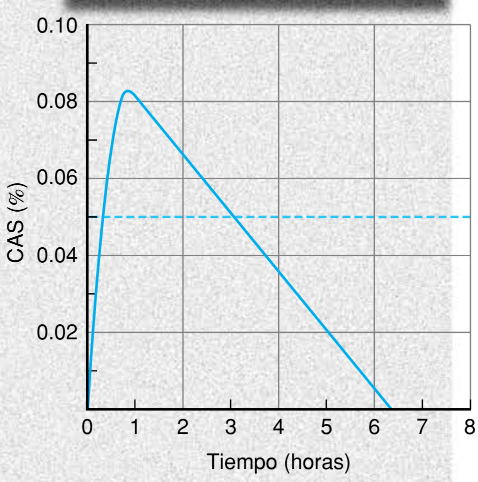
CAPÍTULO 3

Funciones y gráficas



Supóngase que un hombre de 90 kg bebe cuatro cervezas en rápida sucesión. Sabemos que su concentración de alcohol en la sangre, CAS, primero se eleva y después disminuye en forma paulatina a cero. Pero, ¿cuál es la mejor manera de describir qué tan rápido se eleva la CAS, en dónde alcanza su punto máximo y qué tan rápido disminuye?

Si obtenemos las medidas de los valores de CAS para este bebedor en particular, podemos mostrarlas en una tabla, como sigue:

Tiempo (h)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
CAS (%)	0.0820	0.0668	0.0516	0.0364	0.0212	0.0060

Sin embargo, una tabla sólo puede mostrar un número limitado de valores y en realidad no proporciona la imagen global.

En lugar de lo anterior, podríamos relacionar la CAS con el tiempo t si utilizamos una combinación de ecuaciones lineales y cuadráticas (recuerde el cap. 1):

$$\text{CAS} = -0.1025t^2 + 0.1844t \qquad \text{si } t \leq 0.97,$$
$$\text{CAS} = -0.0152t + 0.0972 \qquad \text{si } t > 0.97.$$

Sin embargo, como con la tabla, es difícil ver las ecuaciones y entender rápidamente lo que sucede con la CAS en el transcurso del tiempo.

Quizá la mejor descripción de cambio en la CAS con el tiempo es una gráfica como la de la izquierda. Aquí, con facilidad vemos qué sucede. La concentración de alcohol en la sangre asciende rápidamente, tiene un máximo de 0.083% después de aproximadamente una hora, y luego disminuye de manera gradual durante las siguientes cinco horas y media. Observe que por más de tres horas la CAS de este bebedor está por arriba de 0.05%, el punto en el que, por lo regular, las habilidades que uno tiene para conducir algún vehículo empiezan a declinar. La curva variará de un bebedor a otro, pero las mujeres por lo común se ven afectadas con mayor severidad que los hombres, no sólo a causa de la diferencia de peso, sino también a consecuencia del diferente contenido de agua entre los cuerpos de ambos sexos.

La relación entre el tiempo y el contenido de alcohol en la sangre, es un ejemplo de una función. Este capítulo trata a fondo las funciones y sus gráficas.

OBJETIVO Entender lo que es una función y determinar dominios y valores de una función.

3.1 Funciones

En el siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, uno de los inventores del cálculo, introdujo el término *función* en el vocabulario matemático. El concepto de función es uno de los más básicos en todas las matemáticas y es esencial para el estudio del cálculo.

En forma breve, una función es un tipo especial de relación que expresa cómo una cantidad (la *salida*) depende de otra cantidad (la *entrada*). Por ejemplo, cuando se invierte dinero a alguna tasa de interés, el interés I (salida) depende del tiempo t (entrada) que el dinero esté invertido. Para expresar esta dependencia, decimos que I es una "función de" t. Las relaciones funcionales como ésta en general se especifican mediante una fórmula que muestra lo que debe hacerse con la entrada para determinar la salida.

Para ejemplificar esto, suponga que \$100 ganan un interés simple a una tasa anual del 6%. Entonces, puede mostrarse que el interés y el tiempo están relacionados por la fórmula

$$I = 100(0.06)t, \tag{1}$$

donde I está en dólares y t en años. Por ejemplo,

$$\text{si } t = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{entonces} \qquad I = 100(0.06)\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3. \tag{2}$$

Así, la fórmula (1) asigna a la entrada $\frac{1}{2}$ la salida 3. Podemos pensar en la fórmula (1) como la definición de una *regla*: multiplicar t por 100(0.06). La regla asigna a cada número de entrada t exactamente un número de salida I, el cual se simboliza mediante la siguiente notación de flecha:

$$t \to I \qquad \text{o} \qquad t \to 100(0.06)t.$$

Esta regla es un ejemplo de una *función* en el siguiente sentido:

Definición

Una ***función*** es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. Al conjunto de números de entrada para los cuales se aplica la regla se le llama el ***dominio*** de la función. El conjunto de todos los números de salida se llama el ***rango***.

Para la función del interés definida por la fórmula (1), el número de entrada t no puede ser negativo, ya que el tiempo negativo no tiene sentido. Así, el dominio consiste en todos los números no negativos; esto es, todo $t \geq 0$. De (2) vemos que cuando la entrada es $\frac{1}{2}$, la salida es 3. De modo que 3 está en el rango.

Hasta aquí hemos usado el término *función* en un sentido restringido, ya que en general, las entradas o salidas no tienen por qué ser números. Por ejemplo, una lista de estados y capitales asigna a cada estado su capital (exactamente una salida), de modo que hay una función implicada. Sin embargo, por el momento sólo consideraremos las funciones cuyos dominios y rangos consistan en números reales.

Una variable que representa a los números de entrada para una función se denomina **variable independiente.** Una variable que representa a los números de salida se denomina **variable dependiente,** ya que su valor *depende* del valor de *la variable independiente*. Decimos que la variable dependiente es una *función de la variable independiente*. Esto es, la salida es una función de la entrada. Así, para la fórmula de interés $I = 100(0.06)t$, la variable independiente es t, la dependiente es I, e I es una función de t.

Como otro ejemplo, la ecuación (o fórmula):

$$y = x + 2 \tag{3}$$

define a y como una función de x. La ecuación da la regla: "sumar 2 a x". Esta regla asigna a cada entrada x exactamente una salida $x + 2$, que es y. Si $x = 1$, entonces $y = 3$; si $x = -4$, entonces $y = -2$. La variable independiente es x y la dependiente y.

En $y^2 = x$, x y y están relacionadas, pero la relación no es una función de x.

No todas las ecuaciones en x y y definen a y como una función de x. Por ejemplo, sea $y^2 = x$. Si x es 9, entonces $y^2 = 9$, de modo que $y = \pm 3$. Por tanto, para la entrada 9 se asigna no uno, sino *dos* números de salida, 3 y -3. Esto viola la definición de una función, de modo que y **no** es una función de x.

Por otra parte, algunas ecuaciones en dos variables definen a cualquiera de las variables como una función de la otra variable. Por ejemplo, si $y = 2x$, entonces para cada entrada x, existe exactamente una salida, $2x$. Por lo que y es función de x. Sin embargo, al despejar x de la ecuación se obtiene $x = y/2$. Para cada entrada y, existe exactamente una salida, $y/2$. En consecuencia, x es una función de y.

En general, las letras f, g, h, F, G, etc., se usan para representar reglas de funciones. Por ejemplo, la ecuación (3), $y = x + 2$, define a y como una función de x, en donde la regla es "sumar 2 a la entrada". Suponga que hacemos que f represente esta regla. Entonces decimos que f es la función. Para indicar que f asigna a la entrada 1 la salida 3, escribimos $f(1) = 3$, que se lee "f de 1 es igual a 3". En forma análoga, $f(-4) = -2$. En términos generales, si x es cualquier entrada tenemos la notación:

$f(x)$ es un número de salida.

$f(x)$, que se lee "f de x", representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada x en el dominio.

$$\underbrace{\overset{\substack{\text{entrada}\\ \downarrow}}{f(x)}}_{\substack{\uparrow\\ \text{salida}}}$$

Así el resultado $f(x)$ es lo mismo que y. Pero como $y = x + 2$, podemos escribir $y = f(x) = x + 2$ o simplemente

$$f(x) = x + 2.$$

Por ejemplo, para encontrar $f(3)$, que es la salida correspondiente a la entrada 3, reemplazamos con 3 cada x en $f(x) = x + 2$:

$$f(3) = 3 + 2 = 5.$$

Del mismo modo,

$$f(8) = 8 + 2 = 10,$$
$$f(-4) = -4 + 2 = -2.$$

Los números de salida como $f(-4)$ se llaman **valores de la función** (o valores funcionales). Tenga en mente que están en el rango de f.

Advertencia $f(x)$ **no** significa f veces x, $f(x)$ es la salida que corresponde a la entrada x.

La notación funcional es muy utilizada en cálculo.

Con mucha frecuencia, las funciones se definen por medio de la "notación funcional". Por ejemplo, la ecuación $g(x) = x^3 + x^2$, define a la función g que asigna a cada número de entrada x el número de salida $x^3 + x^2$:

$$g\colon\ x \to x^3 + x^2.$$

En otras palabras, g suma el cubo y el cuadrado de un número de entrada. Algunos valores de la función son:

$$
\begin{aligned}
g(2) &= 2^3 + 2^2 = 12,\\
g(-1) &= (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0,\\
g(t) &= t^3 + t^2,\\
g(x+1) &= (x+1)^3 + (x+1)^2.
\end{aligned}
$$

La idea de *reemplazo* es muy importante en la determinación de los valores funcionales.

Observe que $g(x+1)$ se encontró al reemplazar cada x en $x^3 + x^2$ por la entrada $x + 1$.

Cuando hagamos referencia a la función g definida por $g(x) = x^3 + x^2$, con toda libertad llamaremos a la ecuación "función". Así, hablamos de "la función $g(x) = x^3 + x^2$", y de manera análoga, "la función $y = x + 2$".

Seamos más específicos acerca del dominio de una función. A menos que se establezca otra cosa, el dominio consiste en todos los números reales para los cuales la regla de la función tenga sentido, esto es, la regla proporciona valores funcionales que sean números reales.

Por ejemplo, suponga

$$h(x) = \frac{1}{x-6}.$$

Aquí cualquier número real puede usarse para x, excepto 6, ya que el denominador es cero cuando x es 6. Por tanto, el dominio de h se entenderá que es todos los números reales excepto 6.

Principios en práctica 1
Determinación de dominios

El área de un círculo depende de la longitud del radio del círculo.

a. Escriba una función $a(r)$ para el área de un círculo cuando la longitud del radio es r.
b. ¿Cuál es el dominio de esta función, sin tomar en cuenta el contexto?
c. ¿Cuál es el dominio de esta función, tomando en cuenta el contexto?

EJEMPLO 1 Determinación de dominios

Encontrar el dominio de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$.

Solución: no podemos dividir entre cero, así que debemos encontrar todos los valores de x que hacen que el denominador sea cero. Éstos *no pueden* ser números de entrada. Entonces igualamos el denominador a cero y resolvemos para x.

$$
\begin{aligned}
x^2 - x - 2 &= 0 && \text{(ecuación cuadrática),}\\
(x-2)(x+1) &= 0 && \text{(factorizando),}\\
x &= 2, -1.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, el dominio de f son todos los números reales *excepto* 2 y -1.

b. $g(t) = \sqrt{2t - 1}$.

Solución: $\sqrt{2t-1}$ es un número real si $2t - 1$ es mayor o igual a cero. Si $2t - 1$ es negativo, entonces $\sqrt{2t-1}$ no es un número real (*es un número imaginario*). Ya que los valores de la función deben ser números reales, debemos suponer que:

$$
\begin{aligned}
2t - 1 &\geq 0,\\
2t &\geq 1 && \text{(sumando 1 a ambos miembros),}\\
t &\geq \frac{1}{2} && \text{(dividiendo ambos miembros entre 2).}
\end{aligned}
$$

Por tanto, el dominio es el intervalo $[\frac{1}{2}, \infty)$.

■ *Principios en práctica 2*
Determinación del dominio y de los valores funcionales

El tiempo que toma recorrer una distancia dada depende de la rapidez a la cual se haga el recorrido.

a. Escriba una función $t(r)$ para el tiempo que toma, si la distancia es 300 millas y la rapidez es r.
b. ¿Cuál es el dominio de esta función, sin tomar en cuenta el contexto?
c. ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?
d. Determine $t(x)$, $t\left(\frac{x}{2}\right)$, y $t\left(\frac{x}{4}\right)$.
e. ¿Qué le sucede al tiempo, si la rapidez se reduce (divide) por una constante c? Describa esta situación utilizando una ecuación.

EJEMPLO 2 Determinación del dominio y de los valores funcionales

Sea $g(x) = 3x^2 - x + 5$. Cualquier número real puede utilizarse como x, de modo que el dominio de g son todos los números reales.

a. *Encontrar* $g(z)$.

Solución: al reemplazar cada x por z en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene

$$g(z) = 3(z)^2 - z + 5 = 3z^2 - z + 5.$$

b. *Encontrar* $g(r^2)$.

Solución: al reemplazar cada x por r^2 *en* $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene

$$g(r^2) = 3(r^2)^2 - r^2 + 5 = 3r^4 - r^2 + 5.$$

c. *Encontrar* $g(x + h)$.

Solución:

$$\begin{aligned} g(x+h) &= 3(x+h)^2 - (x+h) + 5 \\ &= 3(x^2 + 2hx + h^2) - x - h + 5 \\ &= 3x^2 + 6hx + 3h^2 - x - h + 5. \end{aligned}$$

Advertencia No confunda la notación. En el ejemplo 2(c), encontramos $g(x + h)$ al reemplazar cada x en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ por la entrada $x + h$. **No** escriba la función y luego sume h. Esto es, $g(x + h) \neq g(x) + h$:

$$g(x + h) \neq 3x^2 - x + 5 + h.$$

Tampoco utilice la ley distributiva en $g(x + h)$, esto **no** representa una multiplicación. Esto es,

$$g(x + h) \neq g(x) + g(h).$$

EJEMPLO 3 Determinación de un cociente de diferencia

Si $f(x) = x^2$, *determinar* $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

El cociente de diferencia de una función es un importante concepto matemático.

Solución: la expresión $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se conoce como un **cociente de diferencia.** Aquí el numerador es una diferencia de valores funcionales. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h. \end{aligned}$$

En algunos casos, el dominio de una función está restringido por razones físicas o económicas. Por ejemplo, en la función de interés vista anteriormente, $I = 100(0.06)t$ tiene $t \geq 0$, ya que t representa el tiempo. El ejemplo 4 da otra ilustración.

Principios en práctica 3
Función de demanda

Supóngase que la función de demanda semanal para pizzas grandes en una pizzería es

$$p = 26 - \frac{q}{40}.$$

a. Si el precio actual es \$18.50 por pizza, ¿cuántas pizzas se venden por semana?
b. Si se venden 200 pizzas cada semana, ¿cuál es el precio actual?
c. Si el propietario quiere duplicar el número de pizzas grandes vendidas por semana (a 400), ¿cuál debe ser su precio?

EJEMPLO 4 Función de demanda

Suponga que la ecuación $p = 100/q$ describe la relación entre el precio por unidad p de cierto producto, y el número de unidades q del producto que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Esta ecuación se llama *ecuación de demanda* para el producto. Si q es un número de entrada, entonces para cada valor de q se asigna exactamente un número de salida p:

$$q \to \frac{100}{q} = p.$$

Por ejemplo,

$$20 \to \frac{100}{20} = 5;$$

esto es, cuando q es 20, entonces p es 5. Así, el precio p es una función de la cantidad demandada, q. Esta función se llama **función de demanda.** La variable independiente es q, y p es la variable dependiente. Ya que q no puede ser cero (la división entre cero no está definida) y no puede ser negativa (q representa una cantidad), el dominio son todos los valores de q tales que $q > 0$.

Hemos visto que una función es en esencia una *correspondencia* por la que a cada número de entrada en el dominio, se asigna un número de salida en el rango. Para la correspondencia dada por $f(x) = x^2$, algunos ejemplos de asignaciones se muestran por medio de flechas en la figura 3.1. El ejemplo siguiente muestra una correspondencia funcional que no está dada por medio de una fórmula algebraica.

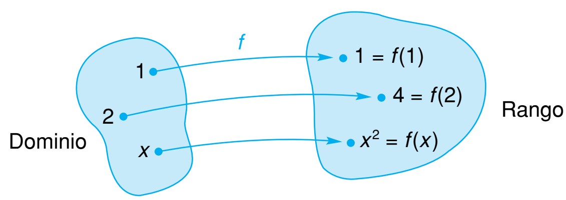


FIGURA 3.1 Correspondencia funcional para $f(x) = x^2$.

EJEMPLO 5 Programa de oferta

La tabla de la figura 3.2 es un *programa de oferta*. Da una correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes proporcionan por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

Si p es la variable independiente, entonces q es una función de p, digamos $q = f(p)$, y

$$f(500) = 11, \quad f(600) = 14, \quad f(700) = 17, \quad \text{y} \quad f(800) = 20.$$

Observe que cuando el precio por unidad se incrementa, los fabricantes están dispuestos a surtir más unidades por semana.

Por otra parte, si q es la variable independiente, entonces p es una función de q, digamos $p = g(q)$, y

$$g(11) = 500, \quad g(14) = 600, \quad g(17) = 700, \quad \text{y} \quad g(20) = 800.$$

Hablamos de f y g como **funciones de oferta.**

PROGRAMACIÓN DE OFERTA

p **Precio por unidad en dólares**	q **Cantidad ofrecida por semana**
500	11
600	14
700	17
800	20

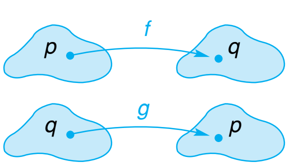


FIGURA 3.2 Programación de oferta y funciones de oferta.

Tecnología

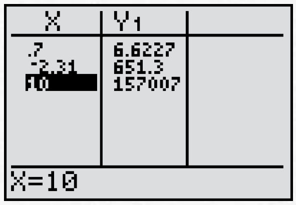


FIGURA 3.3 Tabla de valores funcionales de $f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7$.

Los valores de una función se calculan fácilmente con una calculadora gráfica. Por ejemplo, suponga que:

$$f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7,$$

y que deseamos encontrar $f(0.7)$, $f(-2.31)$ y $f(10)$. Con una calculadora TI-83, primero introducimos la función como Y_1:

$$Y_1 = 17X\^{}4 - 13X\^{}3 + 7.$$

Después presionamos la tecla *TABLE* y de manera sucesiva introducimos los valores para x .7, −2.31 y 10. Los resultados se muestran en la figura 3.3. Hacemos notar que existen otros métodos para determinar los valores funcionales por medio de la TI-83.

Ejercicio 3.1

En los problemas del 1 al 12 obtenga el dominio de cada función.

1. $f(x) = \frac{8}{x}$.

2. $g(x) = \frac{x}{5}$.

3. $h(x) = \sqrt{x - 3}$.

4. $H(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$.

5. $F(t) = 4t^2 - 6$.

6. $H(x) = \frac{x}{x + 8}$.

7. $f(x) = \frac{9x - 9}{2x + 7}$.

8. $g(x) = \sqrt{4x + 3}$.

9. $G(y) = \frac{4}{y^2 - y}$.

10. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$.

11. $h(s) = \frac{4 - s^2}{2s^2 - 7s - 4}$.

12. $G(r) = \frac{2}{r^2 + 1}$.

En los problemas del 13 al 24 determine los valores de la función para cada una de las funciones.

13. $f(x) = 2x + 1$; $f(0), f(3), f(-4)$.

14. $H(s) = 5s^2 - 3$; $H(4), H(\sqrt{2}), H(\frac{2}{3})$.

15. $G(x) = 2 - x^2$; $G(-8), G(u), G(u^2)$.

16. $f(x) = 7x$; $f(s), f(t + 1), f(x + 3)$.

17. $g(u) = u^2 + u$; $g(-2), g(2v), g(-x^2)$.

18. $h(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$; $h(16), h\left(\frac{1}{4}\right), h(1 - x)$.

19. $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $f(1), f(-1), f(x + h)$.

20. $H(x) = (x + 4)^2$; $H(0), H(2), H(t - 4)$.

21. $g(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 5}$; $g(5), g(3x), g(x + h)$.

22. $H(x) = \sqrt{4 + x}$; $H(-4), H(-3), H(x + 1) - H(x)$.

23. $f(x) = x^{4/3}$; $f(0), f(64), f(\frac{1}{8})$.

24. $g(x) = x^{2/5}$; $g(32), g(-64), g(t^{10})$.

En los problemas del 25 al 32 determine (a) $f(x + h)$ y (b) $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$; simplifique sus respuestas.

25. $f(x) = 4x - 5$.

26. $f(x) = \frac{x}{2}$.

27. $f(x) = x^2 + 2x$.

28. $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$.

29. $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$.

30. $f(x) = x^3$.

31. $f(x) = \frac{1}{x}$.

32. $f(x) = \frac{x + 8}{x}$.

33. Si $f(x) = 9x + 7$, determine $\frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$.

34. Si $f(x) = x^2 - x$, determine $\frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$.

En los problemas del 35 al 38, ¿es y una función de x? ¿Es x una función de y?

35. $9y - 3x - 4 = 0$.

36. $x^2 + y = 0$.

37. $y = 7x^2$.

38. $x^2 + y^2 = 1$.

39. La fórmula para el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. ¿Es el área una función del radio?

40. Suponga que $f(b) = ab^2 + a^2b$. (a) Determine $f(a)$. (b) Determine $f(ab)$.

41. Valor de un negocio Un negocio con un capital original de \$20,000 tiene ingresos y gastos semanales de \$4000 y \$3200, respectivamente. Si todas las utilidades se conservan en el negocio, exprese el valor V del negocio al final de t semanas como una función de t.

42. Depreciación Si una máquina de \$30,000 se deprecia en un 2% de su valor original cada año, determine una función f que exprese el valor, V, de la máquina después que han transcurrido t años.

43. Función de utilidad Cuando se venden q unidades de cierto producto (q es no negativa), la utilidad P está dada por la ecuación $P = 1.25q$. ¿Es P una función de q? ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

44. Función de demanda Supóngase que la función de demanda anual para que un actor particular estelarice una película es $p = \frac{1{,}200{,}000}{q}$, en donde q es el número de películas que él estelariza durante el año. Si el actor actualmente cobra \$600,000 por película, ¿cuántas películas estelariza cada año? Si quiere estelarizar cuatro películas por año, ¿cuánto cobrará por esto?

45. Función de oferta Supóngase que la función de oferta semanal por una libra de su café casero en un local de venta de café es $p = \frac{q}{50}$, en donde q es el número de libras de café que se ofrecen por semana. ¿Cuántas libras de café a la semana deben ofrecerse si el precio es de \$8.00 por libra? ¿Cuántas libras de café a la semana deben ofrecerse si el precio es de \$20.00 por libra? ¿Cómo cambia la cantidad ofrecida conforme el precio se incrementa?

46. Altas del hospital Una compañía de seguros examinó el registro de un grupo de individuos hospitalizados por una enfermedad en particular. Se encontró que la proporción total de quienes habían sido dados de alta al final de t días de hospitalización está dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3.$$

Evalúe (a) $f(0)$, (b) $f(100)$ y (c) $f(300)$. (d) ¿Al final de cuántos días se habrá dado de alta al 99.9% (0.999) del grupo?

47. Psicología Se llevó a cabo un experimento para analizar la respuesta humana a descargas eléctricas.[1] Los sujetos recibieron una descarga de cierta intensidad. Se les pidió asignar una magnitud de 10 a esta descarga en particular, llamada estímulo estándar. Después se les aplicaron otras descargas (estímulos) de varias intensidades. Para cada una de éstas la respuesta R era un número que indicaba la magnitud percibida de la descarga en relación con aquélla del estímulo estándar. Se encontró que R era una función de la intensidad I de la descarga (I *en microamperes*) y se estimó por

$$R = f(I) = \frac{I^{4/3}}{2500}, \qquad 500 \le I \le 3500.$$

Evalúe (a) $f(1000)$ y (b) $f(2000)$. (c) Suponga que I_0 y $2I_0$ están en el dominio de f. Exprese $f(2I_0)$ en términos de $f(I_o)$. ¿Qué efecto sobre la respuesta tiene el duplicar la intensidad?

48. Psicología En un experimento de aprendizaje por asociación de parejas,[2] la probabilidad de una respuesta correcta como función del número n de intentos tiene la forma

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2}(1 - c)^{n-1}, \qquad n \ge 1,$$

donde el valor estimado de c es 0.344. Usando este valor de c, determine $P(1)$ y $P(2)$.

49. Programa de oferta La tabla siguiente se conoce como un *programa de oferta*. Dicha tabla proporciona una correspondencia entre el precio p de un producto y la cantidad q que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) a ese precio. (a) Si $p = f(q)$, liste los números en el dominio de f. Determine $f(2900)$ y $f(3000)$. (b) Si $q = g(p)$, liste los números en el dominio de g. Determine $g(10)$ y $g(17)$.

Precio por unidad, p	Cantidad demandada por semana, q
\$10	3000
12	2900
17	2300
20	2000

En los problemas del 50 al 53 utilice su calculadora para determinar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

50. $f(x) = 2.03x^3 - 5.27x^2 - 13.71$; (a) $f(1.73)$, (b) $f(-5.78)$, (c) $f(\sqrt{2})$.

51. $f(x) = \frac{14.7x^2 - 3.95x - 15.76}{24.3 - x^3}$; (a) $f(4)$, (b) $f(-17/4)$, (c) $f(\pi)$.

52. $f(x) = (20 - 3x)(2.25x^2 - 7.1x - 16)^4$; (a) $f(0.1)$, (b) $f(-0.01)$, (c) $f(1.6)$.

53. $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}x^2 + 47.62(x + 1)}{9.07}}$; (a) $f(15.93)$, (b) $f(-146)$, (c) $f(0)$.

[1] Adaptado de H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.

[2] D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, 1983).

OBJETIVO Introducir los conceptos de función constante, función polinomial, función racional, función definida por partes, función valor absoluto y notación factorial.

3.2 Funciones especiales

En esta sección veremos funciones que tienen formas y representaciones especiales. Empezamos con el que tal vez sea el tipo más sencillo de función que existe: una *función constante*.

> ***Principios en práctica 1***
> **Función constante**
>
> Supóngase que las primas mensuales del seguro de salud para un individuo son de \$125.00.
>
> a. Escriba las primas mensuales del seguro de salud como una función del número de visitas que el individuo hace al doctor.
> b. ¿Cómo cambian las primas del seguro de salud conforme aumenta el número de visitas al doctor?
> c. ¿Qué clase de función es ésta?

EJEMPLO 1 Función constante

Sea $h(x) = 2$. El dominio de h son todos los números reales. Todos los valores funcionales son 2. Por ejemplo,

$$h(10) = 2, \qquad h(-387) = 2, \qquad h(x + 3) = 2.$$

Llamamos a h una *función constante* ya que todos los valores de la función son iguales. En forma más general, tenemos esta definición:

> Una función de la forma $h(x) = c$, en donde c es una *constante*, se llama **función constante.**

Una función constante pertenece a una clase más amplia de funciones llamadas *funciones polinomiales*. En general, una función de la forma

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

en donde n es un entero no negativo y $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$ son constantes con $c_n \neq 0$ se llama **función polinomial** (en x). El número n se llama el **grado** del polinomio, y c_n *es el* **coeficiente principal**. Así,

Cada término en una función polinomial es una constante o bien una constante por una potencia entera positiva de x.

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 9$$

es una función polinomial de grado 2 con coeficiente principal 3. Del mismo modo, $g(x) = 4 - 2x$ tiene grado 1 y coeficiente principal -2. Las funciones polinomiales de grado 1 o 2 son llamadas **funciones lineales** o **cuadráticas,** respectivamente. De aquí que, $g(x) = 4 - 2x$ es lineal y $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$ es cuadrática. Observe que una función constante distinta de cero, tal como $f(x) = 5$ [la cual puede escribirse como $f(x) = 5x^0$], es una función polinomial de grado cero. La función constante $f(x) = 0$ también se considera una función polinomial, pero no tiene asignado algún grado. El dominio de cualquier función polinomial son todos los números reales.

> ***Principios en práctica 2***
> **Funciones polinomiales**
>
> La función $d(t) = 3t^2$ representa la distancia en metros que un automóvil viajará en t segundos, cuando tiene una aceleración constante de 6 m/s^2.
>
> a. ¿Qué clase de función es ésta?
> b. ¿De qué grado es?
> c. ¿Cuál es su coeficiente principal?

EJEMPLO 2 Funciones polinomiales

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ es una función polinomial de grado 3 con coeficiente principal l.

b. $g(x) = \dfrac{2x}{3}$ es una función lineal con coeficiente principal $\dfrac{2}{3}$.

c. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ *no* es una función polinomial. Puesto que $f(x) = 2x^{-3}$ y el ex-

p o -

nente para x no es un entero no negativo, esta función no tiene la forma propia de las polinomiales. En forma similar, $g(x) = \sqrt{x}$ no es función polinomial porque $g(x) = x^{1/2}$.

Una función que es un cociente de funciones polinomiales se llama **función racional.**

EJEMPLO 3 Funciones racionales

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x + 5}$ es una función racional, ya que el numerador y el denominador son funciones polinomiales. Observe que esta función racional no está definida para $x = -5$.

b. $g(x) = 2x + 3$ es una función racional, ya que $2x + 3 = \dfrac{2x + 3}{1}$. De hecho, toda función polinomial también es una función racional.

Toda función polinomial es una función racional.

Algunas veces es necesaria más de una expresión para definir una función, como lo muestra el ejemplo 4.

Principios en práctica 3
Función compuesta

Para reducir el inventario, una tienda departamental cobra tres precios. Si compra de cero a cinco pares de medias, el precio es de \$3.50 por par. Si compra de 6 a 10 pares de medias, el precio es \$3.00 por par. Si compra más de 10 pares, el precio es de \$2.75 por par. Escriba una función definida por partes para representar el costo de compra de n pares de medias.

EJEMPLO 4 Función compuesta

Sea

$$F(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 \leq s < 1, \\ 0, & \text{si } 1 \leq s \leq 2, \\ s - 3 & \text{si } 2 < s \leq 8. \end{cases}$$

Ésta se llama **función compuesta,** ya que su regla está dada por más de una expresión. Aquí s es la variable independiente, y el dominio F es toda s tal que $-1 \leq s \leq 8$. El valor de s determina cuál expresión usar.

Determinar $F(0)$: como $-1 \leq 0 < 1$, tenemos $F(0) = 1$.

Determinar $F(2)$: como $1 \leq 2 \leq 2$, tenemos $F(2) = 0$.

Determinar $F(7)$: como $2 < 7 \leq 8$, sustituimos 7 por la s en $s - 3$.

$$F(7) = 7 - 3 = 4.$$

Tecnología

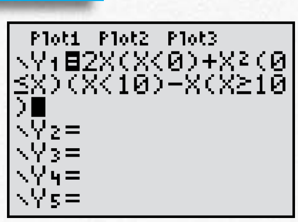


FIGURA 3.4 Introducción de una función definida por partes.

Para ilustrar cómo introducir una función definida por partes en una calculadora TI-83, la figura 3.4 muestra la secuencia de pasos que introducen la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < 10, \\ -x, & \text{si } x \geq 10. \end{cases}$$

EJEMPLO 5 Función valor absoluto

La función $f(x) = |x|$ es la *función valor absoluto*. Recuerde que el **valor absoluto** o **magnitud,** de un número real x se denota por $|x|$ y se define por

La función valor absoluto puede considerarse una función definida por partes.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por eso el dominio de f son todos los números reales. Algunos valores funcionales son

$$f(16) = |16| = 16,$$
$$f(-\tfrac{4}{3}) = |-\tfrac{4}{3}| = -(-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{4}{3},$$
$$f(0) = |0| = 0.$$

En los ejemplos siguientes hacemos uso de la *notación factorial*.

El símbolo $r!$, r es un entero positivo, se lee "***r* factorial**". Representa el producto de los primeros r enteros positivos:

$$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r.$$

Definimos $0!$ como 1.

Principios en práctica 4
Factoriales

Siete libros diferentes se colocarán en una repisa. ¿De cuántas formas pueden acomodarse? Represente la pregunta como un problema de factoriales y dé la solución.

EJEMPLO 6 Factoriales

a. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

b. $3!(6-5)! = 3! \cdot 1! = (3 \cdot 2 \cdot 1)(1) = (6)(1) = 6.$

c. $\dfrac{4!}{0!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = \dfrac{24}{1} = 24.$

EJEMPLO 7 Genética

Suponga que dos conejillos de Indias negros se reproducen y tienen cinco descendientes. Bajo ciertas condiciones puede mostrarse que la probabilidad P de que exactamente r de los descendientes sean de color café y los otros negros, es una función de r, digamos $P = P(r)$, *donde*

Los factoriales aparecen con frecuencia en la teoría de probabilidad.

$$P(r) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{5-r}}{r!(5-r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, 5.$$

La letra P en $P = P(r)$ *se utiliza en dos formas. En el lado derecho P representa la regla de la función. En el izquierdo representa la variable dependiente. El dominio de P son todos los enteros desde 0 hasta 5, inclusive. Determinar la probabilidad de que exactamente tres conejillos de Indias sean de color café.*

Solución: queremos encontrar $P(3)$. Tenemos

$$P(3) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2}{3!2!} = \frac{120\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{9}{16}\right)}{6(2)} = \frac{45}{512}.$$

Ejercicio 3.2

En los problemas del 1 al 4 determine si la función dada es una función polinomial.

1. $f(x) = x^2 - x^4 + 4.$ **2.** $f(x) = \frac{x^2 + 7}{3}.$ **3.** $g(x) = \frac{3}{x^2 + 7}.$ **4.** $g(x) = 3^{-2}x^2.$

En los problemas del 5 al 8 determine si la función dada es una función racional.

5. $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 + 4}.$ **6.** $f(x) = \frac{3}{2x + 1}.$ **7.** $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 5, \\ 4 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$ **8.** $g(x) = 4x^{-4}.$

En los problemas del 9 al 12 determine el dominio de cada función.

9. $H(z) = 16.$ **10.** $f(t) = \pi.$ **11.** $f(x) = \begin{cases} 5x, & \text{si } x > 1, \\ 4, & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$ **12.** $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x = 3, \\ x^2, & \text{si } 1 \leq x < 3. \end{cases}$

En los problemas del 13 al 16 establezca (a) el grado y (b) el coeficiente principal de la función polinomial dada.

13. $F(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6.$ **14.** $f(x) = 5x.$ **15.** $f(x) = 2 - 3x^4 + 2x.$ **16.** $f(x) = 9.$

En los problemas del 17 al 22 determine los valores funcionales para cada función.

17. $f(x) = 8;$ $f(2), f(t + 8), f(-\sqrt{17}).$

18. $g(x) = |x - 3|;$ $g(10), g(3), g(-3).$

19. $F(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0; \\ -1, & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$F(10), F(-\sqrt{3}), F(0), F(-\frac{18}{5}).$

20. $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \geq 0 \\ 3, & \text{si } x < 0 \end{cases};$

$f(3), f(-4), f(0).$

21. $G(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 3 \\ 2 - x^2, & \text{si } x < 3 \end{cases};$

$G(8), G(3), G(-1), G(1).$

22. $h(r) = \begin{cases} 3r - 1, & \text{si } r > 2 \\ r^2 - 4r + 7, & \text{si } r < 2 \end{cases};$

$h(3),\ h(-3),\ h(2).$

En los problemas del 23 al 28 determine el valor de cada expresión.

23. $6!.$ **24.** $0!.$ **25.** $(4 - 2)!.$

26. $5! \cdot 3!.$ **27.** $\frac{5!}{4!}.$ **28.** $\frac{8!}{5!(8 - 5)!}.$

29. Viaje en tren Un boleto de viaje redondo en tren a la ciudad cuesta \$4.50. Escriba el costo de un boleto de viaje redondo como función del ingreso del pasajero. ¿Qué clase de función es ésta?

30. Geometría Un prisma rectangular tiene un largo tres veces mayor que su ancho, y altura una unidad menor que el doble del ancho. Escriba el volumen del prisma rectangular como una función del ancho. ¿Qué clase de función es ésta?

31. Función de costo En la fabricación de un componente para una máquina, el costo inicial de un troquel es de \$850 y todos los otros costos adicionales son de \$3 por unidad producida. (a) Exprese el costo total C (en dólares) como una función lineal del número q de unidades producidas. (b) ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de \$1600?

32. Inversión Si un capital de P dólares se invierte a una tasa de interés simple anual r durante t años, exprese la cantidad total acumulada del capital y del interés como una función de t. ¿Su resultado es una función lineal de t?

33. Ventas Para alentar la venta en grupos grandes, un teatro cobra dos precios. Si su grupo es menor de 10, cada boleto cuesta \$8.50. Si su grupo es de 10 o más, cada boleto cuesta \$8.00. Escriba una función definida por partes para representar el costo de comprar n boletos.

34. Factoriales En un parque de diversiones, un grupo de amigos quiere viajar en los troncos en todos los órdenes posibles. ¿Cuántos viajes tiene que hacer un grupo de tres? ¿Cuántos un grupo de cuatro? ¿Un grupo de cinco?

35. Genética Bajo ciertas condiciones, si dos padres con ojos de color café tienen exactamente tres hijos, la probabilidad P de que tengan exactamente r hijos con ojos azules está dada por la función $P = P(r)$, donde

$$P(r) = \frac{3!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}}{r!(3 - r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, 3.$$

Determine la probabilidad de que exactamente dos de los hijos tengan los ojos azules.

36. Genética En el ejemplo 7 determine la probabilidad de que los cinco descendientes tengan ojos de color café.

37. Crecimiento de bacterias En un cultivo están desarrollándose bacterias. El tiempo t (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura T (en °C) del cultivo. Si esta función está dada por[3]

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4}, & \text{si } 30 \leq T \leq 36, \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4}, & \text{si } 36 < T \leq 39, \end{cases}$$

(a) determine el dominio de f, y (b) encuentre $f(30)$, $f(36)$ y $f(39)$.

En los problemas del 38 al 41 utilice su calculadora para encontrar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

38. $f(x) = \begin{cases} 0.08x^5 - 47.98, & \text{si } x \geq 7.98 \\ 0.67x^6 - 37.41, & \text{si } x < 7.98; \end{cases}$

(a) $f(7.98)$, (b) $f(2.26)$, (c) $f(9)$.

39. $f(x) = \begin{cases} 47.1x^5 + 30.4, & \text{si } x > 0 \\ 9.4x^3 - x, & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$

(a) $f(5.5)$, (b) $f(-3.6)$, (c) $f(6/7)$.

40. $f(x) = \begin{cases} 4.07x - 2.3 & \text{si } x < -8 \\ 19.12, & \text{si } -8 \leq x < -2; \\ x^2 - 4x^{-2}, & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

(a) $f(-5.8)$, (b) $f(-14.9)$, (c) $f(7.6)$

41. $f(x) = \begin{cases} x/(x+3), & \text{si } x < -5 \\ x(x-4)^2, & \text{si } -5 \leq x < 0; \\ \sqrt{2.1x + 3}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(a) $f(-\sqrt{30})$, (b) $f(46)$, (c) $f(-2/3)$.

OBJETIVO Combinar funciones por medio de suma, resta, multiplicación, división y composición.

3.3 COMBINACIÓN DE FUNCIONES

Existen diferentes formas de combinar dos funciones para crear una nueva función. Suponga que f y g son las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 3x.$$

Sumando $f(x)$ y $g(x)$ se obtiene

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3x.$$

Esta operación define una nueva función llamada *suma* de f y g, que se denota por $f + g$. Su valor funcional en x es $f(x) + g(x)$. Esto es,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x.$$

Por ejemplo,

$$(f + g)(2) = 2^2 + 3(2) = 10.$$

En general, para cualesquiera funciones f y g, definimos la **suma** $\boldsymbol{f + g}$, la **diferencia** $\boldsymbol{f - g}$, el **producto** $\boldsymbol{fg}$ y el **cociente** $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$ como sigue:[4]

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x),$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

[3]Adaptado de F. K. E. Imrie y A: J. Vlitos, "Production of Fungal Protein from Carob", en *Single-Cell Protein II*, ed. S. R. Tannenbaum y D. I. C. Wang (Cambridge, MA.: MIT Press, 1975).

[4]En cada una de las cuatro combinaciones, se supone que x se encuentra en los dominios tanto de f como de g. En el cociente tampoco se permite cualquier valor de x para el cual $g(x)$ sea cero.

Así, para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, tenemos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x,$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3x,$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2(3x) = 3x^3,$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3}, \qquad \text{para } x \neq 0.$$

EJEMPLO 1 Combinación de funciones

Si $f(x) = 3x - 1$ *y* $g(x) = x^2 + 3x$, *encontrar*

a. $(f + g)(x)$, **b.** $(f - g)(x)$,

c. $(fg)(x)$, **d.** $\frac{f}{g}(x)$.

Solución:

a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (3x - 1) + (x^2 + 3x) = x^2 + 6x - 1.$

b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x - 1) - (x^2 + 3x) = -1 - x^2.$

c. $(fg)(x) = f(x)g(x) = (3x - 1)(x^2 + 3x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x.$

d. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 1}{x^2 + 3x}.$

Composición

También podemos combinar dos funciones aplicando primero una función a un número y después la otra función al resultado. Por ejemplo, suponga que $g(x) = 3x$, $f(x) = x^2$ y $x = 2$. Entonces $g(2) = 3(2) = 6$. Así, g envía la entrada 2 a la salida 6:

$$2 \xrightarrow{g} 6.$$

Después, hacemos que la salida 6 se convierta en la entrada para f:

$$f(6) = 6^2 = 36.$$

De modo que f envía 6 al 36:

$$6 \xrightarrow{f} 36.$$

Aplicando primero g y después f, enviamos el 2 al 36:

$$2 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} 36.$$

De manera más general, reemplacemos el 2 por x, donde x está en el dominio de g (véase la fig. 3.5). Aplicando g a x, obtenemos el número $g(x)$, que debemos suponer está en el dominio de f. Aplicando f a $g(x)$, obtenemos $f(g(x))$, se lee "f de g de x", que está en el rango de f. Esta operación de aplicar g y después aplicar f al resultado define una función llamada "composición" (o función compuesta), la cual se denota por $f \circ g$. Esta función asigna al número de entrada x el número de salida $f(g(x))$. [Véase la flecha inferior en la fig. 3.5.]

De esta manera $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Es válido pensar que $f(g(x))$ es una función de una función.

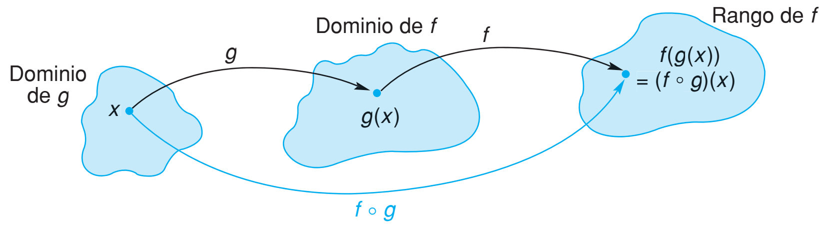


FIGURA 3.5 Composición de f con g.

Definición

Si f y g son funciones, la ***composición de f con g*** es la función $f \circ g$ definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

donde el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g, tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, podemos obtener una forma sencilla para $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2.$$

Por ejemplo, $(f \circ g)(2) = 9(2)^2 = 36$, como vimos anteriormente.

Principios en práctica 1
Composición

Un CD cuesta x dólares por mayoreo. El precio que el almacén paga, está dado por la función $s(x) = x + 3$. El precio que el cliente paga es $c(x) = 2x$, en donde x es el precio que el almacén paga. Escriba una función compuesta para determinar el precio del cliente como una función del precio de mayoreo.

EJEMPLO 2 Composición

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ *y* $g(x) = x + 1$. *Encontrar*

a. $(f \circ g)(x)$, **b.** $(g \circ f)(x)$.

Solución:

a. $(f \circ g)(x)$ es $f(g(x))$. Ahora g suma 1 a x, y f saca la raíz cuadrada del resultado. Así que,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{x + 1}.$$

El dominio de g son todos los números reales x y el de f todos los números reales no negativos. De aquí que el dominio de la composición sea todas las x para las que $g(x) = x + 1$ sea no negativa. Esto es, el dominio son todas las $x \geq -1$, o en forma equivalente, el intervalo $[-1, \infty)$.

b. $(g \circ f)(x)$ es $g(f(x))$. Ahora f toma la raíz cuadrada de x y g suma 1 al resultado. De esta manera g suma 1 a la $\sqrt{x}$ y tenemos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1.$$

El dominio de f son todas las $x \geq 0$ y el dominio de g son todos los reales. Por lo que el dominio de la composición son todas las $x \geq 0$, para las cuales $f(x) = \sqrt{x}$ es real, es decir, toda $x \geq 0$.

Advertencia Por lo general, $f \circ g \neq g \circ f$. En el ejemplo 2,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x + 1},$$

pero tenemos

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1.$$

Tampoco confunda $f(g(x))$ con $(fg)(x)$, esta última es el producto $f(x)g(x)$. Aquí

$$f(g(x)) = \sqrt{x+1},$$

pero

$$f(x)g(x) = \sqrt{x}(x+1).$$

EJEMPLO 3 Composición

Si $F(p) = p^2 + 4p - 3$ y $G(p) = 2p + 1$, determinar

a. $F(G(p))$, **b.** $G(F(1))$.

Solución:

a. $F(G(p)) = F(2p+1) = (2p+1)^2 + 4(2p+1) - 3$

$= 4p^2 + 12p + 2.$

b. $G(F(1)) = G(1^2 + 4 \cdot 1 - 3) = G(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$

En cálculo, a veces es necesario pensar en una función en particular como una composición de dos funciones más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Principios en práctica 2

Cómo expresar una función como una composición

Supóngase que el área de un jardín cuadrado es $g(x) = (x+3)^2$. Exprese g como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

EJEMPLO 4 Cómo expresar una función como una composición

Expresar $h(x) = (2x-1)^3$ como una composición.

Solución:
Observamos que $h(x)$ se obtiene al encontrar $2x - 1$ y elevar al cubo el resultado. Suponga que hacemos $g(x) = 2x - 1$ y $f(x) = x^3$. Entonces

$$h(x) = (2x-1)^3 = [g(x)]^3 = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

que da h como una composición de dos funciones.

Tecnología

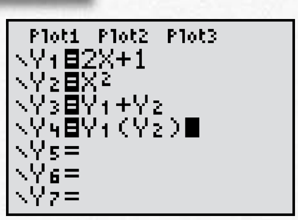


FIGURA 3.6 Y_3 y Y_4 son combinaciones de Y_1 y Y_2.

Dos funciones pueden combinarse usando una calculadora gráfica. Considere las funciones

$$f(x) = 2x + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2,$$

que introducimos como Y_1 y Y_2, según se muestra en la figura 3.6. La suma de f y g está dada por $Y_3 = Y_1 + Y_2$ y la composición de $f \circ g$ por $Y_4 = Y_1(Y_2)$. Por ejemplo, $f(g(3))$ se obtiene evaluando Y_4 en 3.

Ejercicio 3.3

1. Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x + 5$, encuentre lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f + g)(0)$. **c.** $(f - g)(x)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $(fg)(-2)$. **f.** $\dfrac{f}{g}(x)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(f \circ g)(3)$. **i.** $(g \circ f)(x)$.

2. Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 6 + x$, encuentre lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f - g)(x)$. **c.** $(f - g)(4)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $\dfrac{f}{g}(x)$. **f.** $\dfrac{f}{g}(2)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(g \circ f)(x)$. **i.** $(g \circ f)(2)$.

3. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + x$, encuentre lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f - g)(x)$. **c.** $(f - g)(-\frac{1}{2})$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $\dfrac{f}{g}(x)$. **f.** $\dfrac{f}{g}(-\frac{1}{2})$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(g \circ f)(x)$. **i.** $(g \circ f)(-3)$.

4. Si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 4$, encuentre lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f + g)(\frac{1}{2})$. **c.** $(f - g)(x)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $(fg)(4)$. **f.** $\dfrac{f}{g}(x)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(f \circ g)(100)$. **i.** $(g \circ f)(x)$.

5. Si $f(x) = 3x^2 + 6$ y $g(x) = 4 - 2x$, encuentre $f(g(2))$ y $g(f(2))$.

6. Si $f(p) = \dfrac{4}{p}$ y $g(p) = \dfrac{p-2}{3}$, encuentre $(f \circ g)(p)$ y $(g \circ f)(p)$.

7. Si $F(t) = t^2 + 7t + 1$ y $G(t) = \dfrac{2}{t-1}$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

8. Si $F(s) = \sqrt{s}$ y $G(t) = 3t^2 + 4t + 2$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

9. Si $f(w) = \dfrac{1}{w^2 + 1}$ y $g(v) = \sqrt{v + 2}$, encuentre $(f \circ g)(v)$ y $(g \circ f)(w)$.

10. Si $f(x) = x^2 + 3$, encuentre $(f \circ f)(x)$.

En los problemas del 11 al 16 determine las funciones f y g tales que $h(x) = f(g(x))$.

11. $h(x) = (4x - 3)^5$.

12. $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$.

13. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$.

14. $h(x) = (9x^3 - 5x)^3 - (9x^3 - 5x)^2 + 11$.

15. $h(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x+1}{3}}$.

16. $h(x) = \dfrac{x + 1}{(x + 1)^2 + 2}$.

---

17. Utilidad Un expendio de café vende una libra de café por \$9.75. Los gastos mensuales son \$4500 más \$4.25 por cada libra de café vendida.

a. Escriba una función $r(x)$ para el ingreso mensual total como una función del número de libras de café vendidas.

b. Escriba una función $e(x)$ para los gastos mensuales totales como una función del número de libras de café vendidas.

c. Escriba una función $(r - e)(x)$ para la utilidad mensual total como una función del número de libras de café vendidas.

18. Geometría Supóngase que el volumen de un cubo es $v(x) = (4x - 2)^3$. Exprese v como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

19. Negocios Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día, q, es una función del número de empleados, m, donde

$$q = f(m) = \frac{(40m - m^2)}{4}.$$

El ingreso total, r, que se recibe por la venta de q unidades, está dado por la función g, donde $r = g(q) = 40q$. Determine $(g \circ f)(m)$. ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

20. Sociología Se han hecho estudios concernientes a la relación estadística entre posición social, educación e ingresos de una persona.[5] Denotemos con S al valor numérico de la posición social con base en el ingreso anual I. Para cierto tipo de población suponga

$$S = f(I) = 0.45(I - 1000)^{0.53}.$$

Además, suponga que el ingreso de una persona I es una función del número de años de educación E, donde

$$I = g(E) = 7202 + 0.29E^{3.68}.$$

Determine $(f \circ g)(E)$. ¿Qué es lo que describe esta función?

[5] R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975).

En los problemas del 21 al 24, para las funciones f y g dadas, determine los valores funcionales indicados. Redondee las respuestas a dos decimales.

21. $f(x) = (4x - 13)^2$, $g(x) = 0.2x^2 - 4x + 3$; (a) $(f + g)(4.5)$, (b) $(f \circ g)(-2)$.

22. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$, $g(x) = 13.4x + 7.31$; (a) $\dfrac{f}{g}(10)$, (b) $(g \circ f)(-6)$.

23. $f(x) = x^{2/3}$, $g(x) = x^3 - 7$; (a) $(fg)(5)$, (b) $(g \circ f)(2.25)$.

24. $f(x) = \dfrac{5}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$; (a) $(f - g)(7.3)$, (b) $(f \circ g)(-4.17)$.

OBJETIVO Graficar ecuaciones y funciones en coordenadas rectangulares, determinar intersecciones, aplicar la prueba de la recta vertical y determinar el dominio y rango de una función a partir de una gráfica.

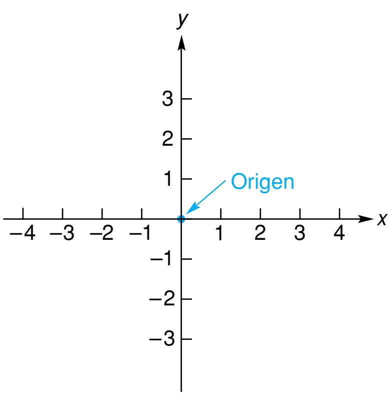


FIGURA 3.7 Ejes de coordenadas.

3.4 Gráficas en coordenadas rectangulares

Un **sistema de coordenadas rectangulares** (o **cartesiano**) nos permite especificar y localizar puntos en un plano. También nos proporciona una manera geométrica para representar ecuaciones de dos variables, así como funciones.

En un plano se trazan dos rectas de números reales, llamadas *ejes de coordenadas*, perpendiculares entre sí, y de modo que sus orígenes coincidan, como en la figura 3.7. Su punto de intersección se llama *origen* del sistema de coordenadas. Por ahora llamaremos a la recta horizontal el *eje x* y a la vertical el *eje y*. La distancia unitaria sobre el eje x no necesariamente es la misma que la del eje y.

El plano sobre el cual están los ejes de coordenadas se llama *plano de coordenadas rectangulares* o, simplemente, *plano x, y*. Todo punto en él puede marcarse para indicar su posición. Para marcar el punto P en la figura 3.8(a), trazamos líneas perpendiculares al eje x y al eje y que pasen por el punto P. Dichas líneas cruzan los ejes en 4 y 2, respectivamente. Por tanto, determinan dos números, 4 y 2, entonces decimos que las **coordenadas rectangulares** de P están dadas por el **par ordenado** (4, 2). La palabra *ordenado* es importante. En la figura 3.8(b) el punto correspondiente a (4, 2) no es el mismo que para (2, 4):

$$(4, 2) \neq (2, 4).$$

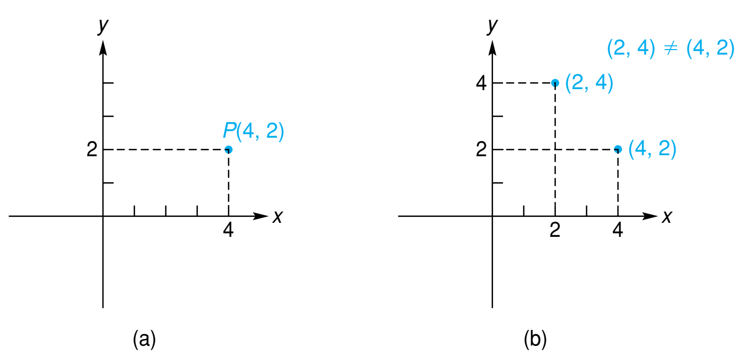


FIGURA 3.8 Coordenadas rectangulares.

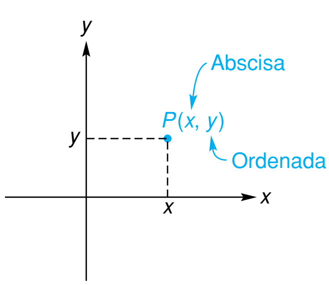


FIGURA 3.9 Coordenadas de P.

En general, si P es cualquier punto, entonces sus coordenadas rectangulares estarán dadas por un par ordenado de la forma (x, y). (Véase la fig. 3.9.) Llamamos a x la *abscisa* o *coordenada x* de P, y a y la *ordenada* o *coordenada y* de P.

De este modo, con cada punto en un plano coordenado podemos asociar exactamente un par ordenado (x, y) de números reales. También debe ser claro que con cada par ordenado (x, y) de números reales, podemos asociar exactamente un punto en ese plano. Ya que existe una *correspondencia uno a uno* entre los puntos en el plano y todos los pares ordenados de números reales, nos referimos al punto P con abscisa x y ordenada y, simplemente como el punto (x, y), o como $P(x, y)$. Además, usaremos las palabras *punto* y *par ordenado* en forma indistinta.

En la figura 3.10 están indicadas las coordenadas de varios puntos. Por ejemplo, el punto $(1, -4)$ está localizado una unidad a la derecha del eje y, y cuatro unidades abajo del eje x. El origen es $(0, 0)$. La coordenada x de todo punto en el eje y es 0 y la coordenada y de todo punto sobre el eje x es 0.

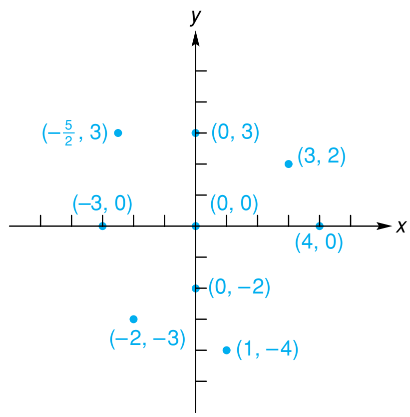


FIGURA 3.10 Coordenadas de puntos.

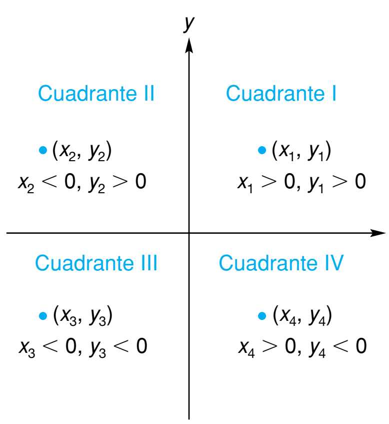


FIGURA 3.11 Cuadrantes.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* (véase la fig. 3.11). Por ejemplo, el cuadrante I consiste en todos los puntos (x_1, y_1) con $x_1 > 0$ y $y_1 > 0$. Los puntos sobre los ejes no están en ningún cuadrante.

Utilizando un sistema de coordenadas rectangulares, podemos representar geométricamente ecuaciones de dos variables. Por ejemplo, considere

$$y = x^2 + 2x - 3. \qquad \textbf{(1)}$$

Una solución de esta ecuación es un valor de x y uno de y que hagan verdadera a la ecuación. Por ejemplo, si $x = 1$, sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene

$$y = 1^2 + 2(1) - 3 = 0.$$

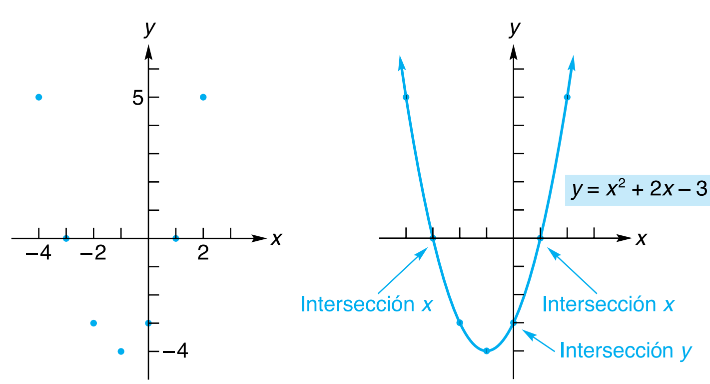
Así, una solución es, $x = 1$, $y = 0$. De manera análoga,

$$\text{si } x = -2, \quad \text{entonces} \quad y = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3,$$

y en esta forma $x = -2$, $y = -3$, también es una solución. Seleccionando otros valores para x podemos obtener más soluciones [véase la fig. 3.12(a)]. Debe quedar claro que existe una infinidad de soluciones para la ecuación (1).

x	y
−4	5
−3	0
−2	−3
−1	−4
0	−3
1	0
2	5

(a)



(b) (c)

FIGURA 3.12 Graficación de $y = x^2 + 2x - 3$.

Cada solución da origen a un punto (x, y) Por ejemplo, a $x = 1$ y $y = 0$ le corresponde $(1, 0)$. La **gráfica** de $y = x^2 + 2x - 3$ es la representación geométrica de todas sus soluciones. En la figura 3.12(b) hemos graficado los puntos correspondientes a las soluciones dadas en la tabla.

Ya que la ecuación tiene un número infinito de soluciones, parece imposible determinar su gráfica con precisión. Sin embargo, sólo estamos interesados en la forma general de la gráfica. Por esta razón graficamos suficientes puntos de modo que podamos hacernos una idea aproximada acerca de su forma. Entonces unimos esos puntos por medio de una curva suave siempre que las condiciones lo permitan. Al hacer esto, obtenemos la curva de la figura 3.12(c). Por supuesto, entre más puntos marquemos, mejor será nuestra gráfica. Aquí suponemos que la gráfica se extiende de manera indefinida hacia arriba, lo cual se indica con la flechas.

Con frecuencia, sólo decimos que la intersección y es –3 y las intersecciones x son –3 y 1.

El punto $(0, -3)$ en donde la curva interseca al eje y se llama *intersección y*. Los puntos $(-3, 0)$ y $(1, 0)$ en donde la curva interseca al eje x se llaman las *intersecciones x*. En general, tenemos la definición siguiente.

Definición

Una ***intersección x*** de la gráfica de una ecuación en x y y, es el punto donde la gráfica interseca al eje x. Una ***intersección y*** es el punto donde la gráfica interseca al eje y.

Para encontrar las intersecciones x de la gráfica de una ecuación en x y y, primero hacemos $y = 0$, y resolvemos para x la ecuación resultante. Para encontrar las intersecciones y, primero hacemos $x = 0$ y resolvemos para y. Por ejemplo, para la gráfica de $y = x^2 + 2x - 3$, determinemos las intersecciones x. Haciendo $x = 0$ x resolviendo para x obtenemos

$$0 = x^2 + 2x - 3,$$
$$0 = (x + 3)(x - 1),$$
$$x = -3, 1.$$

Así, las intersecciones x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$, como vimos antes. Si $x = 0$, entonces

$$y = 0^2 + 2(0) - 3 = -3.$$

De modo que $(0, -3)$ es la intersección y. Tenga en mente que para una intersección x su coordenada y es igual a cero, mientras que para una intersección y su coordenada x es igual a cero. Las intersecciones son útiles porque indican con precisión en dónde interseca la gráfica a los ejes.

■ *Principios en práctica 1*
Intersecciones y gráfica

Raquel ha ahorrado \$7250 para gastos del colegio. Ella planea gastar \$600 por mes de esta cuenta. Escriba una ecuación que represente la situación e identifique las intersecciones con los ejes.

EJEMPLO 1 Intersecciones y gráfica

Determinar las intersecciones x y y de la gráfica de $y = 2x + 3$ y hacer el bosquejo de su gráfica.

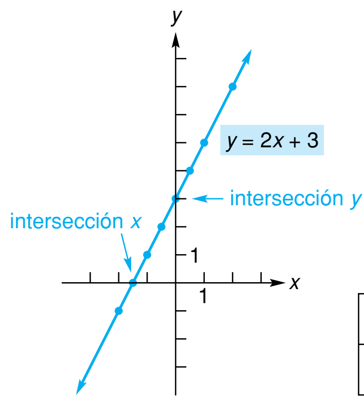
Solución: si $y = 0$, entonces

$$0 = 2x + 3 \qquad \text{o} \qquad x = -\frac{3}{2}.$$

Así, la intersección x es $(-\frac{3}{2}, 0)$. Si $x = 0$, entonces

$$y = 2(0) + 3 = 3.$$

De modo que la intersección y es $(0, 3)$. La figura 3.13 muestra una tabla de otros puntos sobre la gráfica y un bosquejo de ésta.



x	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	−1	2	−2
y	3	0	4	2	5	1	7	−1

FIGURA 3.13 Gráfica de $y = 2x + 3$.

Principios en práctica 2
Intersecciones y gráfica

El precio de admisión a un parque de diversiones es de \$24.95. Este pago permite al cliente utilizar todas las atracciones del parque tantas veces como quiera. Escriba una ecuación que represente la relación entre el número de recorridos, x, que el cliente hace, y el costo de admisión, y, para ese cliente. Describa la gráfica de esta ecuación e identifique las intersecciones con los ejes. Suponga que $x > 0$.

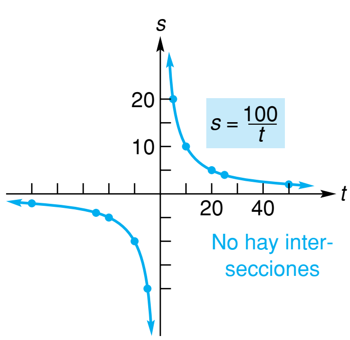
EJEMPLO 2 Intersecciones y gráfica

Determinar las intersecciones, si las hay, de la gráfica de $s = \dfrac{100}{t}$ *y hacer un bosquejo de la gráfica.*

Solución: para la gráfica marcaremos al eje horizontal con t y al eje vertical con s (véase la fig. 3.14). Puesto que t no puede ser igual a cero (la división entre cero no está definida), no existe intersección con el eje s. Así, la gráfica no tiene un punto correspondiente a $t = 0$. Además, no existe intersección con el eje t, ya que si $s = 0$, entonces la ecuación

$$0 = \frac{100}{t}$$

no tiene solución. La figura 3.14 muestra la gráfica. En general, la gráfica de $s = k/t$, en donde k es una constante diferente de cero, se conoce como *hipérbola*.



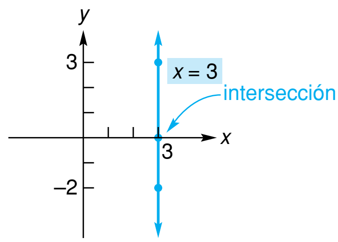
t	5	−5	10	−10	20	−20	25	−25	50	−50
s	20	−20	10	−10	5	−5	4	−4	2	−2

FIGURA 3.14 Gráfica de $s = \dfrac{100}{t}$.

EJEMPLO 3 Intersecciones y gráfica

Determinar las intersecciones de la gráfica de $x = 3$ *y hacer el bosquejo de la gráfica.*

Solución: podemos pensar en $x = 3$ como una ecuación en las variables x y y, si la escribimos como $x = 3 + 0y$. Aquí y puede tomar cualquier valor, pero x debe ser igual a 3. Puesto que $x = 3$ cuando $y = 0$, la intersección x es $(3, 0)$. No existe intersección y, ya que x no puede ser cero. (Véase la fig. 3.15.) La gráfica es una recta vertical.



x	3	3	3
y	0	3	−2

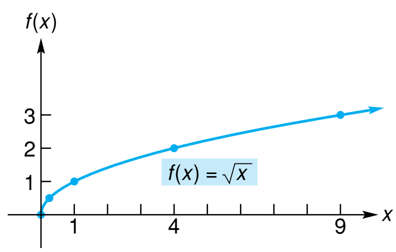
FIGURA 3.15 Gráfica de $x = 3$.

Además de representar a las funciones en ecuaciones, también podemos representarlas en un plano coordenado. Si f es una función con variable independiente x y variable dependiente y, entonces la gráfica de f sólo es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Ésta consiste en todos los puntos (x, y) o $(x, f(x))$, en donde x está en el dominio de f. El eje vertical puede marcarse como y o como $f(x)$, el cual se denomina **eje de los valores de la función.** *Siempre marcamos al eje horizontal con la variable independiente.*

EJEMPLO 4 Gráfica de la función raíz cuadrada

Hacer la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución: véase la figura 3.16. Marcamos al eje vertical como $f(x)$. Recuerde que $\sqrt{x}$ denota la raíz cuadrada *principal* de x. Así, $f(9) = \sqrt{9} = 3$ no ± 3. Tampoco podemos elegir valores negativos de x, ya que no queremos números imaginarios para $\sqrt{x}$. Esto es, debemos tener $x \geq 0$. Ahora consideramos las intersecciones. Si $f(x) = 0$, entonces $\sqrt{x} = 0$ o $x = 0$. También, si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$. Así, las intersecciones x y y son las mismas, es decir, $(0, 0)$.



x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
f(x)	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

FIGURA 3.16 Gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Principios en práctica 3
Gráfica de la función valor absoluto

Brett rentó una bicicleta en un negocio de alquiler de bicicletas, condujo a una velocidad constante de 12 mi/h durante 2.5 horas en una ruta para bicicletas, y después regresó por el mismo camino. Grafique la función valor absoluto para representar la distancia recorrida desde el negocio de alquiler de bicicletas, como una función del tiempo en el dominio apropiado.

EJEMPLO 5 Gráfica de la función valor absoluto

Graficar $p = G(q) = |q|$.

Solución: usamos la variable independiente q para marcar al eje horizontal. El eje de los valores de la función puede marcarse como $G(q)$ *o* p (véase la fig. 3.17). Note que las intersecciones p *y* q son el mismo punto, $(0, 0)$.

q	0	1	−1	3	−3	5	−5
p	0	1	1	3	3	5	5

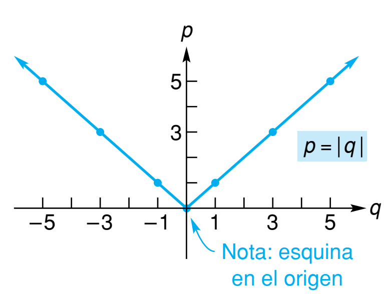


FIGURA 3.17 Gráfica de $p = |q|$.

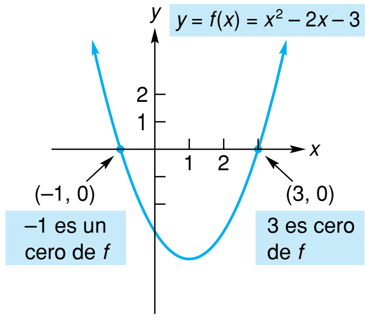


FIGURA 3.18 Ceros de una función.

En general, las soluciones reales para una ecuación $f(x) = 0$ son los ceros reales de f.

La noción de un *cero* es importante en el estudio de las funciones.

Definición

Un ***cero*** de una función f es cualquier valor de x para el cual $f(x) = 0$.

Por ejemplo, un cero de la función $f(x) = 2x - 6$ es 3 porque $f(3) = 2(3) - 6 = 0$. Aquí llamamos a 3 un cero *real,* ya que es un número real. Observamos que los ceros de f pueden encontrarse haciendo $f(x) = 0$ y resolviendo para x. Así, los ceros reales de una función son precisamente las intersecciones x de su gráfica, ya que es en estos puntos en que $f(x) = 0$.

Para mayor ilustración, la figura 3.18 muestra la gráfica de la función de $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$. Las intersecciones x de la gráfica son -1 y 3. Así, -1 y 3 son ceros de f, o lo que es equivalente a decir que -1 y 3 son las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Tecnología

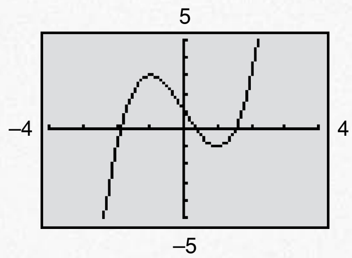


FIGURA 3.19 Las raíces de $x^3 - 3x + 1 = 0$ son aproximadamente -1.88, 0.35, y 1.53.

Para resolver la ecuación $x^3 = 3x - 1$ con una calculadora gráfica, primero expresamos la ecuación en la forma $f(x) = 0$.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Después graficamos f y luego estimamos las intersecciones x, ya sea utilizando el acercamiento (*zoom*) y rastreo, o por medio de la operación de extracción de raíces (véase la fig. 3.19). Observe que definimos nuestra ventana para $-4 \leq x \leq 4$ y $-5 \leq y \leq 5$.

La figura 3.20 muestra la gráfica de alguna función $y = f(x)$. El punto $(x, f(x))$ implica que, al número de entrada x en el eje horizontal, le corresponde el número de salida $f(x)$ en el eje vertical, como lo indica la flecha. Por ejemplo, a la entrada 4 le corresponde la salida 3, de modo que $f(4) = 3$.

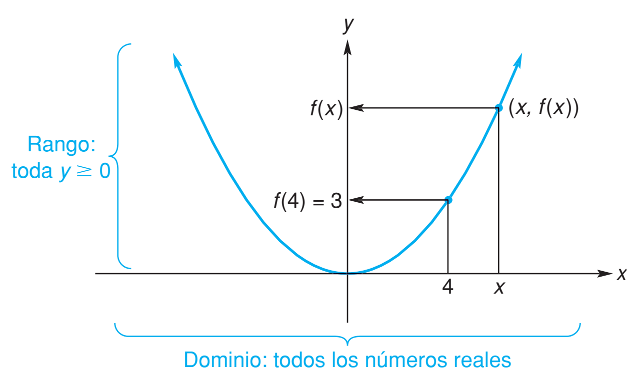


FIGURA 3.20 Dominio, rango y valores funcionales.

De la forma de la gráfica, parece razonable suponer que para cualquier valor de x existe un número de salida, de modo que el dominio de f son todos los números reales. Observe que el conjunto de todas las coordenadas y puntos en la gráfica es el conjunto de todos los números no negativos. Así, el rango de f es toda $y \geq 0$. Esto muestra que podemos hacer una deducción acertada acerca del dominio y rango de una función viendo su gráfica. *En general*, *el dominio consiste en todos los valores x que están incluidos en la gráfica*, *y* el *rango son todos los valores y en esa gráfica*. Por ejemplo, la figura 3.16 implica que el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{x}$ son todos los números no negativos. De la figura 3.17 queda claro que el dominio de $p = G(q) = |q|$ son todos los números reales y que el rango es toda $p \geq 0$.

EJEMPLO 6 Dominio, rango y valores de la función

La figura 3.21 muestra la gráfica de una función F. A la derecha de 4 se supone que la gráfica se repite indefinidamente. Entonces el dominio de F es toda $t \geq 0$. El rango es $-1 \leq s \leq 1$. Algunos valores de la función son

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = 1, \qquad F(2) = 0, \qquad F(3) = -1.$$

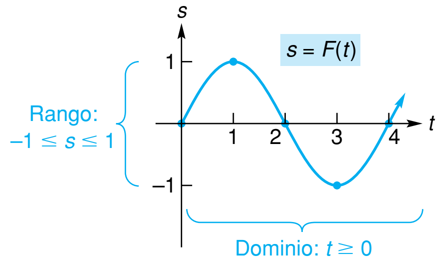


FIGURA 3.21 Dominio, rango y valores funcionales.

Tecnología

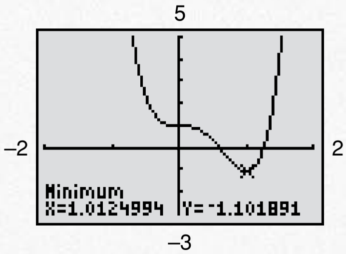


FIGURA 3.22 El rango de $f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$ es aproximadamente $[-1.10, \infty)$.

Utilizando una calculadora gráfica podemos estimar el rango de una función. La gráfica de

$$f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$$

se muestra en la figura 3.22. El punto más bajo en la gráfica corresponde al valor mínimo de $f(x)$, y el rango son todos los números reales mayores o iguales a este mínimo. Podemos estimar el valor mínimo para y utilizando rastreo y acercamiento (*zoom*), o bien seleccionando la operación "mínimo".

EJEMPLO 7 Gráfica de una función definida por partes

Graficar la función definida por partes

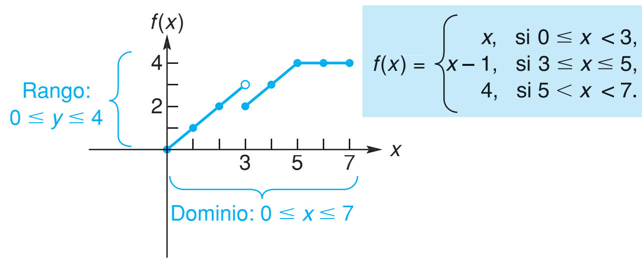
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ x - 1, & \text{si } 3 \leq x \leq 5, \\ 4, & \text{si } 5 < x \leq 7. \end{cases}$$

Principios en práctica 4

Gráfica de una función definida por partes

Para alentar el ahorro, una compañía de gas cobra dos tarifas. Usted paga \$0.53 por termia para un consumo de 0-70 termias, y \$0.74 por cada termia por encima de 70. Haga la gráfica de la función definida por partes, que representa el costo mensual de t termias de gas.

Solución: el dominio de f es $0 \le x \le 7$. La gráfica se da en la figura 3.23, donde el *punto hueco* significa que éste *no* está incluido en la gráfica. Observe que el rango de f son todos los números reales y tales que $0 \le y \le 4$.



x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	1	2	2	3	4	4	4

FIGURA 3.23 Gráfica de una función definida por partes.

Existe una manera fácil para determinar si una curva es o no la gráfica de una función. En la figura 3.24(a) observe que con la x dada existen asociados *dos* valores de y: y_1 y y_2. Así, la curva *no* es la gráfica de una función de x. Viéndolo de otra manera, tenemos la siguiente regla general llamada **prueba de la recta vertical.** Si una recta *vertical* L puede dibujarse de modo que interseque a una curva en al menos dos puntos, entonces la curva *no* es la gráfica de una función de x. Cuando tal recta vertical no puede dibujarse del mismo modo, la curva *sí es* la gráfica de una función de x. En consecuencia, las curvas de la figura 3.24 no representan funciones de x, pero las de la figura 3.25 sí.

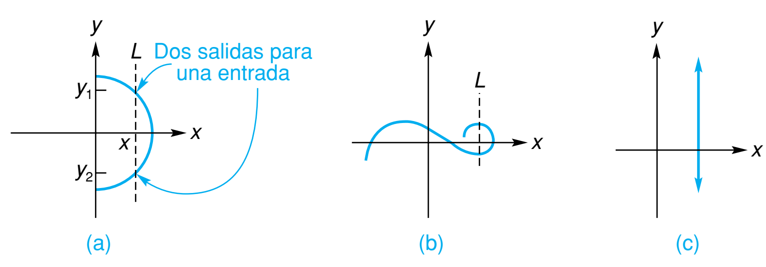


FIGURA 3.24 y no es una función de x.

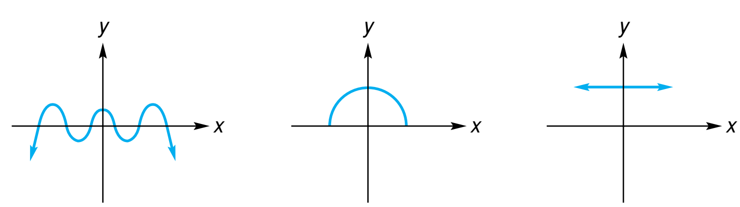


FIGURA 3.25 Funciones de x.

EJEMPLO 8 Una gráfica que no representa una función de *x*

Graficar $x = 2y^2$.

Solución: aquí es más fácil seleccionar valores de y y después encontrar los correspondientes a x. La figura 3.26 muestra la gráfica. Por medio de la prueba de la recta vertical, la ecuación $x = 2y^2$ no define una función de x.

x	0	2	2	8	8	18	18
y	0	1	−1	2	−2	3	−3

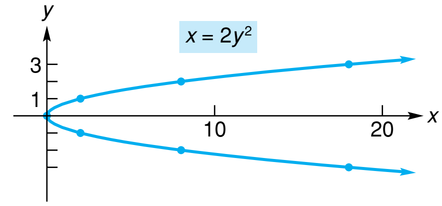


FIGURA 3.26 Gráfica de $x = 2y^2$.

Ejercicio 3.4

En los problemas 1 y 2 localice y marque cada uno de los puntos dados y, si es posible, indique el cuadrante al que pertenece cada punto.

1. $(2, 7)$, $(8, -3)$, $(-\frac{1}{2}, -2)$, $(0, 0)$.

2. $(-4, 5)$, $(3, 0)$, $(1, 1)$, $(0, -6)$.

3. La figura 3.27(a) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
  a. Estime $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, y $f(2)$.
  b. ¿Cuál es el dominio de f?
  c. ¿Cuál es el rango de f?
  d. ¿Cuál es un cero real de f?

4. La figura 3.27(b) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
  a. Estime $f(0)$ y $f(2)$.
  b. ¿Cuál es el dominio de f?
  c. ¿Cuál es el rango de f?
  d. ¿Cuál es un cero real de f?

5. La figura 3.28(a) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
  a. Estime $f(0)$, $f(1)$, y $f(-1)$.
  b. ¿Cuál es el dominio de f?
  c. ¿Cuál es el rango de f?
  d. ¿Cuál es un cero real de f?

6. La figura 3.28(b) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
  a. Estime $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, y $f(4)$.
  b. ¿Cuál es el dominio de f?
  c. ¿Cuál es el rango de f?
  d. ¿Cuál es un cero real de f?

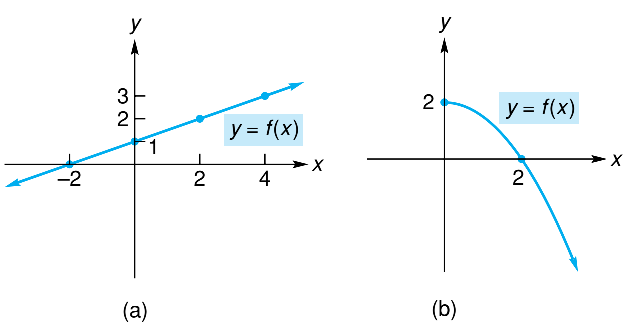


FIGURA 3.27 Diagrama para los problemas 3 y 4.

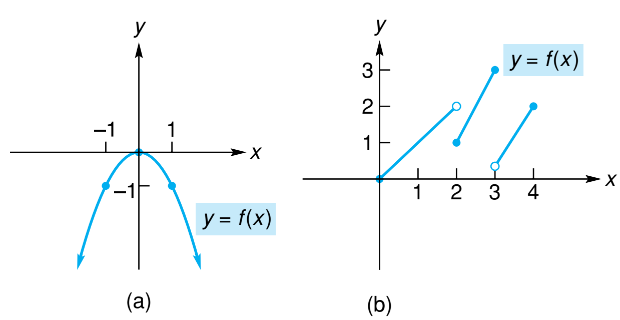


FIGURA 3.28 Diagrama para los problemas 5 y 6.

En los problemas del 7 al 20 determine las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y haga el bosquejo de la gráfica. Con base en su gráfica, ¿es y una función de x?, si es así, ¿cuál es su dominio y cuál su rango?

7. $y = 2x$. **8.** $y = x + 1$. **9.** $y = 3x - 5$. **10.** $y = 3 - 2x$.

11. $y = x^2$. **12.** $y = \frac{3}{x}$. **13.** $x = 0$. **14.** $y = 4x^2 - 16$.

15. $y = x^3$. **16.** $x = -4$. **17.** $x = -3y^2$. **18.** $x^2 = y^2$.

19. $2x + y - 2 = 0$. **20.** $x + y = 1$.

En los problemas del 21 al 34 grafique cada función y determine su dominio y rango. También determine las intersecciones.

21. $s = f(t) = 4 - t^2$. **22.** $f(x) = 5 - 2x^2$. **23.** $y = g(x) = 2$. **24.** $G(s) = -8$.

25. $y = h(x) = x^2 - 4x + 1$. **26.** $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$.

27. $f(t) = -t^3$. **28.** $p = h(q) = q(3 + q)$. **29.** $s = F(r) = \sqrt{r - 5}$. **30.** $F(r) = -\frac{1}{r}$.

31. $f(x) = |2x - 1|$. **32.** $v = H(u) = |u - 3|$. **33.** $F(t) = \frac{16}{t^2}$. **34.** $y = f(x) = \frac{2}{x - 4}$.

En los problemas del 35 al 38 grafique cada función definida por partes y determine su dominio y rango.

35. $c = g(p) = \begin{cases} p, & \text{si } 0 \leq p < 6, \\ 5, & \text{si } p \geq 6. \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } -1 \leq x < 2, \\ 9 - x^2, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

37. $g(x) = \begin{cases} x + 6, & \text{si } x \geq 3, \\ x^2, & \text{si } x < 3. \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ 4, & \text{si } 3 < x \leq 5, \\ x - 1, & \text{si } x > 5. \end{cases}$

39. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 3.29 representan funciones de x?

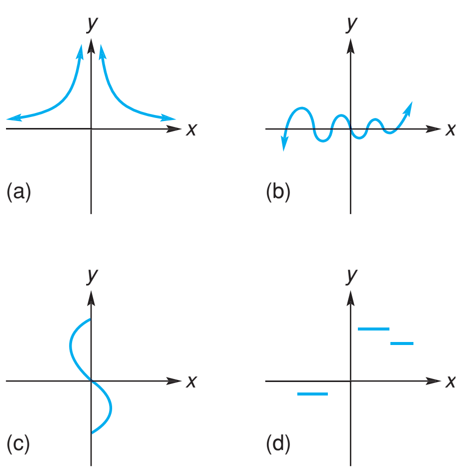


FIGURA 3.29 Diagrama para el problema 39.

40. Pagos de una deuda Janelle tiene cargos por $1800 en sus tarjetas de crédito. Ella planea pagarlas por medio de pagos mensuales de $175. Escriba una ecuación que represente el monto de su deuda, excluyendo los cargos financieros, e identifique las intersecciones con los ejes.

41. Determinación de precios Para alentar un flujo constante de clientes, un restaurante varía el precio de un platillo a lo largo del día. De 6:00 P.M. a 8:00 P.M., los clientes pagan el precio completo. En el almuerzo, de 10:30 A.M. hasta las 2:30 P.M., los clientes pagan la mitad del precio. De 2:30 P.M. hasta las 4:30 P.M., los clientes obtienen un dólar de ahorro del precio del almuerzo. De 4:30 P.M. hasta las 6:00 P.M., los clientes obtienen $5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. De 8:00 P.M. hasta el cierre, a las 10:00 P.M., los clientes obtienen $5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. Grafique la función definida por partes para representar el costo de un platillo a lo largo del día para un precio de cena de $18.

42. Programa de oferta Dado el siguiente programa de oferta (véase el ejemplo 5 de la sec. 3.1), grafique cada pareja cantidad-precio, seleccionando el eje horizontal para las cantidades posibles. Aproxime los puntos entre los datos por medio de una curva suave. El resultado es la *curva de la oferta*. Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio y la oferta (esto es, cuando se incrementa el precio, ¿qué le pasa a la cantidad ofrecida?). ¿El precio por unidad es una función de la cantidad de oferta?

Cantidad ofrecida por semana, q	Precio por unidad, p
30	$10
100	20
150	30
190	40
210	50

43. Programa de demanda La tabla siguiente se conoce como *programa de demanda*. Éste indica la cantidad de la marca X que los consumidores demandan (esto es, compran) cada semana a cierto precio (en dólares) por unidad. Trace cada par precio-cantidad seleccionando el eje vertical para los precios posibles y una los puntos con una curva suave. De esta manera , aproximamos los puntos entre los datos dados. El resultado se llama la *curva de demanda*. Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio de la marca X y la cantidad que será demandada (esto es, cuando el precio disminuye, ¿qué le pasa a la cantidad demandada?). El precio por unidad, ¿es una función de la cantidad demandada?

Cantidad demandada, q	Precio, por unidad, p
5	\$20
10	10
20	5
25	4

44. Inventario Haga un bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 1000, & \text{si } 0 \leq x < 7, \\ -100x + 1700, & \text{si } 7 \leq x < 14, \\ -100x + 2400, & \text{si } 14 \leq x < 21. \end{cases}$$

Una función como ésta podría describir el inventario y de una compañía en el instante x.

45. Psicología En un experimento psicológico sobre información visual, un sujeto observó brevemente un arreglo de letras, después se le pidió recordar tantas letras del arreglo como le fuese posible. El procedimiento se repitió varias veces. Suponga que y es el número promedio de letras recordadas de arreglos con x letras. La gráfica de los resultados aproximadamente se ajusta a la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ \frac{1}{2}x + 2, & \text{si } 4 < x \leq 5, \\ 4.5, & \text{si } 5 < x \leq 12. \end{cases}$$

Grafique esta función.[6]

En los problemas del 46 al 49 utilice una calculadora gráfica para determinar todas las raíces reales de la ecuación dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

46. $7x^3 + 2x = 3.$

47. $x(x^2 - 3) = x^4 + 1.$

48. $(9x + 3.1)^2 = 7.4 - 4x^2.$

49. $(x - 2)^3 = x^2 - 3.$

En los problemas del 50 al 53 utilice una calculadora gráfica para determinar todos los ceros reales de la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

50. $f(x) = x^3 + 5x + 7.$

51. $f(x) = x^4 - 2.5x^3 - 2.$

52. $g(x) = x^4 - 2.5x^3 + x.$

53. $g(x) = \sqrt{3}x^5 - 4x^2 + 1.$

En los problemas del 54 al 56 utilice una calculadora gráfica para determinar (a) el valor máximo de f(x) y (b) el valor mínimo de f(x) para los valores indicados de x. Redondee las respuestas a dos decimales.

54. $f(x) = x^4 - 4.1x^3 + x^2 + 10, \quad 1 \leq x \leq 4.$

55. $f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$

56. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 5}, \quad 3 \leq x \leq 5.$

57. A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{2}x^3 + 1.1x^2 + 4$ determine (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

58. Con base en la gráfica de $f(x) = 2 - 3x^3 - x^4$ determine (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) los ceros reales de f. Redondee los valores a dos decimales.

59. De la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + 9.1}{3.8 + \sqrt{x}}$, determine (a) el valor mínimo de $f(x)$, (b) el rango de f, (c) las intersecciones y (d) ¿Tiene f ceros reales? Redondee los valores a dos decimales.

60. Grafique $f(x) = \dfrac{4.1x^3 + \sqrt{2}}{x^2 - 3}$ para $2 \leq x \leq 5.$

Determine (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el valor mínimo de $f(x)$, (c) el rango de f y (d) todas las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

[6] Adaptado de G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).

OBJETIVO Estudiar la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen, y aplicar la simetría en el trazado de curvas.

3.5 SIMETRÍA

Examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es parte fundamental de las matemáticas. En esta sección examinaremos ecuaciones para determinar si sus gráficas tienen *simetría*. En un capítulo posterior se verá que el cálculo es de *gran* ayuda en la graficación, con base en él se determina la forma de una gráfica, ya que proporciona técnicas muy útiles para determinar si una curva se une o no de manera "suave" entre los puntos.

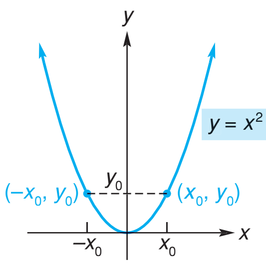


FIGURA 3.30 Simetría con respecto al eje y.

Considere la gráfica de $y = x^2$ en la figura 3.30. La parte a la izquierda del eje y es el reflejo (o imagen de espejo) de la parte de la derecha del mismo eje, y viceversa. Con mayor precisión, si (x_0, y_0) es cualquier punto sobre la gráfica, entonces el punto $(-x_0, y_0)$ también debe pertenecer a la gráfica. Decimos que esta gráfica es *simétrica con respecto al eje y*.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje y*** si sólo si $(-x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica cuando (x_0, y_0) está en ella.

EJEMPLO 1 Simetría con respecto al eje *y*

Utilice la definición anterior para demostrar que la gráfica de $y = x^2$ *es simétrica con respecto al eje y.*

Solución: suponga que (x_0, y_0) *es cualquier* punto de la gráfica de $y = x^2$. Entonces

$$y_0 = x_0^2.$$

Debemos mostrar que las coordenadas de $(-x_0, y_0)$ satisfacen $y = x^2$:

$$¿y_0 = (-x_0)^2?$$

$$¿y_0 = x_0^2?$$

Pero, de lo anterior sabemos que $y_0 = x_0^2$. Así, la gráfica *es* simétrica con respecto al eje y.

Cuando demostramos la simetría en el ejemplo 1, (x_0, y_0) pudo haber sido cualquier punto sobre la gráfica. Por conveniencia, de aquí en adelante omitiremos los subíndices. Esto significa que una gráfica es simétrica con respecto al eje y, si al reemplazar x por $-x$ en su ecuación, nos resulta una ecuación equivalente.

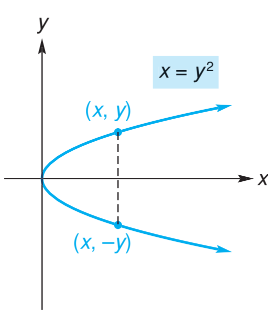


FIGURA 3.31 Simetría con respecto al eje x.

Otro tipo de simetría se muestra por medio de la gráfica de $x = y^2$ en la figura 3.31. Aquí la parte de la gráfica debajo del eje x es la reflexión con respecto del eje x, de la parte que se encuentra por arriba de éste, y viceversa. Si el punto (x, y) pertenece a la gráfica, entonces $(x, -y)$ también pertenece a ella. Esta gráfica se dice que es *simétrica con respecto al eje x*.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje x*** si y sólo si $(x, -y)$ pertenece a la gráfica cuando (x, y) pertenece a ella.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al eje x, si al reemplazar y por $-y$ resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, aplicando esta prueba a la gráfica de $x = y^2$ mostrada en la figura 3.31 se obtiene

$$x = (-y)^2,$$

$$x = y^2,$$

la cual es equivalente a la ecuación original. Así podemos afirmar que la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

Un tercer tipo de simetría, *simetría con respecto al origen*, se ilustra por la gráfica de $y = x^3$ (véase la fig. 3.32). Siempre que el punto (x, y) pertenezca a la gráfica, $(-x, -y)$ también pertenecerá a ella. Como resultado de esto, el segmento de línea que une a los puntos (x, y) y $(-x, -y)$ está bisecado por el origen.

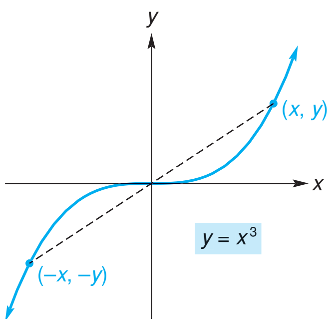


FIGURA 3.32 Simetría con respecto al origen.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al origen*** si y sólo si $(-x, -y)$ pertenece a la gráfica cuando (x, y) pertenece a ella.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al origen, si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$, resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, aplicando esta prueba a la gráfica de $y = x^3$ mostrada en la figura 3.32, se obtiene

$$\begin{aligned} -y &= (-x)^3, \\ -y &= -x^3, \\ y &= x^3, \end{aligned}$$

que es equivalente a la ecuación original. De acuerdo con esto, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

La tabla 3.1 resume las pruebas para la simetría. Cuando sabemos que una gráfica tiene simetría, podemos hacer su bosquejo con menos puntos de los que, de otra manera, serían necesarios.

TABLA 3.1 Pruebas para la simetría

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

EJEMPLO 2 Graficación con intersecciones y simetría

Probar la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen de $y = \frac{1}{x}$. Después determinar las intersecciones y hacer el bosquejo de la gráfica.

Solución:

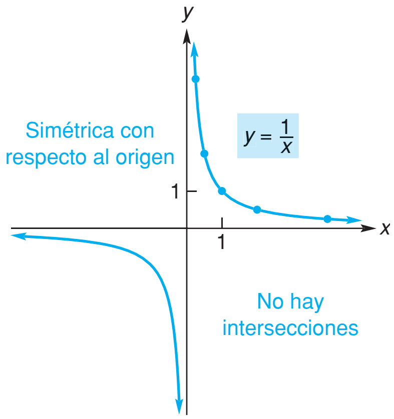
Simetría Con respecto al *eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1/x$ se obtiene

$$-y = \frac{1}{x} \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{x},$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por tanto, la gráfica *no es* simétrica con respecto al eje x.

Con respecto al *eje y:* al reemplazar x por $-x$ en $y = 1/x$ se obtiene

$$y = \frac{1}{-x} \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{x},$$



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

FIGURA 3.33 Gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$.

que no es equivalente a la ecuación dada. De este modo la gráfica *no es simétrica* con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1/x$, se obtiene

$$-y = \frac{1}{-x} \quad \text{o} \quad y = \frac{1}{x},$$

que es equivalente a la ecuación dada. Así, podemos afirmar que la gráfica *sí es* simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Como x no puede ser cero, la gráfica no tiene intersecciones con el eje y. Si y es 0, entonces $0 = 1/x$, pero esta ecuación no tiene solución. Por tanto, no existen intersecciones con el eje x.

Discusión Puesto que no existen intersecciones, la gráfica no puede intersecar a ninguno de los ejes. Si $x > 0$, sólo obtenemos puntos en el primer cuadrante. La figura 3.33 muestra la parte de la gráfica en el cuadrante I. Por simetría, reflejamos esa parte con respecto al origen para obtener toda la gráfica.

■

EJEMPLO 3 Graficación con intersecciones y simetría

Probar por la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen para $y = f(x) = 1 - x^4$. Después encontrar las intersecciones y hacer el bosquejo de la gráfica.

Solución:

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$-y = 1 - x^4 \quad \text{o} \quad y = -1 + x^4,$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no es* simétrica con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$y = 1 - (-x)^4 \quad \text{o} \quad y = 1 - x^4,$$

que sí es equivalente a la ecuación dada. De este modo afirmamos que la gráfica *sí es* simétrica con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$-y = 1 - (-x)^4, \qquad -y = 1 - x^4, \qquad y = -1 + x^4,$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no es* simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Para examinar las intersecciones con el eje x *hacemos* $y = 0$ en $y = 1 - x^4$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 - x^4 &= 0, \\ (1 - x^2)(1 + x^2) &= 0, \\ (1 - x)(1 + x)(1 + x^2) &= 0, \\ x = 1 \quad &\text{o} \quad x = -1. \end{aligned}$$

Por tanto, las intersecciones x son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Para examinar las intersecciones y, hacemos $x = 0$. Entonces $y = 1$, de modo que $(0, 1)$ es la única intersección y.

Discusión Si se grafican las intersecciones y algunos puntos (x, y) a la derecha del eje y, podemos hacer el bosquejo de *toda* la gráfica utilizando la simetría con respecto al eje y (véase la fig. 3.34).

x	y
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{175}{256}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{65}{16}$

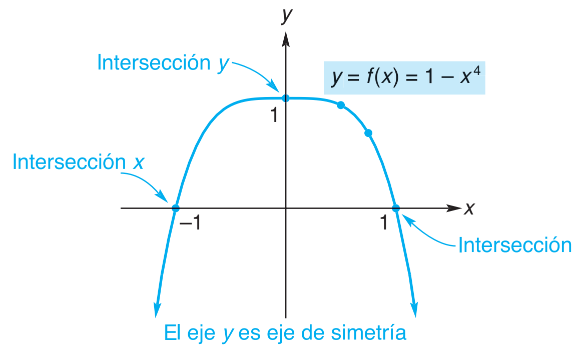


FIGURA 3.34 Gráfica de $y = 1 - x^4$.

En el ejemplo 3 mostramos que la gráfica de $y = f(x) = 1 - x^4$ no tiene simetría respecto al eje x. Con la excepción de la función constante $f(x) = 0$, *la gráfica de cualquier* ***función*** *$y = f(x)$ no puede ser simétrica con respecto al eje x,* ya que tal simetría implica dos valores de y para el mismo valor de x, lo cual viola la definición de función.

EJEMPLO 4 Graficación con intersecciones y simetría

Para la gráfica $4x^2 + 9y^2 = 36$, probar *por las intersecciones y simetrías*. *Hacer el bosquejo de la gráfica.*

Solución:

Intersecciones Si $y = 0$, entonces $4x^2 = 36$, de esta manera $x = \pm 3$. Por tanto, las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Si $x = 0$, entonces $9y^2 = 36$ y de esta manera, $y = \pm 2$. Por tanto, las intersecciones con el eje y son $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4x^2 + 9(-y)^2 = 36, \quad \text{o} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Ya que obtenemos la ecuación original, afirmamos que existe simetría con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4(-x)^2 + 9y^2 = 36, \quad \text{o} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Otra vez obtenemos la ecuación original, de modo que también existe simetría con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por x y y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36, \quad \text{o} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Ya que ésta es la ecuación original, la gráfica también es simétrica con respecto al origen.

Discusión En la figura 3.35 se grafican las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante. Después los puntos se unen por medio de una curva suave.

Los puntos del cuarto cuadrante se obtienen por simetría con respecto al eje x. Después, por simetría con respecto al eje y, se determina toda la gráfica. Existen otras formas de graficar la ecuación utilizando la simetría. Por ejemplo, después de graficar las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante, por simetría con respecto al origen podemos obtener el tercer cuadrante. Por simetría con respecto al eje x (o al eje y) podemos obtener la gráfica completa.

x	y
± 3	0
0	± 2
1	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$
2	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$

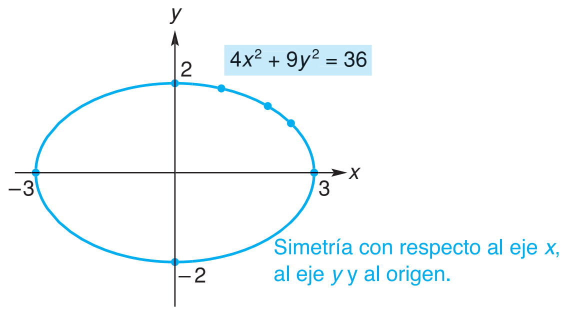


FIGURA 3.35 Gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Este conocimiento nos puede ayudar a ahorrar tiempo al verificar las simetrías.

En el ejemplo 4 la gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen. Con base en ella puede mostrarse que **para cualquier gráfica, si existen dos de los tres tipos de simetría, entonces el tipo restante también debe existir.**

Ejercicio 3.5

En los problemas del 1 al 16 determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También, pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. No haga el bosquejo de las gráficas.

1. $y = 5x$.
2. $y = f(x) = x^2 - 4$.
3. $2x^2 + y^2x^4 = 8 - y$.
4. $x = y^3$.
5. $9x^2 - 4y^2 = 36$.
6. $y = 7$.
7. $x = -2$.
8. $y = |2x| - 2$.
9. $x = -y^{-4}$.
10. $y = \sqrt{x^2 - 25}$.
11. $x - 4y - y^2 + 21 = 0$.
12. $x^3 + xy + y^2 = 0$.
13. $y = f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 5}$.
14. $x^2 + xy + y^2 = 0$.
15. $y = \dfrac{3}{x^3 + 8}$.
16. $y = \dfrac{x^4}{x + y}$.

En los problemas del 17 al 24 determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También, pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. Después haga el bosquejo de las gráficas.

17. $2x + y^2 = 4$.
18. $x = y^4$.
19. $y = f(x) = x^3 - 4x$.
20. $3y = 5x - x^3$.
21. $|x| - |y| = 0$.
22. $x^2 + y^2 = 16$.
23. $4x^2 + y^2 = 16$.
24. $x^2 - y^2 = 1$.

25. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 2 - 0.03x^2 - x^4$ es simétrica con respecto al eje y y después grafique la función. (a) Haga uso de la simetría en donde sea posible para encontrar todas las intersecciones. Determine (b) el valor máximo de $f(x)$, y (c) el rango de f. Redondee todos los valores a dos decimales.

26. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 5$ es simétrica con respecto al eje y y después grafique la función. Determine todos los ceros reales de f. Redondee sus respuestas a dos decimales.

OBJETIVO Familiarizarse con las formas de las gráficas de seis funciones básicas, y considerar la traslación, la reflexión y el alargamiento y contracción verticales de la gráfica de una función.

3.6 Traslaciones y reflexiones

Hasta ahora nuestro enfoque para graficar se ha basado en la graficación de puntos y en el uso de cualquier simetría que exista. Pero esta técnica no es necesariamente la preferida. Más adelante analizaremos gráficas utilizando otras técnicas. Sin embargo, como algunas funciones y sus gráficas asociadas aparecen con mucha frecuencia, para propósitos ilustrativos, encontramos útil memorizarlas. La figura 3.36 muestra seis de tales funciones.

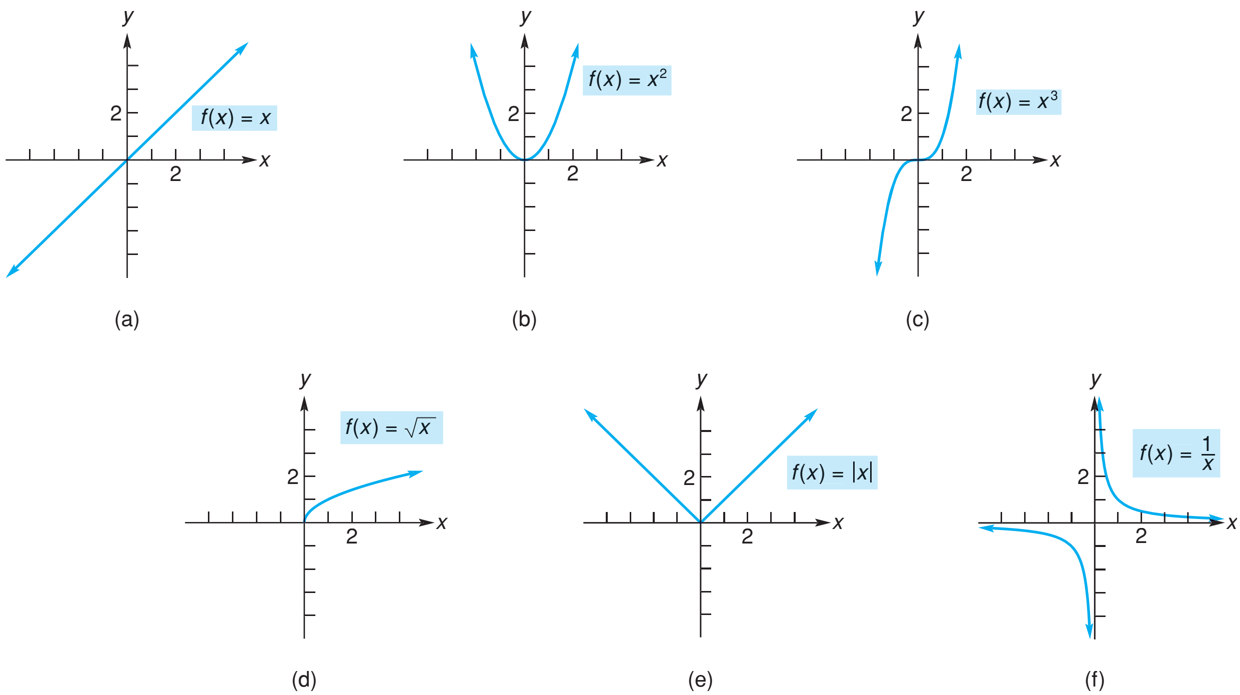


FIGURA 3.36 Funciones utilizadas con frecuencia.

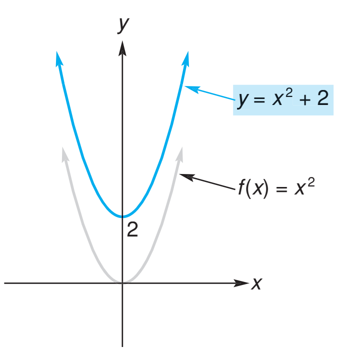


FIGURA 3.37 Gráfica de $y = x^2 + 2$.

A veces, al modificar una función mediante una manipulación *algebraica*, la gráfica de la nueva función puede obtenerse a partir de la gráfica de la función original realizando una manipulación *geométrica*. Por ejemplo, podemos utilizar la gráfica de $f(x) = x^2$ para graficar $y = x^2 + 2$. Observe que $y = f(x) + 2$. Por tanto, para cada x, la ordenada correspondiente para la gráfica de $y = x^2 + 2$, es 2 unidades mayor que la ordenada para la gráfica de $f(x) = x^2$. Esto significa que la gráfica de $y = x^2 + 2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada o *trasladada*, 2 unidades hacia arriba (véase la fig. 3.37). Decimos que la gráfica de $y = x^2 + 2$ es una *transformación* de la gráfica de $f(x) = x^2$. La tabla 3.2 presenta una lista de los tipos básicos de transformaciones.

EJEMPLO 1 Traslación horizontal

Hacer el bosquejo de la gráfica de $y = (x - 1)^3$.

Solución: observamos que $(x - 1)^3$ es x^3 *con* x reemplazada por $x - 1$. Por tanto, si $f(x) = x^3$, entonces $y = (x - 1)^3 = f(x - 1)$, que tiene la forma $f(x - c)$, donde $c = 1$. De la tabla 3.2, la gráfica de $y = (x - 1)^3$ es la gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada una unidad a la derecha (véase la fig. 3.38).

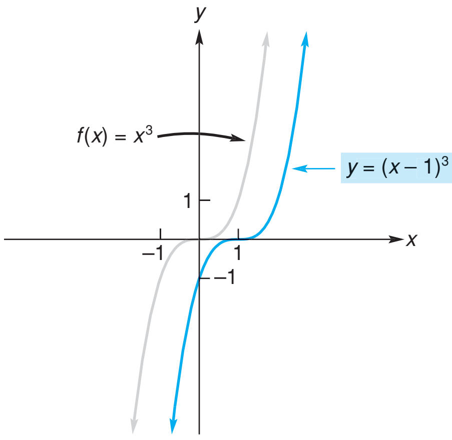


FIGURA 3.38 Gráfica de $y = (x-1)^3$.

TABLA 3.2 Transformaciones, $c > 0$

Ecuación	Cómo transformar la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación
1. $y = f(x) + c$	Desplazar c unidades hacia arriba
2. $y = f(x) - c$	Desplazar c unidades hacia abajo
3. $y = f(x - c)$	Desplazar c unidades hacia la derecha
4. $y = f(x + c)$	Desplazar c unidades hacia la izquierda
5. $y = -f(x)$	Reflejar con respecto al eje x
6. $y = f(-x)$	Reflejar con respecto al eje y
7. $y = cf(x), c > 1$	Alargar verticalmente alejándose del eje x por un factor de c
8. $y = cf(x), c < 1$	Contraer verticalmente hacia el eje x por un factor de c

EJEMPLO 2 Contracción y reflexión

Hacer el bosquejo de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Solución: podemos resolver este problema en dos pasos. Primero, observe que $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ es $\sqrt{x}$ multiplicada por $\frac{1}{2}$. Así, si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}f(x)$, que tiene la forma $cf(x)$, con $c = \frac{1}{2}$. De modo que la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ es la gráfica de f comprimida verticalmente hacia el eje x por un factor de $\frac{1}{2}$ (transformación 8, tabla 3.2; véase la fig. 3.39). Segundo, el signo menos en $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ provoca una reflexión en la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ con respecto al eje x (transformación 5, tabla 3.2; véase la fig. 3.39).

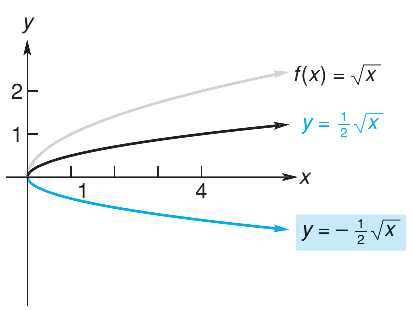


FIGURA 3.39 Para graficar $y = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$, comprima $y = \sqrt{x}$ y refleje el resultado con respecto al eje x.

Ejercicio 3.6

En los problemas del 1 al 12 utilice las gráficas de las funciones de la figura 3.36 y las técnicas de transformación, para graficar las funciones dadas.

1. $y = x^2 - 2.$ **2.** $y = -x^2.$ **3.** $y = \dfrac{1}{x-2}.$ **4.** $y = \sqrt{x+2}.$

5. $y = \dfrac{2}{3x}.$ **6.** $y = |x| + 1.$ **7.** $y = |x+1| - 2.$ **8.** $y = -\frac{1}{2}x^3.$

9. $y = 1 - (x-1)^2.$ **10.** $y = (x-1)^2 + 1.$ **11.** $y = \sqrt{-x}.$ **12.** $y = \dfrac{5}{2-x}.$

En los problemas del 13 al 16 describa qué debe hacerse a la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación dada.

13. $y = f(x-4) + 3.$ **14.** $y = f(x+3) - 4.$ **15.** $y = f(-x) - 5.$ **16.** $y = -f(x+3).$

17. Grafique la función $y = \sqrt[3]{x} + k$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones verticales comparadas con la primera gráfica.

18. Grafique la función $y = \sqrt[3]{x+k}$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones horizontales comparadas con la primera gráfica.

19. Grafique la función $y = k\sqrt[3]{x}$ para $= 1, 2, \frac{1}{2}$ y 3. Observe el alargamiento y la contracción verticales comparadas con la primera gráfica. Grafique la función para $k = -2$. Observe que la gráfica es la misma que la obtenida por medio de un alargamiento, en un factor de 2, de la reflexión de $y = \sqrt[3]{x}$ con respecto al eje x.

3.7 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 3.1 función dominio rango variable independiente variable dependiente $f(x)$ valor funcional cociente de diferencia, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ función de demanda función de oferta

Sección 3.2 función constante función polinomial función lineal función cuadrática función definida por partes valor absoluto $|x|$ factorial $r!$ función racional

Sección 3.3 $f + g$ $f - g$ fg f/g $f \circ g$ composición de funciones

Sección 3.4 sistema de coordenadas rectangulares ejes de coordenadas origen plano x,y par ordenado (x, y) coordenadas de un punto coordenada x coordenada y abscisa ordenada cuadrante gráfica de una ecuación intersección x intersección y gráfica de una función eje de valores de la función ceros de una función prueba de la recta vertical

Sección 3.5 simetría con respecto al eje x simetría con respecto al eje y simetría con respecto al origen

Resumen

Una función f es una regla de correspondencia que asigna exactamente un número de salida $f(x)$ a cada número de entrada x. Por lo regular, una función se especifica por medio de una ecuación que indica lo que debe hacerse a una entrada x para obtener $f(x)$. Para obtener un valor particular $f(a)$ de la función, reemplazamos cada x en la ecuación por a.

El dominio de una función consiste en todos los números de entrada, y el rango consiste en todos los números de salida. A menos que se diga lo contrario, el dominio de f consiste en todos los números reales x para los cuales $f(x)$ también es un número real.

Algunos tipos especiales de funciones son: funciones constantes, funciones polinomiales y funciones racionales. Una función que está definida por medio de más de una expresión se denomina función definida por partes.

En economía, las funciones de oferta y las funciones de demanda dan una correspondencia entre el precio p de un producto y el número de unidades q del producto, que los productores (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio.

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar una suma, diferencia, producto, cociente o composición como sigue:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Un sistema de coordenadas rectangulares nos permite representar de manera geométrica ecuaciones en dos variables, así como funciones. La gráfica de una ecuación en x y y consiste en todos los puntos (x, y) que corresponden a las soluciones de la ecuación. Para obtenerla trazamos un número suficiente de puntos y los conectamos (en donde sea apropiado), de modo que la forma básica de la gráfica sea visible. Los puntos en donde la gráfica interseca al eje x y al eje y se denominan intersección x e intersección y, respectivamente. Una intersección x se encuentra al hacer y igual a cero y resolver para x; una intersección y se encuentra al hacer x igual a cero y resolver para y.

La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ y consiste en todos los puntos $(x, f(x))$ tales que x está en el dominio de f. Los ceros de f son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Con base en la gráfica de una función, es fácil determinar el dominio y el rango.

Para verificar que una gráfica representa a una función utilizamos la prueba de la recta vertical. Una recta vertical no puede cortar a la gráfica de una función en más de un punto.

Cuando la gráfica de una ecuación tiene simetría, el efecto *de imagen de espejo* nos permite bosquejar la gráfica con menos puntos que de otra forma serían necesarios. Las pruebas para simetría son las siguientes:

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

Algunas veces la gráfica de una función puede obtenerse a partir de una función conocida, por medio de un desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo, un desplazamiento horizontal hacia la derecha o hacia la izquierda, una reflexión con respecto al eje x o al eje y, o bien un alargamiento o una contracción vertical en dirección del eje x. Tales transformaciones están indicadas en la tabla 3.2 de la sección 3.6.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugiere utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 6 proporcione el dominio de cada función.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

2. $g(x) = x^2 - 6|x|$.

3. $F(t) = 7t + 4t^2$.

4. $G(x) = 18$.

5. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

6. $H(s) = \dfrac{\sqrt{s-5}}{4}$.

En los problemas del 7 al 14 determine los valores funcionales para la función dada.

7. $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$; $f(0), f(-3), f(5), f(t)$.

8. $g(x) = 4$; $g(4), g(\frac{1}{100}), g(-156), g(x+4)$.

9. $G(x) = \sqrt{x-1}$; $G(1), G(5), G(t+1), G(x^3)$.

10. $F(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$; $F(-1), F(0), F(5), F(x+3)$.

11. $h(u) = \dfrac{\sqrt{u+4}}{u}$; $h(5), h(-4), h(x), h(u-4)$.

12. $H(s) = \dfrac{(s-4)^2}{3}$; $H(-2), H(7), H(\frac{1}{2}), H(x^2)$.

13. $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x < 2 \\ 8 - x^2, & \text{si } x > 2; \end{cases}$

$f(4), f(-2), f(0), f(10)$.

14. $h(q) = \begin{cases} q, & \text{si } -1 \le q < 0 \\ 3 - q, & \text{si } 0 \le q < 3; \\ 2q^2, & \text{si } 3 \le q \le 5 \end{cases}$

$h(0), h(4), h(-\frac{1}{2}), h(\frac{1}{2})$.

En los problemas del 15 al 18 determine (a) $f(x+h)$ y (b) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; simplifique sus respuestas.

15. $f(x) = 3 - 7x$.

16. $f(x) = 11x^2 + 4$.

17. $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$.

18. $f(x) = \dfrac{7}{x+1}$.

19. Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, determine lo siguiente:

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f + g)(4)$. **c.** $(f - g)(x)$.
d. $(fg)(x)$. **e.** $(fg)(1)$. **f.** $\frac{f}{g}(x)$.
g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(f \circ g)(5)$. **i.** $(g \circ f)(x)$.

20. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 1$, determine lo siguiente:

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f - g)(x)$. **c.** $(f - g)(-3)$.
d. $(fg)(x)$. **e.** $\frac{f}{g}(x)$. **f.** $\frac{f}{g}(2)$.
g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(g \circ f)(x)$. **i.** $(g \circ f)(-4)$.

En los problemas del 21 al 24 determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

21. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x - 1$.

22. $f(x) = \frac{x + 1}{4}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

23. $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $g(x) = x^3$.

24. $f(x) = 2$, $g(x) = 3$.

En los problemas 25 y 26 encuentre las intersecciones de la gráfica de cada ecuación, y examine la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. No haga un bosquejo de las gráficas.

25. $y = 2x - 3x^3$.

26. $\frac{xy^2}{x^2 + 1} = 4$.

En los problemas 27 y 28 encuentre las intersecciones con el eje x y con el eje y de la gráfica de cada ecuación. También examine la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. Después haga un bosquejo de las gráficas.

27. $y = 9 - x^2$.

28. $y = 3x - 7$.

En los problemas del 29 al 32 haga la gráfica de cada función y proporcione su dominio y rango. También determine las intersecciones.

29. $G(u) = \sqrt{u + 4}$.

30. $f(x) = |x| + 1$.

31. $y = g(t) = \frac{2}{|t - 4|}$.

32. $g(t) = \sqrt{4t}$

---

33. Grafique la siguiente función definida por partes y dé su dominio y rango:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

34. Utilice la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = \sqrt{x - 2} - 1$.

35. Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

36. Ecuación de tendencia Las ventas anuales proyectadas (en dólares) de un producto nuevo están dadas por la ecuación $S = 150{,}000 + 3000t$, en donde t es el tiempo en años, contados a partir de 2001. Tal ecuación se denomina *ecuación de tendencia*. Determine las ventas anuales proyectadas para 2006. ¿Es S una función de t?

37. En la figura 3.40, ¿cuáles gráficas representan funciones de x?

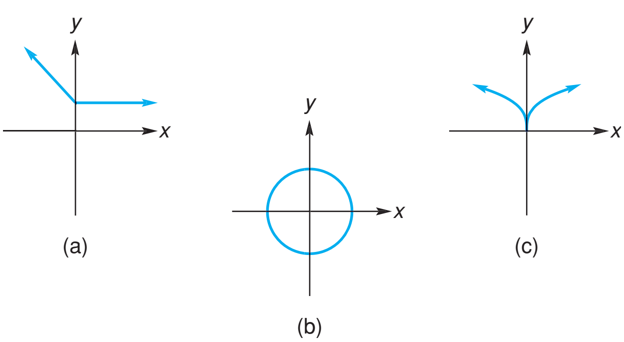


FIGURA 3.40 Diagrama para el problema 37.

38. Si $f(x) = (4x^{2.3} - 3x^3 + 7)^5$, determine (a) $f(2)$ y (b) $f(2.3)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

39. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$5x^3 - 7x^2 = 4x - 2.$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

40. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$x^4 - 4x^3 = (2x - 1)^2.$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. Determine todos los ceros reales de

$$f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1.$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

42. Determine el rango de

$$f(x) = \begin{cases} -2.5x - 4, & \text{si } x < 0, \\ 6 + 4.1x - x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

43. Con base en la gráfica de $f(x) = -x^3 + 0.04x + 7$, encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

44. Con base en la gráfica de $f(x) = \sqrt{x + 3}(x^2 - 1)$, encuentre (a) el valor mínimo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) todos los ceros reales de f. Redondee los valores a dos decimales.

45. Grafique $y = f(x) = x^3 + x^k$, para $k = 0, 1, 2, 3$ y 4. ¿Para cuáles valores de k la gráfica tiene (a) simetría con respecto al eje y, (b) simetría con respecto al origen?

Aplicación práctica
Una experiencia con los impuestos

Quizá haya escuchado el viejo dicho: "Sólo existen dos cosas seguras en la vida, la muerte y los impuestos". Aquí veremos cómo podemos aplicar las funciones a una de estas "verdades", a saber, los impuestos.

Se utilizará la tasa de impuesto federal de 2000 de Estados Unidos, para una pareja casada que presenta una declaración conjunta. Suponga que usted quiere determinar una fórmula para la función f, tal que $f(x)$ es el impuesto en dólares sobre un ingreso gravable de x dólares. El impuesto está basado en varios rangos de ingreso gravable. De acuerdo con la tabla Y-1 del Servicio Interno de Recaudación (IRS, por sus siglas en inglés; véase la fig. 3.41):

- Si x es \$0 o menor, el impuesto es \$0.
- Si x es mayor a \$0, pero no mayor a \$43,850, el impuesto es 15% de x.
- Si x es mayor a \$43,850, pero no mayor a \$105,950, el impuesto es \$6,577.50 más 28% del monto superior a \$43,850.
- Si x es mayor a \$105,950, pero no mayor a \$161,450, el impuesto es \$23,965.50 más 31% del monto superior a \$105,950.
- Si x es mayor a \$161,450, pero no mayor a \$288,350, el impuesto es \$41,170.50 más 36% del monto superior a \$161,450.
- Si x es mayor a \$288,350, el impuesto es \$86,854.50 más 39.6% del monto superior a \$288,350.

Forma Y-1 — Utilice si su estado civil es **Casado por bienes mancomunados** o **viudo(a)**

Si el monto de la forma 1040, línea 38, es *mayor a–*	*Pero no mayor a–*	Ingrese en la forma 1040, línea 39		*del monto que exceda a–*
\$0	\$43,850	-----------	**15%**	**\$0**
43,850	105,950	**\$6,577.50 +**	**28%**	**43,850**
105,950	161,450	**23,695.50 +**	**31%**	**105,950**
161,450	288,350	**41,170.50 +**	**36%**	**161,450**
288,350	-----------	**86,854.50 +**	**39.6%**	**288,350**

FIGURA 3.41 Servicio Interno de Recaudación 2000 Forma Y-1.

Es claro que si $x \leq 0$, entonces

$$f(x) = 0.$$

Si $0 < x \leq 43{,}850$, entonces

$$f(x) = 0.15x.$$

Obsérvese que el impuesto sobre el ingreso gravable de \$43,850 es

$$f(43{,}850) = 0.15(43{,}850) = 6{,}577.50.$$

Si $43{,}850 < x \leq 105{,}950$, entonces el monto por encima de 43,850 es $x - 43{,}850$, de modo que

$$f(x) = 6{,}577.50 + 0.28(x - 43{,}850).$$

Como 6,577.50 es 15% de 43,850, para un ingreso gravable entre \$43,850 y \$105,950, en esencia, usted paga impuesto a la tasa de 15% por los primeros \$43,850 de ingreso y a la tasa de 28% por el ingreso restante. Obsérvese que el impuesto sobre \$105,950 es

$$\begin{aligned} f(105{,}950) &= 6{,}577.50 + 0.28(105{,}950 - 43{,}850) \\ &= 6{,}577.50 + 0.28(62{,}100) \\ &= 6{,}577.50 + 17{,}388 = 23{,}965.50. \end{aligned}$$

Si $105{,}950 < x \leq 161{,}450$, entonces la cantidad que excede a 105,950 es $x - 105{,}950$, de modo que

$$f(x) = 23{,}965.50 + 0.31(x - 105{,}950).$$

Ya que \$23,965.50 es el impuesto sobre \$105,950, para un ingreso gravable entre \$105,950 y \$161,450, usted está pagando impuestos a la tasa de 15% por los primeros \$43,850 de ingreso, a la tasa de 28% por los siguientes \$62,100 de ingreso $(105{,}950 - 43{,}850 = 62{,}100)$, y a la tasa de 31% por el ingreso restante. Nótese que el impuesto sobre \$161,450 es

$$\begin{aligned} f(161{,}450) &= 23{,}965.50 + 0.31(161{,}450 - 105{,}950) \\ &= 23{,}965.50 + 0.31(55{,}500) \\ &= 23{,}965.50 + 17{,}205 \\ &= 41{,}170.50. \end{aligned}$$

Si $161{,}450 < x \leq 288{,}350$, entonces el monto que excede a 161,450 es $x - 161{,}450$, de modo que

$$f(x) = 41{,}170.50 + 0.36(x - 161{,}450).$$

Ya que \$41,170.50 es el impuesto sobre \$161,450, para un ingreso gravable entre \$161,450 y \$288,350, usted está pagando impuestos a una tasa de 15% por los primeros \$43,850 de ingreso, a la tasa de 28% por los siguientes \$62,100 de ingreso, a la tasa de 31% por los siguientes \$55,500 de ingreso $(161{,}450 - 105{,}950 = 55{,}500)$ y a la tasa de 36% por el ingreso restante. Obsérvese que el impuesto sobre \$288,350 es

$$\begin{aligned} f(288{,}350) &= 41{,}170.50 + 0.36(288{,}350 - 161{,}450) \\ &= 41{,}170.50 + 0.36(126{,}900) \\ &= 41{,}170.50 + 45{,}684 = 86{,}854.50. \end{aligned}$$

Si $x > 288{,}350$, entonces el monto sobre 288,350 es $x - 288{,}350$, de modo que

$$f(x) = 86{,}854.50 + 0.396(x - 288{,}350).$$

Como \$86,854.50 es el impuesto sobre \$288,350, para un ingreso gravable superior a \$288,350, usted está pagando impuesto a una tasa de 15% por los primeros \$43,850 de ingreso, a la tasa de 28% por los siguientes \$62,100 de ingreso, a la tasa de 31% por los siguientes \$55,500 de ingreso, a la tasa de 36% por los siguientes \$126,900 de ingreso y a la tasa de 39.6% por el ingreso restante.

Al resumir todos estos resultados obtenemos la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 0.15x, & \text{si } 0 < x \leq 43{,}850, \\ 6{,}577.50 + 0.28(x - 43{,}850), & \text{si } 43{,}850 < x \leq 105{,}950, \\ 23{,}965.50 + 0.31(x - 105{,}950), & \text{si } 105{,}950 < x \leq 161{,}450, \\ 41{,}170.50 + 0.36(x - 161{,}450), & \text{si } 161{,}450 < x \leq 288{,}350, \\ 86{,}854.50 + 0.396(x - 288{,}350), & \text{si } x > 288{,}350. \end{cases}$$

Con estas fórmulas, usted puede representar geométricamente la función de impuesto al ingreso, como en la figura 3.42.

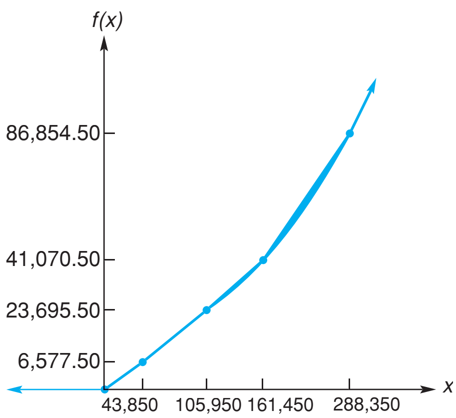


FIGURA 3.42 Función de impuesto al ingreso.

Ejercicios

Utilice la función de impuesto al ingreso f anterior, para determinar el impuesto sobre el ingreso gravable en el año 2000.

1. \$120,000.
2. \$35,350.
3. \$290,000.
4. \$162,700.

5. Busque la forma Y-1 más reciente en `www.irs.gov` (Inst 1040 Tax Tables) y repita los problemas 1 a 4 utilizando esa información.

6. ¿Por qué fue significativo que $f(105{,}950) = \$23{,}965.50$, $f(161{,}450) = \$41{,}170.50$, etcétera?

CAPÍTULO 4

Rectas, parábolas y sistemas de ecuaciones

Para el problema de la contaminación industrial, algunas personas recomiendan una solución basada en el mercado: dejar que los fabricantes contaminen, pero hacer que ellos paguen por ese privilegio. Entre mayor contaminación mayor pago, o gravamen. La idea es dar a los fabricantes un incentivo para no contaminar más de lo necesario.

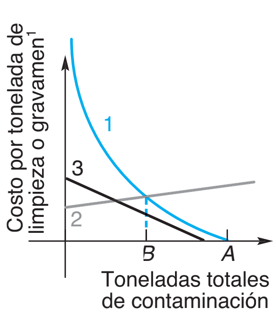
¿Funciona este enfoque? En la figura de abajo, la línea 1 representa el costo por tonelada de reducción de contaminación. Una compañía que contamina de manera indiscriminada puede casi siempre reducir en alguna forma su contaminación a un costo mínimo. Sin embargo, conforme la cantidad de contaminación se reduce, el costo por tonelada se eleva y eventualmente se dispara. Esto se ilustra por medio de la línea que se eleva indefinidamente conforme las toneladas totales de contaminación producidas se aproximan a cero.

La línea 2 es un esquema de gravamen que es menos estricto con operaciones que se efectúan con limpieza, pero que cobra una cuota creciente por tonelada conforme la cantidad de contaminación total crece.

En contraste, la línea 3 es un esquema en el que los fabricantes que contaminan poco pagan un gravamen alto por tonelada, mientras que los grandes contaminadores pagan menos por tonelada (pero más de manera global). Surgen preguntas de equidad, ¿qué tan bien funcionará cada esquema como una medida de control de contaminación?

Al enfrentarse con un impuesto por contaminar, una compañía tiende a disminuir la contaminación *mientras ahorre más en costos de impuestos que en costos por reducción de contaminación*. Los esfuerzos por reducción continúan hasta que el ahorro de impuestos y los costos por reducción empiezan a equilibrarse.

La segunda mitad de este capítulo estudia los sistemas de ecuaciones. Aquí, las líneas 1 y 2 representan un sistema de ecuaciones, y las líneas 1 y 3 representan un sistema alterno. Una vez que haya aprendido cómo resolver sistemas de ecuaciones, puede regresar a esta página y verificar que el esquema de la línea 2 conduce a una reducción de contaminación de una cantidad A a una cantidad B, mientras que el esquema de la línea 3 no funciona como una medida de control de contaminación, ya que deja el nivel de contaminación en el nivel A.



[1]Técnicamente, este es el costo *marginal* por tonelada (véase la sec. 10.3).

OBJETIVO Desarrollar la noción de pendiente y formas diferentes de las ecuaciones de rectas.

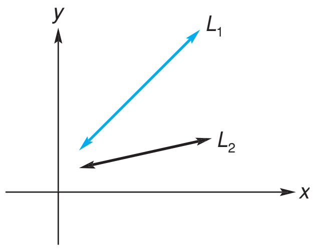


FIGURA 4.1 La recta L_1 está "más inclinada" que la recta L_2.

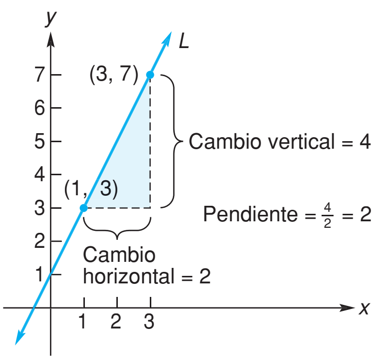


FIGURA 4.2 Pendiente de una recta.

No tener pendiente no significa tener una pendiente igual a cero.

4.1 Rectas

Pendiente de una recta

Muchas relaciones entre cantidades pueden representarse de manera adecuada por medio de rectas. Una característica de una recta es su "inclinación". Por ejemplo, en la figura 4.1 la recta L_1, crece más rápido que la recta L_2 cuando va de izquierda a derecha. En este sentido L_1 está más inclinada con respecto a la horizontal.

Para medir la inclinación de una recta usamos la noción de *pendiente*. En la figura 4.2, conforme nos movemos a lo largo de la recta L, de (1,3) a (3,7), la coordenada x aumenta de 1 a 3 y la coordenada y aumenta de 3 a 7. La tasa promedio de cambio de y con respecto a x es la razón

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

La razón de 2 significa que por cada unidad de aumento en x hay un *aumento* de 2 unidades en y. Debido a este aumento, la recta *se eleva* de izquierda a derecha. Puede demostrarse que sin importar cuáles puntos de L se elijan para calcular el cambio en y al cambio en x, el resultado siempre es 2, al cual llamamos *pendiente* de la recta.

Definición

Sean (x_1,y_1) y (x_2, y_2) dos puntos diferentes sobre una recta no vertical. La pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left(= \frac{\textit{cambio vertical}}{\textit{cambio horizontal}} \right). \tag{1}$$

Una recta vertical no tiene pendiente, porque cualesquiera dos puntos sobre ella deben tener $x_1 = x_2$ [véase la fig. 4.3 (a)], lo que da un denominador de cero en la ecuación (1). Para una recta horizontal, cualesquiera dos puntos deben tener $y_1 = y_2$ [véase la fig. 4.3 (b)]. Esto da un numerador de cero en la ecuación (1) y, por tanto, la pendiente de la recta es cero.

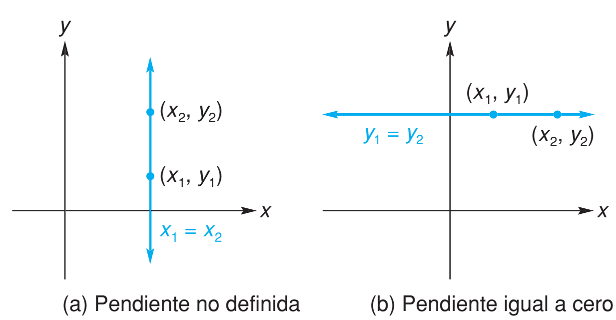


FIGURA 4.3 Rectas vertical y horizontal.

Este ejemplo muestra cómo puede interpretarse la pendiente.

EJEMPLO 1 Relación precio-cantidad

La recta de la figura 4.4 *muestra la relación entre el precio p de un artículo* (*en dólares*) *y la cantidad q de artículos* (*en miles*), *que los consumidores comprarán a ese precio. Determinar e interpretar la pendiente.*

■ ***Principios en práctica 1***
Relación precio-tiempo

Un doctor compró un automóvil nuevo en 1991 por $32,000. En 1994, él lo vendió a un amigo en $26,000. Dibuje una recta que muestre la relación entre el precio de venta del automóvil y el año en el que se vendió. Determine e interprete la pendiente.

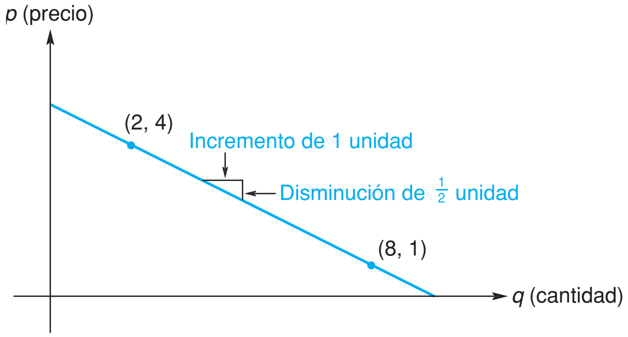


FIGURA 4.4 Recta precio-cantidad.

Solución: en la fórmula de la pendiente (1), remplazamos x por q y y por p. En la figura 4.4, podemos seleccionar cualquier punto como (q_1, p_1). Haciendo $(2, 4) = (q_1, p_1)$ y $(8, 1) = (q_2, p_2)$, tenemos

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{1-4}{8-2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

La pendiente es negativa, $-\frac{1}{2}$. Esto significa que por cada unidad que aumente la cantidad (un millar de artículos), corresponde una **disminución** de $\frac{1}{2}$ dólar en el precio de cada artículo. Debido a esta disminución, la recta **desciende** de izquierda a derecha.

En resumen, podemos caracterizar la orientación de una recta por su pendiente:

Pendiente cero:	recta horizontal.
Pendiente indefinida:	recta vertical.
Pendiente positiva:	recta que sube de izquierda a derecha.
Pendiente negativa:	recta que desciende de izquierda a derecha.

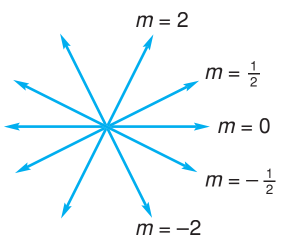


FIGURA 4.5 Pendientes de rectas.

En la figura 4.5 se muestran rectas con diferentes pendientes. Observe que *entre más cercana a cero es la pendiente, está más cerca de ser horizontal. Entre mayor valor absoluto tenga la pendiente, la recta estará más cercana a ser vertical*. Notamos que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o son verticales.

Ecuaciones de rectas

Si conocemos un punto y la pendiente de una recta, podemos encontrar una ecuación cuya gráfica sea esa recta. Suponga que la recta L tiene pendiente m y pasa a través del punto (x_1, y_1). Si (x, y) es *cualquier* otro punto sobre L (véase la fig. 4.6), podemos encontrar una relación algebraica entre x y y. Utilizando la fórmula de la pendiente con los puntos (x_1, y_1) y (x, y), se obtiene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad \textbf{(2)}$$

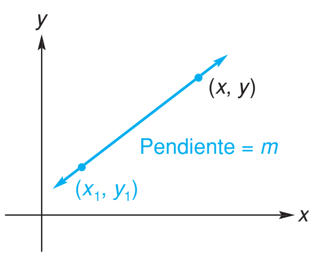


FIGURA 4.6 Recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m.

Todo punto de L satisface la ecuación (2). También es cierto que todo punto que satisfaga la ecuación (2) debe pertenecer a L. Por tanto, la ecuación (2) es una ecuación para L, y se le da un nombre especial:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

es la ***forma punto-pendiente*** *de una ecuación de la recta que pasa por* (x_1, y_1) *y tiene pendiente m.*

Principios en práctica 2

Forma punto-pendiente

Un nuevo programa de matemáticas aplicadas en una universidad ha aumentado su matrícula en 14 estudiantes por año, durante los últimos cinco años. Si el programa tenía matriculados 50 estudiantes en su tercer año, ¿cuál es una ecuación para el número de estudiantes S en el programa como una función del número de años T desde su inicio?

EJEMPLO 2 Forma punto-pendiente

Determinar una ecuación de la recta que tiene pendiente 2 *y pasa por el punto* $(1, -3)$.

Solución: al utilizar una forma punto-pendiente con $m = 2$ y $(x_1, y_1) = (1, -3)$ se obtiene

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1), \\ y - (-3) &= 2(x - 1), \\ y + 3 &= 2x - 2, \end{aligned}$$

que puede reescribirse como

$$2x - y - 5 = 0.$$

Una ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados se puede encontrar con facilidad, como lo muestra el ejemplo 3.

Principios en práctica 3

Determinación de una recta a partir de dos puntos

Determine una ecuación de la recta que pasa por los puntos dados. Una temperatura de 41°F es equivalente a 5°C y una temperatura de 77°F es equivalente a 25°C.

EJEMPLO 3 Determinación de una recta a partir de dos puntos

Encontrar una ecuación de la recta que pasa por $(-3, 8)$ *y* $(4, -2)$.

Solución:

Estrategia: primero determinamos la pendiente de la recta a partir de los puntos dados. Después sustituimos la pendiente y uno de los puntos en la forma punto-pendiente.

La recta tiene pendiente

$$m = \frac{-2 - 8}{4 - (-3)} = -\frac{10}{7}.$$

Utilizando una forma punto-pendiente con $(-3, 8)$ como (x_1, y_1) se obtiene

$$\begin{aligned} y - 8 &= -\tfrac{10}{7}[x - (-3)], \\ y - 8 &= -\tfrac{10}{7}(x + 3), \\ 7y - 56 &= -10x - 30, \end{aligned}$$

o

$$10x + 7y - 26 = 0.$$

Seleccionar $(4, -2)$ como (x_1, y_1) daría un resultado equivalente.

Recuerde que un punto $(0, b)$ donde una gráfica interseca al eje y es llamado una intersección y (véase la fig. 4.7). Si se conocen la pendiente m y la intersección y, b, de una recta, una ecuación para la recta es [utilizando una forma punto-pendiente con $(x_1, y_1) = (0, b)$]

$$y - b = m(x - 0).$$

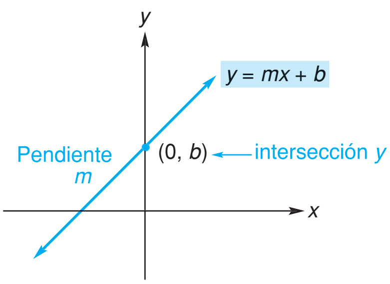


FIGURA 4.7 Recta con pendiente m e intersección y igual a b.

> **Principios en práctica 4**
> **Determinación de la pendiente e intersección con el eje y de una recta**
>
> Una fórmula para la dosis recomendada (en miligramos) de medicamento para un niño de t años de edad es $y = \frac{1}{24}(t + 1)a$, en donde a es la dosis para un adulto. Un medicamento para aliviar el dolor que se puede comprar sin prescripción médica tiene $a = 1000$. Determine la pendiente y la intersección con el eje y de esta ecuación.

Al resolver para y se obtiene $y = mx + b$, llamada la *forma pendiente-ordenada al origen* de una ecuación de la recta:

> $$y = mx + b$$
>
> *es la* ***forma pendiente-ordenada al origen*** *de una ecuación de la recta con pendiente m e intersección b con el eje y.*

EJEMPLO 4 Forma pendiente-ordenada al origen

Encontrar una ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y igual a –4.

Solución: al utilizar la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$ con $m = 3$ y $b = -4$, se obtiene

$$y = 3x + (-4),$$
$$y = 3x - 4.$$

EJEMPLO 5 Determinación de la pendiente e intersección con el eje y de una recta

Hallar la pendiente y la intersección y de la recta con ecuación $y = 5(3 - 2x)$.

Solución:

> **Estrategia:** reescribiremos la ecuación de modo que tenga la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$. Así, la pendiente es el coeficiente de x y la intersección y es el término constante.

Tenemos

$$y = 5(3 - 2x),$$
$$y = 15 - 10x,$$
$$y = -10x + 15.$$

Por tanto, $m = -10$ y $b = 15$, de modo que la pendiente es -10 y la intersección y es 15.

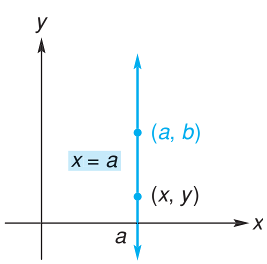


FIGURA 4.8 Recta vertical que pasa por (a, b).

Si una recta *vertical* pasa por (a, b) (véase la fig. 4.8), entonces cualquier otro punto (x, y) pertenece a la recta si y sólo si $x = a$. La coordenada y puede tener cualquier valor. De aquí que una ecuación de la recta es $x = a$. En forma análoga, una ecuación de la recta *horizontal* que pasa por (a, b) es $y = b$ (véase la fig. 4.9). Aquí la coordenada x puede tener cualquier valor.

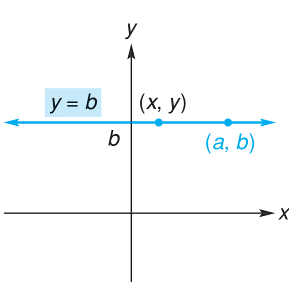


FIGURA 4.9 Recta horizontal que pasa por (a, b).

EJEMPLO 6 Ecuaciones de rectas horizontales y verticales

a. Una ecuación de la recta vertical que pasa por $(-2, 3)$ es $x = -2$. Una ecuación de la recta horizontal que pasa por $(-2, 3)$ es $y = 3$.

b. Los ejes x y y son rectas horizontal y vertical, respectivamente. Puesto que $(0, 0)$ pertenece a ambos ejes, una ecuación del eje x es $y = 0$ y una del eje y es $x = 0$.

De nuestro análisis podemos demostrar que toda línea recta es la gráfica de una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes, y A y B no son ambas cero. Llamamos a ésta la *ecuación lineal general* (o *ecuación de primer grado*) **en las variables x y y,** y se dice que x y y están **relacionadas linealmente.** Por ejemplo, una ecuación lineal general para $y = 7x - 2$ es $(-7)x + (1)y + (2) = 0$. Recíprocamente, la gráfica de una ecuación lineal general es una recta.

La tabla 4.1 proporciona un buen resumen para usted.

No confunda las formas de las ecuaciones de las rectas horizontales y verticales. Recuerde cuál tiene la forma x = constante y cuál de ellas tiene la forma y = constante.

TABLA 4.1 Formas de ecuaciones de líneas rectas

Forma punto pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente ordenada al origen	$y = mx + b$
Forma lineal general	$Ax + By + C = 0$
Recta vertical	$x = a$
Recta horizontal	$y = b$

Principios en práctica 5
Conversión entre formas de ecuaciones de rectas

Determine una forma lineal general de la ecuación de conversión Fahrenheit-Celsius cuya forma punto pendiente es $F = \frac{9}{5}C + 32$.

EJEMPLO 7 Conversión entre formas de ecuaciones de rectas

a. *Hallar una forma lineal general de la recta cuya forma pendiente-ordenada al origen es*

$$y = -\tfrac{2}{3}x + 4.$$

Solución: al dejar un miembro que sea igual a cero, tenemos

$$\frac{2}{3}x + y - 4 = 0,$$

que es la forma lineal general con $A = \frac{2}{3}$, $B = 1$ y $C = -4$. Una forma lineal general alterna puede obtenerse quitando fracciones:

Esto ilustra que una forma lineal general de una recta no es única.

$$2x + 3y - 12 = 0.$$

b. *Hallar la forma pendiente-ordenada al origen de la recta que tiene una forma lineal general* $3x + 4y - 2 = 0$.

Solución: queremos la forma $y = mx + b$, de modo que resolvemos la ecuación dada para y. Tenemos

$$3x + 4y - 2 = 0,$$
$$4y = -3x + 2,$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2},$$

que es la forma pendiente-ordenada al origen. Notamos que la recta tiene pendiente de $-\frac{3}{4}$ e intersección con el eje y igual a $\frac{1}{2}$.

Principios en práctica 6
Gráfica de una ecuación lineal general

Haga un bosquejo de la gráfica de la ecuación de conversión Fahrenheit-Celsius que encontró en el principio en práctica 5. ¿Cómo puede utilizar esta gráfica para convertir una temperatura Celsius a Fahrenheit?

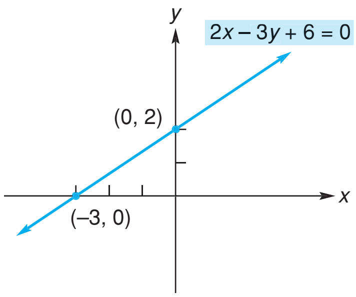


FIGURA 4.10 Gráfica de $2x - 3y + 6 = 0$.

EJEMPLO 8 Graficación de una ecuación lineal general

Hacer el bosquejo de la gráfica $2x - 3y + 6 = 0$.

Solución:

Estrategia: ya que ésta es una ecuación lineal general, su gráfica es una línea recta. Por tanto, sólo necesitamos determinar dos puntos diferentes a fin de hacer el bosquejo. Encontraremos las intersecciones.

Si $x = 0$, entonces $-3y + 6 = 0$, de modo que la intersección y es 2. Si $y = 0$, entonces $2x + 6 = 0$, de modo que la intersección x es -3. Ahora podemos dibujar la recta que pasa por $(0, 2)$ y $(-3, 0)$. (Véase la fig. 4.10.)

Tecnología

Para graficar la ecuación del ejemplo 8 con una calculadora gráfica, primero expresamos a y en términos de x:

$$2x - 3y + 6 = 0,$$
$$3y = 2x + 6,$$
$$y = \tfrac{1}{3}(2x + 6).$$

En esencia, y se expresa como una función de x; la gráfica se muestra en la figura 4.11.

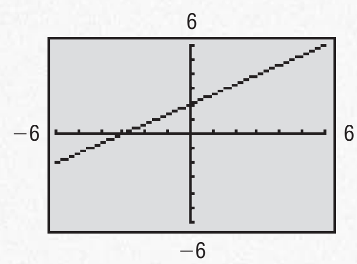


FIGURA 4.11 Gráfica de $2x - 3y + 6 = 0$. a partir de una calculadora.

Rectas paralelas y perpendiculares

Como se estableció previamente, existe una regla para rectas paralelas:

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o si ambas son verticales.

También existe una regla para rectas perpendiculares. Vea otra vez la figura 4.5 y observe que la recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ es perpendicular a la recta con pendiente 2. El hecho de que la pendiente de cada una de estas rectas sea el recíproco negativo de la pendiente de la otra recta, no es coincidencia, como lo establece la siguiente regla.

Rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 *y* m_2 *son perpendiculares entre sí, si y sólo si,*

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Además, una recta horizontal y una vertical son perpendiculares entre sí.

Principios en práctica 7
Rectas paralelas y perpendiculares

Muestre que un triángulo con vértices en $A(0,0)$, $B(6,0)$ y $C(7,7)$ no es un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 9 Rectas paralelas y perpendiculares

La figura 4.12 muestra dos rectas que pasan por $(3,-2)$. Una es paralela a la recta $y = 3x + 1$, y la otra es perpendicular a ella. Determinar las ecuaciones de estas rectas.

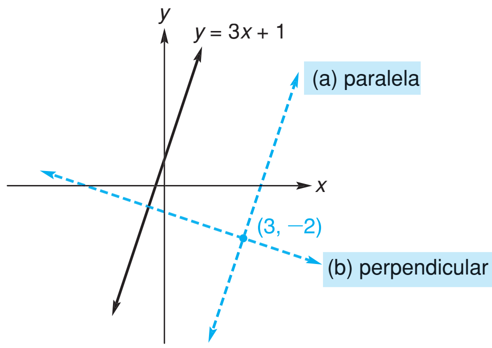


FIGURA 4.12 Rectas paralela y perpendicular a $y = 3x + 1$ (ejemplo 9).

Solución: la pendiente de $y = 3x + 1$ es 3. Por tanto, la recta que pasa por $(3,-2)$, que es *paralela* a $y = 3x + 1$, también tiene pendiente 3. Utilizando la forma punto-pendiente, obtenemos

$$y - (-2) = 3(x - 3),$$
$$y + 2 = 3x - 9,$$
$$y = 3x - 11.$$

La pendiente de la recta *perpendicular* a $y = 3x + 1$ debe ser $-\frac{1}{3}$ (el recíproco negativo de 3). Utilizando la forma punto-pendiente, obtenemos

$$y - (-2) = -\tfrac{1}{3}(x - 3),$$
$$y + 2 = -\tfrac{1}{3}x + 1,$$
$$y = -\tfrac{1}{3}x - 1.$$

Ejercicio 4.1

En los problemas del 1 al 8 halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

1. $(4,1), (7,10)$.
2. $(-3,11), (2,1)$.
3. $(4,-2), (-6,3)$.
4. $(2,-4), (3,-4)$.
5. $(5,3), (5,-8)$.
6. $(0,-6), (3,0)$.
7. $(5,-2), (4,-2)$.
8. $(1,-7), (9,0)$.

En los problemas del 9 al 24 determine una ecuación lineal general $(Ax + By + C = 0)$ de la recta que tiene las propiedades indicadas, y haga el bosquejo de cada recta.

9. Pasa por $(2,8)$ y tiene pendiente 6.
10. Pasa por el origen y tiene pendiente -5.
11. Pasa por $(-2,5)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$.
12. Pasa por $(-\frac{5}{2},5)$ y tiene pendiente $\frac{1}{3}$.
13. Pasa por $(-6,1)$ y $(1,4)$.
14. Pasa por $(7,1)$ y $(7,-5)$.
15. Pasa por $(3,-1)$ y $(-2,-9)$.
16. Pasa por $(0,0)$ y $(2,3)$.
17. Tiene pendiente 2 y su intersección con el eje y es 4.
18. Tiene pendiente 5 y su intersección con el eje y es -7.
19. Tiene pendiente de $-\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje y es -3.
20. Tiene pendiente 0 y su intersección con el eje y es $-\frac{1}{2}$.

21. Es horizontal y pasa por $(-3, -2)$.

22. Es vertical y pasa por $(-1, 4)$.

23. Pasa por $(2, -3)$ y es vertical.

24. Pasa por el origen y es horizontal.

En los problemas del 25 al 34 encuentre, si es posible, la pendiente y la intersección con el eje y de la recta determinada por la ecuación, y haga el bosquejo de la gráfica.

25. $y = 4x - 6$.

26. $x - 1 = 5$.

27. $x + 2y - 3 = 0$.

28. $y + 4 = 7$.

29. $x = -5$.

30. $x - 9 = 5y + 3$.

31. $y = 3x$.

32. $y - 7 = 3(x - 4)$.

33. $y = 1$.

34. $2y - 3 = 0$.

En los problemas del 35 al 40 determine una forma lineal general y la forma pendiente-ordenada al origen de cada ecuación.

35. $2x = 5 - 3y$.

36. $3x + 2y = 6$.

37. $4x + 9y - 5 = 0$.

38. $2(x - 3) - 4(y + 2) = 8$.

39. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -4$.

40. $y = \frac{1}{300}x + 8$.

En los problemas del 41 al 50 determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

41. $y = 7x + 2, \quad y = 7x - 3$.

42. $y = 4x + 3, \quad y = 5 + 4x$.

43. $y = 5x + 2, \quad -5x + y - 3 = 0$.

44. $y = x, \quad y = -x$.

45. $x + 2y + 1 = 0, \quad y = -2x$.

46. $x + 2y = 0, \quad x + y - 4 = 0$.

47. $y = 3, \quad x = -\frac{1}{3}$.

48. $x = 3, \quad x = -3$.

49. $3x + y = 4, \quad x - 3y + 1 = 0$.

50. $x - 1 = 0, \quad y = 0$.

En los problemas del 51 al 60 determine una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas. Si es posible, dé la respuesta en la forma pendiente-ordenada al origen.

51. Pasa por $(-3, 2)$ y es paralela a $y = 4x - 5$.

52. Pasa por $(2, -8)$ y es paralela a $x = -4$.

53. Pasa por $(2, 1)$ y es paralela a $y = 2$.

54. Pasa por $(3, -4)$ y es paralela a $y = 3 + 2x$.

55. Es perpendicular a $y = 3x - 5$ y pasa por $(3, 4)$.

56. Es perpendicular a $y = -4$ y pasa por $(1, 1)$.

57. Pasa por $(7, 4)$ y es perpendicular a $y = -4$.

58. Pasa por $(-5, 4)$ y es perpendicular a la recta $2y = -x + 1$.

59. Pasa por $(-7, -5)$ y es paralela a la recta $2x + 3y + 6 = 0$.

60. Pasa por $(-4, 10)$ y es paralela al eje y.

61. Una recta pasa por $(1, 2)$ y por $(-3, 8)$. Determine el punto en la recta que tiene una abscisa (coordenada x) igual a 5.

62. Una línea recta tiene pendiente 2 e interseca al eje y en $(0, 1)$. ¿El punto $(-1, -1)$ pertenece a la recta?

63. **Acciones** En 1988, las acciones de una compañía de biotecnología se cotizaron en \$30 por acción. En 1998, la compañía empezó a tener problemas y el precio de las acciones cayó a \$10 por acción. Dibuje una recta que muestre la relación entre el precio por acción y el año en que se comerció, con años en el eje x y el precio en el eje y. Encuentre una interpretación para la pendiente.

64. **Velocidad del sonido** Una gráfica de la velocidad del sonido, S (en metros por segundo), al nivel del mar, contra la temperatura T del aire (en grados Celsius), tiene una pendiente de 0.61. La ecuación que describe la relación entre la velocidad del sonido y la temperatura del aire es $S = 0.61T + b$. Cuando la temperatura es 15°C, un investigador mide la velocidad del sonido como 340.55 metros por segundo. Determine b para completar la ecuación.

En los problemas 65 *y* 66 *determine una ecuación de la recta que describe la información siguiente*.

65. **Cuadrangulares** En una temporada, un jugador de las ligas mayores de béisbol dio 14 cuadrangulares al final del tercer mes y 20 cuadrangulares al final del quinto mes.

66. **Negocios** La propietaria de una tienda de embutidos inicia su negocio con una deuda de \$100,000. Después de operarla durante cinco años, ella acumula una utilidad de \$40,000.

67. **Fecha de parto** La longitud, L, de un feto humano de más de 12 semanas puede estimarse por medio de la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, en donde L está en centímetros y t está en semanas desde la concepción. Un tocólogo utiliza la longitud del feto, medido por medio de ultrasonido, para determinar la edad aproximada del feto y establecer una fecha de parto para la madre. La fórmula debe reescribirse para tener como resultado una edad, t, dada la longitud fetal L. Determine la pendiente y la intersección con el eje L de la ecuación.

68. **Lanzamiento de disco** Un modelo matemático puede aproximar la distancia con que se ganó en el lanzamiento

de disco en los Juegos Olímpicos mediante la fórmula $d = 184 + t$, en donde d está en pies y $t = 0$ corresponde al año 1984. Determine una forma lineal general de esta ecuación.

69. Mapa del campus Un mapa coordenado de un campus universitario da las coordenadas (x, y) de tres edificios principales como sigue: centro de cómputo, $(3.5, -1)$; laboratorio de ingeniería, $(0.5, 0)$; biblioteca $(-1, -4.5)$. Determine las ecuaciones (en la forma pendiente-ordenada al origen) de las trayectorias en línea recta que conectan (a) el laboratorio de ingeniería con el centro de cómputo, y (b) el laboratorio de ingeniería con la biblioteca. Demuestre que estas dos trayectorias son perpendiculares.

70. Geometría Muestre que los puntos $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(2, 3)$ y $D(2, 7)$ son los vértices de un paralelogramo (los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos).

71. Ángulo de aproximación Un pequeño aeroplano está aterrizando en un aeropuerto con un ángulo de aproximación de 45 grados, o pendiente de -1. El aeroplano inicia su descenso cuando tiene una elevación de 3300 pies. Determine la ecuación que describe la relación entre la altitud de la aeronave y la distancia recorrida, suponiendo que el ángulo de aproximación inicia en la distancia cero. Haga una gráfica de su ecuación en una calculadora gráfica. Si el aeropuerto está a 4000 pies desde donde el aeroplano inicia su aterrizaje, ¿qué le dice la gráfica acerca de la aproximación?

72. Ecuación de costo El costo diario promedio, C, para una cuarto en un hospital de la ciudad se elevó \$59.82 por año durante los años 1990 a 2000. Si el costo promedio en 1996 fue \$1128.50, ¿cuál es una ecuación que describe el costo promedio durante esta década, como una función del número de años, T, desde 1990?

73. Ecuación de ingreso Un pequeño negocio pronostica que su ingreso crecerá de acuerdo con el método de la línea recta con una pendiente de \$50,000 por año. En su quinto año, el negocio tuvo ingresos por \$330,000. Determine una ecuación que describa la relación entre los ingresos, R, y el número de años, T, desde la apertura del negocio.

74. Grafique $y = 1.3x + 7$ y verifique que la intersección y sea 7.

75. Grafique las rectas cuyas ecuaciones son

$$y = 1.5x + 1,$$
$$y = 1.5x - 1,$$

y

$$y = 1.5x + 2.5.$$

¿Qué observa acerca de las orientaciones de estas líneas? ¿Por qué esperaría este resultado, a partir de las ecuaciones de las líneas?

76. Grafique la recta $y = 3.4x - 2.3$. Determine las coordenadas de cualesquiera dos puntos de la recta y utilícelos para estimar la pendiente. ¿Cuál es la pendiente real de la recta?

77. Utilizando una ventana estándar y el mismo rectángulo de visualización, haga la gráfica de las rectas con ecuaciones

$$0.1875x - 0.3y + 0.94 = 0$$

y

$$0.32x + 0.2y + 1.01 = 0$$

Ahora, cambie la ventana a una ventana cuadrada (por ejemplo, en la calculadora TI-83, utilice ZOOM, Zsquare). Observe que las rectas aparentan ser perpendiculares entre sí. Pruebe que esto es cierto.

OBJETIVO Desarrollar la noción de curvas de demanda y oferta, e introducir funciones lineales.

4.2 Aplicaciones y funciones lineales

Muchas situaciones de la economía pueden describirse utilizando rectas, como lo muestra el ejemplo 1.

Principios en práctica 1
Niveles de producción

Un fabricante de bienes deportivos asigna 1000 unidades de tiempo por día para fabricar esquís y botas para esquís. Si toma 8 unidades de tiempo fabricar un esquí y 14 unidades de tiempo producir una bota, determine una ecuación que describa todos los posibles niveles de producción de los dos productos.

EJEMPLO 1 Niveles de producción

Suponga que un fabricante utiliza 100 libras de material para hacer los productos A y B, que requieren de 4 y 2 libras de material por unidad, respectivamente. Si x y y denotan el número de unidades producidas de A y B, respectivamente, entonces todos los niveles de producción están dados por las combinaciones de x y y que satisfacen la ecuación

$$4x + 2y = 100, \qquad \text{donde } x, y \geq 0.$$

Por tanto, los niveles de producción de A y B están relacionados linealmente. Al resolver para y se obtiene

$$y = -2x + 50 \qquad \text{(forma pendiente-ordenada al origen),}$$

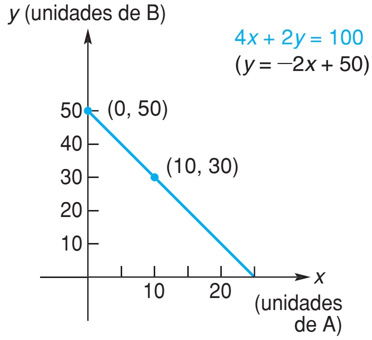


FIGURA 4.13 Niveles de producción relacionados linealmente.

de modo que la pendiente es -2. La pendiente refleja la tasa de cambio del nivel de producción de B con respecto al de A. Por ejemplo, si se produce una unidad adicional de A, se requerirán 4 libras más de material, de lo que resultan $\frac{4}{2} = 2$ unidades *menos* de B. Por tanto, cuando x aumenta en una unidad, el valor correspondiente de y disminuye en 2 unidades. Para hacer el bosquejo de la gráfica de $y = -2x + 50$, podemos utilizar la intersección con el eje y (0, 50), y el hecho de que cuando $x = 10$, $y = 30$ (véase la fig. 4.13).

Curvas de demanda y de oferta

Para cada nivel de precio de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto, que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) durante algún periodo. Por lo general, a mayor precio la cantidad demandada es menor; cuando el precio baja la cantidad demandada aumenta. Si el precio por unidad del producto está dado por p, y la cantidad correspondiente (en unidades) está dada por q, entonces una ecuación que relaciona p y q se llama **ecuación de demanda.** Su gráfica es la **curva de demanda.** La figura 4.14(a) muestra una curva de demanda. De acuerdo con la práctica de la mayoría de los economistas, el eje horizontal es el eje q y el vertical es el eje p. Supondremos que el precio por unidad está dado en dólares y el periodo es una semana. Así, el punto (a, b) en la figura 4.14(a) indica que a un precio de b dólares por unidad, los consumidores demandarán a unidades por semana. Como los precios o cantidades negativas no tienen sentido, a y b deben ser no negativos. Para la mayoría de los productos, un incremento en la cantidad demandada corresponde a una disminución en el precio. Así que, por lo general, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha, como en la figura 4.14(a).

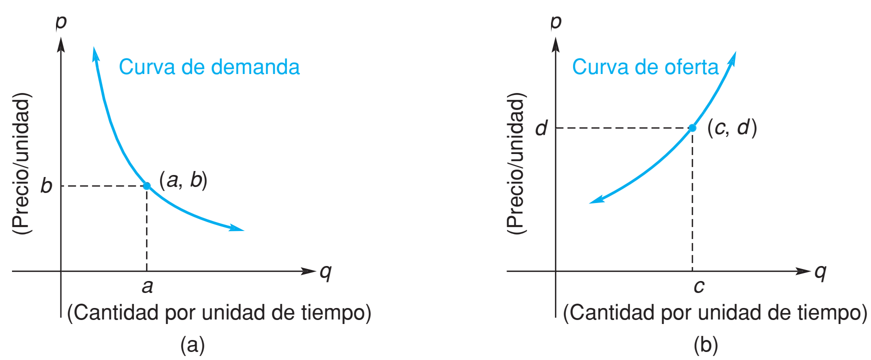


FIGURA 4.14 Curvas de demanda y de oferta.

Por lo general, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha y una curva de oferta asciende de izquierda a derecha. Sin embargo, existen excepciones. Por ejemplo, la demanda de insulina podría representarse por medio de una recta vertical, ya que esta demanda permanece constante sin importar el precio.

Como respuesta a los diferentes precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los *productores* están dispuestos a proveer al mercado durante algún periodo. Por lo general, a mayor precio por unidad es mayor la cantidad que los productores están dispuestos a proveer; cuando el precio disminuye también lo hace la cantidad suministrada. Si p denota el precio por unidad y q la cantidad correspondiente, entonces una ecuación que relaciona p y q se llama **ecuación de oferta,** y su gráfica es una **curva de oferta.** La figura 4.14(b) muestra una curva de oferta. Si p está en dólares y el periodo es una semana, entonces el punto (c, d) indica que a un precio de d dólares cada una, los productores proveerán c unidades por semana. Al igual que antes, c y d son no negativos. Una curva de oferta casi siempre asciende de izquierda a derecha, como en la figura 4.14(b). Esto indica que un fabricante suministrará más de un producto a precios mayores.

Ahora centraremos la atención en las curvas de oferta y de demanda que son líneas rectas (véase la fig. 4.15); se les denomina curvas de oferta *lineal* y de demanda *lineal*. Tales curvas tienen ecuaciones en las que p y q están relacionadas de manera lineal. Puesto que una curva de demanda por lo general desciende de izquierda a derecha, una curva de demanda lineal tiene pendiente negativa [véase la fig. 4.15(a)]. Sin embargo, la pendiente de una curva de oferta lineal es positiva, ya que la curva asciende de izquierda a derecha [véase la fig. 4.15(b)].

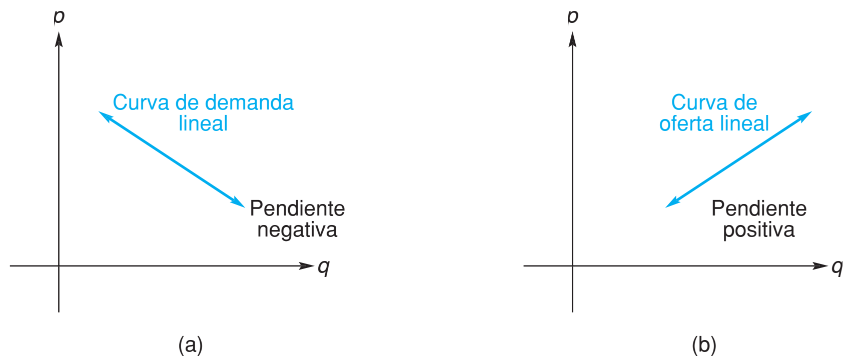


FIGURA 4.15 Curvas de demanda y oferta lineales.

■ *Principios en práctica 2*
Determinación de una ecuación de demanda

La demanda semanal de televisores de 26 pulgadas es 1200 unidades cuando el precio es de \$575 cada uno, y 800 unidades cuando el precio es de \$725 cada uno. Determine la ecuación de demanda para los televisores, suponiendo un comportamiento lineal.

■ EJEMPLO 2 Determinación de una ecuación de demanda

Suponga que la demanda por semana de un producto es de 100 *unidades, cuando el precio es de* \$58 *por unidad, y de* 200 *unidades a un precio de* \$51 *cada una. Determinar la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.*

Solución:

Estrategia: ya que la ecuación de demanda es lineal, la curva de demanda debe ser una línea recta. Tenemos que la cantidad q y el precio p están relacionados linealmente de tal modo que $p = 58$ cuando $q = 100$ y $p = 51$ cuando $q = 200$. Por lo que los datos dados pueden representarse en un plano de coordenadas q, p [véase la fig. 4.15 (a)] por los puntos (100, 58) y (200, 51). Con estos puntos podemos encontrar una ecuación de la recta, esto es, la ecuación de demanda.

La pendiente de la recta que pasa por (100, 58) y (200, 51) es

$$m = \frac{51 - 58}{200 - 100} = -\frac{7}{100}.$$

Una ecuación de la recta (forma punto-pendiente) es

$$p - p_1 = m(q - q_1),$$

$$p - 58 = -\frac{7}{100}(q - 100).$$

Al simplificar, se obtiene la ecuación de demanda

$$p = -\frac{7}{100}q + 65. \tag{1}$$

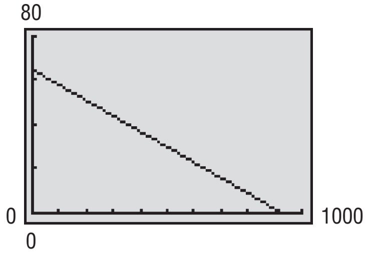


FIGURA 4.16 Gráfica de la función de demanda $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

Por costumbre, una ecuación de demanda (así como una ecuación de oferta) expresa p en términos de q, lo que en realidad define una función de q. Por ejemplo, la ecuación (1) define p como una función de q y por ello se le llama la *función de demanda* para el producto (véase la fig. 4.16).

Funciones lineales

En la sección 3.2 se describió una *función lineal*. A continuación se presenta una definición formal.

Definición

Una función f es una ***función lineal*** si y sólo si $f(x)$ puede escribirse en la forma $f(x) = ax + b$, en donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Suponga que $f(x) = ax + b$ es una función lineal y que $y = f(x)$. Entonces $y = ax + b$, la cual es la ecuación de una recta con pendiente a e intersección con el eje y b. Así, **la gráfica de una función lineal es una recta.** Decimos que la función $f(x) = ax + b$ tiene pendiente a.

Principios en práctica 3

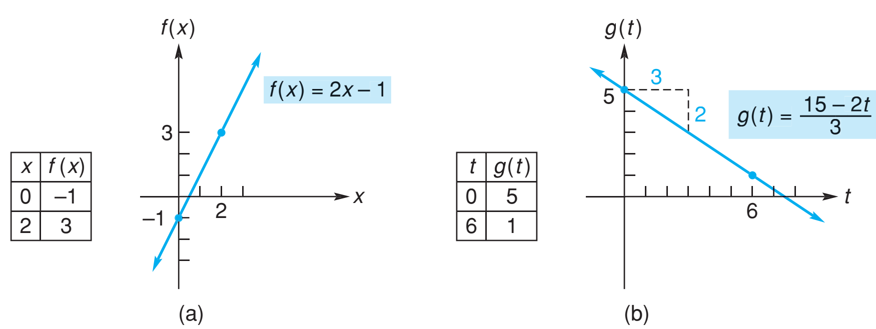
Gráficas de funciones lineales

Una compañía que repara computadoras, cobra por un servicio una cantidad fija más una tarifa por hora. Si x es el número de horas necesarias para un servicio, el costo total se describe por medio de la función $f(x) = 40x + 60$. Haga una gráfica de la función determinando y graficando dos puntos.

EJEMPLO 3 Graficación de funciones lineales

a. *Graficar* $f(x) = 2x - 1$.

Solución: aquí f es una función lineal (con pendiente 2), de modo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, sólo necesitamos graficar dos puntos y después dibujar una recta que pase por ellos [véase la fig. 4.17(a)]. Observe que uno de los puntos graficados es la intersección con el eje vertical, -1, que ocurre cuando $x = 0$.



x	$f(x)$
0	–1
2	3

t	$g(t)$
0	5
6	1

FIGURA 4.17 Gráficas de funciones lineales.

b. *Grafique* $g(t) = \dfrac{15 - 2t}{3}$.

Solución: observe que g es una función lineal porque podemos expresarla en la forma $g(t) = at + b$.

$$g(t) = \frac{15 - 2t}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2t}{3} = -\frac{2}{3}t + 5.$$

La gráfica de g se muestra en la figura 4.17(b). Ya que la pendiente es $-\frac{2}{3}$, observe que cuando t aumenta en 3 unidades, $g(t)$ *disminuye* en 2.

EJEMPLO 4 Determinación de una función lineal

Suponer que f es una función lineal con pendiente 2 y $f(4) = 8$. *Hallar* $f(x)$.

Solución: ya que f es lineal, tiene la forma $f(x) = ax + b$. La pendiente es 2, de modo que $a = 2$ y tenemos

$$f(x) = 2x + b. \qquad (2)$$

Ahora determinamos b. Como $f(4) = 8$, en la ecuación (2) reemplazamos x por 4 y resolvemos para b.

$$\begin{aligned} f(4) &= 2(4) + b, \\ 8 &= 8 + b, \\ 0 &= b. \end{aligned}$$

De aquí que, $f(x) = 2x$.

Principios en práctica 4

Determinación de una función lineal

La altura de niños entre las edades de 6 a 10 años puede modelarse por medio de una función lineal de la edad t, en años. La altura de una niña cambia 2.3 pulgadas por año; ella mide 50.6 pulgadas de altura a la edad de 8 años. Determine una función que describa la altura de esta niña a la edad de t años.

EJEMPLO 5 Determinación de una función lineal

Si $y = f(x)$ *es una función lineal tal que* $f(-2) = 6$ *y* $f(1) = -3$, *encontrar* $f(x)$.

Solución:

Estrategia: los valores de la función corresponden a puntos sobre la gráfica de f. Con estos puntos podemos determinar una ecuación de la recta y, por tanto, de la función lineal.

La condición $f(-2) = 6$ significa que cuando $x = -2$, entonces $y = 6$. Por tanto, $(-2, 6)$ pertenece a la gráfica de f, que es una recta. De manera similar, $f(1) = -3$ implica que $(1, -3)$ también pertenece a la recta. Si hacemos $(x_1, y_1) = (-2, 6)$ y $(x_2, y_2) = (1, -3)$, la pendiente de la recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 6}{1 - (-2)} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Podemos encontrar una ecuación de la recta por medio de la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1), \\ y - 6 &= -3[x - (-2)], \\ y - 6 &= -3x - 6, \\ y &= -3x. \end{aligned}$$

Puesto que $y = f(x)$, $f(x) = -3x$. Por supuesto, se obtiene el mismo resultado si hacemos $(x_1, y_1) = (1, -3)$.

Principios en práctica 5

Determinación de una función lineal

Un collar antiguo se espera que tenga un valor de \$360 después de 3 años y de \$640 al cabo de 7 años. Determine una función que describa el valor del collar después de x años.

En muchos estudios los datos se reúnen y grafican en un sistema de coordenadas. Un análisis de los resultados puede indicar que hay una relación funcional entre las variables involucradas. Por ejemplo, los datos pueden ser aproximados por puntos en una recta. Esto indicaría una relación funcional lineal, tal como en el ejemplo 6 que sigue.

EJEMPLO 6 Dieta para gallinas

En pruebas hechas en una dieta experimental para gallinas, se determinó que el peso promedio w (en gramos) de una gallina fue, según las estadísticas, una función lineal del número de días d después de que se inició la dieta, donde $0 \leq d \leq 50$. *Suponer que el peso promedio de una gallina al inicio la dieta fue de 40 gramos, y 25 días después fue de 675 gramos.*

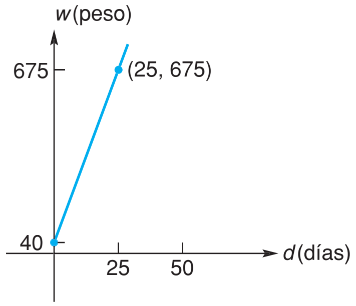


FIGURA 4.18 Función lineal que describe la dieta para gallinas.

a. *Determinar w como una función lineal de d.*

Solución: como w es una función lineal de d, su gráfica es una línea recta. Cuando $d = 0$ (al inicio de la dieta), $w = 40$. Por tanto, (0, 40) pertenece a la gráfica (véase la fig. 4.18). De manera similar, (25, 675) pertenece a la gráfica. Si hacemos $(d_1, w_1) = (0, 40)$ y $(d_2, w_2) = (25, 675)$, la pendiente de la recta es

$$m = \frac{w_2 - w_1}{d_2 - d_1} = \frac{675 - 40}{25 - 0} = \frac{635}{25} = \frac{127}{5}.$$

Utilizando la forma punto-pendiente, tenemos

$$w - w_1 = m(d - d_1),$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}(d - 0),$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}d,$$

$$w = \frac{127}{5}d + 40,$$

que expresa w como una función lineal de d.

b. *Determinar el peso promedio de una gallina cuando* $d = 10$.

Solución: cuando $d = 10$, tenemos $w = \frac{127}{5}(10) + 40 = 254 + 40 = 294$. Así, el peso promedio de una gallina 10 días después del inicio de la dieta es de 294 gramos.

Ejercicio 4.2

En los problemas del 1 al 6 determine la pendiente y la intersección con el eje vertical de la función lineal; haga un bosquejo de la gráfica.

1. $y = f(x) = -4x$.

2. $y = f(x) = x + 1$.

3. $g(t) = 2t - 4$.

4. $g(t) = 2(4 - t)$.

5. $h(q) = \dfrac{2 - q}{7}$.

6. $h(q) = 0.5q + 0.25$.

En los problemas del 7 al 14 determine f(x), si f es una función lineal que tiene las propiedades dadas.

7. Pendiente $= 4$, $f(2) = 8$.

8. $f(0) = 3$, $f(4) = -5$.

9. $f(1) = 2$, $f(-2) = 8$.

10. Pendiente $= -4$, $f(\frac{1}{3}) = -2$.

11. Pendiente $= -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = 4$.

12. $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.

13. $f(-2) = -1$, $f(-4) = -3$.

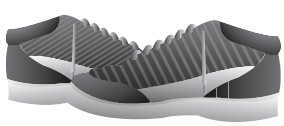
14. Pendiente $= 0.01$, $f(0.1) = 0.01$.

15. Ecuación de demanda Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$12 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de \$18 cada una. Halle la ecuación de la demanda, suponiendo que es lineal. Determine el precio por unidad cuando se requieren 30 unidades.

16. Ecuación de demanda La demanda semanal para un libro que se vende mucho es de 26,000 ejemplares cuando el precio es \$16 cada uno, y de 10,000 libros cuando el precio es de \$24 cada uno. Determine una ecuación de demanda para el libro, suponiendo que aquélla es lineal.

17. Ecuación de oferta Un fabricante de refrigeradores produce 3000 unidades cuando el precio es de \$940 y 2200 unidades cuando el precio es \$740. Suponga que el precio, p, y la cantidad, q, producidas están relacionadas de manera lineal. Determine la ecuación de oferta.

18. Ecuación de oferta Suponga que un fabricante de zapatos colocará en el mercado 50 mil pares cuando el precio es 35 (dólares por par) y 35 mil pares de zapatos cuando el precio es 30 dólares. Determine la ecuación de oferta, suponiendo que el precio p y la cantidad q están relacionadas de manera lineal.



19. Ecuación de costo Suponga que el costo para producir 10 unidades de un producto es \$40 y el costo para 20 unidades es \$70. Si el costo, c, está relacionado de manera lineal con la producción, q, determine el costo de producir 35 unidades.

20. Ecuación de costo Un anunciante va con un impresor y éste le cobra \$79 por 100 copias de un volante y \$88 por 400 copias de otro volante. Este impresor cobra un costo fijo, más una tarifa por cada copia de volantes de una sola página. Determine una función que describa el costo de un trabajo de impresión, si x es el número de copias que se hacen.

21. Tarifas de electricidad Una compañía de electricidad cobra a clientes residenciales 12.5 centavos por kilowatt-hora más un cargo base mensual. La factura mensual de un cliente viene con \$51.65 por 380 kilowatt-hora. Determine una función lineal que describa el monto total por concepto de electricidad, si x es el número de kilowatt-hora utilizados en un mes.

22. Terapia por medio de radiación Un paciente con cáncer recibirá terapias mediante fármacos y radiación. Cada centímetro cúbico de la droga que será utilizada contiene 200 unidades curativas, y cada minuto de exposición a la radiación proporciona 300 unidades curativas. El paciente requiere 2400 unidades curativas. Si se administran d centímetros cúbicos y r minutos de radiación, determine una ecuación que relacione d y r. Haga la gráfica de la ecuación para $d \geq 0$ y $r \geq 0$; marque el eje horizontal como d.

23. Depreciación Suponga que el valor de una pieza de maquinaria disminuye cada año en 10% de su valor original. Si el valor original es \$8000, determine una ecuación que exprese el valor v de la maquinaria t años después de su compra, en donde $0 \leq t \leq 10$. Haga un bosquejo de la ecuación, seleccione t como el eje horizontal y v como el eje vertical. ¿Cuál es la pendiente de la recta resultante? Este método de considerar el valor del equipo se denomina *depreciación lineal*.

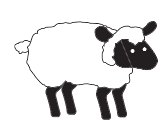
24. Depreciación Un televisor nuevo se deprecia \$120 por año, y tiene un valor de \$340 después de 4 años. Determine una función que describa el valor de este televisor, si x es la edad, en años, de la televisión.

25. Apreciación Un nuevo edificio de apartamentos se vendió por \$960,000 cinco años después de que se compró. Los propietarios originales calcularon que el edificio se apreciaba \$45,000 por año, mientras ellos fuesen los propietarios. Determine una función lineal que describa la apreciación del edificio, si x es el número de años desde la compra original.

26. Apreciación Una casa comprada en \$198,000 se espera que duplique su valor en 18 años. Determine una ecuación lineal que describa el valor de la casa después de x años.

27. Precios por reparación Una compañía que repara copiadoras comerciales, cobra por un servicio una cantidad fija más una tarifa por hora. Si un cliente tiene una factura de \$150 por un servicio de una hora y \$280 por un servicio de tres horas, determine una función lineal que describa el precio de un servicio, en donde x es el número de horas del servicio.

28. Longitud de lana de ovejas Para regular su temperatura en relación con el calor ambiental, las ovejas aumentan su ritmo respiratorio, r (por minuto), cuando la longitud de la lana, l (en centímetros) disminuye.[2] Suponga que una oveja con una longitud de lana de 2 cm tiene un ritmo (promedio) respiratorio de 160, y aquéllas con una longitud de lana de 4 cm tienen un ritmo respiratorio de 125. Suponga que r y l están relacionadas linealmente. (a) Determine una ecuación que proporcione r en términos de l. (b) Determine el ritmo respiratorio de una oveja que tiene una longitud de lana de 1 cm.



29. Línea de isocostos En análisis de producción, una *línea de isocosto* es una línea cuyos puntos representan todas las combinaciones de dos factores de producción que pueden comprarse por la misma cantidad. Suponga que un granjero tiene asignados \$20,000 para la compra de x toneladas de fertilizante (con un costo de \$200 por tonelada) y y acres de tierra (con un costo de \$2000 por acre). Determine una ecuación de la línea de isocosto que describa las distintas combinaciones que pueden comprarse con \$20,000. Observe que ni x ni y pueden ser negativas.

---

[2]Adaptado de G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*. 2a. ed. (Philadelphia: Lea & Febiger, 1974.)

30. Línea de isoutilidad Un fabricante produce los productos X y Y para los cuales las ganancias por unidad son de \$4 y \$6, respectivamente. Si se venden x unidades de X y y unidades de Y, entonces la ganancia total P está dada por $P = 4x + 6y$, donde $x, y \geq 0$. (a) Haga el bosquejo de la gráfica de esta ecuación para $P = 240$. El resultado se conoce como *línea de isoutilidad*, y sus puntos representan todas las combinaciones de ventas que producen una utilidad de \$240. (b) Determine la pendiente para $P = 240$. (c) Si $P = 600$, determine la pendiente. (d) ¿Las rectas de isoutilidad para los productos X y Y son paralelas?

31. Escala de calificaciones Por razones de comparación, un profesor quiere cambiar la escala de las calificaciones de un conjunto de exámenes escritos, de modo que la calificación máxima siga siendo 100, pero la media (promedio) sea 80 en lugar de 56. (a) Determine una ecuación lineal que prediga esto. [*Sugerencia*: quiere que 56 se convierta en 80 y 100 permanezca como 100. Considere los puntos (56, 80) y (100, 100), y de manera más general, (x, y), donde x es la calificación anterior y y la nueva. Encuentre la pendiente y utilice la forma punto-pendiente. Exprese y en términos de x.] (b) Si en la nueva escala 60 es la calificación más baja para acreditar, ¿cuál fue la calificación más baja para acreditar en la escala original?

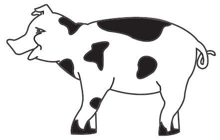
32. Psicología El resultado del experimento psicológico de Sternberg[3] sobre la recuperación de información, es que el tiempo de reacción, R, de una persona, en milisegundos, de acuerdo con las estadísticas es una función lineal del tamaño del conjunto de memoria N como sigue:

$$R = 38N + 397.$$

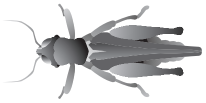
Haga el bosquejo de la gráfica para $1 \leq N \leq 5$. ¿Cuál es la pendiente?

33. Psicología En cierto experimento de aprendizaje que involucra repetición y memoria,[4] se estimó que la proporción p de elementos recordados se relacionaba linealmente con un tiempo de estudio efectivo t (en segundos), donde t está entre 5 y 9. Para un tiempo de estudio efectivo de 5 segundos, la proporción de elementos recordados fue de 0.32. Por cada segundo más en el tiempo de estudio, la proporción recordada aumentaba en 0.059. (a) Determine una ecuación que proporcione p en términos de t. (b) ¿Qué proporción de elementos se recordaron con 9 segundos de tiempo efectivo de estudio?

34. Dieta para cerdos En pruebas realizadas en una dieta experimental para cerdos, se determinó que el peso (promedio) w (en kilogramos) de un cerdo, estadísticamente era una función lineal del número de días, d, después de iniciada la dieta, donde $0 \leq d \leq 100$. Si el peso de un cerdo al inicio de la dieta fue de 20 kg, y a partir de ahí ganó 6.6 kg cada 10 días, determine w como una función de d; calcule el peso de un cerdo para 50 días después que inició la dieta.



35. Chirrido de grillos Los biólogos han encontrado que el número de chirridos por minuto hechos por los grillos de cierta especie están relacionados con la temperatura. La relación es casi lineal. A diferencia de los grillos que se mencionaron al inicio del capítulo 1, estos grillos chirrían todo el verano. A 68°F, los chirridos de los grillos son casi 124 por minuto. A 80°F son alrededor de 172 por minuto. (a) Determine una ecuación que dé la temperatura Fahrenheit, t, en términos del número de chirridos, c, por minuto. (b) Si usted cuenta los chirridos sólo durante 15 segundos, ¿cómo puede estimar rápidamente la temperatura?



36. Circuitos eléctricos En un circuito eléctrico el voltaje, V (en volts), y la corriente, i (en amperes), están relacionados linealmente. Cuando $i = 4$, $V = 2$; cuando $i = 12$, $V = 6$.

a. Determine V como una función de i.
b. Encuentre el voltaje cuando la corriente es de 10.

37. Física La presión, P, de un volumen constante de gas, en centímetros de mercurio, está relacionada linealmente con la temperatura, T, en grados Celsius. En un experimento con aire seco, se encontró que $P = 90$ cuando $T = 40$, y que $P = 100$ cuando $T = 80$. Exprese P como una función de T.

38. Teoría eléctrica Cuando una gráfica de la diferencia de potencial, V, en volts, de una celda de Daniell se grafica como una función de la corriente, i, en amperes, que se envía a un resistor externo, se obtiene una línea recta. La pendiente de esta recta es el negativo del valor de la resistencia interna de la celda. Para una celda particular con resistencia interna de 0.06 ohms, se encontró que $V = 0.6$ volts cuando $i = 0.12$ amperes. Exprese V como una función de i.

39. Hidráulica Una fórmula utilizada en hidráulica es

$$Q = 3.340b^3 + 1.8704b^2x,$$

donde b es una constante.

a. ¿La gráfica de esta ecuación es una línea recta?
b. De ser así, ¿cuál es la pendiente cuando $b = 1$?

[3]G. R. Loftus y E. E. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).

[4]D. L. Hintzman, "Repetition and Learning", en *The Psychology of Learning*, vol. 10, ed. G. H. Brower (Nueva York: Academic Press, Inc., 1976, p. 77).

OBJETIVO Hacer el bosquejo de las parábolas que surgen de funciones cuadráticas.

4.3 Funciones cuadráticas

En la sección 3.2 se describió a una *función cuadrática* como una función polinomial de grado 2. A continuación se presenta una definición formal.

Definición

Una función f es una ***función cuadrática*** *si y sólo si* $f(x)$ puede escribirse en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, *donde* a, b *y* c son constantes *y* $a \neq 0$.

Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $F(t) = -3t^2$ son cuadráticas. Sin embargo, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ *no* es cuadrática, ya que no puede escribirse en la forma $g(x) = ax^2 + bx + c$.

La gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ *se* llama **parábola** y tiene una forma parecida a las curvas de la figura 4.19. Si $a > 0$, la gráfica se extiende hacia arriba de manera indefinida y decimos que la parábola *abre hacia arriba* [véase la fig. 4.19(a)]. Si $a < 0$, entonces la parábola *abre hacia abajo* [véase la fig. 4.19(b)].

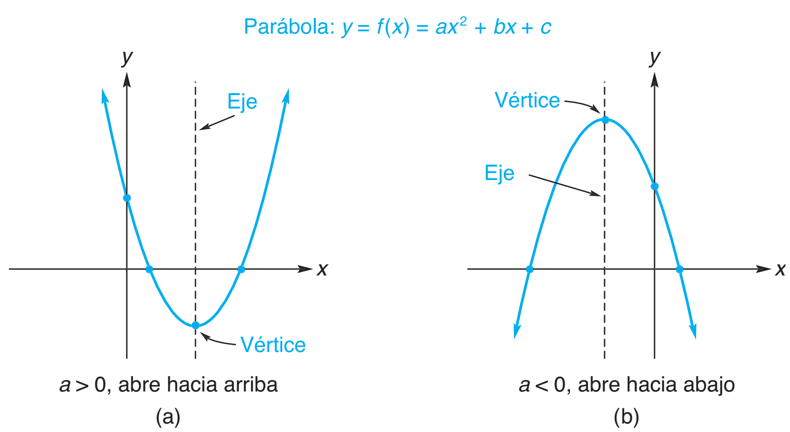


FIGURA 4.19 Parábolas.

Cada parábola en la figura 4.19 es *simétrica* con respecto a una recta vertical, llamada el **eje de simetría** de la parábola. Esto es, si la página fuera doblada en una de estas rectas, entonces las dos mitades de la parábola correspondiente coincidirían. El eje (de simetría) *no* es parte de la parábola, pero es una ayuda útil para hacer su bosquejo.

La figura 4.19 también muestra puntos marcados como **vértice,** donde el eje corta a la parábola. Si $a > 0$, el vértice es el punto "más bajo" de la parábola. Esto significa que $f(x)$ tiene un valor mínimo en ese punto. Si hacemos manipulaciones algebraicas sobre $ax^2 + bx + c$ (lo que se conoce como *completar el cuadrado*), podemos determinar no sólo este valor mínimo, sino también en dónde ocurre. Tenemos

$$f(x) = ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx) + c.$$

Sumando y restando $\frac{b^2}{4a}$ se obtiene

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a},$$

de modo que

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Puesto que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ y $a > 0$, se sigue que $f(x)$ tiene un valor mínimo cuando $x + \frac{b}{2a} = 0$, esto es, cuando $x = -\frac{b}{2a}$. La coordenada y correspondiente a este valor de x es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Así, el vértice está dado por

$$\text{vértice} = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Éste también es el vértice de la parábola que abre hacia abajo ($a < 0$), pero en este caso $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es el valor máximo de $f(x)$. [véase la fig. 4.19(b).]

El punto en donde la parábola $y = ax^2 + bx + c$ interseca al eje y (esto es, la intersección y) se da cuando $x = 0$. La coordenada y de este punto es c, de modo que la intersección con el eje y es $(0, c)$ o, simplemente, c. En resumen, tenemos lo siguiente.

Gráfica de una función cuadrática

La gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola.

1. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. Si $a < 0$, abre hacia abajo.
2. El vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
3. La intersección y es c.

Podemos hacer un rápido bosquejo de la gráfica de una función cuadrática localizando primero el vértice, la intersección y y unos cuantos puntos más, aquéllos en donde la parábola interseca al eje x. Las *intersecciones* x se encuentran al hacer $y = 0$ y resolver para x. Una vez que las intersecciones y el vértice se encuentran, es relativamente fácil trazar la parábola apropiada a través de estos puntos. En el caso de que las intersecciones con el eje x estén muy cercanas al vértice o que no existan intersecciones con el eje x, determinamos un punto en cada lado del vértice, de modo que podamos hacer un bosquejo razonable de la parábola. Tenga en cuenta que una recta vertical (con línea punteada) a través del vértice da el eje de simetría. Si graficamos puntos a un lado del eje, podemos obtener por simetría los correspondientes del otro lado.

Principios en práctica 1

Gráfica de una función cuadrática

La utilidad diaria de un concesionario de automóviles por la venta de un tipo de minivan está dada por $P(x) = -x^2 + 2x + 399$, en donde x es el número de minivans vendidas. Determine el vértice de la función y sus intersecciones con los ejes, y haga una gráfica de la función.

EJEMPLO 1 Graficación de una función cuadrática

Graficar la función cuadrática $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$.

Solución: aquí $a = -1$, $b = -4$ y $c = 12$. Como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y, por tanto, tiene un punto más alto. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-1)} = -2.$$

La coordenada y es $f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 16$. Así, el vértice es $(-2, 16)$, de modo que el valor máximo de $f(x)$ es 16. Ya que $c = 12$, la intersección y es 12. Para encontrar las intersecciones x, hacemos y igual a 0 en $y = -x^2 - 4x + 12$ y resolvemos para x:

$$0 = -x^2 - 4x + 12,$$
$$0 = -(x^2 + 4x - 12),$$
$$0 = -(x + 6)(x - 2).$$

Así $x = -6$ o $x = 2$, de modo que las intersecciones x son -6 y 2. Ahora trazamos el vértice, el eje de simetría y las intersecciones [véase la fig. 4.20(a)]. Como (0, 12) está a *dos* unidades a la *derecha* del eje, existe un punto correspondiente *dos* unidades a la *izquierda* del eje con la misma coordenada y. Por tanto, obtenemos el punto $(-4, 12)$. Al unir todos los puntos, trazamos una parábola que abre hacia abajo [véase la fig. 4.20(b)].

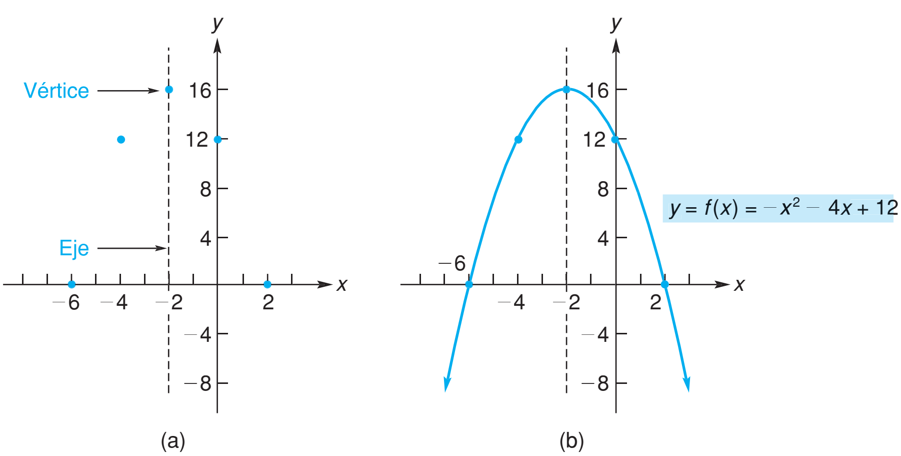


FIGURA 4.20 Gráfica de la parábola $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$.

EJEMPLO 2 Graficación de una función cuadrática

Graficar $p = 2q^2$.

Solución: aquí p es una función cuadrática de q, donde $a = 2$, $b = 0$ y $c = 0$. Como $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y, por tanto, tiene un punto más bajo. La coordenada q del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(2)} = 0,$$

y la coordenada p es $2(0)^2 = 0$. En consecuencia, el valor *mínimo* de p es 0 y el vértice es (0, 0). En este caso, el eje p es el eje de simetría. Una parábola que

q	p
2	8
−2	8

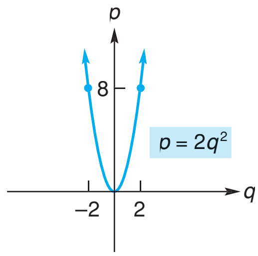


FIGURA 4.21 Gráfica de la parábola $p = 2q^2$.

El ejemplo 3 ilustra que la determinación de las intersecciones puede requerir el uso de la fórmula cuadrática.

Principios en práctica 2
Gráfica de una función cuadrática

Un hombre que está parado en el montículo del lanzador lanza una bola recta con una velocidad inicial de 32 pies por segundo. La altura de la bola, en pies, t segundos después de que fue lanzada se describe por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 32t + 8$, para $t \geq 0$. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función, y haga una gráfica de la función.

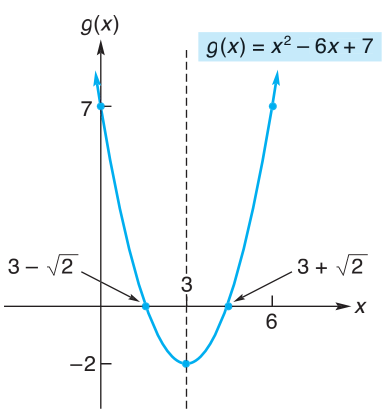


FIGURA 4.22 Gráfica de la parábola $g(x) = x^2 - 6x + 7$.

abre hacia arriba con vértice en $(0, 0)$ no puede tener ninguna otra intersección. De aquí que para hacer un buen bosquejo de esta parábola, graficamos un punto a cada lado del vértice. Si $q = 2$, entonces $p = 8$. Esto da el punto $(2, 8)$, y por simetría el punto $(-2, 8)$ (véase la fig.4.21).

■

EJEMPLO 3 Graficación de una función cuadrática

Graficar $g(x) = x^2 - 6x + 7$.

Solución: aquí g es una función cuadrática, donde $a = 1, b = -6$ y $c = 7$. La parábola abre hacia arriba, ya que $a > 0$. La coordenada x del vértice (el punto más bajo) es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3,$$

y $g(3) = 3^2 - 6(3) + 7 = -2$, que es el valor mínimo de $g(x)$. Por tanto, el vértice es $(3, -2)$. Ya que $c = 7$, la intersección con el eje vertical es 7. Para encontrar las intersecciones x, hacemos $g(x) = 0$.

$$0 = x^2 - 6x + 7.$$

El lado derecho no se puede factorizar con facilidad, de modo que usaremos la fórmula cuadrática para hallar los valores de x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{6}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, las intersecciones x son $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$. Después de graficar el vértice, las intersecciones y (por simetría) el punto $(6, 7)$, dibujamos la parábola que se abre hacia arriba como se muestra en la figura 4.22.

■

EJEMPLO 4 Graficación de una función cuadrática

Graficar $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$ y determinar el rango de f.

Solución: esta función es cuadrática con $a = 2, b = 2$ y $c = 3$. Como $a > 0$ la gráfica es una parábola que se abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(2)} = -\frac{1}{2}$$

y la coordenada y es $2(-\frac{1}{2})^2 + 2(-\frac{1}{2}) + 3 = \frac{5}{2}$. Así, el vértice es $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$. Como $c = 3$, la intersección y es 3. Una parábola que abre hacia arriba con su vértice arriba del eje x no tiene intersecciones x. En la figura 4.23 graficamos

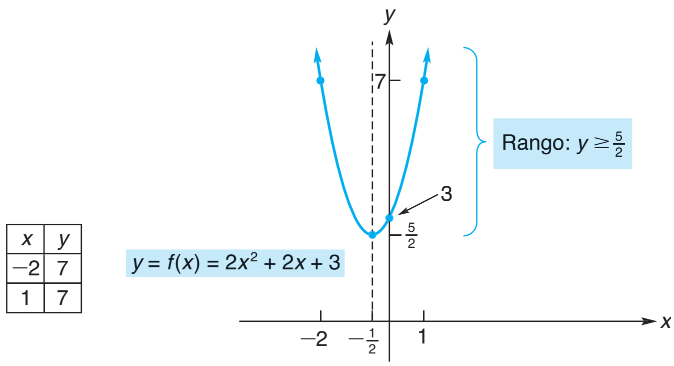


FIGURA 4.23 Gráfica de $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$.

la intersección y, el vértice y un punto adicional $(-2, 7)$ a la izquierda del vértice. Por simetría, también obtenemos el punto $(1, 7)$. Trazando una parábola a través de estos puntos se obtiene la gráfica deseada. Con base en la figura, vemos que el rango de f es toda $y \geq \frac{5}{2}$, esto es, el intervalo $[\frac{5}{2}, \infty)$.

EJEMPLO 5 Ingreso máximo

La función de demanda para un producto es $p = 1000 - 2q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando q unidades son demandadas (por semana) por los consumidores. Encontrar el nivel de producción que maximice el ingreso total del productor, y determinar ese ingreso.

Solución:

La fórmula para el ingreso total debe sumarse a su repertorio de relaciones para negocios y economía.

Estrategia: para maximizar el ingreso, debemos determinar la función de ingreso, $r = f(q)$. Utilizando la relación

$$\textbf{ingreso total} = (\textbf{precio})(\textbf{cantidad}),$$

tenemos

$$r = pq.$$

Por medio de la ecuación de demanda, podemos expresar p en términos de q, de modo que r sea estrictamente una función de q.

Tenemos

$$\begin{aligned} r &= pq \\ &= (1000 - 2q)q. \\ r &= 1000q - 2q^2. \end{aligned}$$

Observe que r es una función cuadrática de q, con $a = -2$, $b = 1000$ y $c = 0$. Ya que $a < 0$ (la parábola abre hacia abajo), r es máximo en el vértice (q, r), donde

$$q = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2(-2)} = 250.$$

El valor máximo de r está dado por

$$\begin{aligned} r &= 1000(250) - 2(250)^2 \\ &= 250{,}000 - 125{,}000 = 125{,}000. \end{aligned}$$

Así, el ingreso máximo que el fabricante puede recibir es de \$125,000, que ocurre en un nivel de producción de 250 unidades. La figura 4.24(a) muestra la gráfica de la función de ingreso. Sólo la parte para la que $q \geq 0$ y $r \geq 0$ se dibuja, ya que la cantidad y el ingreso no pueden ser negativos.

Principios en práctica 3

Ingreso máximo

La función de demanda para la línea de libros de cocina de un editor es $p = 6 - 0.003q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (por día). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

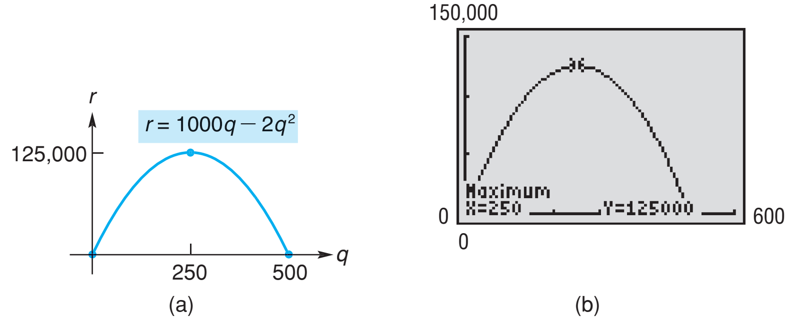


FIGURA 4.24 Gráfica de la función de ingreso.

Tecnología

El valor máximo (o mínimo) de una función puede encontrarse con una calculadora gráfica, utilizando las características de trazado y acercamiento, o bien con la operación de "máximo" (o "mínimo"). La figura 4.24(b) muestra la pantalla para la función de ingreso del ejemplo 5, esto es, la gráfica de $y = 1000x - 2x^2$. Observe que remplazamos r por y y q por x.

Ejercicio 4.3

En los problemas del 1 al 8 establezca si la función es cuadrática o no.

1. $f(x) = 5x^2$.

2. $g(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 4}$.

3. $g(x) = 7 - 6x$.

4. $h(s) = 2s^2(s^2 + 1)$.

5. $h(q) = (q + 4)^2$.

6. $f(t) = 2t(3 - t) + 4t$.

7. $f(s) = \dfrac{s^2 - 9}{2}$.

8. $g(t) = (t^2 - 1)^2$.

En los problemas del 9 al 12 no haga una gráfica.

9. (a) Para la parábola $y = f(x) = -4x^2 + 8x + 7$, encuentre el vértice. (b) ¿El vértice corresponde al punto más bajo o al más alto de la gráfica?

10. Repita el problema 9, si $y = f(x) = 8x^2 + 4x - 1$.

11. Para la parábola $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$, encuentre (a) la intersección y, (b) las intersecciones x, y (c) el vértice.

12. Repita el problema 11, si $y = f(x) = 3 + x - 2x^2$.

En los problemas del 13 al 22 grafique cada función. Obtenga el vértice y las intersecciones, y determine el rango.

13. $y = f(x) = x^2 - 6x + 5.$

14. $y = f(x) = -4x^2.$

15. $y = g(x) = -2x^2 - 6x.$

16. $y = f(x) = x^2 - 1.$

17. $s = h(t) = t^2 + 2t + 1.$

18. $s = h(t) = 2t^2 + 3t - 2.$

19. $y = f(x) = -9 + 8x - 2x^2.$

20. $y = H(x) = 1 - x - x^2.$

21. $t = f(s) = s^2 - 8s + 14.$

22. $t = f(s) = s^2 + 6s + 11.$

En los problemas del 23 al 26 establezca si $f(x)$ tiene un valor máximo o mínimo y encuentre ese valor.

23. $f(x) = 100x^2 - 20x + 25.$

24. $f(x) = -2x^2 - 16x + 3.$

25. $f(x) = 4x - 50 - 0.1x^2.$

26. $f(x) = x(x + 3) - 12.$

27. Ingreso La función de demanda para el fabricante de un producto es $p = f(q) = 1200 - 3q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan q unidades (por semana). Encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

28. Ingreso La función de demanda para una línea de reglas de plástico de una compañía de artículos de oficina es $p = 0.9 - 0.0004q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (diarias). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

29. Ingreso La función de demanda para la línea de laptops de una compañía de electrónica es $p = 2400 - 6q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (semanales). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

30. Mercadeo Una compañía de investigación de mercados estima que n meses después de la introducción de un nuevo producto, $f(n)$ miles de familias lo usarán, en donde

$$f(n) = \tfrac{10}{9}n(12 - n), \qquad 0 \leq n \leq 12.$$

Estime el número máximo de familias que usarán el producto.

31. Utilidad La utilidad diaria de la venta de árboles para el departamento de jardinería de un almacén está dada por $P(x) = -x^2 + 18x + 144$, en donde x es el número de árboles vendidos. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función, y haga la gráfica de la función.

32. Psicología Una predicción hecha por la psicología, relaciona la magnitud de un estímulo, x, con la magnitud de la respuesta, y, lo cual se expresa por la ecuación $y = kx^2$, en donde k es una constante del experimento. En un experimento sobre reconocimiento de patrones, $k = 2$. Determine el vértice de la función y haga la gráfica de su ecuación (suponga que no hay restricción sobre x).

33. Biología Unos biólogos estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía un 10% de proteína.[5] La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Al variar el porcentaje P de levadura en la mezcla de proteína, el grupo de biólogos estimaron que el peso promedio ganado (en gramos) por una rata en un periodo fue

$$f(P) = -\tfrac{1}{50}P^2 + 2P + 20, \quad 0 \leq P \leq 100.$$

Encuentre el peso máximo ganado.

34. Altura de una pelota Suponga que la altura, s, de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$s = -4.9t^2 + 58.8t,$$

donde s está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos (véase la fig. 4.25). ¿Al cabo de cuántos segundos la pelota alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

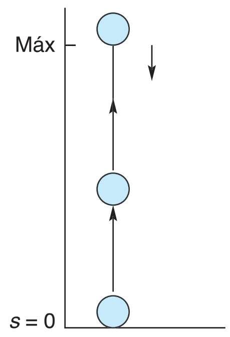


FIGURA 4.25 Pelota lanzada verticalmente hacia arriba (problema 34).

[5] Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*, ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

35. Arquería Un muchacho que está parado en una colina, dispara una flecha directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura, h, de la flecha en pies, t segundos después de que se soltó, se describe por la función $h(t) = -16t^2 + 80t + 32$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la flecha? ¿Cuántos segundos después de que se suelta, alcanza esta altura?

36. Lanzamiento de muñeca Una niña de 6 años de edad que está parada sobre una caja de juguetes lanza una muñeca directamente hacia arriba, con una velocidad inicial de 16 pies por segundo. La altura h de la muñeca en pies, t segundos después de que se soltó se describe por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 16t + 4$. ¿Cuánto tiempo le toma a la muñeca alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

37. Lanzamiento de un cohete Un cohete de juguete se lanza verticalmente hacia arriba desde el techo de una cochera con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura, h, del cohete en pies, t segundos después que fue lanzado, se describe por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 80t + 16$. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la gráfica, y haga la gráfica de la función.

38. Cable en suspensión La forma del cable principal de un puente colgante puede describirse por medio de la función

$$y = f(x) = \frac{1}{500}x^2 + \frac{1}{250}x + 10, \quad -100 \leq x \leq 100,$$

en donde $f(x)$ es la altura del cable (en pies) por arriba del terraplén, y x es la distancia horizontal (en pies) medida desde el centro del puente. Haga la gráfica de la función y determine su rango.

39. Física El desplazamiento de un objeto desde un punto de referencia en el tiempo t está dado por

$$s = 3.2t^2 - 16t + 28.7,$$

donde s está en metros y t en segundos.

a. ¿Para qué valor de t ocurre el desplazamiento mínimo?
b. ¿Cuál es el desplazamiento mínimo del objeto, medido a partir del punto de referencia?

40. Fuerza Durante una colisión, la fuerza, F (en newtons), que actúa sobre un objeto varía con el tiempo t, de acuerdo con la ecuación $F = 87t - 21t^2$, donde t está en segundos.

a. ¿Para qué valor de t es máxima la fuerza?
b. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza?

41. Viga con carga Cuando una viga horizontal de longitud l es cargada uniformemente, la ecuación del momento es

$$M = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2},$$

donde w está relacionada con la carga, y x es la medida desde el extremo izquierdo de la viga.

a. ¿Para qué valor de x es M un máximo? (Suponga $w > 0$.)
b. ¿Cuál es el valor máximo de M?
c. ¿Para qué valores de x se tiene $M = 0$?

42. Área Exprese el área del rectángulo mostrado en la figura 4.26 como una función cuadrática de x. ¿Para qué valor de x el área será máxima?

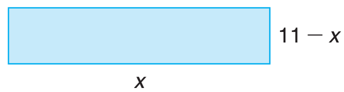


FIGURA 4.26 Diagrama para el problema 42.

43. Terreno cercado Un constructor de edificios quiere cercar un terreno rectangular adyacente a un río recto, utilizando la orilla del río como un lado del área encerrada (véase la fig. 4.27). Si el constructor tiene 200 pies de cerca, encuentre las dimensiones del área máxima que se puede encerrar.

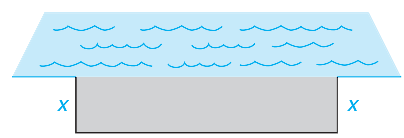


FIGURA 4.27 Diagrama para el problema 43.

44. Encuentre dos números cuya suma es 40 y su producto es un máximo.

45. A partir de la gráfica de $y = 1.4x^2 - 3.1x + 4.6$, determine las coordenadas del vértice. Redondee los valores a dos decimales. Verifique su respuesta utilizando la fórmula para el vértice.

46. Encuentre los ceros de $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + 8.5$ por inspección de su gráfica. Redondee los valores a dos decimales.

47. Determine el número de ceros reales de cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

a. $f(x) = 4.2x^2 - 8.1x + 10.4$.

b. $f(x) = 5x^2 - 2\sqrt{35}x + 7$.

c. $f(x) = \dfrac{5.1 - 7.2x - x^2}{4.8}$.

48. Encuentre el valor máximo (redondeado a dos decimales) de la función $f(x) = 5.4 + 12x - 4.1x^2$ a partir de su gráfica.

49. Encuentre el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de la función $f(x) = 20x^2 - 13x + 7$ a partir de su gráfica.

OBJETIVO Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables por medio de la técnica de eliminación por adición o por sustitución (en el capítulo 6 se mostrarán otros métodos).

4.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas con dos variables

Cuando una situación debe describirse matemáticamente, no es raro que surja un *conjunto* de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que el administrador de una fábrica establece un plan de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 piezas del tipo I y 9 piezas del tipo II. El modelo B requiere de 5 piezas del tipo I y 14 piezas del tipo II. De sus proveedores, la fábrica obtiene 335 piezas del tipo I y 850 piezas del tipo II cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir cada día, de modo que todas las piezas del tipo I y piezas del tipo II sean utilizadas?

Es buena idea construir una tabla que resuma la información importante. La tabla 4.2 muestra el número de piezas del tipo I y piezas del tipo II requeridas para cada modelo, así como el número total disponible.

TABLA 4.2

	Modelo A	Modelo B	Total disponible
Piezas tipo I	4	5	335
Piezas tipo II	9	14	850

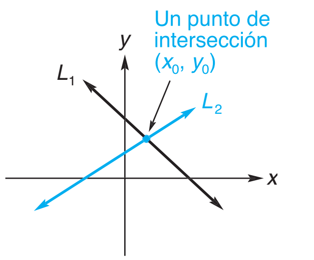


FIGURA 4.28 Sistema lineal (una solución).

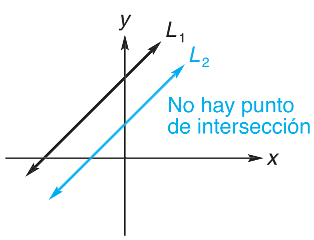


FIGURA 4.29 Sistema lineal (no hay solución).

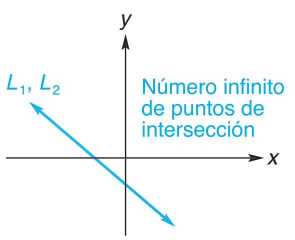


FIGURA 4.30 Sistema lineal (un número infinito de soluciones).

Suponga que hacemos x igual al número de artículos del modelo A fabricados cada día, y y igual al número de artículos del modelo B. Entonces éstos requieren de $4x + 5y$ piezas del tipo I y $9x + 14y$ piezas del tipo II. Como están disponibles 335 y 850 piezas del tipo I y II, respectivamente, tenemos

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & \textbf{(1)} \\ 9x + 14y = 850. & \textbf{(2)} \end{cases}$$

A este conjunto de ecuaciones le llamamos **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables (o incógnitas) x y y. El problema es encontrar valores de x y y para los cuales *ambas* ecuaciones sean verdaderas de manera *simultánea*. Estos valores se llaman *soluciones* del sistema.

Como las ecuaciones (1) y (2) son lineales, sus gráficas son líneas rectas; llamémoslas L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen la ecuación de esa línea; esto es, hacen a la ecuación verdadera. Por tanto, las coordenadas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Esto significa que un punto de intersección da una solución del sistema.

Si L_1 y L_2 se dibujan en el mismo plano, existen tres posibles situaciones:

1. L_1 y L_2 pueden intersecarse en exactamente un punto, digamos (x_0, y_0). (Véase la fig. 4.28). Por tanto, el sistema tiene la solución $x = x_0$ y $y = y_0$.
2. L_1 y L_2 pueden ser paralelas y no tener puntos en común (véase la fig. 4.29). En este caso no existe solución.
3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta (véase la fig. 4.30). Por tanto, las coordenadas de cualquier punto sobre la recta son una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.

Nuestro objetivo principal aquí es estudiar los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En esencia, remplazamos de manera sucesiva un sistema por otro que tenga la misma solución (esto es, remplazamos el sistema original por *sistemas equivalentes*), *pero cuyas ecuaciones tengan una forma progresivamente más adecuada para determinar la solución. En términos más precisos, buscamos un sistema equivalente que contenga una ecuación en la que una de las variables no aparezca* (*esto es, eliminar una de las variables*). Ilustraremos este procedimiento para el sistema propuesto originalmente:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & \textbf{(3)} \\ 9x + 14y = 850. & \textbf{(4)} \end{cases}$$

Para empezar, obtendremos un sistema equivalente en el que x no aparezca en una ecuación. Primero encontramos un sistema equivalente en el que los coeficientes de los términos en x en cada ecuación sean iguales excepto por el signo. Multiplicando la ecuación (3) por 9 [esto es, multiplicando ambos miembros de la ecuación (3) por 9] y multiplicando la ecuación (4) por -4 se obtiene

$$\begin{cases} 36x + 45y = 3015, & \textbf{(5)} \\ -36x - 56y = -3400. & \textbf{(6)} \end{cases}$$

Los miembros izquierdo y derecho de la ecuación (6) son iguales, de modo que cada miembro puede *sumarse* al correspondiente de la ecuación (5). Esto tiene como resultado

$$-11y = -385,$$

que sólo tiene una variable, como se planeó. Resolviéndola se obtiene

$$y = 35,$$

así obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 35, & \textbf{(7)} \\ -36x - 56y = -3400. & \textbf{(8)} \end{cases}$$

Al remplazar y en la ecuación (8) por 35, obtenemos

$$\begin{aligned} -36x - 56(35) &= -3400, \\ -36x - 1960 &= -3400, \\ -36x &= -1440, \\ x &= 40. \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = 35, \\ x = 40. \end{cases}$$

Podemos verificar nuestra respuesta sustituyendo $x = 40$ y $y = 35$ en *ambas* ecuaciones originales. En la ecuación (3) obtenemos $4(40 + 5(35) = 335$, o $335 = 335$. En la ecuación (4) obtenemos $9(40) + 14(35) = 850$, o bien, $850 = 850$. Por tanto, la solución es

$$x = 40 \quad \text{y} \quad y = 35.$$

Cada día el administrador debe planear la fabricación de 40 productos del modelo A y 35 del modelo B. El procedimiento efectuado se conoce como **eliminación por adición.** Aunque elegimos eliminar primero x, pudimos haber hecho lo mismo para y, mediante un procedimiento similar.

Principios en práctica 1

Método de eliminación por adición

Un especialista en computadoras tiene invertidos \$200,000 para su retiro, parte al 9% y parte al 8%. Si el ingreso anual total por las inversiones es de \$17,200, ¿cuánto está invertido en cada tasa?

EJEMPLO 1 Método de eliminación por adición

Utilizar eliminación por adición para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 3y + 2x = 3. \end{cases}$$

Solución: por conveniencia alineamos los términos en x y en y para obtener

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (9) \\ 2x + 3y = 3. & (10) \end{cases}$$

Para eliminar y, multiplicamos la ecuación (9) por 3 y la ecuación (10) por 4:

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (11) \\ 8x + 12y = 12. & (12) \end{cases}$$

Sumando la ecuación (11) a la (12) se obtiene $17x = 51$, de la cual $x = 3$. Tenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (13) \\ x = 3. & (14) \end{cases}$$

Al remplazar x por 3 en la ecuación (13) se obtiene

$$\begin{aligned} 9(3) - 12y &= 39, \\ -12y &= 12, \\ y &= -1, \end{aligned}$$

de modo que el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = -1, \\ x = 3. \end{cases}$$

La solución es $x = 3$ y $y = -1$. La figura 4.31 muestra una gráfica del sistema.

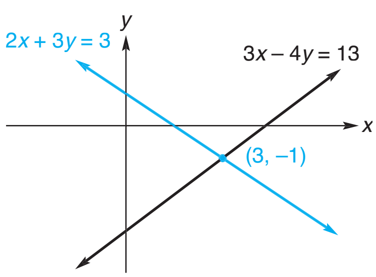


FIGURA 4.31 Sistema lineal del ejemplo 1; una solución.

El sistema del ejemplo 1,

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (15) \\ 2x + 3y = 3, & (16) \end{cases}$$

puede resolverse de otra manera. Primero elegimos una de las ecuaciones, por ejemplo, la ecuación (15), y despejamos una de las incógnitas en términos de la otra, digamos x en términos de y. Así la ecuación (15) es equivalente a $3x = 4y + 13$, o

$$x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3},$$

y obtenemos

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3}, & (17) \\ 2x + 3y = 3. & (18) \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x de la ecuación (17) en la ecuación (18) se obtiene

$$2\left(\frac{4}{3}y + \frac{13}{3}\right) + 3y = 3. \quad (19)$$

De este modo ya eliminamos x. Resolviendo la ecuación (19), tenemos

$$\frac{8}{3}y + \frac{26}{3} + 3y = 3,$$

$$8y + 26 + 9y = 9 \qquad \text{(eliminando fracciones),}$$

$$17y = -17,$$

$$y = -1.$$

Al remplazar y en la ecuación (17) por -1, se obtiene $x = 3$, y el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -1, \end{cases}$$

como vimos antes, este método se llama **eliminación por sustitución.**

Principios en práctica 2
Método de eliminación por sustitución

A dos especies de ciervos, A y B, que viven en un refugio de vida salvaje se les da alimento extra en invierno. Cada semana reciben 2 toneladas de alimento en forma de croqueta y 4.75 toneladas de heno. Cada ciervo de la especie A requiere 4 libras de croquetas y 5 libras de heno. Cada ciervo de la especie B requiere 2 libras de las croquetas y 7 libras de heno. ¿Cuántos ciervos de cada especie se podrán sustentar con el alimento, de modo que todo el alimento se consuma cada semana?

EJEMPLO 2 Método de eliminación por sustitución

Utilizar eliminación por sustitución para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0, \\ 2x + 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Solución: es fácil resolver la primera ecuación para x. Esto da el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & (20) \\ 2x + 4y + 4 = 0. & (21) \end{cases}$$

Al sustituir $-2y + 8$ por x en la ecuación (21) se obtiene

$$2(-2y + 8) + 4y + 4 = 0,$$

$$-4y + 16 + 4y + 4 = 0.$$

Esta última ecuación se simplifica a $20 = 0$. Por tanto, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & (22) \\ 20 = 0. & (23) \end{cases}$$

Ya que le ecuación (23) *nunca* es verdadera, **no existe solución** para el sistema original. La razón es clara si observamos que las ecuaciones originales pueden escribirse en la forma pendiente-ordenada al origen como

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

y

$$y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Estas ecuaciones representan líneas rectas que tienen pendientes de $-\frac{1}{2}$, pero diferentes intersecciones y, 4 y -1. Esto es, especifican rectas paralelas diferentes (véase la fig. 4.32).

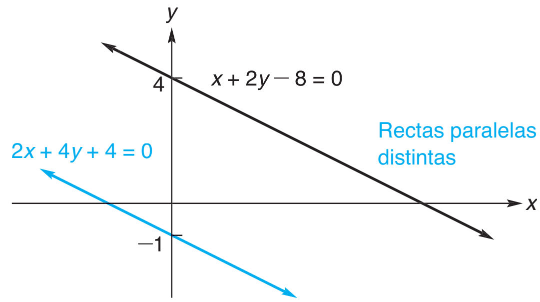


FIGURA 4.32 Sistema lineal del ejemplo 2; no hay solución.

■ ***Principios en práctica 3***

Un sistema lineal con un número infinito de soluciones

Dos especies de peces, A y B, están criándose en una granja piscícola, en donde se les alimenta con dos suplementos vitamínicos. Todos los días reciben 100 gramos del primer suplemento y 200 gramos del segundo suplemento. Cada pez de la especie A requiere 15 mg del primer suplemento y 30 mg del segundo suplemento. Cada pez de la especie B requiere 20 mg del primer suplemento y 40 mg del segundo suplemento. ¿Cuántos peces de cada especie puede sustentar la granja de modo que todos los suplementos se consuman cada día?

■ **EJEMPLO 3 Un sistema lineal con un número infinito de soluciones**

Resolver

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(24)} \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y = 1. & \textbf{(25)} \end{cases}$$

Solución: empezamos eliminando x de la segunda ecuación. Multiplicando la ecuación (25) por −2, tenemos

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(26)} \\ -x - 5y = -2. & \textbf{(27)} \end{cases}$$

Sumando la ecuación (26) a la (27) se obtiene

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(28)} \\ 0 = 0. & \textbf{(29)} \end{cases}$$

Puesto que la ecuación (29) *siempre* es cierta, cualquier solución de la ecuación (28) es una solución del sistema. Ahora veamos cómo podemos expresar nuestra respuesta. De la ecuación (28) tenemos $x = 2 - 5y$, donde y puede ser cualquier número real, digamos r. Por tanto, podemos escribir $x = 2 - 5r$. La solución completa es

$$x = 2 - 5r,$$
$$y = r,$$

donde r es cualquier número real. En esta situación, r se denomina un **parámetro,** y decimos que tenemos una familia de soluciones con un parámetro. Cada valor de r determina una solución particular. Por ejemplo, si $r = 0$, entonces $x = 2$ y $y = 0$, es una solución; si $r = 5$, entonces $x = -23$ y $y = 5$ es otra solución. Es claro que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Es útil notar que al escribir las ecuaciones (24) y (25) en sus formas pendientes-intersección al origen, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \end{cases}$$

en el que ambas ecuaciones representan a la misma recta. De aquí que las rectas coincidan (véase la fig. 4.33) y las ecuaciones (24) y (25) sean equivalentes. La solución al sistema consiste en las parejas de coordenadas de todos los puntos sobre la recta $x + 5y = 2$, puntos que están dados por nuestra solución paramétrica.

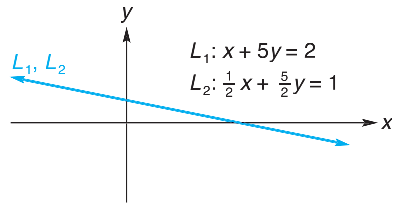


FIGURA 4.33 Sistema lineal del ejemplo 3; un número infinito de soluciones.

Tecnología

Resolver de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 9x + 4.1y = 7, \\ 2.6x - 3y = 18. \end{cases}$$

Solución: primero resolvemos cada ecuación para y de modo que cada ecuación tenga la forma $y = f(x)$.

$$y = \frac{1}{4.1}(7 - 9x),$$

$$y = -\frac{1}{3}(18 - 2.6x).$$

Ahora introducimos estas funciones como Y_1 y Y_2, y las desplegamos sobre el mismo rectángulo de visualización (véase la fig. 4.34). Por último, ya sea utilizando la característica de trazado y acercamiento, o bien, la de intersección, estimamos la solución como $x = 2.52$ $y = -3.82$.

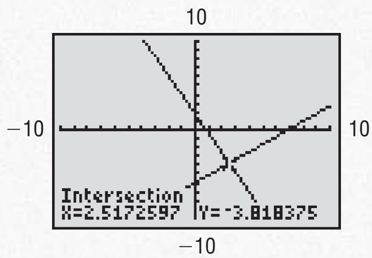


FIGURA 4.34 Solución gráfica del sistema.

EJEMPLO 4 Mezcla

Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 litros de solución de ácido al 25% (25% del volumen es ácido). Si en existencia hay disponibles soluciones al 30% y al 18%, ¿cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?

Solución: sean x y y, respectivamente, el número de litros de las soluciones al 30% y 18% que deben mezclarse. Entonces

$$x + y = 500.$$

Para ayudar a visualizar la situación, dibujamos el diagrama en la figura 4.35. En 500 litros de una solución al 25%, habrá $0.25(500) = 125$ litros de ácido. Este ácido proviene de dos fuentes: $0.30x$ litros de la solución al 30% y $0.18y$ litros provienen de la solución al 18%. De aquí que,

$$0.30x + 0.18y = 125.$$

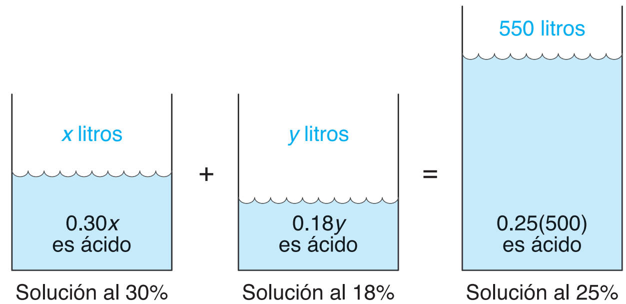


FIGURA 4.35 Problema de la mezcla.

Estas dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si resolvemos la primera para x obtenemos $x = 500 - y$. Sustituyendo en la segunda se obtiene

$$0.30(500 - y) + 0.18y = 125.$$

Resolviendo ésta para y, encontramos que $y = 208\frac{1}{3}$ litros. Así $x = 500 - 208\frac{1}{3} = 291\frac{2}{3}$ litros (véase la fig. 4.36).

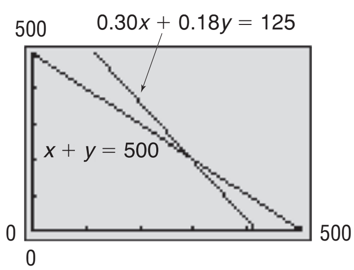


FIGURA 4.36 Gráfica para el ejemplo 4.

Sistemas con tres variables

Los métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables también pueden utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables. Una **ecuación lineal general con tres variables *x*, *y* y *z*** es una ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + Cz = D,$$

donde A, B, C y D son constantes y A, B y C no son todas cero. Por ejemplo, $2x - 4y + z = 2$ es una de tales ecuaciones. Una ecuación lineal general con tres variables representa geométricamente un *plano* en el espacio, y una solución al sistema de tales ecuaciones es la intersección de los planos. El ejemplo 5 muestra cómo resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

Principios en práctica 4

Resolución de un sistema lineal de tres variables

Una cafetería se especializa en mezclas de café. Con base en café de tipo A, tipo B y tipo C, el dueño quiere preparar una mezcla que venderá en \$8.50 por una bolsa de una libra. El costo por libra de estos cafés es de \$12, \$9 y \$7, respectivamente. La cantidad del tipo B debe ser el doble de la cantidad del tipo A. ¿Cuánto café de cada tipo estará en la mezcla final?

EJEMPLO 5 Resolución de un sistema lineal con tres variables

Resolver

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3, & \textbf{(30)} \\ -x + 2y + 2z = 1, & \textbf{(31)} \\ x - y - 3z = -6. & \textbf{(32)} \end{cases}$$

Solución: este sistema está constituido por tres ecuaciones lineales con tres variables. De la ecuación (32), $x = y + 3z - 6$. Sustituyendo este valor para x en las ecuaciones (30) y (31), obtenemos

$$\begin{cases} 2(y + 3z - 6) + y + z = 3, \\ -(y + 3z - 6) + 2y + 2z = 1, \\ x = y + 3z - 6. \end{cases}$$

Simplificando, se obtiene

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & (33) \\ y - z = -5, & (34) \\ x = y + 3z - 6. & (35) \end{cases}$$

Observe que x no aparece en las ecuaciones (33) y (34). Puesto que cualquier solución del sistema original debe satisfacer las ecuaciones (33) y (34), primero debemos considerar su solución:

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & (33) \\ y - z = -5. & (34) \end{cases}$$

De la ecuación (34), $y = z - 5$. Esto significa que podemos remplazar la ecuación (33) por

$$3(z - 5) + 7z = 15, \quad \text{o} \quad z = 3.$$

Como z es 3, podemos remplazar la ecuación (34) por $y = -2$. De aquí que el sistema anterior sea equivalente a

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

El sistema original se transforma en

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2, \\ x = y + 3z - 6, \end{cases}$$

de lo cual $x = 1$. La solución es $x = 1$, $y = -2$, y $z = 3$, que usted puede verificar.

Al igual que un sistema de dos variables puede tener una familia de soluciones con un parámetro, un sistema con tres variables puede tener una familia de soluciones con uno o dos parámetros.[6] Los dos ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 6 Familia de soluciones con un parámetro

Resolver

$$\begin{cases} x - 2y = 4, & (35) \\ 2x - 3y + 2z = -2, & (36) \\ 4x - 7y + 2z = 6. & (37) \end{cases}$$

Solución: observe que, ya que la ecuación (35) puede escribirse como $x - 2y + 0z = 4$, podemos considerar a las ecuaciones (35) a (37) como un sistema de tres ecuaciones lineales en las variables x, y y z. De la ecuación (35) tenemos $x = 2y + 4$. Podemos emplear esta ecuación y el método de sustitución para eliminar x de las ecuaciones (36) y (37):

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ 2(2y + 4) - 3y + 2z = -2, \\ 4(2y + 4) - 7y + 2z = 6. \end{cases}$$

[6]Nota para el profesor: los ejemplos 6 y 7 pueden omitirse sin pérdida de continuidad.

O de manera más sencilla,

$$\begin{cases} x = 2y + 4, & (38) \\ y + 2z = -10, & (39) \\ y + 2z = -10. & (40) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (40) por -1 se obtiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ y + 2z = -10, \\ -y - 2z = 10. \end{cases}$$

Sumando la segunda ecuación a la tercera se obtiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ y + 2z = -10, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Como la ecuación $0 = 0$ siempre es verdadera, en esencia podemos tratar con el sistema

$$\begin{cases} x = 2y + 4, & (41) \\ y + 2z = -10. & (42) \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación (42) para y, tenemos

$$y = -10 - 2z,$$

que expresa a y en términos de z. También podemos expresar a x en términos de z. De la ecuación (41),

$$\begin{aligned} x &= 2y + 4 \\ &= 2(-10 - 2z) + 4 \\ &= -16 - 4z. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{cases} x = -16 - 4z, \\ y = -10 - 2z. \end{cases}$$

Como no hay restricciones sobre z, esto sugiere una familia de soluciones paramétricas. Haciendo $z = r$, tenemos la familia de soluciones siguiente para el sistema dado:

$$\begin{aligned} x &= -16 - 4r, \\ y &= -10 - 2r, \\ z &= r, \end{aligned}$$

Son posibles otras representaciones paramétricas de la solución.

donde r puede ser cualquier número real. Entonces, vemos que el sistema dado tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, haciendo $r = 1$ se obtiene la solución particular $x = -20$, $y = -12$ y $z = 1$.

EJEMPLO 7 Familia de soluciones con dos parámetros

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 2x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$$

Solución: éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables. Eliminaremos x de la segunda ecuación multiplicándola primero por $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ -x - 2y - z = -4. \end{cases}$$

Sumando la primera ecuación a la segunda se obtiene

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación, obtenemos

$$x = 4 - 2y - z.$$

Como no existe restricción sobre y o z, éstos pueden ser números reales arbitrarios, lo que nos da una familia de soluciones con dos parámetros. Haciendo $y = r$ y $z = s$, encontramos que la solución del sistema es

$$x = 4 - 2r - s,$$

$$y = r,$$

$$z = s,$$

donde r y s pueden ser cualesquiera números reales. Cada asignación de valores a r y a s da una solución del sistema, de modo que existe un número infinito de soluciones. Por ejemplo, haciendo $r = 1$ y $s = 2$ se obtiene la solución particular $x = 0$, $y = 1$ y $z = 2$.

Ejercicio 4.4

En los problemas del 1 al 24 resuelva algebraicamente los sistemas.

1. $\begin{cases} x + 4y = 3, \\ 3x - 2y = -5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 2y = 9, \\ 5y - 4x = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -x + 2y = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5v + 2w = 36, \\ 8v - 3w = -54. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -p - q = -3, \\ 3p + 2q = 19. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y = -7, \\ 5x + 3y = -9. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ 5x + 9y = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 3x - 7y, \\ x + 5y - 2 = y + 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6, \\ \frac{21}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2, \\ \frac{3}{8}x + \frac{5}{6}y = -\frac{11}{2}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}w = \frac{1}{6}, \\ z + \frac{1}{2}w = \frac{2}{3}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4p + 12q = 6, \\ 2p + 6q = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ -10x + 6y = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + y + 6z = 3, \\ x - y + 4z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 3x + y + z = 1, \\ 4x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x - 7y + 4z = 2, \\ 3x + 2y - 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ -2x + y - 3z = 15, \\ \frac{3}{2}x + \frac{4}{5}y + 4z = 10. \end{cases}$

[7]**19.** $\begin{cases} x - 2z = 1, \\ y + z = 3. \end{cases}$

[7]**20.** $\begin{cases} 2y + 3z = 1, \\ 3x - 4z = 0. \end{cases}$

[7]**21.** $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

[7]**22.** $\begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x - 4y - 2z = 0, \\ -x + 2y + z = 0. \end{cases}$

[7]**23.** $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3, \\ 4x + 4y - 2z = 6. \end{cases}$

[7]**24.** $\begin{cases} x + 2y - 3z = -4, \\ 2x + y - 3z = 4. \end{cases}$

[7]Hace referencia a los conceptos de los ejemplos 6 y 7.

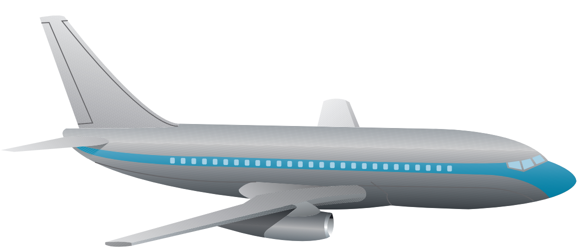
25. Mezcla Un fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 700 galones de una solución de ácido al 24%. En existencia tiene soluciones al 20% y 30%. ¿Cuántos galones de cada solución debe mezclar para surtir el pedido?

26. Mezcla Un jardinero tiene dos fertilizantes que contienen diferentes concentraciones de nitrógeno. Uno tiene 3% de nitrógeno y el otro tiene 11% de nitrógeno. ¿Cuántas libras de cada fertilizante debe mezclar para obtener 20 libras con una concentración de 9%?

27. Tejidos Una fábrica de tejidos produce un tejido hecho a partir de diferentes fibras. Con base en algodón, poliéster y nylon, el propietario necesita producir un tejido combinado que cueste $3.25 por libra fabricada. El costo por libra de estas fibras es de $4.00, $3.00 y $2.00, respectivamente. La cantidad de nylon debe ser la misma que la cantidad de poliéster. ¿Cuánto de cada fibra debe tener el tejido final?

28. Impuesto Una compañía tiene ingresos gravables por $312,000. El impuesto federal es el 25% de la parte que queda después que el impuesto estatal ha sido pagado. El impuesto estatal es un 10% de la parte que queda después que el federal ha sido pagado. Encuentre los impuestos federal y estatal.

29. Velocidad de un aeroplano Un aeroplano recorre 900 millas en 3 horas con viento a favor. Le toma 3 horas 36 minutos el viaje de regreso volando en contra del viento. Encuentre la velocidad del aeroplano sin viento, calcule también la velocidad del viento.

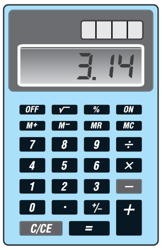


30. Velocidad de una balsa En un viaje en balsa tomó $\frac{3}{4}$ de hora recorrer 12 millas río abajo. El viaje de regreso tomó $1\frac{1}{2}$ horas. Encuentre la velocidad de la balsa con el agua en calma, y calcule la velocidad de la corriente.

31. Venta de muebles Un fabricante de comedores produce dos estilos, Early American y Contemporáneo. Por su experiencia, el administrador ha determinado que pueden venderse 20% más comedores Early American que Contemporáneo. En cada venta de un Early American hay una utilidad de $250, mientras que se gana $350 en cada Contemporáneo. Si en el año próximo, el administrador desea una ganancia total de $130,000, ¿cuántas unidades de cada estilo deben venderse?

32. Encuesta A Encuestas Nacionales se le concedió un contrato para realizar una encuesta de preferencia de producto para Crispy Crackers. Un total de 250 personas fueron entrevistadas. Encuestas Nacionales reportó que a 62.5% más de las personas les gustaba Crispy Crakers que a las que no les gustaba. Sin embargo, el reporte no indicó que el 16% de las personas entrevistadas no habían contestado. ¿A cuántas de las personas entrevistadas les gustó Crispy Crakers? ¿A cuántas no? ¿Cuántas no contestaron?

33. Costo de igualación Productos Unidos, S. A., fabrica calculadoras y tiene plantas en las ciudades de Exton y Whyton. En la planta de Exton, los costos fijos son de $7000 por mes, y el costo de producir cada calculadora es de $7.50. En la planta de Whyton, los costos fijos son de $8800 por mes y cada calculadora cuesta $6 producirla. Si el mes siguiente, Productos Unidos debe producir 1500 calculadoras, ¿cuántas debe producir cada planta si el costo total en cada una debe ser el mismo?



34. Mezcla de café Un comerciante de café mezcla tres tipos de café que cuestan $2.20, $2.30 y $2.60 por libra, para obtener 100 lb de café que vende a $2.40 por libra. Si utiliza la misma cantidad de los dos cafés más caros, ¿cuánto de cada tipo debe utilizar en la mezcla?

35. Comisiones Una compañía paga a sus agentes de ventas con base en un porcentaje de los primeros $100,000 en ventas, más otro porcentaje sobre cualquier cantidad que rebase esos $100,000. Si un agente recibió $8500 por ventas de $175,000, y otro recibió $14,800 por ventas de $280,000, encuentre los dos porcentajes.

36. Utilidades anuales En reportes financieros, las utilidades de una compañía en el año actual (T) con frecuencia son comparadas con las del año anterior (L), pero los valores reales de T y L no siempre son dados. Este año una compañía tuvo una utilidad de $20 millones más que el año pasado. Las utilidades fueron 25% mayores. A partir de estos datos determine T y L.

37. Producción La compañía Controles Universales fabrica unidades de control. Sus modelos nuevos son el Argón I y el Argón II. Para fabricar cada unidad de Argón I, usan 6 medidores y 3 controladores. Para fabricar cada unidad de Argón II, usan 10 medidores y 8 controladores. La compañía recibe un total de 760 medidores y 500 controladores diarios de sus proveedores. ¿Cuántas unidades de cada modelo puede producir diariamente? Suponga que se utilizan todas las partes.

38. Inversiones Una persona tiene dos inversiones y el porcentaje de ganancia por año en cada una de ellas es el mismo. Del total de la cantidad invertida $\frac{3}{10}$ de ella más $600 se invirtieron en una empresa de riesgo, y al final de un año la persona recibió un rendimiento de $384 de esa empresa. Si el rendimiento total después de un año fue de $1120, encuentre la cantidad total invertida.

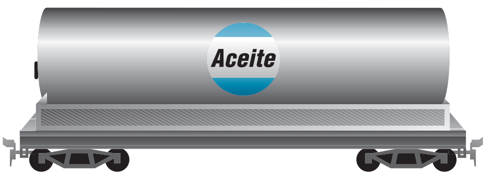
39. Producción Una compañía produce tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla siguiente. La compañía tiene en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, la compañía quiere utilizar todas sus existencias. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón reclinable	1 unidad	2 unidades	5 unidades

40. Inversiones Un total de $35,000 se invirtieron a tres tasas de interés: 7, 8 y 9%. El interés en el primer año fue de $2830, que no se reinvirtió. El segundo año la cantidad originalmente invertida al 9% devengó un 10%, y las otras tasas permanecieron iguales. El interés total en el segundo año fue de $2960. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

41. Contratación de trabajadores Una compañía paga a sus trabajadores calificados $15 por hora en su departamento de ensamblado. Los trabajadores semicalificados en ese departamento ganan $9 por hora. A los empleados de envíos se les paga $10 por hora. A causa de un incremento en los pedidos, la compañía necesita contratar un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamblado y envíos. Pagará un total de $760 por hora a estos empleados. A causa de un contrato con el sindicato, deben emplearse el doble de trabajadores semicalificados que de trabajadores calificados. ¿Cuántos trabajadores semicalificados, calificados y empleados de envíos debe contratar la compañía?

42. Almacenamiento de un disolvente Un tanque de ferrocarril de 10,000 galones se llenará con disolvente de dos tanques de almacenamiento, A y B. El disolvente de A se bombea a una velocidad de 20 gal/min. El disolvente B se bombea a una velocidad de 30 gal/min. En general, ambas bombas operan al mismo tiempo. Sin embargo, a causa de un fusible fundido la bomba en A estuvo sin funcionar 10 minutos. ¿Cuántos galones de cada tanque de almacenamiento se utilizarán para llenar el tanque del ferrocarril?



43. Verifique su respuesta al problema 1 utilizando su calculadora gráfica.

44. Verifique su respuesta al problema 11 utilizando su calculadora gráfica.

45. Resuelva de manera gráfica el sistema.

$$\begin{cases} 0.24x - 0.34y = 0.04, \\ 0.11x + 0.21y = 0.75. \end{cases}$$

46. Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}y = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a dos decimales.

47. Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 0.5736x - 0.3420y = 0, \\ 0.8192x + 0.9397y = 20. \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a un decimal.

OBJETIVO Utilizar la sustitución para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

4.5 SISTEMAS NO LINEALES

Un sistema de ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal se llama **sistema no lineal.** Con frecuencia podemos resolver un sistema no lineal por sustitución, como se hizo con los sistemas lineales. Los ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema no lineal

Resolver

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y - 7 = 0, & (1) \\ 3x - y + 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

Solución:

Estrategia: si un sistema no lineal contiene una ecuación lineal, en general despejamos una de las variables de la ecuación lineal y sustituimos esa variable en la otra ecuación.

Si resolvemos la ecuación (2) para y se obtiene

$$y = 3x + 1. \tag{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y simplificando, tenemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + (3x + 1) - 7 &= 0, \\ x^2 + x - 6 &= 0, \\ (x + 3)(x - 2) &= 0, \\ x = -3 \quad \text{o} \quad x &= 2. \end{aligned}$$

Si $x = -3$, entonces la ecuación (3) implica que $y = -8$; si $x = 2$, entonces $y = 7$. Debe verificar que cada pareja de valores satisfaga el sistema dado. De aquí que las soluciones sean $x = -3, y = -8$ y $x = 2, y = 7$. La solución geométrica se presenta en la gráfica del sistema de la figura 4.37. Observe que la gráfica de la ecuación (1) es una parábola y la de la ecuación (2) una recta. Las soluciones corresponden a los puntos de intersección $(-3, -8)$ y $(2, 7)$.

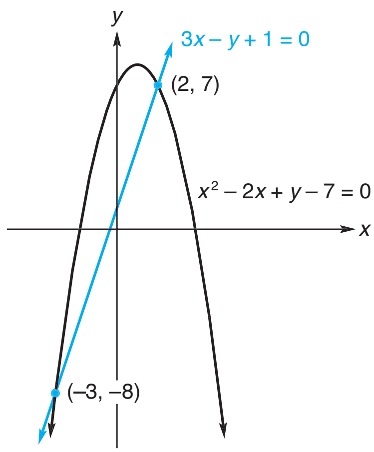


FIGURA 4.37 Sistema de ecuaciones no lineales.

Este ejemplo ilustra la necesidad de verificar todas las "soluciones".

EJEMPLO 2 Resolución de un sistema no lineal

Resolver

$$\begin{cases} y = \sqrt{x + 2}, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Solución: al resolver la segunda ecuación, que es lineal, para y se obtiene

$$y = 4 - x. \tag{4}$$

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} 4 - x &= \sqrt{x + 2}, \\ 16 - 8x + x^2 &= x + 2 \qquad \text{(elevando al cuadrado ambos lados)}, \\ x^2 - 9x + 14 &= 0, \\ (x - 2)(x - 7) &= 0. \end{aligned}$$

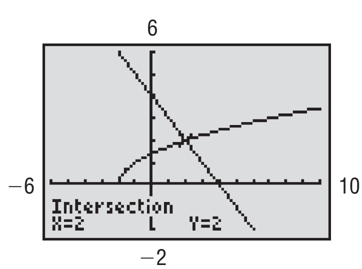


FIGURA 4.38 Sistema no lineal del ejemplo 2.

Por tanto, $x = 2$ o $x = 7$. De la ecuación (4), si $x = 2$, entonces $y = 2$; si $x = 7$, entonces $y = -3$. Puesto que realizamos la operación de elevar al cuadrado en ambos miembros, debemos verificar nuestros resultados. Mientras que la pareja $x = 2$ y $y = 2$ satisface ambas ecuaciones originales, éste no es el caso para $x = 7$ y $y = -3$. Por tanto, la solución es $x = 2, y = 2$ (véase la fig. 4.38).

Tecnología

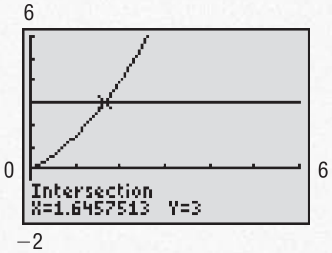


FIGURA 4.39 Solución de $0.5x^2 + x = 3$.

Resolver gráficamente la ecuación $0.5x^2 + x = 3$, *donde* $x \geq 0$.

Solución: para resolver la ecuación, podríamos encontrar los ceros de la función $f(x) = 0.5x^2 + x - 3$. De manera alterna, podemos pensar en este problema como la solución del sistema no lineal

$$y = 0.5x^2 + x,$$

$$y = 3.$$

En la figura 4.39, se estima que el punto de intersección es $x = 1.65$, $y = 3$. Observe que la gráfica de $y = 3$ es una recta horizontal. La solución de la ecuación dada es $x = 1.65$.

Ejercicio 4.5

En los problemas del 1 al 14 resuelva el sistema no lineal dado.

1. $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ 3x + y = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = x^3, \\ x - y = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} p^2 = 5 - q, \\ p = q + 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 28, \\ x - y = 14. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = y^2, \\ y = x^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} p^2 - q = 0, \\ 3q - 2p - 1 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = 4x - x^2 + 8, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} p = \sqrt{q}, \\ p = q^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} z = 4/w, \\ 3z = 2w + 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 = y^2 + 13, \\ y = x^2 - 15. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = y + 6, \\ y = 3\sqrt{x + 4}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{x - 1} + 1, \\ y = \dfrac{1}{x - 1}. \end{cases}$

---

15. Decoración La forma de una serpentina suspendida por encima de una pista de baile, puede describirse por medio de la función $y = 0.01x^2 + 0.01x + 7$, en donde y es la altura de la serpentina (en pies) por encima del piso, y x es la distancia horizontal (en pies) desde el centro del salón. Una cuerda descrita por medio de la función $y = 0.01x + 8.0$, y que sujeta otra decoración toca a la serpentina. ¿En dónde toca la cuerda a la serpentina?

16. Marquesina La forma de una marquesina decorativa sobre una fachada puede describirse por medio de la función $y = 0.06x^2 + 0.012x + 8$, en donde y es la altura del borde de la marquesina (en pies) por encima de la acera, y x es la distancia (en pies) medida desde el centro del portal de la tienda. Un vándalo mete un palo a través de la marquesina, perforando en dos lugares. La posición del palo puede describirse por medio de la función $y = 0.912x + 5$. ¿En qué parte de la marquesina están los agujeros que hizo el vándalo?

17. Determine de manera gráfica, el número de soluciones que tiene el sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

18. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = 6 - x^2 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

19. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = x^3 + x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

20. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^3 - x, \\ y = 4x \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

En los problemas del 21 al 23 resuelva gráficamente la ecuación tratándola como un sistema. Redondee las respuestas a dos decimales.

21. $0.8x^2 + 2x = 6$, donde $x \geq 0$.

22. $\sqrt{x + 2} = 5 - x$.

23. $x^3 - 3x^2 = x - 8$.

OBJETIVO Resolver sistemas que describen situaciones de equilibrio y puntos de equilibrio.

4.6 Aplicaciones de sistemas de ecuaciones

Equilibrio

Recuerde de la sección 4.2 que una ecuación que relaciona el precio por unidad y la cantidad demandada (suministrada), se llama *ecuación de demanda* (*ecuación de oferta*). Suponga que para un producto Z la ecuación de demanda es

$$p = -\frac{1}{180}q + 12 \tag{1}$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{1}{300}q + 8, \tag{2}$$

donde $q, p \geq 0$. Las correspondientes curvas de demanda y oferta son las líneas de las figuras 4.40 y 4.41, respectivamente. Al analizar la figura 4.40, vemos que los clientes comprarán 540 unidades por semana cuando el precio sea de \$9 por unidad, 1080 unidades cuando el precio sea \$6 y así sucesivamente. La figura 4.41 muestra que cuando el precio es de \$9 por unidad, los productores colocarán 300 unidades por semana en el mercado, a \$10 colocarán 600 unidades, y así sucesivamente.

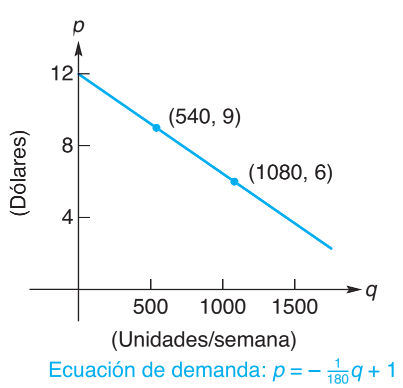


FIGURA 4.40 Curva de demanda.

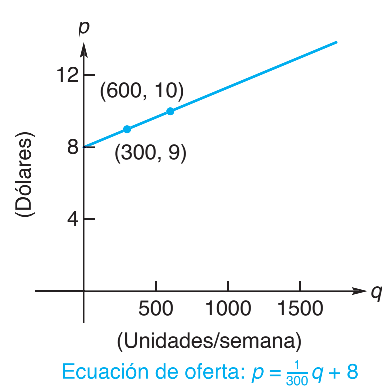


FIGURA 4.41 Curva de oferta.

Cuando las curvas de demanda y oferta de un producto se representan en el mismo plano de coordenadas, el punto (m, n) en donde las curvas se intersecan se llama **punto de equilibrio** (véase la fig. 4.42). El precio, n, llamado **precio de equilibrio,** es el precio al que los consumidores comprarán la misma cantidad de un producto, que los productores ofrezcan a ese precio. En resumen, n es el precio en que se da una estabilidad entre productor y consumidor. La cantidad m se llama **cantidad de equilibrio.**

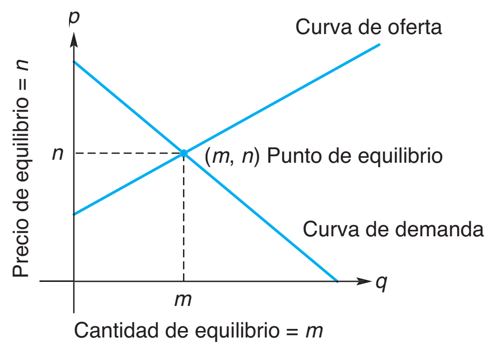


FIGURA 4.42 Equilibrio.

Para determinar con precisión el punto de equilibrio, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda. Hagamos esto para los datos anteriores, es decir, el sistema

$$\begin{cases} p = -\dfrac{1}{180}q + 12 & \text{(ecuación de demanda),} \\[2ex] p = \dfrac{1}{300}q + 8 & \text{(ecuación de oferta).} \end{cases}$$

Sustituyendo p por $\dfrac{1}{300}q + 8$ en la ecuación de demanda, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{300}q + 8 &= -\frac{1}{180}q + 12, \\ \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{180}\right)q &= 4, \\ q &= 450 \qquad \text{(cantidad de equilibrio).} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{300}(450) + 8 \\ &= 9.50 \qquad \text{(precio de equilibrio),} \end{aligned}$$

y el punto de equilibrio es (450, 9.50). Por tanto, al precio de \$9.50 por unidad, los fabricantes producirían exactamente la cantidad (450) de unidades por semana que los consumidores comprarían a ese precio (véase la fig. 4.43).

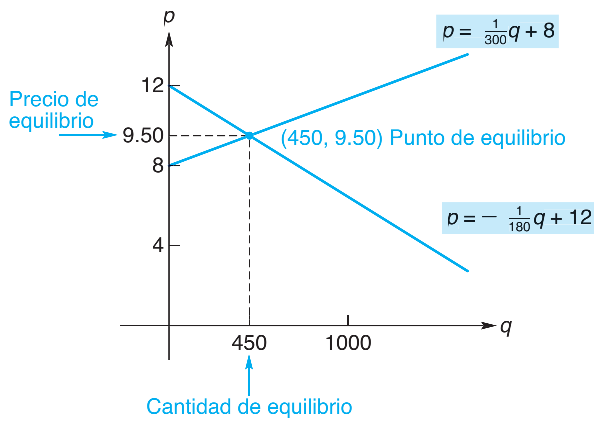


FIGURA 4.43 Equilibrio.

EJEMPLO 1 Efecto de los impuestos sobre el equilibrio

Sea $p = \frac{8}{100}q + 50$ la ecuación de oferta para el producto de un fabricante y suponga que la ecuación de demanda es $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

a. *Si se cobra al fabricante un impuesto de* \$1.50 *por unidad, ¿cómo se afectará el precio de equilibrio original si la demanda permanece igual?*

Solución: antes del impuesto, el precio de equilibrio se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{8}{100}q + 50, \\[2ex] p = -\dfrac{7}{100}q + 65. \end{cases}$$

Por sustitución,

$$\begin{aligned} -\frac{7}{100}q + 65 &= \frac{8}{100}q + 50, \\ 15 &= \frac{15}{100}q, \\ 100 &= q, \end{aligned}$$

y

$$p = \frac{8}{100}(100) + 50 = 58.$$

Por tanto, \$58 es el precio de equilibrio original. Antes del impuesto el fabricante ofrecía q unidades a un precio de $p = \frac{8}{100}q + 50$ por unidad. Después del impuesto venderá las mismas q unidades con el \$1.50 adicional por unidad. El precio por unidad será $(\frac{8}{100}q + 50) + 1.50$, de modo que la nueva ecuación de oferta es

$$p = \frac{8}{100}q + 51.50.$$

La resolución del sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{8}{100}q + 51.50, \\ p = -\dfrac{7}{100}q + 65 \end{cases}$$

dará el nuevo precio de equilibrio:

$$\frac{8}{100}q + 51.50 = -\frac{7}{100}q + 65,$$

$$\frac{15}{100}q = 13.50,$$

$$q = 90,$$

$$p = \frac{8}{100}(90) + 51.50 = 58.70.$$

El impuesto de \$1.50 por unidad incrementó el precio de equilibrio en \$0.70 (véase la fig. 4.44). Observe que también existe una disminución en la cantidad de equilibrio, de $q = 100$ a $q = 90$, a causa del cambio en el precio de equilibrio (en los ejercicios se le pide que determine el efecto de un subsidio dado al fabricante, lo cual reducirá el precio del producto).

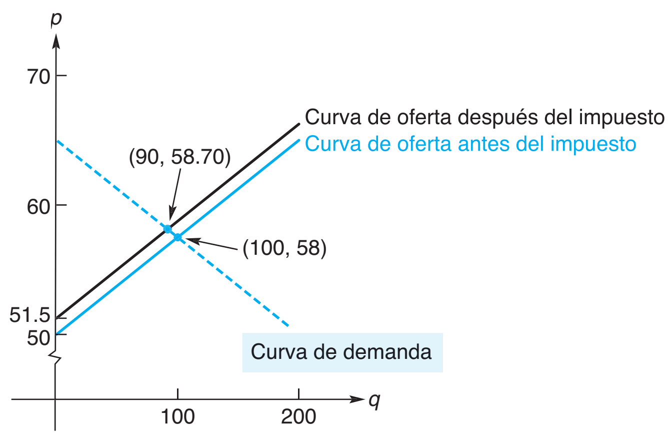


FIGURA 4.44 Equilibrio antes y después del impuesto.

b. *Determinar el ingreso total obtenido por el fabricante en el punto de equilibrio antes y después del impuesto.*

Solución: si se venden q unidades de un producto a un precio de p dólares cada una, entonces el ingreso total está dado por

$$y_{\mathrm{TR}} = pq.$$

Antes del impuesto, el ingreso en (100, 58) es (en dólares)

$$y_{\mathrm{TR}} = (58)(100) = 5800.$$

Después del impuesto es

$$y_{TR} = (58.70)(90) = 5283,$$

que es una disminución.

EJEMPLO 2 Equilibrio con demanda no lineal

Encontrar el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son $p = \frac{q}{40} + 10$ *y* $p = \frac{8000}{q}$*, respectivamente.*

Solución: aquí la ecuación de demanda no es lineal. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{q}{40} + 10, \\ p = \dfrac{8000}{q} \end{cases}$$

por sustitución se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{8000}{q} &= \frac{q}{40} + 10, \\ 320{,}000 &= q^2 + 400q \quad \text{(multiplicando ambos miembros por } 40q\text{)}, \\ q^2 + 400q - 320{,}000 &= 0, \\ (q + 800)(q - 400) &= 0, \\ q = -800 \quad &\text{o} \quad q = 400. \end{aligned}$$

Descartamos $q = -800$, ya que q representa una cantidad. Eligiendo $q = 400$, tenemos $p = (8000/400) = 20$, de modo que el punto de equilibrio es (400, 20). (Véase la fig. 4.45.)

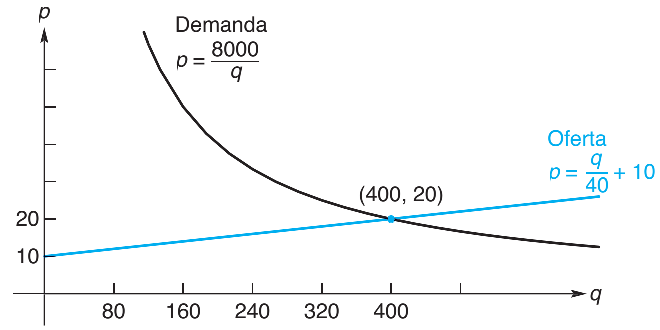


FIGURA 4.45 Equilibrio con demanda no lineal.

Puntos de equilibrio

Suponga que un fabricante produce un producto A y lo vende a \$8 por unidad. Entonces, el ingreso total y_{TR} recibido (en dólares) de la venta de q unidades es

$$y_{TR} = 8q \qquad \text{(ingreso total).}$$

La diferencia entre el ingreso total recibido por q unidades y el costo total de q unidades, es la utilidad del fabricante (o pérdida si es negativa):

$$\textbf{utilidad (o pérdida)} = \textbf{ingreso total} - \textbf{costo total.}$$

El **costo total,** y_{TR}, es la suma de los costos totales variables y_{VC}, y los costos totales fijos y_{FC}.

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC}.$$

Los **costos fijos** son aquellos costos que bajo condiciones normales no dependen del nivel de producción; esto es, en algún periodo permanecen constantes en todos los niveles de producción (ejemplos son renta, salario de los oficinistas y mantenimiento normal). Los **costos variables** son los que varían con el nivel de producción (como el costo de materiales, salarios, mantenimiento debido al uso y desgaste, etc.). Suponga que, para q unidades de producto A,

$$y_{FC} = 5000 \qquad \text{(costo fijo)}$$

$$\text{y} \quad y_{VC} = \frac{22}{9}q \qquad \text{(costo variable).}$$

Entonces

$$y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000 \qquad \text{(costo total).}$$

Las gráficas del costo total y del ingreso total aparecen en la figura 4.46. El eje horizontal representa el nivel de producción, q, y el eje vertical representa el valor total, en dólares, del ingreso o del costo. El **punto de equilibrio** es el punto en que el ingreso total es igual al costo total (TR = TC); ocurre cuando los niveles de producción y de ventas tienen como resultado cero pérdidas y cero utilidades. En el diagrama, llamado *diagrama del punto de equilibrio*, está el punto (m, n), en el que las gráficas de $y_{TR} = 8q$ y $y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000$ se intersecan. Llamamos a m la **cantidad de equilibrio** y a n el **ingreso de equilibrio.** Cuando el costo total y el ingreso total están relacionados de manera lineal con la producción, como es nuestro caso, para cualquier nivel de producción mayor que m, el ingreso total es mayor que el costo total, lo que trae como resultado una utilidad. Sin embargo, en cualquier nivel menor de m unidades, el ingreso total es menor que el costo total, lo que trae como resultado una pérdida. Para una producción de m unidades la utilidad es cero. En el ejemplo siguiente examinaremos nuestros datos con mayor detalle.

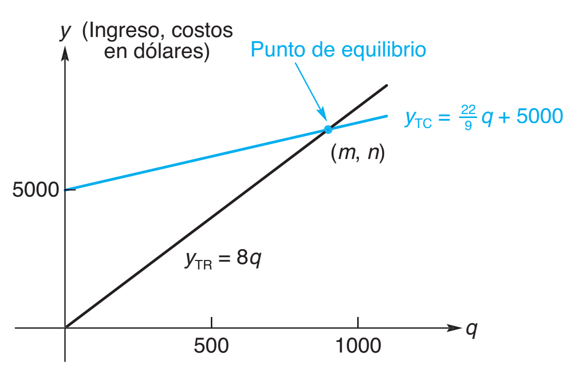


FIGURA 4.46 Diagrama de equilibrio.

EJEMPLO 3 Punto de equilibrio, utilidad y pérdida.

Un fabricante vende un producto a \$8 por unidad, y vende todo lo que produce. El costo fijo es de \$5000 y el variable por unidad es de $\frac{22}{9}$ *(dólares).*

a. *Encontrar la producción y el ingreso total en el punto de equilibrio.*

Solución: a un nivel de producción de q unidades, el costo variable es $y_{VC} = \frac{22}{9}q$ y el ingreso total es $y_{TR} = 8q$. De aquí que

$$y_{TR} = 8q,$$

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC} = \frac{22}{9}q + 5000.$$

En el punto de equilibrio, el ingreso total es igual al costo total. Ahora resolvemos el sistema formado por las ecuaciones anteriores. Como

$$y_{TR} = y_{TC},$$

Tenemos

$$8q = \frac{22}{9}q + 5000,$$

$$\frac{50}{9}q = 5000,$$

$$q = 900.$$

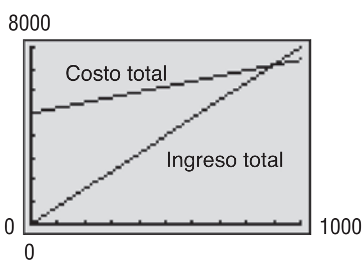


FIGURA 4.47 Punto de equilibrio (900, 7200).

Así que la producción deseada es de 900 unidades, lo que resulta en un ingreso total (en dólares) de

$$y_{TR} = 8(900) = 7200.$$

(Véase la fig. 4.47.)

b. *Encontrar la utilidad cuando se producen* 1800 *unidades.*

Solución: ya que utilidad = ingreso total − costo total, cuando $q = 1800$ tenemos

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(1800) - \left[\frac{22}{9}(1800) + 5000\right]$$
$$= 5000.$$

La utilidad cuando se producen y venden 1800 unidades es de \$5000.

c. *Encontrar la pérdida cuando se producen* 450 *unidades.*

Solución: cuando $q = 450$,

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(450) - \left[\frac{22}{9}(450) + 5000\right] = -2500.$$

Ocurre una pérdida de \$2500 cuando el nivel de producción es de 450 unidades.

d. *Encontrar la producción requerida para obtener una utilidad de* \$10,000.

Solución: para obtener una utilidad de \$10,000 tenemos

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total},$$

$$10{,}000 = 8q - \left(\frac{22}{9}q + 5000\right),$$

$$15{,}000 = \frac{50}{9}q,$$

$$q = 2700.$$

Así, deben producirse 2700 unidades.

EJEMPLO 4 Cantidad de equilibrio

Determinar la cantidad de equilibrio de Fabricaciones XYZ dada la información siguiente: costo fijo total, \$1200*; costo variable por unidad*, \$2*; ingreso total por la venta de q unidades*, $y_{TR} = 100\sqrt{q}$.

Solución: por q unidades de producción,

$$y_{TR} = 100\sqrt{q},$$

$$y_{TC} = 2q + 1200.$$

Igualando el ingreso total al costo total se obtiene

$$100\sqrt{q} = 2q + 1200,$$

$$50\sqrt{q} = q + 600 \quad \text{(dividiendo ambos lados entre 2).}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos

$$2500q = q^2 + 1200q + (600)^2,$$

$$0 = q^2 - 1300q + 360{,}000.$$

Por medio de la fórmula cuadrática,

$$q = \frac{1300 \pm \sqrt{250{,}000}}{2},$$

$$q = \frac{1300 \pm 500}{2},$$

$$q = 400 \quad \text{o} \quad q = 900.$$

Aunque tanto $q = 400$, como $q = 900$ son cantidades de equilibrio, observe en la figura 4.48 que cuando $q > 900$, el costo total es mayor que el ingreso total, de modo que siempre se tendrá una pérdida. Esto ocurre porque aquí el ingreso total no está relacionado linealmente con la producción. Por tanto, producir más de la cantidad de equilibrio no necesariamente garantiza una utilidad.

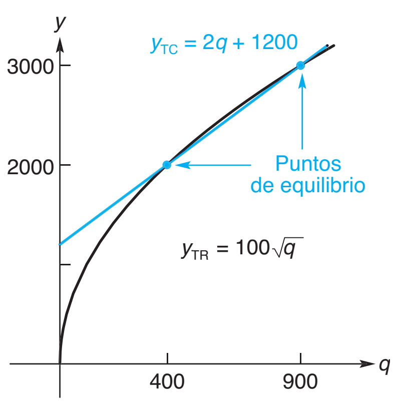


FIGURA 4.48 Dos puntos de equilibrio.

Ejercicio 4.6

En los problemas del 1 al 8 se le da una ecuación de oferta y una de demanda para un producto. Si p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades por unidad de tiempo, encuentre el punto de equilibrio. En los problemas 1 y 2, plantee el sistema.

1. Oferta: $p = \frac{3}{100}q + 2$,
Demanda: $p = -\frac{7}{100}q + 12$.

2. Oferta: $p = \frac{1}{2000}q + 3$,
Demanda: $p = -\frac{1}{2500}q + \frac{42}{5}$.

3. Oferta: $35q - 2p + 250 = 0$,
Demanda: $65q + p - 537.5 = 0$.

4. Oferta: $246p - 3.25q - 2460 = 0$,
Demanda: $410p + 3q - 14{,}452.5 = 0$.

5. Oferta: $p = 2q + 20$,
Demanda: $p = 200 - 2q^2$.

6. Oferta: $p = (q + 10)^2$,
Demanda: $p = 388 - 16q - q^2$.

7. Oferta: $p = \sqrt{q + 10}$,
Demanda: $p = 20 - q$.

8. Oferta: $p = \frac{1}{5}q + 7$,
Demanda: $p = \dfrac{3240}{q + 20}$.

En los problemas del 9 al 14 y_{TR} representa el ingreso total en dólares y y_{TC} el costo total en dólares para un fabricante. Si q representa tanto el número de unidades producidas como el número de unidades vendidas, encuentre la cantidad de equilibrio. Esquematice un diagrama de equilibrio en los problemas 9 y 10.

9. $y_{TR} = 3q$,
$y_{TC} = 2q + 4500$.

10. $y_{TR} = 14q$,
$y_{TC} = \frac{40}{3}q + 1200$.

11. $y_{TR} = 0.05q$,
$y_{TC} = 0.85q + 600$.

12. $y_{TR} = 0.25q$,
$y_{TC} = 0.16q + 360$.

13. $y_{TR} = 100 - \dfrac{1000}{q + 5}$,
$y_{TC} = q + 35$.

14. $y_{TR} = 0.1q^2 + 7q$,
$y_{TC} = 2q + 500$.

15. Negocios Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son

$$3q - 200p + 1800 = 0$$

y

$$3q + 100p - 1800 = 0,$$

respectivamente, donde p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades vendidas por periodo.

a. Encuentre algebraicamente el precio de equilibrio y dedúzcalo por medio de una gráfica.
b. Encuentre el precio de equilibrio cuando se fija un impuesto de 27 centavos por unidad al proveedor.

16. Negocios Un fabricante vende todo lo que produce. Su ingreso total está dado por $y_{TR} = 7q$ y el costo total es $y_{TC} = 6q + 800$, donde q representa el número de unidades producidas y vendidas.

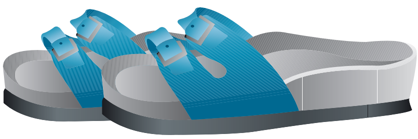
a. Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio y dibuje el diagrama de equilibrio.
b. Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio, si el costo total se incrementa en 5%.

17. Negocios Un fabricante vende un producto a \$8.35 por unidad, y vende todo lo que produce. Los costos fijos son de \$2116 y el costo variable es de \$7.20 por unidad. ¿A qué nivel de producción existirán utilidades de \$4600? ¿A qué nivel de producción habrá una pérdida de \$1150? ¿A qué nivel de producción ocurre el punto de equilibrio?

18. Negocios El punto de equilibrio de mercado para un producto ocurre cuando se producen 13,500 unidades a un precio de \$4.50 por unidad. El productor no proveerá unidades a \$1 y el consumidor no demandará unidades a \$20. Encuentre las ecuaciones de oferta y demanda si ambas son lineales.

19. Negocios Un fabricante de juguetes para niños alcanzará el punto de equilibrio en un volumen de ventas de \$200,000. Los costos fijos son de \$40,000 y cada unidad de producción se vende a \$5. Determine el costo variable por unidad.

20. Negocios La compañía Sandalias Cómodas fabrica sandalias para las que el costo del material es de \$0.80 por par, y el costo de mano de obra es de \$0.90 por par. Hay costos adicionales por par de \$0.30. Los costos fijos son de \$70,000. Si cada par se vende a \$2.50, ¿cuántos pares se deben vender para que la compañía llegue al equilibrio?



21. Negocios Encuentre el punto de equilibrio para la compañía Z, que vende todo lo que produce, si el costo variable por unidad es de \$2, los costos fijos de \$1050 y $y_{TR} = 50\sqrt{q}$, donde q es el número de unidades producidas.

22. Negocios Una compañía determinó que la ecuación de demanda para su producto es $p = 1000/q$, donde p es el precio por unidad para q unidades en algún periodo. Determine la cantidad demandada cuando el precio por unidad es (a)\$4, (b)\$2 y (c)\$0.50. Para cada uno de estos precios calcule el ingreso total que la compañía recibirá. ¿Cuál será el ingreso sin importar el precio? (*Sugerencia*: encuentre el ingreso cuando el precio es p dólares.)

23. Negocios Utilizando los datos del ejemplo 1, determine cómo se afectará el precio de equilibrio original, si la compañía recibe un subsidio del gobierno de \$1.50 por unidad.

24. Negocios La compañía Aceros Forjados vende un producto de acero corrugado a Fabricaciones Modelo, y compite para hacer estas ventas con otros proveedores. El vicepresidente de ventas de Aceros Forjados cree que reduciendo el precio del producto, se podría asegurar un 40% de incremento en el volumen de unidades vendidas a Fabricaciones Modelo. Como administrador del departamento de costos y análisis, a usted se le ha consultado para que analice la propuesta del vicepresidente, y exponga sus recomendaciones de si ésta es financieramente benéfica. Se le pide que determine específicamente:

a. Ganancia o pérdida neta con base en el precio propuesto.
b. Volumen de ventas de unidades que, bajo el precio propuesto, se requieren para obtener las mismas utilidades de \$40,000 que se reciben con el precio y volumen de ventas actuales.

Utilice la siguiente información en su análisis:

	Operaciones actuales	**Propuesta del vicepresidente de ventas**
Precio unitario	\$2.50	\$2.00
Volumen de ventas	200,000 unidades	280,000 unidades
Costo variable		
Total	\$350,000	\$490,000
Por unidad	\$1.75	\$1.75
Costo fojo	\$110,000	\$110,000
Ganancia	\$40,000	?

25. Negocios Suponga que los productos A y B tienen ecuaciones de demanda y oferta que están relacionadas una con otra. Si q_A y q_B son las cantidades producidas y vendidas de A y B, respectivamente, y p_A y p_B sus respectivos precios, las ecuaciones de demanda son

$$q_A = 8 - p_A + p_B$$

y

$$q_B = 26 + p_A - p_B,$$

y las ecuaciones de oferta son

$$q_A = -2 + 5p_A - p_B$$

y

$$q_B = -4 - p_A + 3p_B.$$

Elimine q_A y q_B para obtener los precios de equilibrio.

26. Negocios La ecuación de oferta para un producto es

$$p = 0.3q^2 + 14.6,$$

y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{35.2}{1 + 0.3q}.$$

Aquí p representa el precio por unidad en dólares, y q el número de unidades (en miles) por unidad de tiempo. Grafique ambas ecuaciones y a partir de su gráfica determine el precio y la cantidad de equilibrio a un decimal.

27. Negocios Para un fabricante la ecuación de ingreso total es

$$y_{TR} = 20.5\sqrt{q + 4} - 41$$

y la ecuación de costo total es

$$y_{TC} = 0.02q^3 + 10.4,$$

donde q representa (en miles) tanto el número de unidades producidas como el de unidades vendidas. Grafique un diagrama de equilibrio y encuentre la cantidad de equilibrio.

4.7 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 4.1 pendiente de una recta   forma punto-pendiente   forma pendiente-ordenada al origen
ecuación lineal general en x y y relación lineal

Sección 4.2 ecuación de demanda   curva de demanda   ecuación de oferta   curva de oferta
ecuación lineal

Sección 4.3 función cuadrática   parábola   eje de simetría   vértice

Sección 4.4 sistema de ecuaciones   sistemas equivalentes   eliminación por adición   eliminación por sustitución   parámetro   ecuación lineal general en x, y y z

Sección 4.5 sistema no lineal

Sección 4.6 punto de equilibrio   precio de equilibrio   cantidad de equilibrio   ganancia   costo total
costo fijo   costo variable   punto de equilibrio   cantidad de equilibrio   ingreso de equilibrio

Resumen

La orientación de una recta no vertical está caracterizada por su pendiente y la recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos diferentes sobre la recta. La pendiente de una recta vertical no está definida, y la pendiente de una recta horizontal es cero. Rectas que ascienden tienen pendiente positiva; rectas que descienden tienen pendiente negativa. Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o son verticales. Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares entre sí, si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. Una recta horizontal y una vertical son perpendiculares entre sí.

Formas básicas de las ecuaciones de rectas son las siguientes:

$y - y_1 = m(x - x_1)$	(forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(forma pendiente-ordenada al origen)
$x = a$	(recta vertical)
$y = b$	(recta horizontal)
$Ax + By + C = 0$	(general)

La función lineal $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$, tiene como gráfica una línea recta.

En economía, las funciones de oferta y demanda tienen la forma $p = f(q)$ y desempeñan un papel importante. Cada una da una correspondencia entre el precio p de un producto, y el número de unidades q del producto que los fabricantes (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio durante algún periodo.

Una función cuadrática tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

Su gráfica es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. El vértice es

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right),$$

y c es la intersección y. El eje de simetría, así como las intersecciones x y y son útiles para hacer el bosquejo de la gráfica.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse con los métodos de eliminación por adición y eliminación por sustitución. Una solución puede incluir uno o más parámetros. La sustitución también es útil en la solución de sistemas no lineales.

La solución de un sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda para un producto, da el punto de equilibrio, que indica el precio al que los clientes comprarán la misma cantidad de un producto que los productores desean vender a ese precio.

Las utilidades son el ingreso total menos el costo total, donde el costo total es la suma de los costos fijos y los costos variables. El punto de equilibrio es el punto en donde el ingreso total iguala al costo total.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugiere utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

1. La pendiente de la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(3, k)$ es 4. Encuentre k.

2. La pendiente de la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(k, 3)$ es 0. Encuentre k.

En los problemas del 3 al 9 determine la forma pendiente-ordenada al origen y una forma general de una ecuación de la recta que tiene las propiedades indicadas.

3. Pasa por $(3, -2)$ y tiene intersección y igual a 1.

4. Pasa por $(-1, -1)$ y es paralela a la recta $y = 3x - 4$.

5. Pasa por $(10, 4)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

6. Pasa por $(3, 5)$ y es vertical.

7. Pasa por $(-2, 4)$ y es horizontal.

8. Pasa por $(1, 2)$ y es perpendicular a la recta $-3y + 5x = 7$.

9. Tiene intersección y igual a 2 y es perpendicular a $y + 3x = 2$.

10. Determine si el punto $(0, -7)$ pertenece a la recta que pasa por $(1, -3)$ y $(4, 9)$.

En los problemas del 11 al 16 determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

11. $x + 4y + 2 = 0, \quad 8x - 2y - 2 = 0.$

12. $y - 2 = 2(x - 1), \quad 2x + 4y - 3 = 0.$

13. $x - 3 = 2(y + 4), \quad y = 4x + 2.$

14. $3x + 5y + 4 = 0, \quad 6x + 10y = 0.$

15. $y = \frac{1}{2}x + 5, \quad 2x = 4y - 3.$

16. $y = 7x, \quad y = 7.$

En los problemas del 17 al 20 escriba cada recta en la forma pendiente-ordenada al origen y haga un bosquejo de su gráfica. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

17. $3x - 2y = 4.$

18. $x = -3y + 4.$

19. $4 - 3y = 0.$

20. $y = 2x.$

En los problemas del 21 al 30 grafique cada función. Para las que sean funciones lineales, también obtenga la pendiente y la intersección con el eje vertical. Para las cuadráticas obtenga todas las intersecciones y el vértice.

21. $y = f(x) = 4 - 2x.$

22. $s = g(t) = 8 - 2t - t^2.$

23. $y = f(x) = 9 - x^2.$

24. $y = f(x) = 3x - 7.$

25. $y = h(t) = t^2 - 4t - 5.$

26. $y = h(t) = 1 + 3t.$

27. $p = g(t) = 3t.$

28. $y = F(x) = (2x - 1)^2.$

29. $y = F(x) = -(x^2 + 2x + 3).$

30. $y = f(x) = \dfrac{x}{3} - 2.$

En los problemas del 31 al 44 resuelva el sistema dado.

31. $\begin{cases} 2x - y = 6, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$

32. $\begin{cases} 8x - 4y = 7, \\ y = 2x - 4. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 4x + 5y = 3, \\ 3x + 4y = 2. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 3x + 6y = 9, \\ 4x + 8y = 12. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y = -4, \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 8. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{12}, \\ \frac{4}{3}x + 3y = \frac{5}{3}. \end{cases}$

37. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + 3y - z = 3. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x + \dfrac{2y + x}{6} = 14, \\ y + \dfrac{3x + y}{4} = 20. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^2 - y + 2x = 7, \\ x^2 + y = 5. \end{cases}$

40. $\begin{cases} y = \dfrac{18}{x + 4}, \\ x - y + 7 = 0. \end{cases}$

[8]**41.** $\begin{cases} x + 2z = -2, \\ x + y + z = 5. \end{cases}$

[8]**42.** $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + z = 0, \\ x + z = 0. \end{cases}$

[8]**43.** $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ 2x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$

[8]**44.** $\begin{cases} 2x - 5y + 6z = 1, \\ 4x - 10y + 12z = 2. \end{cases}$

---

45. Suponga que a y b están relacionadas de manera lineal, de modo que $a = 1$ cuando $b = 2$, y $a = 2$ cuando $b = 1$. Encuentre una forma lineal general de una ecuación que relacione a y b. También encuentre a cuando $b = 3$.

46. Temperatura y frecuencia cardiaca Cuando la temperatura T (en grados Celsius) de un gato se reduce, la frecuencia cardiaca del gato r (en latidos por minuto) disminuye. Bajo condiciones de laboratorio, un gato a una temperatura de 37°C tuvo una frecuencia cardiaca de 220, y a una temperatura de 32°C su frecuencia cardiaca fue de 150. Si r está relacionada linealmente con T, en donde T está entre 26 y 38°C, (a) determine una ecuación para r en términos de T, y (b) determine la frecuencia cardiaca a una temperatura de 28°C.

[8]Se refiere a los conceptos vistos en los ejemplos 6 y 7 de la sección 4.4.

47. Suponga que f es una función lineal tal que $f(1) = 5$, y $f(x)$ disminuye 4 unidades por cada incremento de 3 unidades en x. Encuentre $f(x)$.

48. Si f es una función lineal tal que $f(-1) = 8$ y $f(2) = 5$, encuentre $f(x)$.

49. Ingreso máximo La función de demanda para el fabricante de un producto es $p = f(q) = 200 - 2q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan q unidades. Determine el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y calcule este ingreso.

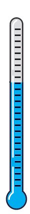
50. Impuesto sobre ventas La diferencia en el precio de dos artículos antes de que un impuesto sobre la venta de 5% se les imponga es de \$4. La diferencia en el precio después del impuesto es de \$4.20. Encuentre el precio de cada artículo antes del impuesto.

51. Precio de equilibrio Si las ecuaciones de oferta y demanda de cierto producto son $125p - q - 250 = 0$ y $100p + q - 1100 = 0$, respectivamente, encuentre el precio de equilibrio.

52. Psicología En psicología el término *memoria semántica* se refiere al conocimiento del significado y la relación de las palabras, así como al significado con el que almacenamos y recuperamos tal información.[9] En un modelo de red de memoria semántica, hay una jerarquía de niveles en los que se almacena la información. En un experimento de Collins y Quillian basado en un modelo de red, los datos se obtuvieron sobre el tiempo de reacción para responder a preguntas sencillas acerca de sustantivos. La gráfica de los resultados muestra que en promedio, el tiempo de reacción R (en milisegundos) es una función lineal del nivel L en el que una propiedad característica del sustantivo es almacenada. En el nivel 0 el tiempo de reacción es de 1310; en el nivel 2 el tiempo de reacción es de 1460. (a) Encuentre la función lineal. (b) Encuentre el tiempo de reacción en el nivel 1. (c) Encuentre la pendiente y determine su significado.

53. Punto de equilibrio Un fabricante de cierto producto vende todo lo que produce. Determine el punto de equilibrio, si el producto se vende en \$16 por unidad, el costo fijo es \$10,000 y el costo variable está dado por $y_{VC} = 8q$, en donde q es el número de unidades producidas (y_{VC} se expresa en dólares).

54. Conversión de temperatura La temperatura Celsius, C, es una función lineal de la temperatura Fahrenheit, F. Utilice el hecho de que 32 °F es lo mismo que 0 °C y que 212 °F es lo mismo que 100 °C para hallar esta función. También encuentre C cuando $F = 50$.



55. Contaminación En una provincia de una nación desarrollada, la contaminación del agua se analiza utilizando un modelo de oferta-demanda. La *ecuación de oferta ambiental* $L = 0.0183 - \frac{0.0042}{p}$ describe el gravamen por tonelada, L (en dólares), como una función de la contaminación total, p (en toneladas por kilómetro cuadrado), para $p \geq 0.2295$. La *ecuación de demanda ambiental*, $L = 0.0005 + \frac{0.0378}{p}$, describe el costo por tonelada de disminución, como una función de la contaminación total para $p > 0$. Determine el nivel de equilibrio de la contaminación total a dos decimales.[10]

56. 56. Resuelva en forma gráfica el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x + 4y = 20, \\ 7x + 5y = 64. \end{cases}$$

57. Por medio de una gráfica, resuelva el sistema lineal

$$\begin{cases} 0.2x + 0.3y = 7, \\ 0.3x + 0.5y = 4. \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

58. Mediante una gráfica, resuelva el sistema no lineal

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \text{ donde } x > 0, \\ y = x^2 - 6. \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

59. Resuelva gráficamente el sistema no lineal

$$\begin{cases} y = x^3 + 1, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

60. Resuelva en forma gráfica la ecuación

$$x^2 + 4 = x^3 - 3x$$

tratándola como un sistema. Redondee x a dos decimales.

[9] G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Laurence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley and Sons, Inc., 1976).

[10] Véase Hua Wang y David Wheeler, "Pricing Industrial Pollution in China: An Economic Analysis of the Levy System", World Bank Policy Research Working Paper #1644, septiembre de 1996.

Aplicación práctica
Planes de cobro en telefonía celular

Planes de cobro en telefonía celular. En décadas recientes, los cambios en la tecnología y la ley han transformado la industria de la comunicación. Algunos de los cambios han tenidos sus pros y sus contras. Por ejemplo, considere el problema de elegir un plan de telefonía celular. En la mayoría de las áreas urbanas, los usuarios de teléfonos celulares, literalmente tienen docenas de planes para elegir. Los planes incluyen tarifas de accesos mensuales, minutos libres, cobros por tiempo aire adicional, tarifas por *roaming* regional, tarifa por *roaming* nacional, tarifas por horas pico y horas no pico, y tarifas por larga distancia (sin mencionar costos por activación, gastos por cancelación y cosas por el estilo). Dados todos estos factores, ¿cómo puede un consumidor hacer una elección inteligente?

Aunque encontramos que la mejor elección garantizada requiere de un arduo trabajo, realizar una elección razonable sólo requiere de pocas matemáticas. Considere los planes ofrecidos por una sola compañía de telecomunicaciones, denominada Compañía XY&Z, y suponga que la mayor parte de las llamadas son locales, hechas (o recibidas) en la ciudad durante las horas pico. En otras palabras, ignoraremos las cuotas por *roaming*, tasas en horas no pico y tarifas de larga distancia. En diciembre de 2000, esta compañía ofreció los planes siguientes:

Básico: \$19.99 mensual compra 60 minutos. El tiempo adicional cuesta \$0.40 por minuto.

Advantage I: \$29.99 mensual compra 120 minutos. El tiempo adicional cuesta \$0.30 por minuto.

Advantage II: \$39.99 mensual compra 200 minutos. El tiempo adicional cuesta \$0.30 por minuto.

Advantage III: \$49.99 mensual compra 400 minutos. El tiempo adicional cuesta \$0.30 por minuto.

Premier: \$59.99 mensual compra 450 minutos. El tiempo adicional cuesta \$0.35 por minuto.

Para representar en forma matemática estos planes, tenemos que escribir el costo mensual total como una función del tiempo para cada plan. Para el plan Básico, el costo mensual, B, dependerá del número total de llamadas de acuerdo con la función

$$B(t) = \begin{cases} 19.99 & \text{si } t \leq 60, \\ 19.99 + 0.40(t - 60) & \text{si } t > 60. \end{cases}$$

De manera similar, representamos los tres planes Advantage con $A1$, $A2$ y $A3$, respectivamente, y el plan Premier por P, así, tenemos estas funciones:

$$A1(t) = \begin{cases} 29.99 & \text{si } t \leq 120, \\ 29.99 + 0.30(t - 120) & \text{si } t > 120. \end{cases}$$

$$A2(t) = \begin{cases} 39.99 & \text{si } t \leq 200, \\ 39.99 + 0.30(t - 200) & \text{si } t > 200. \end{cases}$$

$$A3(t) = \begin{cases} 49.99 & \text{si } t \leq 400, \\ 49.99 + 0.30(t - 400) & \text{si } t > 400. \end{cases}$$

$$P(t) = \begin{cases} 59.99 & \text{si } t \leq 450, \\ 59.99 + 0.35(t - 450) & \text{si } t > 450. \end{cases}$$

Con toda esta vasta información, es recomendable construir una gráfica para tener una perspectiva general del problema. Podríamos realizar esto en forma manual, pero aquí está una buena oportunidad para utilizar la capacidad de una calculadora gráfica. Introducimos la función $B(t)$ como

$$\mathrm{Y1} = 19.99 + 0.40(\mathrm{X} - 60)(\mathrm{X} > 60).$$

El símbolo $>$ viene en el menú TEST, y la expresión $(\mathrm{X} > 60)$ es igual a 1 o 0, dependiendo si x es, o no, mayor que 60. Introduciendo las otras cuatro funciones de manera similar y graficándolas juntas, obtenemos la pantalla que se muestra en la figura 4.49.

Cuál plan es mejor depende de la cantidad de tiempo de llamadas, para cualquier tiempo aire mensual dado, el mejor plan es aquél en que la gráfica es la más baja en ese punto.

Para un tiempo muy breve de llamadas, el plan Básico es mejor, pero en algún punto se vuelve más caro que el plan Advantage I. Encontramos en dónde ocurre esto —el valor de t en el que las gráficas de esos dos planes se intersecan. Obsérvese que si no hubiésemos graficado todas las funciones, no sabríamos qué

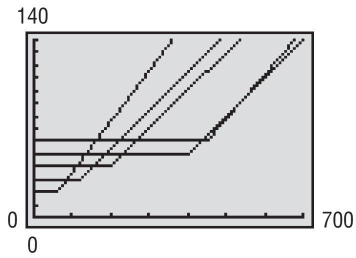


FIGURA 4.49 Costos de los diferentes planes.

parte de cada definición de función utilizar; tal como están las cosas, podemos ver que utilizamos la segunda parte de la definición de $B(t)$ (la parte cuya gráfica es inclinada), y la primera parte de la definición de $A1(t)$ (la parte cuya gráfica es plana). En otras palabras, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} B(t) = 19.99 + 0.40(t - 60), \\ A1(t) = 29.99. \\ B(t) = A1(t), \end{cases}$$

Por medio de sustitución, esto se simplifica a una sola ecuación que se resuelve rápidamente:

$$\begin{aligned} 19.99 + 0.40(t - 60) &= 29.99, \\ 0.40t - 24 &= 10, \\ 0.40t &= 34, \\ t &= 85. \end{aligned}$$

De modo que el plan Advantage I se vuelve mejor que el plan Básico para más de 85 minutos de tiempo mensual de llamadas.

Con base en la gráfica, también podemos ver que en algún punto el plan Advantage II empieza a ser el mejor plan, y que en un punto posterior, a su vez, el plan Advantage III se vuelve mejor. Sin embargo, note algo interesante en los planes Advantage III y Premier: el plan Advantage III es mejor al principio, y luego el plan Premier es mejor por un lapso, pero para tiempos muy altos de uso, el plan Advantage III es nuevamente mejor.[11] Encontramos el último punto de cambio. Es el valor de t en el que las dos partes inclinadas de las gráficas de $A3(t)$ y $P(t)$ se intersecan. En lugar de resolverla en forma algebraica, esta vez utilizamos la calculadora para determinar de manera automática el punto de intersección.

[11] Los planes también difieren de manera significativa en tarifas por roaming regional, pero no estamos considerándolos.

Nuestro resultado se muestra en la fig. 4.50.

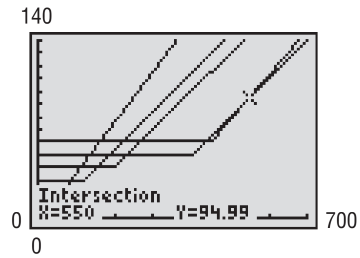


FIGURA 4.50 Planes Advantage III y Premier.

De modo que el plan Advantage III es mejor que el plan Premier para más de 550 minutos de llamadas.

De lo que conocemos hasta ahora, podemos construir la tabla parcial siguiente.

Tiempo aire (min)	Mejor plan
0 a 85	Básico
	Advantage I
	Advantage II
	Advantage III
	Premier
550 y más	Advantage III

La terminación de esta tabla se deja para los ejercicios.

Para buscar planes de servicio de teléfonos celulares en diferentes áreas, visite `www.point.com`.

Ejercicios

1. Copie la tabla anterior en una página aparte. Después utilice las técnicas de solución algebraicas para llenar las dos primeras líneas en blanco de la columna de tiempo aire.
2. Utilice una calculadora gráfica para llenar las dos líneas en blanco restantes.
3. ¿Qué sucede cuando trata de utilizar la calculadora para determinar un punto de intersección, pero no es cuidadoso con su aproximación inicial?
4. ¿Por qué la compañía XY&Z ofrece cinco diferentes planes, en lugar de ofrecer un solo plan que proporcione a la compañía una utilidad para cualquier tiempo aire del consumidor?

CAPÍTULO 5

Funciones exponencial y logarítmica

Al igual que los virus biológicos se propagan a través del contacto entre organismos, también los virus de computadora se propagan cuando las computadoras interactúan por medio de redes o correo electrónico. Mientras los científicos estudian cómo luchar contra los virus de computadora, que causan mucho daño por la forma en que borran o alteran archivos, también diseñan modelos matemáticos de la rapidez con que se propagan los virus. Por ejemplo, el viernes 26 de marzo de 1999 se reportó el primer caso del virus conocido como Melissa; para el lunes 29 de marzo, Melissa había alcanzado a más de 100,000 computadoras.

Las funciones exponenciales, que este capítulo estudia en detalle, proporcionan un modelo plausible. Considere un virus de computadora que se oculta en un archivo adjunto de correo electrónico; una vez que el archivo se baja, de manera automática se envía un mensaje con un archivo adjunto similar a todas las direcciones en la libreta de direcciones de correo electrónico de la computadora anfitriona. Si la libreta de direcciones común contiene 20 direcciones, y si el usuario común de computadora revisa su correo electrónico una vez por día, entonces un virus en una sola máquina habrá infectado a 20 máquinas en un día, $20^2 = 400$ máquinas al cabo de dos días, $20^3 = 8000$ después de tres días y, en general, después de t días, el número N de computadoras infectadas estará dado por la función exponencial $N(t) = 20^t$.

Este modelo supone que todas las computadoras implicadas están ligadas unas con otras, vía su lista de direcciones, en un solo grupo bien conectado. Los modelos exponenciales son más precisos para pequeños valores de t; este modelo en particular, ignora el descenso que ocurre cuando la mayoría de los correos electrónicos iniciales van a computadoras que ya están infectadas; lo cual sucede cuando pasan varios días. Por ejemplo, nuestro modelo nos dice que después de siete días infectará a $20^7 = 1.28$ miles de millones de computadoras —¡aproximadamente todas las computadoras en la Tierra! Pero a pesar de sus limitaciones, los modelos exponenciales explican el porqué con frecuencia los nuevos virus infectan a miles de máquinas antes de que los expertos en antivirus tengan tiempo de reaccionar.

OBJETIVO Estudiar las funciones exponenciales y sus aplicaciones en temas como interés compuesto, crecimiento poblacional y decaimiento radiactivo.

5.1 Funciones exponenciales

Existe una función que desempeña una función importante no sólo en matemáticas, sino también en finanzas, economía y otras áreas de estudio. Incluye una constante elevada a un exponente variable, como $f(x) = 2^x$. A tales funciones les llamamos *funciones exponenciales*.

Definición

La función f definida por

$$f(x) = b^x,$$

donde $b > 0$, $b \neq 1$, y el exponente x es cualquier número real, se llama ***función exponencial*** con base b.[1]

No confunda la función exponencial $y = 2^x$ con la *función potencia* $y = x^2$, que tiene una base variable y un exponente constante.

Ya que el exponente de b^x puede ser cualquier número real, podría sorprenderle cómo le asignamos un valor a algo como $2^{\sqrt{2}}$, donde el exponente es un número irracional. Simplemente utilizamos aproximaciones. Como $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$, $2^{\sqrt{2}}$ es casi $2^{1.4} = 2^{7/5} = \sqrt[5]{2^7}$, que *sí está* definido. Aproximaciones mejores son $2^{1.41} = 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}}$, y así sucesivamente. De esta manera el significado de $2^{\sqrt{2}}$ se vuelve claro. El valor que da una calculadora para $2^{\sqrt{2}}$ es (aproximadamente) 2.66514.

Cuando se trabaja con funciones exponenciales puede ser necesario aplicar las reglas de los exponentes. Estas reglas se presentan a continuación, en ellas m y n son números reales y a y b son positivos.

Si desea revisar exponentes, consulte la sección 0.5.

Reglas de los exponentes

1. $a^m a^n = a^{m+n}$.	**2.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$.	**4.** $(ab)^n = a^n b^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.	**6.** $a^1 = a$.
7. $a^0 = 1$.	**8.** $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Algunas funciones que no parecen tener la forma exponencial b^x pueden ponerse en esa forma aplicando las reglas anteriores. Por ejemplo, $2^{-x} = 1/(2^x) = (\frac{1}{2})^x$ y $3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$.

Principios en práctica 1
Crecimiento de bacterias

El número de bacterias en un cultivo que duplica su número cada hora, está dado por $N(t) = A \cdot 2^t$, en donde A es el número presente originalmente y t es el número de horas que las bacterias se han estado duplicando. Utilice una calculadora gráfica para trazar esta función para diferentes valores de $A > 1$. ¿En qué se parecen las gráficas? ¿Cómo altera el valor de A la gráfica?

EJEMPLO 1 Crecimiento de bacterias

El número de bacterias presentes en un cultivo después de t minutos está dado por

$$N(t) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^t.$$

Observe que N(t) es un múltiplo constante de la función exponencial $\left(\frac{4}{3}\right)^t$.

[1] Si $b = 1$, entonces $f(x) = 1^x = 1$. Esta función es de tan poco interés, que no le llamamos función exponencial.

a. *¿Cuántas bacterias están presentes al inicio?*

Solución: aquí queremos determinar $N(t)$ cuando $t = 0$. Tenemos

$$N(0) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 300(1) = 300.$$

Así que 300 bacterias están presentes al inicio.

b. *En forma aproximada, ¿cuántas bacterias están presentes después de 3 minutos?*

Solución:

$$N(3) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^3 = 300\left(\frac{64}{27}\right) = \frac{6400}{9} \approx 711.$$

Por lo que casi 711 bacterias están presentes después de 3 minutos.

Principios en práctica 2

Graficación de funciones exponenciales con $b > 1$

Suponga que una inversión aumenta 10% cada año. Construya una tabla del factor por el cual la inversión aumenta a partir de la cantidad inicial para 0 a 4 años. Para cada año, escriba una expresión para el aumento como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizaría? ¿Cómo se relaciona esa base con el problema? Utilice su tabla para graficar el aumento multiplicativo como una función del número de años. Utilice su gráfica para determinar cuándo se duplica la inversión.

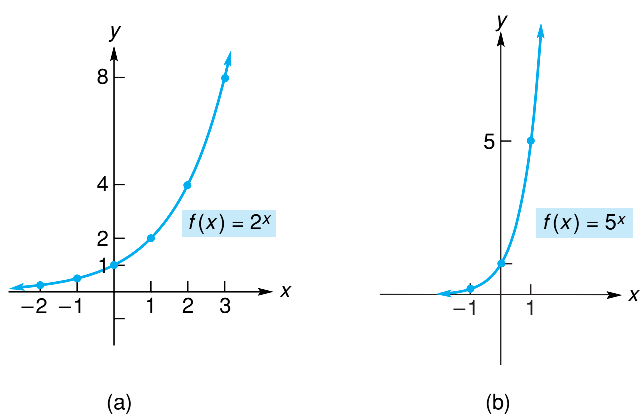
Gráficas de funciones exponenciales

EJEMPLO 2 Graficación de funciones exponenciales con $b > 1$

Graficar las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 5^x$.

Solución: al trazar puntos y conectarlos obtenemos las gráficas de la figura 5.1. Para la gráfica de $f(x) = 5^x$, como consecuencia de la unidad de distancia seleccionada sobre el eje y, no se muestran los puntos $(-2, \frac{1}{25})$, $(2, 25)$ y $(3, 125)$.

x	2^x
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



x	5^x
-2	$\frac{1}{25}$
-1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5
2	25
3	125

FIGURA 5.1 Gráficas de $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 5^x$.

Vamos a hacer algunas observaciones acerca de estas gráficas. El dominio de cada función es el conjunto de todos los números reales, y el rango todos los números reales positivos. Cada gráfica tiene intersección con el eje y $(0, 1)$. Además, estas gráficas tienen la misma forma general. Cada una *asciende* de izquierda a derecha. Conforme x aumenta, $f(x)$ también aumenta. De hecho, $f(x)$ aumenta sin límite. Sin embargo, en el primer cuadrante, la gráfica de $f(x) = 5^x$ asciende más rápido que $f(x) = 2^x$, ya que la base en 5^x es *mayor* que la base en 2^x (esto es $5 > 2$). En el segundo cuadrante vemos que cuando

Principios en práctica 3

Graficación de una función exponencial con $0 < b < 1$

Suponga que el valor de un automóvil se deprecia 15% cada año. Construya una tabla del factor por el cual disminuye de su monto original para 0 a 3 años. Para cada año, escriba una expresión para la disminución como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizaría? ¿Cómo se relaciona esa base con el problema? Utilice su tabla para graficar la disminución multiplicativa como una función del número de años. Utilice su gráfica para determinar cuándo el automóvil disminuye su valor a la mitad de su precio original.

x se hace más negativa, las gráficas de ambas funciones se aproximan al eje x.[2] Esto implica que los valores de las funciones se hacen muy cercanos a 0.

Las observaciones realizadas en el ejemplo 2 son ciertas para todas las funciones exponenciales cuya base b es mayor que 1. En el ejemplo 3 se examinará el caso de una base entre 0 y 1 ($0 < b < 1$).

EJEMPLO 3 Graficación de una función exponencial con $0 < b < 1$

Graficar la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución: al trazar puntos y conectarlos, obtenemos la gráfica de la figura 5.2. Observe que el dominio equivale a todos los números reales y el rango a todos los números reales positivos. La gráfica tiene intersección y $(0, 1)$. Si comparamos con las gráficas del ejemplo 2, vemos que aquí la gráfica *desciende* de izquierda a derecha. Esto es, conforme x aumenta $f(x)$ disminuye. Observe que cuando x toma valores positivos cada vez más grandes, $f(x)$ toma valores muy cercanos a cero y la gráfica se aproxima al eje x. Sin embargo, cuando x se vuelve muy negativa los valores de la función no están acotados.

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

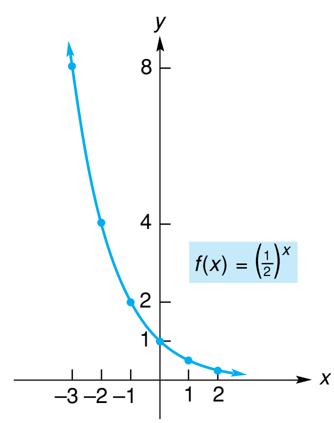


FIGURA 5.2 Gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Existen dos formas básicas para las gráficas de las funciones exponenciales, éstas dependen de la base incluida.

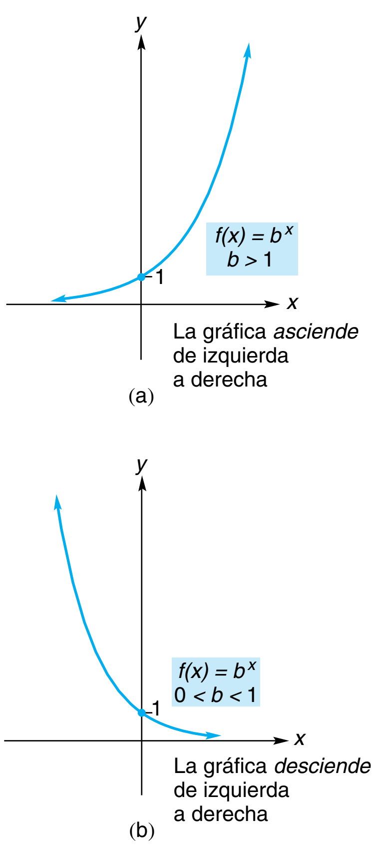


FIGURA 5.3 Formas generales de $f(x) = b^x$.

En general, la gráfica de una función exponencial tiene una de las dos formas comunes, dependiendo del valor de la base b. Esto se ilustra en la figura 5.3. Las propiedades básicas de una función exponencial y su gráfica se resumen en la tabla 5.1.

Recuerde de la sección 3.6 que la gráfica de una función puede estar relacionada con otra por medio de cierta transformación. Nuestro ejemplo siguiente se refiere a este concepto.

[2]Decimos que el eje x es una *asíntota* para cada gráfica.

TABLA 5.1 Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$

1. El dominio de una función exponencial es el conjunto de todos los números reales. El rango es el conjunto de todos los números positivos.
2. La gráfica de $f(x) = b^x$ tiene intersección con el eje y $(0, 1)$. No existe intersección con el eje x.
3. Si $b > 1$, la gráfica *asciende* de izquierda a derecha. Si $0 < b < 1$, la gráfica *desciende* de izquierda a derecha.
4. Si $b > 1$, la gráfica se aproxima al eje x conforme x toma valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto. Si $0 < b < 1$, la gráfica se aproxima al eje x conforme x toma valores positivos cada vez más grandes.

El ejemplo 4 hace uso de las transformaciones de la tabla 3.2.

Principios en práctica 4

Transformaciones de funciones exponenciales

Después de observar el crecimiento del dinero de su hermana durante tres años en un plan con 8% anual, George abrió una cuenta de ahorros con el mismo plan. Si $y = 1.08^t$ representa el aumento multiplicativo en la cuenta de su hermana, escriba una ecuación que representará el aumento multiplicativo en la cuenta de George, utilizando la misma referencia de tiempo. Si George tiene una gráfica de aumento multiplicativo del dinero de su hermana en el tiempo t desde que ella inició su ahorro, ¿cómo podría él utilizar la gráfica para proyectar el incremento en su dinero?

EJEMPLO 4 Transformaciones de funciones exponenciales

a. *Utilizar la gráfica de $y = 2^x$ para graficar $y = 2^x - 3$.*

Solución: la función tiene la forma $f(x) - c$, donde $f(x) = 2^x$ y $c = 3$. Así que su gráfica se obtiene recorriendo la gráfica de $f(x) = 2^x$ tres unidades hacia abajo (véase la fig. 5.4).

b. *Utilizar la gráfica de $y = (\frac{1}{2})^x$ para graficar $y = (\frac{1}{2})^{x-4}$.*

Solución: la función tiene la forma $f(x - c)$, donde $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ y $c = 4$. De aquí que su gráfica se obtenga recorriendo la gráfica de $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, cuatro unidades hacia la derecha (véase la fig. 5.5).

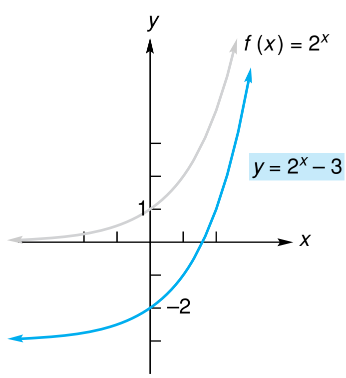


FIGURA 5.4 Gráfica de $y = 2^x - 3$.

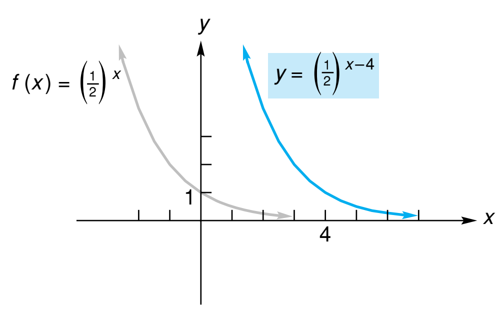
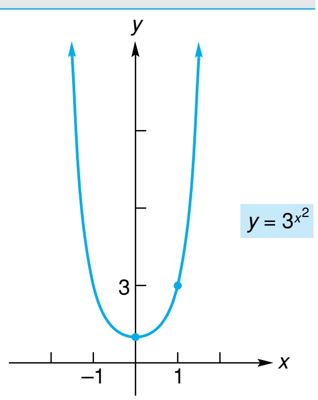


FIGURA 5.5 Gráfica de $y = (\frac{1}{2})^{x-4}$.



x	0	1	2
y	1	3	81

FIGURA 5.6 Gráfica de $y = 3^{x^2}$.

EJEMPLO 5 Gráfica de una función con una base constante

Graficar $y = 3^{x^2}$.

Solución: aunque ésta no es una función exponencial, tiene una base constante. Vemos que al reemplazar x por $-x$ resulta la misma ecuación. Así, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Al trazar algunos puntos y utilizar la simetría se obtiene la gráfica de la figura 5.6.

Tecnología

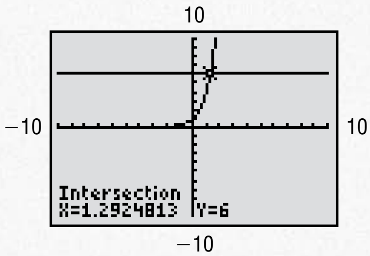


FIGURA 5.7 *Resolución de la ecuación* $6 = 4^x$.

Si $y = 4^x$, considere el problema de encontrar x cuando $y = 6$. Una manera de resolverlo es encontrar la intersección de las gráficas de $y = 6$ y $y = 4^x$. La figura 5.7 muestra que x es aproximadamente igual a 1.29.

Interés compuesto

Las funciones exponenciales están implicadas en el **interés compuesto,** en el cual el interés que genera una cantidad de dinero invertida (**capital** o **principal**), se invierte nuevamente de modo que también genere intereses. Así, el interés es convertido (o *compuesto*) en capital y, por tanto, hay "interés sobre el interés".

Por ejemplo, suponga que se invierten \$100 a una tasa de 5% compuesto (capitalizable) cada año. Al final del primer año, el valor de la inversión es el capital original (\$100), más el interés sobre el capital [100(0.05)]:

$$100 + 100(0.05) = \$105.$$

Ésta es la cantidad sobre la cual se genera el interés para el segundo año. Al final del segundo año, el valor de la inversión es el capital del final del primer año (\$105), más el interés sobre esa cantidad [105(0.05)]:

$$105 + 105(0.05) = \$110.25.$$

Así, cada año el capital se incrementa en 5%. Los \$110.25 representan el capital original más todo el interés acumulado; esta cantidad se llama **monto acumulado** o **monto compuesto.** La diferencia entre el monto compuesto y el capital original se conoce como **interés compuesto.** Aquí, el interés compuesto es $110.25 - 100 = 10.25$.

De manera más general, si un capital de P dólares se invierte a una tasa de $100r$ por ciento, compuesto anualmente (por ejemplo, a 5%, r es 0.05), la cantidad compuesta después de un año es $P + Pr$, o factorizando, $P(1 + r)$. Al final del segundo año la cantidad compuesta es

$$\begin{aligned} &P(1 + r) + [P(1 + r)]r \\ &= P(1 + r)[1 + r] \qquad \text{(factorizando)} \\ &= P(1 + r)^2. \end{aligned}$$

Este patrón continúa. Después de 3 años la cantidad compuesta es $P(1 + r)^3$. En general, **el monto compuesto S del capital P al final de n años a una tasa de r compuesta anualmente,** está dado por

$$\boxed{S = P(1 + r)^n.} \qquad \textbf{(1)}$$

Observe en la ecuación (1) que para un capital y una tasa dados, S es una función de n. En efecto, S es una función exponencial con base $1 + r$.

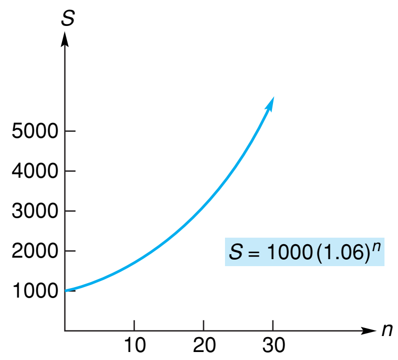


FIGURA 5.8 Gráfica de $S = 1000(1.06)^n$.

EJEMPLO 6 Monto compuesto e interés compuesto

Suponga que se invierten \$1000 *durante* 10 *años a* 6% *compuesto anualmente.*

a. *Encontrar el monto compuesto.*

Solución: utilizamos la ecuación (1) con $P = 1000$, $r = 0.06$, y $n = 10$:

$$S = 1000(1 + 0.06)^{10} = 1000(1.06)^{10} \approx \$1790.85.$$

La figura 5.8 muestra la gráfica de $S = 1000(1.06)^n$. Observe que conforme pasa el tiempo, el monto compuesto crece de manera impresionante.

b. *Encontrar el interés compuesto.*

Solución: utilizando los resultados del inciso (a), tenemos

$$\textbf{interés compuesto} = \boldsymbol{S - P}$$
$$= 1790.85 - 1000 = \$790.85.$$

Principios en práctica 5
Monto compuesto e interés compuesto

Suponga que \$2000 se invirtieron a 13% capitalizable anualmente. Determine el valor de la inversión después de cinco años. Determine el interés devengado durante los primeros cinco años.

La abreviatura T.P.A. es común, y se encuentra en los contratos de tarjetas de crédito y en anuncios.

Suponga que el capital de \$1000 en el ejemplo 6 se invierte durante 10 años como antes, pero esta vez se compone cada 3 meses (esto es, *trimestralmente*) a una tasa de $1\frac{1}{2}\%$ *por trimestre*. Entonces hay cuatro **periodos de interés** o **periodos de capitalización** o conversión por año, y en 10 años son $10(4) = 40$ periodos de interés. Así, el monto compuesto con $r = 0.015$ ahora es

$$1000(1.015)^{40} \approx \$1814.02,$$

y el interés compuesto es \$814.02. En general, la tasa de interés por periodo de capitalización se establece como una tasa anual. Aquí hablaríamos de una tasa anual de 6% compuesta trimestralmente, de modo que la tasa del interés en cada periodo, o **tasa periódica,** es $6\%/4 = 1.5\%$. Esta tasa anual *cotizada* de 6% se llama **tasa nominal** o **tasa de porcentaje anual (TPA).** A menos que se diga otra cosa, todas las tasas de interés se supondrán tasas anuales (nominales). Así, una tasa de 15% compuesta mensualmente corresponde a una tasa periódica de $15\%/12 = 1.25\%$.

Con base en nuestro estudio, podemos generalizar la ecuación (1). La fórmula

$$S = P(1 + r)^n \tag{2}$$

proporciona **el monto acumulado S de un principal P al final de n periodos de interés a una tasa periódica de r.**

Hemos visto que un capital de \$1000, a una tasa nominal de 6% en un periodo de 10 años, compuesto anualmente, tiene como resultado un interés compuesto de \$790.85, y compuesto cada trimestre da un interés de \$814.02. Es común que para una tasa nominal dada, entre más frecuentemente se componga, mayor será el interés compuesto. Sin embargo, conforme el número de periodos de interés aumente, el efecto tiende a ser menos significativo. Por ejemplo, con una composición semanal el interés compuesto es

$$1000\left(1 + \frac{0.06}{52}\right)^{10(52)} - 1000 \approx \$821.49,$$

y compuesto de forma diaria es

$$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{10(365)} - 1000 \approx \$822.03.$$

Aquí la diferencia no es muy significativa.

Advertencia Una tasa nominal de 6% no significa necesariamente que una inversión aumente en 6% en cada año. El incremento depende de la frecuencia de la capitalización.

A veces la frase "valor del dinero" se usa para expresar una tasa de interés anual. Por lo que, al decir que el dinero vale 6% compuesto por trimestre, nos referimos a una tasa anual (nominal) de 6% compuesto cada trimestre.

Principios en práctica 6
Capitalización semestral

Suponga que \$2000 se invirtieron a una tasa nominal de 6.5% capitalizable semestralmente. Determine el valor de la inversión después de cinco años. Determine el interés devengado durante los primeros cinco años.

EJEMPLO 7 Capitalización semestral

Suponga que \$3000 *se ponen en una cuenta de ahorros. Si el dinero tiene un valor de* 6% *compuesto semestralmente, ¿cuál es el saldo después de* 7 *años?* (*Suponga que no se hacen otros depósitos ni retiros.*)

Solución: aquí $P = 3000$. Con dos periodos de interés por año, tenemos un total de $n = 7(2) = 14$ periodos de interés. La tasa periódica r es $0.06/2 = 0.03$. Por la ecuación (2) tenemos

$$S = 3000(1.03)^{14} \approx \$4537.77.$$

Un estudio más detallado del interés compuesto y de matemáticas financieras se presenta en el capítulo 8.

Crecimiento poblacional

La ecuación (2) puede aplicarse no sólo al aumento del dinero, sino también a otros tipos de crecimiento, como al de población. Por ejemplo, suponga que la población P de una ciudad con 10,000 habitantes, crece a una tasa de 2% por año. Entonces P es una función del tiempo t, donde t está en años. Es común indicar esta dependencia funcional mediante

$$P = P(t).$$

Aquí la letra P se utiliza en dos formas. En el lado derecho, P representa la función; en el lado izquierdo P representa la variable dependiente. De la ecuación (2), tenemos

$$P(t) = 10{,}000(1 + 0.02)^t = 10{,}000(1.02)^t.$$

Principios en práctica 7
Crecimiento de población

Una compañía nueva con cinco empleados espera que el número de empleados crezca a una tasa de 120% cada año. Determine el número de empleados dentro de cuatro años.

EJEMPLO 8 Crecimiento de población

La población de una ciudad de 10,000 *habitantes crece a razón de* 2% *anual. Calcular la población dentro de* 3 *años.*

Solución: del estudio anterior,

$$P(t) = 10{,}000(1.02)^t.$$

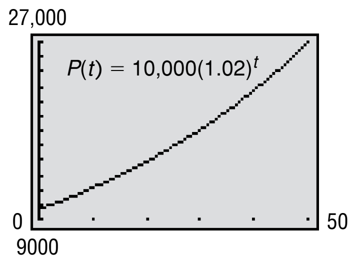


FIGURA 5.9 Gráfica de la función de población $P(t) = 10{,}000(1.02)^t$.

Para $t = 3$ tenemos

$$P(3) = 10{,}000(1.02)^3 \approx 10{,}612.$$

Por tanto, dentro de 3 años la población será de 10,612 habitantes (véase la fig. 5.9).

Función exponencial con base *e*

Uno de los números más útiles como base de una función exponencial es cierto número irracional denotado por la letra e, en honor del matemático suizo Leonardo Euler (1707–1783):

$$e = 2.71828\ldots.$$

La función exponencial con base e se conoce como **función exponencial natural.**

Aunque e puede parecer una base extraña, surge de manera natural en cálculo (como se verá más adelante en otro capítulo). También surge en el análisis económico y en problemas que implican crecimiento o decaimiento naturales, como estudios poblacionales, interés compuesto y decaimiento radiactivo. Valores aproximados de e^x pueden encontrarse con calculadora. La gráfica de $y = e^x$ se muestra en la figura 5.10. La tabla adjunta a la figura indica los valores de y con dos decimales. Por supuesto, la gráfica tiene la forma general de una función exponencial con base mayor que 1.

x	y
−2	0.14
−1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39

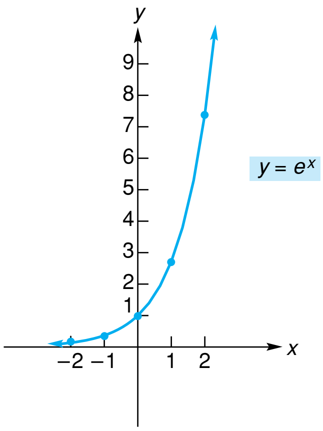


FIGURA 5.10 Gráfica de la función exponencial natural.

Debe familiarizarse con la gráfica de la función exponencial natural de la figura 5.10.

Principios en práctica 8

Gráficas de funciones que incluyen a *e*

La disminución multiplicativa en el poder de compra P después de t años de inflación a 6%, puede modelarse por medio de $P = e^{-0.06t}$. Haga la gráfica de la disminución del poder de compra como una función de t años.

EJEMPLO 9 Gráficas de funciones que incluyen a *e*

a. *Graficar* $y = e^{-x}$.

Solución: como $e^{-x} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$ y $0 < \dfrac{1}{e} < 1$, la gráfica es la de una función exponencial que desciende de izquierda a derecha (véase la fig. 5.11). De manera alterna, podemos considerar la gráfica de $y = e^{-x}$ como una transformación de la gráfica de $f(x) = e^x$. Puesto que $e^{-x} = f(-x)$, la gráfica de $y = e^{-x}$ sólo es la reflexión de la gráfica de f con respecto al eje y (compare las gráficas de las figuras 5.10 y 5.11).

x	y
–2	7.39
–1	2.72
0	1
1	0.37
2	0.14

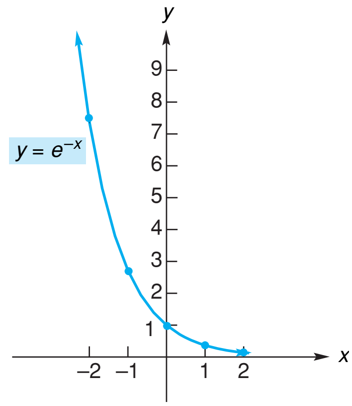


FIGURA 5.11 Gráfica de $y = e^{-x}$.

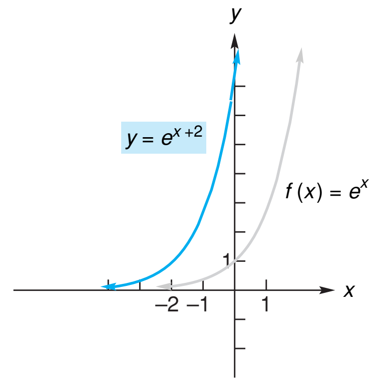


FIGURA 5.12 Gráfica de $y = e^{x+2}$.

b. *Graficar $y = e^{x+2}$.*

Solución: la gráfica de $y = e^{x+2}$ está relacionada con la de $f(x) = e^x$. Como e^{x+2} es $f(x + 2)$, podemos obtener la gráfica de $y = e^{x+2}$ mediante un corrimiento horizontal de dos unidades a la izquierda, de la gráfica de $f(x) = e^x$ (véase la fig. 5.12).

EJEMPLO 10 Crecimiento poblacional

La población proyectada, P, de una ciudad está dada por

$$P = 100{,}000e^{0.05t},$$

donde t es el número de años después de 1990. *Pronosticar la población para el año* 2010.

Solución: el número de años desde 1990 hasta 2010 es 20, de modo que hacemos $t = 20$. Entonces

$$P = 100{,}000e^{0.05(20)} = 100{,}000e^1 = 100{,}000e \approx 271{,}828.$$

Muchos pronósticos están basados en estudios de población.

En estadística, una función importante que se utiliza como modelo para describir la ocurrencia de eventos en la naturaleza es la **función de distribución de Poisson:**

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \; \ldots .$$

El símbolo μ (léase "mu") es una letra griega. En ciertas situaciones $f(x)$ da la probabilidad de que exactamente x eventos ocurran en un intervalo de tiempo o espacio. La constante μ es la media o número promedio de ocurrencias en dicho intervalo. El ejemplo siguiente ilustra la distribución de Poisson.

EJEMPLO 11 Hemocitómetro y células

Un hemocitómetro es una cámara de conteo dividida en cuadrados que se utiliza para el estudio del número de estructuras microscópicas en un líquido. En un experimento muy conocido,[3] células de levadura se diluyeron y mezclaron

[3] R. R. Sokal y F. J. Rohlf, *Introduction to Biostatistics* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, Publishers, 1973).

perfectamente en un líquido, y la mezcla se colocó en un hemocitómetro. Con un microscopio se contaron las células de levadura existentes en cada cuadrado. La probabilidad de que hubiera exactamente x células en cada cuadrado del hemocitómetro se encontró que se ajustaba a una distribución de Poisson con $\mu = 1.8$. *Determinar la probabilidad de hallar exactamente cuatro células en un cuadrado en particular.*

Solución: utilizamos la función de distribución de Poisson con $\mu = 1.8$ y $x = 4$:

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!},$$

$$f(4) = \frac{e^{-1.8}(1.8)^4}{4!} \approx 0.072.$$

Por ejemplo, esto significa que en 400 cuadrados *esperaríamos* que $400(0.072) \approx 29$ cuadrados contuvieran exactamente 4 células (en el experimento, en 400 cuadrados el número real observado fue de 30).

Decaimiento radiactivo

Los elementos radiactivos tienen la particularidad de que su cantidad disminuye con respecto al tiempo. Decimos que un elemento radiactivo *decae*. Si N es la cantidad en el tiempo t, entonces puede demostrarse que

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{3}$$

donde N_0 y λ (letra griega “lambda”) son constantes positivas. Observe que N incluye una función exponencial de t. Decimos que N sigue una **ley de decaimiento exponencial.** Si $t = 0$, entonces $N = N_0 e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$. Así, la constante N_0 representa la cantidad del elemento presente en el tiempo $t = 0$ y se le llama la **cantidad inicial.** La constante λ depende del elemento particular de que se trate, y es llamada la **constante de decaimiento.**

Como N disminuye conforme el tiempo pasa, suponga que T es el tiempo que tarda el elemento en disminuir a la mitad de su cantidad inicial. Entonces en el $t = T$, tenemos $N = N_0/2$. La ecuación (3) implica que

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}.$$

Ahora utilizamos este hecho para demostrar que en *cualquier* intervalo de longitud T, decaerá la mitad de la cantidad del elemento. Considere el intervalo desde el tiempo t hasta $t + T$, que tiene longitud T. En el tiempo t, la cantidad de elemento es $N_0 e^{-\lambda t}$, y en el tiempo $t + T$ es

$$N_0 e^{-\lambda(t+T)} = N_0 e^{-\lambda t} e^{-\lambda T} = (N_0 e^{-\lambda T}) e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{N_0}{2} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}(N_0 e^{-\lambda t}),$$

que es la mitad de la cantidad en el tiempo t. Esto significa que si la cantidad inicial presente N_0 fuese de 1 gramo, en el tiempo T habría $\frac{1}{2}$ gramo, en el tiempo $2T$ habría $\frac{1}{4}$ de gramo, y así sucesivamente. Este valor de T se conoce como la **vida media** del elemento radiactivo. La figura 5.13 muestra una gráfica de decaimiento radiactivo.

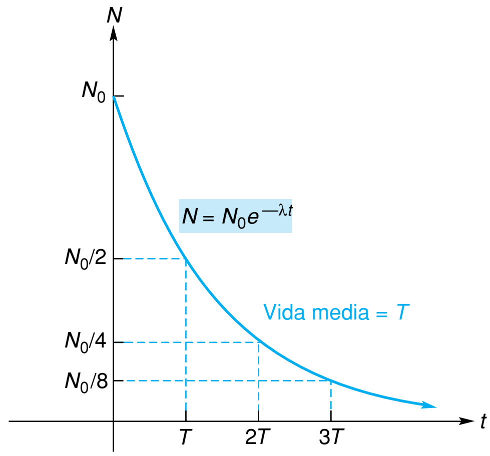


FIGURA 5.13 Decaimiento radiactivo.

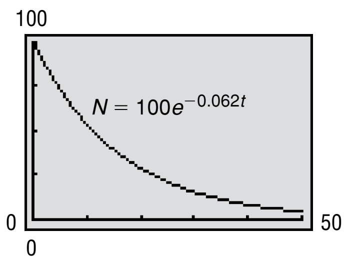


FIGURA 5.14 Gráfica de la función de decaimiento radiactivo $N = 100e^{-0.062t}$.

EJEMPLO 12 Decaimiento radiactivo

Un elemento radiactivo decae de modo que después de t días el número de miligramos presentes está dado por

$$N = 100e^{-0.062t}.$$

a. *¿Cuántos miligramos están presentes inicialmente?*

Solución: esta ecuación tiene la forma de la ecuación (3); $N = N_0e^{-\lambda t}$, donde $N_0 = 100$ y $\lambda = 0.062$. N_0 es la cantidad inicial y corresponde a $t = 0$. Así, 100 miligramos están presentes inicialmente (véase la fig. 5.14).

b. *¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?*

Solución: cuando $t = 10$,

$$N = 100e^{-0.062(10)} = 100e^{-0.62} \approx 53.8.$$

Por consiguiente, en forma aproximada, 53.8 miligramos están presentes después de 10 días.

Ejercicio 5.1

En los problemas del 1 al 12 grafique cada función.

1. $y = f(x) = 4^x$.
2. $y = f(x) = 3^x$.
3. $y = f(x) = (\frac{1}{3})^x$.
4. $y = f(x) = (\frac{1}{4})^x$.
5. $y = f(x) = 2(\frac{1}{4})^x$.
6. $y = f(x) = 3(2)^x$.
7. $y = f(x) = 3^{x+2}$.
8. $y = f(x) = 2^{x-1}$.
9. $y = f(x) = 2^x - 1$.
10. $y = f(x) = 3^{x-1} - 1$.
11. $y = f(x) = 2^{-x}$.
12. $y = f(x) = \frac{1}{5}(3^{x/2})$.

Los problemas 13 y 14 se refieren a la figura 5.15, que muestra las gráficas de $y = 0.4^x$, $y = 2^x$ y $y = 5^x$.

13. De las curvas A, B y C, ¿cuál es la gráfica de $y = 5^x$?

14. De las curvas A, B y C, ¿cuál es la gráfica de $y = 0.4^x$?

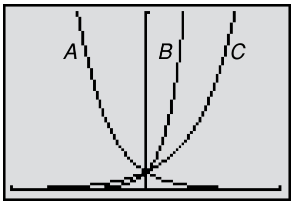


FIGURA 5.15 Diagrama para los problemas 13 y 14.

15. Población La población proyectada de una ciudad está dada por $P = 125{,}000(1.11)^{t/20}$, donde t es el número de años a partir de 1995. ¿Cuál es la población estimada para el año 2015?

16. Población Para cierta ciudad, la población P crece a una tasa de 2% por año. La fórmula $P = 1{,}000{,}000(1.02)^t$ proporciona la población t años después de 1998. Determine la población en (a) 1999 y (b) 2000.

17. Aprendizaje por asociación de pares En un experimento psicológico sobre aprendizaje,[4] se pidió a un conjunto de personas proporcionar respuestas específicas después de recibir ciertos estímulos. Cada estímulo fue un par de letras y cada respuesta era un dígito, 1 o 2. Después de cada respuesta se le decía al sujeto la respuesta correcta. En este experimento de aprendizaje denominado *asociación de pares*, la probabilidad teórica P de que el sujeto dé la respuesta correcta en el n-ésimo ensayo está dada por

$$P = 1 - \tfrac{1}{2}(1 - c)^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad 0 < c < 1.$$

Encuentre P cuando $n = 1$.

18. Exprese $y = 2^{3x}$ como una función exponencial de base 8.

En los problemas del 19 al 27 encuentre (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto para la inversión y tasa anual dadas.

19. \$4000 durante 7 años a 6% compuesto anualmente.

20. \$5000 durante 20 años a 5% compuesto anualmente.

21. \$700 durante 15 años a 7% compuesto cada semestre.

22. \$4000 durante 12 años a 7.5% compuesto cada semestre.

23. \$4000 durante 15 años a 8.5% compuesto trimestralmente.

24. \$900 durante 11 años a 10% compuesto cada trimestre.

25. \$5000 durante 2.5 años a 9% compuesto mensualmente.

26. \$500 durante 5 años a 11% compuesto semestralmente.

27. \$8000 durante 3 años a 6.25% compuesto diariamente (suponga que hay 365 días en un año).

28. Inversiones Suponga que \$1000 se colocan en una cuenta de ahorros que gana intereses a una tasa de 5% compuesto semestralmente. (a) ¿Cuál es el valor de la cuenta al final de 4 años? (b) Si la cuenta hubiera generado intereses a una tasa de 5% compuesto anualmente, ¿cuál sería su valor después de 4 años?

29. Inversión Un certificado de depósito de \$6000 se compra en \$6000 y se conserva durante 7 años. Si el certificado gana un 8% compuesto cada trimestre, ¿cuál es su valor al cabo de 7 años?

30. Crecimiento poblacional La población de una ciudad de 5000 habitantes crece a razón de 3% anual. (a) Determine una ecuación que proporcione la población después de t años a partir de ahora. (b) Determine la población 3 años después de ahora. Obtenga la respuesta para (b) al entero más cercano.

31. Crecimiento de bacterias En un cultivo se tienen bacterias cuyo número se incrementa a razón de 5% cada hora. Al inicio estaban presentes 400 bacterias. (a) Determine una ecuación que dé el número, N, de bacterias presentes después de t horas. (b) ¿Cuántas bacterias están presentes después de 1 hora? (c) ¿Después de 4 horas? Dé sus respuestas a (b) y (c) al entero más cercano.

32. Reducción de bacterias Cierta medicina reduce las bacterias presentes en una persona en 10% cada hora. Actualmente, están presentes 100,000 bacterias. Construya una tabla de valores para el número de bacterias presentes en cada hora, desde 0 hasta 4 horas. Para cada hora, escriba una expresión para el número de bacterias como un producto de 100,000 y una potencia de $\frac{9}{10}$. Utilice las expresiones para construir una entrada en su tabla para el número de bacterias después de t horas. Escriba una función N para el número de bacterias después de t horas.

33. Reciclado Suponga que la cantidad de plástico que se reciclará aumenta 30% cada año. Construya una tabla del factor por el cual aumenta el reciclado sobre la cantidad original para 0 a 3 años. Para cada año, escriba una expresión para el aumento como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizará? ¿Cómo se relaciona esa base con el problema? Utilice su tabla para graficar el aumento multiplicativo como una función de los años. Utilice su gráfica para determinar cuando el reciclado se triplica.

34. Crecimiento poblacional Las ciudades A y B en la actualidad tienen poblaciones de 70,000 y 60,000 habitantes, respectivamente. La ciudad A crece a razón de 4% anual y la de B crece a razón de 5% anual. Determine la diferencia entre las poblaciones al final de 5 años. Dé su respuesta al entero más cercano.

[4]D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1973).

Los problemas 35 y 36 tratan sobre la disminución poblacional. Si una población disminuye a una tasa de r por periodo, entonces la población P después de t periodos está dada por

$$P = P_0(1 - r)^t.$$

donde P_0 *es la población inicial (la población cuando* $t = 0$*).*

35. Población A causa de una recesión económica, la población de cierta área urbana disminuye a razón de 1% anual. Al inicio la población era de 100,000 habitantes. ¿Cuál es la población después de 3 años?

36. Fuerza de trabajo En un esfuerzo por disminuir los costos, una compañía reducirá su fuerza de trabajo a razón de 2% mensual durante 12 meses. Si actualmente emplea a 500 trabajadores, ¿cuántos trabajadores tendrá dentro de 12 meses? Redondee al entero más cercano.

En los problemas del 37 al 40 utilice una calculadora para encontrar el valor (redondeado a cuatro decimales) de cada expresión.

37. $e^{1.5}$. **38.** $e^{3.4}$. **39.** $e^{-0.7}$. **40.** $e^{-3/4}$.

En los problemas 41 y 42 grafique las funciones.

41. $y = -e^x$. **42.** $y = 2e^x$.

43. Llamadas telefónicas La probabilidad de que un operador de teléfonos reciba exactamente x llamadas durante cierto periodo está dada por

$$P = \frac{e^{-3}3^x}{x!}.$$

Encuentre la probabilidad de que el operador reciba exactamente tres llamadas. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

44. Distribución normal Una función importante utilizada en economía y decisiones de negocios es la *función de distribución normal*, que en forma estándar es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\frac{1}{2})x^2}.$$

Evalué $f(0)$, $f(-1)$ y $f(1)$. Redondee sus respuestas a tres decimales.

45. Exprese e^{kt} en la forma b^t.

46. Exprese $\dfrac{1}{e^x}$ en la forma b^x.

47. Decaimiento radiactivo Un elemento radiactivo tiene la característica de que se tienen N gramos de él después de t horas, donde

$$N = 10e^{-0.028t}.$$

(a) ¿Cuántos gramos están presentes inicialmente? (b) A la décima de gramo más cercana, ¿cuántos gramos permanecen después de 10 horas? (c) ¿Y de 50 horas? (d) Con base en su respuesta de la parte (c), ¿cuál es su estimación de la vida media del elemento?

48. Decaimiento radiactivo A un cierto tiempo hay 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Ésta decae de modo que después de t años el número de miligramos presentes, N, está dado por

$$N = 100e^{-0.035t}.$$

¿Cuántos miligramos están presentes después de 20 años? Dé su respuesta al miligramo más cercano.

49. Decaimiento radiactivo Si una sustancia tiene una vida media de 8 años, ¿cuánto tiempo toma para que un gramo decaiga a $\frac{1}{16}$ de gramo?

50. Mercadotecnia Una compañía de ventas por correo se anuncia en una revista nacional. La compañía determina que de todas las ciudades pequeñas, el porcentaje (dado como un decimal) en el que exactamente x personas respondan a un anuncio se ajusta a una distribución de Poisson con $\mu = 0.5$. ¿En qué porcentaje de ciudades pequeñas puede esperar la compañía que respondan exactamente dos personas? Redondee su respuesta a cuatro decimales.

51. Admisión en cuartos de urgencia Suponga que el número de pacientes admitidos en un cuarto de urgencia de hospital durante cierta hora del día tiene una distribución de Poisson con media 4. Encuentre la probabilidad de que durante esa hora haya exactamente dos pacientes de urgencia. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

52. Grafique $y = 10^x$ y $y = (\frac{1}{10})^x$ en la misma pantalla. Determine el punto de intersección.

53. Grafique $y = 2^x$ y $y = 4 \cdot 2^x$ en la misma pantalla. Parece que la gráfica de $y = 4 \cdot 2^x$ es la gráfica de $y = 2^x$ recorrida dos unidades a la izquierda. En forma algebraica pruebe que esto es cierto.

54. Para $y = 7^x$, encuentre x si $y = 4$. Redondee su respuesta a dos decimales.

55. Para $y = 2^x$, determine x si $y = 9$. Redondee su respuesta a dos decimales.

56. Crecimiento de células En un cultivo de células, su número se incrementa a razón de 7% por hora. Al inicio están presentes 1000 células. ¿Después de cuántas horas completas habrá al menos 3000 células?

57. Crecimiento de bacterias Con referencia al ejemplo 1, ¿cuánto tiempo tomará para que estén presentes 1000 bacterias? Redondee su respuesta a la décima de minuto más cercana.

58. Ecuación de demanda La ecuación de demanda de un juguete nuevo es

$$q = 10{,}000(0.95123)^p.$$

a. Evalúe q al entero más cercano cuando $p = 10$.
b. Convierta la ecuación de demanda a la forma

$$q = 10{,}000e^{-0.05p}.$$

[*Sugerencia:* encuentre un número x tal que $0.95123 \approx e^{-x}$.]
c. Utilice la ecuación de la parte (b) para evaluar q al entero más cercano cuando $p = 10$. Sus respuestas para las partes (a) y (c) deben ser iguales.

59. Inversión Si \$3000 se invierten en una cuenta de ahorros que genera interés a 4.5% compuesto anualmente, ¿después de cuántos años completos la cantidad al menos se duplicará?

OBJETIVO Introducir las funciones logarítmicas y sus gráficas. Las propiedades de los logaritmos se estudiarán en la sección 5.3.

5.2 Funciones logarítmicas

En esta sección las funciones de interés para nosotros son las *funciones logarítmicas*, las cuales están relacionadas con las funciones exponenciales. La figura 5.16(a) muestra la gráfica de la función exponencial $s = f(t) = 2^t$. Aquí f convierte un número de entrada t en un número *positivo* de salida s:

$$f: t \rightarrow s \quad \text{en donde} \quad s = 2^t.$$

Por ejemplo, f convierte el 2 en 4.

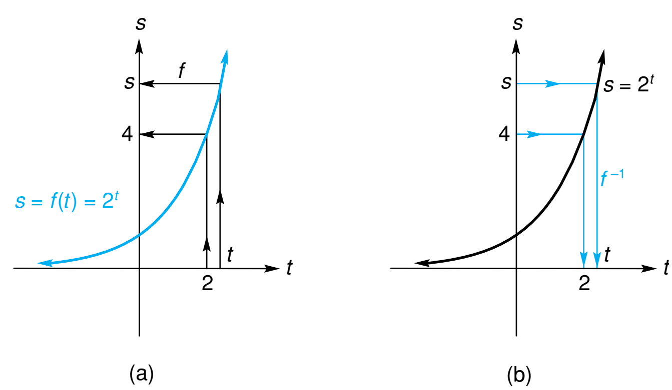


FIGURA 5.16 Gráfica de $s = 2^t$.

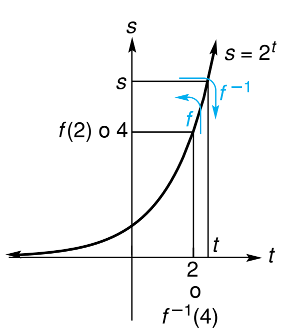


FIGURA 5.17 Acciones de f y f^{-1}.

En la misma curva de la figura 5.16(b), puede verse de las flechas pequeñas que a cada número positivo s en eje vertical, podemos asociar exactamente un valor de t. Por ejemplo, con $s = 4$ asociamos $t = 2$. Si pensamos en s como una entrada y t como una salida, tenemos una función que envía cada s a una t. Denotaremos a esta función por f^{-1} (se lee "f inversa"):[5]

$$f^{-1}: s \rightarrow t \quad \text{en donde} \quad s = 2^t.$$

Así, $f^{-1}(s) = t$. El dominio de f^{-1} es el rango de f (todos los números reales positivos), y el rango de f^{-1} es el dominio de f (todos los números reales).

Las funciones f y f^{-1} están relacionadas. La figura 5.17 muestra que f^{-1} *invierte* la acción de f, y viceversa. Por ejemplo

$$f \text{ envía el 2 al 4} \quad \text{y} \quad f^{-1} \text{ envía el 4 al 2}.$$

[5] El -1 en f^{-1} no es un exponente, de modo que f^{-1} *no* significa $\frac{1}{f}$.

Más generalmente, $f(t) = s$ y $f^{-1}(s) = t$. En términos de composición, cuando se aplica $f^{-1} \circ f$ o bien $f \circ f^{-1}$ a un número de entrada, ese mismo número es obtenido en la salida a causa de los efectos inversos de f y f^{-1}. Esto es,

$$(f^{-1} \circ f)(t) = f^{-1}(f(t)) = f^{-1}(s) = t$$

y

$$(f \circ f^{-1})(s) = f(f^{-1}(s)) = f(t) = s.$$

Damos un nombre especial a f^{-1}: **función logarítmica de base 2** y se escribe $\log_2$ [se lee "logaritmo (o log) base 2"]. Así $f^{-1}(4) = \log_2 4 = 2$ y decimos que el *logaritmo* en base 2 de 4 es 2.

En resumen

$$\text{si } s = 2^t, \quad \text{entonces} \quad t = \log_2 s. \tag{1}$$

Ahora generalizamos nuestro estudio a otras bases. En la ecuación (1), reemplazando 2 por b, s por x y t por y se obtiene la siguiente definición.

Definición

La ***función logarítmica*** de base b, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, se denota por $\log_b$ y se define como

$$y = \log_b x \quad \textit{si y sólo si} \quad b^y = x.$$

El dominio de $\log_b$ es el conjunto de todos los números reales positivos y el rango es el conjunto de todos los números reales.

Puesto que una función logarítmica invierte la acción de la correspondiente función exponencial y viceversa, cada función logarítmica es llamada la *inversa* de su correspondiente función logarítmica.

Recuerde, cuando decimos que y es el logaritmo base b de x, queremos decir que b elevado a la potencia y es igual a x. Esto es,

$$\boxed{y = \log_b x \quad \text{significa} \quad b^y = x.}$$

En este sentido, *un logaritmo de un número es un exponente:* $\log_b x$ es la potencia a la cual debe elevarse b para obtener x. Por ejemplo,

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{ya que} \quad 2^3 = 8.$$

Decimos que $\log_2 8 = 3$ es la **forma logarítmica** de la **forma exponencial** $2^3 = 8$ (véase la fig. 5.18).

Forma logarítmica y exponencial

Logaritmo	Exponente
$\log_2 8 = \boxed{3}$	$2^{\boxed{3}} = 8$
base	base

FIGURA 5.18 Un logaritmo puede considerarse un exponente.

Principios en práctica 1

Conversión de forma exponencial a forma logarítmica

Si las bacterias se han estado duplicando cada hora y la cantidad actual es 16 veces la cantidad que se midió al inicio, entonces la situación puede representarse por $16 = 2^t$. Represente esta ecuación en forma logarítmica. ¿Qué representa t?

EJEMPLO 1 Conversión de forma exponencial a forma logarítmica

		Forma exponencial		*Forma logarítmica*
a.	Como	$5^2 = 25$,	se concluye que	$\log_5 25 = 2$.
b.	Como	$3^4 = 81$,	se concluye que	$\log_3 81 = 4$.
c.	Como	$10^0 = 1$,	se concluye que	$\log_{10} 1 = 0$.

Principios en práctica 2

Conversión de forma logarítmica a forma exponencial

Un terremoto que midió 8.3 en la escala de Richter puede representarse por $8.3 = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$, en donde I es la intensidad del terremoto e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. Represente esta ecuación en forma exponencial.

EJEMPLO 2 Conversión de forma logarítmica a forma exponencial

	Forma logarítmica		*Forma exponencial*
a.	$\log_{10} 1000 = 3$	significa	$10^3 = 1000.$
b.	$\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	significa	$64^{1/2} = 8.$
c.	$\log_2 \frac{1}{16} = -4$	significa	$2^{-4} = \frac{1}{16}.$

Principios en práctica 3

Gráfica de una función logarítmica con $b > 1$

Suponga que una planta de reciclado encontró que la cantidad de material que se reciclará ha aumentado en 50% cada año, desde el primer año de operación de la planta. Haga la gráfica de cada año como una función del aumento multiplicativo en el reciclado desde el primer año. Marque la gráfica con el nombre de la función.

EJEMPLO 3 Gráfica de una función logarítmica con $b > 1$

Graficar la función $y = \log_2 x$.

Solución: puede ser difícil sustituir valores de x y después encontrar los correspondientes valores de y. Por ejemplo, si $x = 3$, entonces $y = \log_2 3$, lo que no se determina con facilidad. Una manera más sencilla para trazar puntos es utilizar la forma exponencial equivalente $x = 2^y$. Seleccionamos valores de y y encontramos los correspondientes valores de x. Por ejemplo, si $y = 0$, entonces $x = 1$. Esto da el punto $(1, 0)$. Otros puntos se muestran en la figura 5.19.

x	y
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

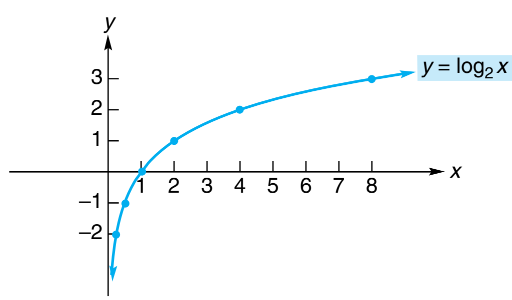


FIGURA 5.19 Gráfica de $y = \log_2 x$.

De la gráfica puede deducirse que el dominio es el conjunto de todos lo números reales positivos. Por tanto, *los números negativos y el cero no tienen logaritmos*. El rango es el conjunto de todos los números reales. Observe que la gráfica asciende de izquierda a derecha. Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos negativos, y entre más cercano al cero es el número su logaritmo es más negativo. Los números mayores que 1 tienen logaritmos positivos. El logaritmo de 1 es 0, que corresponde a la intersección x $(1, 0)$. No existe y. Esta gráfica es representativa para una función logarítmica con $b > 1$.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función logarítmica con $0 < b < 1$

Graficar $y = \log_{1/2} x$.

Solución: para trazar puntos usamos la forma exponencial equivalente $x = (\frac{1}{2})^y$ (véase la fig. 5.20).

Principios en práctica 4

Gráfica de una función logarítmica con $0 < b < 1$

Suponga que un bote se deprecia 20% cada año. Haga la gráfica del número de años que se conserva el bote como una función de la disminución multiplicativa de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

x	y
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3

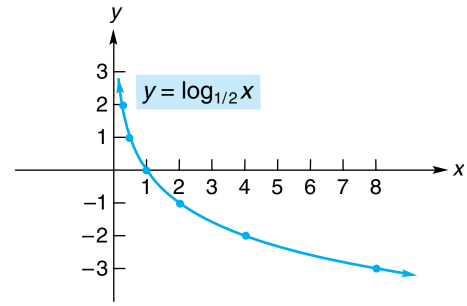


FIGURA 5.20 Gráfica de $y = \log_{1/2}x$.

A partir de la gráfica, podemos ver que el dominio es el conjunto de todos los números reales positivos y el rango todos los números reales. La gráfica desciende de izquierda a derecha. Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos positivos y, entre más cerca estén del 0, mayor es su logaritmo. Los números mayores que 1 tienen logaritmos negativos. El logaritmo de 1 es cero y corresponde a la intersección x $(1, 0)$. Esta gráfica es representativa para una función logarítmica con $0 < b < 1$.

Resumiendo los resultados de los ejemplos 3 y 4, podemos decir que la gráfica de una función logarítmica tiene una de dos formas generales, dependiendo si $b > 1$ o si $0 < b < 1$ (véase la fig. 5.21). Para $b > 1$ la gráfica asciende de izquierda a derecha; conforme x se acerca a 0, los valores de la función disminuyen sin una cota y la gráfica se hace cada vez más próxima al eje y. Para $0 < b < 1$, la gráfica desciende de izquierda a derecha; conforme x se acerca a cero, los valores de la función crecen sin una cota y la gráfica se acerca al eje y. En cada caso note que:

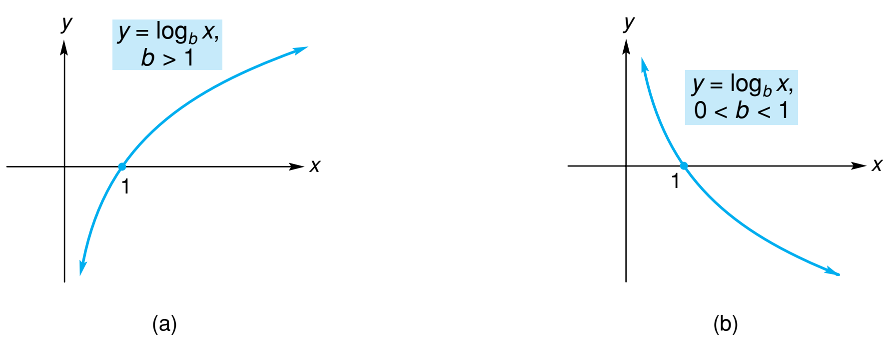


FIGURA 5.21 Formas generales de $y = \log_b x$.

1. El dominio de una función logarítmica es el intervalo $(0, \infty)$. Esto es, no existe logaritmo de números negativos ni del cero.
2. El rango es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
3. El logaritmo de 1 es 0, que corresponde a la intersección x $(1, 0)$.

Los logaritmos de base 10 son llamados **logaritmos comunes.** Era frecuente utilizarlos para propósitos de cómputo antes de la época de las calculadoras. En general, de la notación se omite el subíndice 10:

$$\log x \quad \text{significa} \quad \log_{10} x.$$

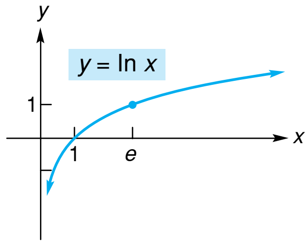


FIGURA 5.22 Gráfica de la función logaritmo natural.

Debe familiarizarse con la gráfica de la función logaritmo natural de la figura 5.22.

Recuerde: Un logaritmo (en cierto sentido) es un exponente.

Los logaritmos de base e son importantes en el cálculo y se conocen como **logaritmos naturales.** Usamos la notación "ln" para tales logaritmos:

$$\ln x \quad \text{significa} \quad \log_e x.$$

El símbolo ln x puede leerse "ele ene de x". Su calculadora da valores aproximados para los logaritmos naturales y comunes. Por ejemplo, verifique que $\ln 2 \approx 0.69315$. Esto significa que $e^{0.69315} \approx 2$. La figura 5.22 muestra la gráfica de $y = \ln x$. Ya que $e > 1$, la gráfica tiene la forma general de una función logarítmica con $b > 1$ [véase la fig. 5.21(a)] y asciende de izquierda a derecha.

Principios en práctica 5
Cálculo de logaritmos

El número de años que le toma a una cantidad invertida a una tasa anual de r y compuesta de manera continua, cuadriplicar su valor es una función de la tasa anual r dada por $t(r) = \frac{\ln 4}{r}$. Utilice una calculadora para encontrar la tasa necesaria para cuadriplicar una inversión en 10 años.

EJEMPLO 5 Cálculo de logaritmos

a. *Encontrar* log 100.

Solución: aquí la base es 10. Por lo que log 100 es el exponente al que hay que elevar a 10 para obtener 100. Como $10^2 = 100$, $\log = 2$.

b. *Encontrar* ln 1.

Solución: aquí la base es e. Puesto que $e^0 = 1$, $\ln 1 = 0$.

c. *Encontrar* log 0.1.

Solución: como $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, $\log 0.1 = -1$.

d. *Encontrar* $\ln e^{-1}$.

Solución: como $\ln e^{-1}$ es el exponente al que se debe elevar e para obtener e^{-1}, es claro que $\ln e^{-1} = -1$.

e. *Encontrar* $\log_{36} 6$.

Solución: como $36^{1/2}$ (o $\sqrt{36}$) es 6, $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.

Muchas ecuaciones que incluyen formas logarítmica o exponencial, pueden resolverse para una cantidad desconocida transformando primero de la forma logarítmica a la exponencial o viceversa. El ejemplo 6 lo ilustra.

Principios en práctica 6
Solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

El aumento multiplicativo m de un monto invertido a una tasa anual de r, capitalizable de manera continua durante un tiempo t está dado por $m = e^{rt}$. ¿Qué tasa anual es necesaria para triplicar la inversión en 12 años?

EJEMPLO 6 Solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

a. *Resolver* $\log_2 x = 4$.

Solución: podemos obtener una expresión explícita para x escribiendo la ecuación en forma exponencial. Esto da

$$2^4 = x,$$

de modo que $x = 16$.

b. *Resolver* $\ln(x + 1) = 7$.

Solución: la forma exponencial da $e^7 = x + 1$. Así, $x = e^7 - 1$.

c. *Resolver* $\log_x 49 = 2$.

Solución: en la forma exponencial, $x^2 = 49$, de modo que $x = 7$. Rechazamos $x = -7$, ya que un número negativo no puede ser una base de una función logarítmica.

d. *Resolver* $e^{5x} = 4$.

Solución: podemos obtener una expresión explícita para x escribiendo la ecuación en forma logarítmica. Tenemos

$$\ln 4 = 5x,$$

$$x = \frac{\ln 4}{5}.$$

Decaimiento radiactivo y vida media

Del estudio de decaimiento de un elemento radiactivo de la sección 5.1, sabemos que la cantidad presente en el instante t está dada por

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{2}$$

donde N_0 es la cantidad inicial (la cantidad en el instante $t = 0$) y λ la constante de decaimiento. Ahora determinemos la vida media T del elemento. En el instante T, la mitad de la cantidad inicial está presente. Esto es, cuando $t = T$, entonces $N = N_0/2$. Así, de la ecuación (2), tenemos

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}.$$

Resolviendo para T se obtiene

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T},$$

$$2 = e^{\lambda T} \qquad \text{(tomando recíprocos de ambos lados).}$$

Para obtener una expresión explícita para T, convertiremos a la forma logarítmica. Esto da

$$\lambda T = \ln 2,$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Resumiendo, tenemos lo siguiente:

Si un elemento radiactivo tiene una constante de decaimiento λ, entonces la vida media T del elemento está dada por:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{3}$$

EJEMPLO 7 Determinación de la vida media

Una muestra de 10 miligramos de polonio 210 radiactivo (^{210}Po) decae de acuerdo con la ecuación

$$N = 10e^{-0.00501t},$$

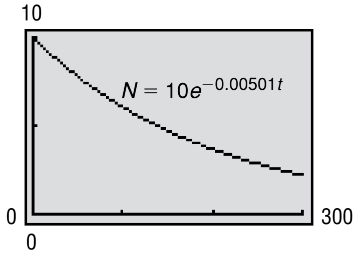


FIGURA 5.23 Función de decaimiento radiactivo $N = 10e^{-0.00501t}$.

donde N es el número de miligramos presentes después de t días (véase la fig. 5.23). *Determinar la vida media del* ^{210}Po.

Solución: aquí la constante de decaimiento es $\lambda = 0.00501$. Por la ecuación (3), la vida media T está dada por:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0.00501} \approx 138.4 \text{ días.}$$

Ejercicio 5.2

En los problemas del 1 al 8 exprese cada forma logarítmica de manera exponencial y cada forma exponencial de manera logarítmica.

1. $10^4 = 10{,}000$. **2.** $2 = \log_{12} 144$. **3.** $\log_2 64 = 6$. **4.** $8^{2/3} = 4$.
5. $e^2 = 7.3891$. **6.** $e^{0.33647} = 1.4$. **7.** $\ln 3 = 1.09861$. **8.** $\log 5 = 0.6990$.

En los problemas del 9 al 16 grafique las funciones.

9. $y = f(x) = \log_3 x$. **10.** $y = f(x) = \log_4 2x$. **11.** $y = f(x) = \log_{1/4} x$. **12.** $y = f(x) = \log_{1/3} x$.
13. $y = f(x) = \log_2(x - 4)$. **14.** $y = f(x) = \log_2(-x)$. **15.** $y = f(x) = -2 \ln x$. **16.** $y = f(x) = \ln(x + 2)$.

En los problemas del 17 al 28 evalúe la expresión.

17. $\log_6 36$. **18.** $\log_2 32$. **19.** $\log_3 27$. **20.** $\log_{16} 4$.
21. $\log_7 7$. **22.** $\log 10{,}000$. **23.** $\log 0.01$. **24.** $\log_2 \sqrt{2}$.
25. $\log_5 1$. **26.** $\log_5 \frac{1}{25}$. **27.** $\log_2 \frac{1}{8}$. **28.** $\log_4 \sqrt[5]{4}$.

En los problemas del 29 al 48 encuentre x.

29. $\log_3 x = 2$. **30.** $\log_2 x = 8$. **31.** $\log_5 x = 3$. **32.** $\log_4 x = 0$.
33. $\log x = -1$. **34.** $\ln x = 1$. **35.** $\ln x = -3$. **36.** $\log_x 100 = 2$.
37. $\log_x 8 = 3$. **38.** $\log_x 3 = \frac{1}{2}$. **39.** $\log_x \frac{1}{6} = -1$. **40.** $\log_x y = 1$.
41. $\log_3 x = -4$. **42.** $\log_x(2x - 3) = 1$. **43.** $\log_x(6 - x) = 2$. **44.** $\log_8 64 = x - 1$.
45. $2 + \log_2 4 = 3x - 1$. **46.** $\log_3(x + 2) = -2$. **47.** $\log_x(2x + 8) = 2$. **48.** $\log_x(30 - 4x - x^2) = 2$.

En los problemas del 49 al 52 encuentre x y y, además exprese su respuesta en términos de logaritmos naturales.

49. $e^{3x} = 2$. **50.** $0.1e^{0.1x} = 0.5$. **51.** $e^{2x-5} + 1 = 4$. **52.** $6e^{2x} - 1 = \frac{1}{2}$.

En los problemas del 53 al 56 utilice su calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión. Redondee su respuesta a cinco decimales.

53. $\ln 5$. **54.** $\ln 3.12$. **55.** $\ln 7.39$. **56.** $\ln 9.98$.

57. Química Si el pH de una sustancia es 5.5, entonces la concentración de iones de hidrógeno, h, en átomos gramo por litro puede representarse por medio de $5.5 = \log \frac{1}{h}$. Represente esta ecuación en forma exponencial.

58. Apreciación Suponga que una antigüedad gana en valor 10% cada año. Haga una gráfica del número de años que se retiene como una función del aumento multiplicativo de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

59. Ecuación de costo Para una compañía, el costo para producir q unidades de un producto está dado por la ecuación

$$c = (2q \ln q) + 20.$$

Evalúe el costo cuando $q = 6$ (redondee su respuesta a dos decimales).

60. Ecuación de oferta La ecuación de oferta de un fabricante es

$$p = \log\left(10 + \frac{q}{2}\right),$$

donde q es el número de unidades ofrecidas con el precio p por unidad. ¿A qué precio el fabricante ofrecerá 1980 unidades?

61. Terremotos La magnitud, M, de un terremoto y su energía, E, están relacionadas por la ecuación[6]

$$1.5M = \log\left(\frac{E}{2.5 \times 10^{11}}\right),$$

en donde M está dada en términos de la escala de Ritcher de 1958 y E está en ergios. Resuelva la ecuación para E.

62. Biología Para cierta población de células, el número de células en el instante t está dado por $N = N_0(2^{t/k})$, *donde* N_0 es el número de células en $t = 0$ y k es una constante positiva. (a) Encuentre N cuando $t = k$. (b) ¿Cuál es el significado de k? (c) Demuestre que el tiempo que toma tener una población de N_1 puede escribirse como

$$t = k \log_2 \frac{N_1}{N_0}.$$

63. Ciencias de la tierra La presión atmosférica, p, varía con la altitud, h, sobre la superficie de la Tierra. Para altitudes hasta casi los 10 kilómetros, la presión p (en milímetros de mercurio) está dada en forma aproximada por

$$p = 760e^{-0.125h},$$

donde h está en kilómetros. (a) Encuentre p a una altitud de 7.3 km. (b) ¿A qué altitud la presión será de 400 mm de mercurio?

64. Trabajo El trabajo, en joules, realizado por una muestra de 1 kg de gas nitrógeno cuando su volumen cambia de un valor inicial V_i a un valor final V_f durante un proceso a temperatura constante, está dado por

$$W = 8.1 \times 10^4 \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

Si tal muestra se expande de un volumen de 3 litros a un volumen de 7 litros, determine el trabajo realizado por el gas, aproxime a la centésima de joule más cercana.

65. Bienes secundarios En un estudio de bienes secundarios, Persky[7] resuelve una ecuación de la forma

$$u_0 = A\ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$$

para x_1, donde x_1 y x_2 son cantidades de dos productos, u_0 es una medida de la utilidad y A es una constante positiva. Determine x_1.

66. Decaimiento radiactivo Una muestra de un gramo de plomo 211 radiactivo (^{211}Pb) decae de acuerdo con la ecuación $N = e^{-0.01920t}$, donde N es el número de gramos presentes después de t minutos. Determine la vida media del ^{211}Pb a la décima de minuto más cercana.

67. Decaimiento radiactivo Una muestra de 100 miligramos de actinio 277 radiactivo (^{227}Ac) decae de acuerdo con la ecuación

$$N = 100e^{-0.03194t},$$

donde N es el número de miligramos presentes después de t años. Determine la vida media del ^{227}Ac a la décima de año más cercana.

68. Si $\log_y x = 3$ y $\log_z x = 2$, encuentre una fórmula para z como una función explícita que dependa sólo de y.

69. Despeje a y como una función explícita de x si

$$x + 2e^{3y} - 10 = 0.$$

70. Suponga que $y = f(x) = x \ln x$. (*a*) ¿Para qué valores de x es $y < 0$? [*Sugerencia:* determine cuándo la gráfica está por debajo del eje x.] (b) Determine el rango de f.

71. Encuentre la intersección con el eje x de $y = x^2 \ln x$.

72. Utilice la gráfica de $y = e^x$ para estimar ln 3. Redondee su respuesta a dos decimales.

73. Utilice la gráfica de $y = \ln x$ para estimar e^2. Redondee su respuesta a dos decimales.

74. Determine las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de $y = (x - 2)^2$ y $y = \ln x$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

[6] K. E. Bullen, An Introduction to the *Theory of Seismology* (Cambridge, Reino Unido: Cambridge at the University Press, 1963).

[7] A. L. Persky, "An Inferior Good and a Novel Indifference Map", *The American Economist*, XXIX, núm. 1 (primavera de 1985).

OBJETIVO Estudiar las propiedades básicas de las funciones logarítmicas.

5.3 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

La función logarítmica tiene muchas propiedades importantes. Por ejemplo, el logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de esos números. En forma simbólica, $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$. Para probar esto, hacemos $x = \log_b m$ y $y = \log_b n$. Entonces $b^x = m$, $b^y = n$, y

$$mn = b^x b^y = b^{x+y}.$$

Así $mn = b^{x+y}$. En forma logarítmica, esto significa que $\log_b(mn) = x + y$. Por tanto, $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$.

1. $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$.

Esto es, el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores.

No probaremos las dos propiedades siguientes, ya que sus demostraciones son similares a la de la propiedad 1.

2. $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$.

Esto es, el logaritmo de un cociente es la diferencia del logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

3. $\log_b m^r = r \log_b m$.

Por lo que el logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

Advertencia Asegúrese de que entiende claramente las propiedades 1, 2 y 3, las cuales no se aplican al logaritmo de una suma $[\log_b(m + n)]$, al de una diferencia $[\log_b (m - n)]$, ni a la división de logaritmos $\left[\dfrac{\log_b m}{\log_b n}\right]$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \log_b(m + n) &\neq \log_b m + \log_b n, \\ \log_b(m - n) &\neq \log_b m - \log_b n, \\ \frac{\log_b m}{\log_b n} &\neq \log_b(m - n), \end{aligned}$$

y

$$\frac{\log_b m}{\log_b n} \neq \log_b\left(\frac{m}{n}\right).$$

La tabla 5.2 da los valores de algunos logaritmos comunes (base 10). La mayoría de las entradas son aproximadas. Por ejemplo, $\log 4 \approx 0.6021$, que significa $10^{0.6021} \approx 4$. Para ilustrar el uso de las propiedades de los logaritmos, usaremos esta tabla en algunos de los ejemplos siguientes.

TABLA 5.2 Logaritmos comunes

x	$\log x$	x	$\log x$
2	0.3010	7	0.8451
3	0.4771	8	0.9031
4	0.6021	9	0.9542
5	0.6990	10	1.0000
6	0.7782	e	0.4343

Aunque los logaritmos del ejemplo pueden encontrarse con una calculadora, haremos uso de las propiedades de los logaritmos.

EJEMPLO 1 Determinación de logaritmos utilizando la tabla 5.2

a. *Encontrar* log 56.

Solución: log 56 no está en la tabla. Pero podemos escribir 56 como el producto de $8 \cdot 7$. Así, por la propiedad 1,

$$\log 56 = \log(8 \cdot 7) = \log 8 + \log 7 \approx 0.9031 + 0.8451 = 1.7482.$$

b. *Encontrar* $\log \frac{9}{2}$.

Solución: por la propiedad 2,

$$\log \tfrac{9}{2} = \log 9 - \log 2 \approx 0.9542 - 0.3010 = 0.6532.$$

c. *Encontrar* log 64.

Solución: como $64 = 8^2$, por la propiedad 3,

$$\log 64 = \log 8^2 = 2 \log 8 \approx 2(0.9031) = 1.8062.$$

d. *Encontrar* $\log \sqrt{5}$.

Solución: por la propiedad 3, tenemos

$$\log \sqrt{5} = \log 5^{1/2} = \tfrac{1}{2} \log 5 \approx \tfrac{1}{2}(0.6990) = 0.3495.$$

e. *Encontrar* $\log \dfrac{16}{21}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \log \frac{16}{21} &= \log 16 - \log 21 = \log(4^2) - \log(3 \cdot 7) \\ &= 2 \log 4 - [\log 3 + \log 7] \\ &\approx 2(0.6021) - [0.4771 + 0.8451] = -0.1180. \end{aligned}$$

Debe notar el uso de corchetes en el segundo renglón. Es incorrecto escribir $2 \log 4 - \log 3 + \log 7$.

EJEMPLO 2 Reescritura de expresiones con logaritmos

a. *Expresar* $\log \dfrac{1}{x^2}$ *en términos de* $\log x$.

Solución:

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log x \qquad \text{(propiedad 3).}$$

Aquí hemos supuesto que $x > 0$. Aunque $\log (1/x^2)$ está definido para $x \neq 0$, la expresión $-2 \log x$ sólo está definida si $x > 0$.

b. *Expresar* $\log \dfrac{1}{x}$ *en términos de* $\log x$.

Solución: por la propiedad 3,

$$\log \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -1 \log x = -\log x.$$

Del ejemplo 2(b), vemos que $\log(1/x) = -\log x$. Generalizando se obtiene la propiedad siguiente:

4. $\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m$.

Esto es, el logaritmo del recíproco de un número es menos el logaritmo del número.

Por ejemplo, $\log \frac{2}{3} = -\log \frac{3}{2}$.

Las manipulaciones como las del ejemplo 3, con frecuencia se utilizan en cálculo.

EJEMPLO 3 Escritura de logaritmos en términos de logaritmos más simples

a. *Escribir* $\ln \frac{x}{zw}$ *en términos de* $\ln x$, $\ln z$ *y* $\ln w$.

Solución:

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{zw} &= \ln x - \ln(zw) && \text{(propiedad 2)} \\ &= \ln x - (\ln z + \ln w) && \text{(propiedad 1)} \\ &= \ln x - \ln z - \ln w. \end{aligned}$$

b. *Escribir* $\sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}}$ *en términos de* $\ln x$, $\ln(x-2)$ y $\ln(x-3)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \ln \sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}} &= \ln\left[\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}\right]^{1/3} = \frac{1}{3}\ln\frac{x^5(x-2)^8}{x-3} \\ &= \frac{1}{3}\{\ln[x^5(x-2)^8] - \ln(x-3)\} \\ &= \frac{1}{3}[\ln x^5 + \ln(x-2)^8 - \ln(x-3)] \\ &= \frac{1}{3}[5\ln x + 8\ln(x-2) - \ln(x-3)]. \end{aligned}$$

Principios en práctica 1
Combinación de logaritmos

La medida en la escala de Richter de un terremoto está dada por $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, en donde I es la intensidad del terremoto e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. ¿Cuántas veces es mayor, en la escala de Richter, un terremoto con intensidad 900,000 veces la intensidad de un terremoto con nivel cero, que un terremoto con intensidad 9000 veces la intensidad de un terremoto de nivel cero? Escriba la respuesta como una expresión que incluya logaritmos. Simplifique la expresión por medio de reducción de logaritmos, y después evalúe la expresión resultante.

EJEMPLO 4 Combinación de logaritmos

a. *Escribir* $\ln x - \ln(x+3)$ *como un solo logaritmo*.

Solución:

$$\ln x - \ln(x+3) = \ln \frac{x}{x+3}. \qquad \text{(propiedad 2).}$$

b. *Escribir* $\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2\ln 4$ *como un solo logaritmo.*

Solución:

$$\begin{aligned}
&\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2\ln 4\\
&= \ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - \ln(4^2) && \text{(propiedad 3)}\\
&= \ln 3 + \ln 7 - [\ln 2 + \ln(4^2)]\\
&= \ln(3 \cdot 7) - \ln(2 \cdot 4^2) && \text{(propiedad 1)}\\
&= \ln 21 - \ln 32\\
&= \ln \frac{21}{23} && \text{(propiedad 2).}
\end{aligned}$$

Como $b^0 = 1$ y $b^1 = b$, al convertir a formas logarítmicas tenemos las propiedades siguientes:

5. $\log_b 1 = 0$.
6. $\log_b b = 1$.

Por la propiedad 3, $\log_b b^r = r \log_b b$. Pero por la propiedad 6, $\log_b b = 1$. Así, tenemos la propiedad siguiente:

7. $\log_b b^r = r$.

Principios en práctica 2
Simplificación de expresiones con logaritmos

Si un terremoto es 10,000 veces tan intenso como un terremoto de nivel cero, ¿cuál es su medida en la escala de Richter? Escriba la respuesta como una expresión logarítmica y simplifíquela (véase la página anterior para la fórmula).

EJEMPLO 5 Simplificación de expresiones con logaritmos

a. *Encontrar* $\ln e^{3x}$.

Solución: por la propiedad 7 con $b = e$, tenemos $\ln e^{3x} = 3x$. De manera alterna, por las propiedades 3 y 6,

$$\ln e^{3x} = 3x \ln e = 3x(1) = 3x.$$

b. *Encontrar* $\log 1 + \log 1000$.

Solución: por la propiedad 5, $\log 1 = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\log 1 + \log 1000 &= 0 + \log 10^3\\
&= 0 + 3 \quad \text{(propiedad 7 con } b = 10\text{)}\\
&= 3.
\end{aligned}$$

c. *Encontrar* $\log_7 \sqrt[9]{7^8}$.

Solución:

$$\log_7 \sqrt[9]{7^8} = \log_7 7^{8/9} = \tfrac{8}{9}.$$

d. *Encontrar* $\log_3\left(\frac{27}{81}\right)$.

Solución:

$$\log_3\left(\frac{27}{81}\right) = \log_3\left(\frac{3^3}{3^4}\right) = \log_3(3^{-1}) = -1.$$

e. *Encontrar* $\ln e + \log \frac{1}{10}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\ln e + \log \tfrac{1}{10} &= \ln e + \log 10^{-1}\\
&= 1 + (-1) = 0.
\end{aligned}$$

No confunda $\ln x^2$ con $(\ln x)^2$. Tenemos

$$\ln x^2 = \ln(x \cdot x),$$

pero

$$(\ln x)^2 = (\ln x)(\ln x),$$

que puede escribirse como $\ln^2 x$. Esto es, en $\ln x^2$ elevamos x al cuadrado; en $(\ln x)^2$, o $\ln^2 x$, elevamos al cuadrado $\ln x$.

Nuestra siguiente propiedad es:

8. $b^{\log_b m} = m$

y en particular,

$$10^{\log x} = x \quad \text{y} \quad e^{\ln x} = x.$$

La propiedad 8 es verdadera porque establece, en forma logarítmica, que $\log_b m = \log_b m$.

EJEMPLO 6 Uso de la propiedad 8

a. *Encontrar* $e^{\ln x^2}$.

Solución: por la propiedad 8, $e^{\ln x^2} = x^2$.

b. *Resolver* $10^{\log x^2} = 25$ para x.

Solución:

$$10^{\log x^2} = 25.$$

$$x^2 = 25 \qquad \text{(propiedad 8)},$$

$$x = \pm 5.$$

EJEMPLO 7 Evaluación de logaritmos de base 5

Utilizar una calculadora para encontrar $\log_5 2$.

Solución: las calculadoras comunes tienen teclas para logaritmos de base 10 y de base e, pero no para base 5. Sin embargo, podemos convertir logaritmos de una base a otra. Convirtamos de base 5 a base 10. Primero, hacemos $x = 1\text{og}_5 2$. Entonces $5^x = 2$. Tomando los logaritmos comunes en ambos miembros de $5^x = 2$ se obtiene

$$\log 5^x = \log 2,$$

$$x \log 5 = \log 2,$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 5} \approx 0.4307.$$

Si hubiéramos tomado logaritmos naturales en ambos miembros, el resultado sería $x = (\ln 2)/(\ln 5) \approx 0.4307$, igual que antes.

Generalizando el método utilizado en el ejemplo 7 obtenemos la llamada fórmula de *cambio de base:*

Fórmula de cambio de base

9. $\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}.$

La fórmula de cambio de base permite la conversión de logaritmos de una base (b) a otra (a).

EJEMPLO 8 Fórmula de cambio de base

Expresar $\log x$ *en términos de logaritmos naturales.*

Solución: debemos transformar de base 10 a base e, por lo que utilizamos la fórmula de cambio de base (propiedad 9) con $b = 10, m = x$ y $a = e$.

$$\log x = \log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Tecnología

Problema: mostrar la gráfica de $y = \log_2 x$.

Solución: para introducir la función, primero debemos convertir a la base e o a la base 10. Elegimos la base e. Por la propiedad 9,

$$y = \log_2 x = \frac{\log_e x}{\log_e 2} = \frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Ahora graficamos $y = (\ln x)/(\ln 2)$, que se muestra en la figura 5.24.

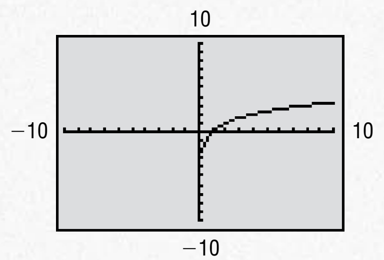


FIGURA 5.24 Gráfica de $y = \log_2 x$.

Ejercicio 5.3

En los problemas del 1 al 10 sean $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ *y* $\log 5 = c$. *Exprese el logaritmo indicado en términos de a, b o c.*

1. $\log 15$. **2.** $\log 16$. **3.** $\log \frac{2}{3}$. **4.** $\log \frac{5}{2}$.
5. $\log \frac{8}{3}$. **6.** $\log \frac{3}{10}$. **7.** $\log 36$. **8.** $\log 0.0002$.
9. $\log_2 3$. **10.** $\log_3 5$.

En los problemas del 11 al 20 determine el valor de la expresión sin hacer uso de una calculadora.

11. $\log_7 7^{48}$. **12.** $\log_5(5\sqrt{5})^5$. **13.** $\log 0.0001$. **14.** $10^{\log 3.4}$.
15. $\ln e^{5.01}$. **16.** $\ln e$. **17.** $\ln \frac{1}{e^2}$. **18.** $\log_5 25$.
19. $\log \frac{1}{10} + \ln e^3$. **20.** $e^{\ln 6}$.

En los problemas del 21 al 32 escriba la expresión en términos de $\ln x$, $\ln(x+1)$ *y/o* $\ln(x+2)$.

21. $\ln[x(x+1)^2]$. **22.** $\ln \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. **23.** $\ln \frac{x^2}{(x+1)^3}$. **24.** $\ln[x(x+1)]^3$.

25. $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^3$. **26.** $\ln\sqrt{x(x+1)}$. **27.** $\ln \frac{x}{(x+1)(x+2)}$. **28.** $\ln \frac{x^2(x+1)}{x+2}$.

29. $\ln \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2(x+2)^3}$. **30.** $\ln \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$. **31.** $\ln\left[\frac{1}{x+2}\sqrt[5]{\frac{x^2}{x+1}}\right]$. **32.** $\ln\sqrt{\frac{x^4(x+1)^3}{x+2}}$.

En los problemas del 33 al 40 exprese cada una de las formas dadas como un solo logaritmo.

33. $\log 6 + \log 4$.
34. $\log_3 10 - \log_3 5$.
35. $\log_2(2x) - \log_2(x + 1)$.
36. $2 \log x - \frac{1}{2}\log(x - 2)$.
37. $9 \log 7 + 5 \log 23$.
38. $3(\log x + \log y - 2 \log z)$.
39. $2 + 10 \log 1.05$.
40. $\frac{1}{2}(\log 215 + 8 \log 6 - 3 \log 169)$.

En los problemas del 41 al 44 determine los valores de las expresiones sin utilizar una calculadora.

41. $e^{4 \ln 3 - 3 \ln 4}$.
42. $\log_2 [\ln(\sqrt{7 + e^2} + \sqrt{7}) + \ln(\sqrt{7 + e^2} - \sqrt{7})]$.
43. $\log_6 54 - \log_6 9$.
44. $\log_2\sqrt{2} + \log_3\sqrt[3]{3} - \log_4\sqrt[4]{4}$

En los problemas del 45 al 48 encuentre x.

45. $e^{\ln(2x)} = 5$.
46. $4^{\log_4 x + \log_4 2} = 3$.
47. $10^{\log x^2} = 4$.
48. $e^{3 \ln x} = 8$.

En los problemas del 49 al 52 escriba cada expresión en términos de logaritmos naturales.

49. $\log(x + 6)$.
50. $\log_2 x$.
51. $\log_3(x^2 + 1)$.
52. $\log_5(9 - x^2)$.

53. Si $e^{\ln z} = 7e^y$, resuelva para y en términos de z.

54. Estadística En estadística, la ecuación de regresión $y = ab^x$ se reduce a una forma lineal tomando logaritmos en ambos lados. Exprese $\log y$ en términos de x, $\log a$ y $\log b$.

55. Remuneración militar En un estudio de reclutamiento, Brown[8] considera la remuneración militar total C como la suma de la remuneración militar básica B (que incluye el valor de la asignación para gastos, las exenciones fiscales y salario base) y las prestaciones de educación E. Así, $C = B + E$. Brown establece que

$$\ln C = \ln B + \ln\left(1 + \frac{E}{B}\right).$$

Verifique esto.

56. Intensidad del sonido El nivel de intensidad de una onda sonora de intensidad I está dado por

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

donde β es la letra griega "beta" e I_o es una intensidad de referencia igual a 10^{-12}, que corresponde de manera aproximada al sonido más débil que una persona puede oír. El nivel de intensidad se mide en decibeles (db). Por ejemplo, el nivel de intensidad de una conversación común es de 40 db y el de un tren subterráneo (el metro) es de 100 db. Determine el nivel de intensidad del sonido que hacen las hojas al ser movidas por el viento, las que tienen una intensidad de 10^{-11}.

57. Terremoto De acuerdo con Richter,[9] la magnitud M de un terremoto que ocurre a 100 km de cierto tipo de sismógrafo está dada por $M = \log(A) + 3$, donde A es la amplitud del trazo registrado (en milímetros) del terremoto. (a) Encuentre la magnitud de un terremoto que registra una amplitud de trazo de 1 mm. (b) Si un terremoto tiene amplitud A_1 y magnitud M_1, determine la magnitud de un temblor con amplitud $100A_1$. Exprese su respuesta para la parte (b) en términos de M_1.

Química *Un químico puede determinar la acidez o basicidad de una solución acuosa a temperatura ambiente, encontrando el* pH *de la solución. Para hacer esto, primero puede determinar la concentración de iones de hidrógeno (en moles por litro). El símbolo* $[H^+]$ *se establece para esta concentración. El* pH *entonces está dado por*

$$\text{pH} = -\log[H^+].$$

Si $\text{pH} < 7$, *la solución es ácida. Si* $\text{pH} = 7$, *decimos que la solución es neutra. Si* $\text{pH} > 7$, *es básica. Utilice esta información en los problemas 58 y 59.*

58. Una solución limpiadora tiene un pH de 8. ¿Cuál es el $[H^+]$ de esta solución?

59. ¿Cuál es el pH del vinagre con $[H^+]$ igual a 3×10^{-4}?

Química *Para una solución acuosa a temperatura ambiente, el producto de la concentración de iones de hidrógeno,* $[H^+]$, *y de iones de hidróxido* $[OH^-]$, *es* 10^{-14} *(donde la concentración está en moles por litro).*

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14}.$$

En los problemas 60 y 61 encuentre el pH *de una solución (véase la explicación que precede al problema 58) con el* $[OH^-]$ *dado.*

60. $[OH^-] = 10^{-4}$.
61. $[OH^-] = 3 \times 10^{-2}$.

62. Muestre la gráfica de $y = \log_6 x$.

63. Muestre la gráfica de $y = \log_4(x + 2)$.

64. Muestre las gráficas de $y = \log x$ y $y = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ en la misma pantalla. Parecen ser idénticas. ¿Por qué?

---

[8]C. Brown, "Military Enlistments: What Can We Learn from Geographic Variation?" *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 228-234.
[9]C.F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company Publisher, 1958).

65. En la misma pantalla, despliegue las gráficas de $y = \ln x$ y de $y = \ln(4x)$. Parece que la gráfica de $y = \ln(4x)$ es la de $y = \ln x$ recorrida hacia arriba. Determine de manera algebraica el valor de este corrimiento.

66. En la misma pantalla, exhiba las gráficas de $y = \ln x$ y de $y = \ln(x/3)$. Parece que la gráfica de $y = \ln(x/3)$ es la de $y = \ln x$ recorrida hacia abajo. Determine algebraicamente el valor de este corrimiento.

5.4 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

OBJETIVO Desarrollar técnicas para la resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Aquí resolveremos *ecuaciones logarítmicas* y *exponenciales*. Una **ecuación logarítmica** es una ecuación que incluye al logaritmo de una expresión que contiene una incógnita. Por ejemplo, $2 \ln(x + 4) = 5$ es una ecuación logarítmica. Por otra parte, una **ecuación exponencial** tiene una incógnita que aparece en un exponente, como en $2^{3x} = 7$.

Para resolver algunas ecuaciones logarítmicas, usamos una propiedad de los logaritmos que ahora desarrollaremos.

Para muchas funciones f, si $f(m) = f(n)$, esto no implica que $m = n$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ entonces $f(2) = f(-2)$, pero $2 \neq -2$. Éste no es el caso para la función logarítmica. En la figura 5.25 puede verse que la gráfica de $y = \log_2 x$ asciende de izquierda a derecha. Así, si x_1 y x_2 son diferentes, sus logaritmos (valores de y) serán diferentes. Esto significa que si $\log_2 m = \log_2 n$, entonces $m = n$, Generalizando para la base b, tenemos la propiedad siguiente:

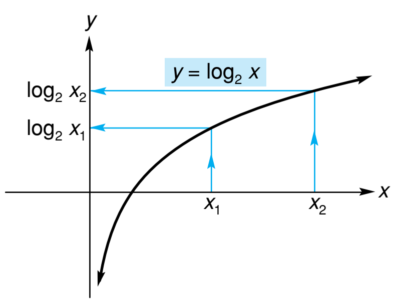


FIGURA 5.25 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $\log_2 x_1 \neq \log_2 x_2$.

Si $\log_b m = \log_b n$, entonces $m = n$.

Existe una propiedad semejante para exponenciales:

Si $b^m = b^n$, entonces $m = n$.

EJEMPLO 1 Composición de oxígeno

Un experimento fue llevado a cabo con un tipo particular de animal pequeño.[10] *En él se determinó el logaritmo de la cantidad de oxígeno consumido por hora para varios de los animales, y se graficó contra los logaritmos de sus pesos. Se encontró que*

$$\log y = \log 5.934 + 0.885 \log x,$$

donde y fue el número de microlitros de oxígeno consumidos por hora y x el peso del animal (en gramos). Resolver para y.

Solución: primero combinamos los términos del lado derecho en un solo logaritmo:

$$\begin{aligned} \log y &= \log 5.934 + 0.885 \log x \\ &= \log 5.934 + \log x^{0.885} && \text{(propiedad 3 de la sección5.3)} \\ \log y &= \log(5.934x^{0.885}) && \text{(propiedad 1 de la sección5.3).} \end{aligned}$$

Por la propiedad de igualdad de logaritmos, tenemos

$$y = 5.934x^{0.885}.$$

[10]R.W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

Principios en práctica 1

Solución de una ecuación exponencial

Greg escogió un número y lo multiplicó por una potencia de 32. Jean inició con el mismo número y obtuvo el mismo resultado, cuando ella lo multiplicó por 4 elevado a un número que era nueve veces menor que tres veces el exponente que Greg utilizó. ¿Qué potencia de 32 utilizó Greg?

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación exponencial

Determinar x si $(25)^{x+2} = 5^{3x-4}$.

Solución: ya que $25 = 5^2$, podemos expresar ambos lados de la ecuación como potencias de 5:

$$\begin{aligned}(25)^{x+2} &= 5^{3x-4},\\ (5^2)^{x+2} &= 5^{3x-4},\\ 5^{2x+4} &= 5^{3x-4}.\end{aligned}$$

Por la propiedad de igualdad de exponenciales,

$$\begin{aligned}2x + 4 &= 3x - 4,\\ x &= 8.\end{aligned}$$

Algunas ecuaciones exponenciales pueden resolverse tomando el logaritmo de ambos miembros, después que la ecuación está escrita en una forma adecuada. El ejemplo siguiente lo ilustra.

Principios en práctica 2

Uso de logaritmos para resolver una ecuación exponencial

El gerente de ventas de una cadena de comida rápida determina que las ventas del desayuno empiezan a disminuir al final de una campaña promocional. La venta en dólares como una función del número de días d después de que termina la campaña está dada por $S = 800\left(\frac{4}{3}\right)^{-0.1d}$. Si el gerente no quiere que las ventas caigan por debajo de 450 por día antes de iniciar una nueva campaña, ¿cuándo debe iniciar esa nueva campaña?

EJEMPLO 3 Uso de logaritmos para resolver una ecuación exponencial

Resolver $5 + (3)4^{x-1} = 12$.

Solución: primero aislamos la expresión exponencial 4^{x-1} en un lado de la ecuación:

$$\begin{aligned}5 + (3)4^{x-1} &= 12,\\ (3)4^{x-1} &= 7,\\ 4^{x-1} &= \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Ahora tomamos el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln 4^{x-1} = \ln \frac{7}{3}.$$

Simplificando se obtiene

$$\begin{aligned}(x-1)\ln 4 &= \ln \frac{7}{3},\\ x - 1 &= \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4},\\ x &= \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4} + 1 \approx 1.61120.\end{aligned}$$

En el ejemplo 3, utilizamos logaritmos naturales para resolver la ecuación dada. Sin embargo, se pueden emplear logaritmos de cualquier base. Por lo general, se utilizan logaritmos naturales o logaritmos comunes si se desea una forma decimal de la solución. Si usamos logaritmos comunes obtendríamos

$$x = \frac{\log \frac{7}{3}}{\log 4} + 1 \approx 1.61120.$$

Tecnología

La figura 5.26 muestra una solución gráfica de la ecuación $5 + (3)4^{x-1} = 12$ del ejemplo 3. Esta solución ocurre en la intersección de las gráficas de $y = 5 + (3)4^{x-1}$ y $y = 12$.

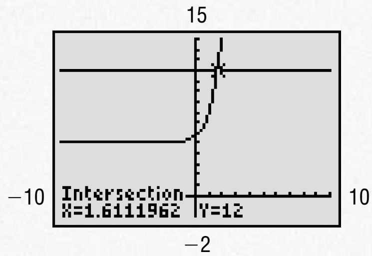


FIGURA 5.26 La solución de $5 + (3)4^{x-1} = 12$ es aproximadamente igual a 1.61120.

EJEMPLO 4 Ecuación de demanda

La ecuación de demanda para un producto es $p = 12^{1-0.1q}$. *Utilizar logaritmos comunes para expresar q en términos de p.*

Solución: la figura 5.27 muestra la gráfica de esta ecuación de demanda para $q \geq 0$. Como es común para una ecuación de demanda, la gráfica desciende de izquierda a derecha. Es necesario resolver la ecuación para q. Tomando logaritmos comunes de ambos lados de $p = 12^{1-0.1q}$ se obtiene

$$\log p = \log(12^{1-0.1q}),$$

$$\log p = (1 - 0.1q)\log 12,$$

$$\frac{\log p}{\log 12} = 1 - 0.1q,$$

$$0.1q = 1 - \frac{\log p}{\log 12},$$

$$q = 10\left(1 - \frac{\log p}{\log 12}\right).$$

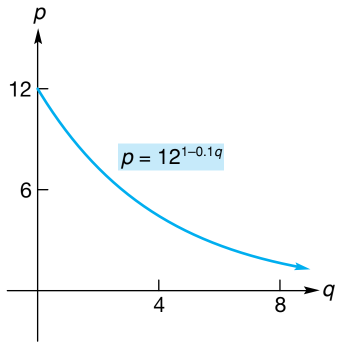


FIGURA 5.27 Gráfica de la ecuación de demanda $p = 12^{1-0.1q}$.

Para resolver algunas ecuaciones exponenciales que incluyen la base e o la base 10, tal como $10^{2x} = 3$, en lugar de tomar logaritmos de ambos miembros, puede ser más fácil primero transformar la ecuación en una forma logarítmica equivalente. En este caso tenemos

$$10^{2x} = 3,$$

$$2x = \log 3 \qquad \text{(forma logarítmica)},$$

$$x = \frac{\log 3}{2} \approx 0.2386.$$

EJEMPLO 5 Relación presa–depredador

En un artículo que concierne a presas y depredadores, Holling[11] *hace referencia a una ecuación de la forma*

$$y = K(1 - e^{-ax}),$$

[11] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism". *The Canadian Entomologist*, 91, núm. 7 (1959), 385-398.

donde x es la densidad de presas, y es el número de presas atacadas y K y a son constantes. Verificar su aseveración de que

$$\ln \frac{K}{K-y} = ax.$$

Solución: para encontrar ax resolvemos la ecuación dada para e^{-ax}:

$$\begin{aligned} y &= K(1-e^{-ax}), \\ \frac{y}{K} &= 1-e^{-ax}, \\ e^{-ax} &= 1-\frac{y}{K}, \\ e^{-ax} &= \frac{K-y}{K}. \end{aligned}$$

Ahora convertimos a la forma logarítmica.

$$\begin{aligned} \ln \frac{K-y}{K} &= -ax, \\ -\ln \frac{K-y}{K} &= ax, \\ \ln \frac{K}{K-y} &= ax \qquad \text{(propiedad 4 de la sección. 5.3),} \end{aligned}$$

como quería mostrarse.

Algunas ecuaciones logarítmicas pueden resolverse al escribirlas nuevamente en forma exponencial.

Principios en práctica 3
Solución de una ecuación logarítmica

La medida en la escala de Richter de un terremoto está dada por $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, en donde I es la intensidad del terremoto, e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. Un terremoto que es 675,000 veces tan intenso como un terremoto de nivel cero, tiene una magnitud en la escala de Richter que es 4 veces mayor que otro terremoto. ¿Cuál es la intensidad de este otro terremoto?

EJEMPLO 6 Solución de una ecuación logarítmica

Resolver $\log_2 x = 5 - \log_2(x+4)$.

Solución: aquí primero debemos suponer que x y $x+4$ son positivos, de modo que sus logaritmos estén definidos. Ambas condiciones se satisfacen si $x > 0$. Para resolver la ecuación, primero colocamos todos los logaritmos en un miembro de modo que podamos combinarlos:

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2(x+4) &= 5, \\ \log_2[x(x+4)] &= 5. \end{aligned}$$

En forma exponencial tenemos

$$\begin{aligned} x(x+4) &= 2^5, \\ x^2+4x &= 32, \\ x^2+4x-32 &= 0 \qquad \text{(ecuación cuadrática),} \\ (x-4)(x+8) &= 0, \\ x = 4 \quad &\text{o} \quad x=-8. \end{aligned}$$

Puesto que debemos tener $x > 0$, la única solución es 4, como puede verificarse sustituyendo en la ecuación original:

$$\begin{aligned} \log_2 4 &\stackrel{?}{=} 5 - \log_2 8, \\ 2 &\stackrel{?}{=} 5 - 3, \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

Cuando resolvemos una ecuación logarítmica, es una buena idea verificar si las soluciones son extrañas.

Ejercicio 5.4

En los problemas del 1 al 36 encuentre x. Redondee sus respuestas a tres decimales.

1. $\log(2x + 1) = \log(x + 6)$.

2. $\log x + \log 3 = \log 5$.

3. $\log 7 - \log(x - 1) = \log 4$.

4. $\log_2 x + 3\log_2 2 = \log_2 \frac{2}{x}$.

5. $\ln(-x) = \ln(x^2 - 6)$.

6. $\ln(4 - x) + \ln 2 = 2\ln x$.

7. $e^{2x} \cdot e^{5x} = e^{14}$.

8. $(e^{5x+1})^2 = e$.

9. $(16)^{3x} = 2$.

10. $(27)^{2x+1} = \frac{1}{3}$.

11. $e^{2x} = 9$.

12. $e^{4x} = \frac{3}{4}$.

13. $3e^{3x+1} = 15$.

14. $6e^{1-x} + 1 = 25$.

15. $10^{4/x} = 6$.

16. $\frac{4(10)^{0.2x}}{5} = 3$.

17. $\frac{5}{10^{2x}} = 7$.

18. $2(10)^x + (10)^{x+1} = 4$.

19. $2^x = 5$.

20. $4^{x+3} = 12$.

21. $5^{2x-5} = 9$.

22. $4^{x/2} = 20$.

23. $2^{-2x/3} = \frac{4}{5}$.

24. $5(3^x - 6) = 10$.

25. $(4)5^{3-x} - 7 = 2$.

26. $\frac{8}{3^x} = 4$.

27. $\log(x - 3) = 3$.

28. $\log_2(x + 1) = 4$.

29. $\log_4(9x - 4) = 2$.

30. $\log_4(2x + 4) - 3 = \log_4 3$.

31. $\log(3x - 1) - \log(x - 3) = 2$.

32. $\log x + \log(x - 15) = 2$.

33. $\log_3(2x + 3) = 4 - \log_3(x + 6)$.

34. $\log(x + 2)^2 = 2$, donde $x > 0$.

35. $\log_2\left(\frac{2}{x}\right) = 3 + \log_2 x$.

36. $\ln x = \ln(3x + 1) + 1$.

37. Plantas arraigadas En un estudio sobre plantas arraigadas en cierta región geográfica,[12] se determinó que en terrenos de tamaño A (en metros cuadrados), el número promedio de especies encontradas era S. Cuando $\log S$ se graficó como una función de $\log A$, el resultado fue una línea recta dada por

$$\log S = \log 12.4 + 0.26 \log A.$$

Resuelva para S.

38. Producto nacional bruto En un artículo, Taagepera y Hayes se refieren a una ecuación de la forma

$$\log T = 1.7 + 0.2068 \log P - 0.1334 \log^2 P.$$

Aquí T es el porcentaje del producto nacional bruto (PNB) de un país correspondiente al comercio exterior (exportaciones más importaciones), y P es la población del país (en unidades de 100,000).[13] Verifique la aseveración de que

[12] R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

[13] R. Taagepera y J. P. Hayes, "How Trade/GNP Ratio Decreases with Country Size", *Social Science Research*, 6 (1977), 108-132.

$$T = 50P^{(0.2068-0.1334 \log P)}.$$

Puede suponer que $\log 50 = 1.7$.

39. Radiactividad El número, Q, de miligramos presentes de una sustancia radiactiva después de t años está dado por

$$Q = 100e^{-0.035t}.$$

a. ¿Cuántos miligramos estarán presentes después de 0 años?

b. ¿Después de cuántos años estarán presentes 20 miligramos?

Proporciones sus respuestas al año más cercano.

40. Muestra de sangre En la superficie de un portaobjetos está una retícula que divide la superficie en 225 cuadrados iguales. Suponga que una muestra de sangre que contiene N células rojas, se esparce en el portaobjetos y las células se distribuyen aleatoriamente. El número de cuadrados que no tienen células está dado (de manera aproximada) por $225e^{-N/225}$. Si 100 de los cuadrados no tienen células, estime el número de células que la muestra contenía.

41. Población En una ciudad la población, P, crece a razón de 2% por año. La ecuación $P = 1{,}000{,}000(1.02)^t$ da la población t años después de 1998. Determine el valor de t para el que la población es 1,500,000. Dé su respuesta a la décima más cercana.

42. Penetración de mercado En un estudio de penetración en el mercado de nuevos productos, Hurter y Rubenstein[14] hacen referencia a la función

$$F(t) = \frac{q - pe^{-(t+C)(p+q)}}{q[1 + e^{(t+C)(p+q)}]},$$

donde p, q y C son constantes. Ellos aseguran que si $F(0) = 0$, entonces

$$C = -\frac{1}{p+q} \ln \frac{q}{p}.$$

Demuestre que su aseveración es cierta.

43. Ecuación de demanda La ecuación de demanda para un producto es $q = 80 - 2^p$. Resuelva para p y exprese su respuesta en términos de logaritmos comunes como en el ejemplo 4. Evalúe p con dos decimales cuando $q = 60$.

44. Inversión La ecuación $A = P(1.1)^t$ da el valor A, al final de t años de una inversión de P dólares compuesta anualmente a una tasa de interés de 10%. ¿Cuántos años tomará para que una inversión se duplique? Proporcione su respuesta al año más cercano.

45. Intensidad de luz Un material translúcido tiene la propiedad de reducir la intensidad de la luz que pasa a través de él. Un material translúcido de plástico tiene la propiedad de que una hoja de 1 mm de espesor reduce la intensidad de la luz en 10%. ¿Cuántas de tales hojas son necesarias para reducir la intensidad de un rayo de luz a cerca de 50% de su valor original?

46. Ventas Después de t años el número de unidades, de un producto vendido por año está dado por $q = 1000(\frac{1}{2})^{0.8^t}$. Tal ecuación se llama *ecuación de Gompertz,* la cual describe el crecimiento natural en muchas áreas de estudio. Resuelva esta ecuación para t en la misma manera que en el ejemplo 4 y demuestre que

$$t = \frac{\log \dfrac{3 - \log q}{\log 2}}{(3 \log 2) - 1}.$$

47. Ecuación de aprendizaje Suponga que la producción diaria de unidades de un nuevo producto en el t-ésimo día de una corrida de producción está dada por

$$q = 500(1 - e^{-0.2t}).$$

Tal ecuación se llama *ecuación de aprendizaje,* la cual indica que conforme pase el tiempo, la producción por día aumentará. Esto puede deberse a un aumento en la habilidad de los trabajadores. Determine a la unidad completa más cercana la producción en (a) el primer día, y (b) en el décimo día después del inicio de una producción. (c) ¿Después de cuántos días se alcanzará una producción diaria de 400 unidades? Proporcione sus respuestas redondeadas al día más cercano.

48. Verifique que 4 es la única solución de la ecuación logarítmica del ejemplo 6 graficando la función

$$y = 5 - \log_2(x + 4) - \log_2 x$$

y observando cuándo $y = 0$.

49. Resuelva $2^{3x+0.5} = 17$. Redondee su respuesta a dos decimales.

50. Resuelva $\ln(x + 1) = 4 - x$. Redondee su respuesta a dos decimales.

51. Grafique la ecuación $4x + (3)4^y = 1$. [*Sugerencia:* despeje a y como una función explícita de x.]

[14] A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein, et. al., "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

5.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 5.1 función exponencial, b^x interés compuesto principal (capital) monto (capital) compuesto periodo de interés tasa periódica tasa nominal e función exponencial natural, e^x ley de decaimiento exponencial cantidad inicial constante de decaimiento vida media

Sección 5.2 función logarítmica, $\log_b x$ logaritmo común, $\log x$ logaritmo natural $\ln x$

Sección 5.3 fórmula de cambio de base

Sección 5.4 ecuación logarítmica ecuación exponencial

Resumen

Una función exponencial tiene la forma $f(x) = b^x$. La gráfica de $f(x) = b^x$ tiene una de dos formas generales, dependiendo del valor de la base b (véase la fig. 5.3). Una función exponencial está incluida en la fórmula de interés compuesto:

$$S = P(1 + r)^n,$$

donde S es el monto compuesto de un principal de P al final de n periodos de interés a la tasa periódica r.

Una base utilizada con frecuencia en una función exponencial es el número irracional e, donde $e \approx 2.71828$. Esta base aparece en análisis económico y en muchas situaciones que implican crecimiento o decaimiento, como estudios poblacionales y decaimiento radiactivo. Los elementos radiactivos siguen la ley de decaimiento exponencial

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

donde N es la cantidad presente en el tiempo t, N_0 la cantidad inicial y λ la constante de decaimiento. El tiempo necesario para que la mitad de la cantidad del elemento decaiga se conoce como vida media.

La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, y viceversa. La función logarítmica de base b es denotada por $\log_b$, y $y = \log_b x$ si y sólo si $b^y = x$. La gráfica de $y = \log_b x$ tiene una de dos formas generales dependiendo del valor de la base b (véase la fig. 5.21). Los logaritmos de base e son llamados logaritmos naturales y denotados por ln, aquéllos de base 10 son llamados logaritmos comunes y denotados por log. La vida media T de un elemento radiactivo puede expresarse en términos de un logaritmo natural y de la constante de decaimiento: $T = (\ln 2)/\lambda$.

Algunas propiedades importantes de los logaritmos son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\log_b(mn) &= \log_b m + \log_b n,\\
\log_b \frac{m}{n} &= \log_b m - \log_b n,\\
\log_b m^r &= r \log_b m,\\
\log_b \frac{1}{m} &= -\log_b m,\\
\log_b 1 &= 0,\\
\log_b b &= 1,\\
\log_b b^r &= r,\\
b^{\log_b m} &= m,\\
\log_b m &= \frac{\log_a m}{\log_a b}.
\end{aligned}$$

Además, si $\log_b m = log_b n$ entonces $m = n$. De manera semejante, si $b^m = b^n$, entonces $m = n$. Muchas de estas propiedades se utilizan en la solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 6 escriba cada una de las formas exponenciales de manera logarítmica y cada forma logarítmica de manera exponencial.

1. $3^5 = 243$. **2.** $\log_7 343 = 3$. **3.** $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$.

4. $10^5 = 100{,}000$. **5.** $e^4 = 54.598$. **6.** $\log_9 9 = 1$.

En los problemas del 7 al 12 determine el valor de la expresión sin utilizar una calculadora.

7. $\log_5 125$. **8.** $\log_4 16$. **9.** $\log_2 \frac{1}{16}$.

10. $\log_{1/3} \frac{1}{9}$. **11.** $\log_{1/3} 9$. **12.** $\log_4 2$.

En los problemas del 13 al 18 encuentre x sin utilizar una calculadora.

13. $\log_5 625 = x$.

14. $\log_x \frac{1}{8} = -3$.

15. $\log x = -2$.

16. $\ln \dfrac{1}{e} = x$.

17. $\ln(2x + 3) = 0$.

18. $e^{\ln(x+4)} = 7$.

En los problemas 19 y 20 sean $\log 2 = a$ *y* $\log 3 = b$. *Exprese el logaritmo dado en términos de a y de b.*

19. $\log 8000$.

20. $\log \dfrac{9}{\sqrt{2}}$.

En los problemas del 21 al 26 escriba cada expresión como un solo logaritmo.

21. $2 \log 5 - 3 \log 3$.

22. $6 \ln x + 4 \ln y$.

23. $2 \ln x + \ln y - 3 \ln z$.

24. $\log_6 2 - \log_6 4 - 9 \log_6 3$.

25. $\frac{1}{2} \log_2 x + 2 \log_2(x^2) - 3 \log_2(x + 1) - 4 \log_2(x + 2)$.

26. $3 \log x + \log y - 2(\log z + \log w)$.

En los problemas del 27 al 32 escriba la expresión en términos de $\ln x$, $\ln y$ *y* $\ln z$.

27. $\ln \dfrac{x^2 y}{z^3}$.

28. $\ln \dfrac{\sqrt{x}}{(yz)^2}$.

29. $\ln \sqrt[3]{xyz}$.

30. $\ln \left[\dfrac{xy^3}{z^2}\right]^4$.

31. $\ln \left[\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right]$.

32. $\ln \left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \left(\dfrac{x}{z}\right)^3\right]$.

33. Escriba $\log_3(x + 5)$ en términos de logaritmos naturales.

34. Escriba $\log_5(2x^2 + 1)$ en términos de logaritmos comunes.

35. Suponga que $\log_2 19 = 4.2479$ y $\log_2 5 = 2.3219$. Encuentre $\log_5 19$.

36. Utilice logaritmos naturales para determinar el valor de $\log_4 5$.

37. Si $\ln 3 = x$ y $\ln 4 = y$, exprese $\ln(16\sqrt{3})$ en términos de x y de y.

38. Exprese $\log \dfrac{x^2\sqrt{x + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 2}}$ en términos de $\log x$, $\log(x + 1)$, y $\log(x^2 + 2)$.

39. Simplifique $e^{\ln x} + \ln e^x + \ln 1$.

40. Simplifique $\log 10^2 + \log 1000 - 5$.

41. Si $\ln y = x^2 + 2$, encuentre y.

42. Haga el bosquejo de las gráficas de $y = 3^x$ y $y = \log_3 x$.

43. Haga el bosquejo de la gráfica de $y = 2^{x+3}$.

44. Haga el bosquejo de la gráfica de $y = -2 \log_2 x$.

En los problemas del 45 al 52 encuentre x.

45. $\log(4x + 1) = \log(x + 2)$.

46. $\log x + \log 2 = 1$.

47. $3^{4x} = 9^{x+1}$.

48. $4^{3-x} = \dfrac{1}{16}$.

49. $\log x + \log(10x) = 3$.

50. $\log_3(x + 1) = \log_3(x - 1) + 1$.

51. $\ln(\log_x 2) = -1$.

52. $\log_2 x + \log_4 x = 3$.

En los problemas del 53 al 58 encuentre x. Redondee sus respuestas a tres decimales.

53. $e^{3x} = 14$.

54. $10^{3x/2} = 5$.

55. $3(10^{x+4} - 3) = 9$.

56. $7e^{3x-1} - 2 = 1$.

57. $4^{x+3} = 7$.

58. $5^{2/x} = 2$.

59. **Inversiones** Si \$2600 se invierten durante $6\frac{1}{2}$ años a 6% compuesto cada trimestre, determine (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto.

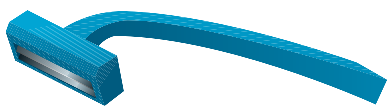
60. **Inversiones** Encuentre el monto compuesto de una inversión de \$4000 durante 5 años a una tasa de 11% compuesto mensualmente.

61. Encuentre la tasa nominal que corresponde a una tasa periódica de $1\frac{1}{6}$% mensual.

62. **Crecimiento de bacterias** En un cultivo de bacterias su número aumenta a razón de 4% por hora. Al inicio, estaban presentes 500 bacterias. (a) Determine una ecuación que dé el número, N, de bacterias después de t horas. (b) ¿Cuántas bacterias están presentes después de una hora? (c) ¿Después de 3 horas? Proporcione su respuesta al entero más cercano.

63. **Crecimiento poblacional** La población de una ciudad de 8000 habitantes crece a razón de 2% anual. (a) Determine una ecuación que dé la población, P, después de t años a partir de ahora. (b) Encuentre la población dentro de 2 años. Dé la respuesta a (b) al entero más cercano.

64. Ingreso Debido a una campaña de publicidad ineficaz, la compañía Rasurado Al Ras encuentra que sus ingresos anuales han sufrido una reducción drástica. Por otra parte, el ingreso anual R al final de los t años de negocios satisface la ecuación $R = 200{,}000e^{-0.2t}$. Encuentre el ingreso anual al final de 2 años y al final de 3 años.



65. Radiactividad Una sustancia radiactiva decae de acuerdo con la fórmula

$$N = 10e^{-0.41t},$$

donde N es el número de miligramos presentes después de t horas. (a) Determine la cantidad inicial. (b) Al décimo de miligramos más cercano, determine la cantidad presente después de 2 horas, (c) después de 10 horas. (d) A la décima de hora más cercana, determine la vida media de la sustancia, y (e) el número de horas para que quede un miligramo.

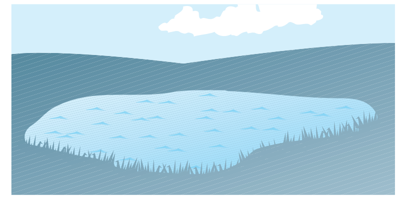
66. Radiactividad Si una sustancia radiactiva tiene una vida media de 10 días, ¿en cuántos días habrá $\frac{1}{8}$ de la cantidad inicial?

67. Mercadotecnia Una compañía de investigación de mercado necesita determinar cuántas personas se adaptan al sabor de unas nuevas pastillas para la tos. En un experimento, a una persona se le dio una pastilla para la tos y se le pidió que periódicamente asignara un número, en la escala de 0 a 10, al sabor percibido. Este número fue llamado *magnitud de la respuesta*. El número 10 fue asignado al sabor inicial. Después de llevar a cabo el experimento varias veces, la compañía estimó que la magnitud de la respuesta, R, está dada por

$$R = 10e^{-t/40},$$

donde t es el número de segundos después de que la persona tomó la pastilla para la tos. (a) Encuentre la magnitud de la respuesta después de 20 segundos. Redondee su respuesta al entero más cercano. (b) ¿Después de cuántos segundos la persona tiene una magnitud de respuesta de 5? Aproxime su respuesta al segundo más cercano.

68. Sedimento en agua El agua de un lago contiene un sedimento cuya presencia reduce la transmisión de la luz a través del agua. Los experimentos indican que la intensidad de la luz se reduce en un 10% al pasar a través de 20 cm de agua. Suponga que el lago es uniforme con respecto a la cantidad de sedimento que contiene. Un instrumento de medición puede detectar luz hasta de una intensidad de 0.17% de la luz solar total. Este instrumento se sumerge en el lago. ¿A qué profundidad dejará inicialmente de registrar la presencia de luz? Aproxime su respuesta a los 10 cm más cercanos.



69. Enfriamiento de cuerpos En un estudio de la velocidad de enfriamiento de partes aisladas de un cuerpo cuando se expone a bajas temperaturas, aparece la siguiente ecuación[15]

$$T_t - T_e = (T_t - T_e)_o e^{-at},$$

donde T_t es la temperatura de la parte del cuerpo en el instante t, T_e es la temperatura del medio ambiente, el subíndice o se refiere a la diferencia de temperaturas iniciales y a es una constante. Demuestre que

$$a = \frac{1}{t} \ln \frac{(T_t - T_e)_o}{T_t - T_e}.$$

70. Depreciación Una alternativa de la depreciación lineal es la depreciación por *saldo decreciente*. Este método supone que un artículo pierde su valor más rápido al inicio de su vida que posteriormente. Un porcentaje fijo del valor se resta cada año. Supóngase que el costo inicial de un artículo es C y su vida útil es de N años. Entonces el valor, V (en dólares), del artículo al final de n años está dado por

$$V = C\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n,$$

en donde cada año lleva una depreciación de $\frac{100}{N}$ por ciento (esto se denomina depreciación sencilla por saldo decreciente: si la depreciación anual fuese $\frac{200}{N}$ por ciento, sería depreciación doble por saldo decreciente). Si una fotocopiadora nueva se compró por \$1495 y tiene una vida útil de 5 años, después de cuántos años su valor cae abajo de \$800? Proporcione la respuesta redondeada al entero más cercano.

71. Si $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, determine el rango de f. Redondee los valores a dos decimales.

72. Determine los puntos de intersección de las gráficas de $y = \ln(x + 2)$ y $y = x^2 - 7$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

73. Resuelva $\ln x = 4 - x$. Redondee su respuesta a dos decimales.

[15] R. W. Stacy et. al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

74. Resuelva $6^{3-4x} = 15$. Redondee su respuesta a dos decimales.

75. Muestre la gráfica de $y = \log_3 (x^2 + 1)$.

76. Despliegue la gráfica de la ecuación $(6)5^y + x = 2$. [*Sugerencia:* despeje a y como una función explícita de x.]

77. Grafique $y = 3^x$ y $y = \dfrac{3^x}{9}$ en la misma pantalla. Parece que la gráfica de $y = \dfrac{3^x}{9}$ es la gráfica de $y = 3^x$ recorrida dos unidades hacia la derecha. Pruebe de manera algebraica que en verdad esto es cierto.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 1 (página 58)

1. a. \$107.15; **b.** \$10.26; **c.** 10 lb; **d.** 10.44 lb; **e.** 4.4%
3. −1.9%.

EJERCICIO 2.1 (página 66)

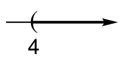
1. 120. **3.** 48 de A, 80 de B. **5.** $5\frac{1}{3}$. **7.** 1 m.
9. 13,000. **11.** \$4000 al 6%, \$16,000 al $7\frac{1}{2}$%.
13. \$4.25. **15.** 4%. **17.** 80. **19.** \$8000.
21. 1138. **23.** \$116.25. **25.** 40. **27.** 46,000.
29. \$440 o \$460. **31.** \$100. **33.** 77.
35. 80 pies por 140 pies. **37.** 9 cm de largo, 4 cm de ancho.
39. \$112,000. **41.** 60. **43.** 125 unidades de A y 100 unidades de B o bien 150 unidades de A y 125 unidades de B.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.2

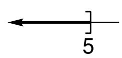
1. 5375.
2. $150 - x_4 \geq 0; 3x_4 - 210 \geq 0; x_4 + 60 \geq 0; x_4 \geq 0$.

EJERCICIO 2.2 (página 74)

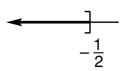
1. $(4, \infty)$.



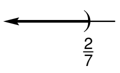
3. $(-\infty, 5]$.



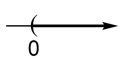
5. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.



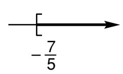
7. $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$.



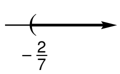
9. $(0, \infty)$.



11. $\left[-\frac{7}{5}, \infty\right)$.

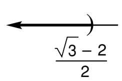


13. $\left(-\frac{2}{7}, \infty\right)$.

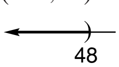


15. $\varnothing$.

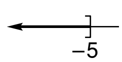
17. $\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$.



19. $(-\infty, 48)$.

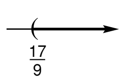


21. $(-\infty, -5]$.

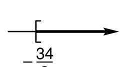


23. $(-\infty, \infty)$.

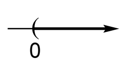
25. $\left(\frac{17}{9}, \infty\right)$.



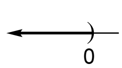
27. $\left[-\frac{34}{3}, \infty\right)$.



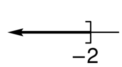
29. $(0, \infty)$.



31. $(-\infty, 0)$.



33. $(-\infty, -2]$.



35. $444{,}000 < S < 636{,}000$. **37.** $x < 70$ grados.

EJERCICIO 2.3 (página 78)

1. 120,001. **3.** 17,000. **5.** 60,000. **7.** \$25,714.29.
9. 1000. **11.** $t > 36.5$. **13.** Al menos \$67,400.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.4

1. $|w - 22 \text{ oz}| \leq 0.3$ oz.

EJERCICIO 2.4 (página 82)

1. 13. **3.** 6. **5.** 5. **7.** $-4 < x < 4$.
9. $\sqrt{5} - 2$. **11. a.** $|x - 7| < 3$; **b.** $|x - 2| < 3$;
c. $|x - 7| \leq 5$; **d.** $|x - 7| = 4$; **e.** $|x + 4| < 2$;
f. $|x| < 3$; **g.** $|x| > 6$; **h.** $|x - 6| > 4$; **i.** $|x - 105| < 3$;
j. $|x - 850| < 100$. **13.** $|p_1 - p_2| \leq 8$. **15.** ± 7.
17. ± 6. **19.** $13, -3$. **21.** $\frac{2}{5}$. **23.** $\frac{1}{2}, 3$.
25. $(-4, 4)$. **27.** $(-\infty, -8) \cup (8, \infty)$. **29.** $(-9, -5)$.
31. $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. **33.** $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.
35. $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{16}{3}, \infty\right)$. **37.** $|d - 17.2| \leq 0.03$ m
39. $(-\infty, \mu - h\sigma) \cup (\mu + h\sigma, \infty)$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 2 (página 84)

1. $(-\infty, 0]$. **3.** $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. **5.** $\varnothing$. **7.** $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$.
9. $(-\infty, \infty)$. **11.** $-2, 5$. **13.** $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
15. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, \infty\right)$. **17.** 542. **19.** 6000.
21. $c <$ \$212,814.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 2 (página 85)

1. 1 hora. **3.** 1 hora. **5.** 600; 310.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.1

1. a. $a(r) = \pi r^2$; **b.** Todos los números reales; **c.** $r \geq 0$.
2. a. $t(r) = \frac{300}{r}$; **b.** Todos los números reales excepto 0;
c. $r > 0$;
d. $t(x) = \frac{300}{x}; t\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{600}{x}; t\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1200}{x}$;
e. El tiempo está escalado por un factor de c; $t\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{300c}{x}$.
3. a. 300 pizzas; **b.** \$21.00 por pizza; **c.** \$16.00 por pizza.

EJERCICIO 3.1 (página 93)

1. Todos los números reales excepto 0.
3. Todos los números reales ≥ 3.
5. Todos los números reales.
7. Todos los números reales excepto $-\frac{7}{2}$.
9. Todos los números reales excepto 0 y 1.
11. Todos los números reales excepto 4 y $-\frac{1}{2}$.
13. $1, 7, -7$. **15.** $-62, 2 - u^2, 2 - u^4$.
17. $2, (2v)^2 + 2v = 4v^2 + 2v, (-x^2)^2 + (-x^2) = x^4 - x^2$.
19. $4, 0, (x + h)^2 + 2(x + h) + 1$
$= x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1$.
21. $\frac{1}{30}, \frac{3x - 4}{(3x)^2 + 5} = \frac{3x - 4}{9x^2 + 5}$
$\frac{(x + h) - 4}{(x + h)^2 + 5} = \frac{x + h - 4}{x^2 + 2xh + h^2 + 5}$.

23. $0, 256, \frac{1}{16}$. **25. a.** $4x + 4h - 5$; **b.** 4.
27. a. $x^2 + 2hx + h^2 + 2x + 2h$; **b.** $2x + h + 2$.
29. a. $2 - 4x - 4h - 3x^2 - 6hx - 3h^2$;
b. $-4 - 6x - 3h$. **31. a.** $\frac{1}{x+h}$; **b.** $-\frac{1}{x(x+h)}$.
33. 9. **35.** y es una función de x; x es una función de y.
37. y es una función de x; x no es una función de y.
39. Sí. **41.** $V = f(t) = 20{,}000 + 800t$.
43. Sí; P; q. **45.** 400 libras por semana; 1000 libras por semana; la cantidad suministrada aumenta cuando el precio aumenta.
47. a. 4; **b.** $8\sqrt[3]{2}$; **c.** $f(2I_0) = 2\sqrt[3]{2}\, f(I_0)$; al duplicar la intensidad la respuesta se incrementa por un factor de $2\sqrt[3]{2}$.
49. a. 3000, 2900, 2300, 2000; 12, 10;
b. 10, 12, 17, 20; 3000, 2300. **51. a.** -5.13; **b.** 2.64;
c. -17.43. **53. a.** 11.33; **b.** 50.62; **c.** 2.29.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.2

1. a. $p(n) = \$125$; **b.** Las primas no cambian;
c. Función constante.
2. a. Función cuadrática; **b.** 2; **c.** 3.
3. $c(n) = \begin{cases} 3.50n & \text{si } n \le 5, \\ 3.00n & \text{si } 5 < n \le 10, \\ 2.75n & \text{si } n > 10. \end{cases}$ **4.** $7! = 5040$.

EJERCICIO 3.2 (página 98)

1. Sí. **3.** No. **5.** Sí. **7.** No.
9. Todos los números reales. **11.** Todos los números reales.
13. a. 3; **b.** 7. **15. a.** 4; **b.** -3. **17.** 8, 8, 8.
19. $1, -1, 0, -1$. **21.** 8, 3, 1, 1. **23.** 720. **25.** 2.
27. 5. **29.** $c(i) = \$4.50$; función constante.
31. a. $C = 850 + 3q$; **b.** 250.
33. $c(n) = \begin{cases} 8.50n & \text{si } n < 10, \\ 8.00n & \text{si } n \ge 10. \end{cases}$ **35.** $\frac{9}{64}$.
37. a. Toda T tal que $30 \le T \le 39$; **b.** $4, \frac{17}{4}, \frac{33}{4}$.
39. a. 237,077.34; **b.** -434.97; **c.** 52.19.
41. a. 2.21; **b.** 9.98; **c.** -14.52.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.3

1. $c(s(x)) = c(x + 3) = 2(x + 3) = 2x + 6$.
2. Si la longitud de un lado es representada por la función $l(x) = x + 3$ y el área de un cuadrado con lados de longitud x es representada por $a(x) = x^2$. Entonces $g(x) = (x + 3)^2 = [l(x)]^2 = a(l(x))$.

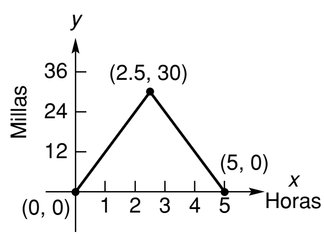
EJERCICIO 3.3 (página 103)

1. a. $2x + 8$; **b.** 8; **c.** -2; **d.** $x^2 + 8x + 15$; **e.** 3;
f. $\frac{x+3}{x+5}$; **g.** $x + 8$; **h.** 11; **i.** $x + 8$. **3. a.** $2x^2 + x$;
b. $-x$; **c.** $\frac{1}{2}$; **d.** $x^4 + x^3$; **e.** $\frac{x^2}{x^2+x} = \frac{x}{x+1}$ (para $x \ne 0$);
f. -1; **g.** $(x^2 + x)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$; **h.** $x^4 + x^2$; **i.** 90.
5. 6; -32. **7.** $\frac{4}{(t-1)^2} + \frac{14}{t-1} + 1$; $\frac{2}{t^2+7t}$.
9. $\frac{1}{v+3}$; $\sqrt{\frac{2w^2+3}{w^2+1}}$. **11.** $f(x) = x^5$, $g(x) = 4x - 3$.
13. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 - 2$.
15. $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{3}$.
17. a. $r(x) = 9.75x$; **b.** $e(x) = 4.25x + 4500$;
c. $(r - e)(x) = 5.5x - 4500$.
19. $400m - 10m^2$; el ingreso total recibido cuando se vende la producción total de m empleados.
21. a. 14.05; **b.** 1169.64. **23. a.** 345.03; **b.** -1.94.

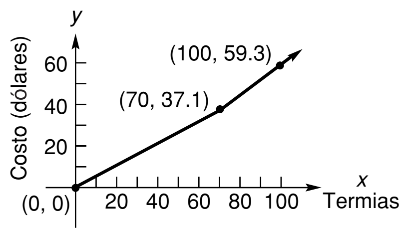
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.4

1. $y = -600x + 7250$; intersección x $\left(12\frac{1}{12}, 0\right)$; intersección y $(0, 7250)$.
2. $y = 24.95$; recta horizontal; no hay intersección con el eje x; intersección con el eje y $(0, 24.95)$.

3.

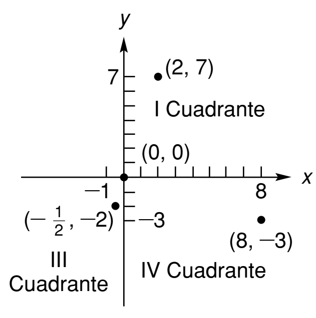


4.



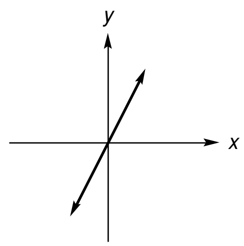
EJERCICIO 3.4 (página 112)

1.

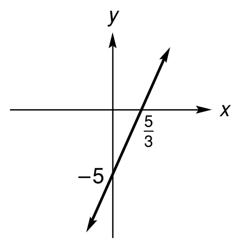


3. a. 1, 2, 3, 0; **b.** Todos los números reales;
c. Todos los números reales;
d. -2. **5. a.** $0, -1, -1$; **b.** Todos los números reales;
c. Todos los números reales no positivos; **d.** 0.

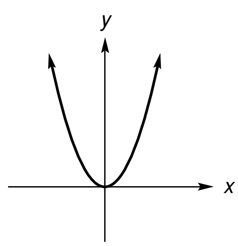
7. $(0, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



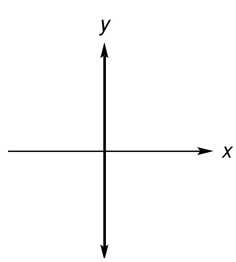
9. $(0, -5), \left(\frac{5}{3}, 0\right)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



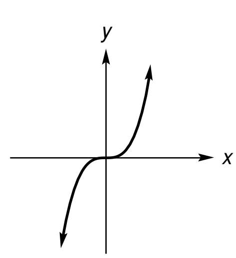
11. $(0, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales no negativos.



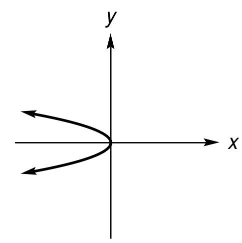
13. Todo punto en el eje y; no es función de x.



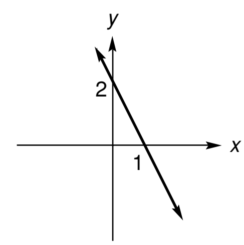
15. $(0, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



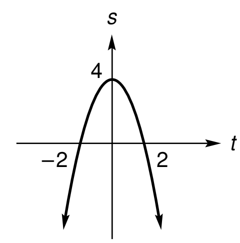
17. $(0, 0)$; no es una función de x.



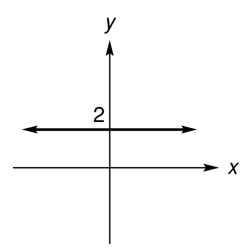
19. $(0, 2), (1, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



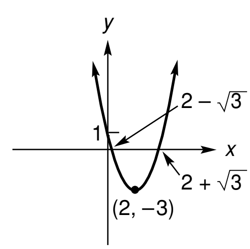
21. Todos los números reales; todos los números reales ≤ 4; $(0, 4), (2, 0), (-2, 0)$.



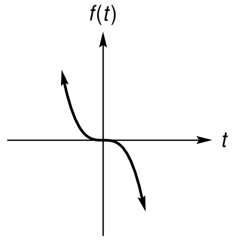
23. Todos los números reales; 2; $(0, 2)$.



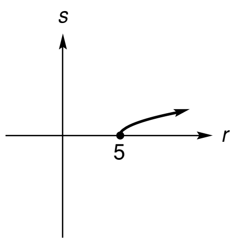
25. Todos los números reales; todos los números reales ≥ -3; $(0, 1), (2 \pm \sqrt{3}, 0)$.



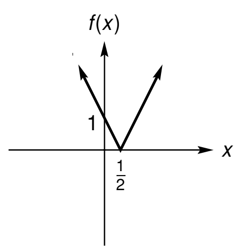
27. Todos los números reales; todos los números reales; $(0, 0)$.



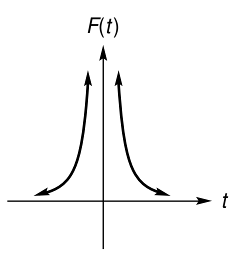
29. Todos los números reales ≥ 5; todos los números reales no negativos; $(5, 0)$.



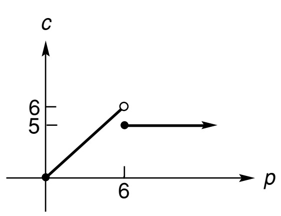
31. Todos los números reales; todos los números reales no negativos; $(0, 1), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



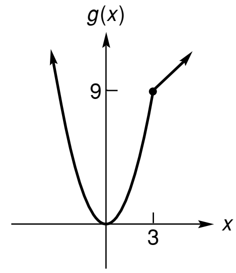
33. Todos los números reales distintos de cero; todos los números reales positivos; no hay intersecciones.



35. Todos los números reales no negativos; todos los números reales c, donde $0 \leq c < 6$.

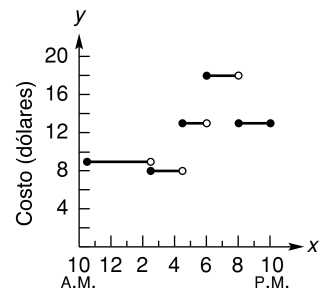


37. Todos los números reales; todos los números reales no negativos.

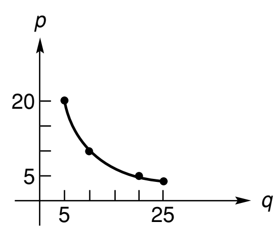


39. (a), (b), (d).

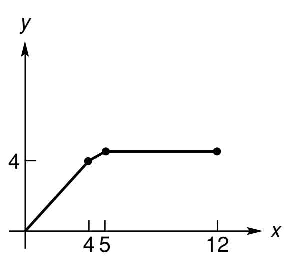
41.



43. Cuando el precio disminuye, la cantidad aumenta; p es una función de q.



45.

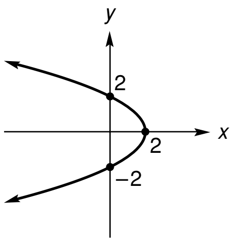


47. $-1, -0.35$. **49.** $0.62, 1.73, 4.65$. **51.** $-0.84, 2.61$.
53. $-0.49, 0.52, 1.25$. **55. a.** 3.94; **b.** -1.94.
57. a. $(-\infty, \infty)$; **b.** $(-1.73, 0), (0, 4.00)$.
59. a. 2.07; **b.** $[2.07, \infty)$; **c.** $(0, 2.39)$; **d.** no.

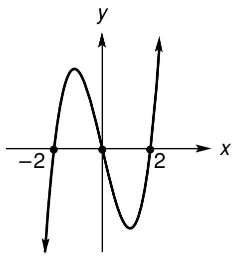
EJERCICIO 3.5 (página 119)

1. $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen.
3. $(\pm 2, 0), (0, 8)$; simétrica con respecto al eje y.
5. $(\pm 2, 0)$; simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.
7. $(-2, 0)$; simétrica con respecto al eje x.
9. Simétrica con respecto al eje x.
11. $(-21, 0), (0, -7), (0, 3)$.
13. $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen. **15.** $\left(0, \frac{3}{8}\right)$.

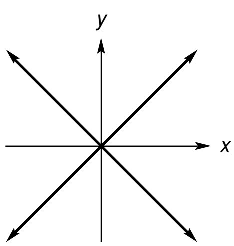
17. $(2, 0)$, $(0, \pm 2)$; simétrica con respecto al eje x.



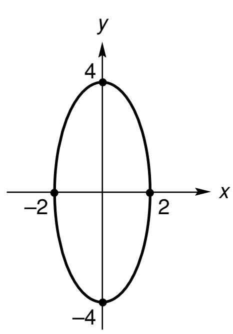
19. $(\pm 2, 0)$, $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen.



21. $(0, 0)$; simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.



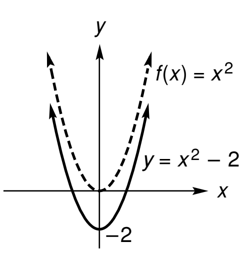
23. $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 4)$; simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.



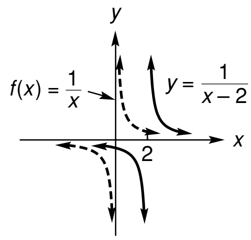
25. **a.** $(\pm 1.18, 0)$, $(0, 2)$; **b.** 2; **c.** $(-\infty, 2]$.

EJERCICIO 3.6 (página 122)

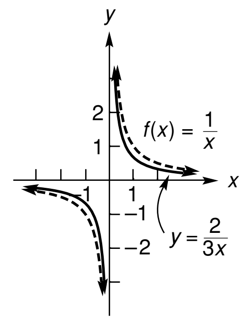
1.



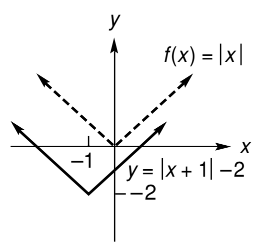
3.



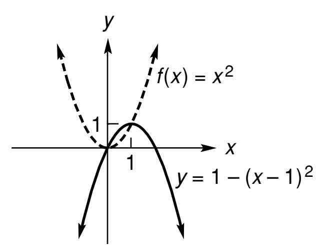
5.



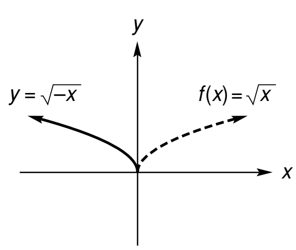
7.



9.



11.



13. Trasladar 4 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba.

15. Reflejar con respecto al eje y y trasladar 5 unidades hacia abajo.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 3 (página 123)

1. Todos los números reales excepto 1 y 2.

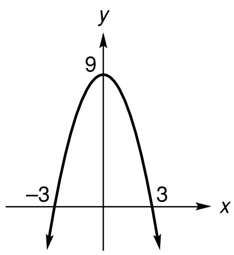
3. Todos los números reales.

5. Todos los números reales no negativos excepto 1.

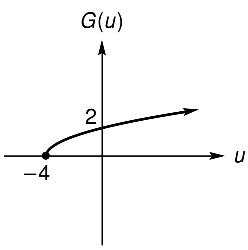
7. $7, 46, 62, 3t^2 - 4t + 7$. **9.** $0, 2, \sqrt{t}, \sqrt{x^3 - 1}$.

11. $\frac{3}{5}, 0, \frac{\sqrt{x+4}}{x}, \frac{\sqrt{u}}{u-4}$. **13.** $-8, 4, 4, -92$.

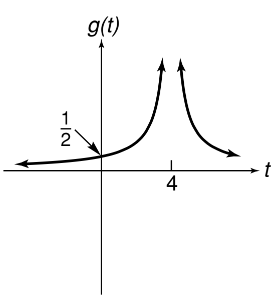
15. **a.** $3 - 7x - 7h$; **b.** -7.
17. **a.** $4x^2 + 8hx + 4h^2 + 2x + 2h - 5$;
b. $8x + 4h + 2$. **19.** **a.** $5x + 2$; **b.** 22; **c.** $x - 4$;
d. $6x^2 + 7x - 3$; **e.** 10; **f.** $\dfrac{3x - 1}{2x + 3}$;
g. $3(2x + 3) - 1 = 6x + 8$; **h.** 38;
i. $2(3x - 1) + 3 = 6x + 1$.
21. $\dfrac{1}{x - 1}, \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1 - x}{x}$. **23.** $\sqrt{x^3 + 2}$, $(x + 2)^{3/2}$.
25. $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{2/3}, 0)$; simétrica con respecto al origen.
27. $(0, 9)$, $(\pm 3, 0)$; simétrica con respecto al eje y.



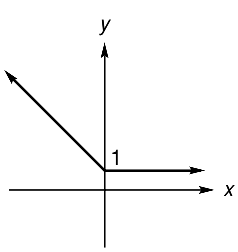
29. $(0, 2)$, $(-4, 0)$; toda $u \geq -4$; todos los números reales ≥ 0.



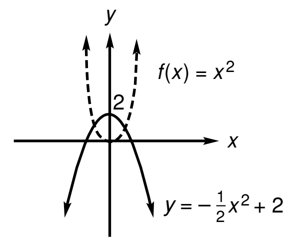
31. $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$; toda $t \neq 4$; todos los números reales positivos.



33. Todos los números reales; todos los números reales ≥ 1.



35.



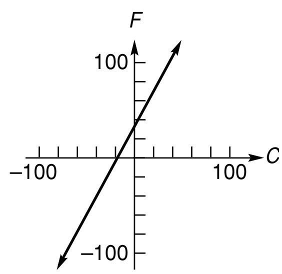
37. a, c. **39.** $-0.67, 0.34, 1.73$.
41. $-1.50, -0.88, -0.11, 1.09, 1.40$.
43. **a.** $(-\infty, \infty)$; **b.** $(1.92, 0)$, $(0, 7)$
45. **a.** Ninguna; **b.** 1, 3.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 3 (página 125)

1. \$28,321. **3.** \$87,507.90. **5.** Las respuestas pueden variar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.1

1. -2000; el automóvil se deprecia \$2000 por año.
2. $S = 14T + 8$. **3.** $F = \dfrac{9}{5}C + 32$.
4. Pendiente $= \dfrac{125}{3}$; intersección $y = \dfrac{125}{3}$.
5. $9C - 5F + 160 = 0$.
6.



7. La pendiente de $\overline{AB}$ es 0; la pendiente de $\overline{BC}$ es 7; la pendiente de $\overline{CA}$ es 1. Ninguna de las pendientes es el recíproco negativo de alguna otra, de modo que el triángulo no tiene un ángulo recto. Los puntos no definen un triángulo rectángulo.

EJERCICIO 4.1 (página 134)

1. 3. **3.** $-\dfrac{1}{2}$. **5.** Indefinida. **7.** 0.
9. $6x - y - 4 = 0$. **11.** $x + 4y - 18 = 0$.
13. $3x - 7y + 25 = 0$. **15.** $8x - 5y - 29 = 0$.
17. $2x - y + 4 = 0$. **19.** $x + 2y + 6 = 0$.
21. $y + 2 = 0$. **23.** $x - 2 = 0$. **25.** 4; -6.
27. $-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}$. **29.** La pendiente está indefinida; no hay intersección con el eje y.
31. 3; 0. **33.** 0; 1.
35. $2x + 3y - 5 = 0$; $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$.
37. $4x + 9y - 5 = 0$; $y = -\dfrac{4}{9}x + \dfrac{5}{9}$.
39. $3x - 2y + 24 = 0$; $y = \dfrac{3}{2}x + 12$.
41. Paralelas. **43.** Paralelas. **45.** Ninguna.
47. Perpendiculares. **49.** Perpendiculares.

51. $y = 4x + 14$. **53.** $y = 1$. **55.** $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

57. $x = 7$. **59.** $y = -\frac{2}{3}x - \frac{29}{3}$. **61.** $(5, -4)$.

63. -2; el precio de la acción cae un promedio de \$2 por año. **65.** $y = 3x + 5$. **67.** Pendiente ≈ 0.65; intersección $y \approx 4.38$.

69. **a.** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$; **b.** $y = 3x - \frac{3}{2}$.

71. $y = -x + 3300$; sin modificación, el ángulo de acercamiento causa que el aeroplano choque 700 pies antes del aeropuerto. **73.** $R = 50{,}000T + 80{,}000$.

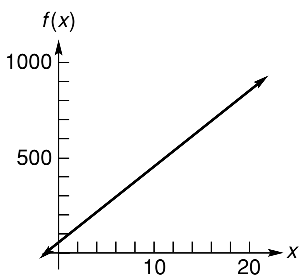
75. Las rectas son paralelas. Esto se esperaba ya que cada una tiene pendiente de 1.5.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.2

1. x = número de esquís producidos; y = número de botas fabricadas; $8x + 14y = 1000$.

2. $p = -\frac{3}{8}q + 1025$.

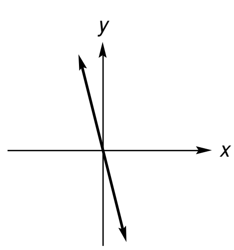
3. Las respuestas pueden variar, pero dos posibles puntos son $(0, 60)$ y $(2, 140)$.

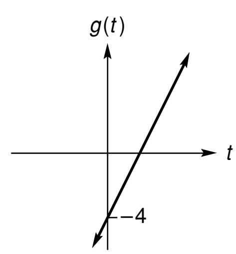


4. $f(t) = 2.3t + 32.2$. **5.** $f(x) = 70x + 150$.

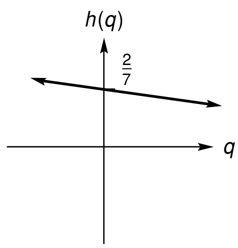
EJERCICIO 4.2 (página 141)

1. -4; 0. **3.** 2; -4.





5. $-\frac{1}{7}; \frac{2}{7}$.



7. $f(x) = 4x$.

9. $f(x) = -2x + 4$.

11. $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$.

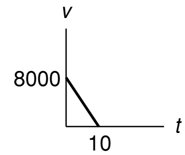
13. $f(x) = x + 1$.

15. $p = -\frac{2}{5}q + 28$; \$16.

17. $p = \frac{1}{4}q + 190$.

19. $c = 3q + 10$; \$115. **21.** $f(x) = 0.125x + 4.15$.

23. $v = -800t + 8000$; pendiente $= -800$.



25. $f(x) = 45{,}000x + 735{,}000$. **27.** $f(x) = 65x + 85$.

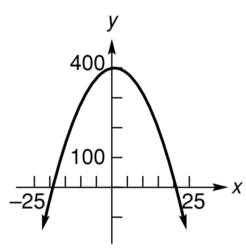
29. $x + 10y = 100$. **31.** **a.** $y = \frac{5}{11}, x = \frac{600}{11}$; **b.** 12.

33. **a.** $p = 0.059t + 0.025$; **b.** 0.556.

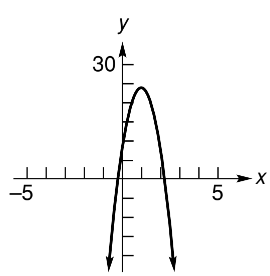
35. **a.** $t = \frac{1}{4}c + 37$; **b.** Sume 37 al número de chirridos en 15 segundos. **37.** $P = \frac{T}{4} + 80$. **39.** **a.** Sí; **b.** 1.8704.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.3

1. Vértice: $(1, 400)$; intersección y: $(0, 399)$; intersecciones x: $(-19, 0)$, $(21, 0)$.



2. Vértice: $(1, 24)$; intersección y: $(0, 8)$; intersecciones x: $\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$, $\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$.

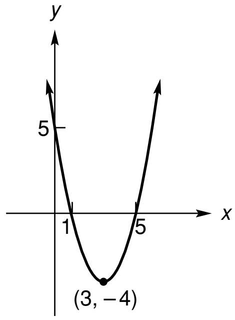


3. 1000 unidades; \$3000 de ingreso máximo.

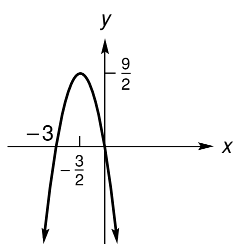
EJERCICIO 4.3 (página 149)

1. Cuadrática. **3.** No es cuadrática. **5.** Cuadrática.
7. Cuadrática. **9.** **a.** $(1, 11)$; **b.** Más alto.
11. **a.** -8; **b.** $-4, 2$; **c.** $(-1, -9)$.

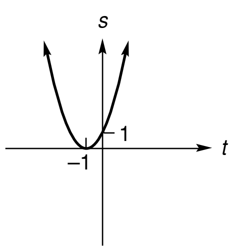
13. Vértice: $(3, -4)$; intersecciones: $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 5)$; rango: toda $y \geq -4$.



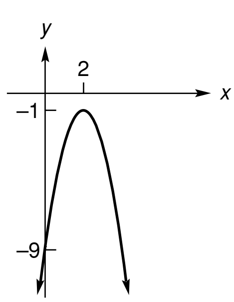
15. Vértice: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$; intersecciones: $(0, 0)$, $(-3, 0)$; rango: toda $y \leq \frac{9}{2}$.



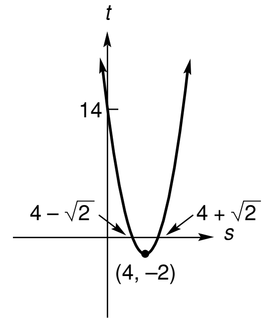
17. Vértice: $(-1, 0)$; intersecciones: $(-1, 0)$, $(0, 1)$; rango: toda $s \geq 0$.



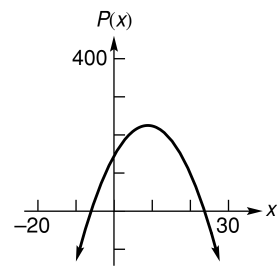
19. Vértice: $(2, -1)$; intersecciones: $(0, -9)$; rango: toda $y \leq -1$.



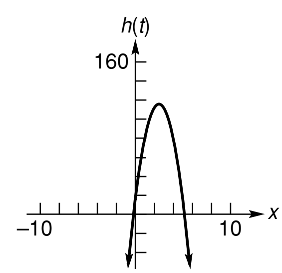
21. Vértice: $(4, -2)$; intersecciones: $(4 + \sqrt{2}, 0)$, $(4 - \sqrt{2}, 0)$, $(0, 13)$; rango: toda $t \geq -3$.



23. Mínimo; 24. **25.** Máximo; -10.
27. $q = 200$; $r = \$120{,}000$.
29. 200 unidades; ingreso máximo \$240,000.
31. Vértice: $(9, 225)$; intersección y: $(0, 144)$; intersecciones x: $(-6, 0)$, $(24, 0)$.



33. 70 gramos. **35.** 132 pies; 2.5 segundos.
37. Vértice: $\left(\frac{5}{2}, 116\right)$; intersección y: $(0, 16)$, intersecciones x: $\left(\frac{5 + \sqrt{29}}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{5 - \sqrt{29}}{2}, 0\right)$.



39. **a.** 2.5; **b.** 8.7 m. **41.** **a.** $\frac{l}{2}$; **b.** $\frac{wl^2}{8}$; **c.** 0 y l.
43. 50 pies $\times$ 100 pies. **45.** $(1.11, 2.88)$.
47. **a.** 0; **b.** 1; **c.** 2. **49.** 4.89.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.4

1. \$120,000 al 9% y \$80,000 al 8%.
2. 500 especies A y 1000 especies B.
3. Un número infinito de soluciones de la forma $A = \frac{20{,}000}{3} - \frac{4}{3}r$, $B = r$ donde $0 \leq r \leq 5000$.
4. $\frac{1}{6}$ lb de A; $\frac{1}{3}$ lb de B; $\frac{1}{2}$ lb de C.

EJERCICIO 4.4 (página 161)

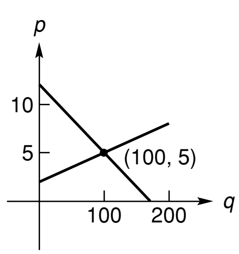
1. $x = -1, y = 1.$ **3.** $x = 3, y = -1.$
5. $v = 0, w = 18.$ **7.** $x = -3, y = 2.$
9. No hay solución. **11.** $x = 12, y = -12.$
13. $p = \frac{3}{2} - 3r, q = r$; r es cualquier número real.
15. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}.$ **17.** $x = 1, y = 1, z = 1.$
19. $x = 1 + 2r, y = 3 - r, z = r$; r es cualquier número real.
21. $x = -\frac{1}{3}r, y = \frac{5}{3}r, z = r$; r es cualquier número real.
23. $x = \frac{3}{2} - r + \frac{1}{2}s, y = r, z = s$; r y s son cualesquiera números reales.
25. 420 galones de solución al 20%, 280 galones de solución al 30%.
27. 0.5 lb de algodón; 0.25 lb de poliéster; 0.25 lb de nylon.
29. 275 mi/h (velocidad del aeroplano en aire calmo), 21 mi/h (velocidad del viento).
31. 240 unidades (Early American), 200 unidades (Contemporáneo).
33. 800 calculadoras de la planta Exton, 700 de la planta Whyton.
35. 4% sobre los primeros $100,000, 6% sobre el resto.
37. 60 unidades de Argón I, 40 unidades de Argón II.
39. 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sillones reclinables.
41. 40 trabajadores semicalificados, 20 trabajadores calificados y 10 empleados de envíos. **45.** $x = 3, y = 2.$
47. $x = 8.3, y = 14.0.$

EJERCICIO 4.5 (página 165)

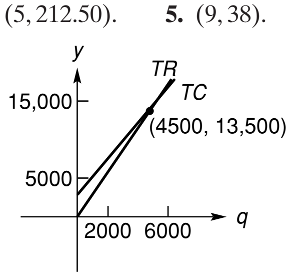
1. $x = 4, y = -12; x = -1, y = 3.$
3. $p = -3, q = -4; p = 2, q = 1.$
5. $x = 0, y = 0; x = 1, y = 1.$
7. $x = 4, y = 8; x = -1, y = 3.$
9. $p = 0, q = 0; p = 1, q = 1.$
11. $x = \sqrt{17}, y = 2;\ x = -\sqrt{17}, y = 2; x = \sqrt{14}, y = -1; x = -\sqrt{14}, y = -1.$ **13.** $x = 21, y = 15.$
15. En (10, 8.1) y (−10, 7.9). **17.** Tres.
19. $x = -1.3, y = 5.1.$ **21.** $x = 1.76.$ **23.** $x = -1.46.$

EJERCICIO 4.6 (página 174)

1.



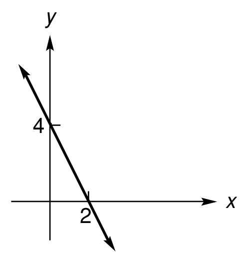
3. (5, 212.50). **5.** (9, 38). **7.** (15, 5).
9.



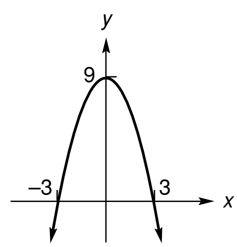
11. No puede tener punto de equilibrio para ningún nivel de producción.
13. 15 unidades o 45 unidades. **15.** **a.** $12; **b.** $12.18.
17. 5840 unidades; 840 unidades; 1840 unidades. **19.** $4.
21. El costo total siempre excede al ingreso total, no hay punto de equilibrio. **23.** Disminuye en $0.70.
25. $p_A = 5; p_B = 10.$ **27.** 2.4 y 11.3.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 4 (página 176)

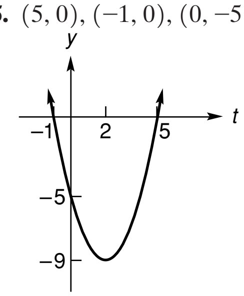
1. 9. **3.** $y = -x + 1; x + y - 1 = 0.$
5. $y = \frac{1}{2}x - 1; x - 2y - 2 = 0.$ **7.** $y = 4; y - 4 = 0.$
9. $y = \frac{1}{3}x + 2; x - 3y + 6 = 0.$
11. Perpendiculares. **13.** Ninguna. **15.** Paralelas.
17. $y = \frac{3}{2}x - 2; \frac{3}{2}.$ **19.** $y = \frac{4}{3}; 0.$
21. −2; (0, 4).



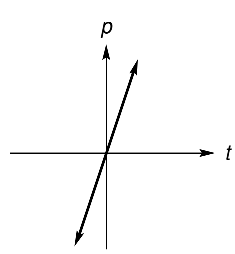
23. (3, 0), (−3, 0), (0, 9); (0, 9).



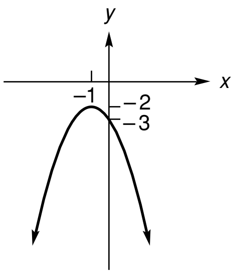
25. (5, 0), (−1, 0), (0, −5); (2, −9).



27. 3; (0, 0).



29. $(0, -3)$; $(-1, -2)$.



31. $x = \frac{17}{7}, y = -\frac{8}{7}$. **33.** $x = 2, y = -1$.
35. $x = 8, y = 4$. **37.** $x = 0, y = 1, z = 0$.
39. $x = -3, y = -4$; $x = 2, y = 1$.
41. $x = -2 - 2r, y = 7 + r, z = r$; r es cualquier número real.
43. $x = r, y = r, z = 0$; r es cualquier número real.
45. $a + b - 3 = 0$; 0. **47.** $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$.
49. 50 unidades; \$5000. **51.** 6.
53. 1250 unidades; \$20,000.
55. 2.36 toneladas por km cuadrado.
57. $x = 230, y = -130$. **59.** $x = 0.75, y = 1.43$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 4 (página 179)

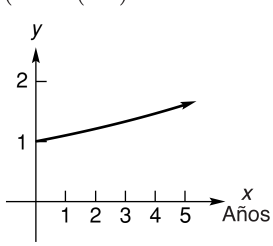
1. Advantage I es el mejor plan para tiempo aire de 85 a $153\frac{1}{3}$ minutos. Advantage II es el mejor plan para tiempo aire de $153\frac{1}{3}$ a $233\frac{1}{3}$ minutos.
3. Si la aproximación inicial está sobre la parte horizontal de ambas gráficas, la calculadora no puede determinar el punto de intersección.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.1

1. La forma de las gráficas es la misma. El valor de A escala la ordenada de cualquier punto en A.
2.

Año	Aumento multiplicativo	Expresión
0	1	1.1^0
1	1.1	1.1^1
2	1.21	1.1^2
3	1.33	1.1^3
4	1.46	1.1^4

1.1; la inversión aumenta en 10% cada año $(1 + 1(0.1) = 1 + 0.1 = 1.1)$.

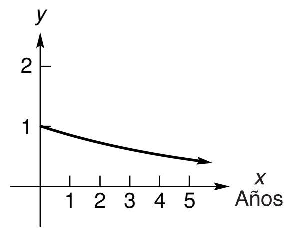


Entre 7 y 8 años.

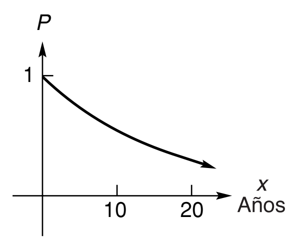
3.

Año	Disminución multiplicativa	Expresión
0	1	0.85^0
1	0.85	0.85^1
2	0.72	0.85^2
3	0.61	0.85^3

0.85; el automóvil se deprecia en 15% cada año $(1 - 1(0.15) = 1 - 0.15 = 0.85)$.

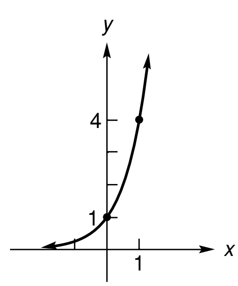


Entre 4 y 5 años.
4. $y = 1.08^{t-3}$; recorra la gráfica 3 unidades hacia la derecha.
5. \$3684.87; \$1684.87. **6.** \$2753.79; \$753.79.
7. 117 empleados.
8.

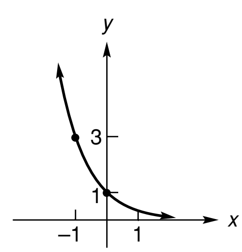


EJERCICIO 5.1 (página 192)

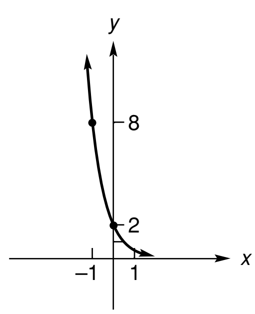
1.



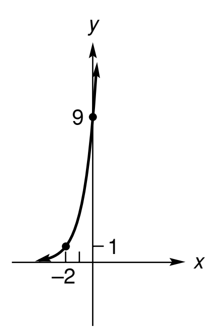
3.



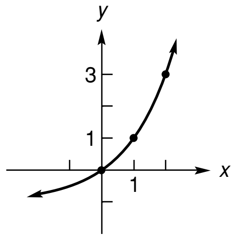
5.



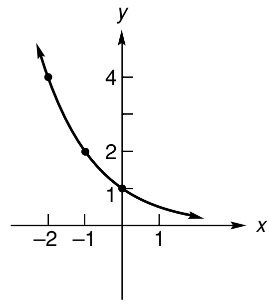
7.



9.



11.



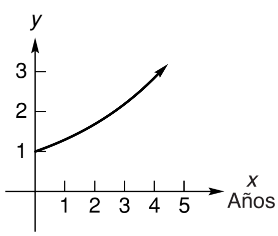
13. *B*. **15.** 138,750. **17.** $\frac{1}{2}$.

19. **a.** \$6014.52; **b.** \$2014.52.
21. **a.** \$1964.76; **b.** \$1264.76.
23. **a.** \$14,124.86; **b.** \$10,124.86.
25. **a.** \$6256.36; **b.** \$1256.36.
27. **a.** \$9649.69; **b.** \$1649.69.
29. \$10,446.15.
31. **a.** $N = 400(1.05)^t$; **b.** 420; **c.** 486.

33.

Año	Aumento multiplicativo	Expresión
0	1	1.3^0
1	1.3	1.3^1
2	1.69	1.3^2
3	2.20	1.3^3

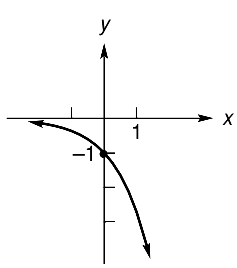
1.3; el reciclado aumenta en 30% cada año $(1 + 1(0.3) = 1 + 0.3 = 1.3)$.



Entre 4 y 5 años.

35. 97,030. **37.** 4.4817. **39.** 0.4966.

41.

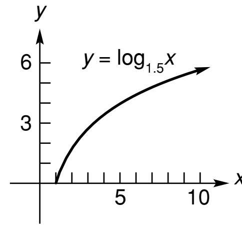


43. 0.2240.
45. $(e^k)^t$, donde $b = e^k$.
47. **a.** 10; **b.** 7.6; **c.** 2.5; **d.** 25 horas.
49. 32 años.
51. 0.1465.
55. 3.17.
57. 4.2 min.
59. 16.

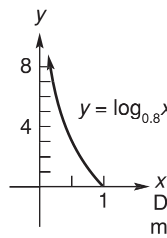
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.2

1. $t = \log_2 16$; $t =$ número de veces que el número de bacterias se ha duplicado. **2.** $\frac{I}{I_0} = 10^{8.3}$.

3.



4.

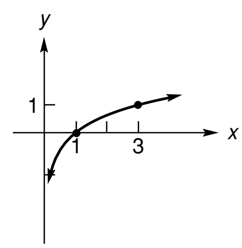


5. Aproximadamente 13.9%.
6. Aproximadamente 9.2%.

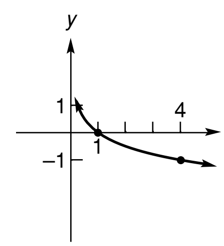
EJERCICIO 5.2 (página 201)

1. $\log 10{,}000 = 4$. **3.** $2^6 = 64$. **5.** $\ln 7.3891 = 2$.
7. $e^{1.09861} = 3$.

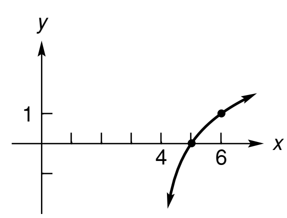
9.



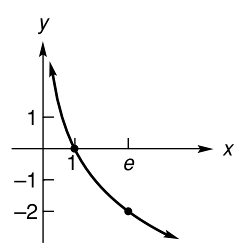
11.



13.



15.



17. 2. **19.** 3.
21. 1. **23.** -2.
25. 0. **27.** -3.
29. 9. **31.** 125.
33. $\frac{1}{10}$. **35.** e^{-3}.
37. 2. **39.** 6.
41. $\frac{1}{81}$. **43.** 2.

45. $\frac{5}{3}$. **47.** 4. **49.** $\frac{\ln 2}{3}$. **51.** $\frac{5 + \ln 3}{2}$.

53. 1.60944. **55.** 2.00013. **57.** $\frac{1}{h} = 10^{5.5}$.

59. 41.50. **61.** $E = 2.5 \times 10^{11+1.5M}$.
63. **a.** 305.2 mm de mercurio; **b.** 5.13 km.
65. $e^{[u_0-(x_2^2/2)]/A}$. **67.** 21.7 años.

69. $y = \frac{1}{3}\ln\frac{10 - x}{2}$. **71.** $(1, 0)$. **73.** 7.39.

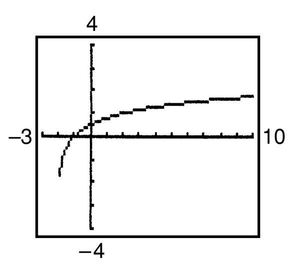
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.3

1. $\log(900{,}000) - \log(9000) = \log\left(\frac{900{,}000}{9000}\right)$
$= \log(100) = 2.$

2. $\log(10{,}000) = \log(10^4) = 4.$

EJERCICIO 5.3 (página 208)

1. $b + c$. **3.** $a - b$. **5.** $3a - b$. **7.** $2(a + b)$.
9. $\frac{b}{a}$. **11.** 48. **13.** -4. **15.** 5.01. **17.** -2.
19. 2. **21.** $\ln x + 2\ln(x + 1)$.
23. $2\ln x - 3\ln(x + 1)$. **25.** $3[\ln x - \ln(x + 1)]$.
27. $\ln x - \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$.
29. $\frac{1}{2}\ln x - 2\ln(x + 1) - 3\ln(x + 2)$.
31. $\frac{2}{5}\ln x - \frac{1}{5}\ln(x + 1) - \ln(x + 2)$.
33. $\log 24$. **35.** $\log_2 \frac{2x}{x + 1}$. **37.** $\log[7^9(23)^5]$.
39. $\log[100(1.05)^{10}]$. **41.** $\frac{81}{64}$. **43.** 1. **45.** $\frac{5}{2}$.
47. ± 2. **49.** $\frac{\ln(x + 6)}{\ln 10}$. **51.** $\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln 3}$.
53. $y = \ln \frac{z}{7}$. **57. a.** 3; **b.** $2 + M_1$. **59.** 3.5229.
61. 12.4771.
63.



65. ln 4.

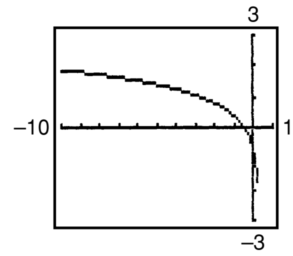
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.4

1. 18. **2.** Día 20. **3.** El otro sismo es 67.5 veces más intenso que un sismo de nivel cero.

EJERCICIO 5.4 (página 214)

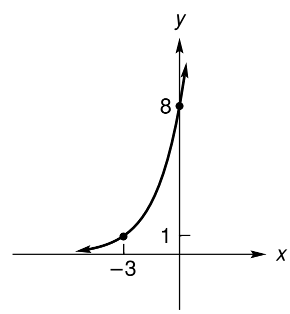
1. 5.000. **3.** 2.750. **5.** -3.000. **7.** 2.000.
9. 0.083. **11.** 1.099. **13.** 0.203. **15.** 5.140.
17. -0.073. **19.** 2.322. **21.** 3.183. **23.** 0.483.
25. 2.496. **27.** 1003.000. **29.** 2.222. **31.** 3.082.
33. 3.000. **35.** 0.500. **37.** $S = 12.4A^{0.26}$.
39. a. 100; **b.** 46. **41.** 20.5.
43. $p = \frac{\log(80 - q)}{\log 2}$; 4.32. **45.** 7.
47. a. 91; **b.** 432; **c.** 8. **49.** 1.20.

51.

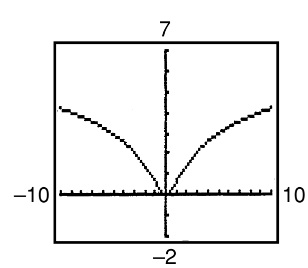


PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 5 (página 216)

1. $\log_3 243 = 5$. **3.** $16^{1/4} = 2$. **5.** $\ln 54.598 = 4$.
7. 3. **9.** -4. **11.** -2. **13.** 4. **15.** $\frac{1}{100}$.
17. -1. **19.** $3(a + 1)$. **21.** $\log \frac{25}{27}$. **23.** $\ln \frac{x^2 y}{z^3}$.
25. $\log_2 \frac{x^{9/2}}{(x + 1)^3(x + 2)^4}$. **27.** $2\ln x + \ln y - 3\ln z$.
29. $\frac{1}{3}(\ln x + \ln y + \ln z)$. **31.** $\frac{1}{2}(\ln y - \ln z) - \ln x$.
33. $\frac{\ln(x + 5)}{\ln 3}$. **35.** 1.8295. **37.** $2x + \frac{1}{2}x$.
39. $2x$. **41.** $y = e^{x^2+2}$.
43.



45. $\frac{1}{3}$.
47. 1.
49. 10.
51. 2^e.
53. 0.880.
55. -3.222.
57. -1.596.
59. a. \$3829.04; **b.** \$1229.04.
61. 14%.
63. a. $P = 8000(1.02)^t$; **b.** 8323.
65. a. 10 mg; **b.** 4.4; **c.** 0.2; **d.** 1.7; **e.** 5.6.
67. a. 6; **b.** 28. **71.** $(-\infty, 0.37]$. **73.** 2.93.
75.



APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 5 (página 220)

1. a. $P = \frac{T(e^{kI} - 1)}{- e^{-dkI}}$; **b.** $d = \frac{1}{kI}\ln\left[\frac{P}{P - T(e^{kI} - 1)}\right]$.
3. a. 156; **b.** 65.