 4),$$

y luego aplicar la regla del producto.

2. Multiplicar los tres factores para obtener

$$y = x^3 + 9x^2 + 26x + 24,$$

y luego diferenciar término por término.

EJEMPLO 4 Empleo de la regla del producto para encontrar la pendiente

Encontrar la pendiente de la gráfica de $f(x) = (7x^3 - 5x + 2)(2x^4 + 7)$ cuando $x = 1$.

Solución:

Estrategia: encontramos la pendiente evaluando la derivada en $x = 1$. Ya que f es un producto de dos funciones, podemos encontrar la derivada usando la regla del producto.

Tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (7x^3 - 5x + 2)\frac{d}{dx}(2x^4 + 7) + (2x^4 + 7)\frac{d}{dx}(7x^3 - 5x + 2) \\ &= (7x^3 - 5x + 2)(8x^3) + (2x^4 + 7)(21x^2 - 5). \end{aligned}$$

Como debemos calcular $f'(x)$ cuando $x = 1$, *no hay necesidad de simplificar $f'(x)$ antes de evaluarla.* Al sustituir en $f'(x)$, se obtiene

$$f'(1) = 4(8) + 9(16) = 176.$$

La regla del producto (y la regla del cociente que sigue) no debe aplicarse cuando está disponible un método más directo y eficiente.

Por lo general, no empleamos la regla del producto cuando es obvio un procedimiento más sencillo. Por ejemplo, si $f(x) = 2x(x + 3)$, entonces es más rápido escribir $f(x) = 2x^2 + 6x$, donde $f'(x) = 4x + 6$. De la misma manera, no empleamos usualmente la regla del producto para diferenciar $y = 4(x^2 - 3)$. Como el 4 es un factor constante, según la regla del factor constante sabemos que $y' = 4(2x) = 8x$.

La regla siguiente se usa para diferenciar un *cociente* de dos funciones.

Principios en práctica 2

Derivada de un producto sin la regla del producto

Un hora después de que se le dan a un persona x miligramos de cierto fármaco, el cambio en la temperatura del cuerpo, $T(x)$, en grados Fahrenheit, está dado de manera aproximada por $T(x) = x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$. La razón a la cual T cambia con respecto al tamaño de la dosis x, $T'(x)$, se denomina *sensibilidad* del cuerpo a la dosis. Determine la sensibilidad cuando la dosis es de 1 miligramo. No utilice la regla del producto.

Regla 6 Regla del cociente

Si f y g son funciones diferenciables y $g(x) \neq 0$, entonces el cociente f/g es también diferenciable y

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Esto es, la derivada del cociente de dos funciones es el denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, todo ello dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(\text{cociente}) \\ &= \frac{(\text{denominador})\begin{pmatrix}\text{derivada del}\\ \text{numerador}\end{pmatrix} - (\text{numerador})\begin{pmatrix}\text{derivada del}\\ \text{denominador}\end{pmatrix}}{(\text{denominador})^2}. \end{aligned}$$

Demostración. Si $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces

$$F(x)g(x) = f(x).$$

Por la regla del producto,

$$F(x)g'(x) + g(x)F'(x) = f'(x).$$

Al despejar $F'(x)$, obtenemos

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)}.$$

Pero $F(x) = f(x)/g(x)$. Así,

$$F'(x) = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)}.$$

Al simplificar[10] se obtiene

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

EJEMPLO 5 Aplicación de la regla del cociente

Si $F(x) = \dfrac{4x^2 + 3}{2x - 1}$, *encontrar* $F'(x)$.

Solución:

Estrategia: consideramos a F como un cociente y aplicamos la regla del cociente.

Sea $f(x) = 4x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 1$. Entonces

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{\overbrace{(2x-1)}^{\text{Denominador}}\overbrace{\dfrac{d}{dx}(4x^2+3)}^{\text{Derivada de numerador}} - \overbrace{(4x^2+3)}^{\text{Numerador}}\overbrace{\dfrac{d}{dx}(2x-1)}^{\text{Derivada de denominador}}}{\underbrace{(2x-1)^2}_{\text{Cuadrado del denominador}}}$$

[10]Habrá observado que esta prueba supone la existencia de $F'(x)$. Sin embargo, esta regla puede demostrarse sin tal hipótesis.

$$= \frac{(2x - 1)(8x) - (4x^2 + 3)(2)}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 8x - 6}{(2x - 1)^2} = \frac{2(4x^2 - 4x - 3)}{(2x - 1)^2}.$$

Advertencia La derivada del cociente de dos funciones **no** es el cociente de sus derivadas. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 + 3}{2x - 1}\right) \neq \frac{\frac{d}{dx}(4x^2 + 3)}{\frac{d}{dx}(2x - 1)} = \frac{8x}{2}.$$

EJEMPLO 6 Transformar antes de diferenciar

Diferenciar $y = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x + 1}}$.

Solución:

Estrategia: para simplificar la diferenciación reescribimos la función de manera que ninguna fracción aparezca en el denominador.

Tenemos

$$y = \frac{1}{x + \dfrac{1}{x + 1}} = \frac{1}{\dfrac{x(x + 1) + 1}{x + 1}} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + x + 1)(1) - (x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \qquad \text{(regla del cociente)}$$

$$= \frac{(x^2 + x + 1) - (2x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x}{(x^2 + x + 1)^2} = -\frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Aunque una función puede tener la forma de un cociente, esto no implica necesariamente que se deba usar la regla del cociente para encontrar su derivada. El ejemplo siguiente ilustra situaciones representativas donde, si bien puede emplearse la regla del cociente, se dispone de un procedimiento más sencillo y eficiente.

EJEMPLO 7 Diferenciación de cocientes sin usar la regla del cociente

Diferenciar las funciones siguientes.

a. $f(x) = \dfrac{2x^3}{5}$.

Solución: reescribimos la función para tener $f(x) = \frac{2}{5}x^3$. Por la regla del factor constante,

$$f'(x) = \frac{2}{5}(3x^2) = \frac{6x^2}{5}.$$

b. $f(x) = \dfrac{4}{7x^3}$.

Solución: reescribimos la función para tener $f(x) = \frac{4}{7}(x^{-3})$. Entonces,

$$f'(x) = \frac{4}{7}(-3x^{-4}) = -\frac{12}{7x^4}.$$

c. $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{4x}$.

Solución: reescribimos la función en la forma $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5x^2 - 3x}{x}\right) = \dfrac{1}{4}(5x - 3)$. Por lo que,

$$f'(x) = \frac{1}{4}(5) = \frac{5}{4}.$$

Advertencia Para diferenciar $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$, podríamos intentar primero reescribir el cociente como $(x^2 - 2)^{-1}$. Sería un error hacer esto, ya que, por el momento, no tenemos una regla para diferenciar esa forma. En resumen, no hay elección, sino utilizar la regla del cociente. Sin embargo, en la sección siguiente, desarrollaremos una regla que nos permitirá diferenciar $(x^2 - 2)^{-1}$ de una manera directa y eficiente.

EJEMPLO 8 Ingreso marginal

Si la ecuación de la demanda del producto de un fabricante es

$$p = \frac{1000}{q + 5},$$

donde p está en dólares, encontrar la función de ingreso marginal y evaluarla cuando $q = 45$.

Solución:

Estrategia: primero debemos encontrar la función de ingreso. El ingreso r recibido por vender q unidades cuando el precio por unidad es p, está dado por

$$\textbf{ingreso} = (\textbf{precio})\,(\textbf{cantidad}), \quad \text{o} \quad \boldsymbol{r = pq}.$$

Usando la ecuación de demanda, expresaremos r sólo en términos de q. Luego diferenciaremos para encontrar la función de ingreso marginal, dr/dq.

La función de ingreso es

$$r = \left(\frac{1000}{q + 5}\right)q = \frac{1000q}{q + 5}.$$

Así, la función de ingreso marginal está dada por

$$\frac{dr}{dq} = \frac{(q+5)\frac{d}{dq}(1000q) - (1000q)\frac{d}{dq}(q+5)}{(q+5)^2}$$

$$= \frac{(q+5)(1000) - (1000q)(1)}{(q+5)^2} = \frac{5000}{(q+5)^2},$$

y

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=45} = \frac{5000}{(45+5)^2} = \frac{5000}{2500} = 2.$$

Esto significa que vender una unidad adicional por arriba de 45 resulta en aproximadamente \$2 más de ingreso.

Función de consumo

Una función que desempeña un papel importante en el análisis económico es la **función de consumo,** o $C = f(I)$ la que expresa una relación entre el ingreso nacional total, I, y el consumo nacional total, C. Por lo general, tanto I como C se expresan en miles de millones de dólares e I se restringe a cierto intervalo. La *propensión marginal al consumo* se define como la razón de cambio del consumo con respecto al ingreso, y es la derivada de C con respecto a I:

$$\text{Propensión marginal al consumo} = \frac{dC}{dI}.$$

Si suponemos que la diferencia entre el ingreso I y el consumo C es el ahorro S, entonces

$$S = I - C.$$

Al diferenciar ambos miembros de la ecuación con respecto a I obtenemos

$$\frac{dS}{dI} = \frac{d}{dI}(I) - \frac{d}{dI}(C) = 1 - \frac{dC}{dI}.$$

Definimos dS/dI como la **propensión marginal al ahorro.** Así, la propensión marginal al ahorro indica qué tan rápido cambia el ahorro con respecto al ingreso.

$$\begin{matrix}\text{Propensión marginal} \\ \text{al ahorro}\end{matrix} = 1 - \begin{matrix}\text{Propensión marginal} \\ \text{al consumo}\end{matrix}.$$

EJEMPLO 9 Determinación de las propensiones marginales al consumo y al ahorro

Si la función de consumo está dada por

$$C = \frac{5(2\sqrt{I^3} + 3)}{I + 10},$$

determinar la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I = 100$.

Solución:

$$\frac{dC}{dI} = 5\left[\frac{(I+10)\frac{d}{dI}(2I^{3/2}+3) - (2\sqrt{I^3}+3)\frac{d}{dI}(I+10)}{(I+10)^2}\right]$$

$$= 5\left[\frac{(I+10)(3I^{1/2}) - (2\sqrt{I^3}+3)(1)}{(I+10)^2}\right].$$

Cuando $I = 100$, la propensión marginal al consumo es

$$\left.\frac{dC}{dI}\right|_{I=100} = 5\left[\frac{1297}{12{,}100}\right] \approx 0.536.$$

La propensión marginal al ahorro cuando $I = 100$ es $1 - 0.536 = 0.464$. Esto significa que si un ingreso actual de $100,000 millones aumenta en $1000 millones, la nación consume aproximadamente el 53.6% (536/1000) y ahorra 46.4% (464/1000) de ese incremento.

Ejercicio 10.5

En los problemas del 1 al 48 diferencie las funciones.

1. $f(x) = (4x+1)(6x+3)$.

2. $f(x) = (3x-1)(7x+2)$.

3. $s(t) = (8-7t)(t^2-2)$.

4. $Q(x) = (5-2x)(x^2+1)$.

5. $f(r) = (3r^2-4)(r^2-5r+1)$.

6. $C(I) = (2I^2-3)(3I^2-4I+1)$.

7. $f(x) = x^2(2x^2-5)$.

8. $f(x) = 3x^3(x^2-2x+2)$.

9. $y = (x^2+3x-2)(2x^2-x-3)$.

10. $y = (2-3x+4x^2)(1+2x-3x^2)$.

11. $f(w) = (8w^2+2w-3)(5w^3+2)$.

12. $f(x) = (3x-x^2)(3-x-x^2)$.

13. $y = (x^2-1)(3x^3-6x+5) - 4(4x^2+2x+1)$.

14. $h(x) = 4(x^5-3) + 3(8x^2-5)(2x+2)$.

15. $f(p) = \frac{3}{2}(\sqrt{p}-4)(4p-5)$.

16. $g(x) = (\sqrt{x}-3x+1)(\sqrt[4]{x}-2\sqrt{x})$.

17. $y = 7 \cdot \frac{2}{3}$.

18. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$.

19. $y = (2x-1)(3x+4)(x+7)$.

20. $y = \dfrac{2x-3}{4x+1}$.

21. $f(x) = \dfrac{5x}{x-1}$.

22. $f(x) = \dfrac{-2x}{4-x}$.

23. $f(x) = \dfrac{3}{2x^6}$.

24. $f(x) = \dfrac{5(x^2-2)}{7}$.

25. $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

26. $h(w) = \dfrac{3w^2+5w-1}{w-3}$.

27. $h(z) = \dfrac{6-2z}{z^2-4}$.

28. $y = \dfrac{x^2-4x+2}{x^2+x+7}$.

29. $y = \dfrac{8x^2-2x+1}{x^2-5x}$.

30. $f(x) = \dfrac{x^3-x^2+1}{x^2+1}$.

31. $y = \dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-3x+2}$.

32. $F(z) = \dfrac{z^4+4}{3z}$.

33. $g(x) = \dfrac{1}{x^{100}+7}$.

34. $y = \dfrac{3}{7x^3}$.

35. $u(v) = \dfrac{v^5-8}{v}$.

36. $y = \dfrac{x-5}{8\sqrt{x}}$.

37. $y = \dfrac{3x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{x}}$.

38. $y = \dfrac{x^{0.3} - 2}{2x^{2.1} + 1}$.

39. $y = 7 - \dfrac{4}{x - 8} + \dfrac{2x}{3x + 1}$.

40. $q(x) = 13x^2 + \dfrac{x - 1}{2x + 3} - \dfrac{4}{x}$.

41. $y = \dfrac{x - 5}{(x + 2)(x - 4)}$.

42. $y = \dfrac{(9x - 1)(3x + 2)}{4 - 5x}$.

43. $s(t) = \dfrac{t^2 + 3t}{(t^2 - 1)(t^3 + 7)}$.

44. $f(s) = \dfrac{17}{s(5s^2 - 10s + 4)}$.

45. $y = 3x - \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x - 1}}{x - 2}$.

46. $y = 7 - 10x^2 + \dfrac{1 - \dfrac{7}{x^2 + 3}}{x + 2}$.

47. $f(x) = \dfrac{a - x}{a + x}$, donde a es una constante.

48. $f(x) = \dfrac{x^{-1} + a^{-1}}{x^{-1} - a^{-1}}$, donde a es una constante.

49. Encuentre la pendiente de la curva

$$y = (4x^2 + 2x - 5)(x^3 + 7x + 4)$$

en $(-1, 12)$.

50. Encuentre la pendiente de la curva

$$y = \frac{x^3}{x^4 + 1} \text{ en } (-1, -\tfrac{1}{2}).$$

En los problemas del 51 al 54 encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51. $y = \dfrac{6}{x - 1}$; $(3, 3)$.

52. $y = \dfrac{4x + 5}{x^2}$; $(-1, 1)$.

53. $y = (2x + 3)[2(x^4 - 5x^2 + 4)]$; $(0, 24)$.

54. $y = \dfrac{x + 1}{x^2(x - 4)}$; $(2, -\tfrac{3}{8})$.

En los problemas 55 y 56 determine la razón de cambio relativa de y con respecto a x, para el valor dado de x.

55. $y = \dfrac{x}{2x - 6}$; $x = 1$.

56. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$; $x = 5$.

57. Movimiento La función de posición de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s = \frac{2}{t^3 + 1},$$

donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la posición y la velocidad del objeto en $t = 1$.

58. Movimiento La función de posición de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s = \frac{t + 2}{t^2 + 12},$$

donde t está en segundos y s en metros. Encuentre el o los valores positivos de t para los cuales la velocidad del objeto es 0.

En los problemas del 59 al 62 cada ecuación representa una función de demanda para cierto producto, donde p denota el precio por unidad para q unidades. En cada caso, encuentre la función de ingreso marginal. Recuerde que ingreso $= pq$.

59. $p = 25 - 0.02q$.

60. $p = 500/q$.

61. $p = \dfrac{108}{q + 2} - 3$.

62. $p = \dfrac{q + 750}{q + 50}$.

63. Función de consumo Para Estados Unidos (1922-1942), la función de consumo se estimó por medio de la ecuación[11]

$$C = 0.672I + 113.1.$$

Encuentre la propensión marginal al consumo.

64. Función de consumo Repita el problema 63 si $C = 0.712I + 95.05$, para Estados Unidos en el periodo 1929-1941.[12]

[11] T. Haavelmo, "Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume", *Journal of the American Statistical Association*, XLII (1947), 105-122.

[12] Ibid.

En los problemas del 65 al 68 cada ecuación representa una función de consumo. Encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro para el valor dado de I.

65. $C = 2 + 2\sqrt{I}; \quad I = 16.$

66. $C = 6 + \frac{3I}{4} - \frac{\sqrt{I}}{3}; \quad I = 25.$

67. $C = \frac{16\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I} + 4}; \quad I = 36.$

68. $C = \frac{20\sqrt{I} + 0.5\sqrt{I^3} - 0.4I}{\sqrt{I} + 5}; \quad I = 100.$

69. Función de consumo Suponga que la función de consumo de un país está dada por

$$C = \frac{10\sqrt{I} + 0.7\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I}},$$

donde C e I están en miles de millones de dólares.

a. Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando el ingreso es de 25,000 millones de dólares.
b. Determine la razón de cambio relativa de C con respecto a I, cuando el ingreso es de 25,000 millones de dólares.

70. Propensiones marginales a consumir y a ahorrar Suponga que la función de ahorro de un país es

$$S = \frac{I - \sqrt{I} - 6}{\sqrt{I} + 2},$$

donde el ingreso nacional (I) y el ahorro nacional (S) se miden en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal del país a consumir y su propensión marginal al ahorro, cuando el ingreso nacional es de 125,000 millones [S*ugerencia:* puede ser útil factorizar primero el numerador].

71. Costo marginal Si la función de costo total de un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{q + 3} + 5000,$$

encuentre la función de costo marginal.

72. Costo marginal y costo promedio Dada la función de costo $c = f(q)$, demuestre que si $\frac{d}{dq}(\bar{c}) = 0$, entonces la función de costo marginal y la de costo promedio son iguales.

73. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes que tienen parásitos es y, donde

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}.$$

¿A qué razón está cambiando el número de huéspedes que tienen parásitos con respecto a la densidad de huéspedes cuando $x = 2$?

74. Acústica La persistencia del sonido en un recinto después de que la fuente del sonido se ha apagado se llama *reverberación*. El *tiempo de reverberación* RT del recinto, es el necesario para que el nivel de intensidad del sonido caiga a 60 decibeles. En el diseño acústico de un auditorio, puede utilizarse la fórmula siguiente para calcular el RT del recinto:[13]

$$\text{RT} = \frac{0.05V}{A + xV}.$$

Aquí, V es el volumen del recinto, A la absorción total de éste y x el coeficiente de absorción del aire. Suponiendo que A y x son constantes positivas, demuestre que la razón de cambio de RT con respecto al V siempre es positiva. Si el volumen total del recinto se incrementa en una unidad, ¿aumenta o disminuye el tiempo de reverberación?

75. Depredador-presa En un experimento[14] que estudiaba la relación depredador-presa, se determinó de manera estadística que el número de presas consumidas, y, por un depredador individual, es una función de la densidad x de presas (el número de presas por unidad de área), donde

$$y = \frac{0.7355x}{1 + 0.02744x}.$$

Determine la razón de cambio de las presas consumidas con respecto a su densidad.

76. Beneficios de seguridad social En un análisis de los beneficios de la seguridad social, Feldstein[15] diferencia una función de la forma

$$f(x) = \frac{a(1 + x) - b(2 + n)x}{a(2 + n)(1 + x) - b(2 + n)x},$$

donde a, b y n son constantes. Él determina que

$$f'(x) = \frac{-1(1 + n)ab}{[a(1 + x) - bx]^2(2 + n)}.$$

Verifique esto. [*Sugerencia:* por conveniencia, haga $2 + n = c$.]

[13] L. L. Doelle, *Environmental Acoustics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972).
[14] C. S. Hollin, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.
[15] M. Feldstein, "The Optimal Level of Social Security Benefits", *The Quarterly Journal of Economics*, C, núm. 2 (1985), 303-320.

77. Negocios El fabricante de un producto encontró que cuando se producen 20 unidades por día, el costo promedio es de \$150 y el costo marginal de \$125. ¿Cuál es la razón de cambio relativa del costo promedio con respecto a la cantidad, cuando $q = 20$?

78. Si y es el producto de tres funciones diferenciables, esto es,

$$y = f(x)g(x)h(x),$$

demuestre que dy/dx está dada por

$$f(x)g(x)h'(x) + f(x)g'(x)h(x) + f'(x)g(x)h(x).$$

79. Utilice el resultado del problema 78 para encontrar dy/dx si

$$y = (2x - 1)(x - 2)(x + 3).$$

OBJETIVO Introducir y aplicar la regla de la cadena, derivar la regla de la potencia como un caso especial de la regla de la cadena y desarrollar el concepto de producto del ingreso marginal como una aplicación de la regla de la cadena.

10.6 La regla de la cadena y la regla de la potencia

Nuestra siguiente regla, *la regla de la cadena*, es una de las más importantes para obtener derivadas. Implica una situación en la que y es una función de la variable u, pero u es una función de x y queremos encontrar la derivada de y con respecto a x. Por ejemplo, las ecuaciones

$$y = u^2 \quad \text{y} \quad u = 2x + 1$$

definen a y como una función de u y a u como una función de x. Si sustituimos u por $2x + 1$, en la primera ecuación, podemos considerar a y como función de x:

$$y = (2x + 1)^2.$$

Para encontrar dy/dx primero desarrollamos $(2x + 1)^2$:

$$y = 4x^2 + 4x + 1.$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 4.$$

En este ejemplo, puede verse que encontrar dy/dx efectuando primero una sustitución, puede ser bastante complicado. Por ejemplo, si hubiésemos tenido $y = u^{100}$ en vez de $y = u^2$, ni siquiera intentaríamos efectuar la sustitución. Por fortuna, la regla de la cadena nos permite manejar tales situaciones con facilidad.

Regla 7 Regla de la cadena

Si y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, entonces y es una función diferenciable de x, y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Podemos mostrar por qué la regla de la cadena es razonable considerando razones de cambio. Supongamos

$$y = 8u + 5 \quad \text{y} \quad u = 2x - 3.$$

Hagamos que x cambie en una unidad. ¿Cómo cambia u? Para responder esta pregunta, derivamos y encontramos que $du/dx = 2$. Pero, para *cada* cambio de una unidad en u hay un cambio en y de $dy/du = 8$. Por tanto, ¿cuál es el cambio en y si x cambia en una unidad; esto es, ¿qué valor tiene dy/dx? La respuesta es $8 \cdot 2$, lo cual es $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Así, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Ahora utilizaremos la regla de la cadena para volver a resolver el problema planteado al principio de esta sección. Si

$$y = u^2 \quad \text{y} \quad u = 2x + 1,$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= \frac{d}{du}(u^2) \cdot \frac{d}{dx}(2x+1)\\ &= (2u)2 = 4u.\end{aligned}$$

Reemplazando u por $2x + 1$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x+1) = 8x + 4,$$

que concuerda con nuestro resultado previo.

Principios en práctica 1
Uso de la regla de la cadena

Si un objeto se mueve de manera horizontal de acuerdo con $x = 6t$, en donde t está en segundos, y de manera vertical de acuerdo con $y = 4x^2$, determine su velocidad vertical $\frac{dy}{dt}$.

EJEMPLO 1 Uso de la regla de la cadena

a. *Si $y = 2u^2 - 3u - 2$ y $u = x^2 + 4$, encontrar dy/dx.*

Solución: por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= \frac{d}{du}(2u^2 - 3u - 2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+4)\\ &= (4u-3)(2x).\end{aligned}$$

Podemos escribir la respuesta sólo en términos de x, reemplazando u por $x^2 + 4$.

$$\frac{dy}{dx} = [4(x^2+4) - 3](2x) = [4x^2 + 13](2x) = 8x^3 + 26x.$$

b. *Si $y = \sqrt{w}$ y $w = 7 - t^3$, encontrar dy/dt.*

Solución: aquí y es una función de w y w es una función de t, por lo que podemos considerar a y como una función de t. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} &= \frac{d}{dw}(\sqrt{w}) \cdot \frac{d}{dt}(7 - t^3)\\ &= \left(\frac{1}{2}w^{-1/2}\right)(-3t^2) = \frac{1}{2\sqrt{w}}(-3t^2)\\ &= -\frac{3t^2}{2\sqrt{w}} = -\frac{3t^2}{2\sqrt{7-t^3}}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Uso de la regla de la cadena

Si $y = 4u^3 + 10u^2 - 3u - 7$ y $u = 4/(3x - 5)$, encontrar dy/dx cuando $x = 1$.

Solución: por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(4u^3 + 10u^2 - 3u - 7) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3x-5}\right)$$

$$= (12u^2 + 20u - 3) \cdot \frac{(3x - 5)\dfrac{d}{dx}(4) - 4\dfrac{d}{dx}(3x - 5)}{(3x - 5)^2}$$

$$= (12u^2 + 20u - 3) \cdot \frac{-12}{(3x - 5)^2}.$$

No reemplace simplemente x por 1 y deje su respuesta en términos de u.

No obstante que dy/dx está en términos de x y u, podemos evaluarla cuando $x = 1$, si determinamos el valor correspondiente de u. Cuando $x = 1$, tenemos

$$u = \frac{4}{3(1) - 5} = -2.$$

Por tanto,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = [12(-2)^2 + 20(-2) - 3] \cdot \frac{-12}{[3(1) - 5]^2}$$

$$= 5 \cdot (-3) = -15.$$

La regla de la cadena establece que si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

En realidad, la regla de la cadena se aplica a una composición de funciones porque

$$y = f(u) = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Así y, como función de x, es $f \circ g$. Esto significa que podemos utilizar la regla de la cadena para diferenciar una función cuando identificamos a la función como una composición. Sin embargo, primero debemos descomponer la función en sus partes componentes.

Por ejemplo, para diferenciar

$$y = (x^3 - x^2 + 6)^{100},$$

consideramos la función como una composición. Sea

$$y = f(u) = u^{100} \quad \text{y} \quad u = g(x) = x^3 - x^2 + 6.$$

Entonces $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100} = [g(x)]^{100} = f(g(x))$. Ahora que tenemos una composición, diferenciamos. Como $y = u^{100}$ y $u = x^3 - x^2 + 6$, por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (100u^{99})(3x^2 - 2x)$$

$$= 100(x^3 - x^2 + 6)^{99}(3x^2 - 2x).$$

Acabamos de utilizar la regla de la cadena para diferenciar $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100}$, que es una potencia de una *función* de x. La regla siguiente, llamada *regla de la potencia*, generaliza nuestro resultado y es un caso especial de la regla de la cadena.

Regla 8 Regla de la potencia

Si u es una función diferenciable de x y n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Demostración. Sea $y = u^n$. Como y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Pero $dy/du = nu^{n-1}$. Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx},$$

que es la regla de la potencia.

Otra manera de escribir la fórmula de la regla de la potencia es

$$\frac{d}{dx}([u(x)]^n) = n[u(x)]^{n-1}u'(x).$$

EJEMPLO 3 Uso de la regla de la potencia

Si $y = (x^3 - 1)^7$, *encontrar* y'.

Solución: como y es una potencia de una *función* de x, es aplicable la regla de la potencia. Si hacemos $u(x) = x^3 - 1$ y $n = 7$, tenemos

$$\begin{aligned} y' &= n[u(x)]^{n-1}u'(x) \\ &= 7(x^3 - 1)^{7-1}\frac{d}{dx}(x^3 - 1) \\ &= 7(x^3 - 1)^6(3x^2) = 21x^2(x^3 - 1)^6. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Uso de la regla de la potencia

Si $y = \sqrt[3]{(4x^2 + 3x - 2)^2}$, *encontrar* dy/dx *cuando* $x = -2$.

Solución: como $y = (4x^2 + 3x - 2)^{2/3}$, utilizamos la regla de la potencia con

$$u = 4x^2 + 3x - 2$$

y $n = \frac{2}{3}$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{(2/3)-1}\frac{d}{dx}(4x^2 + 3x - 2) \\ &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{-1/3}(8x + 3) \\ &= \frac{2(8x + 3)}{3\sqrt[3]{4x^2 + 3x - 2}}. \end{aligned}$$

Así,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \frac{2(-13)}{3\sqrt[3]{8}} = -\frac{13}{3}.$$

EJEMPLO 5 Uso de la regla de la potencia

Si $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$, *encontrar* $\dfrac{dy}{dx}$.

La técnica utilizada en el ejemplo 5 con frecuencia se utiliza cuando el numerador de un cociente es una constante y el denominador no.

Solución: aunque la regla del cociente puede emplearse aquí, un procedimiento más eficiente es tratar el miembro derecho como la potencia $(x^2 - 2)^{-1}$ y utilizar la regla de la potencia. Sea $u = x^2 - 2$. Entonces $y = u^{-1}$ y

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= nu^{n-1}\frac{du}{dx}\\ &= (-1)(x^2-2)^{-1-1}\frac{d}{dx}(x^2-2)\\ &= (-1)(x^2-2)^{-2}(2x)\\ &= -\frac{2x}{(x^2-2)^2}.\end{aligned}$$

En el ejemplo 5, la técnica de pasar el denominador al numerador, no se utiliza comúnmente cuando el numerador y el denominador de un cociente contienen variables. Por ejemplo, no escribiríamos

$$\frac{x^2+1}{x^2-2} \quad \text{como} \quad (x^2+1)(x^2-2)^{-1},$$

por la razón siguiente: al usar la regla del cociente en la primera forma, se obtiene una expresión que puede simplificarse con facilidad, pero al usar la regla del producto en la segunda forma, resulta una suma de términos con exponentes negativos que no se pueden simplificar con facilidad.

EJEMPLO 6 Diferenciación de una potencia de un cociente

Si $z = \left(\dfrac{2s+5}{s^2+1}\right)^4$, *encontrar* $\dfrac{dz}{ds}$.

Aquí, el problema es reconocer la forma básica de la función por diferenciar. En este caso es una potencia, no un cociente.

Solución: como z es una potencia de una función, utilizamos primero la regla de la potencia:

$$\frac{dz}{ds} = 4\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^{4-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right).$$

Ahora empleamos la regla del cociente:

$$\frac{dz}{ds} = 4\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^{3}\left[\frac{(s^2+1)(2)-(2s+5)(2s)}{(s^2+1)^2}\right].$$

Al simplificar, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dz}{ds} &= 4\cdot\frac{(2s+5)^3}{(s^2+1)^3}\left[\frac{-2s^2-10s+2}{(s^2+1)^2}\right]\\ &= -\frac{8(s^2+5s-1)(2s+5)^3}{(s^2+1)^5}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Diferenciación de un producto de potencias

Si $y = (x^2 - 4)^5(3x + 5)^4$, *encontrar* y'.

Solución: como y es un producto, aplicamos primero la regla del producto

$$y' = (x^2 - 4)^5 \frac{d}{dx}[(3x + 5)^4] + (3x + 5)^4 \frac{d}{dx}[(x^2 - 4)^5].$$

Empleamos ahora la regla de la potencia:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 - 4)^5[4(3x + 5)^3(3)] + (3x + 5)^4[5(x^2 - 4)^4(2x)] \\ &= 12(x^2 - 4)^5(3x + 5)^3 + 10x(3x + 5)^4(x^2 - 4)^4. \end{aligned}$$

Al diferenciar un producto en el que al menos un factor es una potencia, simplificar la derivada, por lo general, implica factorizar.

Para simplificar, primero eliminamos los factores comunes:

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^2 - 4)^4(3x + 5)^3[6(x^2 - 4) + 5x(3x + 5)] \\ &= 2(x^2 - 4)^4(3x + 5)^3(21x^2 + 25x - 24). \end{aligned}$$

Usualmente, la regla de la potencia se emplearía para diferenciar $y = [u(x)]^n$. Aunque una función como $y = (x^2 + 2)^2$ puede escribirse como $y = x^4 + 4x^2 + 4$, y diferenciarse con facilidad, este procedimiento no es práctico para una función como $y = (x^2 + 2)^{1000}$. Como $y = (x^2 + 2)^{1000}$ es de la forma $y = [u(x)]^n$, tenemos que

$$y' = 1000(x^2 + 2)^{999}(2x).$$

Producto del ingreso marginal

Usemos ahora lo que hemos aprendido del cálculo para desarrollar un concepto de importancia en el estudio de la economía. Supongamos que un fabricante emplea m personas para producir un total de q unidades de un producto por día. Podemos pensar que q es una función de m. Si r es el ingreso total que el fabricante recibe al vender esas unidades, entonces r también puede considerarse una función de m. Así, podemos ver a dr/dm como la razón de cambio del ingreso con respecto al número de empleados. La derivada dr/dm se llama **producto del ingreso marginal,** y es aproximadamente igual al cambio en el ingreso que resulta cuando un fabricante emplea un trabajador adicional.

EJEMPLO 8 Producto del ingreso marginal

Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades de un producto por día, donde

$$q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}}. \qquad (1)$$

Si la ecuación de demanda para el producto es $p = 900/(q + 9)$, *determinar el producto del ingreso marginal cuando* $m = 9$.

Solución: debemos encontrar dr/dm, donde r es el ingreso. Observe que por la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dr}{dq} \cdot \frac{dq}{dm}.$$

Así, debemos encontrar dr/dq y dq/dm cuando $m = 9$. Comenzamos con dr/dq. La función de ingreso está dada por

$$r = pq = \left(\frac{900}{q+9}\right)q = \frac{900q}{q+9}, \tag{2}$$

por lo que, por la regla del cociente,

$$\frac{dr}{dq} = \frac{(q+9)(900) - 900q(1)}{(q+9)^2} = \frac{8100}{(q+9)^2}.$$

Para evaluar esta expresión cuando $m = 9$, utilizamos primero la ecuación $q = 10m^2/\sqrt{m^2+19}$ para encontrar el valor correspondiente de q:

$$q = \frac{10(9)^2}{\sqrt{9^2+19}} = 81.$$

De aquí que,

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{m=9} = \left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=81} = \frac{8100}{(81+9)^2} = 1.$$

Ahora calculamos dq/dm. De las reglas del cociente y la potencia se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dm} &= \frac{d}{dm}\left(\frac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}}\right)\\ &= \frac{(m^2+19)^{1/2}\dfrac{d}{dm}(10m^2) - (10m^2)\dfrac{d}{dm}[(m^2+19)^{1/2}]}{[(m^2+19)^{1/2}]^2}\\ &= \frac{(m^2+19)^{1/2}(20m) - (10m^2)[\frac{1}{2}(m^2+19)^{-1/2}(2m)]}{m^2+19},\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\left.\frac{dq}{dm}\right|_{m=9} &= \frac{(81+19)^{1/2}(20\cdot 9) - (10\cdot 81)[\frac{1}{2}(81+19)^{-1/2}(2\cdot 9)]}{81+19}\\ &= 10.71.\end{aligned}$$

Una fórmula directa para obtener el producto del ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dq}{dm}\left(p + q\frac{dp}{dq}\right).$$

Por tanto, de la regla de la cadena,

$$\left.\frac{dr}{dm}\right|_{m=9} = (1)(10.71) = 10.71.$$

Esto significa que si se emplea a un décimo trabajador, el ingreso aumentará en aproximadamente \$10.71 por día.

Tecnología

En el ejemplo 8 el producto del ingreso marginal, dr/dm, se encontró utilizando la regla de la cadena. Otro método, que se adapta muy bien a las calculadoras gráficas, consiste en utilizar la sustitución para expresar r como una función de m y luego diferenciar de manera directa. Primero tomamos la ecuación (1) y sustituimos q en la función de ingreso, ecuación (2); esto nos da r en función de m. Los detalles son: en nuestro menú de funciones introducimos

$$Y_1 = 10X\text{^}2/\sqrt{(X\text{^}2 + 19)},$$
$$Y_2 = 900Y_1/(Y_1 + 9).$$

Y_2 expresa el ingreso en función del número de empleados. Por último, para encontrar el producto del ingreso marginal cuando $m = 9$, calculamos nDeriv(Y_2,X,9). Debe verificar que este método da (aproximadamente) el valor 10.71.

Ejercicio 10.6

En los problemas del 1 al 8 utilice la regla de la cadena.

1. Si $y = u^2 - 2u$ y $u = x^2 - x$, encontrar dy/dx.

2. Si $y = 2u^3 - 8u$ y $u = 7x - x^3$, encontrar dy/dx.

3. Si $y = \frac{1}{w^2}$ y $w = 2 - x$, encontrar dy/dx.

4. Si $y = \sqrt[3]{z}$ y $z = x^6 - x^2 + 1$, encontrar dy/dx.

5. Si $w = u^2$ y $u = \frac{t+1}{t-1}$, encontrar dw/dt cuando $t = 3$.

6. Si $z = u^2 + \sqrt{u} + 9$ y $u = 2s^2 - 1$, encontrar dz/ds cuando $s = -1$.

7. Si $y = 3w^2 - 8w + 4$ y $w = 2x^2 + 1$, encontrar dy/dx cuando $x = 0$.

8. Si $y = 3u^3 - u^2 + 7u - 2$ y $u = 5x - 2$, encontrar dy/dx cuando $x = 1$.

En los problemas del 9 al 52 encuentre y'.

9. $y = (3x + 2)^6$.

10. $y = (x^2 - 4)^4$.

11. $y = (5 - x^2)^3$.

12. $y = (x^2 - x)^3$.

13. $y = 2(x^3 - 8x^2 + x)^{100}$.

14. $y = \frac{(2x^2 + 1)^4}{2}$.

15. $y = (x^2 - 2)^{-3}$.

16. $y = (3x^2 - 5x)^{-10}$.

17. $y = 3(2x^2 - 3x - 1)^{-10/3}$.

18. $y = 4(7x - x^4)^{-3/2}$.

19. $y = \sqrt{5x^2 - x}$.

20. $y = \sqrt{3x^2 - 7}$.

21. $y = \sqrt[4]{2x - 1}$.

22. $y = \sqrt[3]{8x^2 - 1}$.

23. $y = 2\sqrt[5]{(x^3 + 1)^2}$.

24. $y = 3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$.

25. $y = \frac{6}{2x^2 - x + 1}$.

26. $y = \frac{3}{x^4 + 2}$.

27. $y = \frac{1}{(x^2 - 3x)^2}$.

28. $y = \frac{1}{(1 - x)^3}$.

29. $y = \frac{2}{\sqrt{8x - 1}}$.

30. $y = \frac{3}{(3x^2 - x)^{2/3}}$.

31. $y = \sqrt[3]{7x} + \sqrt[3]{7}x$.

32. $y = \sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

33. $y = x^2(x - 4)^5$.

34. $y = x(x + 4)^4$.

35. $y = 2x\sqrt{6x - 1}$.

36. $y = 2x\sqrt{1 - x}$.

37. $y = (x^2 + 2x - 1)^3(5x)$.

38. $y = x^2(x^3 - 1)^4$.

39. $y = (8x - 1)^3(2x + 1)^4$.

40. $y = (6x + 1)^7(2x - 3)^3$.

41. $y = \left(\frac{x - 7}{x + 4}\right)^{10}$.

42. $y = \left(\frac{2x}{x + 2}\right)^4$.

43. $y = \sqrt{\frac{x - 2}{x + 3}}$.

44. $y = \sqrt[3]{\frac{8x^2 - 3}{x^2 + 2}}$.

45. $y = \frac{2x - 5}{(x^2 + 4)^3}$.

46. $y = \frac{(2x + 3)^3}{x^2 + 4}$.

47. $y = \frac{(8x - 1)^5}{(3x - 1)^3}$.

48. $y = \sqrt{(x - 1)(x + 2)^3}$.

49. $y = 6(5x^2 + 2)\sqrt{x^4 + 5}$.

50. $y = 6 + 3x - 4x(7x + 1)^2$.

51. $y = 8t + \frac{t - 1}{t + 4} - \left(\frac{8t - 7}{4}\right)^2$.

52. $y = \frac{(4x^2 - 2)(8x - 1)}{(3x - 1)^2}$.

En los problemas 53 y 54 utilice las reglas del cociente y de la potencia para encontrar y'. No simplifique su respuesta.

53. $y = \frac{(2x + 1)(3x - 5)^2}{(x^2 - 7)^4}$.

54. $y = \frac{\sqrt{x + 2}(4x^2 - 1)^2}{9x - 3}$.

---

55. Si $y = (5u + 6)^3$ y $u = (x^2 + 1)^4$, encuentre dy/dx cuando $x = 0$.

56. Si $z = 2y^2 - 4y + 5$, $y = 6x - 5$, y $x = 2t$, encuentre dz/dt cuando $t = 1$.

57. Encuentre la pendiente de la curva $y = (x^2 - 7x - 8)^3$ en el punto $(8, 0)$.

58. Encuentre la pendiente de la curva $y = \sqrt{x + 1}$ en el punto $(8, 3)$.

En los problemas del 59 al 62 encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

59. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}$; $(3, 1)$.

60. $y = (2x + 3)^2$; $(-1, 1)$.

61. $y = \frac{\sqrt{7x + 2}}{x + 1}$; $(1, \frac{3}{2})$.

62. $y = \frac{-3}{(3x^2 + 1)^3}$; $(0, -3)$.

En los problemas 63 y 64 determine la razón de cambio porcentual de y con respecto a x para el valor dado de x.

63. $y = (x^2 + 9)^3; \quad x = 4.$

64. $y = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}; \quad x = -3.$

En los problemas del 65 al 68, q es el número total de unidades producidas por día por m empleados de un fabricante, y p es el precio de venta por unidad. En cada caso encuentre el producto del ingreso marginal para el valor dado de m.

65. $q = 2m, p = -0.5q + 20; \quad m = 5.$

66. $q = (200m - m^2)/20, p = -0.1q + 70; \quad m = 40.$

67. $q = 10m^2/\sqrt{m^2 + 9}, p = 525/(q + 3); \quad m = 4.$

68. $q = 100m/\sqrt{m^2 + 19}, p = 4500/(q + 10); \quad m = 9.$

69. Ecuación de demanda Suponga que $p = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$ es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante. (a) Encuentre la razón de cambio de p con respecto a q. (b) Calcule la razón de cambio relativa de p con respecto a q. (c) Determine la función de ingreso marginal.

70. Producto de ingreso marginal Si $p = k/q$, donde k es una constante, es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante, y $q = f(m)$ define una función que da el número total de unidades producidas al día por m empleados, demuestre que el producto del ingreso marginal es siempre igual a cero.

71. Función de costo El costo de producir q unidades de un producto está dado por

$$c = 4000 + 10q + 0.1q^2.$$

Si el precio de p unidades está dado por la ecuación

$$q = 800 - 2.5p,$$

utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del costo con respecto al precio unitario cuando $p = 80$.

72. Altas de hospital En un centro de salud se examinaron las altas de un grupo de individuos que estuvieron hospitalizados por una enfermedad específica. Se encontró que la cantidad total de personas que fueron dadas de alta al final de t días de hospitalización estaba dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3.$$

Encuentre $f'(300)$ e interprete su respuesta.

73. Costo marginal Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000,$$

encuentre la función de costo marginal.

74. Salario/educación Para cierta población, si E es el número de años de educación de una persona y S representa el salario anual promedio en dólares, entonces para $E \geq 7$,

$$S = 340E^2 - 4360E + 42{,}800.$$

(a) ¿Qué tan rápido estará cambiando el salario con respecto a la educación cuando $E = 16$? (b) ¿A qué nivel educativo la tasa de cambio del salario es igual a \$5000 por año de educación?

75. Biología El volumen V de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. En el tiempo t segundos, el radio r (en centímetros) está dado por

$$r = 10^{-8}t^2 + 10^{-7}t.$$

Utilice la regla de la cadena para encontrar dV/dt cuando $t = 10$.

76. Presión en tejidos vivos Bajo ciertas condiciones, la presión p desarrollada en los tejidos vivos por la radiación ultrasónica está dada como una función de la intensidad de la radiación por la ecuación[16]

$$p = (2\rho VI)^{1/2},$$

donde ρ (letra griega "rho") es la densidad del tejido afectado y V la velocidad de propagación de la radiación. Aquí ρ y V son constantes. (a) Encuentre la razón de cambio de p con respecto a I. (b) Encuentre la razón de cambio relativa de p con respecto a I.

77. Demografía Suponga que para cierto grupo de 20,000 nacimientos, el número de personas l_x que alcanzan a vivir x años es

$$l_x = -0.000356x^4 + 0.00446x^3 + 0.846x^2 - 34.8x + 20{,}000,$$

$$0 \leq x \leq 94.1.$$

(a) Encuentre la razón de cambio de l_x con respecto a x y evalúe su respuesta para $x = 36$. (b) Encuentre la razón de cambio relativa de l_x cuando $x = 36$. Redondee sus respuestas a tres decimales.

78. Contracción muscular Un músculo tiene la capacidad de contraerse al estar sometido a una carga, como un peso, que se le impone. La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular".[17] Aquí, P es la carga impuesta al músculo, v la velocidad de contracción de las fibras musculares y a,

[16] R. W. Stacy et al., *Essential of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).
[17] Ibid.

b y k son constantes positivas. Exprese v en función de P. Utilice su resultado para encontrar dv/dP.

79. Economía Suponga que $pq = 100$ es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante. Sea c el costo total y suponga que el costo marginal es 0.01 cuando $q = 200$. Utilice la regla de la cadena para encontrar dc/dp cuando $q = 200$.

80. Producto del ingreso marginal Un empresario que emplea m trabajadores encuentra que ellos producen

$$q = 2m(2m + 1)^{3/2}$$

unidades de producto diariamente. El ingreso total r (en dólares) está dado por

$$r = \frac{50q}{\sqrt{1000 + 3q}}.$$

a. ¿Cuál es el precio por unidad (al centavo más cercano) cuando hay 12 trabajadores?
b. Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores.
c. Determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 12$.

81. Suponga que $y = f(x)$, donde $x = g(t)$. Dado que $g(2) = 3$, $g'(2) = 4$, $f(2) = 5$, $f'(2) = 6$, $g(3) = 7$, $g'(3) = 8$, $f(3) = 9$ y $f'(3) = 10$, determine el valor de $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2}$.

82. Negocios Un fabricante determinó que para su producto el costo promedio diario (en cientos de dólares) está dado por

$$\bar{c} = \frac{324}{\sqrt{q^2 + 35}} + \frac{5}{q} + \frac{19}{18}.$$

a. Conforme la producción diaria crece, el costo promedio se aproxima a una cantidad constante. ¿Cuál es esta cantidad?
b. Determine el costo marginal del fabricante cuando se producen 17 unidades por día.
c. El fabricante determina que si la producción y las ventas se incrementaran a 18 unidades diarias, el ingreso crecería a $275. ¿Deberá efectuar este incremento? ¿Por qué?

83. Si

$$y = (u + 1)\sqrt{u + 5}$$

y

$$u = x(x^2 + 5)^5,$$

encuentre dy/dx cuando $x = 0.1$. Redondee su respuesta a dos decimales.

84. Si

$$y = \frac{9u - 4}{3u^2 + 2}$$

y

$$u = \frac{4x - 1}{(2x - 5)^3},$$

encuentre dy/dx cuando $x = 5$. Redondee su respuesta a dos decimales.

10.7 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 10.1 recta secante recta tangente pendiente de una curva derivada $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
cociente de diferencia $f'(x)$ y' $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d}{dx}[f(x)]$

Sección 10.3 Δx función de posición velocidad razón de cambio función de costo total
costo marginal costo promedio función de ingreso total ingreso marginal
razón de cambio relativa razón de cambio porcentual

Sección 10.5 regla del producto regla del cociente función de consumo propensión marginal al consumo
propensión marginal al ahorro

Sección 10.6 regla de la cadena regla de la potencia producto del ingreso marginal

Resumen

La recta tangente (o tangente) a una curva en el punto P es la posición límite de las rectas secantes PQ, cuando Q se acerca a P a lo largo de la curva. La pendiente de la tangente en P se llama pendiente de la curva en P.

Si $y = f(x)$, la derivada de f en x es la función definida por el límite $f'(x)$ de la ecuación

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En forma geométrica, la derivada nos da la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$. Una ecuación de la tangente en un punto particular (x_1, y_1) se obtiene evaluando $f'(x_1)$, que es la pendiente m de la tangente, y sustituyendo en la forma punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$. Cualquier función que es diferenciable en un punto, también debe ser continua ahí.

Las reglas básicas para encontrar derivadas son las siguientes, para las que suponemos que todas las funciones son diferenciables.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, \text{ donde } c \text{ es una constante.}$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \text{ donde } n \text{ es cualquier número real.}$$

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x), \text{ donde } c \text{ es una constante.}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x).$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ donde } y \text{ es una función de } u,$$
y u es una función de x.

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}, \text{ donde } u \text{ es una función de } x,$$
y n es cualquier número real.

La derivada dy/dx puede interpretarse también como la razón de cambio (instantánea) de y con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}.$$

En particular, si $s = f(t)$ es una función de posición, donde s es la posición en el tiempo t, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \text{velocidad en el tiempo } t.$$

En economía, el término *marginal* se utiliza para describir derivadas de tipos específicos de funciones. Si $c = f(q)$ es una función de costo total (c es el costo total de q unidades de un producto), entonces la razón de cambio

$$\frac{dc}{dq} \text{ se llama costo marginal.}$$

Interpretamos el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional de producción (el costo promedio por unidad $\bar{c}$, está relacionado con el costo total c por la relación $\bar{c} = c/q$, o $c = \bar{c}q$).

Una función de ingreso total $r = f(q)$ da el ingreso r de un fabricante al vender q unidades de un producto (el ingreso r y el precio p están relacionados por $r = pq$). La razón de cambio

$$\frac{dr}{dq} \text{ se llama ingreso marginal,}$$

que se interpreta como el ingreso aproximado que se obtiene al vender una unidad adicional de producto.

Si r es el ingreso que un fabricante recibe cuando la producción total de m empleados es vendida, entonces la derivada dr/dm se llama producto del ingreso marginal. El producto del ingreso marginal da el cambio aproximado que resulta en el ingreso cuando el fabricante contrata un empleado adicional.

Si $C = f(I)$ es una función de consumo, donde I es el ingreso nacional y C es el consumo nacional, entonces

$$\frac{dC}{dI} \text{ es la propensión marginal al consumo}$$

y

$$1 - \frac{dC}{dI} \text{ es la propensión marginal del ahorro.}$$

Para cualquier función, la razón de cambio relativa de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

que compara la razón de cambio de $f(x)$ con la función misma. La razón de cambio porcentual es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100.$$

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 4 utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$.

1. $f(x) = 2 - x^2$.
2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
3. $f(x) = \sqrt{3x}$.
4. $f(x) = \dfrac{2}{1 + 4x}$.

En los problemas del 5 al 38 obtenga la derivada.

5. $y = 6^3$.
6. $y = x$.
7. $y = 7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 1$.
8. $y = 4(x^2 + 5) - 7x$.
9. $f(s) = s^2(s^2 + 2)$.
10. $y = \sqrt{x + 3}$.
11. $y = \dfrac{x^2 + 1}{5}$.
12. $y = \dfrac{2}{x^3}$.
13. $y = (x^2 + 6x)(x^3 - 6x^2 + 4)$.
14. $y = (x^2 + 1)^{100}(x - 6)$.
15. $f(x) = (2x^2 + 4x)^{100}$.
16. $f(w) = w\sqrt{w} + w^2$.
17. $y = \dfrac{3}{2x + 1}$.
18. $y = \dfrac{x^4 + 4x^2}{2x}$.
19. $y = (8 + 2x)(x^2 + 1)^4$.
20. $g(z) = (2z)^{3/5} + 5$.
21. $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 4}$.
22. $y = \dfrac{x - 5}{(x + 2)^2}$.
23. $y = \sqrt[3]{4x - 1}$.
24. $h(t) = (1 + 2^2)^{17}$.
25. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$.
26. $y = \dfrac{x(x + 1)}{2x^2 + 3}$.
27. $h(x) = (x - 6)^4(x + 5)^3$.
28. $y = \dfrac{(x + 3)^5}{x}$.
29. $y = \dfrac{5x - 4}{x + 6}$.
30. $f(x) = 5x\sqrt{1 - 2x}$.
31. $y = 2x^{-3/8} + (2x)^{-3/8}$.
32. $y = \sqrt{\dfrac{x}{2}} + \sqrt{\dfrac{2}{x}}$.
33. $y = \dfrac{x^2 + 6}{\sqrt{x^2 + 5}}$.
34. $y = \sqrt[3]{(7 - 3x^2)^2}$.
35. $y = (x^3 + 6x^2 + 9)^{3/5}$.
36. $y = 0.5x(x + 1)^{-2} + 0.3$.
37. $g(z) = \dfrac{-7z}{(z - 1)^{-1}}$.
38. $g(z) = \dfrac{-3}{4(z^5 + 2z - 5)^4}$.

En los problemas del 39 al 42 encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de x.

39. $y = x^2 - 6x + 4, \quad x = 1$.
40. $y = -2x^3 + 6x + 1, \quad x = 2$.
41. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8$.
42. $y = \dfrac{x}{8 - x}, \quad x = 3$.

---

43. Si $f(x) = 4x^2 + 2x + 8$ encuentre las razones de cambio relativa y porcentual de $f(x)$ cuando $x = 1$.

44. Si $f(x) = x/(x + 4)$, encuentre las razones de cambio relativa y porcentual de $f(x)$ cuando $x = 1$.

45. Ingreso marginal Si $r = q(20 - 0.1q)$ es una función de ingreso total, encuentre la función de ingreso marginal.

46. Costo marginal Si

$$c = 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 3q + 6000$$

es una función de costo total, encuentre el costo marginal cuando $q = 100$.

47. Función de consumo Si

$$C = 7 + 0.6I - 0.25\sqrt{I}$$

es una función de consumo, encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I = 16$.

48. Ecuación de demanda Si $p = \dfrac{q + 14}{q + 4}$ es una ecuación de demanda, encuentre la razón de cambio del precio con respecto a la cantidad q.

49. Ecuación de demanda Si $p = -0.5q + 450$ es una ecuación de demanda, encuentre la función de ingreso marginal.

50. Costo promedio Si $\bar{c} = 0.03q + 1.2 + \dfrac{3}{q}$ es una función de costo promedio, encuentre el costo marginal cuando $q = 100$.

51. Función de costo en una planta de energía La función de costo total de una planta de energía eléctrica es estimada por[18]

$$c = 16.68 + 0.125q + 0.00439q^2, \quad 20 \leq q \leq 90,$$

donde q es la producción total en 8 horas (como porcentaje de la capacidad) y c es el costo total del combustible en dólares. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 70$.

52. Producto del ingreso marginal Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades por día, donde

$$q = m(50 - m).$$

Si la función de demanda está dada por

$$p = -0.01q + 9,$$

encuentre el producto del ingreso marginal cuando $m = 10$.

53. Polilla de invierno En un estudio relativo a la polilla de invierno en Nueva Escocia,[19] se determinó que el número promedio, y, de huevos en una polilla hembra es función de su ancho abdominal x (en milímetros); donde

$$y = f(x) = 14x^3 - 17x^2 - 16x + 34$$

y $1.5 \leq x \leq 3.5$. ¿A qué razón cambia el número de huevos con respecto al ancho abdominal cuando $x = 2$?

54. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se encontró que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes con parásitos es

$$y = 10\left(1 - \frac{1}{1 + 2x}\right), \quad x \geq 0.$$

¿Para qué valor de x es dy/dx igual a $\frac{1}{5}$?

55. Crecimiento de bacterias En cierto cultivo se tienen bacterias en crecimiento. El tiempo t (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura T (en grados Celsius) del cultivo, y está dado por

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4}, & \text{si } 30 \leq T \leq 36, \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4}, & \text{si } 36 < T \leq 39. \end{cases}$$

Encuentre dt/dT cuando (a) $T = 38$ y (b) $T = 35$.

56. Movimiento La función de posición de una partícula que se mueve en línea recta es

$$s = \frac{9}{2t^2 + 3},$$

donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la velocidad de la partícula en $t = 1$.

57. Razón de cambio El volumen V de una esfera está dado por $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, donde d es el diámetro. Encuentre la razón de cambio de V con respecto a d cuando $d = 4$ pies.

58. Movimiento La función de posición para una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo es

$$s = 218t - 16t^2,$$

donde s es la altura en pies desde el suelo después de t segundos. ¿Para qué valor o valores de t la velocidad es igual a 64 pies/s?

59. Encuentre la función de costo marginal si la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 2q + \frac{10{,}000}{q^2}.$$

60. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{(x^4 + 1)\sqrt{3x + 1}}{x^5 + x},$$

en el punto sobre la curva donde $x = 1$.

61. Un fabricante encontró que con m empleados trabajando, el número de unidades producidas por día es q, donde

$$q = 10\sqrt{m^2 + 3600} - 600.$$

La ecuación de demanda para el producto es

$$9q + p^2 - 7200 = 0,$$

donde p es el precio de venta cuando la demanda para el producto es q unidades por día.

a. Determine el producto de ingreso marginal del fabricante cuando $m = 80$.

b. Encuentre la razón de cambio relativa del ingreso con respecto al número de empleados cuando $m = 80$.

c. Suponga que le costaría al fabricante \$300 más por día contratar un empleado adicional. ¿Aconsejaría usted al fabricante contratar este empleado adicional? ¿Por qué?

62. Si $f(x) = x^2 \ln x$, utilice el "límite de un cociente de diferencia" para estimar $f'(5)$. Redondee su respuesta a tres decimales.

63. Si $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 4}$, utilice la función de derivación numérica de su calculadora gráfica para estimar la derivada cuando $x = 10$. Redondee su respuesta a tres decimales.

---

[18] J. A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves" *Econometrica*, 15 (1947), 231-255.

[19] D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

64. La función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{6q^2 + 4}{\sqrt{q^2 + 8}} + 2000,$$

donde c está en dólares. Utilice la función de derivación numérica de su calculadora gráfica para estimar el costo marginal cuando se producen 12 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.

65. Si

$$y = (u + 3)\sqrt{u + 6},$$

y

$$u = \frac{x + 4}{x + 3},$$

encuentre dy/dx cuando $x = 0.3$. Redondee su respuesta a dos decimales.

Aplicación práctica
Propensión marginal al consumo

Una función de consumo puede definirse ya sea para una nación, como en la sección 10.5, o para una familia. En cualquier caso, la función relaciona el consumo total con el ingreso total. Una función de ahorro, de manera análoga, relaciona el ahorro total con el ingreso total, ya sea en una nación o a nivel familiar.

La información acerca del ingreso, consumo y ahorro para Estados Unidos como un todo puede encontrarse en las tablas de Cuentas del Producto e Ingreso Nacional (NIPA, por sus siglas en inglés), compiladas por la oficina de Análisis Económicos, una división del Departamento de Comercio de Estados Unidos. Las tablas pueden descargarse de `wwwww.bea.doc.gov` Para los años de 1959-1999, la función de consumo nacional se indica por medio del diagrama de dispersión de la figura 10.15.

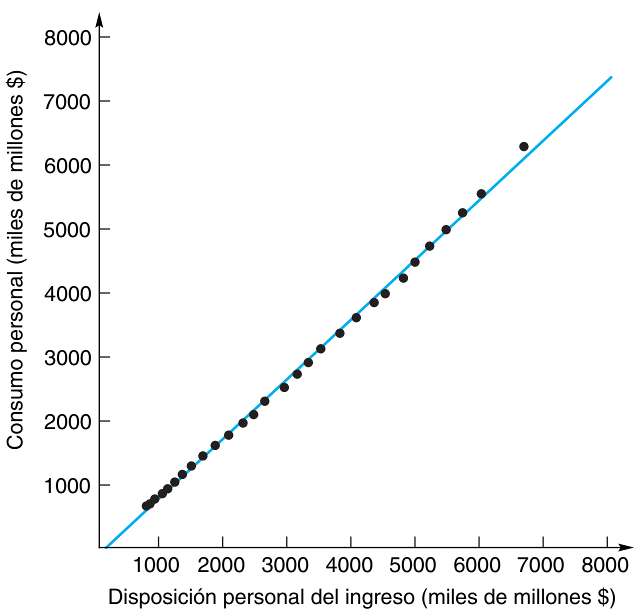


FIGURA 10.15 Función de consumo nacional para Estados Unidos.

Observe que los puntos están más o menos a lo largo de una línea recta. Una regresión lineal da la ecuación para ésta como $y = 0.9314x - 99.1936$.

La propensión marginal al consumo derivada de esta gráfica es simplemente la pendiente de la recta, esto es, alrededor de 0.931 o 93.1%. A nivel nacional, entonces, un incremento de mil millones de dólares en el ingreso total disponible produce un incremento de

\$931 millones en el consumo. Y si suponemos que el resto se ahorra, existe un aumento de \$69 millones en el total de ahorros.[20]

Quizá algo más sencillo para relacionar, a causa de los número más pequeños involucrados, es la función de consumo para una familia. Esta función está documentada en Encuestas de Gastos del Consumidor llevada a cabo por la Oficina de Estadísticas de Trabajo, que es parte del Departamento de Trabajo de Estados Unidos. Los resultados de las encuestas para cada año pueden bajarse de `www.bls.gov/csxhome.htm`.

La encuesta de cada año proporciona información para cinco quintiles, como se denominan, donde un quintil representa un quinto de las familias de Estados Unidos. Los quintiles son ordenados por ingreso, de modo que el quintil inferior representa al 20% más pobre de las familias de Estados Unidos y el quintil superior representa al 20% más rico.

Para el año de 1999, el ingreso y consumo son como se muestra en la tabla 10.3. Los números son valores promedio dentro de cada quintil. Si estos datos se grafican por medio de una calculadora gráfica, los puntos caen en un patrón que podría aproximarse de manera razonable a una línea recta, pero podría aproximarse

TABLA 10.3 Ingresos y gastos familiares de Estados Unidos, 1999

Ingreso después de impuestos	Gastos totales
\$7101	\$16,766
\$17,576	\$24,850
\$30,186	\$33,078
\$48,607	\$46,015
\$98,214	\$75,080

[20]En realidad, también debe contar los pagos de intereses y otros gastos no contabilizados como consumos. Pero, por ahora ignoraremos esta complicación.

mejor a la forma de una curva, cualitativamente, parecida a una función raíz cuadrada (véase la fig. 10.16).

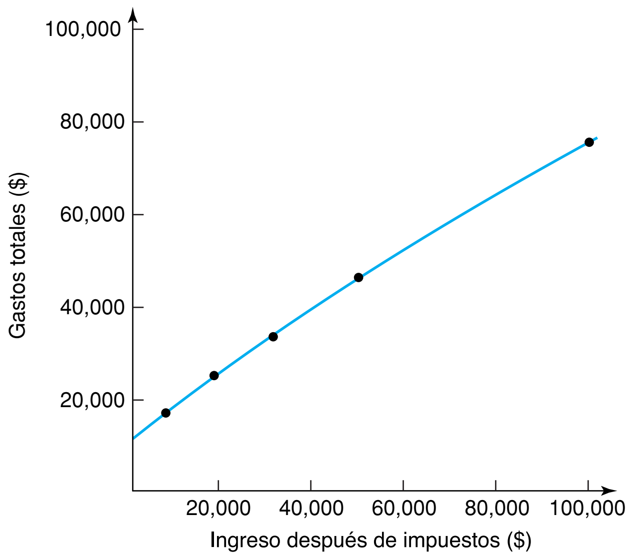


FIGURA 10.16 Función de consumo familiar (Estados Unidos).

La mayoría de las calculadoras gráficas no tienen una función de regresión para una función de tipo raíz cuadrada. Sin embargo, ellas tienen una función de regresión cuadrática y la inversa de una función cuadrática es una función de tipo raíz cuadrada (las funciones inversas se mencionaron en la sección 5.2). Así, procedemos como sigue. Primero, utilizamos las capacidades estadísticas de una calculadora, para introducir los números de la *segunda* columna de la tabla 10.3 como valores de x, y los de la *primera* columna como valores de y. Segundo, realizamos una regresión cuadrática. La función obtenida está dada por

$$y = (4.4627 \times 10^{-6})x^2 + 1.1517x - 13{,}461.$$

Tercero, intercambiamos las listas de los valores de x y y en preparación para la gráfica. Cuarto, reemplazamos y por x, y x por y en la ecuación de regresión cuadrática, y despejamos y (por medio de la fórmula cuadrática) para obtener la ecuación

$$y = \frac{-1.1517 \pm \sqrt{1.1517^2 - 4(4.4627 \times 10^{-6})(-13{,}461 - x)}}{2(4.4627 \times 10^{-6})}$$

o, con mayor sencillez,

$$y = -129{,}036 \pm \sqrt{1.9667 \times 10^{10} + 224{,}080x}.$$

Por último, introducimos la mitad superior de la curva (que corresponde a la parte $+$ del signo $\pm$) como una función para graficar; luego la desplegamos junto con una gráfica de los datos. El resultado se parece al mostrado en la figura 10.17.

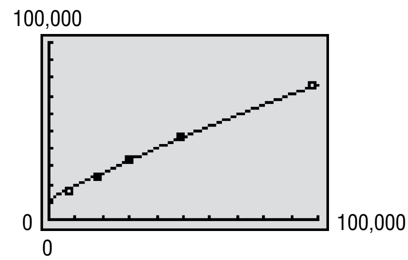


FIGURA 10.17 Gráfica de la recta de regresión.

Para encontrar el consumo marginal para un ingreso dado, ahora usamos la función dy/dx. Por ejemplo, para encontrar el consumo marginal en \$50,000, seleccionamos dy/dx, y luego introducimos 50,000. La calculadora regresa el valor 0.637675, que representa un consumo marginal de alrededor del 63.8%. En otras palabras, una familia con ingresos de \$50,000 anuales, al obtener un ingreso adicional de \$1000, gastaría \$638 de ellos y el resto lo ahorraría.

Ejercicios

1. Compare la función de consumo de la figura 10.15 con las funciones de consumo de los problemas 63 y 64 de la sección 10.5. ¿Estas funciones de consumo difieren de manera significativa?

2. El primer renglón de la tabla 10.3, en la primera columna, tiene \$7101 y en la segunda columna, \$16,766. ¿Qué significa esto?

3. Suponga que una familia tiene ingresos anuales de \$25,000, y en 1999 recibió un bono extra inesperado por \$1000. ¿Cuánto de ese cheque esperaría usted que la familia gastara? ¿Cuánto ahorraría?

4. Suponga que una familia con ingresos de \$90,000 anuales, recibió en 1999 un bono extra por \$1000, que no lo esperaba. ¿Cuánto de ese bono gastaría?

5. ¿Cuáles son las razones de la vida real para explicar la diferencia entre las respuestas de los problemas 3 y 4?

CAPÍTULO 11

Temas adicionales de diferenciación

Después de un incómodo viaje en un vehículo, en ocasiones los pasajeros describen la travesía como un viaje con "jaloneos" o con "muchos tumbos". Pero, de manera más precisa, ¿qué es el "jaloneo"?, ¿qué significa esto para, digamos, un ingeniero que diseña un nuevo sistema de transporte?

Viajar en línea recta a una velocidad constante se denomina *movimiento uniforme*, y no existe "jaloneo" alguno. Pero, si la trayectoria o la velocidad cambian, el viaje puede tener "jalones". El cambio en la velocidad con respecto al tiempo, formalmente, es la derivada de la velocidad. Llamada aceleración, el cambio en la velocidad es la *segunda derivada* de la posición con respecto al tiempo —la derivada de la derivada de la posición. Uno de los conceptos importantes que se tratan en este capítulo es el de derivadas de orden superior, de las cuales la aceleración es un ejemplo.

Pero, ¿la aceleración es la responsable de "los jalones"? La sensación de "jaloneo" hacia delante y hacia atrás en una montaña rusa ciertamente está relacionada con la aceleración. Por otra parte, las revistas de automóviles con frecuencia elogian a los automóviles que tienen una aceleración *suave*. De modo que parece que la aceleración tiene algo que ver con "los jalones", pero no es en sí la causa.

La derivada de la aceleración es la *tercera* derivada de la posición con respecto al tiempo. Cuando esta tercera derivada es grande, la aceleración está cambiando con rapidez. En una montaña rusa, en una vuelta uniforme a la izquierda se experimenta una aceleración uniforme hacia la izquierda. Pero cuando la montaña rusa cambia de manera abrupta de una vuelta hacia la izquierda a una vuelta hacia la derecha, la aceleración cambia de direcciones, y los pasajeros experimentan un jalón. La tercera derivada de la posición es, en efecto, muy adecuada para medir "los jalones", que es costumbre denominar "jalón" o "giro", al igual que la segunda derivada se denomina aceleración.

El "giro" tiene implicaciones no sólo para la comodidad de los pasajeros en un vehículo, sino también para la fiabilidad de los equipos. Por ejemplo, los ingenieros diseñan equipo para naves espaciales siguiendo directrices acerca del máximo "giro" o "jalón" que el equipo debe ser capaz de soportar sin dañar sus componentes internos.

OBJETIVO Desarrollar una fórmula de diferenciación para $y = \ln u$, aplicar la fórmula y utilizarla para diferenciar una función logarítmica para una base diferente de e.

11.1 Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección desarrollaremos fórmulas para diferenciar funciones logarítmicas. Comenzamos con la derivada de $f(x) = \ln x$, donde $x > 0$. De acuerdo con la definición de derivada,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}.$$

Si utilizamos la propiedad de los logaritmos de que $\ln m - \ln n = \ln(m/n)$, tenemos

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\mathrm{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right].$$

Al escribir $\frac{1}{h}$ como $\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h}$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right] \qquad \text{(ya que } r \ln m = \ln m^r\text{)}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{h \to 0} \left[\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right].$$

Como puede demostrarse que el límite de un logaritmo es el logaritmo del límite ($\lim \ln u = \ln \lim u$), tenemos

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right]. \tag{1}$$

Para evaluar $\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}$, primero observamos que cuando $h \to 0$, entonces $\frac{h}{x} \to 0$. Así, si reemplazamos $\frac{h}{x}$ por k, el límite adquiere la forma

$$\lim_{k \to 0} (1 + k)^{1/k}.$$

Como se estableció en la sección 9.1, este límite es e. Así, la ecuación (1) resulta

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}(1) = \frac{1}{x}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.} \tag{2}$$

■ **EJEMPLO 1 Diferenciación de funciones que contienen ln x**

a. *Diferenciar* $f(x) = 5 \ln x$.

Solución: Aquí f es una constante (5) que multiplica a una función ($\ln x$), por lo que, según la ecuación (2) tenemos

$$f'(x) = 5\frac{d}{dx}(\ln x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}.$$

b. *Diferenciar* $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Solución: según la regla del cociente y la ecuación (2),

$$y' = \frac{x^2\dfrac{d}{dx}(\ln x) - (\ln x)\dfrac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2\left(\dfrac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

Ahora extenderemos la ecuación (2) para considerar una clase más amplia de funciones. Sea $y = \ln u$, donde u es una función positiva y diferenciable de x. Por la regla de la cadena,

La regla de la cadena es invaluable en el desarrollo de la fórmula de diferenciación para $\ln u$.

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln u)\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Por lo que,

$$\boxed{\frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}.} \qquad \textbf{(3)}$$

EJEMPLO 2 Diferenciación de funciones que contienen ln *u*

a. *Diferenciar* $y = \ln(x^2 + 1)$.

Solución: esta función tiene la forma $\ln u$, con $u = x^2 + 1$. Empleando la ecuación (3), se obtiene

No olvide que falta $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

b. *Diferenciar* $y = x^2\ln(4x + 2)$.

Solución: utilizando la regla del producto se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}[\ln(4x+2)] + [\ln(4x+2)]\frac{d}{dx}(x^2).$$

Con base en la ecuación (3) con $u = 4x + 2$,

$$\frac{dy}{dx} = x^2\left(\frac{1}{4x+2}\right)(4) + [\ln(4x+2)](2x)$$

$$= \frac{2x^2}{2x+1} + 2x\ln(4x+2).$$

c. *Diferenciar* $y = \ln(\ln x)$.

Principios en práctica 1

Diferenciación de funciones que incluyen ln *u*

La oferta de q unidades de un producto al precio de p dólares por unidad está dada por $q(p) = 25 + 2\ln(3p^2 + 4)$. Determine la razón de cambio de la oferta con respecto al precio, $\dfrac{dq}{dp}$.

Solución: ésta tiene la forma $y = \ln u$, con $u = \ln x$. Con la ecuación (3) obtenemos,

$$y' = \frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x \ln x}.$$

Con frecuencia podemos reducir el trabajo implicado en diferenciar el logaritmo de un producto, cociente o potencia, utilizando las propiedades de los logaritmos para reescribir el logaritmo *antes* de diferenciar. Esto lo ilustra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Reescritura de funciones logarítmicas antes de diferenciarlas

a. *Encontrar* $\frac{dy}{dx}$ *si* $y = \ln(2x + 5)^3$.

Solución: aquí se tiene el logaritmo de una potencia. Primero simplificamos el miembro derecho utilizando las propiedades de los logaritmos. Luego diferenciamos. Tenemos

$$y = \ln(2x + 5)^3 = 3\ln(2x + 5),$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{2x + 5}\right)(2) = \frac{6}{2x + 5}.$$

De otra manera, si primero no simplificamos, escribiríamos

Al comparar ambos métodos, notamos que el más sencillo es primero simplificar y después diferenciar.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x + 5)^3}\frac{d}{dx}[(2x + 5)^3]$$

$$= \frac{1}{(2x + 5)^3}(3)(2x + 5)^2(2) = \frac{6}{2x + 5}.$$

b. *Encontrar* $f'(p)$ *si* $f(p) = \ln[(p + 1)^2(p + 2)^3(p + 3)^4]$.

Solución: simplificamos el miembro derecho y luego diferenciamos:

$$f(p) = 2\ln(p + 1) + 3\ln(p + 2) + 4\ln(p + 3),$$

$$f'(p) = 2\left(\frac{1}{p + 1}\right)(1) + 3\left(\frac{1}{p + 2}\right)(1) + 4\left(\frac{1}{p + 3}\right)(1)$$

$$= \frac{2}{p + 1} + \frac{3}{p + 2} + \frac{4}{p + 3}.$$

EJEMPLO 4 Diferenciación de funciones que contienen logaritmos

a. *Encontrar* $f'(w)$ *si* $f(w) = \ln\sqrt{\frac{1 + w^2}{w^2 - 1}}$.

Solución: simplificamos usando las propiedades de los logaritmos y luego diferenciamos:

$$f(w) = \frac{1}{2}[\ln(1 + w^2) - \ln(w^2 - 1)],$$

$$f'(w) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+w^2}(2w) - \frac{1}{w^2-1}(2w)\right]$$

$$= \frac{w}{1+w^2} - \frac{w}{w^2-1} = -\frac{2w}{w^4-1}.$$

b. *Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = \ln^3(2x+5)$.*

Solución: el exponente 3 afecta a $\ln(2x+5)$. Esto es,

$$f(x) = \ln^3(2x+5) = [\ln(2x+5)]^3.$$

Por la regla de la potencia,

$$f'(x) = 3[\ln(2x+5)]^2 \frac{d}{dx}[\ln(2x+5)]$$

$$= 3[\ln(2x+5)]^2\left[\frac{1}{2x+5}(2)\right]$$

$$= \frac{6}{2x+5}[\ln(2x+5)]^2 = \frac{6}{2x+5}\ln^2(2x+5).$$

Advertencia No confunda $\ln^3(2x+5)$ con $\ln(2x+5)^3$, que apareció en el ejemplo 3(a).

Derivadas de funciones logarítmicas con base *b*

Para diferenciar una función logarítmica con base diferente a e, podemos convertir primero el logaritmo a logaritmos naturales por medio de la fórmula del cambio de base, y luego diferenciar la expresión resultante. Por ejemplo, considere $y = \log_b u$, donde u es una función diferenciable de x. Según la fórmula del cambio de base,

$$y = \log_b u = \frac{\ln u}{\ln b}.$$

Al diferenciar, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln b}\right) = \frac{1}{\ln b}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln b}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

Por lo que,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)\, u}\cdot\frac{du}{dx}.}$$

En vez de memorizar esta regla, le sugerimos recuerde el procedimiento utilizado para obtenerla.

Procedimiento para diferenciar $\log_b u$

Convierta $\log_b u$ a logaritmos naturales para obtener $\frac{\ln u}{\ln b}$ y luego diferencie.

EJEMPLO 5 Diferenciación de una función logarítmica con base 2

Diferenciar $y = \log_2 x$.

Solución: de acuerdo con el procedimiento anterior, tenemos

$$\frac{d}{dx}(\log_2 x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln 2}.$$

Vale la pena mencionar que podemos escribir la respuesta en términos de la base original. Ya que

$$\frac{1}{\ln b} = \frac{1}{\frac{\log_b b}{\log_b e}} = \frac{\log_b e}{1} = \log_b e,$$

podemos expresar $\frac{1}{x \ln 2}$ como $\frac{1}{x}\log_2 e$.

Principios en práctica 2

Diferenciación de una función logarítmica de base 10

La intensidad de un sismo se mide en la escala de Richter. La lectura está dada por $R = \log \frac{I}{I_0}$, en donde I es la intensidad e I_0 es una intensidad mínima estándar. Si $I_0 = 1$, encuentre $\frac{dR}{dI}$, la tasa de cambio de la lectura en la escala de Richter con respecto a la intensidad.

EJEMPLO 6 Diferenciación de una función logarítmica con base 10

Si $y = \log(2x + 1)$, *encontrar la razón de cambio de y con respecto a x.*

Solución: la razón de cambio es dy/dx y la base implicada es 10. Por tanto, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\log(2x+1)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln(2x+1)}{\ln 10}\right]$$
$$= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{2x+1}(2) = \frac{2}{(2x+1)\ln 10}.$$

Ejercicio 11.1

En los problemas del 1 al 44 diferencie las funciones. Si es posible, utilice primero las propiedades de los logaritmos para simplificar la función dada.

1. $y = 4 \ln x$.
2. $y = \frac{\ln x}{14}$.
3. $y = \ln(3x - 7)$.
4. $y = \ln(5x - 6)$.
5. $y = \ln x^2$.
6. $y = \ln(ax^2 + b)$.
7. $y = \ln(1 - x^2)$.
8. $y = \ln(-x^2 + 6x)$.
9. $f(p) = \ln(2p^3 + 3p)$.
10. $f(r) = \ln(2r^4 - 3r^2 + 2r + 1)$.
11. $f(t) = t \ln t$.
12. $y = x^2 \ln x$.
13. $y = x^2 \ln(4x + 3)$.
14. $y = (2x + 5)^2 \ln(2x + 5)$.
15. $y = \log_3(8x - 1)$.
16. $f(w) = \log(w^2 + w)$.
17. $y = x^2 + \log_2(x^2 + 4)$.
18. $y = x^3 \log_4 x$.
19. $f(z) = \frac{\ln z}{z}$.
20. $y = \frac{x^2}{\ln x}$.
21. $y = \frac{x^2 - 1}{\ln x}$.
22. $y = \ln x^{100}$.
23. $y = \ln(x^2 + 4x + 5)^3$.
24. $y = 6 \ln \sqrt[3]{x}$.
25. $y = 9 \ln \sqrt{1 + x^2}$.
26. $f(s) = \ln\left(\frac{s^2}{1 + s^2}\right)$.
27. $f(l) = \ln\left(\frac{1 + l}{1 - l}\right)$.

28. $y = \ln\left(\dfrac{2x+3}{3x-4}\right)$.

29. $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$.

30. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^4-1}{x^4+1}}$.

31. $y = \ln[(x^2+2)^2(x^3+x-1)]$.

32. $y = \ln[(5x+2)^4(8x-3)^6]$.

33. $y = 5\ln(x\sqrt{2x+1})$.

34. $y = 6\ln\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$.

35. $y = (x^2+1)\ln(2x+1)$.

36. $y = (ax+b)\ln(ax)$.

37. $y = \ln x^3 + \ln^3 x$.

38. $y = x^{\ln 3}$.

39. $y = \ln^4(ax)$.

40. $y = \ln^2(2x+11)$.

41. $y = x\ln\sqrt{x-1}$.

42. $y = \ln(x^2\sqrt{3x-9})$.

43. $y = \sqrt{4+3\ln x}$.

44. $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

45. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \ln(x^2 - 2x - 2)$$

cuando $x = 3$.

46. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = x[\ln(x) - 1]$$

en el punto donde $x = e$.

47. Encuentre la pendiente de la curva $y = \dfrac{x}{\ln x}$ cuando $x = 3$.

48. Ingreso marginal Encuentre la función de ingreso marginal si la función de demanda es $p = 25/\ln(q+2)$.

49. Costo marginal Una función de costo total está dada por

$$c = 25\ln(q+1) + 12.$$

Encuentre el costo marginal cuando $q = 6$.

50. Costo marginal La función del costo promedio de un fabricante, en dólares, está dada por

$$\bar{c} = \frac{400}{\ln(q+5)}.$$

Encuentre el costo marginal (redondeado a dos decimales) cuando $q = 45$.

51. Cambio en la oferta La oferta de q unidades de un producto al precio de p dólares por unidad está dada por $q(p) = 25 + 10\ln(2p+1)$. Determine la tasa de cambio de la oferta con respecto al precio, $\dfrac{dq}{dp}$.

52. Percepción de sonido El nivel de un sonido (L, medido en decibeles) percibido por el oído humano depende de los niveles de intensidad (I), de acuerdo con $L = 10\log\dfrac{I}{I_0}$, en donde I_0 es el umbral de audibilidad. Si $I_0 = 17$, determine $\dfrac{dL}{dI}$, la razón de cambio del nivel del sonido con respecto a la intensidad.

53. Biología En cierto experimento con bacterias, se observó que la actividad relativa de una colonia particular de bacterias está descrita por

$$A = 6\ln\left(\frac{T}{a-T} - a\right),$$

donde a es una constante y T es la temperatura del medio ambiente. Encuentre la razón de cambio de A con respecto a T.

54. Demuestre que la razón de cambio relativa de $y = f(x)$ con respecto a x es igual a la derivada de $y = \ln f(x)$.

En los problemas 56 y 57 use las reglas de diferenciación para encontrar $f'(x)$. Luego use su calculadora gráfica para encontrar todos los ceros de $f'(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

56. $f(x) = x^2\ln x$.

57. $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x}$.

OBJETIVO Desarrollar una fórmula de diferenciación para $y = e^u$, aplicar la fórmula y utilizarla para diferenciar una función exponencial con base diferente a e.

11.2 Derivadas de funciones exponenciales

Ahora obtendremos una fórmula para la derivada de la función exponencial

$$y = e^u,$$

donde u es una función diferenciable de x. En forma logarítmica tenemos

$$u = \ln y.$$

Si diferenciamos ambos miembros con respecto a x obtenemos

$$\frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dx}(\ln y),$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Si despejamos dy/dx y luego reemplazamos y por e^u resulta

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{du}{dx} = e^u\frac{du}{dx}.$$

Por lo que,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}.} \tag{1}$$

Como caso especial, sea $u = x$. Entonces $du/dx = 1$ y

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.} \tag{2}$$

Observe que la función y su derivada son iguales.

Advertencia La regla de la potencia no se aplica a ex. Esto es $\frac{d}{dx}(e^x) \neq xe^{x-1}$.

EJEMPLO 1 Diferenciación de funciones que contienen e^x

a. *Encontrar* $\frac{d}{dx}(3e^x)$.

Solución: como 3 es un factor constante,

$$\frac{d}{dx}(3e^x) = 3\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= 3e^x \qquad \text{[según la ecuación (2)].}$$

b. *Si* $y = \frac{x}{e^x}$, *encontrar* $\frac{dy}{dx}$.

Solución: *primero* utilizamos la regla del cociente y luego la ecuación (2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1) - x(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}.$$

c. *Si* $y = e^2 + e^x + \ln 3$, *encontrar* y'.

Solución: como e^2 y $\ln 3$ son constantes, $y' = 0 + e^x + 0 = e^x$.

EJEMPLO 2 Diferenciación de funciones que contienen e^u

a. *Encontrar* $\frac{d}{dx}(e^{x^3+3x})$.

Solución: la función tiene la forma e^u con $u = x^3 + 3x$. De la ecuación (1),

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3+3x}) = e^{x^3+3x}\frac{d}{dx}(x^3 + 3x) = e^{x^3+3x}(3x^2 + 3)$$
$$= 3(x^2 + 1)e^{x^3+3x}.$$

$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$. No olvide la $\frac{du}{dx}$.

b. *Encontrar* $\frac{d}{dx}[e^{x+1}\ln(x^2 + 1)]$.

Solución: según la regla del producto,

$$\frac{d}{dx}[e^{x+1}\ln(x^2 + 1)] = e^{x+1}\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] + [\ln(x^2 + 1)]\frac{d}{dx}(e^{x+1})$$
$$= e^{x+1}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)(2x) + [\ln(x^2 + 1)]e^{x+1}(1)$$
$$= e^{x+1}\left[\frac{2x}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1)\right].$$

Principios en práctica 1

Diferenciación de funciones que contienen a e^u

Cuando un objeto se mueve de un entorno a otro, el cambio de la temperatura del objeto está dado por $T = Ce^{kt}$, donde C es la diferencia de temperaturas de los dos entornos, t es el tiempo en el entorno nuevo y k es una constante. Determine la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.

EJEMPLO 3 Función de densidad de la distribución normal

Una función importante utilizada en las ciencias sociales es la ***función de densidad de la distribución normal***

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

donde σ *(letra griega que se lee "sigma") y* μ *(letra griega que se lee "mu") son constantes. La gráfica de esta función, llamada curva normal, tiene forma de "campana"* (*véase la fig.* 11.1). *Determinar la razón de cambio de y con respecto a x cuando* $x = \mu$.

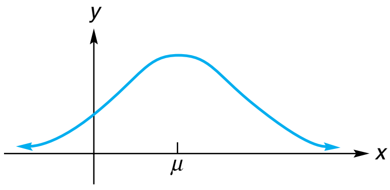


FIGURA 11.1 La función de densidad de la distribución normal.

Solución: la razón de cambio de y con respecto a x es dy/dx. Observamos que el factor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ es una constante y que el segundo factor tiene la forma e^u, donde

$$u = -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2.$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}\right]\left[-\frac{1}{2}(2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right].$$

Al evaluar dy/dx cuando $x = \mu$, obtenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\mu} = 0.$$

En forma geométrica, esto significa que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = \mu$ es horizontal (véase la fig. 11.1).

Diferenciación de funciones exponenciales con base *a*

Ahora que estamos familiarizados con la derivada e^u, consideraremos la derivada de la función exponencial más general a^u. Si reemplazamos a por la forma equivalente $e^{\ln a}$, podemos expresa a^u como una función exponencial con base e, una forma que podemos diferenciar. Tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(a^u) &= \frac{d}{dx}[(e^{\ln a})^u] = \frac{d}{dx}(e^{u \ln a}) \\ &= e^{u \ln a}\frac{d}{dx}(u \ln a) \\ &= e^{u \ln a}\left(\frac{du}{dx}\right)\ln a \\ &= a^u (\ln a)\frac{du}{dx} \qquad \text{(ya que } e^{u \ln a} = a^u\text{).}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^u) = a^u (\ln a)\frac{du}{dx}.} \tag{3}$$

Observe que si $a = e$, el factor $\ln a$ en la ecuación (3) es igual a 1. Por tanto, si se usan funciones exponenciales con base e, tendremos una fórmula de diferenciación más sencilla con la cual trabajar. Ésta es una razón por la que las funciones exponenciales naturales se usan tan ampliamente en cálculo. En vez de memorizar la ecuación (3), le sugerimos recordar el procedimiento para obtenerla.

Procedimiento para diferenciar a^u

Convierta a^u en una función exponencial natural, aprovechando la propiedad de que $a = e^{\ln a}$ y luego diferencie.

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 4 Diferenciación de una función exponencial con base 4

Encontrar $\frac{d}{dx}(4^x)$.

Solución: empleando el procedimiento anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(4^x) &= \frac{d}{dx}[(e^{\ln 4})^x] \\ &= \frac{d}{dx}[e^{(\ln 4)x}] && \left[\text{forma } \frac{d}{dx}(e^u)\right] \\ &= e^{(\ln 4)x}(\ln 4) && \text{[según la ecuación (1)]} \\ &= 4^x(\ln 4).\end{aligned}$$

Verifique el resultado de manera directa, por medio de la ecuación (3).

EJEMPLO 5 Diferenciación de formas diferentes

Encontrar $\frac{d}{dx}(e^2 + x^e + 2^{\sqrt{x}})$.

Solución: aquí tenemos que diferenciar tres formas distintas; ¡no las confunda! La primera (e^2) es una base constante elevada a una potencia constante, por lo que es en sí misma una constante. Así, su derivada es igual a cero. La segunda (x^e) es una base variable elevada a una potencia constante, por lo que se aplica la regla de la potencia. La tercera ($2^{\sqrt{x}}$) es una base constante elevada a una potencia variable, por lo que debemos diferenciar una función exponencial. Reuniendo todo, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^2 + x^e + 2^{\sqrt{x}}) &= 0 + ex^{e-1} + \frac{d}{dx}[e^{(\ln 2)\sqrt{x}}] \\ &= ex^{e-1} + [e^{(\ln 2)\sqrt{x}}](\ln 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= ex^{e-1} + \frac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Ejercicio 11.2

En los problemas del 1 al 28 diferencie las funciones.

1. $y = 7e^x$.

2. $y = \frac{2e^x}{5}$.

3. $y = e^{x^2+4}$.

4. $y = e^{2x^2+5}$.

5. $y = e^{9-5x}$.

6. $f(q) = e^{-q^3+6q-1}$.

7. $f(r) = e^{3r^2+4r+4}$.

8. $y = e^{9x^2+5x^3-6}$.

9. $y = xe^x$.

10. $y = x^2e^{-x}$.

11. $y = x^2e^{-x^2}$.

12. $y = xe^{3x}$.

13. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{3}$.

14. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

15. $y = 4^{3x^2}$.

16. $y = 2^x x^2$.

17. $f(w) = \frac{e^{2w}}{w^2}$.

18. $y = e^{x-\sqrt{x}}$.

19. $y = e^{1+\sqrt{x}}$.

20. $y = (e^{3x} + 1)^4$.

21. $y = x^5 - 5^x$.

22. $f(z) = e^{1/z}$.

23. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

24. $y = e^{2x}(x + 6)$.

25. $y = e^{\ln x}$.

26. $y = e^{-x}\ln x$.

27. $y = e^{x\ln x}$.

28. $y = \ln e^{4x+1}$.

29. Si $f(x) = ee^xe^{x^2}$, encuentre $f'(-1)$.

30. Si $f(x) = 5^{x^2\ln x}$, encuentre $f'(1)$.

31. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ cuando $x = -2$.

32. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^e e^x$ en el punto $(1, e)$.

En cada una de las ecuaciones de demanda en los problemas 33 y 34, encuentre la razón de cambio del precio p con respecto a la cantidad q. ¿Cuál es la razón de cambio para el valor indicado de q?

33. $p = 15e^{-0.001q}$; $q = 500$.

34. $p = 8e^{-3q/800}$; $q = 400$.

En los problemas 35 y 36, $\bar{c}$ es el costo promedio de producir q unidades de un producto. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores dados de q.

35. $\bar{c} = \frac{7000e^{q/700}}{q}$; $q = 350$, $q = 700$.

36. $\bar{c} = \frac{850}{q} + 4000\frac{e^{(2q+6)/800}}{q}$; $q = 97$, $q = 197$.

37. Si

$$w = e^{x^3-4x} + x\ln(x-1) \text{ y } x = \frac{t+1}{t-1}, \text{ encuentre } \frac{dw}{dt}$$

cuando $t = 3$.

38. Si $f'(x) = e^{-2x}$ y $u = \ln x^2$, demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = \frac{2}{x^5}.$$

39. Determine el valor de la constante positiva c si

$$\frac{d}{dx}(c^x - x^c) = 0$$

cuando $x = 1$.

40. Calcule la razón de cambio relativa de

$$f(x) = 10^{-x} + \ln(8+x) + 0.01e^{x-2}$$

cuando $x = 2$. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

41. Ciclo de producción Para una empresa, la producción diaria q en el t-ésimo día de un ciclo de producción está dada por

$$q = 500(1 - e^{-0.2t}).$$

Encuentre la razón de cambio de la producción q con respecto a t en el décimo día.

42. Función de densidad normal Para la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},$$

encuentre $f'(0)$.

43. Población La población, en millones, del área más grande de Seattle dentro de t años, contados a partir de 1970 se estima por medio de $P = 1.92e^{0.0176t}$. Demuestre que $dP/dt = kP$, donde k es una constante. Esto significa que la razón de cambio de la población en cualquier tiempo es proporcional a la población en ese tiempo.

44. Penetración de mercado En un análisis de la difusión de un nuevo proceso en un mercado, Hunter y Rubenstein[1] se refieren a una ecuación de la forma

$$Y = k\alpha^{\beta^t},$$

donde Y es el nivel acumulado de difusión del nuevo proceso en el tiempo t, y k, α y β son constantes positivas. Verifique la afirmación de que

$$\frac{dY}{dt} = k\alpha^{\beta^t}(\beta^t \ln\alpha)\ln\beta.$$

45. Finanzas Después de t años, el valor S de un capital de P dólares que se invierte a una tasa anual r compuesta continuamente, está dado por $S = Pe^{rt}$. Demuestre que la razón relativa de cambio de S con respecto a t es r.

46. Relación depredador-presa En un artículo sobre depredadores y presas, Holling[2] se refiere a una ecuación de la forma

$$y = K(1 - e^{-ax}),$$

donde x es la densidad de presas, y el número de presas atacadas y K y a son constantes. Verifique la afirmación de que

$$\frac{dy}{dx} = a(K - y).$$

47. Terremotos De acuerdo con la escala de Richter,[3] el número de temblores de magnitud M o superiores por cada unidad de tiempo, se obtiene por medio de $N = 10^A 10^{-bM}$, donde A y b son constantes. Despeje dN/dM.

48. Psicología La retención a corto plazo fue estudiada por Peterson y Peterson.[4] Los dos investigadores analizaron un procedimiento en el que un experimentador daba verbalmente a una persona una sílaba de tres letras consonantes, por ejemplo, CHJ, seguida de un número de tres dígitos, como 309. La persona repetía entonces el número y contaba hacia atrás restando cada vez tres unidades, esto es, 309, 306, 303,... Después de cierto tiempo se ordenaba a la persona por medio de una luz, recitar la sílaba de tres constantes. El intervalo de tiempo comprendido entre la terminación de la enunciación de la última consonante por el experimentador, hasta la aparición de la luz, se denominó *intervalo de evocación*. El tiempo entre la aparición de la luz y la terminación del enunciado de la respuesta se denominó *latencia*. Después de muchos ensayos se determinó que para un intervalo de evocación de t segundos, la proporción aproximada de recuerdos correctos con latencia inferior a 2.83 segundos fue igual a p, donde

$$p = 0.89[0.01 + 0.99(0.85)^t].$$

a. Encuentre dp/dt e interprete su resultado.
b. Evalúe dp/dt para $t = 2$. Redondee su respuesta a dos decimales.

49. Medicina Suponga que un indicador radiactivo, como un tinte colorante, se inyecta instantáneamente al corazón en el tiempo $t = 0$, y se mezcla en forma uniforme con la sangre dentro del corazón. Sea C_0 la concentración inicial del indicador en el corazón y suponga que el corazón tiene un volumen constante V. También suponga que conforme sangre fresca fluye hacia el corazón, la mezcla diluida de sangre e indicador salen a una razón

[1] A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein, et al., "Market Penetration By New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

[2] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.

[3] C. F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, Publishers, 1958).

[4] L. R. Peterson y M. J. Peterson, "Short-Term Retention of Individual Verbal Items", *Journal of Experimental Psychology*, 58 (1959), 193-198.

constante positiva de r. Entonces la concentración del indicador en el corazón en el instante t está dada por

$$C(t) = C_0 e^{-(r/V)t}.$$

Demuestre que $dC/dt = (-r/V)C(t)$.

50. Medicina En el problema 49, suponga que el indicador radiactivo se inyecta a una razón constante R. La concentración en el instante t es entonces

$$C(t) = \frac{R}{r}[1 - e^{-(r/V)t}].$$

a. Encuentre $C(0)$.

b. Demuestre que $\dfrac{dC}{dt} = \dfrac{R}{V} - \dfrac{r}{V}C(t)$.

51. Esquizofrenia Se han usado varios modelos para analizar el tiempo de permanencia en un hospital. Para un grupo particular de esquizofrénicos, un modelo[5] está dado por

$$f(t) = 1 - e^{-0.008t},$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo dado de alta al final de t días de hospitalización. Encuentre la razón de altas (proporción de altas por día) al final de 100 días. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

52. Ahorro y consumo El ahorro S de un país (en miles de millones de dólares) está relacionado con el ingreso nacional I (en miles de millones de dólares) por la ecuación

$$S = \ln \frac{3}{2 + e^{-I}}.$$

a. Demuestre que la propensión marginal al consumo en función del ingreso es $\dfrac{2}{2 + e^{-I}}$.

b. Al millón más cercano, ¿cuál es el ingreso nacional cuando la propensión marginal al ahorro es de $\frac{1}{10}$?

En los problemas 53 y 54 utilice las reglas de diferenciación para encontrar $f'(x)$. Luego use su calculadora gráfica para encontrar todos los ceros reales de $f'(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

53. $f(x) = e^{x^4 + 2x^2 - 4x}$.

54. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + e^{-x}$.

[5] W. W. Eaton y G. A. Whitmore, "Length of Stay as a Stochastic Process: A General Approach and Application to Hospitalization for Schizophrenia". *Journal of Mathematical Sociology*, 5 (1977), 273-292.

OBJETIVO Estudiar la noción de una función definida de manera implícita y determinar derivadas por medio de diferenciación implícita.

11.3 DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

La diferenciación implícita es una técnica para diferenciar funciones que no están dadas en la forma usual $y = f(x)$. Para presentar esta técnica, encontraremos la pendiente de una recta tangente a un círculo. Consideremos el círculo de radio 2, cuyo centro está en el origen (véase la fig. 11.2). Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 4,$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0. \qquad (1)$$

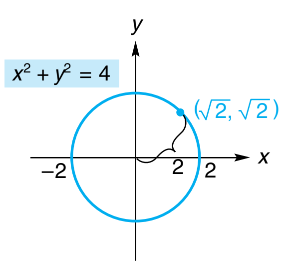


FIGURA 11.2 El círculo $x^2 + y^2 = 4$.

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ está en el círculo. Para encontrar la pendiente en este punto necesitamos encontrar dy/dx ahí. Hasta ahora, hemos tenido a y en forma explícita (directa) en términos de x antes de determinar y'; esto es, en la forma $y = f(x)$. En la ecuación (1) esto no es así. Decimos que la ecuación (1) tiene la forma $F(x, y) = 0$, donde $F(x, y)$ denota una función de dos variables. Lo que parece obvio es despejar y en la ecuación (1) en términos de x:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

$$y^2 = 4 - x^2,$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}. \qquad (2)$$

Se presenta ahora un problema: la ecuación (2) puede dar dos valores de y para un solo valor de x. No define a y de manera explícita en función de x. Sin embargo, podemos suponer que la ecuación (1) define a y como una de dos funciones diferentes de x,

$$y = +\sqrt{4 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{4 - x^2},$$

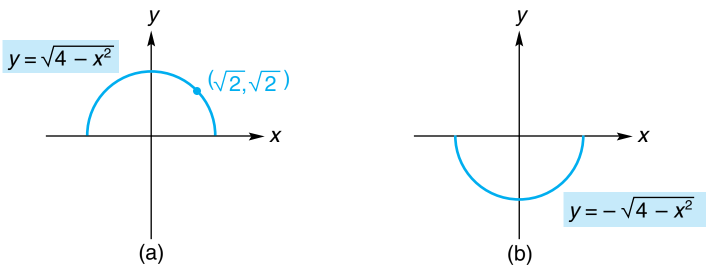


FIGURA 11.3 $x^2 + y^2 = 4$ da lugar a dos funciones diferentes de la variable x.

cuyas gráficas se muestran en la figura 11.3. Como el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se encuentra en la gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$, debemos diferenciar esa función:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4 - x^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}. \end{aligned}$$

Así,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2}} = -1.$$

Por lo que la pendiente del círculo $x^2 + y^2 - 4 = 0$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es igual a -1.

Resumamos las dificultades que se han presentado. Primero, y no se dio al principio en forma explícita en términos de x. Segundo, después de que tratamos de encontrar alguna relación, terminamos con más de una función de x. De hecho, dependiendo de la ecuación dada, puede ser complicado o incluso imposible encontrar una expresión explícita para y. Por ejemplo, sería difícil despejar a y de la ecuación $y^{ex} + \ln(x + y) = 0$. Veremos ahora un método que evita tales dificultades.

Una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, como la que teníamos originalmente, expresa a y como función de x en forma *implícita*. La palabra "implícita" se usa puesto que y no está dada de manera explícita como función de x. Sin embargo, se supone o queda *implicado* que la ecuación define a y por lo menos como una función diferenciable de x. Suponemos entonces que la ecuación (1), $x^2 + y^2 - 4 = 0$, define alguna función diferenciable de x, digamos $y = f(x)$. A continuación tratamos a y como una función de x y diferenciamos ambos miembros de la ecuación (1) con respecto a x. Por último, despejamos dy/dx del resultado. Aplicando este procedimiento, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) = \frac{d}{dx}(0),$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = \frac{d}{dx}(0). \tag{3}$$

Sabemos que $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ y que tanto $\frac{d}{dx}(4)$ como $\frac{d}{dx}(0)$ son cero. Pero, $\frac{d}{dx}(y^2)$ **no** es $2y$, porque estamos diferenciando con respecto a x y no con respecto a y. Esto es, y no es la variable independiente. Como se supone que y es una función de x, y^2 tiene la forma u^n, donde y desempeña el papel de u. Así como la regla de la potencia establece que, $\frac{d}{dx}(u^2) = 2u\frac{du}{dx}$, tenemos $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$. De aquí que la ecuación (3) se transforma en

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Despejando dy/dx resulta

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{4}$$

Observe que la expresión para dy/dx contiene la variable y, así como la variable x. Esto significa que para encontrar dy/dx en un punto, ambas coordenadas del punto deben sustituirse en dy/dx. Así,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{2},\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1, \text{ como antes.}$$

Este método para encontrar dy/dx se llama **diferenciación implícita.** Observamos que la ecuación (4) no está definida cuando $y = 0$. De manera geométrica esto es claro, ya que la recta tangente al círculo en $(2, 0)$ o $(-2, 0)$ es vertical y, por tanto, la pendiente no está definida.

A continuación se dan los pasos a seguir al diferenciar de manera implícita:

Procedimiento de diferenciación implícita

Para una ecuación que suponemos define implícitamente a y como una función diferenciable de x, la derivada $\frac{dy}{dx}$ puede encontrarse como sigue:

1. Diferencie ambos miembros de la ecuación con respecto a x.
2. Agrupe todos lo términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ en un miembro de la ecuación y agrupe los demás términos en el otro miembro.
3. Saque $\frac{dy}{dx}$ como factor común en el miembro que contenga los términos $\frac{dy}{dx}$.
4. Despeje $\frac{dy}{dx}$.

EJEMPLO 1 Diferenciación implícita

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ *por medio de diferenciación implícita si* $y + y^3 - x = 7$.

Solución: aquí y no está dada como función explícita de x [esto es, no está en la forma $y = f(x)$]. Por lo que, suponemos que y es una función implícita (diferenciable) de x y aplicamos el procedimiento anterior de cuatro pasos:

1. Diferenciamos ambos miembros con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(y + y^3 - x) = \frac{d}{dx}(7),$$

$$\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(7).$$

Ahora, $\frac{d}{dx}(y)$ puede escribirse $\frac{dy}{dx}$, y $\frac{d}{dx}(x) = 1$. Por la regla de la potencia,

La derivada de y^3 con respecto a x es $3y^2 \frac{dy}{dx}$, no $3y^2$.

$$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2 \frac{dy}{dx}.$$

Obtenemos así

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

2. Al agrupar todos los términos $\frac{dy}{dx}$ en el miembro izquierdo y los demás en el miembro derecho, resulta

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 1.$$

3. Si factorizamos $\frac{dy}{dx}$ en el miembro izquierdo, tenemos

$$\frac{dy}{dx}(1 + 3y^2) = 1.$$

En un problema de diferenciación implícita, somos capaces de encontrar la derivada de una función sin conocer a la función.

4. Despejamos $\frac{dy}{dx}$ dividiendo ambos miembros entre $1 + 3y^2$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + 3y^2}.$$

Principios en práctica 1
Diferenciación implícita

Suponga que P, la proporción de gente afectada por cierta enfermedad, se describe por medio de $\ln\left(\frac{P}{1 - P}\right) = 0.5t$, donde t es el tiempo en meses. Encontrar $\frac{dP}{dt}$, la razón de cambio a la cual P crece con respecto al tiempo.

EJEMPLO 2 Diferenciación implícita

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ *si* $x^3 + 4xy^2 - 27 = y^4$.

Solución: como y no está dada de manera explícita en términos de x, utilizamos el método de diferenciación implícita:

1. Suponemos que y es una función de x y diferenciamos ambos miembros con respecto a x, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 4xy^2 - 27) = \frac{d}{dx}(y^4),$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + 4\frac{d}{dx}(xy^2) - \frac{d}{dx}(27) = \frac{d}{dx}(y^4).$$

Para encontrar $\frac{d}{dx}(xy^2)$ utilizamos la regla del producto:

$$3x^2 + 4\left[x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x)\right] - 0 = 4y^3\frac{dy}{dx},$$

$$3x^2 + 4\left[x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(1)\right] = 4y^3\frac{dy}{dx},$$

$$3x^2 + 8xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 = 4y^3\frac{dy}{dx}.$$

2. Al agrupar los términos $\frac{dy}{dx}$ en el miembro izquierdo y los otros miembros en el lado derecho obtenemos

$$8xy\frac{dy}{dx} - 4y^3\frac{dy}{dx} = -3x^2 - 4y^2.$$

3. Factorizamos $\frac{dy}{dx}$ en el miembro izquierdo obtenemos

$$\frac{dy}{dx}(8xy - 4y^3) = -3x^2 - 4y^2.$$

4. Despejamos $\frac{dy}{dx}$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 4y^2}{8xy - 4y^3} = \frac{3x^2 + 4y^2}{4y^3 - 8xy}.$$

Principios en práctica 2
Diferenciación implícita

El volumen V de un globo esférico está dado por la ecuación $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio del globo. Si el radio está creciendo a la velocidad de 5 pulgadas/minuto $\left(\text{esto es, } \frac{dr}{dt} = 5\right)$, entonces determine $\frac{dV}{dt}$, la razón de aumento del volumen del globo, cuando el radio es de 12 pulgadas.

EJEMPLO 3 Diferenciación implícita

Encontrar la pendiente de la curva $x^3 = (y - x^2)^2$ en $(1, 2)$.

Solución: la pendiente en $(1, 2)$ es el valor de dy/dx en ese punto. Encontraremos dy/dx por medio de diferenciación implícita. Tenemos

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}[(y - x^2)^2],$$

$$3x^2 = 2(y - x^2)\left(\frac{dy}{dx} - 2x\right),$$

$$3x^2 = 2\left(y\frac{dy}{dx} - 2xy - x^2\frac{dy}{dx} + 2x^3\right),$$

$$3x^2 = 2y\frac{dy}{dx} - 4xy - 2x^2\frac{dy}{dx} + 4x^3,$$

$$3x^2 + 4xy - 4x^3 = 2y\frac{dy}{dx} - 2x^2\frac{dy}{dx},$$

$$3x^2 + 4xy - 4x^3 = 2\frac{dy}{dx}(y - x^2),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4xy - 4x^3}{2(y - x^2)}.$$

Así, la pendiente de la curva en $(1, 2)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = \frac{3(1)^2 + 4(1)(2) - 4(1)^3}{2[2 - (1)^2]} = \frac{7}{2}.$$

Principios en práctica 3
Diferenciación implícita

Una escalera de 10 pies de largo está recargada en una pared vertical. Suponga que la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a una velocidad constante de 3 pies/s. $\left(\text{Esto es, } \frac{dx}{dt} = 3.\right)$ ¿Qué tan rápido la parte superior de la escalera se desliza hacia abajo, cuando la parte superior de la escalera está a 8 pies (esto es cuando $y = 8$) del piso? (es decir, ¿cuánto es $\frac{dy}{dt}$?) (Utilice el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos, $x^2 + y^2 = z^2$, en donde x y y son los catetos del triángulo y z es la hipotenusa.)

EJEMPLO 4 Diferenciación implícita

Si $q - p = \ln q + \ln p$, encuentre dq/dp.

Solución: suponemos que q es una función de p y diferenciamos ambos miembros de la ecuación con respecto a p:

$$\frac{d}{dp}(q) - \frac{d}{dp}(p) = \frac{d}{dp}(\ln q) + \frac{d}{dp}(\ln p),$$

$$\frac{dq}{dp} - 1 = \frac{1}{q}\frac{dq}{dp} + \frac{1}{p},$$

$$\frac{dq}{dp} - \frac{1}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{1}{p} + 1,$$

$$\frac{dq}{dp}\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p} + 1,$$

$$\frac{dq}{dp}\left(\frac{q-1}{q}\right) = \frac{1+p}{p} \qquad \text{(simplificando),}$$

$$\frac{dq}{dp} = \frac{(1+p)q}{p(q-1)}.$$

Ejercicio 11.3

En los problemas del 1 al 24 encuentre dy/dx por medio de diferenciación implícita.

1. $x^2 + 4y^2 = 4.$
2. $3x^2 + 6y^2 = 1.$
3. $3y^4 - 7x = 0.$
4. $2x^2 - 3y^2 = 4.$
5. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3.$
6. $x^{1/5} + y^{1/5} = 4.$
7. $x^{3/4} + y^{3/4} = 5.$
8. $y^3 = 4x.$
9. $xy = 4.$
10. $x + xy - 2 = 0.$
11. $xy - y - 11x = 5.$
12. $x^2 + y^2 = 2xy + 3.$
13. $2x^3 + y^3 - 12xy = 0.$
14. $2x^3 + 3xy + y^3 = 0.$
15. $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}.$
16. $x^3y^3 + x = 9.$
17. $3x^2y^3 - x + y = 25.$
18. $y^2 + y = \ln x.$
19. $y \ln x = xe^y.$
20. $\ln(xy) + x = 4.$
21. $xe^y + y = 13.$
22. $ax^2 - by^2 = c.$
23. $(1 + e^{3x})^2 = 3 + \ln(x + y).$
24. $y^2 = \ln(x + y).$

25. Si $x + xy + y^2 = 7$, encuentre dy/dx en $(1, 2)$.

26. Si $x\sqrt{y+1} = y\sqrt{x+1}$, encuentre dy/dx en $(3, 3)$.

27. Encuentre la pendiente de la curva $4x^2 + 9y^2 = 1$ en el punto $\left(0, \frac{1}{3}\right)$; y también en (x_0, y_0).

28. Encuentre la pendiente de la curva $(x^2 + y^2)^3 = 16y^2$ en el punto $(0, 2)$.

29. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^3 + y^2 = 3$$

en el punto $(-1, 2)$.

30. Repita el problema 29 para la curva

$$y^2 + xy - x^2 = 5$$

en el punto $(4, 3)$.

Para las ecuaciones de demanda en los problemas del 31 al 34 encuentre la razón de cambio de q con respecto a p.

31. $p = 100 - q^2$. **32.** $p = 400 - \sqrt{q}$. **33.** $p = \dfrac{20}{(q+5)^2}$. **34.** $p = \dfrac{20}{q^2+5}$.

35. Radiactividad La actividad relativa I/I_0 de un elemento readiactivo varía con el tiempo transcurrido de acuerdo con la ecuación

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\lambda t,$$

donde λ (una letra griega que se lee "lambda") es la *constante* de desintegración e I_0 es la intensidad inicial (una constante). Encuentre la razón de cambio de la intensidad I con respecto al tiempo transcurrido t.

36. Física Para una estrella cuya brillantez no es muy diferente de la de nuestro Sol, la relación entre su masa m y su luminosidad L está dada por

$$\log m = 0.06 + 0.26 \log L.$$

a. Encuentre dm/dL por diferenciación implícita.
b. Suponga ahora que la masa de una estrella está cambiando con respecto al tiempo t a razón de dm/dt. Encuentre una expresión para dL/dt, la razón correspondiente de cambio en la luminosidad.

37. Sismos La magnitud M de un sismo y su energía E están relacionadas por la ecuación[6]

$$1.5\,M = \log\left(\frac{E}{2.5 \times 10^{11}}\right).$$

Aquí M está dada en términos de la escala de Richter de 1958 y E está en ergios. Determine la razón de cambio de la energía con respecto a la magnitud.

38. Escala física La relación entre la velocidad (v), la frecuencia (f) y la longitud de onda (λ) de cualquier onda está dada por

$$v = f\lambda.$$

Encuentre $df/d\lambda$ por diferencia implícita. (Trate a v como constante.) Luego demuestre que el mismo resultado se obtiene si primero se despeja f y enseguida se diferencia con respecto a λ.

39. Física La relación entre la temperatura T y el volumen V cuando cierto gas queda sometido a un proceso adiabático está dada por

$$TV^{0.4} = 1500.$$

Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto a la temperatura.

40. Biología La ecuación $(P + a)(v + b) = k$ se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular".[7] Aquí P es la carga impuesta al músculo, v la velocidad del acortamiento de las fibras del músculo, y a, b y k son constantes positivas. Use diferenciación implícita para mostrar que dv/dP, en términos de P, está dada por

$$\frac{dv}{dP} = -\frac{k}{(P+a)^2}.$$

41. Propensión marginal al consumo Los ahorros S de un país se definen implícitamente en términos de su ingreso nacional I por medio de la ecuación

$$S^2 + \frac{1}{4}I^2 = SI + I,$$

donde S e I están en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal al *consumo* cuando $I = 16$ y $S = 12$.

42. Sustitución tecnológica Tecnologías o productos nuevos suelen reemplazar a los viejos. Por ejemplo, la mayoría de las aerolíneas comerciales usan actualmente motores de reacción en vez de motores de hélice. En su análisis de pronósticos de la sustitución tecnológica, Hurter y Rubenstein[8] se refieren a la ecuación

$$\ln\frac{f(t)}{1 - f(t)} + \sigma\frac{1}{1 - f(t)} = C_1 + C_2 t,$$

donde $f(t)$ es la participación en el mercado del sustituto en un tiempo t y C_1, C_2 y σ (letra griega que se lee "sigma") son constantes. Verifique la afirmación de que la razón de sustitución está dada por

$$f'(t) = \frac{C_2\, f(t)[1 - f(t)]^2}{\sigma f(t) + [1 - f(t)]}.$$

[6] K. E. Bullen, *An Introduction to the Theory of Seismology* (Cambridge en la University Press, 1963).

[7] R.W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

[8] A. P Hurter, Jr., A. H. Rubenstein, et al., "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

OBJETIVO Describir el método de diferenciación logarítmica y mostrar cómo diferenciar una función de la forma u^v.

11.4 DIFERENCIACIÓN LOGARÍTMICA

Existe una técnica llamada **diferenciación logarítmica,** que con frecuencia simplifica la diferenciación de $y = f(x)$ cuando $f(x)$ contiene productos, cocientes o potencias. El procedimiento es como sigue:

Diferenciación logarítmica

Para diferenciar $y = f(x)$,

1. Tome el logaritmo natural de ambos miembros de la ecuación. Esto resulta en
$$\ln y = \ln[f(x)].$$
2. Simplifique $\ln[f(x)]$ por medio de las propiedades de los logaritmos.
3. Diferencie ambos miembros con respecto a x.
4. Despeje $\frac{dy}{dx}$.
5. Exprese la respuesta sólo en términos de x. Esto requiere sustituir $f(x)$ por y.

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 1 Diferenciación logarítmica

Encontrar y' *si* $y = \dfrac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$.

Solución: la diferenciación de esta función en la manera usual es engorrosa, porque implica las reglas del cociente, de la potencia y del producto. La diferenciación logarítmica simplifica el trabajo.

1. Tomamos logaritmos naturales en ambos miembros,
$$\ln y = \ln \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}.$$
2. Simplificamos por medio de las propiedades de los logaritmos
$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(2x-5)^3 - \ln[x^2\sqrt[4]{x^2+1}]\\ &= \ln(2x-5)^3 - [\ln x^2 + \ln(x^2+1)^{1/4}],\\ \ln y &= 3\ln(2x-5) - 2\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+1).\end{aligned}$$

Como y es una función de x, al diferenciar $\ln y$ con respecto a x se obtiene $\frac{1}{y}y'$.

3. Al diferenciar con respecto a x se obtiene
$$\frac{1}{y}y' = 3\left(\frac{1}{2x-5}\right)(2) - 2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x),$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}.$$
4. Al despejar y' resulta
$$y' = y\left[\frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}\right].$$

5. Sustituimos la expresión inicial para y y obtenemos y' sólo en términos de x:

$$y' = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}\left[\frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}\right].$$

La diferenciación logarítmica puede usarse también para diferenciar funciones de la forma $\boldsymbol{y = u^v}$, donde u y v son funciones diferenciables de x. Como la base y el exponente no son necesariamente constantes, las técnicas de diferenciación para u^n y a^u no se aplican aquí.

EJEMPLO 2 Diferenciación de la forma $\boldsymbol{u^v}$

Diferenciar $y = x^x$ usando la diferenciación logarítmica.

Solución: esta función es de la forma $y = u^v$, donde u y v son funciones de x. Si tomamos logaritmos naturales de ambos miembros resulta $\ln y = \ln x^x$ o bien

$$\ln y = x \ln x.$$

Diferenciando ambos miembros con respecto a x se obtiene

$$\frac{1}{y}y' = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1),$$

$$\frac{y'}{y} = 1 + \ln x.$$

Despejamos y' y sustituimos y por x^x, obtenemos

$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

Vale la pena mencionar que una técnica alternativa para diferenciar una función de la forma $y = u^v$ es convertirla en una función exponencial con base e. Por ejemplo, para la función del ejemplo 2, tenemos

$$y = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x},$$

$$y' = e^{x\ln x}\left(x\cdot\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

$$= x^x(1 + \ln x).$$

EJEMPLO 3 Diferenciación de la forma $\boldsymbol{u^v}$

Encontrar la derivada de $y = (1 + e^x)^{\ln x}$.

Solución: ésta tiene la forma $y = u^v$, donde $u = 1 + e^x$ y $v = \ln x$. Por medio de la diferenciación logarítmica se obtiene

$$\ln y = \ln[(1 + e^x)^{\ln x}],$$

$$\ln y = (\ln x)\ln(1 + e^x),$$

$$\frac{1}{y}y' = (\ln x)\left[\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x\right] + [\ln(1+e^x)]\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{e^x \ln x}{1+e^x} + \frac{\ln(1+e^x)}{x},$$

$$y' = y\left[\frac{e^x \ln x}{1+e^x} + \frac{\ln(1+e^x)}{x}\right],$$

$$y' = (1+e^x)^{\ln x}\left[\frac{e^x \ln x}{1+e^x} + \frac{\ln(1+e^x)}{x}\right].$$

Después de terminar esta sección, usted deberá entender cómo diferenciar las siguientes formas:

$$y = \begin{cases} [f(x)]^n, & \text{(a)} \\ a^{f(x)}, & \text{(b)} \\ [f(x)]^{g(x)}. & \text{(c)} \end{cases}$$

Para el tipo (a) puede utilizar la regla de la potencia. Para el tipo (b) utilice la fórmula de diferenciación de funciones exponenciales [si $a \neq e$, convierta primero $a^{f(x)}$ en una función e^u]. Para el tipo (c) utilice diferenciación logarítmica o primero convierta la función en una función e^u. No emplee una regla en situaciones en que no sea aplicable. Por ejemplo, la derivada de x^x no es $x \cdot x^{x-1}$.

Ejercicio 11.4

En los problemas del 1 al 12 encuentre y' por medio de la diferenciación logarítmica.

1. $y = (x+1)^2(x-2)(x^2+3)$.
2. $y = (3x+4)(8x-1)^2(3x^2+1)^4$.
3. $y = (3x^3-1)^2(2x+5)^3$.
4. $y = (3x+1)\sqrt{8x-1}$.
5. $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x^2-2}\sqrt{x+4}$.
6. $y = (x+2)\sqrt{x^2+9}\sqrt[3]{6x+1}$.
7. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x}$.
8. $y = \sqrt{\dfrac{x^2+5}{x+9}}$.
9. $y = \dfrac{(2x^2+2)^2}{(x+1)^2(3x+2)}$.
10. $y = \dfrac{x(1+x^2)^2}{\sqrt{2+x^2}}$.
11. $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)}{3x-4}}$.
12. $y = \sqrt[3]{\dfrac{6(x^3+1)^2}{x^6e^{-4x}}}$.

En los problemas del 13 al 20 determine y'.

13. $y = x^{2x+1}$.
14. $y = (2x)^{\sqrt{x}}$.
15. $y = x^{1/x}$.
16. $y = \left(\dfrac{2}{x}\right)^x$.
17. $y = (3x+1)^{2x}$.
18. $y = 4x^{x^2}$.
19. $y = 4e^x x^{3x}$.
20. $y = (\ln x)^{e^x}$.

21. Si $y = (4x-3)^{2x+1}$, encuentre dy/dx cuando $x = 1$.
22. Si $y = (\ln x)^{\ln x}$, encuentre dy/dx cuando $x = e$.
23. Determine una ecuación de la recta tangente a

$$y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^2$$

en el punto en donde $x = 0$.

24. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$y = e^x(-x)^x$$

en el punto en donde $x = -1$.

25. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$y = 3e^x(x^2-x+1)^x$$

en el punto en donde $x = 1$.

26. Si $y = x^{2x}$, determine la razón de cambio relativa de y con respecto a x, cuando $x = 2$.

27. Si $y = (3x)^{-2x}$, determine el valor de x para el que la razón *porcentual* de cambio de y con respecto a x es 60.

28. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones positivas y diferenciables y $y = [f(x)]^{g(x)}$. Utilice diferenciación logarítmica para demostrar que

$$\frac{dy}{dx} = [f(x)]^{g(x)}\left(f'(x)\frac{g(x)}{f(x)} + g'(x)\ln[f(x)]\right).$$

OBJETIVO Determinar las derivadas de orden superior explícita e implícitamente.

11.5 Derivadas de orden superior

Sabemos que la derivada de una función $y = f(x)$ es a su vez una función $f'(x)$. Si diferenciamos $f'(x)$, la función resultante se llama **segunda derivada** de f con respecto a x. Se denota como $f''(x)$, que se lee "f doble prima de x". De manera similar, la derivada de la segunda derivada se llama **tercera derivada** y se escribe $f'''(x)$. Continuando de esta manera, obtenemos *derivadas de orden superior*. En la tabla 11.1, se indican algunos de los símbolos utilizados para representarlas. Para derivadas de orden superior al tercero, no se usan primas en su representación.

TABLA 11.1

Primera derivada	y',	$f'(x)$,	$\frac{dy}{dx}$,	$\frac{d}{dx}[f(x)]$,	$D_x y$
Segunda derivada	y'',	$f''(x)$,	$\frac{d^2y}{dx^2}$,	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$,	$D_x^2 y$
Tercera derivada	y''',	$f'''(x)$,	$\frac{d^3y}{dx^3}$,	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$,	$D_x^3 y$
Cuarta derivada	$y^{(4)}$,	$f^{(4)}(x)$,	$\frac{d^4y}{dx^4}$,	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$,	$D_x^4 y$

Advertencia El símbolo d^2y/dx^2 representa la segunda derivada de y. No es lo mismo que $(dy/dx)^2$, que es el cuadrado de la primera derivada de y. Esto es,

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

EJEMPLO 1 Encontrar derivadas de orden superior

a. *Si* $f(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$, *encontrar todas sus derivadas de orden superior.*

Solución: al diferenciar $f(x)$ resulta

$$f'(x) = 18x^2 - 24x + 6.$$

Al diferenciar $f'(x)$ resulta

$$f''(x) = 36x - 24.$$

De manera similar,

$$f'''(x) = 36,$$
$$f^{(4)}(x) = 0.$$

Todas las derivadas sucesivas son también cero: $f^{(5)}(x) = 0$, etcétera.

b. *Si* $f(x) = 7$, *encontrar* $f''(x)$.

Solución:

$$f'(x) = 0,$$
$$f''(x) = 0.$$

Principios en práctica 1

Determinación de una derivada de segundo orden

La altura $h(t)$ de un piedra que se deja caer desde un edificio de 200 pies de altura, está dada por $h(t) = 200 - 16t^2$, en donde t es el tiempo medido en segundos. Determine $\frac{d^2h}{dt^2}$, la aceleración de la piedra en el instante t.

EJEMPLO 2 Determinación de una derivada de segundo orden

Si $y = e^{x^2}$, encontrar $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}(2x) = 2xe^{x^2}.$$

Por la regla del producto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2[x(e^{x^2})(2x) + e^{x^2}(1)] = 2e^{x^2}(2x^2 + 1).$$

Principios en práctica 2

Evaluación de una derivada de segundo orden

Si el costo de producir q unidades de un producto es

$$c(q) = 7q^2 + 11q + 19$$

y la función de costo marginal es $c'(q)$, determine la razón de cambio de la función de costo marginal con respecto a q cuando $q = 3$.

EJEMPLO 3 Evaluación de una derivada de segundo orden

Si $y = f(x) = \frac{16}{x + 4}$, encontrar $\frac{d^2y}{dx^2}$ y evaluarla cuando $x = 4$.

Solución: como $y = 16(x + 4)^{-1}$, la regla de la potencia nos da

$$\frac{dy}{dx} = -16(x + 4)^{-2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 32(x + 4)^{-3} = \frac{32}{(x + 4)^3}.$$

Evaluando cuando $x = 4$, obtenemos

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=4} = \frac{32}{8^3} = \frac{1}{16}.$$

La segunda derivada evaluada en $x = 4$, se denota también como $f''(4)$ o $y''(4)$.

EJEMPLO 4 Determinación de la razón de cambio de $f''(x)$

Si $f(x) = x \ln x$, encontrar la razón de cambio de $f''(x)$.

La razón de cambio de $f''(x)$ es $f'''(x)$.

Solución: para encontrar la razón de cambio de cualquier función, debemos encontrar su derivada. Así, queremos la derivada de $f''(x)$, que es $f'''(x)$. De acuerdo con esto,

$$f'(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x,$$

$$f''(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Diferenciación implícita de orden superior

Encontraremos ahora una derivada de orden superior por medio de diferenciación implícita. Recuerde que suponemos que y es una función de x.

EJEMPLO 5 Diferenciación implícita de orden superior

Encontrar $\frac{d^2y}{dx^2}$ *si* $x^2 + 4y^2 = 4$.

Solución: al diferenciar ambos miembros con respecto a x, obtenemos

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4y\frac{d}{dx}(-x) - (-x)\frac{d}{dx}(4y)}{(4y)^2}$$

$$= \frac{4y(-1) - (-x)\left(4\frac{dy}{dx}\right)}{16y^2}$$

$$= \frac{-4y + 4x\frac{dy}{dx}}{16y^2}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + x\frac{dy}{dx}}{4y^2} \tag{2}$$

Aunque hemos encontrado una expresión para d^2y/dx^2, nuestra respuesta contiene la derivada dy/dx. Es costumbre expresar la respuesta sin la derivada, esto es, sólo en términos de x y y. Esto se hace con facilidad. De la ecuación (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$, por lo que al sustituir este valor en la ecuación (2), obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + x\left(\frac{-x}{4y}\right)}{4y^2} = \frac{-4y^2 - x^2}{16y^3} = -\frac{4y^2 + x^2}{16y^3}.$$

Podemos simplificar aún más la respuesta. Como $x^2 + 4y^2 = 4$ (ecuación original),

En el ejemplo 5 no es rara la simplificación de d^2y/dx^2 por medio del uso de la ecuación original.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{16y^3} = -\frac{1}{4y^3}.$$

EJEMPLO 6 Diferenciación implícita de orden superior

Encontrar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *si* $y^2 = e^{x+y}$.

Solución: al diferenciar ambos miembros con respecto a x se obtiene

$$2y\frac{dy}{dx} = e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right).$$

Despejando dy/dx, obtenemos

$$2y\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + e^{x+y}\frac{dy}{dx},$$

$$2y\frac{dy}{dx} - e^{x+y}\frac{dy}{dx} = e^{x+y},$$

$$(2y - e^{x+y})\frac{dy}{dx} = e^{x+y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{2y - e^{x+y}}.$$

Como $y^2 = e^{x+y}$ (ecuación original),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2y - y^2} = \frac{y}{2-y}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2-y)\dfrac{dy}{dx} - y\left(-\dfrac{dy}{dx}\right)}{(2-y)^2} = \frac{2\dfrac{dy}{dx}}{(2-y)^2}.$$

Ahora expresamos la respuesta sin dy/dx. Como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2-y}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\left(\dfrac{y}{2-y}\right)}{(2-y)^2} = \frac{2y}{(2-y)^3}.$$

Ejercicio 11.5

En los problemas del 1 al 20 encuentre las derivadas indicadas.

1. $y = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2, \quad y'''$.

2. $y = 2x^4 - 6x^2 + 7x - 2, \quad y'''$.

3. $y = 8 - x, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. $y = -x - x^2, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5. $y = x^3 + e^x, \quad y^{(4)}$.

6. $f(q) = \ln q, \quad f'''(q)$.

7. $f(x) = x^2 \ln x, \quad f''(x)$.

8. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y'''$.

9. $f(p) = \dfrac{1}{6p^3}, \quad f'''(p)$.

10. $f(x) = \sqrt{x}, \quad f''(x)$.

11. $f(r) = \sqrt{9 - r}, \quad f''(r)$.

12. $y = e^{-4x^2}, \quad y''$.

13. $y = \dfrac{1}{5x - 6}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

14. $y = (2x + 1)^4, \quad y''$.

15. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, y''.

16. $y = 2x^{1/2} + (2x)^{1/2}$, y''.

17. $y = \ln[x(x+6)]$, y''.

18. $y = \ln\dfrac{(2x-3)(4x-1)}{x+3}$, y''.

19. $f(z) = z^2e^z$, $f''(z)$.

20. $y = \dfrac{x}{e^x}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

21. Si $y = e^{2x}$, encuentre $\left.\dfrac{d^5y}{dx^5}\right|_{x=0}$.

22. Si $y = e^{2\ln(x^3+1)}$, encuentre y'' cuando $x = 1$.

En los problemas del 23 al 32 determine y''.

23. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$.

24. $x^2 - y^2 = 16$.

25. $y^2 = 4x$.

26. $4x^2 + 3y^2 = 4$.

27. $\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 4$.

28. $y^2 - 6xy = 4$.

29. $xy + y - x = 4$.

30. $xy + y^2 = 1$.

31. $y = e^{x+y}$.

32. $e^x - e^y = x^2 + y^2$.

---

33. Si $x^2 + 8y = y^2$, encuentre d^2y/dx^2 cuando $x = 3$ y $y = -1$.

34. Demuestre que la ecuación

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$$

satisface si $f(x) = (3x-5)e^{-2x}$.

35. Encuentre la razón de cambio de $f'(x)$ si $f(x) = (5x-3)^4$.

36. Encuentre la razón de cambio de $f''(x)$ si

$$f(x) = 6\sqrt{x} + \frac{1}{6\sqrt{x}}.$$

37. Costo marginal Si $c = 0.3q^2 + 2q + 850$ es una función de costo, ¿qué tan rápido está cambiando el costo marginal cuando $q = 100$?

38. Ingreso marginal Si $p = 1000 - 45q - q^2$ es una ecuación de demanda, ¿qué tan rápido está cambiando el ingreso marginal cuando $q = 10$?

39. Si $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x - 6$, determine los valores de x para los que $f''(x) = 0$.

40. Suponga que $e^y = y^2e^x$. (a) Determine dy/dx y exprese su respuesta sólo en términos de y. (b) Determine d^2y/dx^2 y exprese su respuesta sólo en términos de y.

En los problemas 41 y 42 determine $f''(x)$. Luego use su calculadora gráfica para encontrar todos los ceros de $f''(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. $f(x) = 6e^x - x^3 - 15x^2$.

42. $f(x) = \dfrac{x^5}{20} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2}$.

11.6 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 11.3 diferenciación implícita

Sección 11.4 diferenciación logarítmica

Sección 11.5 derivadas de orden superior, $f''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d^4}{dx^4}[f(x)]$, y así sucesivamente

Resumen

Si una ecuación define de manera implícita a y como función de x [en vez de definirla en forma explícita, en la forma $y = f(x)$], entonces dy/dx puede encontrarse por diferenciación implícita. Con este método, tratamos a y como una función de x y diferenciamos ambos miembros de la ecuación con respecto a x. Al hacer esto, recuerde que

$$\frac{d}{dx}(y^n) = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}.$$

Por último, despejamos de la ecuación a dy/dx.

Las fórmulas para derivar logaritmos naturales y funciones exponenciales son

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

y

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}.$$

Para diferenciar funciones logarítmicas y exponenciales con base diferente a e, primero la función puede transformarse a base e y luego diferenciarse el resultado. De manera alterna, pueden aplicarse las fórmulas de diferenciación

$$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)u} \cdot \frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u(\ln a)\frac{du}{dx}.$$

Suponga que $f(x)$ consiste en productos, cocientes o potencias. Para diferenciar $y = \log_b [f(x)]$, puede ser conveniente usar las propiedades de los logaritmos para reescribir $\log_b [f(x)]$ en términos de logaritmos más sencillos y luego diferenciar esa forma. Para diferenciar $y = f(x)$, donde $f(x)$ consiste en productos, cocientes o potencias, puede utilizarse el método de diferenciación logarítmica. En este método, tomamos el logaritmo natural de ambos miembros de $y = f(x)$ para obtener $\ln y = \ln[f(x)]$. Después de simplificar $\ln[f(x)]$ por medio de las propiedades de los logaritmos, diferenciamos ambos miembros de $\ln y = \ln[f(x)]$ con respecto a x y luego despejamos y'. La diferenciación logarítmica se utiliza también para diferenciar $y = u^v$, donde u y v son funciones de x.

Como la derivada $f'(x)$ de una función $y = f(x)$ es a su vez una función, podemos diferenciarla de manera sucesiva para obtener la segunda derivada $f''(x)$, la tercera derivada $f'''(x)$ y otras derivadas de orden superior.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 30 diferencie las funciones dadas.

1. $y = 2e^x + e^2 + e^{x^2}$.

2. $f(w) = we^w + w^2$.

3. $f(r) = \ln(r^2 + 5r)$.

4. $y = e^{\ln x}$.

5. $y = e^{x^2+4x+5}$.

6. $f(t) = \log_6\sqrt{t^2 + 1}$.

7. $y = e^x(x^2 + 2)$.

8. $y = 2^{7x^2}$.

9. $y = \sqrt{(x - 6)(x + 5)(9 - x)}$.

10. $f(t) = e^{\sqrt{t}}$.

11. $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$.

12. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{x^2}$.

13. $f(q) = \ln[(q + 1)^2(q + 2)^3]$.

14. $y = (x - 6)^4(x + 4)^3(6 - x)^2$.

15. $y = 10^{2-7x}$.

16. $y = (e + e^2)^0$.

17. $y = \dfrac{4e^{3x}}{xe^{x-1}}$.

18. $y = \dfrac{e^x}{\ln x}$.

19. $y = \log_2(8x + 5)^2$.

20. $y = \ln\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

21. $f(l) = \ln(1 + l + l^2 + l^3)$.

22. $y = x^{x^3}$.

23. $y = (x + 1)^{x+1}$.

24. $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$.

25. $f(t) = \ln(t^2\sqrt{2 - t})$.

26. $y = (x + 3)^{\ln x}$.

27. $y = \dfrac{(x^2 + 2)^{3/2}(x^2 + 9)^{4/9}}{(x^3 + 6x)^{4/11}}$

28. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

29. $y = (x^x)^x$.

30. $y = x^{(x^x)}$.

En los problemas del 31 al 34 evalúe y' en el valor dado de x.

31. $y = (x + 1)\ln x^2, \quad x = 1$.

32. $y = \dfrac{e^{x^2-4}}{\sqrt{x + 7}}, \quad x = 2$.

33. $y = e^{e+x\ln(1/x)}, \quad x = e$.

34. $y = \left[\dfrac{4^{3x}(x^3 - x + 1)^{1/5}}{(x^2 + x + 1)^4}\right]^{-2}, \quad x = 0$.

En los problemas 35 y 36 encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de x.

35. $y = 3e^x, \quad x = \ln 2$.

36. $y = x + x^2\ln x, \quad x = 1$.

---

37. Encuentre la intersección con el eje y de la recta tangente a la gráfica de $y = x(2^{2-x^2})$ en el punto en que $x = 1$.

38. Si $w = 5^{x+1} + \ln(1 - x^2)$ y

$$x = \log_5(t^2 + 4) - e^{(t-1)^2},$$

encuentre w y dw/dt cuando $t = 1$. Simplifique sus respuestas.

En los problemas del 39 al 42 encuentre la derivada indicada en el punto dado.

39. $y = e^{x^2-4}$, y'', $(2, 1)$.

40. $y = x^2e^x$, y''', $(1, e)$.

41. $y = \ln(2x)$, y''', $(1, \ln 2)$.

42. $y = x \ln x$, y'', $(1, 0)$.

En los problemas del 43 al 46 encuentre dy/dx.

43. $2xy + y^2 = 10$.

44. $x^2y^2 = 1$.

45. $\ln(xy^2) = xy$.

46. $(\ln y)e^{y \ln x} = e^2$.

En los problemas 47 y 48 encuentre d^2y/dx^2 en el punto dado.

47. $x + xy + y = 5$, $(2, 1)$.

48. $xy + y^2 = 2$, $(-1, 2)$.

49. Si y se define implícitamente por $e^y = (y + 1)e^x$, determine dy/dx y d^2y/dx^2 sólo como funciones explícitas de y.

50. Si $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$, demuestre que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2x^{-3/2}.$$

51. Esquizofrenia Se han usado varios modelos para analizar la permanencia en un hospital. Para un grupo particular de esquizofrénicos, un modelo es[9]

$$f(t) = 1 - (0.8e^{-0.01t} + 0.2e^{-0.0002t}),$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo que fue dado de alta al final de t días de hospitalización. Determine la razón de altas (proporción de altas por día) al término de t días.

52. *Si* $f(x) = e^{9x^4+4x^3-36x}$, encuentre todos los ceros reales de $f'(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

53. Si $f(x) = \dfrac{x^5}{10} + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{2x^3}{3} + x^2 + 3$, encuentre todos los ceros de $f''(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

[9] Adaptado de W. W. Eaton y G. A. Whitmore, "Length of Stay as a Stochastic Process: A General Approach and Application to Hospitalization for Schizophrenia", *Journal of Mathematical Sociology*, 5 (1977), 273-292.

Aplicación práctica

Cambio de la población con respecto al tiempo

Ahora que sabemos cómo encontrar la derivada de una función, podríamos preguntarnos si hay una manera de efectuar el proceso en sentido inverso, es decir, encontrar una función, dada su derivada. Eso es lo que concierne a la integración (capítulos 14 y 15). Pero, mientras tanto podemos usar la derivada de una función para encontrar la función de manera *aproximada*, aun sin el conocimiento de cómo hacer la integración.

Para ilustrar, suponga que deseamos describir la población de un pequeño pueblo con respecto al tiempo, el cual se encuentra situado en un área fronteriza. Imagine que las cosas que sabemos acerca del pueblo son hechos de cómo su población, P, cambia a lo largo del tiempo, t, con la población medida en número de personas y el tiempo en años:

1. Los nacimientos exceden a las defunciones, de modo que en el transcurso de un año existe un 25% de incremento en la población antes que otros factores se tomen en cuenta. Así, el cambio anual debido a la diferencia entre nacimientos/defunciones es $0.25P$.
2. Cada año, de los viajeros que ingresan al pueblo, 10 deciden detenerse y establecerse. Esto contribuye con una constante de 10 al cambio anual.
3. La soledad provoca que algunas personas salgan del pueblo cuando éste es demasiado pequeño para ellas. En el caso extremo, el 99% de las personas saldrán en el transcurso de un año si ellas se siente solas (población $= 1$). Cuando la población es 100, 10% de los residentes emigran al año debido a la soledad.

   Suponiendo una relación exponencial, escribimos la probabilidad de que una persona dada abandone el pueblo en el transcurso de un año debido a la soledad, como Ae^{-kP}, donde A y k son constantes positivas. Los números nos indican que $Ae^{-k\cdot 1} = 0.99$ y $ae^{-k\cdot 100} = 0.10$. Resolviendo este par de ecuaciones para A y k se obtiene

   $$k = \frac{\ln 9.9}{99} \approx 0.02316$$

   y

   $$A = 0.99e^{(\ln 9.9)/99} \approx 1.01319.$$

Y si Ae^{-kP} es la probabilidad de que una sola persona emigre, el cambio de la población por año debida a soledad es $-P$ veces eso, es decir, $-1.01319Pe^{-0.02316P}$ (el signo negativo es debido a que el cambio es hacia abajo).

4. La aglomeración provoca que algunas personas emigren cuando el pueblo es demasiado grande para ellas. Nadie tiene problema de aglomeración cuando están solos (población $= 1$), pero cuando la población es 100, 10% de los residentes emigran al año debido a la aglomeración.

   Nuevamente, suponiendo una relación exponencial, escribimos la probabilidad de que una persona emigre en el transcurso de un año debido a la aglomeración como $1 - Ae^{-kP}$. Esta vez, los números nos dicen que $1 - Ae^{-k\cdot 1} = 0$ y $1 - Ae^{-k\cdot 100} = 0.10$. Resolviendo este par de ecuaciones para A y k se obtiene

   $$k = -\frac{\ln 0.9}{99} \approx 0.001064$$

   y

   $$A = e^{-(\ln 0.9)/99} \approx 1.001065.$$

   Si $1 - Ae^{-kP}$ es la probabilidad de la emigración de una sola persona, entonces el cambio de la población por año debido a la aglomeración es $-P$ veces eso, es decir, $-P(1 - 1.001065e^{-0.001064P})$.

Ahora, la tasa global de cambio en la población es el efecto neto de todos estos factores reunidos. En forma de ecuación,

$$\frac{dP}{dt} = 0.25P + 10 - 1.01319Pe^{-0.02316P}$$

$$-P(1 - 1.001065e^{-0.001064P}).$$

Antes de intentar reconstruir la función $P(t)$, hacemos la gráfica de la derivada. En una calculadora gráfica esto se ve como se muestra en la figura 11.4. Observe que $\frac{dP}{dt}$ está descrita como una función de P. Esta gráfica es diferente de la que hubiésemos obtenido si conociésemos a P como una función de t, determinado su derivada y graficado en la manera estándar, es decir, como función de t. No obstante, esta gráfica revela algunos hechos significativos. Primero, la derivada es positiva desde $P = 0$ hasta $P = 311$; esto significa que la población tendrá un crecimiento positivo en todo ese rango y, por tanto, podemos esperar que crezca desde cero hasta una comunidad sustancial.

El crecimiento desciende a cerca de cero cuando $P = 30$. Aparentemente, cuando la población aún es pequeña, las emigraciones debido a la soledad hacen que el crecimiento casi se detenga. Pero, una vez que el pueblo ha pasado por esa fase, su tamaño se incre-

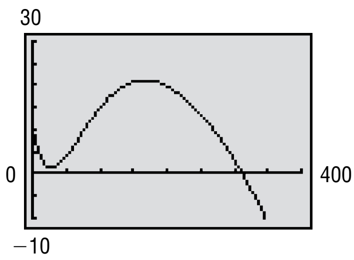


FIGURA 11.4 $\frac{dP}{dt}$ como una función de P.

menta de manera estable, en un punto (alrededor de $P = 170$) donde se agregan 21 personas por año.

Por último, las emigraciones debido a la aglomeración empiezan a infligir bajas. Por arriba de 312, la derivada es negativa. Esto significa que si la población fluctuase por encima de 312, entonces regresaría a ese nivel. En resumen, la población de este pueblo se estabiliza en 311 o 312, no es exactamente una ciudad, pero esto es después de todo, un ambiente fronterizo.

Si ahora deseamos graficar la población del pueblo como una función del tiempo, a continuación se explica cómo hacerlo: aproximamos la gráfica por medio de segmentos de recta, cada uno de los cuales tiene una pendiente dada por la expresión que obtuvimos para dP/dt. Iniciamos con un tiempo y población conocidos y calculamos la pendiente inicial. Empezaremos el crecimiento del pueblo desde cero, haciendo $t = 0$ en $P = 0$. Entonces $\frac{dP}{dt} = 10$. Ahora avanzamos el reloj un intervalo de tiempo adecuado, elegimos 1 año, y como la pendiente en $(0, 0)$ es igual a 10, aumentamos la población de 0 a 10. Los nuevos valores para t y P son 1 y 10 respectivamente, de modo que dibujamos un segmento de recta desde $(0, 0)$ a $(1, 10)$. Ahora, con $t = 1$ y $P = 10$, calculamos nuevamente la pendiente y seguimos los mismos pasos, repetimos este proceso hasta haber dibujado tanto de la curva como necesitemos ver.

Es obvio que esto sería en extremo tedioso para realizarlo a mano. Sin embargo, podemos utilizar las características de programación y de dibujo de líneas de una calculadora gráfica. Para una TI-83, el programa siguiente realiza bastante bien el trabajo, después de que la expresión para $\frac{dP}{dt}$ es introducida como Y_1 (manteniendo P como la variable):

```
PROGRAM:POPLTN
:Input "P? ",P
:Input "T?",T
:ClrDraw
:T→S
:For(I,S+1,S+55)
:Line(T,P,I,P+Y1)
:I→T:(P+Y1)→P
:End
```

Quite la selección de la función Y_1. Establezca la ventana de graficación para mostrar el plano de coordenadas desde 0 hasta 55 horizontalmente, y de 0 a 350 verticalmente. Después ejecute el programa y, ante las peticiones, proporciones los valores iniciales para P y t. El programa dibujará 55 segmentos de recta, suficientes para llevar la población a su tamaño final desde $P = 0$, $t = 0$. El resultado se muestra en la figura 11.5.

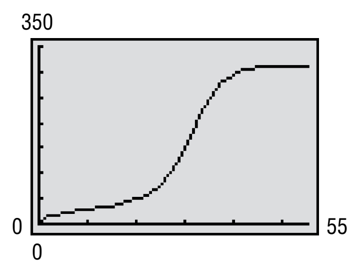


FIGURA 11.5 P como una función de t.

Ejercicios

1. ¿Qué información da la figura 11.5 que no sea evidente en la figura 11.4?
2. ¿Qué sucede cuando el valor inicial de 450 es seleccionado para P? (La pantalla debe ajustarse para ir de 0 a 500, de manera vertical.) ¿Esto parece correcto?
3. ¿Por qué este procedimiento para obtener una gráfica de $P(t)$ sólo es aproximado? ¿Cómo puede mejorarse la aproximación?

CAPÍTULO 12

Trazado de curvas

A mediados de la década de 1970, el economista Arthur Laffer explicaba su visión de los impuestos a un político —como cuenta la historia, era el aspirante a la presidencia Ronald Reagan, o Richard Cheney miembro del equipo de Ford (posteriormente vicepresidente bajo el régimen de George W. Bush). Para ilustrar su argumento, Laffer tomó una servilleta e hizo un bosquejo de la gráfica que ahora lleva su nombre: curva de Laffer.[1]

La curva de Laffer describe el ingreso total del gobierno debido a los impuestos como una función de la tasa de impuestos. Es obvio que si la tasa de impuestos es cero, el gobierno no obtiene ingresos. Pero si la tasa de impuestos es 100%, el ingreso sería también igual a cero, ya que no hay incentivo para generar dinero si todo éste se esfuma. Puesto que una tasa entre 0 y 100% debe generar ingresos, Laffer razonó, la curva que relaciona los ingresos con los impuestos debe verse, en forma cualitativa, más o menos como la que se muestra en la figura de más adelante.

El argumento de Laffer no era para mostrar que la tasa óptima de impuestos fuese 50%. Lo que quería mostrar era que bajo ciertas circunstancias, a saber, cuando la tasa de impuestos está a la derecha del máximo de la curva, es posible *aumentar el ingreso del gobierno bajando los impuestos*. Éste fue un argumento clave para la reducción de impuestos aprobados por el Congreso durante el primer periodo de la presidencia de Reagan.

A consecuencia de que la curva de Laffer sólo es un dibujo cualitativo, en realidad no proporciona una tasa de impuestos óptima. Los argumentos con base en los ingresos para reducir los impuestos incluyen la hipótesis que el punto del máximo de ingresos está a la izquierda, en el eje horizontal, del esquema de impuestos actual. De la misma manera, quienes argumentan por una elevación en los impuestos para aumentar los ingresos del gobierno, suponen que o bien existe una relación diferente entre impuestos e ingresos, o una localización diferente en el máximo de la curva.

Entonces, la curva de Laffer es por sí misma demasiado abstracta, pero es de mucha ayuda en la determinación de la tasa óptima de impuestos. Pero incluso un bosquejo muy simple de curvas, como las curvas de oferta y demanda y la curva de Laffer, pueden ayudar a los economistas a describir los factores causales que dirigen una economía. En este capítulo, estudiaremos técnicas para el trazado e interpretación de curvas.

[1]Para una versión de la historia, véase Jude Wanniski, *The Way the World Works,* tercera edición (Morristown, N. J. Polyconomics, 1989), 299.

OBJETIVO Encontrar cuándo una función es creciente o decreciente, determinar los valores críticos, localizar máximos y mínimos relativos y establecer la prueba de la primera derivada. También, hacer el bosquejo de la gráfica de una función por medio del uso de la información obtenida de la primera derivada.

12.1 Extremos relativos

Naturaleza creciente o decreciente de una función

Examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es una parte básica de las matemáticas, lo cual tiene aplicaciones en muchas áreas de estudio. Cuando hacemos el bosquejo de una curva, si sólo colocamos puntos quizá no obtengamos información suficiente acerca de su forma. Por ejemplo, los puntos $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$ satisfacen la ecuación $y = (x + 1)^3(x - 1)$. Con base en estos puntos, se podría concluir, a la ligera, que la gráfica debe tener la forma mostrada en la figura 12.1(a), pero de hecho, la forma verdadera es la mostrada en la figura 12.1(b). En este capítulo exploraremos la gran utilidad de la diferenciación en el análisis de una función, de manera que podamos determinar su forma verdadera y el comportamiento de su gráfica.

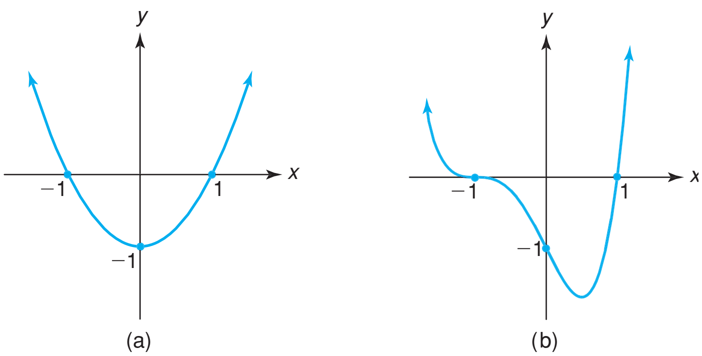


FIGURA 12.1 Curvas que pasan por los puntos (–1, 0), (0, –1) y (1, 0).

Analizaremos primero la gráfica de la función $y = f(x)$ de la figura 12.2. Note que conforme x aumenta (de izquierda a derecha) en el intervalo I_1, entre a y b, los valores de $f(x)$ también aumentan y la curva asciende. En forma matemática, esta observación significa que si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera en I_1, tales que $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Se dice que f es una *función creciente* en I_1. Por otra parte, conforme x aumenta en el intervalo I_2, entre c y d, la curva desciende. En este intervalo, $x_3 < x_4$ implica que $f(x_3) > f(x_4)$ y se dice que f es una *función decreciente* en I_2. Resumimos estas observaciones en la definición siguiente.

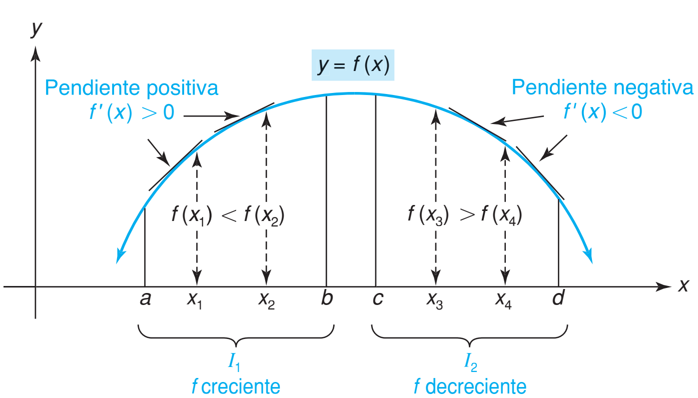


FIGURA 12.2 Formas creciente y decreciente de una función.

Definición

Se dice que una función f es ***creciente*** en el intervalo I, si para dos números cualesquiera x_1, x_2 en I, donde $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Una función f es ***decreciente*** en el intervalo I, si para dos números cualesquiera x_1, x_2 en I, donde $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Volviendo a la figura 12.2, notamos que en el intervalo I_1, las rectas tangentes a la curva tienen pendientes positivas, por lo que $f'(x)$ debe ser positiva para toda x en I_1. Básicamente, una derivada positiva implica que la curva está elevándose. En el intervalo I_2, las rectas tangentes tienen pendientes negativas, por lo que $f'(x) < 0$, para toda x en I_2. Fundamentalmente, la curva desciende donde la derivada es negativa. Tenemos así la siguiente regla que nos permite usar la derivada para determinar cuándo una función es creciente o decreciente:

Regla 1 Criterios para funciones crecientes o decrecientes

Sea f diferenciable en el intervalo (a, b). Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es creciente en (a, b). Si $f'(x) < 0$, para toda x en (a, b), entonces f es decreciente en (a, b).

Para ilustrar estas ideas, usaremos la regla 1 para determinar los intervalos en que $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$ es creciente o decreciente. Sea $y = f(x)$, debemos determinar cuándo $f'(x)$ es positiva y cuándo es negativa. Tenemos

$$f'(x) = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x).$$

Empleando la técnica de la sección 9.5, podemos encontrar el signo de $f'(x)$ probando los intervalos determinados por las raíces de $2(3 + x)(3 - x) = 0$, esto es, 3 y -3 (véase la fig. 12.3). En cada intervalo, el signo de $f'(x)$ está determinado por los signos de sus factores:

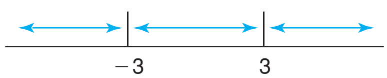


FIGURA 12.3 Intervalos determinados por las raíces de $f'(x) = 0$.

si $x < -3$, entonces $f'(x) = 2(-)(+) = -$, por lo que f es decreciente;

si $-3 < x < 3$, entonces $f'(x) = 2(+)(+) = +$, por lo que f es creciente;

si $x > 3$, entonces $f'(x) = 2(+)(-) = -$, por lo que f es decreciente.

Estos resultados se indican en la figura 12.4(a). Así, f es decreciente en $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$ y es creciente en $(-3, 3)$. Esto corresponde a la elevación y caída de la gráfica de f mostrada en la figura 12.4(b). Estos resultados podrían afinarse notando que, por definición, f es decreciente en $(-\infty, -3]$ y $[3, \infty)$, y creciente en $[-3, 3]$. Sin embargo, para nuestros fines, los intervalos abiertos son suficientes. *Seguiremos la práctica de determinar intervalos* ***abiertos*** *en los que una función es creciente o decreciente*.

Extremos

Veamos ahora la gráfica de $y = f(x)$ en la figura 12.5. Podemos hacer algunas observaciones. Primero, hay algo especial con respecto a los puntos P_1, P_2 y P_3. Observe que P_1 está *más alto* que cualquier otro punto "cercano" sobre la curva; lo mismo puede decirse para P_3. El punto P_2 está *más bajo* que cualquier otro punto "cercano" sobre la curva. Como P_1, P_2 y P_3 pueden no ser necesariamente los puntos más altos o más bajos en *toda* la curva, decimos simplemente que la gráfica de f tiene un (*punto*) *máximo relativo* cuando $x = x_1$ (o en x_1) y cuando $x = x_3$, también decimos que tiene un (*punto*) *mínimo relativo* cuando $x = x_2$. La función tiene *valores máximos relativos de* $f(x_1)$ y $f(x_3)$ cuan-

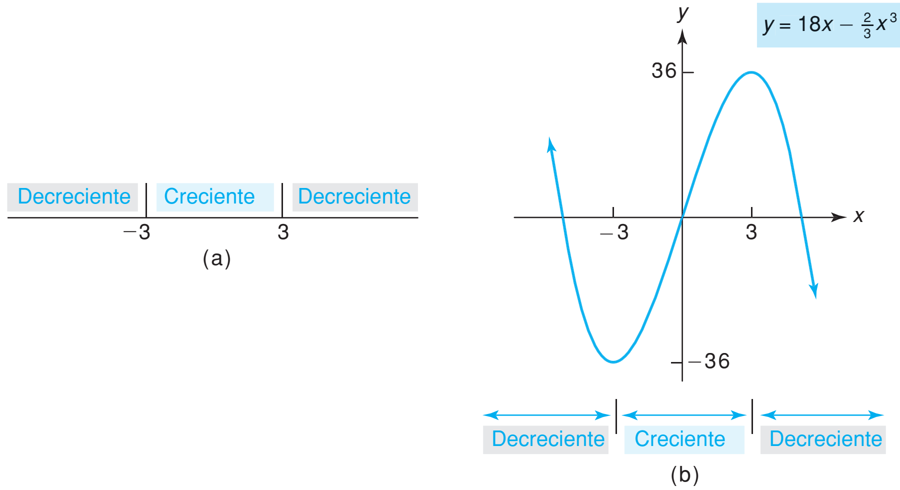


FIGURA 12.4 Creciente/decreciente para $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$.

do $x = x_1$ y $x = x_3$, respectivamente. De manera similar, cuando $x = x_2$, f tiene un *valor mínimo relativo* de $f(x_2)$. Cuando aludamos a un máximo o un mínimo relativo, se entenderá que nos referimos a un punto o a un valor,

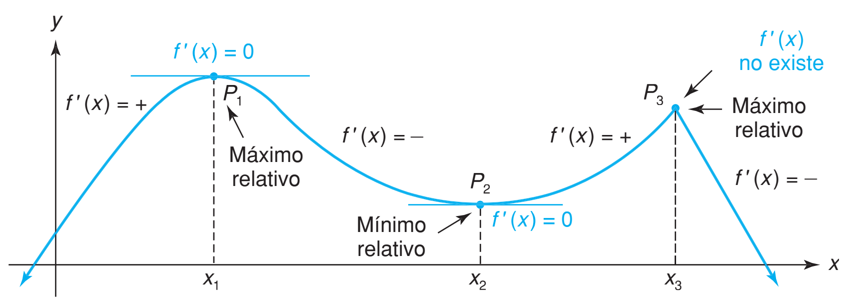


FIGURA 12.5 Máximos y mínimos relativos.

dependiendo del contexto. Volviendo a la gráfica, vemos que hay un *máximo absoluto* (punto más alto en toda la curva) en $x = x_1$, pero no hay un *mínimo absoluto* (punto más bajo en toda la curva) porque se supone que la curva se prolonga de manera indefinida hacia abajo. Definimos con mayor precisión estos nuevos términos como sigue:

Definición

Una función f tiene un ***máximo relativo*** en $x = x_0$, si existe un intervalo abierto que contenga a x_0 sobre el cual $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo. El máximo relativo es $f(x_0)$. Una función tiene un ***mínimo relativo*** en $x = x_0$, si existe un intervalo abierto que contenga a x_0 sobre el cual $f(x_0) \leq f(x)$, para toda x en el intervalo. El mínimo relativo es $f(x_0)$.

Si existe, un máximo absoluto es único; sin embargo, puede ocurrir para más de un valor de x. Una proposición similar es cierta para un mínimo absoluto.

Definición

Una función f tiene un ***máximo absoluto*** en $x = x_0$, si $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en el dominio de f. El máximo absoluto es $f(x_0)$. Una función f tiene un ***mínimo absoluto*** en $x = x_0$, si $f(x_0) \leq f(x)$, para toda x en el dominio de f. El mínimo absoluto es $f(x_0)$.

Cuando aludamos a un máximo o un mínimo relativo lo llamaremos a cada uno **extremo relativo.** De manera análoga, nos referimos a **extremos absolutos.**

Al tratar con extremos relativos, comparamos el valor de la función en un punto, con el valor en puntos cercanos; sin embargo, al tratar con extremos absolutos, comparamos el valor de la función en un punto con todos los otros valores determinados por el dominio. Así, los extremos relativos son "locales" por naturaleza, mientras que los extremos absolutos son "globales".

Con referencia a la figura 12.5, notamos que en un extremo relativo la derivada puede no estar definida (por ejemplo, cuando $x = x_3$). Pero siempre que esté definida en un extremo relativo, es igual a cero (por ejemplo, en $x = x_1$ y en $x = x_2$), por lo que la recta tangente es horizontal. Podemos establecer la siguiente:

Regla 2 Una condición necesaria para extremos relativos

Si f tiene un extremo relativo cuando $x = x_0$, entonces $f'(x_0) = 0$ o bien $f'(x_0)$ no está definida.

La implicación de la regla 2 sólo es en una dirección:

$$\left.\begin{array}{r}\text{extremo relativo}\\ \text{en } x_0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} f'(x_0) = 0 \\ \text{o} \\ f'(x_0) \text{ no está definida.}\end{array}\right.$$

La regla 2 *no* dice que si $f'(x_0)$ es 0 o no está definida, entonces debe existir un extremo relativo en x_0. De hecho, puede que no exista ninguno. Por ejemplo, en la figura 12.6, $f'(x_0)$ es cero porque la recta tangente es horizontal en x_0, pero no se tiene un extremo relativo ahí.

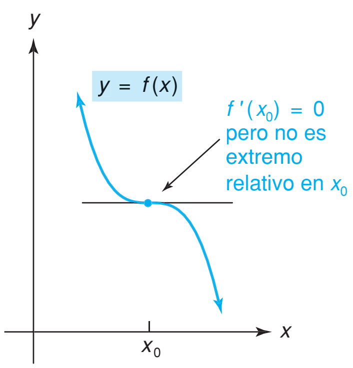


FIGURA 12.6 No hay extremo relativo en x_0.

En general, lo más que podemos decir es que *pueden* ocurrir extremos relativos en puntos sobre la gráfica de f en que $f'(x) = 0$, o donde $f'(x)$ no esté definida. Como esos puntos son muy importantes para localizar los extremos relativos, se denominan *puntos críticos,* y sus abscisas se denominan *valores críticos*. Así, en la figura 12.5, los números x_1, x_2 y x_3 son valores críticos y P_1, P_2 y P_3 son puntos críticos.

Definición

Si x_0 está en el dominio de f y $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no está definida, entonces x_0 se denomina ***valor crítico*** de f. Si x_0 es un valor crítico, entonces el punto $(x_0, f(x_0))$ se denomina ***punto crítico.***

En un punto crítico, puede haber un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. Además, de la figura 12.5 observamos que cada extremo relativo ocurre en un punto alrededor del cual el signo de $f'(x)$ está cambiando. Para el máximo relativo, cuando $x = x_1$, $f'(x)$ va de $+$, para $x < x_1$, a $-$, para $x > x_1$, *en tanto x esté cerca de* x_1. En el mínimo relativo, cuando $x = x_2$, $f'(x)$ va de $-$ a $+$, y en el máximo relativo cuando $x = x_3$, va nuevamente de $+$ a $-$. Entonces, *alrededor de máximos relativos*, *f es creciente y luego decreciente*, *y para los mínimos relativos la proposición inversa es cierta*. Con más precisión, tenemos la regla siguiente:

Regla 3 Criterios para extremos relativos

Supongamos que f es continua en un intervalo abierto I que contiene el valor crítico x_0 y f es diferenciable en I excepto posiblemente en x_0.

a. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando x crece al pasar por x_0, entonces f tiene un máximo relativo cuando $x = x_0$.

b. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando x crece al pasar por x_0, entonces f tiene un mínimo relativo cuando $x = x_0$.

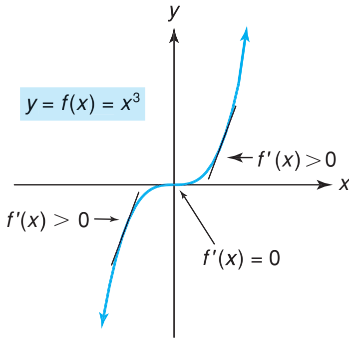


FIGURA 12.7 El cero es un valor crítico, pero no proporciona un extremo relativo.

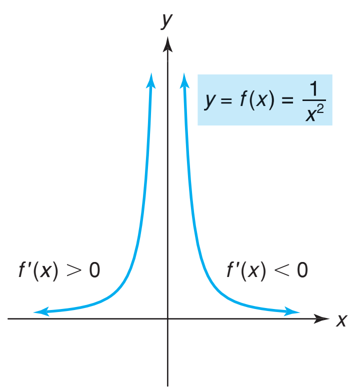


FIGURA 12.8 $f'(0)$ no está definida, pero 0 no es un valor crítico, ya que cero no está en el dominio de f.

Advertencia Recordamos de nuevo que no a todo valor crítico le corresponde un extremo relativo. Por ejemplo, si $y = f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$. Como $f'(0) = 0$ y $f(0)$ está definida, 0 es un valor crítico. Ahora, si $x < 0$, entonces $3x^2 > 0$. Si $x > 0$, entonces $3x^2 > 0$. Como $f'(x)$ no cambia de signo, no existe ni un máximo relativo ni un mínimo relativo. De hecho, como $f'(x) \geq 0$ para toda x, la gráfica de f no desciende nunca y se dice que f es no *decreciente* (véase la fig. 12.7).

De nuestro análisis y de la advertencia anterior, debe ser claro que un valor crítico es un "candidato" a ser extremo relativo. Puede corresponder a un máximo relativo, a un mínimo relativo o a ninguno de éstos.

Es importante entender que no todo valor de x donde $f'(x)$ no existe es un valor crítico. Por ejemplo, si

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3}.$$

Aunque $f'(x)$ no está definida en $x = 0$, cero no es un valor crítico porque no está en el dominio de f. Esto es, ningún valor de y corresponde a $x = 0$. Por lo que, un extremo relativo no puede ocurrir cuando $x = 0$. Sin embargo, la derivada puede cambiar de signo alrededor de cualquier valor de x, en que $f'(x)$ no esté definida, por lo que tales valores son importantes en la determinación de los intervalos sobre los que f es creciente o decreciente.

$$\text{Si } x < 0, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} > 0.$$

$$\text{Si } x > 0, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0.$$

Así, f es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$. (Véase la fig. 12.8.)

En la regla 3, la hipótesis debe satisfacerse o la conclusión no necesariamente es válida. Por ejemplo, considere el caso de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Como puede verse en la figura 12.9, cero está en el dominio y $f'(0)$ no existe, por lo que 0 es un valor crítico. Aunque $f'(x) = +$ para $x < 0$ y $f'(x) = -$ para $x > 0$, f no tiene un máximo relativo en cero. La regla 3 no es aplicable porque f no es continua en cero. En realidad, cero es un mínimo absoluto de acuerdo con la definición. Esto muestra que si $f'(x_0)$ no existe y f no es continua en x_0, será necesario examinar con cuidado qué sucede alrededor de x_0.

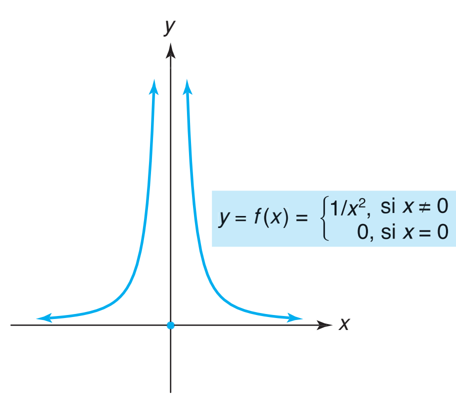


FIGURA 12.9 El cero es un valor crítico, y sí es un extremo relativo.

Resumiendo los resultados de esta sección, tenemos la *prueba de la primera derivada* para los extremos relativos de $y = f(x)$:

Prueba de la primera derivada para los extremos relativos

Paso 1. Encontrar $f'(x)$.

Paso 2. Determinar todos los valores de x en que $f'(x) = 0$ o no está definida (estos valores incluyen valores críticos y puntos de discontinuidad).

Paso 3. En los intervalos sugeridos por los valores del paso 2, determinar si f es creciente $[f'(x) > 0]$ o decreciente $[f'(x) < 0]$.

Paso 4. Para cada valor crítico x_0 en que f es continua, determinar si $f'(x)$ cambia de signo cuando x crece al pasar por x_0. Habrá un máximo relativo cuando $x = x_0$, si $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$, al ir de izquierda a derecha, y habrá un mínimo relativo si $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$ al ir de izquierda a derecha. Si $f'(x)$ no cambia de signo, no habrá un extremo relativo cuando $x = x_0$.

Principios en práctica 1

Prueba de la primera derivada

La ecuación de costo para un puesto de hot dogs está dada por medio de $c(q) = 2q^3 - 21q^2 + 60q + 500$, donde q es el número de *hot dogs* vendidos, y $c(q)$ es el costo en dólares. Utilice la prueba de la primera derivada para determinar cuándo ocurren extremos relativos.

EJEMPLO 1 Prueba de la primera derivada

Si $y = f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$, *utilizar la prueba de la primera derivada para encontrar dónde se presentan los extremos relativos.*

Solución:

Paso 1. $f(x) = x + 4(x+1)^{-1}$, por lo que

$$f'(x) = 1 + 4(-1)(x+1)^{-2} = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}.$$

Note que expresamos $f'(x)$ como un cociente con el numerador y el denominador factorizados. Esto nos permite determinar con facilidad en el paso 2 cuándo $f'(x)$ es cero o no está definida.

Paso 2. Haciendo $f'(x) = 0$, resulta $x = -3, 1$. El denominador de $f'(x)$ es cero cuando x es -1, por lo que $f'(-1)$ no existe. Los valores de -3 y 1 son valores críticos, pero -1 no lo es porque $f(-1)$ no está definido (f es discontinua en $x = -1$).

Paso 3. Los tres valores en el paso 2 nos conducen a probar cuatro intervalos (véase la fig. 12.10). (En cada uno de esos intervalos, f es diferenciable y no es cero.) Note que enmarcamos el valor -1, para indicar que no puede corresponder a un extremo relativo. Si embargo, es esencial que -1 se considere en nuestro análisis relativo a creciente/decreciente.

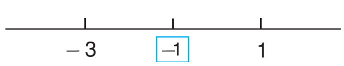


FIGURA 12.10 Cuatro intervalos a examinar como creciente/decreciente.

Si $x < -3$, entonces $f'(x) = \dfrac{(-)(-)}{(+)} = +$, por lo que f es creciente;

si $-3 < x < -1$, entonces $f'(x) = \dfrac{(+)(-)}{(+)} = -$, por lo que f es decreciente;

si $-1 < x < 1$, entonces $f'(x) = \dfrac{(+)(-)}{(+)} = -$, por lo que f es decreciente;

si $x > 1$, entonces $f'(x) = \dfrac{(+)(+)}{(+)} = +$, por lo que f es creciente

(véase la fig. 12.11).

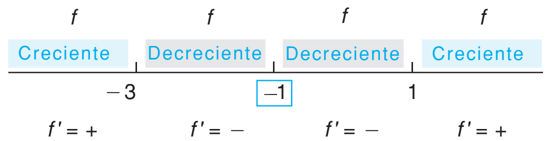


FIGURA 12.11 Diagrama de signos para $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.

Así, f es creciente en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(1, \infty)$ y es decreciente en $(-3, -1)$ y $(-1, 1)$.

Paso 4. De la figura 12.11, concluimos que cuando $x = -3$, se tiene un máximo relativo, ya que $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$. [Este valor máximo relativo es $f(-3) = -3 + (4/-2) = -5$.] Cuando $x = 1$, se tiene un mínimo relativo ya que $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$. Ignoramos a $x = -1$, ya que -1 no es un valor crítico. La gráfica se muestra en la figura 12.12.

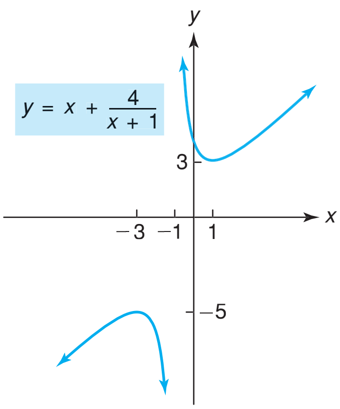


FIGURA 12.12 Gráfica de $y = x + \dfrac{4}{x+1}$.

EJEMPLO 2 Un extremo relativo donde $f'(x)$ no existe

Probar $y = f(x) = x^{2/3}$ con respecto a extremos relativos.

Solución: tenemos

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Cuando $x = 0$, $f'(x)$ no está definida, pero $f(x)$ sí lo está. Así, 0 es un valor crítico y no hay ningún otro. Si $x < 0$, entonces $f'(x) < 0$. Si $x > 0$, entonces $f'(x) > 0$. Por tanto, se tiene un mínimo relativo (así como uno absoluto) cuando $x = 0$ (véase la fig. 12.13). Note que cuando $x = 0$, la recta tangente existe y es vertical.

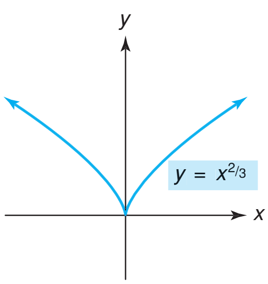


FIGURA 12.13 La derivada no existe en 0 y hay un mínimo en 0.

> ***Principios en práctica 2***
> **Determinación de extremos relativos**
>
> Una droga es inyectada al torrente sanguíneo de un paciente. La concentración de la droga en el torrente t horas después de haberse inyectado es aproximada por $C(t) = \dfrac{0.14t}{t^2 + 4t + 4}$. Determine los extremos relativos para $t > 0$, y utilícelos para determinar cuándo la droga está en su máxima concentración.

EJEMPLO 3 Determinación de extremos relativos

Probar $y = f(x) = x^2e^x$ con respecto a extremos relativos.

Solución: por la regla del producto,

$$f'(x) = x^2e^x + e^x(2x) = xe^x(x + 2).$$

Observe que e^x siempre es positiva; obtenemos los valores críticos 0 y -2. De los signos de $f'(x)$ dados en la figura 12.14, concluimos que se tiene un máximo relativo cuando $x = -2$, y un mínimo relativo cuando $x = 0$.

Trazado de una curva

En el ejemplo siguiente mostramos cómo puede usarse la prueba de la primera derivada junto con los conceptos de intersección y simetría, como una ayuda para trazar la gráfica de una función.

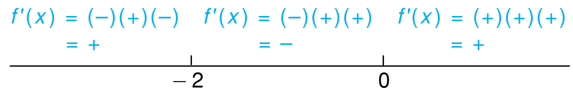


FIGURA 12.14 Diagrama de signos para $f'(x) = xe^x(x + 2)$.

EJEMPLO 4 Trazado de una curva

Trazar la gráfica de $y = f(x) = 2x^2 - x^4$ con la ayuda de intersecciones, simetría y prueba de la primera derivada.

Solución:

Intersecciones Si $x = 0$, entonces $y = 0$. Si $y = 0$, entonces

$$0 = 2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2) = x^2(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x),$$

por lo que $x = 0, \pm\sqrt{2}$. Así, las intersecciones son $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, y $(-\sqrt{2}, 0)$.

Simetría Al investigar la simetría con respecto del eje y, tenemos

$$y = 2(-x)^2 - (-x)^4, \quad \text{o} \quad y = 2x^2 - x^4.$$

Como ésta es la ecuación original, se tiene simetría con respecto al eje y. Como y es una función (y no es la función cero), no hay simetría con respecto al eje x, y en consecuencia no hay simetría con respecto al origen.

Prueba de la primera derivada

Paso 1. $y' = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 + x)(1 - x)$.

Paso 2. Haciendo $y' = 0$, se obtienen los valores críticos $x = 0, \pm 1$. Como estamos interesados en una gráfica, los *puntos* críticos son de importancia para nosotros. Sustituyendo los valores críticos en la ecuación *original* $y = 2x^2 - x^4$, obtenemos las coordenadas y de esos puntos. Encontramos que los puntos críticos son $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

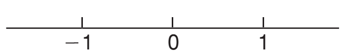


FIGURA 12.15 Intervalos para el diagrama de signos de $y' = 4x(1 + x)(1 - x)$.

Paso 3. Hay cuatro intervalos qué considerar en la figura 12.15:

si $x < -1$, entonces $y' = 4(-)(-)(+) = +$, por lo que f es creciente;

si $-1 < x < 0$, entonces $y' = 4(-)(+)(+) = -$, por lo que f es decreciente;

si $0 < x < 1$, entonces $y' = 4(+)(+)(+) = +$, por lo que f es creciente;

si $x > 1$, entonces $y' = 4(+)(+)(-) = -$, por lo que f es decreciente (véase la fig. 12.16).

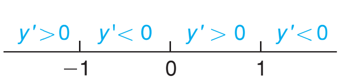


FIGURA 12.16 Diagrama de signos de $y' = 4x(1 + x)(1 - x)$.

Paso 4. De la figura 12.16, concluimos que ocurren máximos relativos en $(-1, 1)$ y $(1, 1)$; un mínimo relativo ocurre en $(0, 0)$.

Análisis En la figura 12.17(a), hemos indicado las tangentes horizontales en los puntos máximo y mínimo relativos. Sabemos que la curva asciende desde la izquierda, tiene un máximo relativo, luego desciende, tiene un mínimo relativo, se levanta a un máximo relativo y de ahí en adelante desciende. En la figura 12.17(b) se muestra un bosquejo de ella.

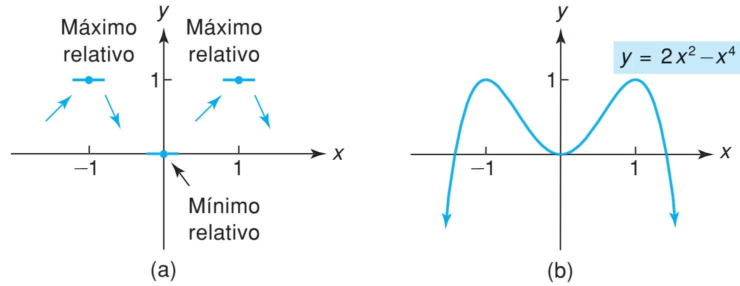


FIGURA 12.17 Reunión de la información para la gráfica de $y = 2x^2 - x^4$.

Observemos que en el ejemplo 4 ocurren máximos *absolutos* en $x = \pm 1$ [véase la fig. 12.17(b)]. No existe mínimo absoluto.

Tecnología

Una calculadora gráfica es una poderosa herramienta para investigar los extremos relativos. Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 4,$$

cuya gráfica se muestra en la figura 12.18. Parece que hay un mínimo relativo cerca de $x = 1$. Podemos localizar este mínimo usando la técnica "dibuje y amplifique" o (en la TI-83) la característica de "mínimo". La figura 12.19 muestra este último procedimiento. Se estima que el punto mínimo relativo es (1.00, 3).

Veamos ahora cómo la gráfica de f' indica cuándo ocurren los extremos. Tenemos

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2,$$

cuya gráfica se muestra en la figura 12.20. Parece que $f'(x)$ es cero en dos puntos. Usando "dibuje y amplifique" o el dispositivo para encontrar "ceros", estimamos que los ceros de f' (valores críticos de f) son 1 y 0. Alrededor de $x = 1$, vemos que $f'(x)$ pasa de valores negativos a valores positivos (esto es, la gráfica de f' pasa de abajo hacia arriba del eje x). Así, concluimos que f tiene un mínimo relativo en $x = 1$, lo que confirma nuestro resultado anterior. Alrededor del valor crítico $x = 0$, los valores de $f'(x)$ son negativos. Como $f'(x)$ no cambia de signo, concluimos que no existe un extremo relativo en $x = 0$. Esto es también evidente en la gráfica de la figura 12.18.

Vale la pena mencionar que la gráfica de f' se puede aproximar sin determinar $f'(x)$. Hacemos uso de la característica "nDeriv". Primero introducimos la función f como Y_1. Luego hacemos

$$Y_2 = \text{nDeriv}(Y_1,X,X).$$

La gráfica de Y_2 aproxima la gráfica de $f'(x)$.

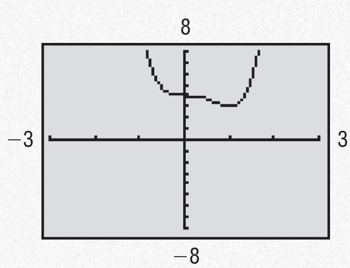


FIGURA 12.18 Gráfica de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 4$.

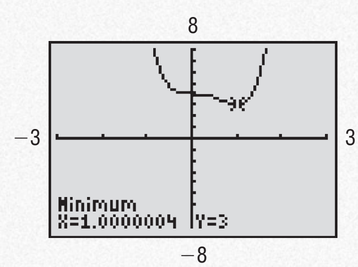


FIGURA 12.19 Mínimo relativo en (1.00, 3).

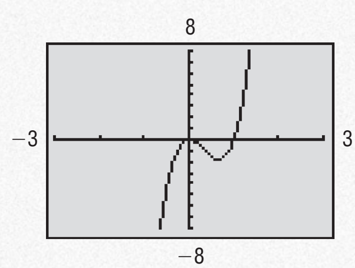


FIGURA 12.20 Gráfica de $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$.

Ejercicio 12.1

En los problemas del 1 al 4 se da la gráfica de una función. Encuentre los intervalos abiertos en que la función está creciendo o decreciendo, así como las coordenadas de todos los extremos relativos.

1.

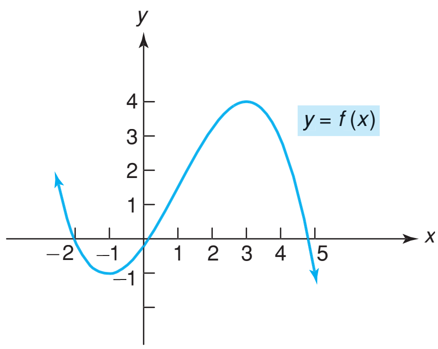


FIGURA 12.21 Gráfica para el problema 1.

2.

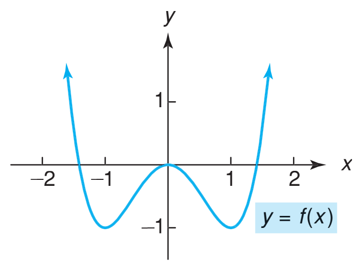


FIGURA 12.22 Gráfica para el problema 2.

3.

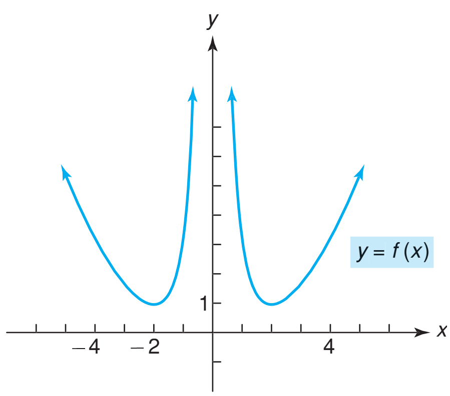


FIGURA 12.23 Gráfica para el problema 3.

4.

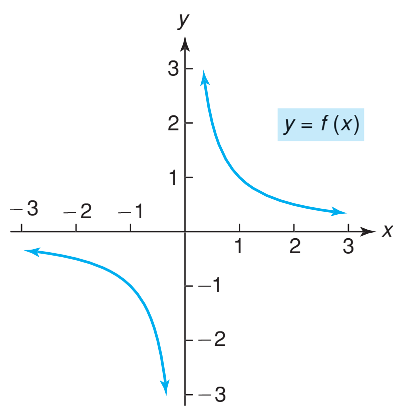


FIGURA 12.24 Gráfica para el problema 4.

En los problemas del 5 al 8 se da la derivada de la función continua f. Encuentre los intervalos abiertos en que f es creciente o decreciente, así como los valores de x de todos los extremos relativos.

5. $f'(x) = (x + 1)(x - 3)$.

6. $f'(x) = 2x(x - 1)^3$.

7. $f'(x) = (x + 1)(x - 3)^2$.

8. $f'(x) = \dfrac{x(x + 2)}{x^2 + 1}$.

En los problemas del 9 al 52 determine cuándo la función es creciente o decreciente, y determine la posición de los máximos y mínimos relativos. No trace la gráfica.

9. $y = x^3 + 3$.

10. $y = x^2 + 4x + 3$.

11. $y = x - x^2 + 2$.

12. $y = 4x - x^2$.

13. $y = -\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$.

14. $y = 4x^3 - 3x^4$.

15. $y = x^4 - 2x^2$.

16. $y = -3 + 12x - x^3$.

17. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

18. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$.

19. $y = 2x^3 - \dfrac{11}{2}x^2 - 10x + 2$.

20. $y = -5x^3 + x^2 + x - 7$.

21. $y = x^3 + 2x^2 - x - 1$.

22. $y = \dfrac{9}{5}x^5 - \dfrac{47}{3}x^3 + 10x$.

23. $y = 3x^5 - 5x^3$.

24. $y = 6x - x^6$.

25. $y = -x^5 - 5x^4 + 200$.

26. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

27. $y = 8x^4 - x^8$.

28. $y = \frac{4}{5}x^5 - \frac{13}{3}x^3 + 3x + 4$.

29. $y = (x^3 + 1)^3$.

30. $y = \sqrt[3]{x}(x - 2)$.

31. $y = \dfrac{5}{x - 1}$.

32. $y = \dfrac{3}{x}$.

33. $y = \dfrac{10}{\sqrt{x}}$.

34. $y = \dfrac{x}{x + 1}$.

35. $y = \dfrac{x^2}{2 - x}$.

36. $y = x + \dfrac{4}{x}$.

37. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$.

38. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$.

39. $y = \dfrac{5x + 2}{x^2 + 1}$.

40. $y = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$.

41. $y = (x + 2)^3(x - 5)^2$.

42. $y = x^2(x + 3)^4$.

43. $y = x^3(x - 6)^4$.

44. $y = x(1 - x)^{2/5}$.

45. $y = e^{-2x}$.

46. $y = x \ln x$.

47. $y = x^2 - 9 \ln x$.

48. $y = xe^x$.

49. $y = e^x + e^{-x}$.

50. $y = e^{-x^2}$.

51. $y = x \ln x - x$.

52. $y = (x^2 + 1)e^{-x}$.

En los problemas del 53 al 64, determine los intervalos en los que la función se incrementa o se decrementa, cuando es relativa máxima o mínima, la simetría y quellas intersecciones que se pueden obtener de manera conveniente. Después realice la gráfica.

53. $y = x^2 - 6x - 7$.

54. $y = 2x^2 - 5x - 12$.

55. $y = 3x - x^3$.

56. $y = x^4 - 16$.

57. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

58. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$.

59. $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2$.

60. $y = x^5 - \frac{5}{4}x^4$.

61. $y = (x - 1)^2(x + 2)^2$.

62. $y = (3 - x)\sqrt{x}$.

63. $y = 2\sqrt{x} - x$.

64. $y = x^{5/3} + 5x^{2/3}$.

65. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f, tal que $f(1) = 2$, $f(3) = 1$, $f'(1) = f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x < 1$, $f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$, y f tenga un mínimo relativo cuando $x = 3$.

66. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f, tal que $f(1) = 2$, $f(4) = 5$, $f'(1) = 0$, $f'(x) \geq 0$ para $x < 4$, f tenga un máximo relativo cuando $x = 4$ y tenga una recta tangente vertical en $x = 4$.

67. Costo promedio Si $c_f = 25{,}000$ es una función de costo fijo, demuestre que la función de costo fijo promedio $\bar{c}f = c_f/q$ es una función decreciente para $q > 0$. Por lo que, cuando la producción q crece, se reduce la porción unitaria de costo fijo.

68. Costo marginal Si $c = 4q - q^2 + 2q^3$ es una función de costo, ¿cuándo es creciente el costo marginal?

69. Ingreso marginal Dada la función de demanda

$$p = 400 - 2q,$$

encuentre cuándo es creciente el costo marginal.

70. Función costo Para la función de costo $c = \sqrt{q}$, demuestre que los costos marginal y promedio son siempre decrecientes para $q > 0$.

71. Ingreso Para el producto de un fabricante, la función de ingreso está dada por $r = 240q + 57q^2 - q^3$. Determine la producción para obtener un ingreso máximo.

72. Mercados de trabajo Eswaran y Kotwall[2] estudian economías agrarias en las que hay dos tipos de trabajadores, permanentes y eventuales. Los trabajadores permanentes son empleados bajo contrato a largo plazo y pueden recibir prestaciones como vacaciones y atención médica. Los eventuales son empleados por día y efectúan tareas rutinarias como recolección y trillado. La diferencia z en el costo a valor actual de contratar a un trabajador permanente y a un eventual está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c,$$

donde w_p y w_c son los salarios de trabajo permanente y eventual, respectivamente, b es una constante positiva y w_p es una función de w_c

(a) Demuestre que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b)\left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b}\right].$$

(b) Si $dw_p/dw_c < b/(1 + b)$, demuestre que z es una función decreciente de w_c.

73. Contaminación térmica En el análisis de Shonle acerca de la contaminación térmica,[3] la eficacia de una planta de energía se mide por:

$$E = 0.71\left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right),$$

donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas correspondientes a las reservas de agua con temperaturas más elevadas y con temperaturas más frías, respectivamente. Considere que T_c es una constante positiva y que T_h es positiva. Por medio del cálculo, demuestre que la eficacia aumenta conforme se incrementa T_h.

[2] M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economics", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 162-177.

[3] J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

74. Servicio telefónico En un análisis del precio del servicio telefónico local, Renshaw[4] determina que el ingreso total r está dado por

$$r = 2F + \left(1 - \frac{a}{b}\right)p - p^2 + \frac{a^2}{b},$$

donde p es un precio indexado por llamada, y a, b y F son constantes. Determine el valor de p que maximiza el ingreso.

75. Costos de almacenamiento y envío En su modelo para los costos de almacenamiento y envío de materiales para un proceso de manufactura, Lancaster[5] obtiene la siguiente función de costo

$$C(k) = 100\left(100 + 9k + \frac{144}{k}\right), \quad 1 \leq k \leq 100,$$

donde $C(k)$ es el costo total (en dólares) de almacenamiento y transporte para 100 días de operación, si una carga de k toneladas de material se mueve cada k días. (a) Encuentre $C(1)$. (b) ¿Para qué valor de k tiene $C(k)$ un mínimo? (c) ¿Cuál es el valor mínimo?

76. Fisiología–aeroembolismo Cuando un buzo sufre descompresión o un piloto vuela a gran altura, el nitrógeno empieza a burbujear en la sangre, ocasionando lo que se denomina *aeroembolismo*. Suponga que el porcentaje P de gente que sufre este efecto a una altura de h miles de pies está dado por[6]

$$P = \frac{100}{1 + 100{,}000e^{-0.36h}}.$$

¿Es P una función creciente de h?

En los problemas del 77 al 80, con base en la gráfica de la función, encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos. Redondee sus respuestas a dos decimales.

77. $y = 0.5x^2 + 4.1x + 6.2.$ **78.** $y = 2x^4 - 3x^3 - 4x + 7.$ **79.** $y = \dfrac{8.2x}{0.4x^2 + 3}.$ **80.** $y = \dfrac{e^x(3 - x)}{7x^2 + 1}.$

81. Grafique la función

$$f(x) = [x(x - 2)(2x - 3)]^2$$

en la ventana $-1 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 3$. A primera vista podría parecer que esta función tiene dos puntos mínimos relativos y un máximo relativo. Sin embargo, en realidad tiene tres puntos mínimos relativos y dos máximos relativos. Determine los valores x de esos puntos. Redondee sus respuestas a dos decimales.

82. Si $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x + 2$, exhiba las gráficas de f y f' en la misma pantalla. Note que es en $f'(x) = 0$ donde ocurren los extremos relativos de f.

83. Sea $f(x) = 6 + 4x - 3x^2 - x^3$. (a) Determine $f'(x)$. (b) Grafique $f'(x)$. (c) Observe en dónde $f'(x)$ es positiva y donde es negativa. Proporcione los intervalos (redondeados a dos decimales) en que f es creciente y decreciente. (d) Grafique f y f' sobre la misma pantalla y verifique sus resultados de la parte (c).

84. Si $f(x) = x^4 - 3x^2 - (2x - 1)^2$, encuentre $f'(x)$. Determine los valores críticos de f. Redondee sus respuestas a dos decimales.

[4]E. Renshaw, “A Note of Equity and Efficiency in the Pricing of Local Telephone Service”, *The American Economic Review*, 75, núm. 3 (1985), 515-518.

[5]P. Lancaster, *Mathematics: Models of the Real World* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1978).

[6]Adaptado de G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*, segunda edición (Filadelfia: Lea & Febiger, 1974).

12.2 Extremos absolutos en un intervalo cerrado

OBJETIVO Determinar los valores extremos en un intervalo cerrado.

Si una función f es *continua* en un intervalo *cerrado* $[a, b]$, puede demostrarse que entre *todos* los valores de $f(x)$ de la función de x en $[a, b]$, debe haber un valor máximo (absoluto) y un valor mínimo (absoluto). Esos dos valores se llaman **valores extremos** de f en ese intervalo. Esta importante propiedad de las funciones continuas se llama *teorema del valor extremo*.

Teorema del valor extremo

Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces la función *tiene* un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

Por ejemplo, cada función en la figura 12.25 es continua en el intervalo cerrado $[1, 3]$. En forma geométrica, el teorema del valor extremo nos asegura que sobre este intervalo, cada gráfica tiene un punto de altura máxima y otro de altura mínima.

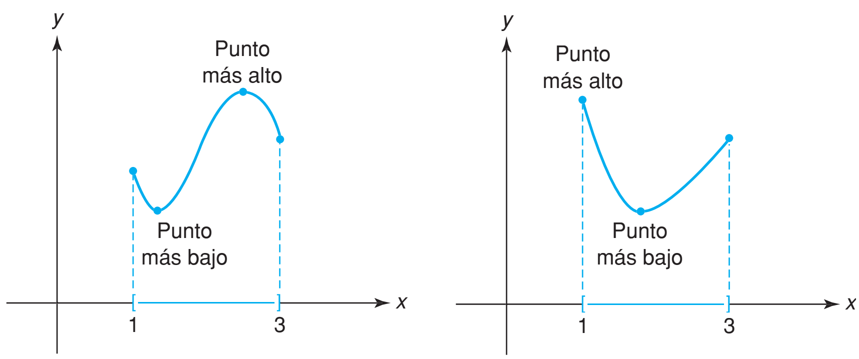


FIGURA 12.25 Ilustración del teorema de los valores extremos.

En el teorema del valor extremo se exige que haya

1. un intervalo cerrado

   y

2. una función continua en ese intervalo.

Si cualquiera de las dos condiciones anteriores no se cumple, entonces los valores extremos no están garantizados. Por ejemplo, la figura 12.26(a) muestra la gráfica de la función continua $f(x) = x^2$ en el intervalo *abierto* $(-1, 1)$. Puede ver que f no tiene un valor máximo en el intervalo (si bien tiene ahí un valor mínimo). Ahora considere la función $f(x) = 1/x^2$ sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Aquí, *f no es continua* en 0. En la gráfica de f en la figura 12.26(b), puede ver que f no tiene un valor máximo (pero sí tiene un valor mínimo).

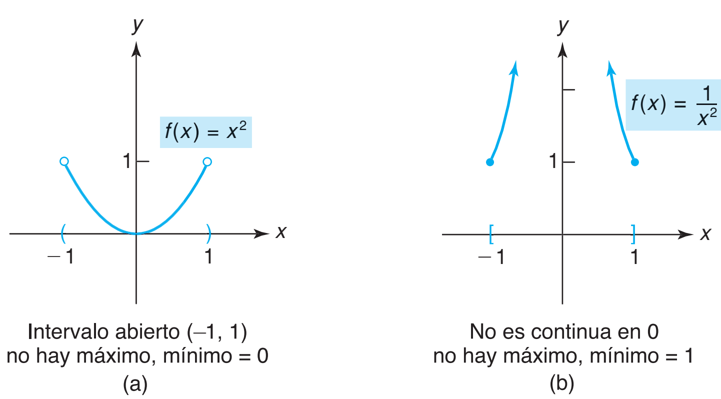


FIGURA 12.26 Aquí no se aplica el teorema de los valores extremos.

En la sección anterior, el énfasis se puso en los extremos relativos. Ahora centraremos nuestra atención en los extremos absolutos y haremos uso del teorema del valor extremo, donde sea posible. Si el dominio de una función es un intervalo cerrado, para determinar extremos *absolutos* debemos examinar la función no sólo en los valores críticos, sino también en los puntos extremos. Por ejemplo, la figura 12.27 muestra la gráfica de la función continua $y = f(x)$

en $[a, b]$. El teorema del valor extremo garantiza extremos absolutos en el intervalo. Es claro que los puntos importantes sobre la gráfica se presentan en $x = a, b, c$ y d, que corresponden a puntos extremos o a valores críticos. Note que el máximo absoluto ocurre en el valor crítico c, y que el mínimo absoluto ocurre en el punto extremo a. Estos resultados sugieren el procedimiento siguiente:

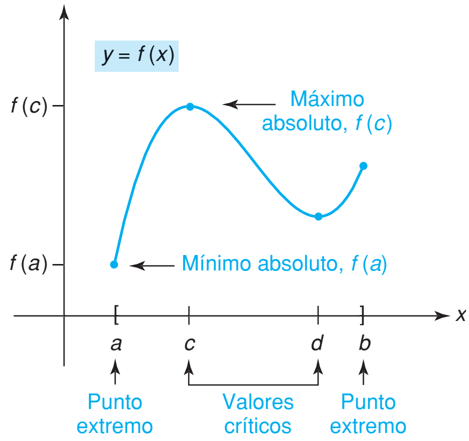


FIGURA 12.27 Extremos absolutos.

Procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función f continua en $[a, b]$

Paso 1. Encontrar los valores críticos de f.

Paso 2. Evaluar $f(x)$ en los puntos extremos a y b, y en los valores críticos sobre (a, b).

Paso 3. El valor máximo de f es el mayor de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de f es el menor de los valores encontrados en el paso 2.

EJEMPLO 1 Localización de los valores extremos en un intervalo cerrado

Encontrar los extremos absolutos para $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$.

Solución: como f es continua sobre $[1, 4]$, el procedimiento anterior es aplicable aquí.

Paso 1. Para encontrar los valores críticos de f, primero encontramos f':

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2).$$

Esto da el valor crítico $x = 2$.

Paso 2. Al evaluar $f(x)$ en los puntos extremos 1 y 4, y en el valor crítico 2, tenemos

$$\boxed{\begin{aligned} f(1) &= 2, \\ f(4) &= 5, \end{aligned}} \quad \text{valores de } f \text{ en los puntos extremos}$$

y

$$\boxed{f(2) = 1,} \quad \text{valor de } f \text{ en el valor crítico en } (1, 4).$$

Paso 3. De los valores de la función en el paso 2, concluimos que el máximo es $f(4) = 5$ y el mínimo es $f(2) = 1$ (véase la fig. 12.28).

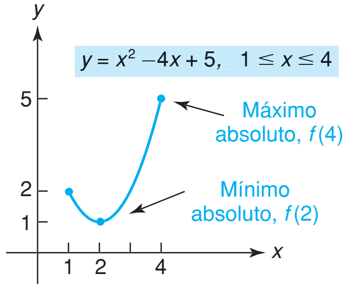


FIGURA 12.28 Valores extremos para el ejemplo 1.

Ejercicio 12.2

En los problemas del 1 al 14 encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad [0, 3].$

2. $f(x) = -2x^2 - 6x + 5, \quad [-3, 2].$

3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2].$

4. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2, \quad [0, 1].$

5. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 18x + 3, \quad [\frac{1}{2}, 3].$

6. $f(x) = x^{4/3}, \quad [-8, 8].$

7. $f(x) = -3x^5 + 5x^3, \quad [-2, 0].$

8. $f(x) = \frac{7}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1, \quad [0, 3].$

9. $f(x) = 3x^4 - x^6, \quad [-1, 2].$

10. $f(x) = 2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4, \quad [-1, 1].$

11. $f(x) = x^4 - 9x^2 + 2, \quad [-1, 3].$

12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2].$

13. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-2, 3].$

14. $f(x) = 0.3x^3 - 4.2x + 5, \quad [-1, 4].$

15. Considere la función

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 9$$

en el intervalo $[-4, 9]$.

a. Determine el o los valores (redondeados a dos decimales) de x en que f alcanza un valor mínimo.
b. ¿Cuál es el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de f?
c. Determine el o los valores de x en que f alcanza un valor máximo.
d. ¿Cuál es el valor máximo de f?

OBJETIVO Probar una función por concavidad y puntos de inflexión. También hacer el bosquejo de curvas con ayuda de la información obtenida de la primera y segunda derivadas.

12.3 Concavidad

Hemos visto que la primera derivada proporciona mucha información útil para el trazado de gráficas. Se usa para determinar cuándo una función es creciente o decreciente, y para la localización de máximos y mínimos relativos. Sin embargo, para conocer la verdadera forma de una curva necesitamos más información. Por ejemplo, considere la curva $y = f(x) = x^2$. Como $f'(x) = 2x$, $x = 0$ es un valor crítico. Si $x < 0$, entonces $f'(x) < 0$ y f es decreciente; si $x > 0$, entonces $f'(x) > 0$ y f es creciente. Entonces tenemos un mínimo relativo cuando $x = 0$. En la figura 12.29 ambas curvas satisfacen las condiciones anteriores. Pero, ¿cuál gráfica describe verdaderamente la curva? Esta pregunta se contesta con facilidad usando la segunda derivada y la noción de *concavidad*.

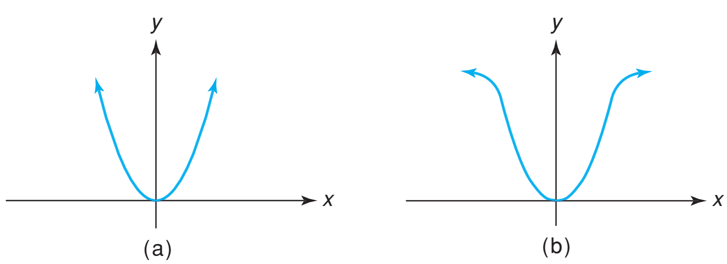


FIGURA 12.29 Dos funciones con $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > 0$.

En la figura 12.30 observe que cada curva $y = f(x)$ se "flexiona" (o abre) hacia arriba. Esto significa que si se trazan rectas tangentes a cada curva, las curvas quedarán por *arriba* de éstas. Además, las pendientes de las rectas tangentes *crecen* en valor al crecer x: en la parte (a), las pendientes van de valores positivos pequeños a valores mayores; en la parte (b) son negativas y se acercan a cero (creciendo); en la parte (c) pasan de valores negativos a positivos. Ya que $f'(x)$ nos da la pendiente en un punto, una pendiente creciente significa que f' debe ser una función creciente. Para describir esta propiedad, se dice que cada curva (o función f) es *cóncava hacia arriba* (o convexa).

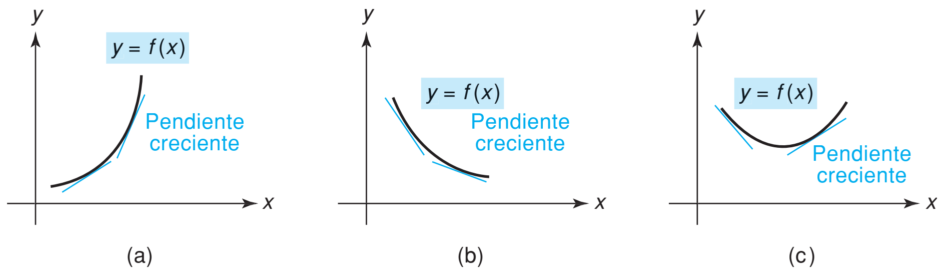


FIGURA 12.30 Cada curva es cóncava hacia arriba.

En la figura 12.31 puede observarse que cada curva se encuentra por *debajo* de las rectas tangentes y las curvas se flexionan hacia abajo. Cuando x crece, las pendientes de las rectas tangentes son *decrecientes*. Entonces, aquí f' es una función decreciente y decimos que es *cóncava hacia abajo* (o simplemente cóncava).

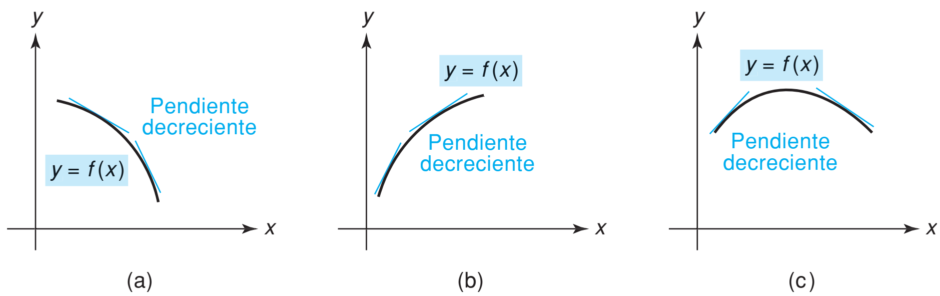


FIGURA 12.31 Cada curva es cóncava hacia abajo.

Definición

Sea f diferenciable en el intervalo (a, b). Entonces, se dice que f es ***cóncava hacia arriba* [*cóncava hacia abajo*]** en (a, b), si f' es creciente [decreciente] en (a, b).

Advertencia La concavidad se refiere a si f', no f, es creciente o decreciente. En la figura 12.30(b) note que f es cóncava hacia arriba y decreciente; sin embargo, en la figura 12.31(a) f es cóncava hacia abajo y decreciente.

Recuerde: si f es cóncava hacia arriba en un intervalo, entonces desde el punto de vista geométrico, su gráfica se flexiona ahí hacia arriba. Si f es cóncava hacia abajo, su gráfica se flexiona hacia abajo.

Como f' es creciente cuando su derivada $f''(x)$ es positiva, y f' es decreciente cuando $f''(x)$ es negativa, podemos establecer la regla siguiente:

Regla 4 Criterios de concavidad

Sea f' diferenciable en el intervalo (a, b). Si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b). Si $f''(x) < 0$, para toda x en (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Se dice que una función f es cóncava hacia arriba en un punto x_0 si existe un intervalo abierto alrededor de x_0 en el cual f es cóncava hacia arriba. De hecho, para las funciones que consideraremos, si $f''(x_0) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en x_0. En forma similar, f es cóncava hacia abajo en x_0 si $f''(x_0) < 0$.

EJEMPLO 1 Investigación de la concavidad

Determinar dónde la función dada es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.

a. $y = f(x) = (x - 1)^3 + 1$.

Solución: para aplicar la regla 4 debemos examinar los signos de y''. Tenemos $y' = 3(x - 1)^2$, por lo que

$$y'' = 6(x - 1).$$

Así, f es cóncava hacia arriba cuando $6(x - 1) > 0$, esto es, cuando $x > 1$. Y f es cóncava hacia abajo cuando $6(x - 1) < 0$, esto es, cuando $x < 1$. (Véase la fig. 12.32.)

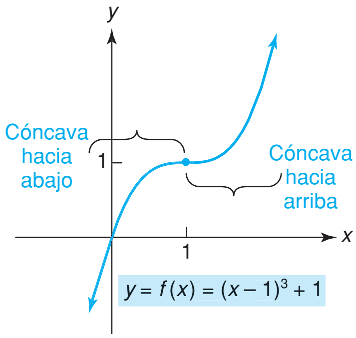


FIGURA 12.32 Concavidad para $f(x) = (x - 1)^3 + 1$.

b. $y = x^2$.

Solución: tenemos $y' = 2x$ y $y'' = 2$. Como y'' siempre es positiva, la gráfica de $y = x^2$ debe ser siempre cóncava hacia arriba, como se ve en la figura 12.29(a). La gráfica no puede ser como en la figura 12.29(b), porque esa curva a veces es cóncava hacia abajo.

Un punto sobre una gráfica cuya concavidad cambia de concavidad hacia abajo a concavidad hacia arriba, o viceversa, como el punto (1, 1) en la figura 12.32, se llama *punto de inflexión*. Alrededor de tal punto el signo de $f''(x)$ debe pasar de $-$ a $+$ o de $+$ a $-$. Con mayor precisión:

La definición de un punto de inflexión implica que x_0 está en el dominio de f.

Definición

Una función f tiene un ***punto de inflexión*** cuando $x = x_0$, si y sólo si f es continua en x_0 y f cambia de concavidad en x_0.

Para determinar la concavidad de una función y sus puntos de inflexión, encuentre primero los valores de x donde $f''(x)$ es 0 o no está definida. Esos valores de x determinan intervalos. En cada intervalo determine si $f''(x) > 0$ (f es cóncava hacia arriba) o $f''(x) < 0$ (f es cóncava hacia abajo). Si la concavidad cambia alrededor de uno de esos valores de x, y f es continua ahí, entonces f tiene un punto de inflexión en ese valor de x. El requisito de continuidad implica que el valor x debe estar en el dominio de la función. Brevemente, un *candidato* para punto de inflexión debe satisfacer dos condiciones:

1. f'' debe ser 0 o no estar definida en ese punto.
2. f debe ser continua en ese punto.

El candidato *será* un punto de inflexión si la concavidad cambia alrededor de él. Por ejemplo, si $f(x) = x^{1/3}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ y

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}.$$

Como f'' no está definida en 0, pero es continua en 0, se tiene un candidato para un punto de inflexión cuando $x = 0$. Si $x > 0$, entonces $f''(x) < 0$, por lo que f es cóncava hacia abajo para $x > 0$; si $x < 0$, entonces $f''(x) > 0$, por lo que f es cóncava hacia arriba para $x < 0$. Como la concavidad cambia en $x = 0$, se tiene ahí un punto de inflexión (véase la fig. 12.33).

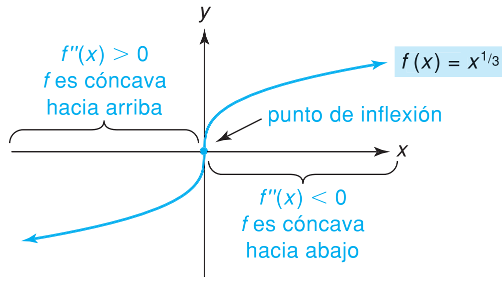


FIGURA 12.33 Puntos de inflexión para $f(x) = x^{1/3}$.

FIGURA 12.34 Intervalos a considerar por concavidad de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

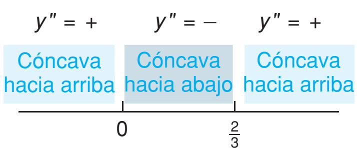


FIGURA 12.35 Diagrama de signos de $y'' = 24x(3x - 2)$.

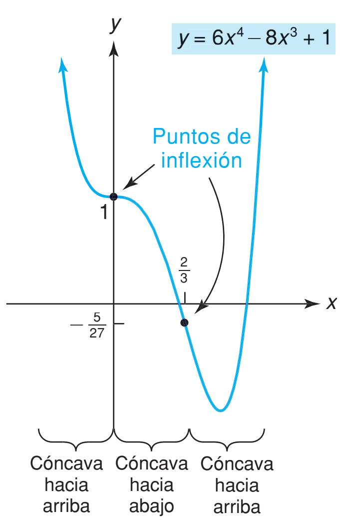


FIGURA 12.36 Gráfica de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

EJEMPLO 2 Concavidad y puntos de inflexión

Investigar la concavidad y los puntos de inflexión de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Solución: tenemos

$$y' = 24x^3 - 24x^2,$$

$$y'' = 72x^2 - 48x = 24x(3x - 2).$$

Para determinar cuándo $y'' = 0$, hacemos cada factor en y'' igual a cero. Esto nos da $x = 0, \frac{2}{3}$. Observamos también que y'' nunca deja de estar definida. Así, hay tres intervalos por considerar (véase la fig. 12.34). Como y es continua en 0 y en $\frac{2}{3}$, esos puntos son posibles puntos de inflexión.

Si $x < 0$, entonces $y'' = 24(-)(-) = +$, por lo que la curva es cóncava hacia arriba;

si $0 < x < \frac{2}{3}$, entonces $y'' = 24(+)(-) = -$, por lo que la curva es cóncava hacia abajo;

si $x > \frac{2}{3}$, entonces $y'' = 24(+)(+) = +$, por lo que la curva es cóncava hacia arriba (véase la fig. 12.35).

Como la concavidad cambia en los puntos en que $x = 0$ y $\frac{2}{3}$, estos candidatos son puntos de inflexión (véase la fig. 12.36). En resumen, la curva es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y $(\frac{2}{3}, \infty)$, y es cóncava hacia abajo en $(0, \frac{2}{3})$. Los puntos de inflexión se presentan cuando $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$. Esos puntos son $(0, 1)$ y $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{27})$

EJEMPLO 3 Cambio en la concavidad sin punto de inflexión

Analizar la concavidad y encontrar todos los puntos de inflexión de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución: como $f(x) = x^{-1}$,

$$f'(x) = -x^{-2},$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

Vemos que $f''(x)$ nunca es cero, pero no está definida en $x = 0$. Como f no es continua en cero, concluimos que 0 no constituye un candidato para un punto de inflexión. Entonces la función dada no tiene puntos de inflexión. Sin embargo, 0 debe considerarse en el análisis de la concavidad (véase la recta numérica en la figura 12.37; observe que hemos encerrado en un cuadro el valor cero, para indicar que no puede corresponder a un punto de inflexión). Si $x > 0$, entonces $f''(x) > 0$; si $x < 0$, entonces $f''(x) < 0$. Por tanto, f es cóncava

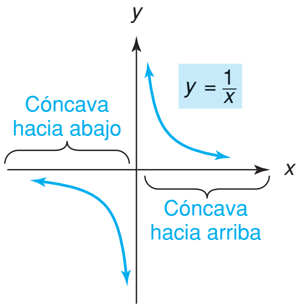


FIGURA 12.38 Gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

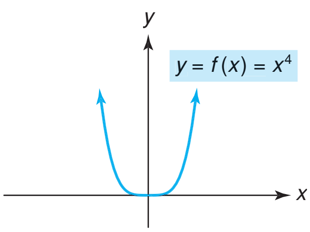


FIGURA 12.39 Gráfica de $f(x) = x^4$.

hacia arriba en $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$. (Véase la fig. 12.38.) No obstante que la concavidad cambia alrededor de $x = 0$, no existe ahí punto de inflexión, porque f no es continua en 0 (ni está definida ahí).

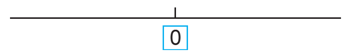


FIGURA 12.37 Intervalos a considerar para el análisis de concavidad.

Advertencia Un candidato a punto de inflexión no tiene que ser necesariamente un punto de inflexión. Por ejemplo, si $f(x) = x^4$, entonces $f''(x) = 12x^2$ y $f''(0) = 0$. Pero, $x < 0$ implica que $f''(x) > 0$ y $x > 0$ implica $f''(x) > 0$. Así, la concavidad no cambia y no se tienen puntos de inflexión (véase la fig. 12.39).

Trazado de curvas

EJEMPLO 4 **Trazado de una curva**

Trazar la gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

Solución:

Intersecciones Si $x = 0$, entonces $y = 0$. Haciendo $y = 0$, resulta que $0 = x(2x^2 - 9x + 12)$. Es claro que $x = 0$, y al utilizar la fórmula cuadrática en $2x^2 - 9x + 12 = 0$, se encuentra que no tiene raíces reales. Por tanto, la única intersección es $(0, 0)$.

Simetría Ninguna.

Máximos y mínimos Si $y = f(x)$, tenemos

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2).$$

Los valores críticos son $x = 1, 2$ (véase la fig. 12.40).

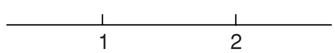


FIGURA 12.40 Valores críticos de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

FIGURA 12.41 Diagrama de signos de $f'(x)$.

Si $x < 1$, entonces $f'(x) = 6(-)(-) = +$, por lo que f es creciente;

si $1 < x < 2$, entonces $f'(x) = 6(+)(-) = -$, por lo que f es decreciente;

si $x > 2$, entonces $f'(x) = 6(+)(+) = +$, por lo que f es creciente (véase la fig. 12.41).

Existe un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Concavidad

$$f''(x) = 12x - 18 = 6(2x - 3).$$

Haciendo $f''(x) = 0$ resulta un punto de inflexión posible en $x = \frac{3}{2}$.

Si $x < \frac{3}{2}$, entonces $f''(x) < 0$, por lo que f es cóncava hacia abajo;

si $x > \frac{3}{2}$, entonces $f''(x) > 0$, por lo que f es cóncava hacia arriba (véase la fig. 12.42).

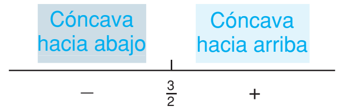


FIGURA 12.42 Diagrama de signos de $f''(x)$.

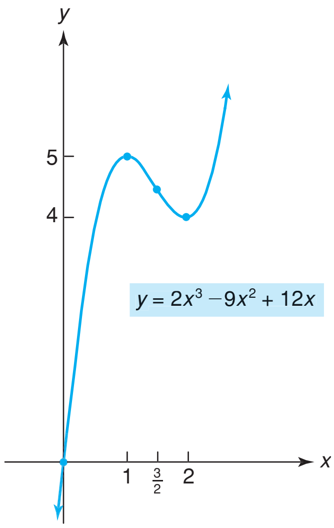


FIGURA 12.43 Gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

Como la concavidad cambia alrededor de $x = \frac{3}{2}$ y f es continua ahí, f tiene un punto de inflexión en $x = \frac{3}{2}$.

Análisis Ahora encontramos las coordenadas de los puntos importantes sobre la gráfica (y de otros puntos cualesquiera si se tienen dudas sobre el comportamiento de la curva). Tenemos la tabla siguiente:

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0	5	$\frac{9}{2}$	4

Conforme x crece, la función primero es cóncava hacia abajo y crece a un máximo relativo en $(1, 5)$; luego decrece hasta $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$; después se vuelve cóncava hacia arriba pero continúa decreciendo hasta que alcanza un mínimo relativo en $(2, 4)$; de ahí en adelante crece y sigue con su concavidad hacia arriba (véase la fig. 12.43).

Tecnología

Suponga que se requiere encontrar los puntos de inflexión de

$$f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{17}{16}x^4 + \frac{273}{32}x^3 - \frac{4225}{128}x^2 + \frac{750}{4}.$$

La segunda derivada de f está dada por

$$f''(x) = x^3 - \frac{51}{4}x^2 + \frac{819}{16}x - \frac{4225}{64}.$$

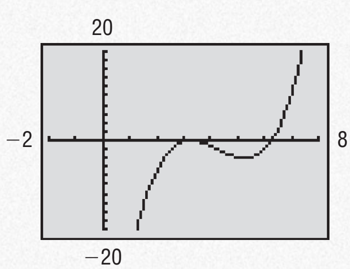


FIGURA 12.44 Gráfica de f''; los ceros de f'' son 3.25 y 6.25.

Aquí los ceros de f'' no son obvios. Por ello, graficaremos f'' utilizando una calculadora gráfica (véase la fig. 12.44). Encontramos que los ceros de f'' son aproximadamente 3.25 y 6.25. Alrededor de $x = 6.25$, $f''(x)$ pasa de valores negativos a positivos. Así, en $x = 6.25$ se tiene un punto de inflexión. Alrededor de $x = 3.25$, $f''(x)$ no cambia de signo, por lo que no existe punto de inflexión en $x = 3.25$. Al comparar nuestros resultados con la gráfica de f en la figura 12.45, se ve que concuerdan.

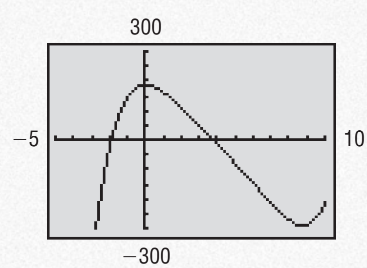


FIGURA 12.45 Gráfica de f; punto de inflexión en $x = 6.25$, pero no en $x = 3.25$.

Ejercicio 12.3

En los problemas del 1 al 6 se da una función y su segunda derivada. Determine la concavidad de f y los valores de x en los que se presentan los puntos de inflexión.

1. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 7x - 5$; $f''(x) = 6x(2x - 3)$.

2. $f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} - 2x^2$; $f''(x) = (x - 1)(x + 2)^2$.

3. $f(x) = \frac{2 + x - x^2}{x^2 - 2x + 1}$; $f''(x) = \frac{2(7 - x)}{(x - 1)^4}$.

4. $f(x) = -\frac{x^2}{(2 - x)^2}$; $f''(x) = -\frac{8(x + 1)}{(2 - x)^4}$.

5. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$; $f''(x) = \frac{6(3x^2 + 2)}{(x^2 - 2)^3}$.

6. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$; $f''(x) = \frac{2x(x^2 - 6)}{(4 - x^2)^{3/2}}$.

En los problemas del 7 al 34 determine la concavidad y los valores de x en los que se presentan los puntos de inflexión. No trace las gráficas.

7. $y = -2x^2 + 4x$.
8. $y = 3x^2 - 6x + 5$.
9. $y = 4x^3 + 12x^2 - 12x$.
10. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.
11. $y = 4x^3 - 21x^2 + 5x$.
12. $y = x^4 - 8x^2 - 6$.
13. $y = x^4 - 6x^2 + 5x - 6$.
14. $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} + 2x$.
15. $y = 2x^{1/5}$.
16. $y = \frac{3}{x^5}$.
17. $y = \frac{x^4}{2} + \frac{19x^3}{6} - \frac{7x^2}{2} + x + 5$.
18. $y = -\frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$.
19. $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$.
20. $y = \frac{9}{5}x^5 - \frac{32}{3}x^3 + 10x - 2$.
21. $y = \frac{1}{30}x^6 - \frac{7}{12}x^4 + 5x^2 + 2x - 1$.
22. $y = x^6 - 3x^4$.
23. $y = \frac{x + 1}{x - 1}$.
24. $y = x + \frac{1}{x}$.
25. $y = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$.
26. $y = \frac{4x^2}{x + 3}$.
27. $y = \frac{21x + 40}{6(x + 3)^2}$.
28. $y = 7(x^2 - 4)^2$.
29. $y = 5e^x$.
30. $y = e^x - e^{-x}$.
31. $y = 3xe^x$.
32. $y = 2xe^{-x}$.
33. $y = \frac{\ln x}{2x}$.
34. $y = \frac{x^2 + 1}{3e^x}$.

En los problemas del 35 al 62 esboce cada curva. Después, determine los intervalos en los que la función crece, decrece, es cóncava hacia arriba, es cóncava hacia abajo; máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión; simetría y aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente.

35. $y = x^2 + 4x + 3$.
36. $y = x^2 + 2$.
37. $y = 4x - x^2$.
38. $y = x - x^2 + 2$.
39. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$.
40. $y = 3x - x^3$.
41. $y = \frac{x^3}{3} - 4x$.
42. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.
43. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$.
44. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.
45. $y = 4x^3 - 3x^4$.
46. $y = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$.
47. $y = -2 + 12x - x^3$.
48. $y = (3 + 2x)^3$.
49. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$.
50. $y = \frac{x^5}{100} - \frac{x^4}{20}$.
51. $y = 5x - x^5$.
52. $y = x(1 - x)^3$.
53. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$.
54. $y = 3x^5 - 5x^3$.
55. $y = 4x^2 - x^4$.
56. $y = x^4 - 2x^2$.
57. $y = x^{1/3}(x - 8)$.
58. $y = (x - 1)^2(x + 2)^2$.
59. $y = 4x^{1/3} + x^{4/3}$.
60. $y = 2x\sqrt{x + 3}$.
61. $y = 2x + 3x^{2/3}$.
62. $y = 5x^{2/3} - x^{5/3}$.

63. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f tal que $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ si $x < 2$ y $f''(x) > 0$ si $x > 2$.

64. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f tal que $f(3) = 2$, $f'(3) = 0$, $f''(x) > 0$ para $x < 3$ y $f''(x) < 0$ para $x > 3$.

65. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f tal que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x.

66. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f tal que $f(3) = 4$, las dos $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ para $x < 3$, y ambas $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > 3$.

67. Ecuación de demanda Demuestre que la gráfica de la ecuación de demanda $p = \frac{100}{q + 2}$ es decreciente y cóncava hacia arriba para $q > 0$.

68. Costo promedio Para la función costo

$$c = 3q^2 + 5q + 6,$$

demuestre que la gráfica de la función de costo promedio $\bar{c}$ siempre es cóncava hacia arriba para $q > 0$.

69. Especies de plantas El número de especies de plantas en un lote puede depender del tamaño del lote. Por ejemplo, en la figura 12.46 vemos que en lotes de 1 m^2 hay tres especies (A, B y C en el lote izquierdo; A, B y D en el lote derecho), y que en un lote de 2 m^2 hay cuatro especies (A, B C y D).

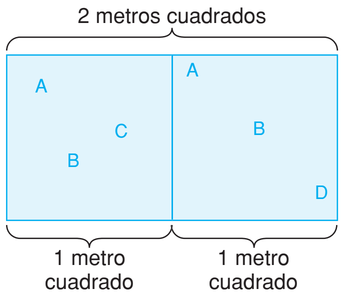


FIGURA 12.46 Especies de plantas.

En un estudio acerca de las plantas de cierta región geográfica,[7] se determinó que el número promedio de especies, S, que se presentan en lotes de tamaño A (en metros cuadrados) está dado por

$$S = f(A) = 12\sqrt[4]{A}, \qquad 0 \leq A \leq 625.$$

Haga el bosquejo de la gráfica de f (*nota:* su gráfica debe ser creciente y cóncava hacia abajo. Por ello el número de especies es creciente con respecto al área, pero a una razón decreciente).

70. Artículo de calidad inferior En un análisis de un artículo de calidad inferior, Persky[8] considera una función de la forma

$$g(x) = e^{(U_0/A)}e^{-x^2/(2A)},$$

donde x es una cantidad del bien, U_0 es una constante que representa la utilidad y A es una constante positiva. Persky afirma que la gráfica de g es cóncava hacia abajo para $x < \sqrt{A}$, y cóncava hacia arriba para $x > \sqrt{A}$. Verifique esto.

71. Psicología En un experimento psicológico que implicaba respuestas condicionadas,[9] varias personas escuchaban cuatro tonos, denotados como 0, 1, 2 y 3. Inicialmente, las personas se condicionaron al tono 0, esto al recibir un choque eléctrico siempre que lo oían. Luego, cuando cada uno de los cuatro tonos (estímulos) se escucharon sin choques eléctricos, la respuesta del sujeto se registró por medio de un dispositivo rastreador que medía la reacción galvánica de la piel. La respuesta media para cada estímulo (sin choque eléctrico) se determinó, y los resultados se graficaron en un plano coordenado, en donde los ejes x y y representan el estímulo (0, 1, 2 y 3) y la respuesta galvánica promedio, respectivamente. También se determinó que los puntos se ajustan a una curva dada aproximadamente por la gráfica de

$$y = 12.5 + 5.8(0.42)^x.$$

Demuestre que esta función es decreciente y cóncava hacia arriba.

72. Entomología En un estudio sobre los efectos de la privación de alimento en condiciones de hambre,[10] un insecto fue alimentado hasta que su apetito estuvo completamente satisfecho. Después fue privado de alimento durante t horas (periodo de privación). Al final de este periodo, el insecto de nuevo fue alimentado hasta que su apetito estuvo completamente satisfecho. Se encontró estadísticamente que el peso H (en gramos) del alimento que se consumió en este tiempo, era una función de t, donde

$$H = 1.00[1 - e^{-(0.0464t+0.0670)}].$$

Aquí H es una medida del hambre. Demuestre que H es creciente con respecto a t y cóncava hacia abajo.

73. Dispersión de insectos En un experimento sobre la dispersión de un insecto específico,[11] un gran número de insectos se colocan en un punto de liberación en un campo abierto. Alrededor de este punto hay trampas dispuestas según un arreglo circular concéntrico a distancias de 1 m, 2 m, 3 m, etc., del punto de liberación. Veinticuatro horas después de que se liberan, se cuenta el número de insectos en cada trampa. Se determinó que a una distancia de r metros del punto en que se ponen en libertad, el número promedio de insectos contenidos en una trampa es n, donde

$$n = f(r) = 0.1\ln(r) + \frac{7}{r} - 0.8, \quad 1 \leq r \leq 10.$$

(a) Demuestre que la gráfica de f es siempre decreciente y cóncava hacia arriba. (b) Haga el bosquejo de la gráfica de f. (c) Cuando $r = 5$, ¿a qué razón está decreciendo el número promedio de insectos en una trampa con respecto a la distancia?

74. Grafique $y = 0.25x^3 - 3.1x^2 + 9.9x - 6.1$, y de la gráfica determine el número de (a) puntos máximos relativos, (b) puntos mínimos relativos y (c) puntos de inflexión.

75. Grafique $y = x^5(x - 2.3)$ y de la gráfica determine el número de puntos de inflexión.

[7]Adaptado de R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).
[8]A. L. Persky, "An Inferior Good and a Novel Indifference Map". *The American Economist* XXIX, núm. 1 (1985), 67-69.

[9]Adaptado de C. I. Hovland, "The Generalization of Conditioned Responses: I. The Sensory Generalization of Conditioned Responses with Varying Frequencies of Ton", *Journal of General Psychology*, 17 (1937), 125-148.
[10]C. S. Holling, "The Functional Response of Invertebrate Predators to Prey Density", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 48 (1966).
[11]Adaptado de Poole, *op. cit*.

76. Grafique $y = 1 - 2^{-x^2}$ y de la gráfica determine el número de puntos de inflexión.

77. Grafique la curva $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$, y también la recta tangente a la curva en $x = 2$. Alrededor de $x = 2$, ¿está la curva arriba o debajo de la recta tangente? Con base en su apreciación, determine la concavidad en $x = 2$.

78. Si $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$. Observe que donde f' tiene un mínimo relativo, f cambia la dirección de su flexión. ¿Por qué?

79. Si $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 1$, encuentre los valores x (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de f.

80. Si $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$, determine los valores de x (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de f.

OBJETIVO Localizar extremos relativos por medio de la aplicación de la prueba de la segunda derivada.

12.4 Prueba de la segunda derivada

La segunda derivada puede usarse para probar si ciertos valores críticos corresponden a valores extremos relativos. Observe en la figura 12.47, que cuando $x = x_0$, se tiene una tangente horizontal; esto es, $f'(x_0) = 0$. Además, alrededor de x_0 la función es cóncava hacia arriba [esto es, $f''(x_0) > 0$]. Lo anterior nos lleva a concluir que habrá un mínimo relativo en x_0. Por otra parte, alrededor de x_1 la función es cóncava hacia abajo [esto es, $f''(x_1) < 0$]. Como la recta tangente es horizontal en x_1, concluimos que ahí existe un máximo relativo. Esta técnica de examinar la segunda derivada en puntos donde la primera derivada es cero, se llama *prueba de la segunda derivada* para extremos relativos.

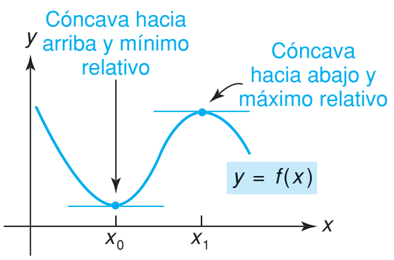


FIGURA 12.47 Relación de la concavidad con los extremos relativos.

Prueba de la segunda derivada para extremos relativos

Suponga que $f'(x_0) = 0$.
Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.
Si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

Queremos enfatizar que la **prueba de la segunda derivada *no es* aplicable cuando $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$.** Bajo estas condiciones, en x_0 puede existir un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. En esos casos debe usarse la prueba de la primera derivada para analizar qué está sucediendo en x_0. Además, la prueba de la segunda derivada no es aplicable cuando $f'(x_0)$ no está definida.

EJEMPLO 1 Prueba de la segunda derivada

Investigar los máximos y mínimos de la función siguiente. Utilizar, si es posible, la prueba de la segunda derivada.

a. $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$.

Solución:

$$y' = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x),$$

$$y'' = -4x \qquad \left(\text{tomando } \frac{d}{dx} \text{ de } 18 - 2x^2\right).$$

Resolviendo $y' = 0$ se obtienen los valores críticos $x = \pm 3$.

$$\text{Si } x = 3, \text{ entonces } y'' = -4(3) = -12 < 0,$$

por lo que existe un máximo relativo en $x = 3$.

$$\text{Si } x = -3, \text{ entonces } y'' = -4(-3) = 12 > 0,$$

por lo que existe un mínimo relativo en $x = -3$ (véase la fig. 12.4).

Aunque la prueba de la segunda derivada es muy útil, no dependa por completo de ella. La prueba no sólo puede no aplicarse, sino que en ocasiones podría ser muy complicado determinar la segunda derivada.

b. $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Solución:

$$y' = 24x^3 - 24x^2 = 24x^2(x - 1),$$

$$y'' = 72x^2 - 48x.$$

Al resolver $y' = 0$, se obtienen los valores críticos $x = 0, 1$. Vemos que

$$\text{si } x = 0, \text{ entonces } y'' = 0,$$

y

$$\text{si } x = 1, \text{ entonces } y'' > 0.$$

De acuerdo con la prueba de la segunda derivada, se tiene un mínimo relativo en $x = 1$. No podemos aplicar la prueba cuando $x = 0$, porque ahí $y'' = 0$. Para ver qué pasa en cero, nos remitimos a la prueba de la primera derivada:

$$\text{Si } x < 0, \text{ entonces } y' < 0;$$

$$\text{si } 0 < x < 1, \text{ entonces } y' < 0.$$

Por tanto, no existe ni máximo ni mínimo en $x = 0$ (véase la fig. 12.36).

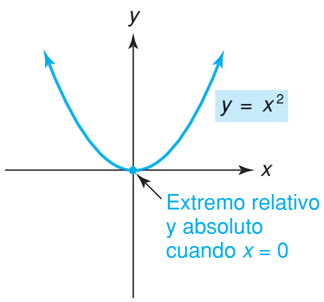


FIGURA 12.48 Exactamente un extremo relativo implica un extremo absoluto.

Si una función continua tiene *exactamente un* extremo relativo en un intervalo, puede demostrarse que el extremo relativo debe también ser un extremo *absoluto* en el intervalo. Para ilustrar esto, en la figura 12.48, la función $y = x^2$ tiene un mínimo relativo cuando $x = 0$, y no hay otros extremos relativos. Como $y = x^2$ es continua, este mínimo relativo es también un mínimo absoluto para la función.

EJEMPLO 2 Extremos absolutos

Si $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, *determinar dónde ocurren los extremos absolutos en el intervalo* $(0, \infty)$.

Solución: tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$
$$= 3(x + 1)(x - 3).$$

El único valor crítico en el intervalo $(0, \infty)$ es 3. Al aplicar la prueba de la segunda derivada en este punto se obtiene

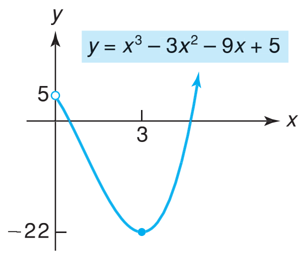


FIGURA 12.49 En $(0, \infty)$, existe un mínimo absoluto cuando $x = 3$.

$$f''(x) = 6x - 6,$$
$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0.$$

Así, existe un mínimo relativo en $x = 3$. Como éste es el único extremo relativo en $(0, \infty)$ y f es continua ahí, concluimos de nuestro análisis anterior que en realidad se trata de un valor mínimo *absoluto* cuando $x = 3$; este valor es $f(3) = -22$ (véase la fig. 12.49).

Ejercicio 12.4

En los problemas del 1 al 14 efectúe la prueba para máximos y mínimos. En caso de ser posible, utilice la prueba de la segunda derivada. En los problemas del 1 al 4 establezca si los extremos relativos son también extremos absolutos.

1. $y = x^2 - 5x + 6.$
2. $y = -2x^2 + 6x + 12.$
3. $y = -4x^2 + 2x - 8.$
4. $y = 3x^2 - 5x + 6.$
5. $y = x^3 - 27x + 1.$
6. $y = x^3 - 12x + 1.$
7. $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$
8. $y = x^4 - 2x^2 + 4.$
9. $y = 3x^4 + 3.$
10. $y = -2x^7.$
11. $y = 81x^5 - 5x.$
12. $y = \frac{13}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 10x - 7.$
13. $y = (x^2 + 7x + 10)^2.$
14. $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 5.$

12.5 ASÍNTOTAS

OBJETIVO Determinar asíntotas horizontales y verticales para una curva y hacer el bosquejo de las gráficas de funciones que tienen asíntotas.

Asíntotas verticales

En esta sección concluimos nuestro análisis sobre los procedimientos para el trazado de curvas, investigando funciones que tengan *asíntotas*. Básicamente, una asíntota es una recta a la que una curva se acerca cada vez más. Por ejemplo, en cada inciso de la figura 12.50, la línea punteada $x = a$ es una asíntota. Para ser precisos sobre esto, necesitamos hacer uso de los límites infinitos. En la figura 12.50(a), observe que cuando $x \to a^+$, $f(x)$ se vuelve positiva y tiende a infinito:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty.$$

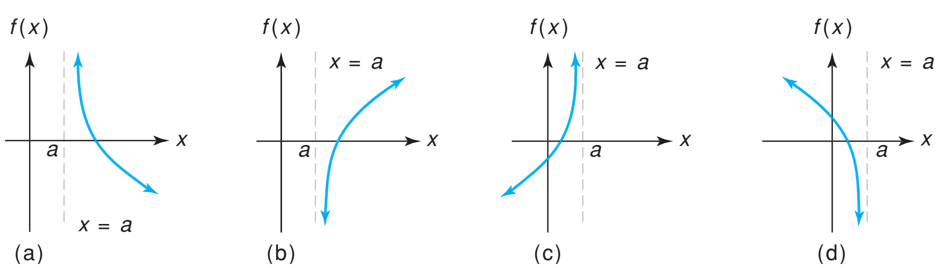


FIGURA 12.50 Asíntotas verticales $x = a$.

En la figura 12.50(b), cuando $x \to a^+$, $f(x)$ se vuelve negativa y tiende a menos infinito:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

En la figura 12.50(c) y (d) tenemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty,$$

respectivamente.

Hablando de manera informal, podemos decir que cada gráfica en la figura 12.50 tiene una "explosión" alrededor de la línea vertical punteada $x = a$, en el sentido de que el límite de $f(x)$ desde alguno de sus lados en a, es ∞ o bien $-\infty$. La recta $x = a$ se llama *asíntota vertical* de la gráfica. Una asíntota vertical no es parte de la gráfica, pero es útil en el trazado de ésta porque parte de la gráfica se acerca a la asíntota. Debido a la explosión alrededor de $x = a$, la función *no es* continua en a.

Definición

La recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** para la gráfica de la función $f(x)$ si y sólo si, por lo menos se cumple uno de los enunciados siguientes:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \ (\text{o } -\infty)$$

o

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \ (\text{o } -\infty).$$

Para determinar asíntotas verticales, debemos encontrar valores de x alrededor de los cuales $f(x)$ crezca o disminuya sin límite. Para una función racional (cociente de dos polinomios), esos valores de x son precisamente aquéllos para los que el denominador se hace cero, pero el numerador no. Por ejemplo, consideremos la función racional

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}.$$

Cuando x es 2, el denominador es cero, pero el numerador no. Si x es ligeramente mayor que 2, entonces el valor de $x - 2$ resulta cercano a cero y positivo, y el valor de $3x - 5$ resulta cercano a 1. Así $(3x - 5)/(x - 2)$ resulta muy grande, por lo que

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3x - 5}{x - 2} = \infty.$$

Este límite es suficiente para concluir que la recta $x = 2$, es una asíntota vertical. Como estamos interesados en el comportamiento de una función alrededor de una asíntota vertical, vale la pena examinar qué le pasa a esta función cuando x se acerca a 2 por la izquierda. Si x es ligeramente menor que 2, entonces el valor de $x - 2$ resulta muy cercano a cero pero negativo, y el valor de $3x - 5$ resulta cercano a 1. Así, $(3x - 5)/(x - 2)$ es "muy negativo", por lo que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x - 5}{x - 2} = -\infty.$$

Concluimos que la función crece sin límite cuando $x \to 2^+$ y decrece sin límite cuando $x \to 2^-$. La gráfica se muestra en la figura 12.51.

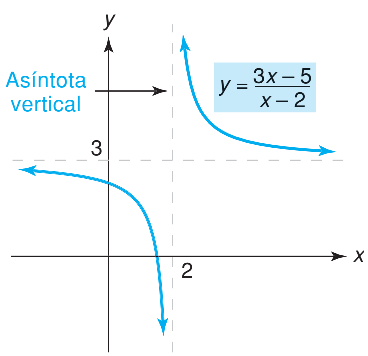


FIGURA 12.51 Gráfica de $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$.

En resumen, tenemos una regla para las asíntotas verticales.

Regla de las asíntotas verticales para funciones racionales

Suponga que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P y Q son funciones polinomiales. La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de f si y sólo si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$.

EJEMPLO 1 Determinación de asíntotas verticales

Determinar las asíntotas verticales para la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Solución: como f es una función racional, es aplicable aquí la regla de las asíntotas verticales. Si escribimos

$$f(x) = \frac{x(x - 4)}{(x - 3)(x - 1)} \qquad \text{(factorizando)},$$

resulta claro que el denominador es 0 cuando x es 3 o 1. Ninguno de esos valores anula al numerador 0. Las rectas $x = 3$ y $x = 1$ son entonces asíntotas verticales (véase la fig. 12.52).

Aunque la regla de la asíntota vertical garantiza que las rectas $x = 3$ y $x = 1$ son asíntotas verticales, no indica la naturaleza precisa de la "explosión" alrededor de estas rectas. Un análisis preciso requiere del uso de los límites laterales.

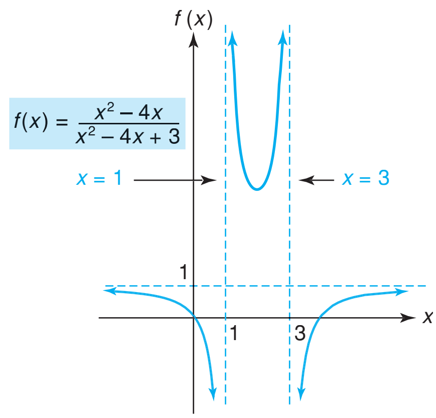


FIGURA 12.52 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$.

Asíntotas horizontales

Una curva $y = f(x)$ puede tener otro tipo de asíntota. En la figura 12.53(a), conforme x crece sin límite ($x \to \infty$), la gráfica se acerca a la recta horizontal $y = b$. Esto es,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

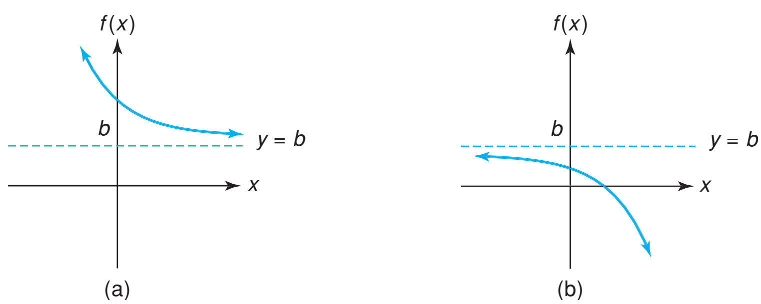


FIGURA 12.53 Asíntotas horizontales $y = b$.

En la figura 12.53(b), cuando x tiende a infinito negativamente, la gráfica se acerca a la recta horizontal $y = b$. Esto es,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

En cada caso, la línea punteada $y = b$ se llama *asíntota horizontal* de la gráfica, la que es una recta horizontal hacia la cual "tiende" la gráfica cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Aunque la gráfica de una recta horizontal tiende hacia sí misma cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$, no se considera que una recta tenga asíntotas. En resumen, tenemos la definición siguiente:

Definición

Sea f una función no lineal. La recta $y = b$ es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de f si y sólo si, por lo menos es verdadero uno de los siguientes enunciados:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Para determinar las asíntotas horizontales, primero debemos encontrar los límites de $f(x)$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Para ilustrar, de nuevo consideremos

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}.$$

Como ésta es una función racional, podemos usar los procedimientos de la sección 9.2 para encontrar los límites. Como el término dominante del numerador es $3x$ y el término dominante en el denominador es x, tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to \infty} 3 = 3.$$

Así, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal (véase la fig. 12.54). Además,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3.$$

Por tanto, la gráfica tiende a la recta horizontal $y = 3$ cuando $x \to \infty$ y también cuando $x \to -\infty$.

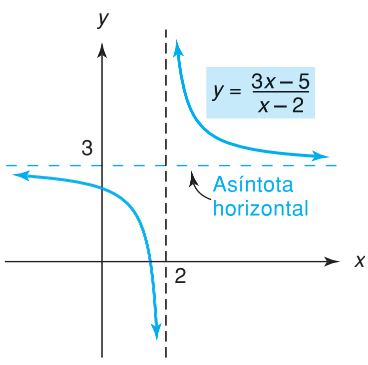


FIGURA 12.54 Gráfica de $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$.

EJEMPLO 2 Determinación de asíntotas horizontales

Encontrar las asíntotas horizontales para la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Solución: tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to \infty} 1 = 1.$$

Por tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. El mismo resultado se obtiene cuando $x \to -\infty$ (véase la fig. 12.52).

Es apropiado ahora hacer algunos comentarios sobre las asíntotas. Con las asíntotas verticales examinamos el comportamiento de una gráfica alrededor de valores específicos de x. Sin embargo, con las asíntotas horizontales examinamos la gráfica cuando x crece sin límite. Aunque una gráfica puede tener numerosas asíntotas verticales, puede tener cuando más dos asíntotas horizontales.

En la sección 9.2 vimos que cuando el numerador de una función racional tiene un grado mayor que el denominador, no existe un límite cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. De esto concluimos que: *siempre que el grado del numerador de una función racional sea mayor que el del denominador, la gráfica de la función no puede tener una asíntota horizontal.*

EJEMPLO 3 Determinación de asíntotas verticales y horizontales

Encontrar las asíntotas verticales y horizontales para la gráfica de la función polinomial

$$y = f(x) = x^3 + 2x.$$

Solución: comenzamos con las asíntotas verticales. Ésta es una función racional con denominador igual a 1, el que nunca es cero. Por la regla de las asíntotas verticales, no se tienen asíntotas verticales. Como el grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (0), no se tienen asíntotas horizontales. Sin embargo, examinemos el comportamiento de la gráfica cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Tenemos

$$\lim_{x\to\infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

$$\text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

Entonces, cuando $x \to \infty$ la gráfica se extiende indefinidamente hacia arriba, y cuando $x \to -\infty$ se extiende indefinidamente hacia abajo (véase la fig. 12.55).

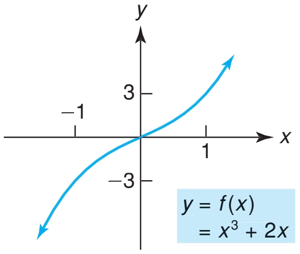


FIGURA 12.55 La gráfica de $y = x^3 + 2x$ no tiene asíntota horizontal ni asíntota vertical.

Los resultados del ejemplo 3 pueden generalizarse a cualquier función polinomial:

> Una función polinomial no tiene asíntotas, ni verticales ni horizontales.

EJEMPLO 4 Determinación de asíntotas horizontales y verticales

Encontrar las asíntotas horizontales y verticales para la gráfica de $y = e^x - 1$.

Solución: para investigar las asíntotas horizontales, hacemos que $x \to \infty$. Entonces e^x crece sin límite, por lo que

$$\lim_{x\to\infty} (e^x - 1) = \infty.$$

Así, la gráfica no tiende a valor alguno cuando $x \to \infty$. Sin embargo, cuando $x \to -\infty$, tenemos que $e^x \to 0$, por lo que

$$\lim_{x\to-\infty} (e^x - 1) = \lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty} 1 = 0 - 1 = -1.$$

Por tanto, la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica no tiene asíntotas verticales porque $e^x - 1$ ni crece ni disminuye sin límite alrededor de algún punto fijo de x (véase la fig. 12.56).

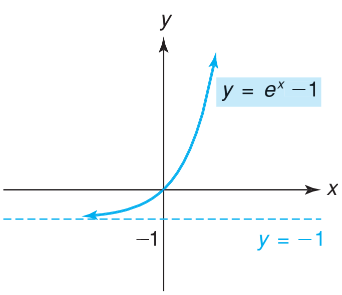


FIGURA 12.56 La gráfica de $y = e^x - 1$ tiene una asíntota horizontal.

Trazado de curvas

Concluimos este capítulo con dos ejemplos que muestran cómo graficar una función empleando todas las herramientas que hemos desarrollado para el trazado de curvas.

EJEMPLO 5 Trazado de una curva

Hacer el bosquejo de la gráfica de $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$.

Solución:

Intersecciones Cuando $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$. Si $y = 0$, entonces $0 = 1/(4 - x^2)$, que no tiene solución. Así $(0, \frac{1}{4})$ es la única intersección.

Simetría Existe simetría con respecto al eje y: si reemplazamos x por $-x$ resulta

$$y = \frac{1}{4 - (-x)^2}, \quad \text{o} \quad y = \frac{1}{4 - x^2},$$

que es igual a la ecuación original. Puede demostrarse que no existe ninguna otra simetría.

Asíntotas Al probar por asíntotas horizontales, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{4 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-x^2} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

De manera similar,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0.$$

Así, $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal. Como el denominador de $1/(4 - x^2)$ es cero cuando $x = \pm 2$, y el numerador no es cero para esos valores de x, las líneas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

Máximos y mínimos Como $y = (4 - x^2)^{-1}$,

$$y' = -1(4 - x^2)^{-2}(-2x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}.$$

Vemos que y' es cero cuando $x = 0$ y que y' no está definida cuando $x = \pm 2$. Sin embargo, sólo 0 es un valor crítico, porque y no está definida en ± 2. Hay cuatro intervalos que considerar para determinar si la función es creciente o decreciente en ellos:

Si $x < -2$,	entonces	$y' < 0$;
si $-2 < x < 0$,	entonces	$y' < 0$;
si $0 < x < 2$,	entonces	$y' > 0$;
si $x > 2$,	entonces	$y' > 0$.

La función es decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$ y creciente en $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. (Véase la fig. 12.57.) Existe un mínimo relativo en $x = 0$.

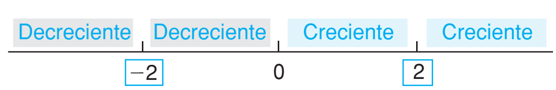


FIGURA 12.57 Análisis creciente/decreciente.

Concavidad

$$y'' = \frac{(4 - x^2)^2(2) - (2x)2(4 - x^2)(-2x)}{(4 - x^2)^4}$$

$$= \frac{2(4 - x^2)[(4 - x^2) - (2x)(-2x)]}{(4 - x^2)^4} = \frac{2(4 + 3x^2)}{(4 - x^2)^3}.$$

Haciendo $y'' = 0$, no obtenemos raíces reales. Sin embargo, y'' no está definida cuando $x = \pm 2$. Aunque la concavidad puede cambiar alrededor de esos valores de x, éstos no corresponden a puntos de inflexión porque no están en el dominio de la función. Hay tres intervalos donde se debe investigar la concavidad:

Si $x < -2$,	entonces	$y'' < 0$;
si $-2 < x < 2$,	entonces	$y'' > 0$;
si $x > 2$,	entonces	$y'' < 0$.

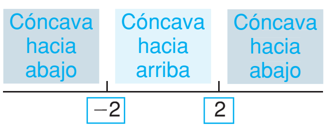


FIGURA 12.58 Análisis de concavidad.

La gráfica es cóncava hacia arriba en $(-2, 2)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$. (*Véase* fig. 12.58.) Aunque la concavidad cambia alrededor de $x = \pm 2$, como dijimos antes, estos valores no corresponden a puntos de inflexión.

Análisis Con base en los puntos de la tabla que aparece en la figura 12.59, algunos escogidos arbitrariamente, y en la información anterior, obtuvimos la gráfica indicada. Debido a la simetría con respecto al eje y, nuestra tabla sólo tiene valores de $x \geq 0$.

x	0	1	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$

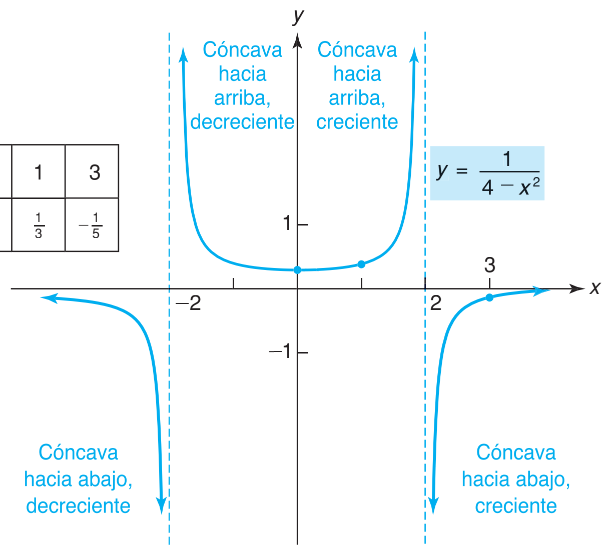


FIGURA 12.59 Gráfica de $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$.

EJEMPLO 6 **Trazado de una curva**

Trazar la gráfica de $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

Solución:

Intersecciones Cuando $x = 0$, $y = 0$; cuando $y = 0$, $x = 0$. Así $(0,0)$ es la única intersección.

Simetría Hay simetría con respecto al origen: reemplazando x por $-x$ y y por $-y$, resulta

$$-y = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1}, \quad \text{o} \quad y = \frac{4x}{x^2 + 1},$$

la cual es la misma que la ecuación original. No existe ninguna otra simetría.

Asíntotas Al investigar las asíntotas horizontales, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0,$$

y de manera similar,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = 0.$$

Así, $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal. Como el denominador de $4x/(x^2 + 1)$ nunca es 0, no hay asíntotas verticales.

Máximos y mínimos Haciendo $y = f(x)$, tenemos

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(4) - 4x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4(1 + x)(1 - x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Los valores críticos son $x = \pm 1$, por lo que hay tres intervalos que considerar:

Si $x < -1$, entonces $f'(x) = \dfrac{4(-)(+)}{(+)} = -$, por lo que f es decreciente;

si $-1 < x < 1$, entonces $f'(x) = \dfrac{4(+)(+)}{(+)} = +$, por lo que f es creciente;

si $x > 1$, entonces $f'(x) = \dfrac{4(+)(-)}{(+)} = -$, por lo que f es decreciente (véase la fig. 12.60).

FIGURA 12.60 Análisis creciente/decreciente.

Existe un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Concavidad Como $f'(x) = \dfrac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$,

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 1)^2(-8x) - (4 - 4x^2)(2)(x^2 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{8x(x^2 + 1)(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{8x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}.$$

Haciendo $f''(x) = 0$, concluimos que los puntos de inflexión posibles se presentan cuando $x = \pm\sqrt{3}, 0$. Hay cuatro intervalos que considerar:

Si $x < -\sqrt{3}$, entonces $f''(x) = \dfrac{8(-)(-)(-)}{(+)} = -$, por lo que f es cóncava hacia abajo;

si $-\sqrt{3} < x < 0$, $f''(x) = \dfrac{8(-)(+)(-)}{(+)} = +$, por lo que f es cóncava hacia arriba;

si $0 < x < \sqrt{3}$, entonces $f''(x) = \dfrac{8(+)(+)(-)}{(+)} = -$, por lo que f es cóncava hacia abajo;

si $x > \sqrt{3}$, entonces $f''(x) = \dfrac{8(+)(+)(+)}{(+)} = +$, por lo que f es cóncava hacia arriba (véase la fig. 12.61).

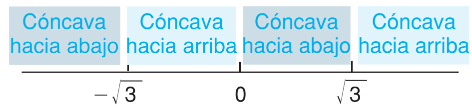


FIGURA 12.61 Análisis de concavidad.

Los puntos de inflexión ocurren cuando $x = 0, \pm\sqrt{3}$.

Análisis Después de considerar toda la información obtenida, se llega a la gráfica de $y = 4x/(x^2 + 1)$ que se muestra en la figura 12.62, junto con una tabla de puntos importantes.

x	0	1	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
y	0	2	$\sqrt{3}$	-2	$-\sqrt{3}$

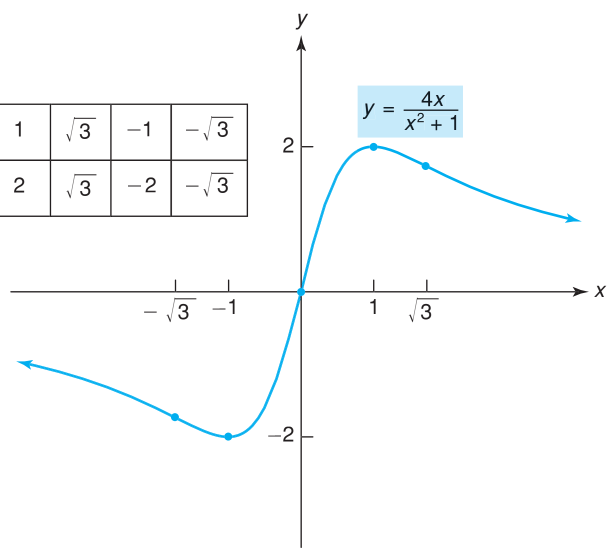


FIGURA 12.62 Gráfica de $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

Ejercicio 12.5

En los problemas del 1 al 24 encuentre las asíntotas horizontales y verticales para las gráficas de las funciones. No trace las gráficas.

1. $y = \dfrac{x}{x - 1}$.

2. $y = \dfrac{x + 1}{x}$.

3. $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 3}$.

4. $y = \dfrac{2x + 1}{2x + 1}$.

5. $y = \dfrac{4}{x}$.

6. $y = -\dfrac{4}{x^2}$.

7. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

8. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

9. $y = x^2 - 5x + 5$.

10. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$.

11. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + x - 6}$.

12. $f(x) = \dfrac{x^3}{5}$.

13. $y = \dfrac{4 + 2x - 7x^2}{x^2 - 8}$.

14. $y = \dfrac{2x^3 + 1}{3x(2x - 1)(4x - 3)}$.

15. $y = \dfrac{4}{x - 6} + 7$.

16. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 9x + 4}$.

17. $f(x) = \dfrac{3 - x^4}{x^3 + x^2}$. **18.** $y = \dfrac{x^2 + x}{11x}$. **19.** $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{1 + 4x + 4x^2}$. **20.** $y = \dfrac{x^4 + 1}{1 - x^4}$.

21. $y = \dfrac{9x^2 - 16}{2(3x + 4)^2}$. **22.** $y = \dfrac{2}{9} + \dfrac{3x}{14x^2 + x - 3}$. **23.** $y = 2e^{x+2} + 4$. **24.** $f(x) = 12e^{-x}$.

En los problemas del 25 al 46 haga el bosquejo de cada curva. Determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo; máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión; simetría; asíntotas horizontales y verticales; aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente.

25. $y = \dfrac{3}{x}$. **26.** $y = \dfrac{1}{x - 1}$. **27.** $y = \dfrac{x}{x + 1}$. **28.** $y = \dfrac{10}{\sqrt{x}}$.

29. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. **30.** $y = \dfrac{x^2}{1 - x}$. **31.** $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. **32.** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

33. $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$. **34.** $y = \dfrac{1 - x}{x^2}$. **35.** $y = \dfrac{x^2}{7x + 4}$. **36.** $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$.

37. $y = \dfrac{9}{9x^2 - 6x - 8}$. **38.** $y = \dfrac{37x^2 + 36x + 9}{9x^2}$. **39.** $y = \dfrac{2x - 3}{(2x - 9)^2}$. **40.** $y = \dfrac{3x + 1}{(6x + 5)^2}$.

41. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$. **42.** $y = \dfrac{x}{(x + 1)^2}$. **43.** $y = x + \dfrac{1}{x + 1}$. **44.** $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

45. $y = \dfrac{-3x^2 + 2x - 5}{3x^2 - 2x - 1}$. **46.** $y = 2x + 1 + \dfrac{4}{2x + 1}$.

---

47. Trace la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$, tenga una asíntota horizontal $y = 1$ para $x \to \pm\infty$, tenga una asíntota vertical $x = 2$, para $x < 2$ tenga tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) < 0$, y para $x > 2$ tenga tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) > 0$.

48. Dibuje la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$, tenga una asíntota horizontal $y = 2$ para $x \to \pm\infty$, tenga una asíntota vertical $x = -1$, para $x < -1$tenga tanto $f'(x) > 0$ como $f''(x) > 0$, y para $x > -1$ tenga tanto $f'(x) > 0$ como $f''(x) < 0$.

49. Trace la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$, tenga una asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \pm\infty$, tenga asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 2$, $f'(x) < 0$ para $x < -1$ y para $-1 < x < 2$, y además $f''(x) < 0$ para $x > 2$.

50. Trace la gráfica de una función f tal que $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(3) = 0$, tenga una asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \pm\infty$, tenga asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 1$, $f''(x) < 0$ para $x < -2$ y $f'(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ y para $1 < x < 3$.

51. Poder de compra Al analizar el patrón temporal de compras, Mantell y Sing[12] utilizan la curva

$$y = \frac{x}{a + bx},$$

como un modelo matemático. Ellos afirman que $y = 1/b$ es una asíntota. Verifíquelo.

52. Esboce las gráficas de $y = 6 - 3e^{-x}$ y $y = 6 + 3e^{-x}$. Demuestre que son asintóticas a la misma línea. ¿Cuál es la ecuación de esta línea?

53. Mercado para un producto Para un producto nuevo, el número anual de miles de paquetes vendidos y, después de t años, contados a partir de su introducción al mercado, se estima que estará dado por

$$y = f(t) = 150 - 76e^{-t}.$$

Demuestre que $y = 150$ es una asíntota horizontal para la gráfica de esta ecuación. Esto deja ver que una vez que el producto se ha establecido entre los consumidores, el mercado tiende a ser constante.

54. Grafique $y = \dfrac{x^2 - 5}{x^3 + 4x^2 + 13x + 1}$. Con base en la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

55. Grafique $y = \dfrac{6x^3 - 2x^2 + 6x - 1}{3x^3 - 2x^2 - 18x + 12}$. A partir de la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

56. Grafique $y = \dfrac{\ln(x + 4)}{x^2 - 8x + 5}$ en la pantalla estándar. La gráfica sugiere que hay dos asíntotas verticales de la forma $x = k$, donde $k > 0$. También, parece que la gráfica "comienza" cerca de $x = -4$. Cuando $x \to -4^+$, se tiene

$$\ln(x + 4) \to -\infty \quad \text{y} \quad x^2 - 8x + 5 \to 53.$$

---

[12]L.H. Mantell y F. P. Sing, *Economics for Business Decisions* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972), 107.

Así, $\lim\limits_{x \to 4^+} y = -\infty$. Esto proporciona la asíntota vertical $x = -4$. De modo que en realidad, existen *tres* asíntotas verticales. Utilice la característica de acercamiento para hacer clara la asíntota $x = -4$ en la pantalla.

57. Grafique $y = \dfrac{0.34e^{0.7x}}{4.2 + 0.71e^{0.7x}}$, en donde $x > 0$.

Con ayuda de la gráfica, determine una ecuación de la asíntota horizontal examinando los valores de y cuando $x \to \infty$. Para confirmar esta ecuación de manera algebraica, encuentre $\lim\limits_{x \to \infty} y$ dividiendo primero tanto el numerador como el denominador entre $e^{0.7x}$.

12.6 REPASO

Términos importantes

Sección 12.1 función creciente función decreciente máximo relativo mínimo relativo extremos relativos extremos absolutos valor crítico punto crítico prueba de la primera derivada

Sección 12.2 teorema del valor extremo

Sección 12.3 cóncava hacia arriba cóncava hacia abajo punto de inflexión

Sección 12.4 prueba de la segunda derivada

Sección 12.5 asíntota vertical asíntota horizontal regla de la asíntota vertical para funciones racionales

Resumen

El cálculo es de gran ayuda para hacer el bosquejo de gráficas de funciones. La primera derivada se usa para determinar cuándo una función es creciente o decreciente y para localizar los máximos y mínimos relativos. Si $f'(x)$ es positiva en todo un intervalo, entonces en ese intervalo f es creciente y su gráfica asciende (de izquierda a derecha). Si $f'(x)$ es negativa en todo un intervalo, entonces f es decreciente y su gráfica desciende.

Un punto (x_0, y_0) sobre la gráfica en el que $f'(x)$ es 0 o no está definida, es un candidato a extremo relativo; x_0 se llama valor crítico. Para que se presente en x_0 un extremo relativo, la primera derivada debe cambiar de signo alrededor de x_0. El procedimiento siguiente es la prueba de la primera derivada para los extremos relativos de $y = f(x)$:

Prueba de la primera derivada para extremos relativos

Paso 1. Encuentre $f'(x)$.

Paso 2. Determine todos los valores de x en que $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no está definida.

Paso 3. En los intervalos sugeridos por los valores del paso 2, determine si f es creciente $[f'(x) > 0]$ o decreciente $[f'(x) < 0]$.

Paso 4. Para cada valor crítico x_0 en que f es continua, determine si $f'(x)$ cambia de signo al aumentar x y pasar sobre x_0. Se tiene un máximo relativo cuando $x = x_0$, si $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$, y un mínimo relativo si $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$. Si $f'(x)$ no cambia de signo, entonces no se tiene un extremo relativo cuando $x = x_0$.

Bajo ciertas condiciones, se puede asegurar que una función tiene extremos absolutos. El teorema del valor extremo establece que si f es continua en un intervalo cerrado, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Puede emplearse el siguiente procedimiento para localizar los extremos absolutos:

Procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función f continua en $[a, b]$

Paso 1. Encuentre los valores críticos de f.

Paso 2. Evalúe $f(x)$ en los puntos extremos a y b y en los valores críticos de (a, b).

Paso 3. El valor máximo de f es el más grande de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de f es el menor de los valores encontrados en el paso 2.

La segunda derivada se usa para determinar la concavidad y los puntos de inflexión. Si $f''(x) > 0$ en todo un intervalo, entonces f es cóncava hacia arriba en ese intervalo y su gráfica se dobla hacia arriba. Si $f''(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava hacia abajo en ese intervalo y su gráfica se dobla hacia abajo. Un punto en la gráfica donde f es continua y su concavidad cambia, es un punto de inflexión. El punto (x_0, y_0) en la gráfica, es un posible punto de inflexión si $f''(x_0)$ es cero o no está definida, y f es continua en x_0.

La segunda derivada proporciona también un medio para probar si ciertos valores críticos son extremos relativos:

Prueba de la segunda derivada para extremos relativos

Suponga que $f'(x_0) = 0$. Entonces

Si $f''(x_0) < 0$, f entonces f tiene un máximo relativo en x_0;

si $f''(x_0) > 0$, f entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

Las asíntotas también son útiles para el trazado de curvas. Las gráficas "explotan" cerca de las asíntotas verticales y "tienden" hacia las asíntotas horizontales. La línea $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de una función f si lím $f(x) = \infty$, o $-\infty$ cuando x tiende a a por la derecha $(x \to a^+)$ o por la izquierda $(x \to a^-)$. En el caso de una función racional, $f(x) = P(x)/Q(x)$, podemos encontrar las asíntotas verticales sin evaluar límites. Si $Q(a) = 0$ pero $P(a) \neq 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal para la gráfica de una función no lineal f, si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

En particular, una función polinomial no tiene asíntotas horizontales ni verticales. Además, una función racional cuyo numerador tiene grado mayor que el del denominador no tiene una asíntota horizontal.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 4 encuentre las asíntotas horizontales y verticales.

1. $y = \dfrac{3x^2}{x^2 - 16}$.

2. $y = \dfrac{x + 1}{4x - 2x^2}$.

3. $y = \dfrac{5x^2 - 3}{(3x + 2)^2}$.

4. $y = \dfrac{4x + 1}{3x - 5} - \dfrac{3x + 1}{2x - 11}$.

En los problemas del 5 al 8 encuentre los valores críticos.

5. $f(x) = \dfrac{7x^2}{2 - x^2}$.

6. $f(x) = 8(x - 1)^2(x + 6)^4$.

7. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 1}}{3 - 4x}$.

8. $f(x) = \dfrac{13xe^{-5x/6}}{6x + 5}$.

En los problemas del 9 al 12 encuentre los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

9. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

10. $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x + 1)^2}$.

11. $f(x) = \dfrac{6x^4}{x^2 - 3}$.

12. $f(x) = 9\sqrt[3]{3x^3 - 4x}$.

En los problemas del 13 al 18 encuentre los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

13. $f(x) = x^4 - x^3 - 14$.

14. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

15. $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$.

16. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$.

17. $f(x) = (4x + 1)^3(4x + 9)$.

18. $f(x) = (x^2 - x - 1)^2$.

En los problemas del 19 al 24 pruebe por extremos relativos.

19. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$.

20. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2}$.

21. $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^3}{3}$.

22. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

23. $f(x) = x^{2/3}(x + 1)$.

24. $f(x) = x^3(2x - 1)^4$.

En los problemas del 25 al 30 encuentre los valores de x en que se presentan los puntos de inflexión.

25. $y = x^5 - 5x^4 + 3x$.

26. $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x}$.

27. $y = 4(3x - 5)(x^4 + 2)$.

28. $y = x^2 + 2\ln(-x)$.

29. $y = \dfrac{x^2}{5e^x}$.

30. $y = 6(x^2 - 4)^3$.

En los problemas del 31 al 34 efectúe la prueba sobre extremos absolutos en el intervalo indicado.

31. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$, $[0, 2]$.

32. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, $[0, 3]$.

33. $f(x) = \dfrac{x}{(5x - 6)^2}$, $[-2, 0]$.

34. $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^{2/3}$, $[-1, 1]$.

35. Sea $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

a. Determine los valores de x en que se presentan los máximos y mínimos relativos, en caso de que existan.

b. Determine el o los intervalos en que la gráfica de f es cóncava hacia abajo y encuentre las coordenadas de todos los puntos de inflexión.

36. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Puede demostrarse que

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

a. Determine si la gráfica de f es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen.

b. Encuentre el o los intervalos en que f es creciente.

c. Determine las coordenadas de todos los extremos relativos de f.

d. Determine $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

e. Haga el bosquejo de la gráfica de f.

f. Establezca los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x)$ (en caso de que existan).

En los problemas del 37 al 48 esboce las gráficas de las funciones. Indique los intervalos en que la función crece, decrece, es cóncava hacia arriba, es cóncava hacia abajo; indique los puntos máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, las asíntotas horizontales, las asíntotas verticales, la simetría y aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente.

37. $y = x^2 - 2x - 24$.

38. $y = x^3 - 27x$.

39. $y = x^3 - 12x + 20$.

40. $y = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 150$.

41. $y = x^3 + x$.

42. $y = \dfrac{x + 2}{x - 3}$.

43. $f(x) = \dfrac{100(x + 5)}{x^2}$.

44. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

45. $y = \dfrac{x}{(2x - 1)^3}$.

46. $y = 6x^{1/3}(2x - 1)$.

47. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

48. $f(x) = 1 + \ln(x^2)$.

49. ¿Son ciertos o falsos los siguientes enunciados?

a. Si $f'(x_0) = 0$, entonces f debe tener un extremo relativo en x_0.

b. Como la función $f(x) = 1/x$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, es imposible encontrar x_1 y x_2 en el dominio de f de manera que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$.

c. En el intervalo $(-1, 1]$, la función $f(x) = x^4$ tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

d. Si $f''(x_0) = 0$, entonces $(x_0, f(x_0))$ debe ser un punto de inflexión.

e. Una función f definida en el intervalo $(-2, 2)$ con exactamente un máximo relativo, debe tener un máximo absoluto.

50. Una función importante en la teoría de la probabilidad es la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

a. Determine si la gráfica de f es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen.

b. Encuentre los intervalos en que f es creciente y en los que es decreciente.

c. Encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos de f.

d. Encuentre $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

e. Encuentre los intervalos en que la gráfica de f es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo.

f. Encuentre las coordenadas de todos los puntos de inflexión.

g. Haga el bosquejo de la gráfica de f.

h. Encuentre todos los extremos absolutos.

51. Costo marginal Si $c = q^3 - 6q^2 + 12q + 18$ es una función de costo total, ¿para qué valores de q es creciente el costo marginal?

52. Ingreso marginal Si $r = 160q^{3/2} - 3q^2$ es la función de ingreso para el producto de un fabricante, determine los intervalos en que la función de ingreso marginal es creciente.

53. Función ingreso La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = 150 - \frac{\sqrt{q}}{10}, \quad \text{donde } q > 0.$$

Demuestre que la gráfica de la función de ingreso es cóncava hacia abajo, dondequiera que esté definida.

54. Anticoncepción En un modelo sobre el efecto de los anticonceptivos en la tasa de nacimientos,[13] la ecuación,

$$R = f(x) = \frac{x}{4.4 - 3.4x}, \quad 0 \le x \le 1,$$

da la reducción proporcional R en la tasa de nacimientos como función de la eficiencia x de un método anticonceptivo. Una eficiencia de 0.2 (o 20%) significa que la probabilidad de resultar embarazada es 80% de la probabilidad de resultar embarazada sin el anticonceptivo. Encuentre la reducción (en porcentaje) cuando la eficiencia es (a) 0, (b) 0.5 y (c) 1. Encuentre dR/dx y d^2R/dx^2, y dibuje la gráfica de la ecuación.

[13] R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs. N.J.: Prentice–Hall, Inc., 1975).

55. Aprendizaje y memoria Si usted fuese a citar los miembros de una categoría, por ejemplo la de los animales cuadrúpedos, las palabras que citaría se presentarían probablemente en "grupos" con distintas pausas entre tales grupos. Por ejemplo, usted podría citar las siguientes palabras para la categoría de los cuadrúpedos:

perro, gato, ratón, rata
(pausa)
caballo, burro, mula
(pausa)
vaca, cerdo, cabra, cordero
etcétera.

Las pausas pueden presentarse porque uno tiene que buscar mentalmente las subcategorías (animales domésticos, bestias de carga, animales de granja, etc.).

El tiempo transcurrido entre el enunciado de palabras sucesivas se llama *tiempo entre respuestas*. Se ha usado una función para analizar la duración del tiempo para pausas y tamaño de los grupos (número de palabras en un grupo).[14] Esta función f es tal que

$$f(t) = \begin{cases} \text{número de palabras promedio que} \\ \text{se presentan en sucesión con tiempo} \\ \text{entre respuestas menor que } t. \end{cases}$$

La gráfica de f tiene una forma similar a la mostrada en la figura 12.63 y se ajusta bastante bien por medio de un polinomio de tercer grado, tal como

$$f(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D.$$

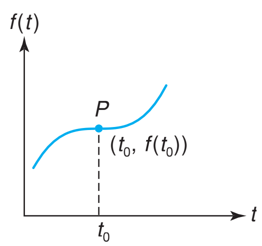


FIGURA 12.63 Diagrama para el problema 55.

El punto P tiene un significado especial. Es tal que el valor t_0 separa los tiempos entre respuestas *dentro* de los grupos, de aquellos tiempos que se registran *entre dos* grupos. Matemáticamente, P es un punto crítico que también es un punto de inflexión. Suponga estas dos condiciones y demuestre que (a) $t_0 = -B/(3A)$ y (b) $B^2 = 3AC$.

56. Penetración a un mercado En un modelo para introducir un producto nuevo a un mercado, las ventas S del producto en el tiempo t están dadas por[15]

$$S = g(t) = \frac{m(p+q)^2}{p}\left[\frac{e^{-(p+q)t}}{\left(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}+1\right)^2}\right],$$

donde p, q y m son constantes no nulas.

a. Demuestre que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{m}{p}(p+q)^3 e^{-(p+q)t}\left[\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}-1\right]}{\left(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}+1\right)^3}.$$

b. Determine el valor de t para el cual se tiene la venta máxima. Puede suponer que S alcanza un máximo cuando $dS/dt = 0$.

En los problemas del 57 al 60, cuando sea apropiado, redondee sus respuestas a dos decimales.

57. En la gráfica de $y = 4x^3 + 5.3x^2 - 7x + 3$, encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos.

58. En la gráfica de $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 8x - 4$, determine los extremos absolutos de f en el intervalo $[-1, 1]$.

59. La gráfica de una función f tiene exactamente un punto de inflexión. Si

$$f''(x) = \frac{x^3 + 3x + 2}{5x^2 - 2x + 4},$$

use la gráfica de f'' para determinar el valor x del punto de inflexión de f.

60. Grafique $y = \dfrac{4x - 2x^2}{x^3 + 4x + 4}$. Con base en la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

[14] A. Graesser y G. Mandler, "Limited Processing Capacity Constrains the Storage of Unrelated Sets of Words and Retrieval from Natural Categories", *Human Learning and Memory*, 4, núm. 1 (1978), 86-100.

[15] A. P. Hurter, Jr., A.H. Rubenstein, et. al., "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 11 (1978), 197-221.

Aplicación práctica
Bosquejo de la curva de Phillips

Antes de que la curva de Laffer saltase a la fama, los economistas debatían con respecto a otra curva, cuyo nombre también se le dio en honor de su creador: la curva de Phillips. Esta curva tiene la intención de describir la relación entre el desempleo y la inflación. El bosquejo de la curva de Phillips nos dará una idea de cómo en ocasiones el bosquejo de curvas es un proceso incierto, que incluye no sólo un ajuste a valores conocidos, sino también, necesariamente, alguna concepción del proceso que fundamenta a los datos.

El razonamiento atrás de la curva de Phillips es que cuando el desempleo es alto, el trabajador promedio gasta menos dinero, y al mismo tiempo los empleadores no tienen que dar aumentos generosos para retener a los trabajadores. El empleador ahorra y el trabajador limitado a gastar, evita que los precios y salarios se eleven con rapidez, lo que produce una baja tasa de inflación. Recíprocamente, cuando el país está cerca del empleo completo, los trabajadores generan más y gastan más, y los empleadores tienen que ofrecer mayores incentivos de trabajo para conservar a sus trabajadores. Estos factores conducen a salarios y precios más altos.

Entonces parece ser que existe una especie de relación inversa entre la tasa de desempleo y la tasa de inflación. La gráfica de esta relación es la curva de Phillips.

Para el razonamiento anterior, ahora presentamos algunos datos empíricos. Una fuente de información es el reporte económico anual del presidente (de Estados Unidos), el cual puede bajarse de `w3.acces.gpo.gov/eop`. La tabla 12.1 está basada en el reporte de 2001. La inflación puede medirse en varias formas; aquí la medida utilizada es el cambio porcentual anual en el índice de precios del producto interno bruto (PIB).

TABLA 12.1 Empleo e inflación, Estados Unidos, 1959-2000

Año	Tasa de desempleo (%)	Tasa de inflación (%)	Año	Tasa de desempleo (%)	Tasa de inflación (%)	Año	Tasa de desempleo (%)	Tasa de inflación (%)
1959	5.5	1.1	1973	4.9	5.6	1987	6.2	3
1960	5.5	1.4	1974	5.6	9	1988	5.5	3.4
1961	6.7	1.1	1975	8.5	9.4	1989	5.3	3.8
1962	5.5	1.4	1976	7.7	5.7	1990	5.6	3.9
1963	5.7	1.1	1977	7.1	6.4	1991	6.8	3.6
1964	5.2	1.5	1978	6.1	7.1	1992	7.5	2.4
1965	4.5	1.9	1979	5.8	8.3	1993	6.9	2.4
1966	3.8	2.8	1980	7.1	9.2	1994	6.1	2.1
1967	3.8	3.1	1981	7.6	9.3	1995	5.6	2.2
1968	3.6	4.3	1982	9.7	6.2	1996	5.4	1.9
1969	3.5	4.9	1983	9.6	3.9	1997	4.9	1.9
1970	4.9	5.3	1984	7.5	3.7	1998	4.5	1.3
1971	5.9	5	1985	7.2	3.2	1999	4.2	1.5
1972	5.6	4.2	1986	7	2.2	2000	4	2.1

Primero considere los valores de los datos para los años de 1959 a 1969, en donde la tasa de desempleo fue entre 3.5% y 6.7%. Si estos valores se grafican, sugieren cómo debe verse la curva en su parte media, pero no determinan el comportamiento en los extremos. Para precisar los extremos de la curva, podemos razonar que como es imposible tener un desempleo negativo, e incluso un desempleo cero es un escenario irreal, la curva no debe intersecar al eje vertical, pero debe tenerlo como una asíntota.

En contraste, en el extremo derecho de la curva, sabemos que en teoría existe inflación negativa, e históricamente, una ocurrencia real (aunque muy rara). De modo que es probable que haya una intersección con el eje horizontal. Con esta información a la mano, podemos graficar los valores de los datos con el bosquejo de una curva superpuesta, como en la figura 12.64.

Como esto se estableció en el inicio de la década de 1970, los economistas estaban confiados, en general, de que la curva de Phillips representaba una importante y útil ayuda en los trabajos de economía de Estados Unidos. Los datos de las décadas anteriores, aunque no se alineaban exactamente con los de 1959 a 1969, seguían el mismo patrón global.

Sin embargo, en 1970, esta gráfica empezó a separarse. La figura 12.65 muestra un diagrama de dispersión de la información de inflación y desempleo para los años 1970 a 2000. ¡Esta vez es difícil conocer el tipo de curva que se debe dibujar! Los puntos no sugieren algo como una curva de Phillips.

Viendo los datos de la década de 1970, algunos economistas sugirieron que quizá en realidad existen dos curvas de Phillips, una a corto plazo, que se ve más o menos como la que se muestra en la figura 12.64, y otra, "la verdadera" curva para largo plazo, simplemente una línea vertical, que corresponde al nivel natural de desempleo, en alrededor de 5 o 6%. Estos economistas suponían que aunque la tasa de desempleo pudiese fluctuar, esencialmente existe un punto estable de desempleo, por así llamarle. Y si la tasa de desempleo caía por debajo de él, se desencadenaba una serie de eventos que a la postre forzaban al desempleo a regresar. Esto no era un punto de vista aceptado de manera universal, pero era una posible interpretación de los datos.

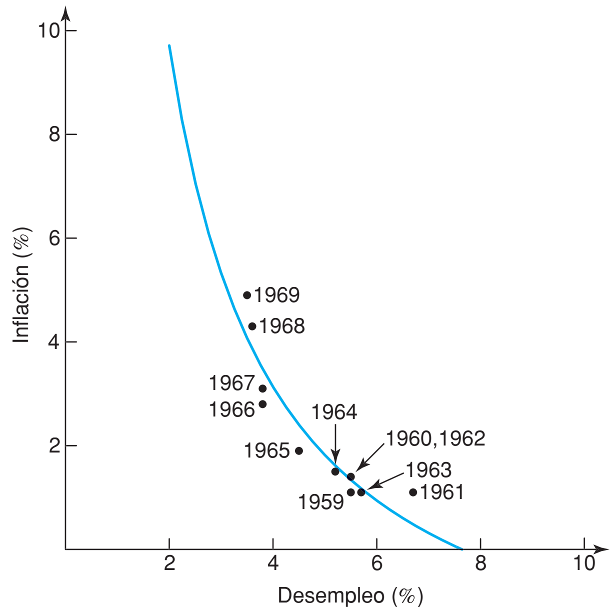


FIGURA 12.64 Los años 1959-1969.

Ejercicios

1. En la figura 12.65, examine los puntos de los datos para 1998−2000. ¿Qué tan bien esta parte de los datos se ajusta a la curva de Phillips de la que se hizo el bosquejo para 1959−1969?
2. En los datos de la tabla 12.1, existe un patrón que no corresponde al bosquejo de alguna curva mostrada. En el diagrama de dispersión aparece sólo cuando el tiempo se toma en cuenta, una tendencia hacia un tipo de espiral en el sentido de las manecillas del reloj. Para ver este patrón, siga la sucesión de puntos año tras año, de la figura 12.65. A la vista de este patrón y del supuesto de tendencia a la vertical, a largo plazo de la curva de Phillips, ¿qué podría esperar con respecto a la inflación y al desempleo en los años 2001 a 2005? ¿Qué tan fiables son estas esperanzas?

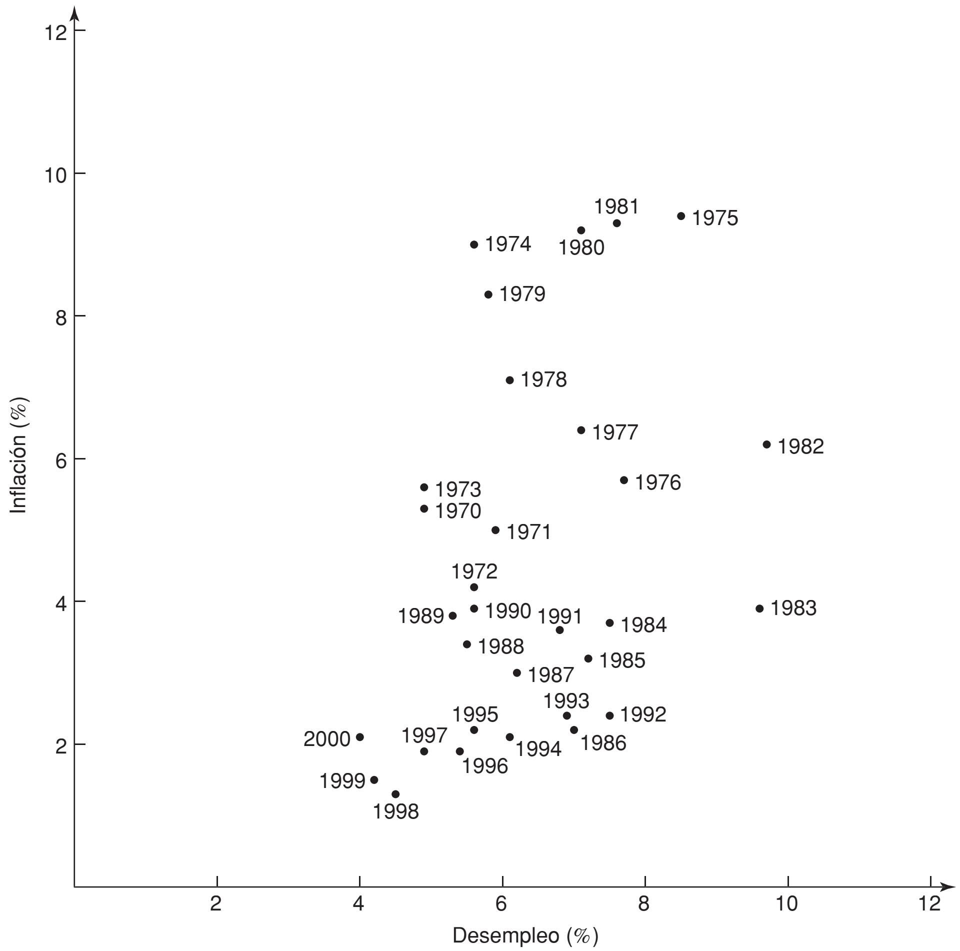


FIGURA 12.65 Los años 1970-2000.

CAPÍTULO 13

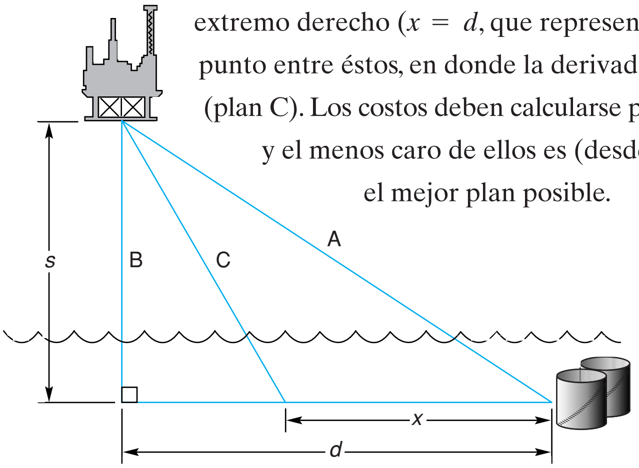
Aplicaciones de la diferenciación

Este capítulo describe algunas aplicaciones de la diferenciación. A continuación está un ejemplo de la clase de problemas que aprenderemos a resolver. Suponga que un cable de comunicaciones se tenderá desde una localidad en tierra a una estación petrolera mar adentro, como se muestra en la figura de abajo. ¿Cómo debe tenderse el cable?

Por supuesto, el enfoque más sencillo es una instalación en línea recta (trayectoria A). Pero, puesto que colocar cable bajo el mar es más caro que en tierra, podría ser más barato usar un plan que lo tienda en forma de L, en el que se llegue a la costa tan rápido como sea posible (trayectoria B). O quizá una combinación sea todavía mejor (trayectoria C).

El rango de posibilidades está determinado por la longitud x, la longitud del cable que va a la costa, que puede variar desde 0 hasta d. Si l es el costo por milla en tierra y w es el costo por milla bajo el mar, queremos minimizar la cantidad, $y = f(x) = lx + w\sqrt{s^2 + (d - x)^2}$, que representa el costo total.

La idea de un mínimo absoluto, que se introdujo en el capítulo anterior en conexión con el trazado de curvas, ahora toma un significado práctico. La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, d]$. Así, el costo es mínimo en el extremo izquierdo del intervalo ($x = 0$, que representa el plan A) o en el extremo derecho ($x = d$, que representa el plan B), o en algún punto entre éstos, en donde la derivada $f'(x)$ sea igual a cero (plan C). Los costos deben calcularse para estos planes diferentes y el menos caro de ellos es (desde la perspectiva de costos) el mejor plan posible.



OBJETIVO Modelar situaciones que incluyan maximizar o minimizar cantidades.

13.1 Aplicación de máximos y mínimos

Por medio de los procedimientos vistos en el capítulo anterior, podemos resolver problemas que impliquen maximizar o minimizar una cantidad. Por ejemplo, podríamos tener que maximizar una ganancia o minimizar un costo. La parte crucial consiste en expresar la cantidad que se debe maximizar o minimizar como función de alguna variable contenida en el problema. Luego diferenciamos y probamos los valores críticos resultantes. Para esto, pueden usarse las pruebas de la primera o de la segunda derivadas, aunque puede ser obvio por la naturaleza si un valor crítico representa o no una respuesta apropiada. Como nuestro interés estriba en los máximos y mínimos *absolutos*, a veces tendremos que examinar los puntos extremos del dominio de la función.

EJEMPLO 1 Minimizar el costo de una cerca

El objetivo de este ejemplo es establecer una función de costo a partir de la cual el costo sea minimizado.

Con el propósito de tener mayor seguridad, un fabricante planea cercar un área de almacenamiento rectangular de 10,800 *pies*^{2}, *que es adyacente a un edificio, el cual se utilizará como uno de los lados del área cercada. La cerca paralela al edificio da a una carretera y costará* \$3 *por pie instalado, mientras que la cerca de los otros dos lados costará* \$2 *por pie instalado. Encontrar la cantidad de cada tipo de cerca, de manera que el costo total sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo?*

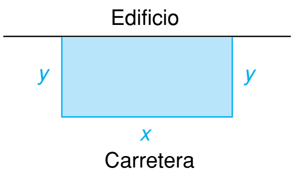


FIGURA 13.1 El problema de la cerca del ejemplo 1.

Solución: como primer paso en un problema como éste, es una buena idea dibujar un diagrama que refleje la situación. En la figura 13.1 llamamos x a la longitud del lado paralelo al edificio y y a las longitudes de los otros dos lados, en donde x y y están en pies.

Como queremos minimizar el costo, nuestro siguiente paso es determinar una función que nos dé el costo. Éste depende claramente de cuánta cerca se ponga a lo largo de la carretera y cuánta a lo largo de los otros dos lados. A lo largo de la carretera, el costo por pie es de \$3, por lo que el costo total de esa cerca es $3x$. De manera similar, a lo largo de *cada uno* de los otros lados, el costo es $2y$. Así, el costo total C de la cerca está dado por la función de costo

$$C = 3x + 2y + 2y,$$

o

$$C = 3x + 4y \tag{1}$$

Necesitamos encontrar el valor mínimo absoluto de C. Para hacer esto usamos las técnicas analizadas en el capítulo 12; esto es, examinamos a C en sus valores críticos (y cualquier punto extremo) en el dominio. Pero para diferenciar, necesitamos primero expresar C en función de sólo una variable [la ecuación (1) da a C como función de *dos* variables, x y y]. Podemos lograr esto encontrando primero una relación entre x y y. Del enunciado del problema vemos que el área de almacenamiento, que es xy, debe ser igual a 10,800:

$$xy = 10{,}800. \tag{2}$$

Con esta ecuación, podemos expresar una variable (digamos, y) en términos de la otra (x). Entonces, al sustituir en la ecuación (1) tendremos a C como función de sólo una variable. Despejando a y en la ecuación (2) resulta

$$y = \frac{10{,}800}{x}. \tag{3}$$

Al sustituir en la ecuación (1), obtenemos

$$C = 3x + 4\left(\frac{10{,}800}{x}\right),$$

$$C = 3x + \frac{43{,}200}{x}. \tag{4}$$

Dada la naturaleza física del problema, el dominio de C es $x > 0$.

Ahora encontramos dC/dx, la igualamos a 0 y despejamos x. Tenemos

$$\frac{dC}{dx} = 3 - \frac{43{,}200}{x^2} \qquad \left[\frac{d}{dx}(43{,}200x^{-1}) = -43{,}200x^{-2}\right],$$

$$3 - \frac{43{,}200}{x^2} = 0,$$

$$3 = \frac{43{,}200}{x^2},$$

de lo cual se sigue que

$$x^2 = \frac{43{,}200}{3} = 14{,}400,$$

$$x = 120 \qquad \text{(ya que } x > 0\text{).}$$

Así, 120 es el *único* valor crítico y no hay puntos extremos que considerar. Para probar este valor, usaremos la prueba de la segunda derivada.

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{86{,}400}{x^3}.$$

Cuando $x = 120$, $d^2C/dx^2 > 0$, entonces se puede concluir que $x = 120$ da un mínimo relativo. Sin embargo, como 120 es el único valor crítico en el intervalo abierto $(0, \infty)$ y C es continua en ese intervalo, dicho mínimo relativo debe también ser un mínimo absoluto.

¡Pero no hemos terminado aún! Todas las preguntas del problema deben contestarse. Para tener un costo mínimo el número de pies de cerca de lo largo de la carretera es de 120. Cuando $x = 120$, de la ecuación (3) tenemos $y = 10{,}800/120 = 90$. Por tanto, el número de pies de cerca para los otros dos lados es $2y = 180$. Entonces, se requieren 120 pies de cerca de \$3 y 180 pies de la cerca de \$2. El costo mínimo puede obtenerse a partir de la función de costo dada por la ecuación (4), el cual es

$$C = 3x + \frac{43{,}200}{x} = 3(120) + \frac{43{,}200}{120} = \$720.$$

Con base en el ejemplo 1, la siguiente guía puede ser útil en la resolución de problemas prácticos sobre máximos y mínimos:

Guía para la resolución de problemas de aplicación de máximos y mínimos

Paso 1. Cuando sea apropiado, dibuje un diagrama que muestre la información dada en el problema.

Paso 2. Formule una función para la cantidad que se quiera maximizar o minimizar.

Paso 3. Exprese la función del paso 2 como función de una sola variable y señale el dominio de esta función. El dominio puede determinarse por la naturaleza del problema.

Paso 4. Encuentre los valores críticos de la función. Después de probar cada valor crítico, determine cuál proporciona el valor extremo absoluto que se busca. Si el dominio de la función incluye puntos extremos, examine también los valores de la función en esos puntos.

Paso 5. Con base en los resultados del paso 4, responda las preguntas que se formularon en el enunciado del problema.

Este ejemplo incluye maximizar el ingreso cuando se conoce la ecuación de demanda.

EJEMPLO 2 Maximización del ingreso

La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{80 - q}{4}, \quad 0 \leq q \leq 80,$$

donde q es el número de unidades y p el precio por unidad. ¿Para qué valor de q se tendrá un ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

Solución: sea r el ingreso total, el cual es la cantidad por maximizar. Como

$$\text{ingreso} = (\text{precio})\,(\text{cantidad}),$$

tenemos

$$r = pq = \frac{80 - q}{4} \cdot q = \frac{80q - q^2}{4},$$

donde $0 \leq q \leq 80$. Haciendo $dr/dq = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dq} &= \frac{80 - 2q}{4} = 0, \\ 80 - 2q &= 0, \\ q &= 40. \end{aligned}$$

Así, 40 es el único valor crítico. Ahora veamos si este valor da un máximo. Examinando la primera derivada para $0 \leq q < 40$, tenemos $dr/dq > 0$, por lo que r es creciente. Si $q > 40$, entonces $dr/dq < 0$, por lo que r es decreciente. A consecuencia de que a la izquierda de 40 tenemos que r es creciente y a la derecha de r es decreciente, concluimos que $q = 40$ da el ingreso máximo *absoluto*, esto es, $[80(40) - (40)^2]/4 = 400$.

Este ejemplo implica la minimización del costo promedio cuando se conoce la función de costo.

EJEMPLO 3 Minimización del costo promedio

La función de costo total de un fabricante está dada por

$$c = \frac{q^2}{4} + 3q + 400,$$

donde c es el costo total de producir q unidades. ¿Para qué nivel de producción será el costo promedio por unidad un mínimo? ¿Cuál es este mínimo?

Solución: la cantidad por minimizar es el costo promedio $\bar{c}$. La función de costo promedio es

$$\bar{c} = \frac{c}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + 3q + 400}{q} = \frac{q}{4} + 3 + \frac{400}{q}. \qquad (5)$$

Aquí q debe ser positiva. Para minimizar $\bar{c}$, diferenciamos:

$$\frac{d\bar{c}}{dq} = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = \frac{q^2 - 1600}{4q^2}.$$

Para obtener los valores críticos, resolvemos $d\bar{c}/dq = 0$:

$$q^2 - 1600 = 0,$$

$$(q - 40)(q + 40) = 0,$$

$$q = 40 \qquad (\textit{ya que } q > 0).$$

Para determinar si este nivel de producción da un mínimo relativo, usaremos la prueba de la segunda derivada. Tenemos

$$\frac{d^2\bar{c}}{dq^2} = \frac{800}{q^3},$$

que es positiva para $q = 40$. Así, $\bar{c}$ tiene un mínimo relativo cuando $q = 40$. Notamos que $\bar{c}$ es continua para $q > 0$. Como $q = 40$ es el único extremo relativo, concluimos que este mínimo relativo es también un mínimo absoluto. Sustituyendo $q = 40$ en la ecuación (5) obtenemos el costo promedio mínimo $\bar{c} = 23$.

■

EJEMPLO 4 Maximización aplicada a enzimas

Este ejemplo es una aplicación biológica que implica la maximización de la velocidad a la cual se forma una enzima. La ecuación que se incluye aquí es una ecuación literal.

Una enzima es una proteína que actúa como catalizador para incrementar la velocidad de una reacción química que ocurre en las células. En cierta reacción, una enzima se convierte en otra enzima llamada el producto. Éste actúa como catalizador para su propia formación. La velocidad R a la que el producto se forma (con respecto al tiempo) está dada por

$$R = kp(l - p),$$

donde l es la cantidad inicial total de ambas enzimas, p la cantidad de la enzima producto y k una constante positiva. ¿Para qué valor de p será R un máximo?

Solución: podemos escribir $R = k(pl - p^2)$. Haciendo $dR/dp = 0$ y despejando p obtenemos

$$\frac{dR}{dp} = k(l - 2p) = 0,$$

$$p = \frac{l}{2}.$$

Ahora, $d^2R/dp^2 = -2k$. *Como* $k > 0$, la segunda derivada es siempre negativa. De aquí que $p = 1/2$ da un máximo relativo. Además, como R es una función continua de p, concluimos que tenemos un máximo absoluto cuando $p = 1/2$.

El cálculo puede aplicarse a decisiones relativas a inventarios, como se verá en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Tamaño de un lote económico

Este ejemplo implica la determinación del número de unidades en una corrida de producción, con la finalidad de minimizar ciertos costos.

Una empresa produce y vende anualmente 10,000 *unidades de un artículo. Las ventas están distribuidas uniformemente a lo largo del año. La empresa desea determinar el número de unidades que deben fabricarse en cada periodo de producción para minimizar los costos totales anuales de operación y los costos de inventario. Se producen el mismo número de unidades en cada periodo. Este número r se denomina* ***tamaño económico del lote o cantidad económica de pedido.*** *El costo de producir cada unidad es de* \$20 *y los costos de acarreo* (*seguro, interés, almacenamiento, etc.*) *se estiman iguales al* 10% *del valor promedio del inventario. Los costos de operación por periodo de producción son* \$40. *Encontrar el tamaño económico del lote.*

Solución: sea q el número de unidades en un periodo de producción. Como las ventas están distribuidas a razón uniforme, supondremos que el inventario varía uniformemente de q a 0 entre periodos de producción. Así, tomamos el inventario promedio igual a $q/2$ unidades. Los costos de producción son de \$20 por unidad, por lo que el valor promedio del inventario es de $20(q/2)$. Los costos del inventario son el 10% de este valor:

$$0.10(20)\left(\frac{q}{2}\right).$$

El número de periodos de producción por año es de $10{,}000/q$. Así, los costos totales de operación son

$$40\left(\frac{10{,}000}{q}\right).$$

Por tanto, el total C de los costos del inventario y operación está dado por

$$\begin{aligned} C &= 0.10(20)\left(\frac{q}{2}\right) + 40\left(\frac{10{,}000}{q}\right) \\ &= q + \frac{400{,}000}{q} \quad (q > 0); \\ \frac{dC}{dq} &= 1 - \frac{400{,}000}{q^2} = \frac{q^2 - 400{,}000}{q^2}. \end{aligned}$$

Haciendo $dC/dq = 0$, obtenemos

$$q^2 = 400{,}000.$$

Como $q > 0$, escogemos

$$q = \sqrt{400{,}000} = 200\sqrt{10} \approx 632.5.$$

Para determinar si este valor de q minimiza a C, examinaremos la primera derivada. Si $0 < q < \sqrt{400{,}000}$, entonces $dC/dq < 0$. Si $q > \sqrt{400{,}000}$, entonces $dC/dq > 0$. Concluimos que hay un mínimo *absoluto* en $q = 632.5$. El número de periodos de producción es de $10{,}000/632.5 \approx 15.8$. Para propósitos prácticos, serían 16 lotes, cada uno con tamaño económico de lote igual a 632 unidades.

El objetivo de este ejemplo es establecer una función de ingreso a partir de la cual se maximice el ingreso en un intervalo cerrado.

EJEMPLO 6 Maximización del ingreso de una empresa de televisión por cable

La empresa Vista TV Cable tiene actualmente 100,000 *suscriptores que pagan una cuota mensual de* \$40. *Una encuesta reveló que se tendrían* 1000 *suscriptores más por cada* \$0.25 *de disminución en la cuota. ¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían entonces?*

Solución: sea x el número de disminuciones de \$0.25. La cuota mensual es entonces de $40 - 0.25x$, donde $0 \leq x \leq 160$ (la cuota no puede ser negativa) y el número de suscriptores *nuevos* es $1000x$. Por lo tanto, el número total de suscriptores es $100{,}000 + 1000x$. Queremos maximizar el ingreso, que está dado por

$$\begin{aligned} r &= (\text{número de suscriptores})(\text{cuota por suscriptor}) \\ &= (100{,}000 + 1000x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(100 + x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(4000 + 15x - 0.25x^2). \end{aligned}$$

Haciendo $r' = 0$ y despejando x, tenemos

$$\begin{aligned} r' = 1000(15 - 0.5x) &= 0, \\ x &= 30. \end{aligned}$$

Puesto que el dominio de r es el intervalo cerrado $[0,160]$, el valor máximo absoluto de r debe ocurrir en $x = 30$ o en uno de los puntos extremos del intervalo. Ahora calculamos r en esos tres puntos:

$$\begin{aligned} &\text{Si } x = 0, && \text{entonces } r = 4{,}000{,}000; \\ &\text{si } x = 30, && \text{entonces } r = 4{,}225{,}000; \\ &\text{si } x = 160, && \text{entonces } r = 0. \end{aligned}$$

De acuerdo con esto, el ingreso máximo ocurre cuando $x = 30$. Esto corresponde a 30 disminuciones de \$0.25, para una disminución total de \$7.5; esto es, la cuota mensual es \$32.50. El número de suscriptores con esa cuota son $100{,}000 + 30(1000) = 130{,}000$.

Aquí, aumentamos al máximo una función en un intervalo cerrado.

EJEMPLO 7 Maximización del número de beneficiarios de los servicios de salud

Un artículo en una revista de sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios de salud, entonces al cabo de t años, n miles de personas adultas recibiría beneficios directos, donde

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t, \qquad 0 \leq t \leq 12.$$

¿Para qué valor de t es máximo el número de beneficiarios?

Solución: haciendo $dn/dt = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} = t^2 - 12t + 32 &= 0, \\ (t - 4)(t - 8) &= 0, \\ t = 4 \quad \text{o} \quad t &= 8. \end{aligned}$$

Como el dominio de n es el intervalo cerrado $[0, 12]$, el valor máximo absoluto de n debe ocurrir en $t = 0, 4, 8$ o 12:

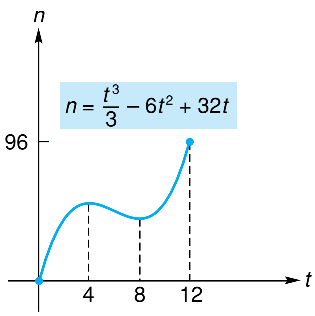


FIGURA 13.2 Gráfica de $n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t$ en $[0, 12]$.

$$\text{Si } t = 0, \text{ entonces } n = 0,$$
$$\text{si } t = 4, \text{ entonces } n = \frac{160}{3} = 53\frac{1}{3},$$
$$\text{si } t = 8, \text{ entonces } n = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3},$$
$$\text{si } t = 12, \text{ entonces } n = 96.$$

Así, se tiene un máximo absoluto en $t = 12$. Una gráfica de la función se da en la figura 13.2.

Advertencia El ejemplo anterior ilustra que no debe ignorar los extremos cuando se determinan extremos absolutos en un intervalo cerrado.

En el ejemplo siguiente usamos la palabra *monopolista*. En una situación de monopolio, sólo hay un vendedor de un producto para el cual no existen sustitutos similares, y el vendedor, o sea, el monopolista, controla el mercado. Considerando la ecuación de demanda para el producto, el monopolista puede fijar el precio (o volumen de producción) de manera que se obtenga una utilidad máxima.

Este ejemplo implica la maximización de la utilidad cuando se conocen las funciones de demanda y de costo promedio. En la parte (d), se impone un impuesto al monopolio, y se analiza una nueva función de utilidad.

EJEMPLO 8 Maximización de una utilidad

Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y que la función de costo promedio es $\bar{c} = 0.2q + 4 + (400/q)$, donde q es el número de unidades, y p y $\bar{c}$ se expresan en dólares por unidad.

a. *Determinar el nivel de producción en el que se maximiza la utilidad.*

b. *Determinar el precio en que ocurre la utilidad máxima.*

c. *Determinar la utilidad máxima.*

d. *Si como medida reguladora, el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?*

Solución: sabemos que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

Como el ingreso total r y el costo total c están dados por

$$r = pq = 400q - 2q^2$$

y

$$c = q\bar{c} = 0.2q^2 + 4q + 400,$$

la utilidad es

$$P = r - c = 400q - 2q^2 - (0.2q^2 + 4q + 400),$$

o

$$P = 396q - 2.2q^2 - 400, \tag{6}$$

donde $q > 0$.

a. Para maximizar la utilidad, hacemos $dP/dq = 0$:

$$\frac{dp}{dq} = 396 - 4.4q = 0,$$
$$q = 90.$$

Ahora, $d^2P/dq^2 = -4.4$ siempre es negativa, por lo que es negativa en el valor crítico $q = 90$. De acuerdo con la prueba de la segunda derivada, se tiene ahí un máximo relativo. Como $q = 90$ es el único valor crítico en $(0, \infty)$, debemos tener ahí un máximo absoluto.

b. El precio en que ocurre la utilidad máxima se obtiene haciendo $q = 90$ en la ecuación de demanda:

$$p = 400 - 2(90) = \$220.$$

c. La utilidad máxima se obtiene reemplazando q por 90 en la ecuación (6), lo que da

$$P = \$17,420.$$

d. El impuesto de \$22 por unidad implica que para q unidades el costo total crece en $22q$. La nueva función de costo es $c_1 = 0.2q^2 + 4q + 400 + 22q$ y la nueva utilidad está dada por

$$\begin{aligned} P_1 &= 400q - 2q^2 - (0.2q^2 + 4q + 400 + 22q) \\ &= 374q - 2.2q^2 - 400. \end{aligned}$$

Haciendo $dP_1/dq = 0$, resulta

$$\frac{dP_1}{dq} = 374 - 4.4q = 0,$$

$$q = 85.$$

Como $d^2P1/dq^2 = -4.4 < 0$, concluimos que para maximizar la utilidad, el monopolista debe restringir la producción a 85 unidades a un precio mayor de $p_1 = 400 - 2(85) = \$230$. Como este precio es sólo \$10 mayor que antes, parte del impuesto se ha cargado al consumidor y el monopolista debe pagar la diferencia. La utilidad es ahora de \$15,495, la cual es menor que la ganancia anterior.

El estudio conduce al principio económico de que cuando la utilidad es máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

Concluimos esta sección usando el cálculo para desarrollar un principio muy importante en economía. Supongamos que $p = f(q)$ es la función de demanda para el producto de una empresa, donde p es el precio por unidad y q el número de unidades producidas y vendidas. Entonces, el ingreso total está dado por $r = qp = qf(q)$, que es una función de q. Sea $c = g(q)$ la función de costo total para producir q unidades. Así, la utilidad total, que es igual a ingreso total $-$ costo total, es también una función de q, a saber,

$$P = r - c = qf(q) - g(q).$$

Consideremos la producción más favorable para la empresa. Ignorando casos especiales, sabemos que la utilidad es máxima cuando $dP/dq = 0$ y $d^2P/dq^2 < 0$. Tenemos,

$$\frac{dP}{dq} = \frac{d}{dq}(r - c) = \frac{dr}{dq} - \frac{dc}{dq}.$$

Entonces, $dP/dq = 0$ cuando

$$\frac{dr}{dq} = \frac{dc}{dq}.$$

Esto es, al nivel de la utilidad máxima, la pendiente de la tangente a la curva de ingreso total debe ser igual a la pendiente de la tangente a la curva de costo to-

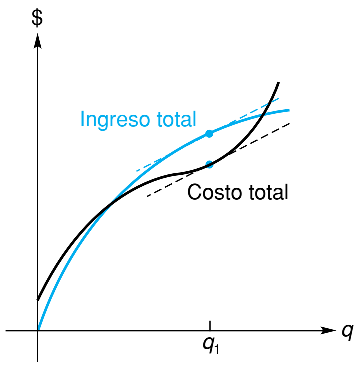


FIGURA 13.3 En la utilidad máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

tal (véase la fig. 13.3). Pero dr/dq es el ingreso marginal IM y dc/dq es el costo marginal CM. Así, bajo condiciones comunes,

> para maximizar la utilidad es necesario que
>
> IM = CM.

Para que esto corresponda a un máximo, es necesario que $d^2P/dq^2 < 0$.

$$\frac{d^2P}{dq^2} = \frac{d^2}{dq^2}(r - c) = \frac{d^2r}{dq^2} - \frac{d^2c}{dq^2} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2r}{dq^2} < \frac{d^2c}{dq^2}.$$

Esto es, cuando IM = CM, para tener una utilidad máxima, la pendiente de la curva del ingreso marginal deber ser menor que la pendiente de la curva del costo marginal.

La condición de que $d^2P/dq^2 < 0$ cuando $dP/dq = 0$ puede verse de otra manera. En forma equivalente, para que IM = CM corresponda a un máximo, dP/dq debe pasar de + a −; esto es, debe ir de $dr/dq - dc/dq > 0$ a $dr/dq - dc/dq < 0$. Por tanto, cuando la producción crece, debemos tener IM > CM y luego IM < CM. Esto significa que en el punto q_1 de utilidad máxima, *la curva de costo marginal debe cortar a la curva de ingreso marginal por debajo* (véase la fig. 13.4). Para una producción hasta q_1, el ingreso de una producción sería mayor que el costo de tal producción, y la utilidad total aumentaría. Para una producción mayor a q_1, CM > IM y cada unidad de producción agregaría más a los costos totales que al ingreso total. Por tanto, las utilidades se reducirán.

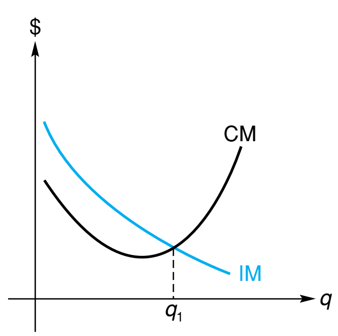


FIGURA 13.4 En la utilidad máxima, la curva de costo marginal corta a la curva de ingreso marginal desde abajo.

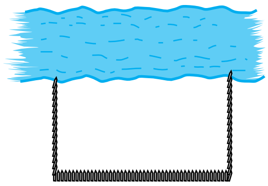
Ejercicio 13.1

En este conjunto de problemas, a menos que se especifique otra cosa, p es el precio por unidad y q la producción por unidad de tiempo. Los costos fijos se refieren a costos que permanecen constantes bajo todo nivel de producción en un periodo dado (un ejemplo es la renta).

1. Encuentre dos números cuya suma sea 26 y cuyo producto sea máximo.

2. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 20 y tales que el producto de 2 veces uno de los números por el cuadrado del otro sea un máximo.

3. **Cercado** Una empresa dispone de $9000 para cercar una porción rectangular del terreno adyacente a un río, y a éste lo usa como un lado del área cercada. El costo de la cerca paralela al río es de $15 por pie instalado y el de la cerca para los dos lados restantes es de $9 por pie instalado. Encuentre las dimensiones del área máxima cercada.



4. Cercado El propietario del Vivero Laurel quiere cercar un terreno de forma rectangular de 1000 pies cuadrados de área, para usarlo para diferentes tipos de arbustos. El terreno será dividido en cuatro lotes iguales, con tres cercas paralelas a uno de los lados, como se muestra en la figura 13.5. ¿Cuál es el número mínimo de pies de cerca necesarios?

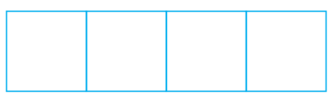


FIGURA 13.5 Diagrama para el problema 4.

5. Costo promedio Un fabricante determina que el costo total, c, de producir un producto está dado por la función de costo

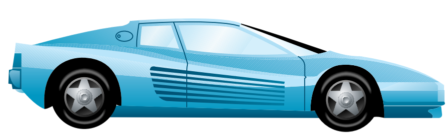
$$c = 0.05q^2 + 5q + 500.$$

¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad?

6. Gastos de un automóvil El costo por hora (en dólares) de operar un automóvil está dado por

$$C = 0.12s - 0.0012s^2 + 0.08, \quad 0 \leq s \leq 60,$$

donde s es la velocidad en millas por hora. ¿A qué velocidad es el costo por hora mínimo?



7. Ingreso La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = -5q + 30.$$

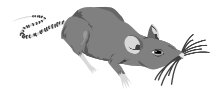
¿A qué precio se maximizará el ingreso?

8. Ingreso Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$q = 10{,}000e^{-0.02p}.$$

Encuentre el valor de p para el cual se obtiene el ingreso máximo.

9. Ganancia de peso Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas a las que se les administró una dieta que contenía un 10% de proteína.[1] La proteína consistió en levadura y harina de semilla de algodón. Al variar el porcentaje p de levadura en la mezcla con proteína, el grupo encontró que el aumento de peso



(promedio en gramos) de una rata en un periodo fue de

$$f(p) = 160 - p - \frac{900}{p + 10}, \quad 0 \leq p \leq 100.$$

Encuentre (a) el aumento de peso máximo y (b) el aumento de peso mínimo.

10. Dosis de un medicamento La severidad R de la reacción del cuerpo humano a una dosis inicial D de un medicamento está dada por[2]

$$R = f(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right),$$

donde la constante C denota la cantidad máxima de medicamento que puede administrarse. Demuestre que R tiene una *razón de cambio* máxima cuando $D = C/2$.

11. Utilidad Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$p = 72 - 0.04q$$

y la función de costo es

$$c = 500 + 30q.$$

¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad? ¿A qué precio ocurre esto y cuál es la utilidad?

12. Utilidad Para un monopolista, el costo por unidad de producir un artículo es de $3 y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{10}{\sqrt{q}}.$$

¿Cuál precio dará la utilidad máxima?

13. Utilidad Para el producto de un monopolista la ecuación de demanda es

$$p = 42 - 4q,$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 2 + \frac{80}{q}.$$

Encuentre el precio que maximiza la utilidad.

---

[1] Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods," en *Single–Cell Protein*, ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

[2] R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman y R.F. Baum, editores, *Some Mathematical Models in Biology*, edición revisada, reporte núm. 40241-R-7, preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

14. Utilidad Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$p = \frac{50}{\sqrt{q}},$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 0.50 + \frac{1000}{q}.$$

Encuentre el precio y la producción que aumentan al máximo la utilidad. A este nivel, demuestre que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

15. Utilidad Un fabricante puede producir cuando mucho 120 unidades de cierto artículo cada año. La ecuación de demanda para ese producto es

$$p = q^2 - 100q + 3200,$$

y la función de costo promedio del fabricante es

$$\bar{c} = \frac{2}{3}q^2 - 40q + \frac{10{,}000}{q}.$$

Determine la producción q que maximiza la utilidad y la correspondiente utilidad máxima.

16. Costo Un fabricante ha determinado que para cierto producto, el costo promedio (en dólares por unidad) está dado por

$$\bar{c} = 2q^2 - 36q + 210 - \frac{200}{q},$$

donde $2 \leq q \leq 10$.

a. ¿A qué nivel dentro del intervalo [2, 10] debe fijarse la producción para minimizar el costo total? ¿Cuál es el costo total mínimo?

b. Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo [5, 10], ¿qué valor de q minimizaría el costo total?

17. Utilidad Los costos totales fijos de la empresa XYZ son de \$1200, los costos combinados de material y mano de obra son de \$2 por unidad y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{100}{\sqrt{q}}.$$

¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad? Demuestre que esto ocurrirá cuando el ingreso marginal sea igual al costo marginal. ¿Cuál es el precio cuando la utilidad es máxima?

18. Ingreso Una empresa de bienes raíces posee 100 departamentos tipo jardín. Cada departamento puede rentarse a \$400 por mes. Sin embargo, por cada \$10 mensuales de incremento, habrá dos departamentos vacíos, sin posibilidad de rentarlos. ¿Qué renta por departamento maximizará el ingreso mensual?

19. Ingreso Una empresa de televisión por cable tiene 4800 suscriptores que pagan cada uno \$18 mensuales, y puede conseguir 150 suscriptores más por cada reducción de \$0.50 en la renta mensual. ¿Cuál será la renta que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?

20. Utilidad Un fabricante de un producto encuentra que para las primeras 500 unidades que produce y vende, la utilidad es de \$50 por unidad. La utilidad por cada unidad producida más allá de 500 disminuye en \$0.10 por cada unidad adicional producida. Por ejemplo, la utilidad total cuando produce y vende 502 unidades es $500(50) + 2(49.80)$. ¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad?

21. Diseño de un recipiente Un fabricante de recipientes está diseñando una caja sin tapa y con base cuadrada, que debe tener un volumen de 32 pies^3. ¿Qué dimensiones debe tener la caja, si se requiere que se utilice la menor cantidad de material? (Véase la fig. 13.6.)

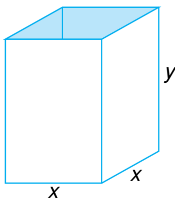


FIGURA 13.6 Caja sin tapa para los problemas 21 y 22.

22. Diseño de un recipiente Una caja sin tapa de base cuadrada va a construirse con 192 pies^2 de material. ¿Qué dimensiones debe tener para que su volumen sea máximo? ¿Cuál es el volumen máximo? (Véase la fig. 13.6.)

23. Diseño de un recipiente Una caja sin tapa va a fabricarse cortando cuadrados iguales de cada esquina de una lámina cuadrada de 12 pulgadas de lado, doblando luego hacia arriba los lados. Encuentre la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse para que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuál es el volumen máximo? (Véase la fig. 13.7.)

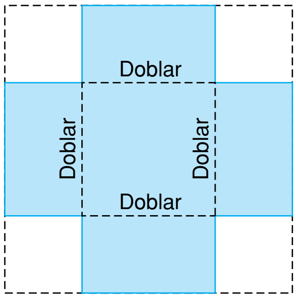


FIGURA 13.7 Caja para el problema 23.

24. Diseño de un cartel Un cartel rectangular de cartón debe tener 150 pulgadas^2 para material impreso, márgenes de 3 pulgadas arriba y abajo y de 2 pulgadas a cada lado. Encuentre las dimensiones del cartel de manera que la cantidad de cartón que se use sea mínima (véase la fig. 13.8). [*Sugerencia:* encuentre primero los valores de x y y en la figura 13.8 que minimizan la cantidad de cartón.]

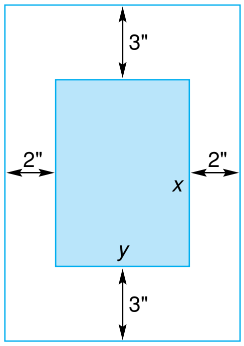


FIGURA 13.8 Cartel para el problema 24.

25. Diseño de un recipiente Una lata cilíndrica sin tapa debe tener un volumen K. Demuestre que si se usa la cantidad mínima de material, entonces el radio y la altura serán iguales a $\sqrt[3]{K/\pi}$. (Véase la fig. 13.9.)

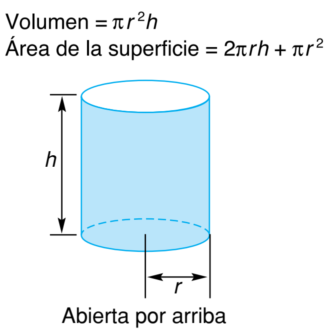


FIGURA 13.9 Lata para los problemas 25 y 26.

26. Diseño de un recipiente Una lata cilíndrica sin tapa va a fabricarse con una cantidad fija de material, K. Para que el volumen sea máximo, demuestre que el radio y la altura deben ser iguales a $\sqrt{K/(3\pi)}$ (Véase la fig. 13.9).

27. Utilidad La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = 600 - 2q,$$

y la función de costo total es

$$c = 0.2q^2 + 28q + 200.$$

Encuentre la producción y el precio que aumentarán al máximo la utilidad y determine la utilidad correspondiente. Si el gobierno impone un impuesto de $22 por unidad al fabricante, ¿cuáles serían entonces la producción y el precio que aumentarían al máximo la utilidad? Ahora, ¿cuál es la utilidad?

28. Utilidad Utilice los datos *originales* del problema 27 y suponga que el gobierno impone una cuota por licencia de $100 al fabricante. Ésta es una cantidad global independiente de la producción. Demuestre que el precio y la producción que aumentan al máximo la utilidad permanecen iguales. Sin embargo, demuestre que se tendrá una menor utilidad.

29. Tamaño económico del lote Un fabricante tiene que producir anualmente 1000 unidades de un producto que se vende a una razón uniforme durante el año. El costo de producción de cada unidad es de $10 y los costos de acarreo (seguro, interés, almacenamiento, etc.) se estiman iguales al 12.8% del valor promedio del inventario. Los gastos de operación por periodo de producción son de $40. Encuentre el tamaño económico del lote.

30. Utilidad Para el producto de un monopolista, la función de costo es

$$c = 0.004q^3 + 20q + 5000,$$

y la función de demanda es

$$p = 450 - 4q.$$

Encuentre la producción que maximiza la utilidad.

31. Asistencia a un seminario La empresa Investigación y Estudios Superiores (IES) está considerando ofrecer un seminario sobre asignación de recursos a directivos de la Compañía Acme. Para hacer el ofrecimiento económicamente factible, IES considera que por lo menos 30 personas deben inscribirse y cubrir un costo de $50 cada una. Además IES acepta reducir la cuota en $1.25 por cada *persona* adicional de las primeras 30. ¿Cuánta gente debe inscribirse para que el ingreso de IES sea máximo? Suponga que el número máximo de asistentes se limita a 40 personas.

32. Costo de alquilar un motor La empresa Juguetes Infantiles planea alquilar un motor eléctrico para utilizarlo 90,000 caballos-hora por año, en su proceso de manufactura. Un caballo-hora es el trabajo hecho en 1 hora por un motor de un caballo de potencia. El costo anual de alquilar el motor es de $150 más $0.60 por caballo de fuerza. El costo por caballo-hora de operar el motor es de $0.006/N$, donde N es el número de caballos de fuerza. ¿Qué tamaño de motor, en caballos de fuerza, debe alquilarse para minimizar el costo?

33. Costo de transporte EL costo de operar un camión sobre una autopista (excluyendo el salario del chofer) es

$$0.165 + \frac{s}{200}$$

dólares por milla, donde s es la velocidad (uniforme) del camión en millas por hora. El salario del chofer es de $18 por hora. ¿A qué velocidad debe manejar el chofer para que un viaje de 700 millas resulte lo más económico posible?

34. Costo Para un productor, el costo de fabricar un artículo es de $30 por mano de obra y de $10 por material; los gastos indirectos son de $20,000 por semana. Si se fabrican más de 5000 artículos por semana, la mano de obra se eleva a $45 por artículo, para aquellas unidades que excedan de 5000. ¿Para qué nivel de producción el costo promedio por artículo será mínimo?

35. Utilidad La señora Jones tiene una agencia de seguros pequeña que vende pólizas para una gran compañía de seguros. Por cada póliza vendida, la señora Jones, que no vende por si misma las pólizas, recibe una comisión de $50 de la compañía de seguros. De experiencias pasadas, la señora Jones ha determinado que cuando emplea m vendedores se venden,

$$q = m^3 - 12m^2 + 60m$$

pólizas por semana. Ella paga a cada uno de los vendedores $750 por semana y sus gastos fijos semanales son de $2500. Su oficina actual sólo puede tener cabida para siete vendedores. Determine el número de vendedores que la señora Jones debe contratar para maximizar su utilidad semanal. ¿Cuál es la utilidad máxima correspondiente?

36. Utilidad Un fabricante vende sacos de alta calidad a una cadena de tiendas. La ecuación de la demanda para esos sacos es

$$p = 400 - 50q.$$

donde p es el precio de venta (en dólares por saco) y q la demanda (en miles de sacos). Si la función de costo marginal del fabricante está dada por

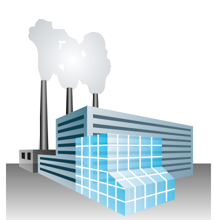
$$\frac{dc}{dq} = \frac{800}{q + 5}$$

demuestre que existe una utilidad máxima y determine el número de sacos que deben venderse para obtener esta utilidad máxima.

37. Producción química Una empresa fabrica diariamente x toneladas del producto químico A ($x \geq 4$) y

$$y = \frac{24 - 6x}{5 - x}$$

toneladas del producto químico B. La utilidad con A es de $2000 por tonelada y con B es de $1000 por tonelada. ¿Cuántas toneladas de A deben producirse por día para maximizar la utilidad? Responda la misma pregunta si la utilidad con A es de P por tonelada y con B es de $P/2$ por tonelada.



38. Tasa de rendimiento Para construir un edificio de oficinas, los costos fijos son de $2.5 millones e incluyen el precio del terreno, los honorarios del arquitecto, la cimentación, la estructura, etc. Si se construyen x pisos, el costo (excluyendo los costos fijos) es

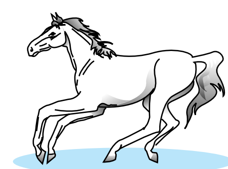
$$c = 5x[100{,}000 + 5000(x - 1)].$$

El ingreso por mes es de $50,000 por piso. ¿Cuántos pisos darán una tasa máxima de rendimiento sobre la inversión? (Tasa de rendimiento = ingreso total/costo total.)

39. Marcha y potencia desarrollada por un animal En un modelo planteado por Smith,[3] la potencia P desarrollada por un animal a una velocidad dada en función de su movimiento o *marcha* j, se obtiene de la siguiente relación:

$$P(j) = Aj\frac{L^4}{V} + B\frac{V^3L^2}{1 + j},$$

donde A y B son constantes, j es una medida de "inconstancia" de la marcha, L es una constante que representa una dimensión lineal y V una velocidad constante hacia delante.



Suponga que P es mínima cuando $dP/dj = 0$. Demuestre que cuando esto ocurre,

$$(1 + j)^2 = \frac{BV^4}{AL^2}.$$

Como comentario al margen, Smith señala que "a velocidad máxima, j es cero para un elefante, 0.3 para un caballo y 1 para un galgo de carreras, aproximadamente".

40. Flujo de vehículos En un modelo de flujo de vehículos sobre un carril de una autopista, el número de automóviles que pueden circular por el carril por unidad de tiempo está dado por[4]

$$N = \frac{-2a}{-2at_r + v - \dfrac{2al}{v}},$$

donde a es la aceleración de un automóvil al detenerse ($a < 0$), t_r el tiempo de reacción para comenzar a frenar, v la velocidad promedio de los automóviles y l la longitud de un automóvil. Suponga que a, t y l son cons-

[3] J. M. Smith *Mathematical Ideas in Biology* (Londres: Cambridge University Press, 1968).

[4] J. I. Shonle, *Environmental Aplications of General Physics* (Reading, MA: Adison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

tantes. Para encontrar el mayor número de automóviles que pueden circular por el carril, necesitamos calcular la velocidad v que maximiza a N. Para maximizar N, es suficiente minimizar el denominador

$$-2at_r + v - \frac{2al}{v}.$$

a. Encuentre el valor de v que minimiza al denominador.
b. Evalúe su respuesta en (a) cuando $a = -19.6$ (pies/s^2), $l = 20$ (pies) y $t_r = 0.5$ (s). Dé su respuesta en pies/s.
c. Encuentre el valor correspondiente de N con un decimal. Su respuesta estará en automóviles por segundo. Conviértala a automóviles por hora.

41. Costo promedio Durante la temporada navideña, una empresa compra calcetines baratos de fieltro rojo, les pega imitación de piel blanca y lentejuelas, y los empaca para su distribución. El costo total de producir q cajas de estos calcetines está dado por

$$c = 3q^2 + 50q - 18q \ln q + 120.$$

Encuentre el número de cajas que deben prepararse para minimizar el costo promedio por caja. Determine (con dos decimales) este costo promedio mínimo.

42. Utilidad La ecuación de demanda de un monopolista es

$$p = q^2 - 21q + 164,$$

donde p es el precio de venta (en miles de dólares) por tonelada cuando se venden q toneladas del producto. Suponga que el costo fijo es de \$100 mil y que cada tonelada cuesta \$20 mil producirla. Si la maquinaria actual tiene una capacidad máxima para producir 10 toneladas, use la gráfica de la función de utilidad para determinar a qué nivel de producción se tiene la utilidad máxima. Encuentre la utilidad máxima correspondiente y el precio de venta por tonelada.

OBJETIVO Definir la diferencial, interpretarla de manera geométrica y usarla en aproximaciones. También es necesario establecer las relaciones de reciprocidad entre dx/dy y dy/dx.

13.2 Diferenciales

Pronto daremos una razón para usar el símbolo dy/dx para denotar la derivada de y con respecto a x. Para hacer esto, introduciremos la noción de la *diferencial* de una función.

Definición

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable de x y sea Δx un cambio en x, donde Δx puede ser cualquier número real. Entonces, la **diferencial** de y, denotada por dy o $d[f(x)]$, está dada por

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Note que dy es una función de dos variables, a saber, de x y de Δx.

EJEMPLO 1 Cálculo de una diferencial

Encontrar la diferencial de $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ *y evaluarla cuando* $x = 1$ *y* $\Delta x = 0.04$.

Solución: la diferencial es

$$\begin{aligned} dy &= \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)\Delta x \\ &= (3x^2 - 4x + 3)\Delta x. \end{aligned}$$

Cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.04$,

$$dy = [3(1)^2 - 4(1) + 3](0.04) = 0.08.$$

Si $y = x$, entonces $dy = d(x) = 1\Delta x = \Delta x$. Por tanto, la diferencial de x es Δx. Abreviamos $d(x)$ con dx. Así, $dx = \Delta x$. De ahora en adelante escribiremos siempre dx en vez de Δx cuando busquemos una diferencial. Por ejemplo,

$$d(x^2 + 5) = \frac{d}{dx}(x^2 + 5)dx = 2x\, dx.$$

En resumen, decimos que si $y = f(x)$ define una función diferenciable de x, entonces

$$dy = f'(x)\,dx,$$

donde dx es cualquier número real. Siempre que $dx \neq 0$, podemos dividir ambos miembros entre dx:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Esto es, dy/dx puede interpretarse como el cociente de dos diferenciales, o sea, dy dividido entre dx, o como un símbolo para la derivada de f en x. Es por esto que introdujimos el símbolo dy/dx para denotar la derivada.

EJEMPLO 2 Determinación de una diferencial en términos de *dx*

a. Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces

$$d(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

b. Si $u = (x^2 + 3)^5$, entonces $du = 5(x^2 + 3)^4(2x)\,dx = 10x(x^2 + 3)^4dx$.

La diferencia puede interpretarse de manera geométrica. En la figura 13.10, el punto $P(x, f(x))$ está sobre la curva $y = f(x)$. Supongamos que x cambia en dx, un número real, al nuevo valor $x + dx$. Entonces, el valor de la nueva función es $f(x + dx)$, y el punto correspondiente sobre la curva es

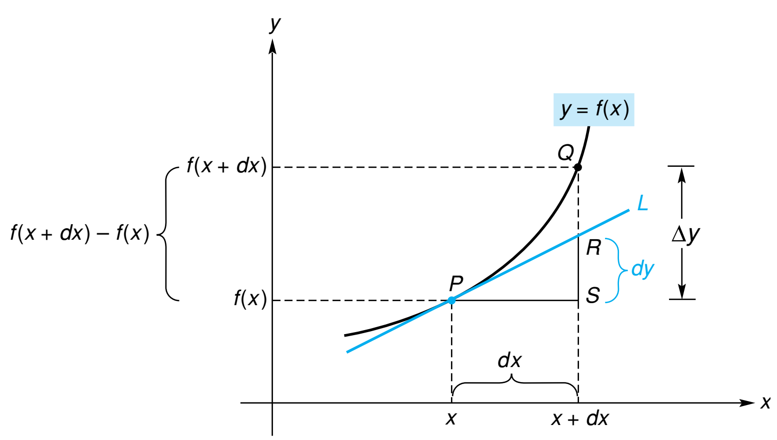


FIGURA 13.10 Interpretación geométrica de dy y Δx.

$Q(x + dx, f(x + dx))$. Por P y Q pasan líneas horizontales y verticales, respectivamente, que se intersecan en S. Una línea L tangente a la curva de P interseca el segmento QS en R, formando el triángulo rectángulo PRS. Observe que la gráfica de f cerca de P es aproximada por la línea tangente en P. La pendiente de L es $f'(x)$ o en forma equivalente, es $\overline{SR}/\overline{PS}$:

$$f'(x) = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}}.$$

Como $dy = f'(x)\,dx$ y $dx = \overline{PS}$,

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}} \cdot \overline{PS} = \overline{SR}.$$

Así, si dx es un cambio de x en P, entonces dy es el correspondiente cambio vertical a lo largo de la **línea tangente** en P. Observe que para la misma dx, el cambio vertical a lo largo de la **curva** es $\Delta y = \overline{SQ} = f(x + dx) - f(x)$. No confunda Δy con dy. Sin embargo, de la figura 13.10 es claro que:

Cuando dx es cercana a 0, dy es una aproximación a Δy. Por tanto,

$$\Delta y \approx dy.$$

Esta relación es útil al estimar Δy, un cambio en y, como se verá en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Uso de la diferencial para estimar un cambio en una cantidad

Un centro de salud del gobierno examinó las historias clínicas de un grupo de individuos que fueron hospitalizados por una enfermedad particular. Se encontró que la proporción total P que fue dada de alta al final de t días está dada por

$$P = P(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3.$$

Usar diferenciales para estimar el cambio en la proporción dada de alta si t cambia de 300 a 305.

Solución: el cambio en t de 300 a 305 es $\Delta t = dt = 305 - 300 = 5$. El cambio en P es $\Delta P = P(305) - P(300)$. Aproximamos ΔP con dP:

$$\Delta P \approx dP = P'dt = -3\left(\frac{300}{300 + t}\right)^2\left[-\frac{300}{(300 + t)^2}\right]dt.$$

Cuando $t = 300$ y $dt = 5$,

$$dP = -3\left(\frac{300}{600}\right)^2\left[-\frac{300}{(600)^2}\right]5$$

$$= -3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[-\frac{1}{2(600)}\right]5 = \frac{1}{320} \approx 0.0031.$$

Como comparación, el valor verdadero de ΔP es $P(305) - P(300) = 0.87807 - 0.87500 = 0.00307$ (con cinco decimales).

Dijimos que si $y = f(x)$, entonces $\Delta y \approx dy$ si dx es cercana a cero. Así

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \approx dy$$

o

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy. \quad \textbf{(1)}$$

La fórmula (1) se usa para aproximar un valor funcional, mientras que la fórmula $\Delta y \approx dy$ se usa para aproximar un cambio en los valores funcionales.

Esta fórmula nos da una manera de estimar el valor de una función, $f(x + dx)$. Por ejemplo, supongamos que queremos estimar $\ln(1.06)$. Haciendo $y = f(x) = \ln x$, necesitamos estimar $f(1.06)$. Como $d(\ln x) = (1/x)\,dx$, de la fórmula (1), tenemos,

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy,$$

$$\ln(x + dx) \approx \ln x + \frac{1}{x}dx.$$

Conocemos el valor exacto de ln 1, por lo que haremos $x = 1$ y $dx = 0.06$. Entonces, $x + dx = 1.06$ y dx es cercana a cero. Por tanto,

$$\ln(1 + 0.06) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(0.06),$$

$$\ln(1.06) \approx 0 + 0.06 = 0.06.$$

El valor verdadero de ln(1.06) con cinco decimales es 0.05827.

EJEMPLO 4 Uso de la diferencial para estimar el valor de una función

La función de demanda para un producto está determinada por

$$p = f(q) = 20 - \sqrt{q},$$

donde p es el precio por unidad en dólares para q unidades. Por medio de diferenciales, estimar el precio cuando se demandan 99 unidades.

Solución: queremos estimar $f(99)$. Por medio de la fórmula (1),

$$f(q + dq) \approx f(q) + dp,$$

donde

$$dp = -\frac{1}{2\sqrt{q}}\, dq \qquad \left(\frac{dp}{dq} = -\frac{1}{2}q^{-1/2}\right).$$

Escogemos $q = 100$ y $dq = -1$ porque $q + dq = 99$, dq es pequeña y es fácil de calcular $f(100) = 20 - \sqrt{100} = 10$. Así tenemos

$$f(99) = f[100 + (-1)] \approx f(100) - \frac{1}{2\sqrt{100}}(-1),$$

$$f(99) \approx 10 + 0.05 = 10.05.$$

De aquí que el precio por unidad cuando se demandan 99 unidades sea de aproximadamente \$10.05.

La ecuación $y = x^3 + 4x + 5$ define a y como una función de x. Sin embargo, también define a x implícitamente como una función de y. De acuerdo con esto, podemos examinar también la derivada de x con respecto a y, dx/dy. Como dx/dy puede considerarse un cociente de diferenciales, estamos justificados a escribir (y es cierto en realidad)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \qquad \text{siempre que } dy/dx \neq 0.$$

Pero dx/dy es la derivada de y con respecto a x e igual a $3x^2 + 4$. Así,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 4}.$$

Esto es el *recíproco* de dy/dx.

EJEMPLO 5 Determinación de dp/dq a partir de dq/dp

Encontrar $\dfrac{dp}{dq}$ *si* $q = \sqrt{2500 - p^2}$.

Solución:

Estrategia: hay varias maneras de encontrar dp/dq. Una es despejar p de la ecuación dada en términos de q y luego diferenciar en forma directa. Otra manera de encontrar dp/dq es usar la diferenciación implícita. Sin embargo, como q está dada explícitamente como función de p, podemos encontrar fácilmente dq/dp y luego usar la relación recíproca anterior para encontrar dp/dq. Usaremos este procedimiento.

Tenemos

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{2}(2500 - p^2)^{-1/2}(-2p) = -\frac{p}{\sqrt{2500 - p^2}}.$$

Por tanto,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dp}} = -\frac{\sqrt{2500 - p^2}}{p}.$$

Ejercicio 13.2

En los problemas del 1 al 10 encuentre la diferencial de la función en términos de x y dx.

1. $y = 3x - 4$.

2. $y = 2$.

3. $f(x) = \sqrt{x^4 + 6}$.

4. $f(x) = (4x^2 - 5x + 2)^3$.

5. $u = \frac{1}{x^2}$.

6. $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

7. $p = \ln(x^2 + 7)$.

8. $p = e^{x^3+5}$.

9. $y = (9x + 3)e^{2x^2+3}$.

10. $y = \ln\sqrt{x^4 + 1}$.

En los problemas del 11 al 16 encuentre Δy y dy para los valores dados de x y dx.

11. $y = 4 - 7x$; $x = 3, dx = 0.02$.

12. $y = 5x^2$; $x = -1, dx = -0.02$.

13. $y = 4x^2 - 3x + 10$; $x = -1, dx = 0.25$.

14. $y = (3x + 2)^2$; $x = -1, dx = -0.03$.

15. $y = \sqrt{25 - x^2}$; $x = 3, dx = -0.1$. Redondee su respuesta a tres decimales.

16. $y = \ln(-x)$; $x = -5, dx = 0.1$.

17. Sea $f(x) = \frac{x + 5}{x + 1}$.

a. Evalúe $f'(1)$.
b. Use diferenciales para estimar el valor de $f(1.1)$.

18. Sea $f(x) = x^{3x}$.

a. Evalúe $f'(1)$.
b. Use diferenciales para estimar el valor de f (0.98).

En los problemas del 19 al 26 aproxime cada expresión por medio de diferenciales.

19. $\sqrt{99}$.

20. $\sqrt{122}$.

21. $\sqrt[3]{65.5}$.

22. $\sqrt[4]{15.5}$.

23. ln 0.97.

24. ln 1.01.

25. $e^{0.01}$.

26. $e^{-0.01}$.

En los problemas del 27 al 32 encuentre dx/dy o dp/dq.

27. $y = 2x - 1$.

28. $y = 5x^2 + 3x + 2$.

29. $q = (p^2 + 5)^3$.

30. $q = \sqrt{p + 5}$.

31. $q = \dfrac{1}{p}$.

32. $q = e^{5-p}$.

33. Si $y = 5x^2 + 3x + 2$, encuentre el valor de dx/dy cuando $x = 3$.

34. Si $y = \ln x$, encuentre el valor de dx/dy cuando $x = 2$.

En los problemas del 35 y 36 encuentre la razón de cambio de q con respecto a p para el valor indicado de q.

35. $p = \dfrac{500}{q + 2}$; $q = 18$.

36. $p = 50 - \sqrt{q}$; $q = 100$.

37. Utilidad Suponga que la utilidad P al producir q unidades de un producto es

$$P = 396q - 2.2q^2 - 400.$$

Por medio de diferenciales, encuentre el cambio aproximado en la utilidad, si el nivel de producción cambia de $q = 80$ a $q = 81$. Encuentre el cambio verdadero.

38. Ingreso Dada la función de ingreso

$$r = 250q + 45q^2 - q^3,$$

use diferenciales para encontrar el cambio aproximado en el ingreso, si el número de unidades se incrementa de $q = 40$ a $q = 41$. Encuentre el cambio verdadero.

39. Demanda La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{10}{\sqrt{q}}.$$

Por medio de diferenciales estime el precio cuando se demandan 24 unidades.

40. Demanda Dada la función de demanda

$$p = \frac{100}{\sqrt{q + 4}},$$

use diferenciales para estimar el precio por unidad cuando se demandan 12.5 unidades.

41. Si $y = f(x)$, entonces el *cambio proporcional en y* se define como $\Delta y/y$, que puede aproximarse por medio de diferenciales por medio de dy/y. Use esta última forma para estimar el cambio proporcional en la función de costo

$$c = f(q) = \frac{q^4}{2} + 3q + 400$$

cuando $q = 10$ y $dq = 2$. Redondee su respuesta a un decimal.

42. Condición social/ingreso Suponga que S es un valor numérico de la condición social basado en el ingreso anual, I (en miles de dólares), de una persona. Para cierta población, suponga que $S = 20\sqrt{I}$. Use diferenciales para estimar el cambio en S, si el ingreso anual decrece de \$45,000 a \$44,500.

43. Biología El volumen V de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. Estime el cambio en el volumen cuando el radio cambia de 6.5×10^{-4} cm a 6.6×10^{-4} cm.

44. Contracción muscular La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular."[5] Aquí, P es la carga impuesta al músculo, v la velocidad de contracción de las fibras del músculo y a, b y k son constantes positivas. Encuentre v en términos de P y luego use diferenciales para estimar el cambio en v debido a un pequeño cambio en P.

45. Demanda La demanda, q, para el producto de un monopolista está relacionada con el precio por unidad, p, según la ecuación

$$2 + \frac{q^2}{200} = \frac{4000}{p^2}.$$

a. Verifique que se demandará por 40 unidades cuando el precio por unidad sea de \$20.

b. Demuestre que $\dfrac{dq}{dp} = -2.5$ cuando el precio por unidad es de \$20.

c. Use diferenciales y los resultados de las partes (a) y (b) para estimar el número de unidades que se demandarán si el precio por unidad se reduce a \$19.20.

46. Utilidad La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = \frac{1}{3}q^2 - 76q + 6000,$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 600 - q + \frac{100{,}000}{3q}.$$

a. Verifique que la utilidad es de \$90,000 cuando se demandan 100 unidades.

b. Use diferenciales y el resultado de la parte (a) para estimar la utilidad cuando se demandan 97 unidades.

[5] R. W. Stacy et. al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

OBJETIVO Proporcionar un análisis matemático del concepto económico de elasticidad.

13.3 Elasticidad de la demanda

La *elasticidad de la demanda* es un medio por el cual los economistas miden cómo un cambio en el precio de un producto afecta la cantidad demandada. Esto es, se refiere a la respuesta del consumidor frente al cambio de precio. En términos informales, la elasticidad de la demanda es la razón del cambio porcentual en la cantidad demandada que resulta en un cambio porcentual dado en el precio:

$$\frac{\text{cambio porcentual en la cantidad}}{\text{cambio porcentual en el precio}}.$$

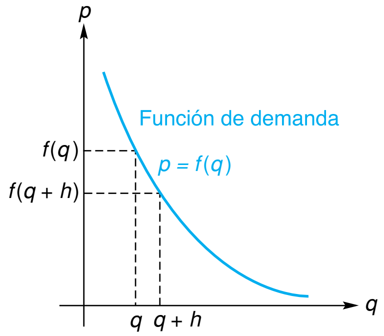


FIGURA 13.11 Cambio en la demanda.

Por ejemplo, si para un incremento de 5% en el precio, la cantidad demandada decrece en 2%, podríamos decir que la elasticidad de la demanda es $-2/5$.

Para ser más específicos, suponga que $p = f(q)$ es la función de demanda para un producto. Los consumidores demandarán q unidades a un precio de $f(q)$ por unidad y demandarán $q + h$ unidades a un precio de $f(q + h)$ unidades a un precio de $f(q + h)$ por unidad (véase la fig. 13.11). El cambio *porcentual* en la cantidad demandada de q a $q + h$ es

$$\frac{(q + h) - q}{q} \cdot 100 = \frac{h}{q} \cdot 100.$$

El cambio porcentual correspondiente en precio por unidad es

$$\frac{f(q + h) - f(q)}{f(q)} \cdot 100.$$

La razón de esos cambios porcentuales es

$$\begin{aligned}\frac{\frac{h}{q} \cdot 100}{\frac{f(q + h) - f(q)}{f(q)} \cdot 100} &= \frac{h}{q} \cdot \frac{f(q)}{f(q + h) - f(q)} \\ &= \frac{f(q)}{q} \cdot \frac{h}{f(q + h) - f(q)} \\ &= \frac{\frac{f(q)}{q}}{\frac{f(q + h) - f(q)}{h}} \qquad \textbf{(1)}\end{aligned}$$

Si f es diferenciable, entonces cuando $h \to 0$, el límite de $[f(q + h) - f(q)]/h$ es $f'(q) = dp/dq$. Así, el límite de (1) es

$$\frac{\frac{f(q)}{q}}{\frac{dp}{dq}} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}},$$

que se llama *elasticidad puntual de la demanda*.

Definición

Si $p = f(q)$ es una función de demanda diferenciable, la ***elasticidad puntual de la demanda,*** denotada por la letra griega η (eta), en (q, p) está dada por

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}}.$$

Para ilustrar, encontremos la elasticidad puntual de la demanda para la función de demanda $p = 1200 - q^2$. Tenemos

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{1200 - q^2}{q}}{-2q} = -\frac{1200 - q^2}{2q^2} = -\left[\frac{600}{q^2} - \frac{1}{2}\right]. \qquad \textbf{(2)}$$

Por ejemplo, si $q = 10$, entonces $\eta = -[(600/10^2) - \frac{1}{2}] = -5\frac{1}{2}$. Como

$$\eta \approx \frac{\text{cambio porcentual en la demanda}}{\text{cambio porcentual en el precio}},$$

tenemos

$$(\text{cambio porcentual en precio})(\eta) \approx \text{cambio porcentual en la demanda.}$$

Por tanto, si el precio se incrementa en 1% cuando $q = 10$, la cantidad demandada cambiaría aproximadamente en

$$(1\%)\left(-5\frac{1}{2}\right) = -5\frac{1}{2}\%.$$

Esto es, la demanda disminuiría en $5\frac{1}{2}$%. De manera análoga, una disminución en el precio de $\frac{1}{2}$% cuando $q = 10$, resulta en un cambio aproximado en la demanda de

$$\left(-\frac{1}{2}\%\right)\left(-5\frac{1}{2}\right) = 2\frac{3}{4}\%.$$

De aquí que la demanda se incremente en $2\frac{3}{4}$%.

Note que cuando se evalúa la elasticidad, no interviene unidad alguna, ya que tan sólo es un número real. Para un comportamiento normal de la demanda, un incremento (disminución) en el precio, corresponde a una disminución (incremento) en la cantidad. Así, dp/dq siempre será negativa o cero, y η (donde esté definida) siempre será negativa o cero. Algunos economistas ignoran el signo menos; en la situación anterior ellos considerarían la elasticidad igual a $5\frac{1}{2}$. Aquí no adoptaremos esta práctica.

Hay tres categorías de elasticidad:

1. Cuando $|\eta| > 1$, la demanda es *elástica*.
2. Cuando $|\eta| = 1$, la demanda tiene *elasticidad unitaria*.
3. Cuando $|\eta| < 1$, la demanda es *inélastica*.

Por ejemplo, en la ecuación (2) como $|\eta| = 5\frac{1}{2}$, cuando $q = 10$, la demanda es elástica. Si $q = 20$, entonces $|\eta| = |-[(600/20^2) - \frac{1}{2}]| = 1$, por lo que la demanda tiene elasticidad unitaria. Si $q = 25$, entonces $|\eta| = |-\frac{23}{50}|$ y la demanda es inélastica.

En términos informales, para un cambio porcentual dado en el precio, hay un cambio porcentual mayor en la cantidad demandada si la demanda es elástica, un cambio porcentual menor si la demanda es inélastica y un cambio porcentual igual si la demanda tiene elasticidad unitaria.

EJEMPLO 1 Determinación de la elasticidad puntual de la demanda

Determinar la elasticidad puntual de la ecuación de demanda

$$p = \frac{k}{q}, \qquad \textit{donde } k > 0 \text{ y } q > 0.$$

Solución: de la definición tenemos

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{k}{q^2}}{\frac{-k}{q^2}} = -1.$$

Así, la demanda tiene elasticidad unitaria para toda $q > 0$. La gráfica de $p = k/q$ se llama *hipérbola equilátera* y suele encontrarse en textos de economía en los análisis de elasticidad (véase la fig. 3.14 para la gráfica de tal curva).

EJEMPLO 2 Determinación de la elasticidad puntual de la demanda

Determinar la elasticidad puntual de la ecuación de demanda

$$q = p^2 - 40p + 400, \qquad \textit{donde } q > 0.$$

Solución: para calcular η necesitamos encontrar dp/dq. En la ecuación de demanda dada, p no es una función explícita de q, por lo que no podemos encontrar dp/dq de manera directa. Sin embargo, de la sección 13.2,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dp}}.$$

Por tanto,

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{\frac{dp}{dq}} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \qquad \text{(Definición de } \eta\text{).}$$

Como $dq/dp = 2p - 40$, tenemos

$$\eta = \frac{p}{q}(2p - 40).$$

Por ejemplo, si $p = 15$, $q = 25$; por tanto, $\eta = [15(-10)]/25 = -6$, por lo que la demanda es elástica.

Aquí, analizamos la elasticidad para una demanda lineal.

La elasticidad puntual para una ecuación de demanda *lineal* es muy interesante. Supongamos que la ecuación tiene la forma

$$p = mq + b, \quad \text{donde } m < 0 \text{ y } b > 0.$$

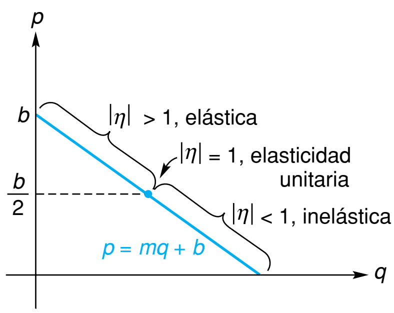


FIGURA 13.12 Elasticidad para demanda lineal.

(Véase la fig. 13.12.) Suponemos que $q > 0$; así, $p < b$. La elasticidad puntual de la demanda es

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{p}{q}}{m} = \frac{p}{mq} = \frac{p}{p-b}.$$

Considerando $d\eta/dp$, demostraremos que η es una función decreciente de p. Por la regla del cociente,

$$\frac{d\eta}{dp} = \frac{(p-b)-p}{(p-b)^2} = -\frac{b}{(p-b)^2}.$$

Como $b > 0$ y $(p-b)^2 > 0$, entonces $d\eta/dp < 0$, por lo que η es una función decreciente de p; cuando p crece, η debe disminuir. Sin embargo, p varía entre 0 y b y en el punto medio del intervalo, $b/2$:

$$\eta = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}-b} = \frac{\frac{b}{2}}{-\frac{b}{2}} = -1.$$

Por tanto, si $p < b/2$, entonces $\eta > -1$; si $p > b/2$, $\eta < -1$. Como debemos tener $\eta \leq 0$, podemos establecer esto de otra manera: cuando $p < b/2$, $|\eta| < 1$ y la demanda es inélastica; cuando $p = b/2$, $|\eta| = 1$ y la demanda tiene elasticidad unitaria; cuando $p > b/2$, $|\eta| > 1$ y la demanda es elástica. Esto muestra que la pendiente de una curva de demanda no es una medida de la elasticidad. La pendiente de la línea en la figura 13.12 es m en todas partes, pero la elasticidad varía con el punto de la recta.

Elasticidad e ingreso

Aquí, analizamos la relación entre la elasticidad y la tasa de cambio del ingreso.

Pasando a una situación diferente, podemos establecer cómo la elasticidad de la demanda afecta el cambio en el ingreso (ingreso marginal). Si $p = f(q)$ es una función de demanda de un fabricante, el ingreso total está dado por

$$r = pq.$$

Para encontrar el ingreso marginal, dr/dq, diferenciamos r usando la regla del producto:

$$\frac{dr}{dq} = p + q\frac{dp}{dq}. \tag{3}$$

Al factorizar el miembro derecho de la ecuación (3), tenemos

$$\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right).$$

Pero,

$$\frac{q}{p}\frac{dp}{dq} = \frac{\frac{dp}{dq}}{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\eta}.$$

Por lo que,

$$\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right). \tag{4}$$

Si la demanda es elástica, entonces $\eta < -1$, por lo que $1 + \frac{1}{\eta} > 0$. Si la demanda es inélastica, entonces $\eta > -1$, por lo que $1 + \frac{1}{\eta} < 0$. Supongamos que $p > 0$. De la ecuación (4) podemos concluir que $dr/dq > 0$ en los intervalos donde la demanda es elástica; por tanto, el ingreso total r es creciente ahí. Por otra parte, el ingreso marginal es negativo en el intervalo donde la demanda es inélastica; por tanto, el ingreso total es decreciente ahí.

Así, del análisis anterior concluimos que entre más unidades se vendan, el ingreso total de un fabricante crece si la demanda es elástica, pero disminuye si la demanda es inélastica. Esto es, si la demanda es elástica, un precio menor aumentará el ingreso, lo cual significa que un precio menor ocasionará un incremento suficientemente grande en la demanda como para hacer crecer el ingreso. Si la demanda es inélastica, un precio menor hará disminuir el ingreso. Para una elasticidad unitaria, un precio menor deja sin cambio al ingreso total.

Ejercicio 13.3

En los problemas del 1 al 14 encuentre la elasticidad puntual de las ecuaciones de demanda para los valores indicados de q o p y determine si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria.

1. $p = 40 - 2q; \quad q = 5.$

2. $p = 12 - 0.03q; \quad q = 200.$

3. $p = \frac{3500}{q}; \quad q = 288.$

4. $p = \frac{1000}{q^2}; \quad q = 156.$

5. $p = \frac{500}{q + 2}; \quad q = 104.$

6. $p = \frac{800}{2q + 1}; \quad q = 24.$

7. $p = 150 - e^{q/100}; \quad q = 100.$

8. $p = 100e^{-q/200}; \quad q = 200.$

9. $q = 600 - 100p; \quad p = 3.$

10. $q = 100 - p; \quad p = 50.$

11. $q = \sqrt{2500 - p}; \quad p = 900.$

12. $q = \sqrt{2500 - p^2}; \quad p = 20.$

13. $q = \frac{(p - 100)^2}{2}; \quad p = 20.$

14. $q = p^2 - 60p + 898; \quad p = 10.$

15. Para la ecuación de demanda lineal $p = 13 - 0.05q$, verifique que la demanda es elástica cuando $p = 10$, inelástica cuando $p = 3$ y que tiene elasticidad unitaria cuando $p = 6.50$.

16. ¿Para qué valor (o valores) de q las siguientes ecuaciones de demanda tienen elasticidad unitaria?

a. $p = 26 - 0.10q$.
b. $p = 1200 - q^2$.

17. La ecuación de demanda para un producto es

$$q = 500 - 40p + p^2,$$

donde p es el precio por unidad (en dólares) y q la cantidad de unidades demandadas (en miles). Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 15$. Si este precio de 15 se incrementa en $\frac{1}{2}\%$, ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

18. La ecuación de la demanda para un cierto producto es

$$q = \sqrt{2500 - p^2},$$

donde p está en dólares. Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 30$ y use este valor para calcular el cambio porcentual aproximado de la demanda, si el precio de \$30 se baja a \$28.50.

19. Para la ecuación de demanda $p = 500 - 2q$, verifique que la demanda es elástica y el ingreso total es creciente para $0 < q < 125$. Verifique que la demanda sea inelástica y el ingreso total sea decreciente para $125 < q < 250$.

20. Verifique que $\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)$ si $p = 40 - 2q$.

21. Repita el problema 20 para $p = \frac{1000}{q^2}$.

22. Suponga que $p = mq + b$ es una ecuación de demanda lineal donde $m \neq 0$ y $b > 0$.
   a. Demuestre que $\lim\limits_{p \to b^-} \eta = -\infty$.
   b. Demuestre que $\eta = 0$ cuando $q = 0$.

23. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{200}{\sqrt{6000 + 10q^2}}.$$

   a. Verifique que $q = 20$ cuando $p = 2$.
   b. Determine la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 2$. ¿Es la demanda elástica, inelástica o tiene elasticidad unitaria en este punto?
   c. Si el precio cuando $p = 2$ está disminuyendo en 2%, ¿cuál es el número aproximado de unidades en las que la demanda cambia?
   d. Si el precio cuando $p = 2$ está disminuyendo en 2%, ¿el ingreso total crecerá, disminuirá o permanecerá constante? Justifique su respuesta.

24. Dada la ecuación de demanda $q^2(1 + p)^2 = p$, determine la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 9$.

25. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = \frac{60}{p} + \ln(65 - p^3).$$

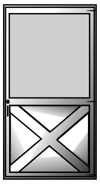
   a. Determine la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 4$, y clasifique la demanda como elástica, inelástica o de elasticidad unitaria a este nivel de precio.
   b. Si el precio disminuye el 2% (de \$4.00 a \$3.92), use la respuesta a la parte (a) para estimar el cambio porcentual correspondiente en la cantidad vendida.
   c. ¿Resultarán los cambios de la parte (b) en un incremento o en una disminución en el ingreso? Explique su respuesta.

26. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = 50(201 - q)^{0.001\sqrt{q+25}}.$$

   a. Demuestre que $dp/dq = -0.75$ cuando se demandan 200 unidades. Use diferenciación logarítmica.
   b. Con el resultado de la parte (a), determine la elasticidad puntual de la demanda cuando se demandan 200 unidades. A este nivel, ¿es la demanda elástica, inelástica o de elasticidad unitaria?
   c. Use el resultado de la (b) para estimar el precio por unidad si la demanda disminuye de 200 a 188 unidades.
   d. Si la demanda actual es de 200 unidades, ¿debe el fabricante aumentar o disminuir el precio para incrementar su ingreso? (Justifique su respuesta.)

27. Un fabricante de puertas de aluminio puede vender actualmente 500 puertas por semana a un precio de \$80 cada una. Si el precio se baja a \$75 cada una, podrían venderse 50 puertas adicionales por semana. Estime la elasticidad actual de la demanda para las puertas y también el valor actual de la función de ingreso marginal del fabricante.



28. Dada la ecuación de demanda

$$p = 1000 - q^2,$$

donde $5 \leq q \leq 30$, ¿para qué valor de q es $|\eta|$ un máximo? ¿Para qué valor es un mínimo?

29. Repita el problema 28 para

$$p = \frac{200}{q + 5}$$

tal que $5 \leq q \leq 95$,

OBJETIVO Aproximar las raíces reales de una ecuación por medio del uso del cálculo. El método mostrado es adecuado para calculadoras.

13.4 Método de Newton

Es muy fácil resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, cuando f es una función lineal o cuadrática. Por ejemplo, podemos resolver $x^2 + 3x - 2 = 0$, por medio de la fórmula cuadrática. Sin embargo, si $f(x)$ tiene un grado mayor que 2 (o si no es un polinomio), puede resultar difícil o incluso imposible encontrar soluciones (o raíces) de $f(x) = 0$, por los métodos usuales. Es por ello que recurrimos a soluciones aproximadas que pueden obtenerse de varias maneras en forma eficiente. Por ejemplo, puede utilizarse una calculadora gráfica para estimar las raíces reales de $f(x) = 0$. En esta sección aprenderemos cómo usar con tal fin la derivada (siempre que f sea diferenciable). El procedimiento que desarrollaremos, llamado *método de Newton*, es muy apropiado para usarse con una calculadora o computadora.

El método de Newton requiere que se haga una estimación inicial para una raíz de $f(x) = 0$. Una manera de obtener este valor inicial aproximado es haciendo un bosquejo de la gráfica de $y = f(x)$ y estimando la raíz en la gráfica. Un punto en la gráfica donde $y = 0$, es una intersección x y el valor x de este punto es una raíz de $f(x) = 0$. Otra manera de localizar una raíz se basa en el hecho siguiente:

> Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz entre a y b.

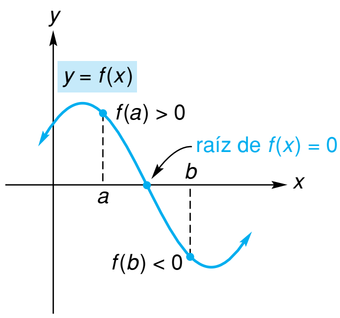


FIGURA 13.13 Raíz de $f(x) = 0$ entre a y b, en donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos.

La figura 13.13 muestra esta situación. La intersección x entre a y b corresponde a una raíz de $f(x) = 0$, y podemos usar a a o a b para aproximar esta raíz.

Supongamos que tenemos un valor estimado (pero incorrecto) para una raíz, veremos cómo obtener una mejor aproximación de este valor. En la figura 13.14 vemos que $f(r) = 0$, por lo que r es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos que x_1 es una aproximación inicial a r (una que sea cercana a r). Observe que la recta tangente a la curva en $(x_1, f(x_1))$ interseca al eje x en el punto $(x_2, 0)$, y que x_2 es una mejor aproximación a r que x_1.

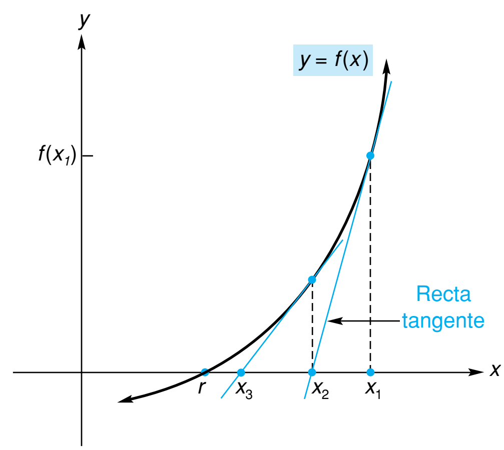


FIGURA 13.14 Mejora en la aproximación de la raíz por medio de la recta tangente.

Podemos encontrar x_2 a partir de la ecuación de la recta tangente. La pendiente de la recta tangente es $f'(x_1)$, por lo que su ecuación es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1). \tag{1}$$

Como $(x_2, 0)$ está en la recta tangente, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1). Esto da

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1 \qquad (\text{si } f'(x_1) \neq 0).$$

Por lo que,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{2}$$

Para obtener una mejor aproximación a r, efectuamos de nuevo el procedimiento ya descrito, pero esta vez usamos x_2 como punto de partida. Esto da la aproximación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \tag{3}$$

Repitiendo (o *iterando*) este proceso varias veces, esperamos obtener mejores aproximaciones en el sentido de que la sucesión de valores

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

se aproxime a r. En la práctica, terminamos el proceso cuando alcanzamos un grado de exactitud deseado.

Si analiza las ecuaciones (2) y (3), puede usted ver cómo x_2 se obtiene de x_1 y cómo x_3 se obtiene de x_2. En general, x_{n+1} se obtiene de x_n por medio de la siguiente fórmula general, llamada **método de Newton:**

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Una fórmula, como la ecuación (4), que indica cómo en una sucesión se obtiene un número de aquél precedente, se llama **fórmula recursiva** o *ecuación iterativa*.

En el caso de que una raíz caiga entre a y b, y $f(a)$ y $f(b)$ estén igualmente cercanas a cero, elegimos a cualquiera de a o b como la primera aproximación.

Principios en práctica 1

Determinación de una raíz por medio del método de Newton

Si la utilidad total (en dólares) de la venta de x televisores es $P(x) = 20x - 0.01x^2 - 850 + 3\text{In}(x)$, utilice el método de Newton para aproximar las cantidades de equilibrio. (*Nota*: existen dos cantidades de equilibrio: una está entre 10 y 50, y la otra está entre 1900 y 2000.) Proporcione el valor de x al en-

EJEMPLO 1 Determinación de una raíz por el método de Newton

Estimar la raíz de $x^4 - 4x + 1 = 0$, *que se encuentra entre* 0 *y* 1. *Continuar el proceso de aproximación hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de* 0.0001.

Solución: haciendo $f(x) = x^4 - 4x + 1$, tenemos

$$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$$

y

$$f(1) = 1 - 4 + 1 = -2.$$

(Note el cambio de signo). Como $f(0)$ está más cercana a 0 que $f(1)$, escogemos a 0 como primera aproximación, x_1. Ahora,

$$f'(x) = 4x^3 - 4,$$

de modo que

$$f(x_n) = x_n^4 - 4x_n + 1 \qquad \text{y} \qquad f'(x_n) = 4x_n^3 - 4.$$

Sustituyendo en la ecuación (4) se obtiene la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n + 1}{4x_n^3 - 4}$$

$$= \frac{4x_n^4 - 4x_n - x_n^4 + 4x_n - 1}{4x_n^3 - 4},$$

así

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^4 - 1}{4x_n^3 - 4}. \tag{5}$$

Como $x_1 = 0$, al hacer $n = 1$ en la ecuación (5) resulta

$$x_2 = \frac{3x_1^4 - 1}{4x_1^3 - 4} = \frac{3(0)^4 - 1}{4(0)^3 - 4} = 0.25.$$

Al hacer $n = 2$, en la ecuación (5) resulta

$$x_3 = \frac{3x_2^4 - 1}{4x_2^3 - 4} = \frac{3(0.25)^4 - 1}{4(0.25)^3 - 4} \approx 0.25099.$$

Al hacer $n = 3$, en la ecuación (5) resulta

$$x_4 = \frac{3x_3^4 - 1}{4x_3^3 - 4} = \frac{3(0.25099)^4 - 1}{4(0.25099)^3 - 4} \approx 0.25099.$$

TABLA 13.1

n	x_n	x_{n+1}
1	0.00000	0.25000
2	0.25000	0.25099
3	0.25099	0.25099

Los datos obtenidos hasta ahora, se muestran en la tabla 13.1. Como los valores de x_3 y x_4 difieren en menos de 0.0001, consideramos que la raíz es igual a 0.25099 (esto es, x_4).

EJEMPLO 2 Determinación de una raíz por el método de Newton

Estimar la raíz de $x^3 = 3x - 1$, *que se encuentra entre* -1 *y* -2. *Continuar el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de* 0.0001.

Solución: haciendo $f(x) = x^3 - 3x + 1$ [necesitamos tener la forma $f(x) = 0$], encontramos que

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$$

y

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1.$$

(Note el cambio en el signo). Como $f(-2)$ está más cercana a cero que $f(-1)$, escogemos a -2 como nuestra primera aproximación, x_1. Ahora,

$$f'(x) = 3x^2 - 3,$$

de modo que

$$f(x_n) = x_n^3 - 3x_n + 1 \quad \text{y} \quad f'(x_n) = 3x_n^2 - 3.$$

Sustituyendo en la ecuación 4, obtenemos la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3},$$

de modo que

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 3}. \tag{6}$$

TABLA 13.2

n	x_n	x_{n+1}
1	−2.00000	−1.88889
2	−1.88889	−1.87945
3	−1.87945	−1.87939

Como $x_1 = -2$, al hacer $n = 1$ en la ecuación (6) resulta

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 3} = \frac{2(-2)^3 - 1}{3(-2)^2 - 3} \approx -1.88889.$$

Continuando de esta manera obtenemos la tabla 13.2. Como los valores de x_3 y x_4 difieren en 0.00006, que es menor a 0.0001, entonces consideramos que la raíz es -1.87939 (esto es, x_4).

La situación en la que x_1 da a la derivada de 0 se presenta en los problemas 2 y 8 del ejercicio 13.4.

Si su elección para la aproximación inicial x_1 da a la derivada un valor de 0, escoja un número diferente que sea cercano a la raíz deseada. Una gráfica de f puede ser útil en esta situación. Por último, debemos mencionar que hay casos en que la sucesión de las aproximaciones no tienden hacia la raíz. Un análisis de tales casos está más allá del alcance de este libro.

Tecnología

La figura 13.15 da un programa corto del método de Newton para la calculadora TI-83. Antes de ejecutar el programa, la primera aproximación a la raíz de $f(x) = 0$ se almacena como X y $f(x)$ y $f'(x)$ se almacenan como Y_1 y Y_2, respectivamente.

Al ser ejecutado, el programa calcula la primera iteración y se detiene. Las iteraciones sucesivas se obtienen oprimiendo la tecla ENTER. La figura 13.16 muestra las iteraciones para el problema en el ejemplo 2.

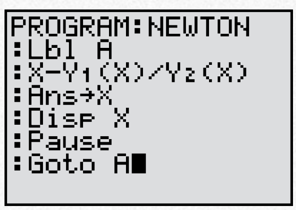


FIGURA 13.15 Programa de calculadora para el método de Newton.

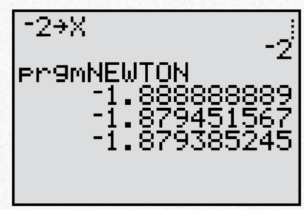


FIGURA 13.16 Iteraciones para el problema del ejemplo 2.

Ejercicio 13.4

En los problemas del 1 al 10 utilice el método de Newton para estimar la raíz indicada de la ecuación dada. Continúe el procedimiento hasta que la diferencia de dos aproximaciones sucesivas sea menor que 0.0001.

1. $x^3 - 4x + 1 = 0$; raíz entre 0 y 1.

2. $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$; raíz entre 0 y 1.

3. $x^3 - x - 1 = 0$; raíz entre 1 y 2.

4. $x^3 - 9x + 6 = 0$; raíz entre 2 y 3.

5. $x^3 + x + 16 = 0$; raíz entre -3 y -2.

6. $x^3 = 2x + 5$; raíz entre 2 y 3.

7. $x^4 = 3x - 1$; raíz entre 0 y 1.

8. $x^4 + 4x - 1 = 0$; raíz entre -2 y -1.

9. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3 = 0$; raíz entre 1 y 2.

10. $x^4 - x^3 + x - 2 = 0$; raíz entre 1 y 2.

11. Calcule con tres decimales la raíz cúbica de 71. [*Sugerencia:* muestre que el problema es equivalente a encontrar una raíz de $f(x) = x^3 - 71 = 0$. Escoja 4 como aproximación inicial. Continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas, redondeadas a tres decimales, sean iguales.]

12. Estime $\sqrt[5]{49}$ con dos decimales. Use 2 como aproximación inicial.

13. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación $e^x = x + 5$, con dos decimales. [*Sugerencia:* con un esbozo de las gráficas de $y = e^x$ y $y = x + 5$, debe ser claro cuántas soluciones existen. Use valores enteros cercanos para sus estimaciones iniciales.]

14. Encuentre, con tres decimales, todas las soluciones reales de la ecuación $\ln x = 5 - x$.

15. Cantidad del punto de equilibrio El costo c de fabricar q toneladas de un producto está dado por

$$c = 250 + 2q - 0.1q^3,$$

y el ingreso obtenido al vender las q toneladas está dado por

$$r = 3q.$$

Aproxime, con dos decimales de precisión, la cantidad del punto de equilibrio. [*Sugerencia:* determine una raíz de $r - c = 0$ escogiendo al 13 como su aproximación inicial.]

16. Cantidad del punto de equilibrio El costo total de fabricar q cientos de lápices es c dólares, donde

$$c = 40 + 3q + \frac{q^2}{1000} + \frac{1}{q}.$$

El ciento de lápices se vende en $7.

a. Demuestre que la cantidad del punto de equilibrio es una solución de la ecuación

$$f(q) = \frac{q^3}{1000} - 4q^2 + 40q + 1 = 0.$$

b. Utilice el método de Newton para estimar la solución de $f(q) = 0$, donde $f(q)$ está dada en la parte (a). Use 10 como aproximación inicial y dé su respuesta con dos decimales.

17. Equilibrio Dada la ecuación de oferta $p = 2q + 5$ y la ecuación de demanda $p = \frac{100}{q^2+1}$, use el método de Newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado. Proporcione su respuesta con tres decimales de precisión.

18. Equilibrio Dada la ecuación de oferta

$$p = 0.1q^3 + 0.6q + 2$$

y la ecuación de demanda $p = 30 - q$, use el método de Newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado y encuentre el correspondiente precio de equilibrio. Tome 5 como aproximación inicial para el valor requerido de q y dé su respuesta con dos decimales de precisión.

19. Use el método de Newton para estimar (con dos decimales) un valor crítico de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 5x + 1$$

en el intervalo [3, 4].

13.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 13.1	tamaño económico de lote
Sección 13.2	diferencial dy, dx
Sección 13.3	elasticidad puntual de la demanda; elástica; inelástica; elasticidad unitaria
Sección 13.4	método de Newton

Resumen

Desde un punto de vista práctico, la fuerza del cálculo reside en que nos permite maximizar o minimizar cantidades. Por ejemplo, en el área de la economía podemos maximizar la utilidad o minimizar el costo. Algunas relaciones importantes que se usan en problemas económicos son las siguientes:

$$\bar{c} = \frac{c}{q}, \quad \text{costo promedio por unidad} = \frac{\text{costo total}}{\text{unidad}},$$

$$r = pq, \quad \text{ingreso} = (\text{precio})(\text{cantidad}),$$

$$P = r - c, \quad \text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

Si $y = f(x)$ es una función diferenciable de x, definimos la diferencial dy como

$$dy = f'(x)\,dx,$$

donde dx (o Δx) es un cambio en x y puede ser cualquier número real. Si dx es cercana a cero, entonces dy es una aproximación a Δy que es un cambio en y:

$$\Delta y \approx dy.$$

Además, dy puede emplearse para estimar el valor de una función. Usamos la relación

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy.$$

Aquí, $f(x + dx)$ es el valor por estimar; x y dx se escogen de manera que $f(x)$ sea fácil de calcular y dx sea pequeña.

Si una ecuación define a y como una función de x, entonces la derivada de x con respecto a y está dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \qquad dy/dx \neq 0.$$

La elasticidad puntual de la demanda es un número que mide cómo la demanda del consumidor es afectada por el cambio en el precio. Está dada por

$$\eta = \frac{p/q}{dp/dq},$$

donde p es el precio por unidad al que se demandan q unidades. Las tres categorías de elasticidad son:

$|\eta| > 1,$ demanda elástica,

$|\eta| = 1,$ elasticidad unitaria,

$|\eta| < 1,$ demanda inelástica.

Dicho de manera sencilla, para un cambio porcentual dado en el precio, habrá un cambio porcentual mayor en la cantidad demandada, si la demanda es elástica, un cambio porcentual menor si la demanda es inelástica y un cambio porcentual igual si la demanda tiene elasticidad unitaria.

La relación entre elasticidad y la razón de cambio del ingreso está dada por

$$\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right).$$

El método de Newton es el nombre dado a la fórmula siguiente, que se usa para estimar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, siempre que f sea diferenciable:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

1. **Maximización de la producción** Un fabricante determina que m empleados en cierta línea de producción producen q unidades por mes, donde

$$q = 80m^2 - 0.1m^4.$$

Para obtener una producción mensual máxima, ¿cuántos empleados deben asignarse a la línea de producción?

2. **Ingreso** La función de demanda para el producto de un fabricante está dada por $p = 100e^{-0.1q}$. ¿Para qué valor de q maximiza el fabricante su ingreso total?

3. **Ingreso** La función de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = \sqrt{600 - q}.$$

Si el monopolista quiere producir por lo menos 100 unidades pero no más de 300, ¿cuántas unidades debe producir para maximizar el ingreso total?

4. **Costo promedio** Si $c = 0.01q^2 + 5q + 100$ es una función de costo, encuentre la función de costo promedio. ¿A qué nivel de producción q presenta un costo promedio mínimo?

5. **Utilidad** La función de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = 400 - 2q,$$

y el costo promedio por unidad para producir q unidades es

$$\bar{c} = q + 160 + \frac{2000}{q},$$

donde p y $\bar{c}$ están en dólares por unidad. Encuentre la utilidad máxima que el monopolista puede lograr.

6. **Diseño de un recipiente** Una caja rectangular va a fabricarse recortando cuadrados iguales de cada esquina de una lámina de cartón de 10×16 pulgadas y doblando luego los lados. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo?

7. **Cercado** Un terreno rectangular va a cercarse y dividirse en tres partes iguales por dos cercas paralelas a uno de los lados. Si se va a usar un total de 800 pies de cerca, encuentre las dimensiones del terreno para que su área sea máxima.

8. **Diseño de un cartel** Un cartel rectangular con un área de 500 plg^2 debe tener un margen de 4 pulgadas a cada lado y en la parte inferior, y un margen de 6 pulgadas en la parte superior. El resto del cartel es para material impreso. Encuentre las dimensiones de modo que el área para la zona sea máxima.

9. **Costo** Una empresa fabrica estantes para computadoras personales. Para cierto modelo, el costo total c (en miles de dólares) cuando se producen q *cientos* de estantes, está dado por

$$c = 2q^3 - 9q^2 + 12q + 20.$$

   a. La empresa tiene actualmente capacidad para producir entre 75 y 600 (inclusive) estantes por semana. Determine el número de estantes que debe producir por semana para minimizar el costo total y encuentre el correspondiente costo promedio por estante.

   b. Suponga que deben producirse entre 300 y 600 estantes. ¿Cuántos deberían producirse ahora para minimizar el costo total?

10. **Bacterias** En un laboratorio se aplica un agente antibacterial experimental a una población de 100 bacterias. Los datos indican que el número N de bacterias t horas después de dicha aplicación, está dado por

$$N = \frac{14{,}400 + 120t + 100t^2}{144 + t^2}.$$

¿Para qué valor de t se presenta el número máximo de bacterias en la población? ¿Cuál es este número máximo?

En los problemas 11 y 12 determine las diferenciales de las funciones en términos de x y dx.

11. $f(x) = x^2\ln(x + 5)$.

12. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 7}$.

13. Si $p = q^2 + 8q$, use diferenciales para estimar Δp si q cambia de 4 a 4.02.

En los problemas 14 y 15 aproxime las expresiones usando diferenciales.

14. $e^{-0.01}$.

15. $\sqrt{25.5}$.

16. Si $x = 4y^2 + 7y - 3$, encuentre dy/dx.

Para las ecuaciones de demanda en los problemas del 17 al 19 determine si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria para los valores indicados de q.

17. $p = \dfrac{500}{q}$; $q = 200$.

18. $p = 900 - q^2$; $q = 10$.

19. $p = 18 - 0.02q$; $q = 600$.

20. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = 30 - \sqrt{q}.$$

a. Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 10$.

b. Verifique que la demanda sea inelástica si $0 < p < 10$.

21. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = \sqrt{2500 - p^2}.$$

Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 30$. Si el precio de 30 disminuye $\frac{2}{3}\%$, ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

22. La ecuación de demanda para un producto es

$$q = \sqrt{100 - p}, \qquad \text{donde } 0 < p < 100.$$

a. Encuentre todos los precios que corresponden a una demanda elástica.

b. Calcule la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 40$. Use su respuesta para estimar el incremento o disminución porcentual en la demanda cuando el precio se incrementa en 5% para $p = 42$.

23. La ecuación $x^3 - 2x - 2 = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2. Use el método de Newton para estimar la raíz. Continúe el procedimiento de aproximación hasta que la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas sea menor a 0.0001. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

24. Encuentre, con tres decimales de precisión, todas las soluciones reales de la ecuación $e^x = 3x$.

Aplicación práctica
Cantidad económica de pedido

En administración de inventarios, la cantidad económica de pedido (u orden) es el tamaño más eficiente, en términos de costo, para abastecer nuevamente los pedidos. A fin de determinar este tamaño óptimo, necesitamos tener una idea de cómo evolucionan las disminuciones y el reabastecimiento, y cuál es el costo resultante.

A continuación están las hipótesis representativas:

1. El inventario está disminuyendo, debido a las compras, a una tasa constante D, que se mide en unidades por año.
2. Todos los pedidos de reabastecimiento son del mismo tamaño, y cada uno llega en un envío, justo como las existencias están saliendo.
3. Además de los costos por artículo, cada pedido también incluye un costo fijo por orden, F.
4. Cada unidad en existencias tiene un valor constante, V, medido en dólares.
5. El costo de almacenar el inventario es una fracción fija, R, del valor total actual del inventario. Este factor de costo de acarreo se mide en dólares por dólar por año.

Las hipótesis 1 y 2 dan origen a una gráfica del inventario con respecto al tiempo como la que se observa en la figura 13.17.

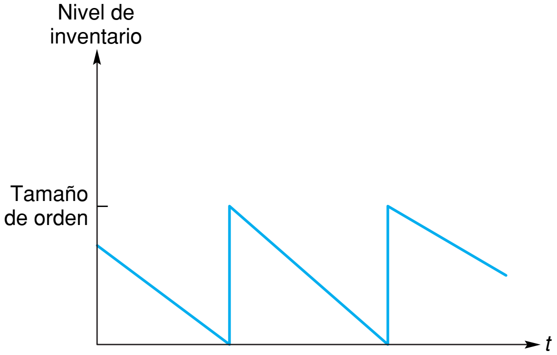


FIGURA 13.17 Inventario a lo largo del tiempo.

Ahora, deseamos minimizar el costo, en dólares por año, de administrar el inventario que se muestra en la figura 13.17. Si el reabastecimiento se pide en lotes de q unidades cada uno, entonces existen $\frac{D}{q}$ pedidos por año, para un costo por pedidos anual de $\frac{FD}{q}$. (El gasto anual debido al costo por artículo, no puede ajustarse por el cambio del tamaño del pedido, de modo que este costo es ignorado en nuestros cálculos, es decir, que no hay descuento por volumen.) Con un nivel de inventario promedio de $\frac{q}{2}$, el costo de acarreo anual es $\frac{RVq}{2}$. Entonces, el costo anual relacionado con el inventario, C, es la suma del costo de los pedidos y el costo de acarreo:

$$C = \frac{FD}{q} + \frac{RVq}{2}.$$

Esta cantidad crece, tanto cuando q se hace grande como cuando q se aproxima a cero. De modo que si existe un único punto en donde $\frac{dC}{dq}$ es igual a cero, éste será un mínimo de C. Encontrémoslo.

$$\frac{dC}{dq} = -\frac{FD}{q^2} + \frac{RV}{2} = 0,$$

$$q^2 = \frac{2FD}{RV},$$

$$q = \sqrt{\frac{2FD}{RV}}.$$

Esta fórmula se llama la fórmula del tamaño de lote de Wilson, en honor de un consultor industrial quien popularizó su uso. Si sustituimos $F = \$10$ por orden, $D = 1500$ unidades por año, $R = \$0.10$ dólares por dólar por año y $V = \$10$, entonces q se obtiene como

$$q = \sqrt{\frac{2(10)(1500)}{(0.10)(10)}} \approx 173.2.$$

El tamaño de pedido más eficiente en costo es de 173 unidades.

Las variaciones de la fórmula de Wilson hacen más flexibles una o más de las cinco hipótesis en las que está basada. Una hipótesis que puede ser más flexible es la 5. Suponga que el costo de acarreo como un porcentaje del valor del inventario se eleva cuando el inventario es bajo (piense en un gran almacén que se queda casi vacío). Modelaremos esto reemplazando R con $R(1 + ke^{-sq})$. R es el costo de acarreo anual por dólar para niveles de inventario grandes, y el término ke^{-sq} $(k, s > 0)$ eleva el costo para niveles bajos de inventario. El costo anual total del costo del inventario ahora se transforma en

$$C = \frac{FD}{q} + \frac{RVq(1 + ke^{-sq})}{2}.$$

Nuevamente, deseamos minimizar esta cantidad, y otra vez C se hace grande cuando q se hace grande y cuando q se aproxima a cero. El mínimo es donde

$$\frac{dC}{dq} = -\frac{FD}{q^2} + \frac{RV(1 + ke^{-sq} - ksqe^{-sq})}{2} = 0.$$

Suponga que $k = 1$, $s = \frac{\ln 2}{1000} \approx 0.000693$. Entonces el costo de acarreo por dólar es el doble para un inventario pequeño que para uno grande, y se encuentra en medio de los dos costos en un nivel de inventario de 1000. Si conservamos F, D, R y V, igual que antes, y utilizamos una calculadora gráfica u otra técnica de solución numérica, encontramos que $\frac{dC}{dq} = 0$ cuando $q \approx 127.9$. El tamaño óptimo de pedido es de 128 unidades. Observe que aunque la hipótesis ahora incluye economía de escala, el costo de acarreo es mayor en todos los niveles de inventario y ha conducido a una cantidad económica de orden más pequeña.

Ejercicios

1. El ejemplo 5 de la sección 13.1 es un problema de tamaño de lote que implica periodos de producción en lugar de pedidos a un proveedor. ¿Qué papel desempeña la cantidad F, el costo fijo por pedido? ¿Qué papel desempeña V, el valor unitario? ¿Puede utilizarse la fórmula de Wilson en el ejemplo 5?
2. Utilice la fórmula de Wilson de tamaño de lote para calcular la cantidad económica de pedido para un artículo que tiene un valor de \$36.50, cuesta 5% de su valor almacenarlo por año, y es comprado de un proveedor que cobra \$25 por procesar cada pedido.
3. Suponga que las hipótesis 1, 3, 4 y 5 se mantienen, pero la 2 se modifica: un administrador nunca permite que un inventario caiga al nivel cero, en lugar de eso, mantiene un margen de seguridad de cierto número de unidades. ¿Qué diferencia hace esto en los cálculos de la cantidad económica de pedido?
4. ¿Qué otras hipótesis, además de la 2 y 5, podrían flexibilizarse de manera práctica? Explique su respuesta.

4. \$176,994.65. **5.** 6.20%. **6.** \$101,925; \$121,925.
7. \$723.03. **8.** \$13,962.01. **9.** \$45,502.06.
10. \$48,095.67.

EJERCICIO 8.3 (página 386)

1. 64, 32, 16, 8, 4. **3.** 100, 102, 104.04. **5.** $\frac{422}{243}$.
7. 1.11111. **9.** 18.664613. **11.** 8.213180.
13. \$2050.10. **15.** \$29,984.06. **17.** \$8001.24.
19. \$90,231.01. **21.** \$204,977.46. **23.** \$24,594.36.
25. \$1937.14. **27.** \$458.40.
29. a. \$3048.85; **b.** \$648.85. **31.** \$3474.12.
33. \$1725. **35.** 102.91305. **37.** 55,360.30.
39. \$131.34. **41.** \$1,872,984.02.
43. \$205,073; \$142,146.

EJERCICIO 8.4 (página 391)

1. \$69.33. **3.** \$502.84.
5. a. \$221.43; **b.** \$25; **c.** \$196.43.

7.

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Principal saldado al final del periodo
1	5000.00	350.00	1476.14	1126.14
2	3873.86	271.17	1476.14	1204.97
3	2668.89	186.82	1476.14	1289.32
4	1379.57	96.57	1476.14	1379.57
Total		904.56	5904.56	5000.00

9.

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Principal saldado al final del periodo
1	900.00	22.50	193.72	171.22
2	728.78	18.22	193.72	175.50
3	553.28	13.83	193.72	179.89
4	373.39	9.33	193.72	184.39
5	189.00	4.73	193.73	189.00
Total		68.61	968.61	900.00

11. 11. **13.** \$1273.
15. a. \$2089.69; **b.** \$1878.33; **c.** \$211.36; **d.** \$381,907.
17. 23. **19.** \$113,302.45. **21.** \$38.64.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 8 (página 394)

1. $\frac{63}{16}$. **3.** 8.5% compuesto anualmente.
5. \$586.60. **7. a.** \$1997.13; **b.** \$3325.37.
9. \$936.85. **11.** \$886.98. **13.** \$314.00.

15.

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Principal saldado al final del periodo
1	15,000.00	112.50	3067.84	2955.34
2	12,044.66	90.33	3067.84	2977.51
3	9067.15	68.00	3067.84	2999.84
4	6067.31	45.50	3067.84	3022.34
5	3044.97	22.84	3067.81	3044.97
Total		339.17	15,339.17	15,000.00

17. \$1279.36.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 8 (página 395)

1. \$15,597.85. **3.** Cuando los inversionistas esperan una caída en las tasas de interés, las inversiones a largo plazo son más atractivas que las de corto plazo.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9.1

1. El límite cuando $x \to a$ no existe, si a es un entero, pero existe si a es cualquier otro valor.
2. 36π cc. **3.** 3616. **4.** 20. **5.** 2.

EJERCICIO 9.1 (página 406)

1. a. 1; **b.** 0; **c.** 1. **3. a.** 1; **b.** no existe; **c.** 3.
5. $f(0.9) = 2.8, f(0.99) = 2.98, f(0.999) = 2.998, f(1.001) = 3.002, f(1.01) = 3.02, f(1.1) = 3.2$; 3.
7. $f(-0.1) \approx 0.9516, f(-0.01) \approx 0.9950, f(-0.001) \approx 0.9995, f(0.001) \approx 1.0005, f(0.01) \approx 1.0050. f(0.1) \approx 1.0517$; 1.
9. 16. **11.** 20. **13.** -1. **15.** $-\frac{5}{2}$. **17.** 0.
19. 5. **21.** -2. **23.** 3. **25.** 0. **27.** $\frac{1}{6}$.
29. $-\frac{1}{5}$. **31.** $\frac{11}{9}$. **33.** 4. **35.** $2x$. **37.** -1.
39. $2x$. **41.** $2x - 3$. **43.** $\frac{1}{4}$. **45. a.** 1; **b.** 0.
47. 11.00. **49.** -7.00.

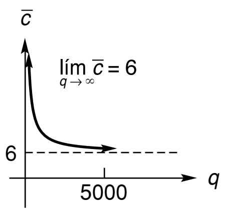
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9.2

1. $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$. La gráfica inicia arriba y rápidamente desciende hacia cero. De acuerdo con esto, los consumidores están dispuestos a comprar cantidades grandes del producto a precios cercanos a cero.
2. $\lim_{x\to\infty} y(x) = 500$. Las mayores ventas anuales que se pueden esperar con publicidad ilimitada es de \$500,000.
3. $\lim_{x\to\infty} C(x) = \infty$. Esto significa que el costo continúa aumentando sin cota conforme se fabrican más unidades.
4. El límite no existe; \$250.

EJERCICIO 9.2 (página 417)

1. a. 2; **b.** 3; **c.** No existe; **d.** $-\infty$; **e.** ∞; **f.** ∞; **g.** ∞; **h.** 0; **i.** 1; **j.** 1; **k.** 1. **3.** 1. **5.** $-\infty$. **7.** $-\infty$.
9. ∞. **11.** 0. **13.** No existe. **15.** 0.
17. ∞. **19.** 0. **21.** 1. **23.** 0. **25.** ∞.
27. 0. **29.** $-\frac{2}{5}$. **31.** $-\infty$. **33.** $\frac{2}{5}$. **35.** $-\infty$.

37. $\frac{11}{5}$. **39.** $-\frac{1}{2}$. **41.** ∞. **43.** ∞. **45.** ∞.
47. No existe. **49.** $-\infty$. **51.** 0. **53.** 1.
55. a. 1; **b.** 2; **c.** No existe; **d.** 1; **e.** 2.
57. a. 0; **b.** 0; **c.** 0; **d.** $-\infty$; **e.** $-\infty$.
59.



61. 20,000. **63.** 20.

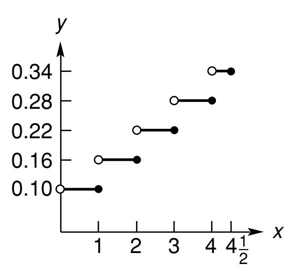
65. 1, 0.5, 0.525, 0.631, 0.912, 0.986, 0.998; se concluye que el límite es 1.
67. 0. **69. a.** 11; **b.** 9; **c.** No existe.

EJERCICIO 9.3 (página 421)

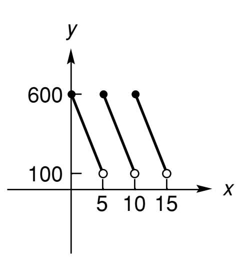
1. \$5563.87; \$1563.87. **3.** \$1456.87. **5.** 4.08%.
7. 3.05%. **9.** \$109.42. **11.** \$778,800.78.
13. a. \$21,911; **b.** \$6599. **15.** \$4.88%.
17. \$1264. **19.** 16 años.
21. Opción (a): \$1072.51; Opción (b): \$1093.30; Opción (c): \$1072.18.
23. a. \$9458.51; **b.** Esta estrategia es mejor por \$26.90.

EJERCICIO 9.4 (página 429)

7. Continua en -2 y 0. **9.** Discontinua en ± 3.
11. Continua en 2 y 0. **13.** f es una función polinomial.
15. f es una función racional y el denominador nunca es cero.
17. Ninguna. **19.** $x = -4$. **21.** Ninguna.
23. $x = -5, 3$. **25.** $x = 0, \pm 1$. **27.** Ninguna.
29. $x = 0$. **31.** Ninguna. **33.** $x = 2$.
35. Discontinuidades en $t = 1, 2, 3, 4$.



37. Sí, no, no.



PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9.5

1. $0 < x < 4$.

EJERCICIO 9.5 (página 433)

1. $(-\infty, -1), (4, \infty)$. **3.** $[2, 3]$. **5.** $\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$.
7. No hay solución. **9.** $(-\infty, -6], [-2, 3]$.
11. $(-\infty, -4), (0, 5)$. **13.** $[0, \infty)$. **15.** $(-3, 0), (1, \infty)$.
17. $(-\infty, -3), (0, 3)$. **19.** $(1, \infty)$.
21. $(-\infty, -5), [-2, 1), [3, \infty)$. **23.** $(-5, -1)$.
25. $(-\infty, -1 - \sqrt{3}], [-1 + \sqrt{3}, \infty)$.
27. Entre 50 y 150, inclusive. **29.** 17 pulgadas por 17 pulgadas.
31. $(-\infty, -7.72]$. **33.** $(-\infty, -0.5), (0.667, \infty)$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 9 (página 436)

1. -5. **3.** 2. **5.** x. **7.** $-\frac{8}{3}$. **9.** 0. **11.** $\frac{3}{7}$.
13. No existe. **15.** -1. **17.** $\frac{1}{9}$. **19.** $-\infty$.
21. ∞. **23.** $-\infty$. **25.** 1. **27.** $-\infty$. **29.** 8.
31. 23. **33. a.** \$5034.38; **b.** \$1241.46. **35.** 6.18%.
37. 20 ln 2.
41. Continua en todas partes; f es una función polinomial.
43. $x = -3$. **45.** Ninguna. **47.** $x = -4, 1$.
49. $x = -2$. **51.** $(-\infty, -6), (2, \infty)$.
53. $[2, \infty), x = 0$. **55.** $(-\infty, -5), (-1, 1)$.
57. $(-\infty, -4), [-3, 0], (2, \infty)$. **59.** 1.00.
61. 0. **63.** $[2.00, \infty)$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 9 (página 438)

1. 17%.
3. Un modelo exponencial supone una tasa de pago fija.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.1

1. $\frac{dH}{dt} = 40 - 32t$.

EJERCICIO 10.1 (página 450)

1. a.

Valor x de Q	3	2.5	2.2	2.1	2.01	2.001
m_{PQ}	19	15.25	13.24	12.61	12.0601	12.0060

b. Estimamos que $m_{\tan} = 12$.
3. 1. **5.** 4. **7.** -4. **9.** 0. **11.** $2x + 4$.
13. $4q + 5$. **15.** $-\frac{6}{x^2}$. **17.** $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$. **19.** -4.
21. 0. **23.** $y = x + 4$. **25.** $y = -3x - 7$.
27. $y = -3x + 9$. **29.** $\frac{r}{r_L - r - \frac{dC}{dD}}$.
31. $-3.000, 13.445$. **33.** $-5.120, 0.038$.
35. Para los valores x de los puntos en donde la tangente a la gráfica de f es horizontal, los valores correspondientes de $f'(x)$ son cero. Esto es de esperarse, ya que la pendiente de una recta horizontal es cero y la derivada da la pendiente de la recta tangente.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.2

1. $50 - 0.6q$.