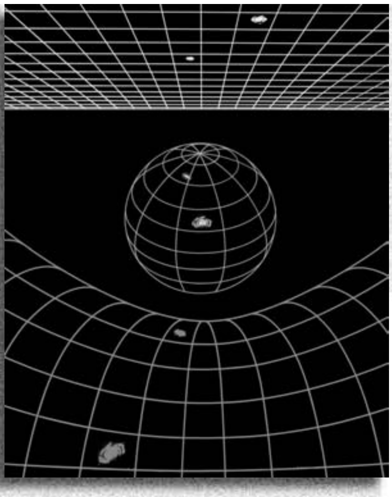
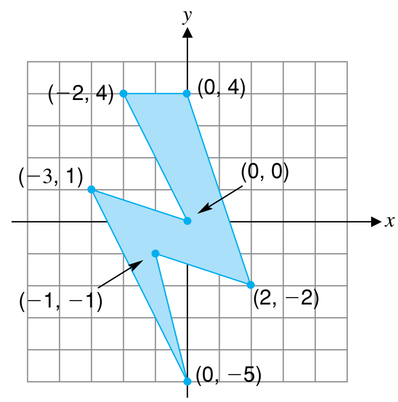


Álgebra de matrices

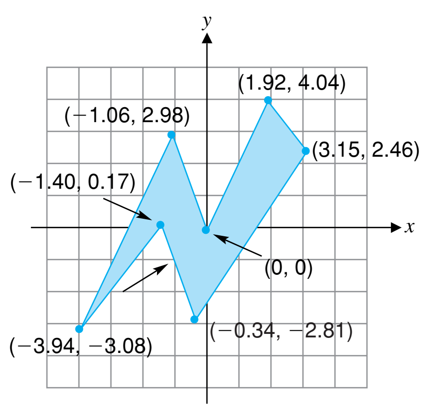
Las matrices, tema de este capítulo, son arreglos de números. Las matrices y su álgebra respectiva tienen una aplicación potencial siempre que una información numérica se pueda acomodar de manera significativa en bloques rectangulares.

Un área de aplicación del álgebra matricial son las gráficas por computadora. En un sistema de coordenadas, un objeto puede representarse por medio de una matriz que contenga las coordenadas de cada vértice o esquina. Por ejemplo, podríamos configurar un esquema de conexión por puntos en el que el rayo que se muestra esté representado por la matriz de la derecha.



$$\begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Con frecuencia las gráficas por computadora muestran objetos que giran en el espacio. En una computadora, la rotación se realiza por medio de una multiplicación de matrices. El rayo se gira 52 grados en contra del sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen, esto por medio de la multiplicación de matrices, que incluye una matriz cuyas entradas son funciones trigonométricas del ángulo de rotación:



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 52^\circ & -\operatorname{sen} 52^\circ \\ \operatorname{sen} 52^\circ & \cos 52^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.92 & 4.04 \\ 3.15 & 2.46 \\ -0.34 & -2.81 \\ -1.40 & 0.17 \\ -3.94 & -3.08 \\ -1.06 & 2.98 \end{bmatrix}$$

OBJETIVO Introducir el concepto de matriz y considerar tipos especiales de matrices.

6.1 MATRICES

La búsqueda de formas para describir situaciones en matemáticas y economía, condujo al estudio de arreglos rectangulares de números. Por ejemplo, considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ 9x - 6y + 2z = 0. \end{cases}$$

Lo que caracteriza a este sistema son los coeficientes numéricos en las ecuaciones, junto con sus posiciones relativas. Por esta razón, el sistema puede describirse por el arreglo rectangular

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix},$$

que es llamado *matriz* (plural: *matrices*). Consideraremos a tales arreglos rectangulares como objetos por sí mismos; se acostumbra encerrarlos entre corchetes, y también es común que se utilicen paréntesis. En la representación simbólica de matrices usaremos letras mayúsculas en negritas como **A, B, C,** etcétera.

Advertencia No utilice barras verticales, | |, en lugar de corchetes o paréntesis, ya que ellas tienen un significado diferente.

Con frecuencia, en economía es conveniente utilizar matrices en la formulación de problemas y para exhibir datos. Por ejemplo, un fabricante que manufactura los productos A, B y C, podría representar las unidades de mano de obra y material involucrados en una semana de producción de estos artículos, como se muestra en la tabla 6.1. De manera más sencilla, estos datos pueden representarse por la matriz

TABLA 6.1

	Producto		
	A	**B**	**C**
Mano de obra	10	12	16
Material	5	9	7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Los renglones de una matriz están numerados de manera consecutiva de arriba hacia abajo, y las columnas están numeradas de manera consecutiva de izquierda a derecha. Para la matriz A anterior, tenemos

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{renglón 1} \\ \text{renglón 2} \end{array} & \begin{bmatrix} \quad 10 \quad & \quad 12 \quad & \quad 16 \quad \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A}.$$

Ya que **A** tiene dos renglones y tres columnas, decimos que A tiene *orden* o *tamaño*, 2×3 (se lee "2 por 3"), donde el número de renglones se especifica primero. De manera semejante, las matrices

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

tienen órdenes 3×3 y 4×2, respectivamente.

Los números en una matriz se conocen como **entradas** o **elementos.** Para denotar las entradas arbitrarias de una matriz, digamos de una de orden 2×3, existen dos métodos comunes. Primero, podemos utilizar letras diferentes:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Segundo, una sola letra se puede usar, digamos a, junto con un subíndice *doble* apropiado para indicar su posición:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

El subíndice del renglón aparece a la izquierda del subíndice de la columna. En general $a_{ij} \neq a_{ji}$.

Para la entrada a_{12} se lee "a subíndice uno-dos", o sólo "a uno-dos", el primer subíndice, 1, especifica el renglón, y el segundo, 2, la columna en la que aparece la entrada. De manera similar, la entrada a_{23} (se lee "a dos-tres") es la que se encuentra en el segundo renglón y la tercera columna. Generalizando, decimos que el símbolo a_{ij} denota la entrada en el renglón i y en la columna j.

Nuestra atención en este capítulo estará en la operación y aplicación de varios tipos de matrices. Ahora daremos una definición formal de una matriz.

Definición

Un arreglo rectangular de números que consiste en m renglones y n columnas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

se conoce como *matriz de* $m \times n$ o *matriz de orden* $m \times n$. Para la entrada a_{ij}, llamamos a i el subíndice del renglón y a j el subíndice de la columna.

El número de entradas en una matriz de $m \times n$ *es* mn. Por brevedad, una matriz de $m \times n$ puede denotarse por el símbolo $[a_{ij}]_{m \times n}$ o de manera más sencilla $[a_{ij}]$, donde el orden se entiende que es el apropiado para el contexto dado. Esta notación sólo indica qué tipos de símbolos se utilizan para denotar la entrada general.

Advertencia No confunda la entrada general a_{ij} con la matriz $[a_{ij}]$.

Una matriz que tiene exactamente un renglón, tal como la matriz de 1×4

$$\mathbf{A} = [1 \quad 7 \quad 12 \quad 3],$$

se llama **matriz renglón** o **vector renglón.** Una matriz que consiste en una sola columna como la matriz de 5×1

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 15 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix},$$

se llama **matriz columna** o **vector columna.**

Principios en práctica 1
Orden (o tamaño) de una matriz

Una fabricante que utiliza las materias primas A y B, está interesada en hacer un seguimiento de los costos de estos materiales que provienen de tres fuentes diferentes. ¿Cuál es el orden de la matriz que ella debe utilizar?

EJEMPLO 1 Orden (o tamaño) de una matriz

a. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ tiene orden 1×3.

b. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ tiene tamaño 3×2.

c. La matriz $[7]$ tiene orden 1×1.

d. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & -2 & 4 \\ 9 & 11 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tiene orden 3×5 y $3(5) = 15$ entradas.

Principios en práctica 2
Construcción de matrices

Un análisis de un lugar de trabajo utiliza una matriz de 3×5 para describir el tiempo empleado en cada una de las tres fases de cinco diferentes proyectos. El proyecto 1 requiere de 1 hora en cada fase, el proyecto 2 requiere el doble de tiempo que el proyecto 1, el proyecto 3 requiere el doble de tiempo que el proyecto 2, . . . , y así sucesivamente. Construya esta matriz de análisis de tiempo.

EJEMPLO 2 Construcción de matrices

a. *Construir una matriz columna de tres entradas tal que $a_{21} = 6$ y $a_{i1} = 0$ en los otros casos.*

Solución: como $a_{11} = a_{31} = 0$, la matriz es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b. *Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ tiene orden 3×4 y $a_{ij} = i + j$, determinar* **A.**

Solución: aquí $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3, 4$ y **A** tiene $(3)(4) = 12$ entradas. Ya que $a_{ij} = i + j$, la entrada en el renglón i y columna j se obtiene sumando los números i y j. De aquí $a_{11} = 1 + 1 = 2$, $a_{12} = 1 + 2 = 3$, $a_{13} = 1 + 3 = 4$, etc. Por tanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

c. *Construir la matriz* **I** de 3×3, *dado que $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ y $a_{ij} = 0$ en cualquier otro caso.*

Solución: la matriz está dada por:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Igualdad de matrices

Ahora definimos lo que significa decir que dos matrices son *iguales*.

Definición

Las matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ son ***iguales*** si y sólo si tienen el mismo orden y $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y cada j (esto es, entradas correspondientes son iguales).

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 1+1 & \frac{2}{2} \\ 2 \cdot 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix},$$

pero,

$$[1 \quad 1] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [1 \quad 1] \neq [1 \quad 1 \quad 1] \qquad \text{(diferentes tamaños).}$$

Una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que

$$\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Igualando las entradas correspondientes, debemos tener

$$\begin{cases} x = 2, \\ y+1 = 7, \\ 2z = 4, \\ 5w = 2. \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene $x = 2$, $y = 6$, $z = 2$ y $w = \frac{2}{5}$. Es un hecho significativo que una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones lineales.

Transpuesta de una matriz

Si **A** es una matriz, la matriz que se forma a partir de **A** por intercambio de sus renglones con sus columnas se conoce como la *transpuesta* de **A**.

Definición

La ***transpuesta*** de una matriz **A** de $m \times n$, denotada $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, es la matriz de $n \times m$ cuyo i-ésimo renglón es la i-ésima columna de **A**.

EJEMPLO 3 Transpuesta de una matriz

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, *encontrar* $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Solución: la matriz **A** es de 2×3, de modo que $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ es de 3×2. La columna 1 de **A** se convierte en el renglón 1 de $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, la columna 2 se convierte en el renglón 2 y la columna 3 se convierte en el renglón 3. Por tanto,

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Observe que las columnas de $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ son los renglones de **A**. Debe darse cuenta de que si tomamos la transpuesta de nuestra respuesta, obtendremos la matriz original **A**. Esto es, la operación transpuesta tiene la propiedad de que

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}.$$

Tecnología

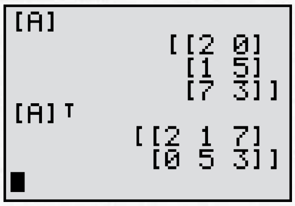


FIGURA 6.1 **A** y $\mathbf{A}^T$

Las calculadoras gráficas tienen la capacidad de manipular matrices. Por ejemplo, la figura 6.1 muestra el resultado de aplicar la operación de transposición a la matriz **A.**

Matrices especiales

Cierto tipo de matrices desempeñan funciones importantes en la teoría de matrices. Ahora consideraremos algunos de estos tipos especiales.

Una matriz de $m \times n$ cuyas entradas son todas iguales a cero, se conoce como **matriz cero** de $m \times n$ y se denota por $\mathbf{O}_{m\times n}$ o, de manera más sencilla, por **O** si se sobreentiende su tamaño. Así, la matriz cero de 2×3 es

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y en general,

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Advertencia No confunda la matriz **O** con el número real 0.

Una matriz que tiene el mismo número de columnas que de renglones, por ejemplo n renglones y n columnas, es llamada **matriz cuadrada** de orden n. Esto es, una matriz $m \times n$ es cuadrada si y sólo si $m = n$. Por ejemplo, las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [3]$$

son cuadradas con órdenes 3 y 1, respectivamente.

En una matriz cuadrada de orden n, las entradas $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, las cuales están sobre la diagonal "principal" que va desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha se llaman entradas de la *diagonal principal*, o simplemente la **diagonal principal.** Así, en la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

la diagonal principal (véase la región resaltada) consiste en $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$ y $a_{33} = 9$.

Una matriz cuadrada **A** es llamada **matriz diagonal** si todas las entradas que se encuentran fuera de la diagonal principal son cero; esto es, si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Ejemplos de matrices diagonales son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Una matriz cuadrada A se dice que es una **matriz triangular superior** si todas las entradas *debajo de* la diagonal principal son cero; esto es, si $a_{ij} = 0$ para $i > j$. De manera análoga, una matriz **A** se dice que es una **matriz triangular inferior** si todas las entradas *por arriba* de la diagonal principal son cero; esto es, si $a_{ij} = 0$ para $i < j$. Cuando una matriz es triangular superior o triangular inferior se conoce como una **matriz triangular.** Así, las matrices

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

son matrices triangular superior y triangular inferior, respectivamente y, por tanto, son matrices triangulares.

Ejercicio 6.1

1. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = [6 \quad 2], \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = [4].$$

a. Establezca el orden de cada matriz.
b. ¿Cuáles matrices son cuadradas?
c. ¿Cuáles matrices son triangulares superiores? ¿Triangulares inferiores?
d. ¿Cuáles son vectores renglón?
e. ¿Cuáles son vectores columna?

En los problemas del 2 al 9 sea

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 14 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. ¿Cuál es el orden de **A**?

Determine las entradas siguientes.

3. a_{43}.

4. a_{12}.

5. a_{32}.

6. a_{34}.

7. a_{44}.

8. a_{55}.

9. ¿Cuáles son las entradas de la diagonal principal?

10. Escriba la matriz triangular superior de orden 5, dado que todas las entradas que no se requiere que sean cero, son iguales a uno.

11. Construya una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ si **A** es 3×4 y $a_{ij} = 4i + 2j$.

12. Construya la matriz $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ si $\mathbf{B}$ es 2×2 y $b_{ij} = (-1)^{i+j}(i^2 + j^2)$.

13. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es de 12×10, ¿cuántas entradas tiene $\mathbf{A}$? Si $a_{ij} = 1$ para $i = j$ y $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, encuentre a_{33}, a_{52}, $a_{10,10}$, y $a_{12,10}$.

14. Liste la diagonal principal de

a. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & -1 \\ -6 & 6 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, **b.** $\begin{bmatrix} x & 1 & y \\ 9 & y & 7 \\ y & 0 & z \end{bmatrix}$.

15. Escriba la matriz cero de orden (a) 4 y (b) 6.

16. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de 4×5, ¿cuál es el orden de $\mathbf{A}^T$?

En los problemas del 17 al 20 encuentre $\mathbf{A}^T$.

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

20. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

21. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

a. ¿Cuáles son matrices diagonales?
b. ¿Cuáles son matrices triangulares?

22. Una matriz es *simétrica* si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. ¿La matriz del problema 20 es simétrica?

23. Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

verifique la propiedad general de que $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ encontrando $\mathbf{A}^T$ y después $(\mathbf{A}^T)^T$.

En los problemas del 24 al 27 resuelva la ecuación matricial.

24. $\begin{bmatrix} 2x & y \\ z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

25. $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ x & 7 \\ 3y & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$.

26. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3x & y & 3z \\ 0 & w & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

27. $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 7 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 7 \\ 7 & y \end{bmatrix}$.

28. Acciones Un agente de bolsa vendió a un cliente 200 acciones de tipo A, 300 de tipo B, 500 de tipo C y 300 de tipo D. Escriba un vector renglón que dé el número de acciones vendidas de cada tipo. Si las acciones se venden en \$20, \$30, \$45 y \$100 por acción, respectivamente, escriba esta información como un vector columna.

29. Análisis de ventas La compañía Widget tiene sus reportes de ventas mensuales dados por medio de matrices cuyos renglones, en orden, representan el número de modelos regular, de lujo y de extra lujo vendidos, mientras que las columnas dan el número de unidades rojas, blancas, azules y púrpuras vendidas. Las matrices para enero ($\mathbf{E}$) y febrero ($\mathbf{F}$) son

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

En enero, ¿cuántas unidades de los modelos de extra lujo blancos se vendieron? (b) En febrero, ¿cuántos modelos de lujo azules se vendieron? (c) ¿En qué mes se vendieron más modelos regulares púrpuras? (d) ¿De qué modelo y color se vendió el mismo número de unidades en ambos meses? (e) ¿En qué mes se vendieron más modelos de lujo? (f) ¿En qué mes se vendieron más artículos rojos? (g) ¿Cuántos artículos se vendieron en enero?

30. Matriz de insumo-producto Las matrices de insumo-producto desarrolladas por W. W. Leontief, indican las interrelaciones que existen entre los diferentes sectores de una economía durante algún periodo. Un ejemplo hipotético para una economía simplificada está dado por la matriz $\mathbf{M}$ presentada al final de este problema. Los sectores consumidores son los mismos que los productores y pueden considerarse como fabricantes, gobierno, acero, agricultura, doméstico, etc. Cada renglón muestra cómo el producto de un sector dado es consumido por los cuatro sectores. Por ejemplo, del total de la producción de la industria A, 50 unidades fueron para la propia industria A, 70 para la B, 200 para C y 360 para todos los demás consumidores. La suma de las entradas en el renglón 1, es decir 680, da la producción total de A para un periodo dado. Cada columna da la producción de cada sector que consume un sector dado. Por ejemplo, en la producción de 680 unidades, la industria A consume 50 unidades de A, 90 de B, 120 de C y 420 de todos los demás productores. Para cada columna, encuentre la suma de las entradas. Haga lo mismo con cada renglón. ¿Qué observa al comparar esos totales? Suponga que el sector A aumenta su producción en 20%, es decir, en 136 unidades. En el supuesto que esto tiene como consecuencia un aumento uniforme de 20% en todos sus insumos, ¿en cuántas unidades el sector B aumentará su producción? Responda la misma pregunta para C y para todos los demás productores.

$$\begin{array}{cl} & \overbrace{\begin{array}{cccc} \text{Industria A} & \text{Industria B} & \text{Industria C} & \text{Todos los demás consumidores} \end{array}}^{\text{CONSUMIDORES}} \\ \text{PRODUCTORES} & \\ \mathbf{M} = \begin{array}{l} \text{Industria A} \\ \text{Industria B} \\ \text{Industria C} \\ \text{Todos los demás productores} \end{array} & \begin{bmatrix} 50 & 70 & 200 & 360 \\ 90 & 30 & 270 & 320 \\ 120 & 240 & 100 & 1050 \\ 420 & 370 & 940 & 4960 \end{bmatrix} \end{array}$$

31. Encuentre todos los valores de x para los cuales

$$\begin{bmatrix} x^2 + 2000x & \sqrt{x^2} \\ x^2 & \ln(e^x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2001 & -x \\ 2001 - 2000x & x \end{bmatrix}.$$

En los problemas 32 y 33 encuentre $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

32. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

33. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

OBJETIVO Definir la suma de matrices y la multiplicación por un escalar, además de considerar las propiedades relacionadas con estas operaciones.

6.2 Suma de matrices y multiplicación por un escalar

Suma de matrices

Considere un comerciante de vehículos para nieve que vende dos modelos: Deluxe y Super. Cada uno está disponible en uno de dos colores, rojo y azul. Suponga que las ventas para enero y febrero están representadas por las matrices de ventas

$$\mathbf{E} = \begin{array}{l} \\ \text{rojo} \\ \text{azul} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Deluxe} & \text{Super} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cada renglón de **E** y **F** proporciona el número vendido de cada modelo para un color dado. Cada columna proporciona el número vendido de cada color para un modelo dado. Una matriz que represente las ventas totales para cada modelo y color durante los dos meses, puede obtenerse sumando las correspondientes entradas en **E** y **F:**

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Esta situación proporciona la oportunidad para introducir la operación de suma de matrices para dos matrices del mismo orden.

Definición

Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ son matrices de $m \times n$, entonces la ***suma*** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es la matriz de $m \times n$ que se obtiene sumando las correspondientes entradas de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$; esto es, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$.

■ ***Principios en práctica 1***
Suma de matrices

Una compañía de muebles de oficina fabrica escritorios y mesas en dos plantas, A y B. La matriz **E** representa la producción de las dos plantas en enero y la matriz **F** representa la producción de las dos plantas en febrero. Escriba una matriz que represente la producción total en las dos plantas para los dos meses. **E** y **F** son como sigue:

$$\mathbf{E} = \begin{array}{l} \\ \text{escritorios} \\ \text{mesas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 80 \\ 105 & 130 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\mathbf{F} = \begin{array}{l} \text{escritorios} \\ \text{mesas} \end{array} \begin{bmatrix} 110 & 140 \\ 85 & 125 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Como **A** y **B** son del mismo tamaño (2×3), su suma está definida. Tenemos

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3+5 & 0+(-3) & -2+6 \\ 2+1 & -1+2 & 4+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 1 Suma de matrices

a. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & 2-2 \\ 3-6 & 4+4 \\ 5+3 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ no está definida, ya que las matrices no son del mismo tamaño.

■

Si **A, B, C** y **O** tienen el mismo orden, entonces las propiedades siguientes se cumplen para la suma de matrices:

Propiedades para la suma de matrices

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	(propiedad conmutativa),
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	(propiedad asociativa),
3. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$	(propiedad del neutro aditivo).

Estas propiedades de la suma de matrices son semejantes a las propiedades correspondientes de los números reales.

La propiedad 1 establece que las matrices pueden sumarse en cualquier orden, y la propiedad 2 permite que las matrices se agrupen para la operación de suma. La propiedad 3 establece que la matriz cero desempeña la misma función en la suma de matrices que el número cero en la suma de números reales. Estas propiedades se ilustran en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Propiedades de la suma de matrices

Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. *Demostrar que* $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

Solución:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por tanto , $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

b. *Demostrar que* $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

Solución:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & -3 & 2\end{bmatrix}+\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\\ -1 & -5 & 3\end{bmatrix}.$$

c. *Demostrar que* $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$.

Solución:

$$\mathbf{A}+\mathbf{O}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{A}.$$

EJEMPLO 3 Vectores de demanda para una economía

Considere una economía hipotética simplificada que tiene tres industrias, digamos, carbón, electricidad y acero, y tres consumidores 1, 2 y 3. Suponga que cada consumidor puede utilizar parte de la producción de cada industria y cada industria utiliza parte de la producción de cada una de las otras industrias. Entonces, las necesidades de cada consumidor y de cada industria pueden representarse por un vector (renglón) de demanda, cuyas entradas, en orden, dan la cantidad de carbón, electricidad y acero necesarios para el consumidor o industria en algunas unidades convenientes. Por ejemplo, los vectores de demanda para los consumidores podrían ser:

$$\mathbf{D}_1=[3\quad 2\quad 5],\qquad \mathbf{D}_2=[0\quad 17\quad 1],\qquad \mathbf{D}_3=[4\quad 6\quad 12],$$

y para las industrias, podrían ser:

$$\mathbf{D}_C=[0\quad 1\quad 4],\qquad \mathbf{D}_E=[20\quad 0\quad 8],\qquad \mathbf{D}_S=[30\quad 5\quad 0],$$

donde los subíndices C, E y S son para carbón, electricidad y acero, respectivamente. La demanda total de los consumidores para estos bienes está dada por la suma

$$\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_2+\mathbf{D}_3=[3\quad 2\quad 5]+[0\quad 17\quad 1]+[4\quad 6\quad 12]=[7\quad 25\quad 18].$$

La demanda industrial total está dada por la suma

$$\mathbf{D}_C+\mathbf{D}_E+\mathbf{D}_S=[0\quad 1\quad 4]+[20\quad 0\quad 8]+[30\quad 5\quad 0]=[50\quad 6\quad 12].$$

Por tanto, la demanda global total está dada por

$$[7\quad 25\quad 18]+[50\quad 6\quad 12]=[57\quad 31\quad 30].$$

Así, la industria del carbón vende un total de 57 unidades, el total de unidades de electricidad vendidas es de 31 y el total de unidades de acero que fueron vendidas es de 30.[1]

Multiplicación por un escalar

Retomemos al vendedor de vehículos para nieve, recuerde que en febrero las ventas estaban dadas por la matriz

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}.$$

[1]Este ejemplo, así como los demás de este capítulo, es de John G. Kemeny, J. Laurie Snell y Gerald L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, tercera edición, © 1974. Reimpreso con permiso de Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

Si en marzo el vendedor duplica las ventas de febrero de cada modelo y color de vehículos para nieve, la matriz de ventas para marzo podría obtenerse multiplicando cada entrada de **F** por 2

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2(3) & 2(1) \\ 2(4) & 2(2) \end{bmatrix}.$$

Parece razonable escribir esta operación como

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{F} = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix},$$

que se considera como la multiplicación de una matriz por un número real. De hecho, tenemos la definición siguiente.

Definición

Si **A** es una matriz $m \times n$ y k es un número real (también llamado escalar), entonces con $k\mathbf{A}$ denotamos a la matriz $m \times n$ obtenida al multiplicar cada entrada de **A** por k. La operación se llama **multiplicación por un escalar,** y $k\mathbf{A}$ se llama ***múltiplo escalar*** de **A.**

Por ejemplo,

$$-3\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(1) & -3(0) & -3(-2) \\ -3(2) & -3(-1) & -3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -6 & 3 & -12 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 4 Multiplicación por un escalar

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcular lo siguiente.

a. $5\mathbf{A}$.

Solución:

$$5\mathbf{A} = 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(1) & 5(2) \\ 5(4) & 5(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}.$$

b. $-\dfrac{2}{3}\mathbf{B}$.

Solución:

$$-\frac{2}{3}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}(3) & -\frac{2}{3}(-4) \\ -\frac{2}{3}(7) & -\frac{2}{3}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{8}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

c. $\dfrac{1}{2}\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{A} + 3\mathbf{B} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 21 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & -11 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

d. $0\mathbf{A}$.

Solución:

$$0\mathbf{A} = 0\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

e. $k\mathbf{O}$.

Solución:

$$k\mathbf{O} = k\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Si **A, B** y **O** son del mismo tamaño, entonces para cualesquiera escalares, k, k_1 *y* k_2 tenemos las propiedades siguientes de multiplicación por un escalar:

Propiedades de la multiplicación por un escalar

1. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$.
2. $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$.
3. $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$.
4. $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$.
5. $k\mathbf{O} = \mathbf{O}$.

Recuerde que $\mathbf{O} \neq 0$, ya que 0 es un *escalar* y **O** es una *matriz* cero.

Las propiedades 4 y 5 se ilustraron en los ejemplos 4(d) y (e); las otras se ilustran en los ejercicios.

También tenemos las propiedades siguientes de la operación de transposición, donde **A** y **B** son del mismo tamaño y k es cualquier escalar:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}.$$
$$(k\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

La primera propiedad establece que *la transpuesta de una suma es la suma de las transpuestas*.

Sustracción de matrices

Si A es cualquier matriz, entonces el múltiplo escalar $(-1)\mathbf{A}$ se escribe simplemente como $-\mathbf{A}$ y se denomina **negativo de A:**

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}.$$

Así, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},$$

entonces

$$-\mathbf{A} = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Observe que $-\mathbf{A}$ es la matriz que se obtiene multiplicando cada entrada de **A** por -1.

La resta (o sustracción) de matrices se define en términos de la suma de matrices:

Definición

Si **A** y **B** tienen el mismo tamaño, entonces por $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ queremos decir $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

EJEMPLO 5 Resta de matrices

a. $$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -4 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-6 & 6+2 \\ -4-4 & 1-1 \\ 3+0 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -8 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, con mayor facilidad, podemos restar cada entrada de **B** de la correspondiente entrada de **A.**

b. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, entonces

$$\mathbf{A}^T - 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Principios en práctica 2

Ecuación matricial

Una fabricante de puertas, ventanas y armarios escribe su utilidad anual (en miles de dólares) para cada categoría, en un vector como $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 248 \\ 319 \\ 532 \end{bmatrix}$. Sus costos fijos de producción pueden describirse por medio del vector $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix}$. Ella calcula que, con una nueva estructura de precios que genere un ingreso de 80% del ingreso de su competidor, puede duplicar su utilidad, en el supuesto que sus costos fijos permanezcan constantes. Este cálculo puede representarse por medio de

$$0.8\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 248 \\ 319 \\ 532 \end{bmatrix}.$$

Resuelva para x_1, x_2, y x_3, las cuales representan los ingresos de su competidor para cada categoría.

EJEMPLO 6 Ecuación matricial

Resolver la ecuación $2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Solución:

Estrategia: primero simplificamos cada lado en una matriz. Después, por la igualdad de matrices, igualamos las entradas correspondientes.

Tenemos

$$2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - 3 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Por la igualdad de matrices debemos tener $2x_1 - 3 = 25$, que da $x_1 = 14$; a partir de $2x_2 - 4 = -20$ obtenemos $x_2 = -8$.

Tecnología

Las operaciones matriciales de suma, resta y multiplicación por un escalar pueden realizarse en una calculadora gráfica. Por ejemplo, la figura 6.2 muestra $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

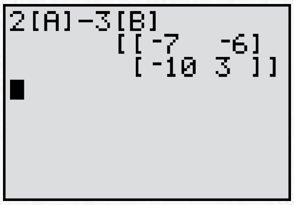


FIGURA 6.2 Operaciones matriciales con calculadoras gráficas.

Ejercicio 6.2

En los problemas del 1 al 12 realice las operaciones indicadas.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 9 & 11 & -2 \end{bmatrix}.$

2. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}.$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

4. $2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

5. $3[1 \;\; -3 \;\; 1] + 2[-6 \;\; 1 \;\; 4] - 0[-2 \;\; 7 \;\; 4].$

6. $[7 \;\; 7] + 66.$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$

8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

9. $-6\begin{bmatrix} 2 & -6 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$

11. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ -4 & 0 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}.$

12. $2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right).$

En los problemas del 13 al 24 calcule las matrices requeridas si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. $-\mathbf{B}$.

14. $-(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

15. $2\mathbf{O}$.

16. $\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}$.

17. $2(\mathbf{A} - 2\mathbf{B})$.

18. $0(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.

19. $3(\mathbf{A} - \mathbf{C}) + 6$.

20. $\mathbf{A} + (\mathbf{C} + \mathbf{B})$.

21. $2\mathbf{B} - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{C}$.

22. $3\mathbf{C} - 2\mathbf{B}$.

23. $\frac{1}{2}\mathbf{A} - 2(\mathbf{B} + 2\mathbf{C})$.

24. $2\mathbf{A} - \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{C})$.

En los problemas del 25 al 28 verifique las ecuaciones para las matrices **A, B** *y* **C** *anteriores.*

25. $3(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 3\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

26. $(2 + 3)\mathbf{A} = 2\mathbf{A} + 3\mathbf{A}$.

27. $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$.

28. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} + k\mathbf{C}$.

En los problemas del 29 al 34 sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule, si es posible, las matrices indicadas.

29. $3\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}$.

30. $(\mathbf{B} - \mathbf{C})^{\mathrm{T}}$.

31. $2\mathbf{B}^{\mathrm{T}} - 3\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$.

32. $2\mathbf{B} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.

33. $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} - \mathbf{D}$.

34. $(\mathbf{D} - 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

---

35. Exprese la ecuación matricial

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - y\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

como un sistema de ecuaciones lineales y resuélvalo.

36. En forma inversa a la que utilizó en el problema 35, escriba el sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ 2x - 6y = -4 \end{cases}$$

como una ecuación matricial.

En los problemas del 37 al 40 resuelva las ecuaciones matriciales.

37. $3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$.

38. $3\begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 7 \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 2y \end{bmatrix}$.

39. $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -24 \\ 14 \end{bmatrix}$.

40. $x\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3x + 12 - 3y \end{bmatrix}$.

---

41. Producción Una compañía de artículos electrónicos fabrica televisores, VCR y reproductores de CD en dos plantas, A y B. La matriz **X** representa la producción de las dos plantas para el minorista X, y la matriz **Y** representa la producción de las dos plantas para el minorista Y. Escriba una matriz que represente la producción total en las dos plantas para ambos minoristas. Las matrices **X** y **Y** son como sigue:

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \\ \text{TV} \\ \text{VCR} \\ \text{CD} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 40 \\ 45 & 30 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \mathbf{Y} = \begin{array}{c} \\ \text{TV} \\ \text{VCR} \\ \text{CD} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 30 & 25 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

42. Ventas Sea **A** la matriz que representa las ventas (en miles de dólares) de una compañía de juguetes para tres ciudades en 1998, y sea **B** la matriz que representa las ventas para las mismas ciudades en el año 2000, en donde **A** y **B** están dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \text{Acción} \\ \text{Educativo} \end{array}\begin{bmatrix} 400 & 350 & 150 \\ 450 & 280 & 850 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \text{Acción} \\ \text{Educativo} \end{array}\begin{bmatrix} 380 & 330 & 220 \\ 460 & 320 & 750 \end{bmatrix}.$$

Si la compañía compra un competidor, y en 2001 duplica las ventas que consiguió el año 2000, ¿cuál es el cambio de las ventas entre 1998 y 2001?

43. Suponga que el precio de los productos A, B y C está dado, en ese orden, por el vector de precios

$$\mathbf{P} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3].$$

Si los precios se incrementan en 10%, el vector de los nuevos precios puede obtenerse multiplicando **P**, ¿por qué escalar?

44. Demuestre que $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$. [*Sugerencia:* utilice la definición de resta y las propiedades de la operación de transposición.]

En los problemas del 45 al 47 calcule las matrices dadas si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

45. $4\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

46. $-2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{C}$.

47. $2(3\mathbf{C} - \mathbf{A}) + 2\mathbf{B}$.

OBJETIVO Definir la multiplicación de matrices y considerar las propiedades asociadas. Expresar un sistema como una sola ecuación matricial por medio de la multiplicación de matrices.

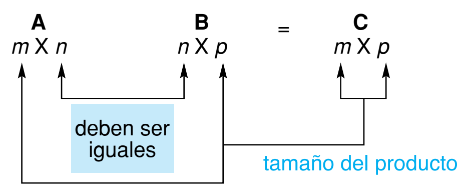
6.3 MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Además de las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar, bajo ciertas circunstancias puede definirse el producto **AB** de las matrices **A** y **B.** Esta circunstancia es que el número de columnas de **A** sea igual al número de renglones de **B.** Aunque la siguiente definición de multiplicación de matrices no parece ser muy natural (parecería más natural sólo multiplicar las entradas correspondientes), un estudio más minucioso de las matrices lo convencerán de que nuestra definición es apropiada y extremadamente práctica para aplicaciones.

Definición

Sea **A** una matriz de $m \times n$ y **B** una matriz $n \times p$. Entonces el producto **AB** es la matriz **C** de $m \times p$ cuya entrada c_{ij}, en el renglón i y la columna j, se obtiene como sigue: sume los productos formados al multiplicar, en orden, cada entrada (esto es, primera, segunda, etc.) del renglón i de **A** por la "correspondiente" entrada (esto es, primera, segunda, etc.) de la columna j de **B.**

Tres puntos concernientes a la definición anterior de **AB** deben comprenderse en su totalidad. Primero, la condición de que **A** sea de $m \times n$ y **B** sea de $n \times p$, es equivalente a decir que el número de columnas de **A** debe ser igual al número de renglones de **B.** Segundo, el producto será una matriz de orden $m \times p$, tendrá tantos renglones como **A** y tantas columnas como **B.**



Tercero, la definición se refiere al producto **AB,** *en ese orden;* **A** es el factor izquierdo y **B** el factor derecho. Para **AB,** decimos que **B** está *premultiplicado* por **A,** o bien, que **A** está *posmultiplicado* por **B.**

Para aplicar la definición, encontremos el producto

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz **A** tiene tamaño 2×3 $(m \times n)$ y la matriz **B** tiene tamaño 3×3 $(n \times p)$. El número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **B** $(n = 3)$, de modo que el producto **C** está definido y será una matriz de 2×3 $(m \times p)$; esto es,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}.$$

La entrada c_{11} se obtiene sumando los productos de cada entrada en el renglón 1 de **A** por la "correspondiente" entrada en la columna 1 de **B.** Así,

entradas del renglón 1 de **A**

$$c_{11} = (2)(1) + (1)(0) + (-6)(-2) = 14.$$

entradas de la columna 1 de **B**

En este paso tenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}.$$

De manera similar, para c_{12}, usamos las entradas del renglón 1 de **A** y las de la columna 2 de **B:**

entradas del renglón 1 de **A**

$$c_{12} = (2)(0) + (1)(4) + (-6)(1) = -2.$$

entradas de la columna 2 de **B**

Ahora tenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}.$$

Para las restantes entradas de **AB,** obtenemos

$$c_{13} = (2)(-3) + (1)(2) + (-6)(1) = -10,$$

$$c_{21} = (1)(1) + (-3)(0) + (2)(-2) = -3,$$

$$c_{22} = (1)(0) + (-3)(4) + (2)(1) = -10,$$

$$c_{23} = (1)(-3) + (-3)(2) + (2)(1) = -7.$$

Así,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -10 \\ -3 & -10 & -7 \end{bmatrix}.$$

Observe que si invertimos el orden de los factores, entonces el producto

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de matrices no es conmutativa.

no está definido, ya que el número de columnas de **B** *no* es igual al número de renglones de **A.** Esto muestra que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Esto es, para cualesquier matrices **A** y **B** en general **AB** $\neq$ **BA** (aun si ambos productos están definidos), de modo que el orden en el que las matrices estén escritas en un producto es extremadamente importante.

EJEMPLO 1 Tamaños de matrices y su producto

Sea **A** una matriz de 3×5 y **B** una matriz de 5×3. Entonces **AB** está definida y es una matriz de 3×3. Además, **BA** también está definida y es una matriz de 5×5.

Si **C** es una matriz de 3×5 y **D** es una matriz de 7×3, entonces **CD** no está definida, pero **DC** está definida y es una matriz de 7×5.

EJEMPLO 2 Producto de matrices

Calcular el producto de matrices

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: como **A** es de 2×3 y **B** es de 3×2, el producto **AB** está definido y tendrá orden de 2×2. Moviendo de manera simultánea el dedo índice de la mano izquierda a lo largo de los renglones de **A,** y el dedo índice de la mano derecha a lo largo de las columnas de **B,** no le debe ser difícil determinar mentalmente las entradas del producto. Con esto obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Principios en práctica 1
Producto de matrices

Una librería tiene 100 diccionarios, 70 libros de cocina y 90 diccionarios ideológicos en existencia. Si el valor de cada diccionario es $28, cada libro de cocina cuesta $22 y cada diccionario ideológico $16, utilice un producto de matrices para determinar el valor total del inventario de la librería.

EJEMPLO 3 Producto de matrices

a. *Calcular* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$

Solución: el producto tiene orden 1×1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \end{bmatrix}.$$

b. *Calcular* $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}.$

Solución: el producto tiene orden 3×2:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}.$$

c. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -3 & 11 \\ 10 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

d. $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

El ejemplo 4 muestra que aunque los productos **AB** y **BA** estén definidos, no necesariamente son iguales.

EJEMPLO 4 Producto de matrices

Calcular **AB** *y* **BA** *si*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución: tenemos

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observe que aunque ambos productos **AB** y **BA** están definidos, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Tecnología

La figura 6.3 muestra los resultados obtenidos con una calculadora gráfica para determinar el producto **AB** del ejemplo 4.

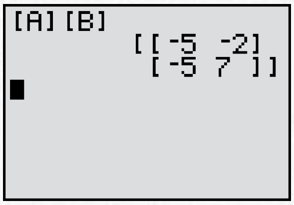


FIGURA 6.3 Solución mediante una calculadora del producto de matrices del ejemplo 4.

Principios en práctica 2
Vector de costos

Los precios (en dólares por unidad) para tres libros de texto están representados por el vector de precios $\mathbf{P} = [26.25 \quad 34.75 \quad 28.50]$. Una librería universitaria hace un pedido de estos libros en las cantidades dadas por el vector columna $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 250 \\ 325 \\ 175 \end{bmatrix}$. Determine el costo total (en dólares) de la compra.

EJEMPLO 5 Vector de costos

Suponga que los precios, en dólares por unidad, para los productos A, B y C están representados por el vector de precios

$$\begin{array}{c} \text{Precio de} \\ \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \end{array}$$
$$\mathbf{P} = [2 \quad 3 \quad 4].$$

Si las cantidades (en unidades) de A, B y C que se compran están dadas por el vector columna

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{unidades de A} \\ \text{unidades de B} \\ \text{unidades de C,} \end{array}$$

entonces, el costo total en dólares de las compras está dado por la entrada en el vector de costos **PQ**

$$\mathbf{PQ} = [2 \quad 3 \quad 4]\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = [(2 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 11)] = [73].$$

EJEMPLO 6 Utilidad para una economía

En el ejemplo 3 de la sección 6.2, suponga que en la economía hipotética el precio del carbón es de \$10,000 por unidad, el de la electricidad de \$20,000 por unidad y el precio del acero es de \$40,000 por unidad. Estos precios pueden representarse por medio del vector (columna) de precios:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10{,}000 \\ 20{,}000 \\ 40{,}000 \end{bmatrix}.$$

Considere la industria del acero. En total vende 30 unidades de acero en \$40,000 por unidad y, por tanto, su ingreso total es de \$1,200,000. Sus costos por los diferentes bienes están dados por el producto matricial

$$\mathbf{D}_S\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 30 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10{,}000 \\ 20{,}000 \\ 40{,}000 \end{bmatrix} = [400{,}000].$$

De aquí que la ganancia de la industria del acero es \$1,200,000 − \$400,000 = \$800,000.

La multiplicación de matrices satisface las propiedades siguientes, siempre y cuando todas las sumas y productos estén definidos:

Propiedades de la multiplicación de matrices

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (propiedad asociativa),
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, (propiedades distributivas).
   $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

EJEMPLO 7 Propiedad asociativa

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad y \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

calcular **ABC** *de dos maneras.*

Solución: agrupando **BC** se obtiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}.$$

De manera alterna, agrupando **AB** se obtiene

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -5 & 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}.$$

Observe que $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

EJEMPLO 8 Propiedad distributiva

Verificar que $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ *si*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: en el lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En el lado derecho,

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} + \mathbf{AC} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

EJEMPLO 9 Materia prima y costos

Suponga que un contratista ha aceptado pedidos para cinco casas con estilo rústico, siete con estilo moderno y 12 con estilo colonial. Entonces, sus pedidos pueden representarse por el vector renglón

$$\mathbf{Q} = [5 \quad 7 \quad 12].$$

Además, suponga que las "materias primas" que se utilizan en cada tipo de casa son acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. Las entradas de la matriz **R** siguiente, dan el número de unidades de cada materia prima que se utilizará en cada tipo de casa (las entradas no necesariamente reflejan la realidad, pero se eligieron así por conveniencia).

$$\begin{array}{l} \\ \text{Rústico} \\ \text{Moderno} \\ \text{Colonial} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Acero} & \text{Madera} & \text{Vidrio} & \text{Pintura} & \text{Mano de obra} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{R}.$$

Cada renglón indica la cantidad de materia prima necesaria para una clase dada de casa; cada columna indica la cantidad de una materia prima dada necesaria para cada tipo de casa. Ahora suponga que el contratista desea calcular la cantidad de cada materia prima necesaria para satisfacer todos sus pedidos. Entonces, tal información está dada por la matriz **QR**

$$\begin{aligned} \mathbf{QR} &= [5 \quad 7 \quad 12]\begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \\ &= [146 \quad 526 \quad 260 \quad 158 \quad 388]. \end{aligned}$$

Así, el contratista debe ordenar 146 unidades de acero, 526 de madera, 260 de vidrio, etcétera.

El contratista también está interesado en conocer los costos que tendrá que pagar por estas materias primas. Suponga que el acero cuesta \$2500 por unidad, la madera \$1200 por unidad, y el vidrio, la pintura y la mano de obra cuestan \$800, \$150 y \$1500 por unidad, respectivamente. Estos datos pueden escribirse como el vector columna de costo **C**

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix}.$$

Entonces el costo de cada tipo de casa está dado por la matriz **RC**

$$\mathbf{RC} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75{,}850 \\ 81{,}550 \\ 71{,}650 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, el costo de los materiales para la casa rústica es de \$75,850, para la casa estilo moderno \$81,550 y para la estilo colonial \$71,650.

El costo total de la materia prima para todas las casas está dado por

$$\mathbf{QRC} = \mathbf{Q}(\mathbf{RC}) = [5 \quad 7 \quad 12] \begin{bmatrix} 75{,}850 \\ 81{,}550 \\ 71{,}650 \end{bmatrix} = [1{,}809{,}900].$$

El costo total es \$1,809,900.

Otra propiedad de las matrices incluye la multiplicación por un escalar y la multiplicación de matrices. Si k es un escalar y el producto **AB** está definido, entonces

$$k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}).$$

El producto $k(\mathbf{AB})$ puede escribirse simplemente como $k\mathbf{AB}$. Así

$$k\mathbf{AB} = k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}).$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} &= \left(3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Existe una propiedad interesante que concierne a la transpuesta de un producto de matrices:

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

En palabras, la transpuesta de un producto de matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden *inverso*.

Aquí utilizamos el hecho de que $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Esta propiedad puede extenderse para el caso de más de dos factores. Por ejemplo,

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}.$$

EJEMPLO 10 Transpuesta de un producto

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Solución: tenemos

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{de modo que} \quad (\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ahora

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (\mathbf{AB})^T,$$

por lo que $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Al igual que la matriz cero desempeña una función importante como identidad en la suma de matrices, existe una matriz especial, llamada *matriz identidad*, que desempeña una función correspondiente en la multiplicación de matrices.

La **matriz identidad** de $n \times n$, denotada por $\mathbf{I}_n$, es la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal son números uno.

Por ejemplo, las matrices identidad $\mathbf{I}_3$ e $\mathbf{I}_4$ son

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuando el tamaño de una matriz identidad se entienda que debe ser el apropiado para que una operación esté definida, omitiremos el subíndice y sólo la denotaremos por **I.** Debe ser claro que

$$\mathbf{I}^T = \mathbf{I}.$$

La matriz identidad desempeña la misma función en la multiplicación de matrices, que el número 1 en la multiplicación de números reales. Esto es, así como el producto de un número real por 1 es igual al mismo número, el producto de una matriz y la matriz identidad es la misma matriz. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{I}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

En general, si $\mathbf{I}$ es de $n \times n$ y $\mathbf{A}$ tienen n columnas, entonces $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$. Si $\mathbf{B}$ tiene n renglones, entonces $\mathbf{IB} = \mathbf{B}$. Además, si $\mathbf{A}$ es de $n \times n$, entonces

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

EJEMPLO 11 Operaciones con matrices que incluyen a I y a O

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

calcular cada una de las matrices siguientes.

a. $\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Solución:

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

b. $3(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) &= 3\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

c. $\mathbf{AO}$.

Solución:

$$\mathbf{AO} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

En general, si $\mathbf{AO}$ y $\mathbf{OA}$ están definidos, entonces

$$\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}.$$

d. $\mathbf{AB}$.

Solución:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, podemos hablar de una *potencia* de $\mathbf{A}$:

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada y p es un entero positivo, entonces la ***p*-ésima potencia** de $\mathbf{A}$, escrita $\mathbf{A}^p$, es el producto de p factores de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \,\cdot\, \cdot \mathbf{A}}_{p \text{ factores}}.$$

Si $\mathbf{A}$ es de tamaño $n \times n$, definimos $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$.

Hacemos notar que $\mathbf{I}^p = \mathbf{I}$.

EJEMPLO 12 Potencia de una matriz

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, *calcular* $\mathbf{A}^3$.

Solución: como $\mathbf{A}^3 = (\mathbf{A}^2)\mathbf{A}$ y

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

tenemos

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Tecnología

Los resultados del cálculo de $\mathbf{A}^4$ mediante una calculadora gráfica, donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, se muestran en la figura 6.4.

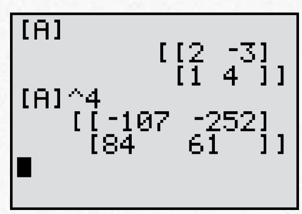


FIGURA 6.4 Potencia de una matriz.

Ecuaciones matriciales

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden representarse por medio de la multiplicación de matrices. Por ejemplo, considere la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

El producto del lado izquierdo tiene orden 2×1, así que es una matriz columna. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Por la igualdad de matrices, las entradas correspondientes deben ser iguales, de modo que obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

De aquí que este sistema de ecuaciones lineales puede definirse por la ecuación matricial (1). En general, describimos la ecuación (1) diciendo que tiene la forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

donde **A** es la matriz obtenida de los coeficientes de las variables, **X** es una matriz columna constituida por las variables, y **B** es una matriz columna obtenida de las constantes (o términos independientes). La matriz **A** es llamada *matriz de coeficientes* del sistema.

Principios en práctica 3

Forma matricial de un sistema utilizando la multiplicación de matrices

Escriba el siguiente par de líneas en forma matricial, utilizando la multiplicación de matrices.

$y = -\frac{8}{5}x + \frac{8}{5}, y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$

EJEMPLO 13 Forma matricial de un sistema utilizando la multiplicación de matrices

Escribir el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 4, \\ 8x_1 + 3x_2 = 7, \end{cases}$$

en forma matricial utilizando la multiplicación de matrices.

Solución: si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix},$$

entonces el sistema dado es equivalente a la ecuación matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6.3

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *y* $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, *encuentre cada uno de los elementos siguientes.*

1. c_{11}. **2.** c_{23}. **3.** c_{32}.
4. c_{33}. **5.** c_{22}. **6.** c_{13}.

Si **A** *es de* 2×3, **B** *de* 3×1, **C** *de* 2×5, **D** *de* 4×3, **E** *de* 3×2 *y* **F** *de* 2×3, *encuentre el orden y número de entradas en cada uno de los siguientes incisos.*

7. AE. **8. DE.** **9. EC.** **10. DB.**
11. FB. **12. BA.** **13. EA.** **14. E(AE).**
15. E(FB). **16. (F + A)B.**

Escriba la matriz identidad que tiene el orden siguiente:

17. 4.

18. 6.

En los problemas del 19 al 36 realice las operaciones indicadas.

19. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

20. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

21. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

22. $[1 \quad 0 \quad 6 \quad 2]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

23. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

24. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

25. $[-1 \quad 2 \quad 3]\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

26. $[1 \quad -4]\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

27. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}[2 \quad 3 \quad -2 \quad 3]$.

28. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

29. $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

30. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

32. $3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 4\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

33. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

34. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

35. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

36. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

En los problemas del 37 al 44 calcule las matrices requeridas si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

37. $\mathbf{DI} - \frac{1}{3}\mathbf{E}$.

38. $\mathbf{DD}$.

39. $3\mathbf{A} - 2\mathbf{BC}$.

40. $\mathbf{B}(\mathbf{D} + \mathbf{E})$.

41. $2\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{EF}$.

42. $\mathbf{E}(2\mathbf{D} - 3\mathbf{I})$.

43. $(\mathbf{DC})\mathbf{A}$.

44. $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

En cada uno de los problemas del 45 al 58 calcule la matriz requerida, si existe, dado que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

45. $\mathbf{A}^2$.

46. $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

47. $\mathbf{B}^3$.

48. $\mathbf{A}(\mathbf{B}^T)^2$.

49. $(\mathbf{AC})^2$.

50. $\mathbf{A}^T(2\mathbf{C}^T)$.

51. $(\mathbf{BA}^T)^T$.

52. $(2\mathbf{B})^T$.

53. $(2\mathbf{I})^2 - 2\mathbf{I}^2$.

54. $\mathbf{IA}^0$.

55. $\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{O})$.

56. $\mathbf{I}^T\mathbf{O}$.

57. $(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^T$.

58. $\mathbf{B}^2 - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{I}$.

En los problemas del 59 al 61 represente el sistema dado, por medio de la multiplicación de matrices.

59. $\begin{cases} 3x + y = 6, \\ 2x - 9y = 5. \end{cases}$

60. $\begin{cases} 8x + y + z = 6, \\ x - y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 11. \end{cases}$

61. $\begin{cases} 4r - s + 3t = 9, \\ 3r - t = 7, \\ 3s + 2t = 15. \end{cases}$

62. Mensajes secretos Los mensajes secretos pueden codificarse por medio de un código y una matriz de codificación. Supóngase que tenemos el código siguiente:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

n	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Sea $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, la matriz de codificación. Entonces podemos codificar un mensaje tomando cada dos letras del mensaje, convertirlas a sus números correspondientes creando una matriz de 2×1 y luego multiplicar cada matriz por **E.** Utilice este código para codificar el mensaje "el/halcón/ha/aterrizado", dejando las diagonales para separar palabras.

63. Inventario Una tienda de mascotas tiene 6 gatitos, 10 perritos y 7 loros en exhibición. Si el valor de un gatito es de \$55, el de cada perrito es de \$150 y el de cada loro es de \$35, por medio de la multiplicación de matrices, determine el valor total del inventario de la tienda de mascotas.

64. Acciones Un agente de bolsa vendió a un cliente 200 acciones tipo A, 300 tipo B, 500 tipo C y 250 tipo D. Los precios por acción de A, B, C y D son \$100, \$150, \$200 y \$300, respectivamente. Escriba un vector renglón que represente el número de acciones compradas de cada tipo. Escriba un vector columna que represente el precio por acción de cada tipo. Utilizando la multiplicación de matrices, encuentre el costo total de las acciones.

65. Costo de construcción En el ejemplo 9, suponga que el contratista tiene que construir siete casas con estilo rústico, tres con estilo moderno y cinco con estilo colonial. Utilizando la multiplicación de matrices, calcule el costo total de la materia prima.

66. Costos En el ejemplo 9 suponga que el contratista desea tomar en cuenta el costo de transportar la materia prima al lugar de la construcción, así como el costo de compra. Suponga que los costos están dados en la matriz que se da a continuación:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Compra} & \text{Transporte} \end{array} \\ \mathbf{C} = & \begin{bmatrix} 2500 & 45 \\ 1200 & 20 \\ 800 & 30 \\ 150 & 5 \\ 1500 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Acero} \\ \text{Madera} \\ \text{Vidrio} \\ \text{Pintura} \\ \text{Mano de obra.} \end{array} \end{array}$$

a. A partir del cálculo de **RC,** encuentre una matriz cuyas entradas proporcionen los costos de compra y de transporte de los materiales para cada tipo de casa.

b. Encuentre la matriz **QRC** cuya primera entrada dé el precio de compra total y cuya segunda entrada dé el costo total de transporte.

c. Sea $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcule **QRCZ,** que proporciona el costo total de materiales y transporte para todas las casas que serán construidas.

67. Realice los siguientes cálculos para el ejemplo 6.

a. Calcule la cantidad que cada industria y cada consumidor tienen que pagar por los bienes que reciben.

b. Calcule la utilidad recibida por cada industria.

c. Encuentre la cantidad total de dinero que es pagada por todas las industrias y todos los consumidores.

d. Calcule la proporción de la cantidad total de dinero que se determinó en (c) pagada por las industrias.

Encuentre la proporción de la cantidad total de dinero que se determinó en (c) que es pagada por los consumidores.

68. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, demuestre que $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

69. demuestre que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{AB} = \mathbf{O}$. Observe que como ni $\mathbf{A}$ ni $\mathbf{B}$ son la matriz cero, la regla algebraica para los número reales "si $ab = 0$, entonces alguno de a o b es cero" no se cumple para las matrices. También puede demostrarse que la ley de cancelación tampoco es cierta para las matrices. Esto es, si $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, entonces no necesariamente es cierto que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

70. Sean $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2$ dos matrices diagonales de 3×3. Calcule $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2$ y $\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$ y demuestre que

a. $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2$ y $\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$ son matrices diagonales.
b. $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2$ conmutan.

En los problemas del 71 al 74 calcule las matrices requeridas dado que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.2 & -4.1 & 5.1 \\ -2.6 & 1.2 & 6.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.1 & 4.8 \\ -2.3 & 3.2 \\ 4.6 & -1.4 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1.2 & 1.5 \\ 2.4 & 6.2 \end{bmatrix}.$$

71. $\mathbf{A}(2\mathbf{B})$.

72. $-2(\mathbf{BC})$.

73. $(-\mathbf{C})(3\mathbf{A})\mathbf{B}$.

74. $\mathbf{C}^3$.

OBJETIVO Mostrar cómo reducir una matriz y utilizar la reducción de matrices para resolver un sistema lineal.

6.4 Método de reducción

En esta sección ilustraremos un método por el cual las matrices pueden utilizarse para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En el desarrollo del método el *método de reducción*, primero resolveremos un sistema por medio del método usual de eliminación. Después obtendremos la misma solución utilizando matrices.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 1, & (1) \\ x + 2y = 5, & (2) \end{cases}$$

que consiste en dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, x y y. Aunque este sistema puede resolverse por varios métodos algebraicos, lo resolveremos por un método que es adaptable con facilidad a matrices.

Por razones que más adelante serán obvias, empezamos por reemplazar la ecuación (1) por la ecuación (2) y la ecuación (2) por la (1), así obtenemos el sistema equivalente,[2]

$$\begin{cases} x + 2y = 5, & (3) \\ 3x - y = 1. & (4) \end{cases}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (3) por –3, se obtiene $-3x - 6y = -15$. Sumando los miembros izquierdo y derecho de esta ecuación a los correspondientes de la ecuación (4), se obtiene un sistema equivalente en el que x se elimina de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, & (5) \\ 0x - 7y = -14. & (6) \end{cases}$$

Ahora eliminaremos y de la primera ecuación. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (6) por $-\frac{1}{7}$, se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y = 5, & (7) \\ 0x + y = 2. & (8) \end{cases}$$

[2]Recuerde de la sección 4.4 que dos o más sistemas son equivalentes si tienen la misma solución.

De la ecuación (8), $y = 2$ y de aquí que $-2y = -4$. Sumando los miembros de $-2y = -4$ a los correspondientes de la ecuación (7), obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 0y = 1, \\ 0x + y = 2. \end{cases}$$

Por tanto, $x = 1$ y $y = 2$, de modo que el sistema original está resuelto.

Observe que en la solución del sistema original, estuvimos reemplazando de manera sucesiva a éste por un sistema equivalente, que se obtenía al realizar una de las tres operaciones siguientes (llamadas *operaciones elementales*) que dejan la solución sin cambio:

1. Intercambio de dos ecuaciones.

2. Suma de un múltiplo constante de los miembros de una ecuación a los correspondientes miembros de otra ecuación.

3. Multiplicación de una ecuación por una constante diferente de cero.

Antes de mostrar un método matricial para resolver el sistema original,

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 2y = 5, \end{cases}$$

primero necesitamos definir algunos términos. Recuerde de la sección 6.3, que la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la **matriz de coeficientes** de este sistema. Las entradas en la primera columna corresponden a los coeficientes de las x en las ecuaciones. Por ejemplo, la entrada en el primer renglón y la primera columna corresponde al coeficiente de x en la primera ecuación, y la entrada en el segundo renglón y la primera columna corresponde al coeficiente de x en la segunda ecuación. En forma análoga, las entradas en la segunda columna corresponden a los coeficientes de las y.

Otra matriz asociada con este sistema es la llamada **matriz aumentada,** que está dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right].$$

La primera y segunda columnas son la primera y segunda columnas, respectivamente, de la matriz de coeficientes. Las entradas en la tercera columna corresponden a los términos constantes del sistema: la entrada en el primer renglón de esta columna es el término constante de la primera ecuación, mientras que la entrada en el segundo renglón es el término constante de la segunda ecuación. Aunque no es necesario incluir la línea vertical en la matriz aumentada, sirve para recordarnos que el 1 y el 5 son los términos constantes que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones. La matriz aumentada describe por completo el sistema de ecuaciones.

El procedimiento que se utilizó para resolver el sistema original incluye varios sistemas equivalentes. A cada uno de estos sistemas podemos asociar su matriz aumentada. A continuación se listan los sistemas implicados, junto con su correspondiente matriz aumentada, las que hemos marcado como **A, B, C, D** y **E.**

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 2y = 5. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] = \mathbf{A.}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x - y = 1. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] = \mathbf{B.}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 0x - 7y = -14. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right] = \mathbf{C}.$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 0x + y = 2. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \mathbf{D}.$$

$$\begin{cases} x + 0y = 1, \\ 0x + y = 2. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \mathbf{E}.$$

Veamos ahora cómo están relacionadas estas matrices.

B puede obtenerse a partir de **A** por intercambio del primero y segundo renglones de **A.** Esta operación corresponde al intercambio de dos ecuaciones en el sistema original.

C puede obtenerse a partir de **B,** sumando a cada entrada del segundo renglón de **B** -3 veces la correspondiente entrada del primer renglón de **B:**

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 + (-3)(1) & -1 + (-3)(2) & 1 + (-3)(5) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right].$$

Esta operación se describe como la suma de –3 veces el primer renglón de **B** con el segundo renglón de **B.**

D puede obtenerse a partir de **C** multiplicando cada entrada del segundo renglón de **C** por $-\frac{1}{7}$. Esta operación se describe como la multiplicación del segundo renglón de **C** por $-\frac{1}{7}$.

E puede obtenerse a partir de **D,** sumando –2 veces el segundo renglón de **D** al primer renglón de **D.**

Observe que **E,** que en esencia proporciona la solución, se obtuvo a partir de **A** al realizar de manera sucesiva una de las tres operaciones matriciales, llamadas **operaciones elementales sobre renglones:**

Operaciones elementales sobre renglones

1. Intercambio de dos renglones de una matriz.
2. Suma de un múltiplo de un renglón de una matriz a un renglón diferente de esa matriz.
3. Multiplicación de un renglón de una matriz por un escalar diferente de cero.

Estas operaciones elementales sobre renglones corresponden a las tres operaciones elementales utilizadas en el método algebraico de eliminación. Cuando una matriz pueda obtenerse a partir de otra por una o más de las operaciones elementales sobre renglones, decimos que las matrices son **equivalentes.** Así, **A** y **E** son equivalentes (también podríamos obtener **A** a partir de **E,** realizando operaciones similares sobre renglones en el sentido opuesto, de modo que el término *equivalentes* es apropiado). Cuando se describan operaciones elementales sobre renglones, por conveniencia utilizaremos la notación siguiente:

Notación	Operación sobre renglón correspondiente
$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambiar los renglones R_i y R_j
kR_i	Multiplicar el renglón R_i por la constante k
$kR_i + R_j$	Sumar k veces el renglón R_i al renglón R_j (pero el renglón R_i permanece igual)

Por ejemplo, escribir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

significa que la segunda matriz se obtuvo a partir de la primera al sumar -4 veces el primer renglón al segundo. Observe que podemos escribir $(-k)R_i$ como $-kR_i$.

Ahora estamos preparados para describir un procedimiento matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Primero, formamos la matriz aumentada del sistema; después, por medio de operaciones elementales sobre renglones, determinamos una matriz equivalente que indique claramente la solución. Seremos más específicos en lo que queremos decir por una matriz que indique claramente la solución. Ésta es una matriz, llamada *matriz reduci-*

Matriz reducida

Una matriz se dice que es una **matriz reducida**[3] si se satisface lo siguiente:

1. Si un renglón no consiste solamente en ceros, entonces la primera entrada diferente de cero en el renglón, llamada la **entrada principal,** es 1, mientras que todas las demás entradas en la columna en la que el 1 aparece son ceros.
2. En cada renglón, la primera entrada diferente de cero está a la derecha de la primera entrada diferente de cero de cada renglón arriba de él.
3. Todos los renglones que consistan únicamente en ceros están en la parte inferior de la matriz.

En otras palabras, para resolver el sistema debemos encontrar la matriz reducida tal que la matriz aumentada del sistema sea equivalente a ella. En nuestro estudio anterior de operaciones elementales sobre renglones, la matriz

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

es una matriz reducida.

EJEMPLO 1 Matrices reducidas

Determinar si cada matriz que se muestra a continuación es reducida o no.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. **b.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **c.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **e.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **f.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución:

a. No es una matriz reducida porque la entrada principal en el segundo renglón no es 1.

b. Matriz reducida.

c. No es una matriz reducida porque la entrada principal en el segundo renglón, no se encuentra a la derecha de la primera entrada diferente de cero en el primer renglón.

[3] O en la *forma escalonada por renglones reducida*.

d. Matriz reducida.

e. No es una matriz reducida porque el segundo renglón, que consiste solamente en ceros, no está en la parte inferior de la matriz.

f. Matriz reducida.

EJEMPLO 2 Reducción de una matriz

Reducir la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Estrategia: para reducir la matriz, debemos hacer que la entrada principal sea 1 en el primer renglón, un 1 en el segundo renglón y así sucesivamente, hasta llegar a renglones de ceros, si los hay. Además, debemos trabajar de izquierda a derecha ya que el 1 inicial en cada renglón debe encontrarse a la *izquierda* de los otros unos iniciales en los renglones de abajo.

Solución: ya que no existen renglones de ceros para moverlos a la parte inferior, procedemos a encontrar la primera columna que tenga una entrada diferente de cero; se trata de la columna 1. Esto significa que en la matriz reducida, el 1 inicial en el primer renglón estará en la columna 1. Para empezar, intercambiaremos los primeros dos renglones de modo que la entrada diferente de cero esté en el primer renglón de la columna 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Ahora multiplicamos el renglón 1 por $\frac{1}{3}$ de modo que la entrada principal sea un 1.

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Ahora, ya que debemos tener ceros abajo (y arriba) de cada 1 inicial, sumamos -6 veces el renglón 1 al renglón 3:

$$\xrightarrow{-6R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}.$$

Nos movemos a la derecha de la columna 1 para encontrar la primera columna que tenga una entrada diferente de cero en el renglón 2, o bien debajo de él; se trata de la columna 3. Esto significa que en la matriz reducida, el 1 inicial en el segundo renglón debe estar en la columna 3. La matriz anterior ya tiene el 1 ahí. Así, que todo lo que necesitamos para obtener ceros abajo y arriba del 1 es sumar una vez el renglón 2 al renglón 1, y sumar –8 veces el renglón 2 al renglón 3:

$$\xrightarrow[-8R_2 + R_3]{(1)R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Otra vez nos movemos a la derecha para encontrar la primera columna que tenga una entrada diferente de cero en el renglón 3; se trata de la columna 4. Para hacer la entrada principal igual a 1, multiplicamos el renglón 3 por $-\frac{1}{5}$:

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por último, para hacer todas las demás entradas de la columna 4 iguales a cero, sumamos -2 veces el renglón 3 a los renglones 1 y 2:

La secuencia de pasos que se utiliza para reducir una matriz, no es única; sin embargo, la forma reducida sí es única.

$$\xrightarrow[-2R_3 + R_2]{-2R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La última matriz está en forma reducida.

Tecnología

Aunque las operaciones elementales sobre renglones pueden realizarse en una calculadora gráfica, el procedimiento es muy engorroso.

El método de reducción descrito para resolver nuestro sistema original puede generalizarse a sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Resolver un sistema tal como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

implica

1. Determinar la matriz aumentada del sistema, que es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right],$$

y

2. Determinar una matriz reducida tal que la matriz aumentada sea equivalente a ella.

Con frecuencia, el paso 2 es llamado *reducción de la matriz aumentada*.

Principios en práctica 1
Solución de un sistema por reducción

Una compañía de inversiones ofrece tres portafolios de acciones: A, B y C. El número de bloques de cada tipo de acciones en cada uno de estos portafolios se resume en la tabla siguiente:

		Portafolio A	B	C
	Alto	6	1	3
Riesgo:	Moderado	3	2	3
	Bajo	1	5	3

Un cliente quiere 35 bloques de acciones de alto riesgo, 22 bloques de acciones de riesgo moderado y 18 bloques de acciones de bajo riesgo. ¿Cuántos bloques de acciones de cada portafolio deben sugerirse?

EJEMPLO 3 Solución de un sistema por reducción

Utilizando la reducción de matrices, resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 2x + y = 5, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Solución: reduciendo la matriz aumentada del sistema, tenemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La última matriz está reducida y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + 0y = 4, \\ 0x + y = -3, \\ 0x + 0y = 0. \end{cases}$$

Ya que el sistema original es equivalente a este sistema, tiene una solución única, a saber

$$x = 4,$$

$$y = -3.$$

EJEMPLO 4 Solución de un sistema por reducción

Utilizando la reducción de matrices, resolver

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 6 = 0, \\ 2z + y - 3 = 0, \\ x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Principios en práctica 2
Solución de un sistema por reducción

Un spa personaliza la dieta y suplementos vitamínicos de cada uno de sus clientes. El spa ofrece tres diferentes suplementos vitamínicos, cada uno con diferentes porcentajes de la cantidad diaria recomendada (CDR) de vitaminas A, C y D. Una tableta de suplemento X proporciona 40% de la CDR de A, 20% de la CDR de C y 10% de la CDR de D. Una tableta de suplemento Y proporciona 10% de la CDR de A, 10% de la CDR de C y 30% de la CDR de D. Una tableta de suplemento Z proporciona 10% de la CDR de A, 50% de la CDR de C y 20% de la CDR de D. El personal del spa determina que una cliente debe tomar 180% de la CDR de vitamina A, 200% de la CDR de la vitamina C y 190% de la CDR de la vitamina D, diariamente. ¿Cuántas tabletas de cada suplemento debe tomar ella diariamente?

Solución: al escribir nuevamente el sistema de modo que las variables estén alineadas y los términos constantes aparezcan en los miembros derechos de las ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 6, \\ \quad\;\; y + 2z = 3, \\ x + \;\; y + 2z = 1. \end{cases}$$

Reduciendo la matriz aumentada, tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(1)R_2 + R_3]{-2R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La última matriz es reducida y corresponde a

$$\begin{cases} \qquad x = 0, \\ y + 2z = 0, \\ \qquad 0 = 1. \end{cases}$$

Cada vez que obtengamos un renglón con ceros del lado izquierdo de la línea vertical, y una entrada diferente de cero a la derecha, no existe solución.

Como $0 \neq 1$, no existen valores de x, y y z para los cuales todas las ecuaciones sean satisfechas de manera simultánea. Por tanto, el sistema original no tiene solución.

EJEMPLO 5 Forma paramétrica de una solución

Utilizando la reducción de matrices, resolver

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 + \;\; x_4 = \;\; 2, \\ 3x_1 \qquad\quad - 3x_3 + 6x_4 = \;\; 9. \end{cases}$$

Solución: reduciendo la matriz aumentada, tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

Principios en práctica 3

Forma paramétrica de una solución

Una veterinaria zootecnista puede comprar alimento para animales de cuatro diferentes tipos: A, B, C y D. Cada alimento viene en el mismo tamaño de bolsa, y el número de gramos de cada uno de tres nutrimentos en cada bolsa se resume en la tabla siguiente:

		Alimento			
		A	B	C	D
	N_1	5	5	10	5
Nutrimento	N_2	10	5	30	10
	N_3	5	15	10	25

Para un animal, la veterinaria determina que necesita combinar las bolsas para obtener 10,000 g de N1, 20,000 g de N2 y 20,000 g de N3. ¿Cuántas bolsas de cada tipo de alimento debe ordenar ella?

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -6 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{9}{2}R_2 + R_3]{-\frac{3}{2}R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2R_3 + R_2]{2R_3 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right].$$

Esta matriz es reducida y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{2}x_4 = 4, \\ \qquad x_2 = 0, \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1. \end{cases}$$

Por tanto,

$$x_1 = -\tfrac{5}{2}x_4 + 4, \tag{9}$$

$$x_2 = 0, \tag{10}$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}x_4 + 1, \tag{11}$$

$$x_4 = x_4. \tag{12}$$

Si x_4 es cualquier número real, r, entonces las ecuaciones (9), (10), (11) y (12) determinan una solución particular para el sistema original. Por ejemplo, si $r = 0$ (esto es, $x_4 = 0$), entonces una solución *particular* es

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1 \quad \text{y} \quad x_4 = 0.$$

Si $r = 2$, entonces

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \quad \text{y} \quad x_4 = 2.$$

Recuerde [véase el ejemplo 3 de la sec. 4.4] que la variable r, de la cual dependen x_1, x_3 y x_4 se denomina **parámetro.** Existe un número infinito de soluciones para el sistema—una correspondiente a cada valor del parámetro. Decimos que la solución *general* del sistema original está dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{5}{2}r + 4, \\ x_2 &= 0, \\ x_3 &= -\tfrac{1}{2}r + 1, \\ x_4 &= r, \end{aligned}$$

donde r es cualquier número real, y decimos que se tiene una *familia* de soluciones *con un parámetro*.

Los ejemplos 3 al 5 ilustran el hecho de que un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o un número infinito de soluciones.

Ejercicio 6.4

En cada uno de los problemas del 1 al 6 determine si la matriz es reducida o no.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En cada problema del 7 al 12 reduzca la matriz dada.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \\ 4 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Por el método de reducción, resuelva los sistemas de los problemas del 13 al 26.

13. $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - 3y = -11, \\ 4x + 3y = 9. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ 12x + 4y = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ -2x - 4y + 6z = 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0, \\ 3x + 2z - 5 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 2y + 5z - 1 = 0, \\ x + y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 3, \\ 5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6, \\ 2x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - y - 3z = -5, \\ 2x - y - 4z = -8, \\ x + y - z = -1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y - z = 7, \\ 2x - 3y - 2z = 4, \\ x - y - 5z = 23. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 4z = 8, \\ x - 2y - 2z = 14, \\ x + y - 2z = -1, \\ 3x + y + z = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + 3z = -1, \\ 3x + 2y + 11z = 1, \\ x + y + 4z = 1, \\ 2x - 3y + 3z = -8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Resuelva los problemas del 27 al 33 utilizando la reducción de matrices.

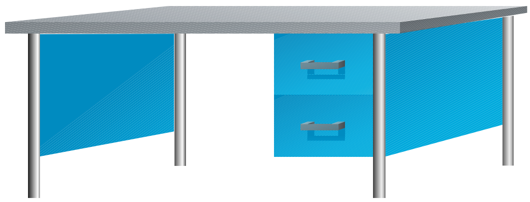
27. Impuestos Una compañía tiene ingresos gravables por \$312,000. El impuesto federal es 25% de la parte que queda después que el impuesto estatal ha sido pagado. El impuesto estatal es 10% de la parte que queda después que el impuesto federal ha sido pagado. Encuentre el monto de los impuestos federal y estatal.

28. Toma de decisiones Un fabricante elabora dos productos, A y B. Por cada unidad que vende de A la ganancia es de \$8 y por cada unidad que vende de B la ganancia es de \$11. De la experiencia se ha encontrado que puede venderse 25% más de A que de B. Para el año siguiente el fabricante desea una ganancia total de \$42,000. ¿Cuántas unidades de cada producto debe vender?

29. Planeación de producción Un fabricante produce tres artículos, A, B y C. La utilidad por cada unidad vendida de A, B y C es \$1, \$2 y \$3, respectivamente. Los costos fijos son de \$17,000 por año y los costos de producción por cada unidad son \$4, \$5 y \$7, respectivamente. El año siguiente se producirán y venderán un total de 11,000 unidades entre los tres productos y se obtendrá una utilidad total de \$25,000. Si el costo total será de \$80,000, ¿cuántas unidades de cada producto deberán producirse el año siguiente?

30. Asignación de producción Escritorios Nacionales tiene plantas para la producción de escritorios en la costa del Atlántico y en la costa del Pacífico. En la planta de la costa del Atlántico, los costos fijos son de \$16,000 por año y el costo de producción de cada escritorio es de

\$90. En la planta del Pacífico, los costos fijos son de \$20,000 por año y el costo de producción de cada escritorio es de \$80. El año siguiente la compañía quiere producir un total de 800 escritorios. Determine la producción de cada planta para el año próximo si el costo total de cada una debe ser el mismo.



31. Vitaminas A una persona el doctor le prescribió tomar 10 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina D y 19 unidades de vitamina E diariamente. La persona puede elegir entre tres marcas de píldoras vitamínicas. La marca X contiene 2 unidades de vitamina A, 3 de vitamina D y 5 de vitamina E; la marca Y tiene 1, 3 y 4 unidades, respectivamente; la marca Z tiene 1 unidad de vitamina A, ninguna de vitamina D y 1 unidad de vitamina E.

a. Encuentre todas las combinaciones posibles de píldoras que proporcionen de manera exacta las cantidades requeridas.
b. Si de la marca X cuesta 1 centavo cada píldora, de la marca Y 6 centavos y de la marca Z 3 centavos, ¿existe alguna combinación de la parte (a) que cueste exactamente 15 centavos por día?
c. ¿Cuál es la combinación menos cara de la parte (a)? ¿La más cara?

32. Producción Una compañía produce tres artículos, A, B y C, que requiere se procesen en tres máquinas I, II y III. El tiempo en horas requerido para el procesamiento de cada producto por las tres máquinas está dado en la siguiente tabla:

	I	II	III
A	3	1	2
B	1	2	1
C	2	4	1

La máquina I está disponible 850 horas, la II durante 1200 horas y la III durante 550 horas. Encuentre cuántas unidades de cada artículo deben producirse para utilizar todo el tiempo disponible de las máquinas.

33. Inversiones Una compañía de inversiones vende tres tipos de fondos de inversión, estándar (E), de lujo (D) y Gold Star (G).

Cada unidad de E tiene 12 acciones tipo A, 16 tipo B y 8 tipo C.

Cada unidad de D tiene 20 acciones tipo A, 12 tipo B y 28 de C.

Cada unidad de G tiene 32 acciones tipo A, 28 tipo B y 36 de C.

Suponga que un inversionista desea comprar exactamente 220 acciones tipo A, 176 tipo B y 264 tipo C, comprando unidades de los tres fondos.

a. Determine las combinaciones de unidades E, D y G que satisfagan los requerimientos del inversionista.
b. Suponga que cada unidad de E cuesta al inversionista \$300 (las de D y G, \$400 y \$600, respectivamente). ¿Cuáles de las combinaciones de la parte (a) minimizarán el costo total del inversionista?

34. La matriz $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ representa al segmento de recta que va de $(-3, 5)$ a $(2, -1)$. El segmento se rota θ grados en contra del sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen, por medio de la multiplicación

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen} & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 - 3\sqrt{3} & 3 + 5\sqrt{3} \\ -1 + 2\sqrt{3} & -2 - \sqrt{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.10 & 5.83 \\ 1.23 & -1.87 \end{bmatrix},$$

para obtener el segmento de $(-0.10, 5.83)$ a $(1.23, -1.87)$. Determine sen θ y cos θ.

OBJETIVO Centrar la atención en sistemas no homogéneos que incluyan más de un parámetro en su solución general, y resolver y considerar la teoría de sistemas homogéneos.

6.5 Método de reducción (continuación)[4]

Como vimos en la sección 6.4, un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o bien un número infinito de soluciones. Cuando existe un número infinito de soluciones, la solución general se expresa en términos de al menos un parámetro. Por ejemplo, la solución general en el ejemplo 5 se dio en términos del parámetro *r*:

[4] Esta sección puede omitirse.

$$x_1 = -\tfrac{5}{2}r + 4,$$
$$x_2 = 0,$$
$$x_3 = -\tfrac{1}{2}r + 1,$$
$$x_4 = r.$$

En ocasiones, es necesario más de un parámetro,[5] como lo muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Familia de soluciones con dos parámetros

Utilizando la reducción de matrices, resolver

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Solución: la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right],$$

cuya forma reducida es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

De aquí,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \end{cases}$$

a partir de lo cual

$$x_1 = 1 - x_3 - 3x_4,$$
$$x_2 = -2 - 2x_3 - x_4.$$

Ya que no hay restricción sobre x_3 ni sobre x_4, pueden ser cualesquiera números reales, para darnos una familia paramétrica de soluciones. Haciendo $x_3 = r$ y $x_4 = s$, podemos obtener la solución del sistema dado como

$$x_1 = 1 - r - 3s,$$
$$x_2 = -2 - 2r - s,$$
$$x_3 = r,$$
$$x_4 = s,$$

donde los parámetros r y s pueden ser cualquier número real. Asignando valores específicos a r y s, obtenemos soluciones particulares. Por ejemplo, si $r = 1$ y $s = 2$, entonces la solución particular correspondiente es $x_1 = -6, x_2 = -6, x_3 = 1$ y $x_4 = 2$.

[5]Véase el ejemplo 7 de la sección 4.4.

Es común clasificar a un sistema lineal de ecuaciones como *homogéneo* o como *no homogéneo*, dependiendo de si todos los términos constantes son o no iguales a cero.

Definición

El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

es llamado ***sistema homogéneo*** si $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. El sistema es un ***sistema no homogéneo*** si al menos una de las c no es igual a cero.

EJEMPLO 2 Sistemas no homogéneos y homogéneos

El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 3x - 4y = 0, \end{cases}$$

es no homogéneo a causa del 4 en la primera ecuación. El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 3x - 4y = 0, \end{cases}$$

es homogéneo.

Si el sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 3x - 4y = 0, \end{cases}$$

fuera resuelto por el método de reducción, primero la matriz aumentada sería escrita como:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Observe que la última columna sólo es de ceros. Esto es común en la matriz aumentada de cualquier sistema homogéneo. Esta matriz se reduciría utilizando las operaciones elementales sobre renglones:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Asimismo, la última columna de la matriz reducida sólo tiene ceros. Esto no ocurre por casualidad. Cuando cualquiera de las operaciones elementales sobre renglones se realiza sobre una matriz que tiene una columna que consiste sólo en ceros, la columna correspondiente de la matriz resultante también tiene solamente ceros. Cuando resolvamos un sistema homogéneo por reducción de matrices, por conveniencia acostumbraremos eliminar la última columna de la matriz involucrada. Esto es, reduciremos sólo la *matriz de coeficientes* del sistema. Para el sistema anterior tendríamos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aquí la matriz reducida, llamada *matriz de coeficientes reducida*, corresponde al sistema:

$$\begin{cases} x + 0y = 0, \\ 0x + y = 0. \end{cases}$$

de modo que la solución es $x = 0$ y $y = 0$.

Ahora consideraremos el número de soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Una solución siempre ocurre cuando $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, ya que cada ecuación se satisface para estos valores. Esta solución, llamada **solución trivial,** es una solución de *todo* sistema homogéneo.

Existe un teorema que nos permite determinar si un sistema homogéneo tiene una solución única (la solución trivial) o un número infinito de soluciones. El teorema está basado en el número de renglones diferentes de cero que aparecen en la matriz reducida del sistema. Un *renglón diferente de cero* es un renglón que no consiste sólo en ceros.

Teorema

Sea **A** la matriz *reducida* de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si **A** tiene exactamente k renglones diferentes de cero, entonces $k \leq n$. Además,

a. Si $k < n$, el sistema tiene un número infinito de soluciones

y

b. Si $k = n$, el sistema tiene una única solución (la solución trivial).

Si un sistema homogéneo consiste en m ecuaciones con n incógnitas, entonces la matriz de coeficientes del sistema tiene orden $m \times n$. Por tanto, si $m < n$ y k es el número de renglones diferentes de cero en la matriz reducida, entonces $k \leq m$, y así $k < n$. Por el teorema, el sistema debe tener un número infinito de soluciones. En consecuencia tenemos lo siguiente.

Corolario

Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas tiene un número infinito de soluciones.

Advertencia El teorema anterior y el corolario sólo se aplican a sistemas **homogéneos** de ecuaciones lineales, por ejemplo, considere el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3, \\ 2x + 2y - 4z = 4, \end{cases}$$

que consiste en dos ecuaciones lineales con tres incógnitas. No **podemos** concluir que este sistema tiene un número infinito de soluciones, ya que no es homogéneo. En realidad, debe verificar que este sistema no tiene solución.

EJEMPLO 3 Número de soluciones de un sistema homogéneo

Determinar si el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 2x + 2y - 4z = 0, \end{cases}$$

tiene solución única o un número infinito de soluciones.

Solución: hay dos ecuaciones en este sistema homogéneo y este número es menor que el número de incógnitas (tres). Por tanto, por el corolario anterior, el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Principios en práctica 1

Solución de sistemas homogéneos

Un plano en el espacio de tres dimensiones puede escribirse como $ax + by + cz = d$. Podemos determinar las posibles intersecciones de planos en esta forma, escribiéndolos como sistemas de ecuaciones lineales y utilizando la reducción para resolverlos. Si en cada ecuación $d = 0$ entonces tenemos un sistema homogéneo con solución única, o bien con un número infinito de soluciones. Determine si la intersección de los planos

$$5x + 3y + 4z = 0,$$
$$6x + 8y + 7z = 0,$$
$$3x + 1y + 2z = 0$$

tiene solución única o un número infinito de soluciones; después resuelva el sistema.

EJEMPLO 4 Solución de sistemas homogéneos

Determinar si los sistemas homogéneos siguientes tienen solución única o un número infinito de soluciones, después resolver los sistemas.

a. $$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x - y + 5z = 0, \\ x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

Solución: reduciendo la matriz de coeficientes, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El número de renglones diferentes de cero (2) en la matriz reducida, es menor que el número de incógnitas (3) en el sistema. Por el teorema anterior, existe un número infinito de soluciones.

Ya que la matriz reducida corresponde a

$$\begin{cases} x + 3z = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$$

la solución puede ser dada en forma paramétrica por

$$x = -3r,$$
$$y = -r,$$
$$z = r,$$

donde r es cualquier número real.

b. $$\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ x - 2y = 0, \\ 2x + y = 0, \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$$

Solución: reduciendo la matriz de coeficientes, tenemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El número de renglones diferentes de cero (2) en la matriz reducida es igual al número de incógnitas en el sistema. Por el teorema, el sistema debe tener solución única, a saber, la solución trivial $x = 0$, $y = 0$.

Ejercicio 6.5

En los problemas del 1 al 8 resuelva los sistemas por reducción de matrices.

1. $\begin{cases} w - x - y + 4z = 5, \\ 2w - 3x - 4y + 9z = 13, \\ 2w + x + 4y + 5z = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3w - x + 12y + 18z = -4, \\ w - 2x + 4y + 11z = -13, \\ w + x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3w - x - 3y - z = -2, \\ 2w - 2x - 6y - 6z = -4, \\ 2w - x - 3y - 2z = -2, \\ 3w + x + 3y + 7z = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} w + x + 5z = 1, \\ w + y + 2z = 1, \\ w - 3x + 4y - 7z = 1, \\ x - y + 3z = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} w + x + 3y - z = 2, \\ 2w + x + 5y - 2z = 0, \\ 2w - x + 3y - 2z = -8, \\ 3w + 2x + 8y - 3z = 2, \\ w + 2y - z = -2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} w + x + y + 2z = 4, \\ 2w + x + 2y + 2z = 7, \\ w + 2x + y + 4z = 5, \\ 3w - 2x + 3y - 4z = 7, \\ 4w - 3x + 4y - 6z = 9. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 11x_5 = -8, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 6. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 1, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 13x_4 + 16x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = -3. \end{cases}$

Para cada uno de los problemas del 9 al 14 determine si el sistema tiene un número infinito de soluciones o sólo la solución trivial. No resuelva los sistemas.

9. $\begin{cases} 0.07x + 0.3y + 0.02z = 0, \\ 0.053x - 0.4y + 0.08z = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3w + 5x - 4y + 2z = 0, \\ 7w - 2x + 9y + 3z = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ x + 5y = 0, \\ 4x - y = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + 3y + 12z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 0, \\ 4x + y + 14z = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - z = 0, \\ x - 2y - 5z = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + 5y - z = 0, \\ x + 4y - 2z = 0, \\ 3x - 2y + 6z = 0. \end{cases}$

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas.

15. $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - 4y = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ 8x - 20y = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 6y - 2z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x + 7y = 0, \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - 4y = 0, \\ 5x - 8y = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 5x - 2y - 9z = 0, \\ 3x + y - z = 0, \\ 3x - 2y - 7z = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y + 7z = 0, \\ x - y - z = 0, \\ 2x - 3y - 6z = 0, \\ 3x + y + 13z = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} w + x + y + 4z = 0, \\ w + x + 5z = 0, \\ 2w + x + 3y + 4z = 0, \\ w - 3x + 2y - 9z = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} w + x + 2y + 7z = 0, \\ w - 2x - y + z = 0, \\ w + 2x + 3y + 9z = 0, \\ 2w - 3x - y + 4z = 0. \end{cases}$

OBJETIVO Determinar la inversa de una matriz invertible y utilizar las inversas para resolver sistemas.

6.6 Inversas

Hemos visto que el método de reducción es muy útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero eso no significa que sea el único método que utiliza matrices. En esta sección, estudiaremos un método diferente que se aplica a ciertos sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

En la sección 6.3 mostramos cómo un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse en forma matricial como una sola ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

puede escribirse en la forma matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si podemos determinar los valores de las entradas de la matriz de incógnitas $\mathbf{X}$, tendremos una solución para el sistema. Así, nos gustaría encontrar un método para resolver la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ para $\mathbf{X}$. Una manera de hacerlo proviene de la inspección del procedimiento de solución de la ecuación algebraica $ax = b$. La última ecuación se resuelve simplemente al multiplicar ambos miembros por el inverso multiplicativo de a. [Recuerde que el inverso multiplicativo de un número, a, diferente de cero, está denotado por a^{-1} (que es $1/a$) y tiene la propiedad de que $a^{-1}a = 1$.] Por ejemplo, si $3x = 11$, entonces

$$3^{-1}(3x) = 3^{-1}(11), \quad \text{de modo que} \quad x = \frac{11}{3}.$$

Si podemos aplicar un procedimiento semejante a la ecuación *matricial*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{1}$$

entonces necesitamos un inverso multiplicativo de $\mathbf{A}$, esto es, una matriz $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$. Entonces basta con multiplicar ambos miembros de la ecuación (1) por $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C}(\mathbf{AX}) = \mathbf{CB},$$

$$(\mathbf{CA})\mathbf{X} = \mathbf{CB},$$

$$\mathbf{IX} = \mathbf{CB},$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{CB}. \tag{2}$$

Por tanto, la solución es $\mathbf{X} = \mathbf{CB}$. Por supuesto, este método está basado en la existencia de una matriz $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$. Cuando tal matriz existe, decimos que es una *matriz inversa* (o simplemente *inversa*) de $\mathbf{A}$.

Definición

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada y existe una matriz $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{C}$ se llama inversa de $\mathbf{A}$, y se dice que $\mathbf{A}$ es ***invertible*** (o no singular).

Principios en práctica 1

Inversa de una matriz

Los mensajes secretos pueden codificarse por medio de un código y una matriz de codificación. Supóngase que tenemos el código siguiente:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Sea $\mathbf{E}$ la matriz de codificación. Entonces podemos codificar un mensaje tomando cada dos letras del mensaje, convertirlas a sus correspondientes números, creando una matriz de 2×1 y luego multiplicar cada matriz por $\mathbf{E}$. El mensaje puede descifrarse con una matriz de decodificación, que es la inversa de la matriz de codificación, esto es, $\mathbf{E}^{-1}$. Determine si las matrices de codificación

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

son inversa una de la otra.

EJEMPLO 1 Inversa de una matriz

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Como

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I},$$

la matriz $\mathbf{C}$ es una inversa de $\mathbf{A}$.

Puede demostrarse que una matriz invertible tiene una y sólo una inversa; esto es, la inversa es única. Así, en el ejemplo 1, la matriz $\mathbf{C}$ es la *única* matriz tal que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$. Por esta razón podemos hablar de *la* inversa de una matriz invertible $\mathbf{A}$, que denotamos por el símbolo $\mathbf{A}^{-1}$. De acuerdo con esto, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Además, aunque la multiplicación matricial por lo general no es conmutativa, es un hecho que $\mathbf{A}^{-1}$ conmuta con $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Regresando a la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, de la ecuación (2) podemos establecer lo siguiente:

Si $\mathbf{A}$ es una matriz invertible, entonces la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tiene la solución única $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Principios en práctica 2

Uso de la inversa para resolver un sistema

Supóngase que la matriz de codificación $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ se utilizó para codificar un mensaje. Utilice el código del principio en práctica 1 y la inversa $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$ para decodificar el mensaje, que está dividido en las siguientes partes:

28, 46, 65, 90

61, 82

59, 88, 57, 86

60, 84, 21, 34, 76, 102

EJEMPLO 2 Uso de la inversa para resolver un sistema

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_1 + 7x_2 = 18. \end{cases}$$

Solución: en forma matricial tenemos $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo 1, mostramos que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo que,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

de modo que $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$.

Con el fin de aplicar el método del ejemplo 2 a un sistema, se deben cumplir dos condiciones:

1. El sistema debe tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
2. La matriz de coeficientes debe ser invertible.

Por lo que concierne a la condición 2, le advertimos que no todas las matrices cuadradas son invertibles. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De aquí que no exista matriz que posmultiplicada por **A** produzca la matriz identidad. Por tanto, **A** no es invertible.

Antes de estudiar un procedimiento para encontrar la inversa de una matriz invertible, introducimos el concepto de ***matrices elementales.*** Una matriz elemental de $n \times n$ es una matriz que se obtiene a partir de la matriz identidad **I** de $n \times n$ por medio de una operación elemental sobre renglón. Existen tres tipos básicos de matrices elementales:

Matrices elementales

1. La que se obtiene por medio de intercambio de dos renglones de **I.**
2. La que se obtiene por medio de la multiplicación de cualquier renglón de **I** por un escalar diferente de cero.
3. La que se obtiene por medio de la suma de un múltiplo constante de un renglón de **I** a cualquier otro renglón.

EJEMPLO 3 Matrices elementales

Las matrices

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y } \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

son matrices elementales. $\mathbf{E}_1$ se obtiene a partir de la matriz identidad de 3×3, intercambiando el segundo y el tercer renglones. $\mathbf{E}_2$ se obtiene a partir de la matriz identidad de 2×2 multiplicando el primer renglón por -4. $\mathbf{E}_3$ se obtiene a partir de la matriz identidad de 2×2, sumando 3 veces el primer renglón al segundo.

Suponga que **E** es una matriz elemental de $n \times n$, obtenida a partir de **I** por cierta operación elemental sobre renglón, y **A** es una matriz de $n \times n$. Entonces puede demostrarse que el producto **EA** es igual a la matriz obtenida a partir de **A** aplicando la misma operación elemental sobre renglón a **A.** Por ejemplo, sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_3$ son matrices elementales, $\mathbf{E}_1$ se obtiene intercambiando el primero y segundo renglones de **I.** Del mismo modo, el producto

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la matriz obtenida de **A** al intercambiar el primero y segundo renglones de **A.** La matriz $\mathbf{E}_2$ se obtiene multiplicando el segundo renglón de **I** por 2. De acuerdo con esto, el producto

$$\mathbf{E}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

es la matriz obtenida al multiplicar el segundo renglón de **A** por 2. La matriz $\mathbf{E}_3$ se obtiene sumando –2 veces el segundo renglón de **I** al primer renglón. El producto

$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es la matriz obtenida a partir de **A** por medio de la misma operación elemental sobre renglón.

Si queremos reducir la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

debemos seguir una secuencia de pasos como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que **A** se reduce a **I.** Ya que nuestro proceso de reducción incluye operaciones elementales sobre renglones, parece natural que las matrices elementales puedan utilizarse para reducir **A.** Si **A** es premultiplicada por la matriz elemental $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{E}_1\mathbf{A}$ es la matriz que se obtiene a partir de **A** sumando -2 veces el primer renglón al segundo renglón:

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La premultiplicación de $\mathbf{E}_1\mathbf{A}$ por la matriz elemental $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ da la matriz obtenida al multiplicar el segundo renglón de $\mathbf{E}_1\mathbf{A}$ por $\frac{1}{2}$:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Así hemos reducido **A** multiplicándola por un producto de matrices elementales.

Como $(\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)\mathbf{A} = \mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A}) = \mathbf{I}$, el producto $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ es $\mathbf{A}^{-1}$. Así que,

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = (\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)\mathbf{I} = \mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{I}).$$

En consecuencia, $\mathbf{A}^{-1}$ puede obtenerse aplicando las mismas operaciones elementales sobre renglones, empezando con **I,** que se utilizaron para reducir **A** a **I:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Nuestro resultado puede verificarse demostrando que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

En resumen, para encontrar $\mathbf{A}^{-1}$ aplicamos las operaciones elementales sobre renglones, empezamos con **I** y procedemos en el mismo orden en que se utilizaron estas operaciones para reducir **A** a **I.** Determinar $\mathbf{A}^{-1}$ por esta técnica puede hacerse de manera conveniente usando el formato siguiente. Primero escribimos la matriz

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Después aplicamos las operaciones elementales sobre renglones hasta que $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ sea equivalente a una matriz que tenga a **I** en sus primeras dos columnas. Las últimas dos columnas de esta matriz serán $\mathbf{A}^{-1}$. De esta manera

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}].$$

Observe que las primeras dos columnas de $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$ forman una matriz reducida.

Este procedimiento puede extenderse para encontrar la inversa de *cualquier* matriz invertible:

Una matriz es invertible si y sólo si es equivalente a la matriz identidad.

Método para encontrar la inversa de una matriz

Si **M** *es una matriz invertible de* $n \times n$*, formar la matriz de* $n \times (2n)$, $[\mathbf{M} \mid \mathbf{I}]$. *Después realizar operaciones elementales sobre renglones hasta que las primeras n columnas formen una matriz reducida igual a* **I.** *Las últimas n columnas serán* M^{-1}. *En forma simbólica,*

$$[\mathbf{M} \mid \mathbf{I}] \rightarrow \cdots \rightarrow [\mathbf{I} \mid \mathbf{M}^{-1}].$$

Si una matriz **M** *no se reduce a* **I,** *entonces* $\mathbf{M}^{-1}$ *no existe.*

Principios en práctica 3

Determinación de la inversa de una matriz

Podríamos ampliar el esquema de codificación utilizado en el principio en práctica 1 a una matriz de 3×3 codificando tres letras del mensaje a la vez. Determine las inversas de las siguientes matrices 3×3 de codificación:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 4 Determinación de la inversa de una matriz

Determinar $\mathbf{A}^{-1}$ *si* **A** *es invertible.*

a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

Solución: siguiendo el procedimiento anterior, tenemos

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-1R_1 + R_2]{-4R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{9}{2}R^3 + R_2]{2R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Las tres primeras columnas de la última matriz forman a **I.** Por lo que **A** es invertible y

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$

Solución: tenemos

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Las primeras dos columnas de la última matriz forman una matriz reducida diferente de **I.** Por tanto, **A** no es invertible.

Tecnología

La determinación de la inversa de una matriz invertible con una calculadora gráfica en verdad que puede ahorrarnos tiempo. La figura 6.5 muestra la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Además, en la calculadora TI–83 podemos desplegar nuestra respuesta con entradas que tengan números fraccionarios.

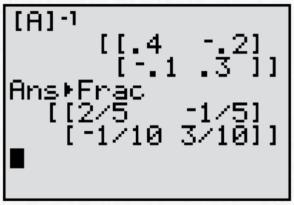


FIGURA 6.5 Inversa de **A** con entradas decimales y con entradas en forma de fracciones.

Ahora resolveremos un sistema utilizando la inversa.

EJEMPLO 5 Uso de la inversa para resolver un sistema

Resolver el sistema

Principios en práctica 4

Uso de la inversa para resolver un sistema

Un grupo de inversionistas tiene \$500,000 para invertir en las acciones de tres compañías. La compañía A vende a \$50 cada acción y tiene un rendimiento esperado de 13% al año. La compañía B vende en \$20 la acción y tiene un rendimiento esperado de 15% anual. La compañía C vende en \$80 una acción y tiene un rendimiento esperado de 10% anual. El grupo planea comprar el doble de acciones de la compañía A que de la compañía C. Si la meta del grupo es 12% de rendimiento anual, ¿cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas?

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}-2x_2} - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -1, \end{cases}$$

por determinación de la inversa de la matriz de coeficientes.

Solución: en la forma matricial el sistema es $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

es la matriz de coeficientes. Del ejemplo 4(a),

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La solución está dada por $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ -4 \end{bmatrix},$$

de modo que $x_1 = -7$, $x_2 = -17$, y $x_3 = -4$.

Puede demostrarse que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución única si y sólo si la matriz de coeficientes es invertible. En efecto, en el ejemplo anterior la matriz de coeficientes es invertible y existe una solución única para el sistema. Cuando la matriz de coeficientes no es invertible, el sistema tiene un número infinito de soluciones, o bien, ninguna solución.

EJEMPLO 6 Una matriz de coeficientes que no es invertible

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x - y + 5z = 0, \\ x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

Solución: la matriz de coeficientes es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

la matriz de coeficientes no es invertible. De aquí que el sistema *no puede* resolverse por medio de inversas. En este caso debe utilizarse otro método. En el ejemplo 4(a) de la sección 6.5, la solución que se determinó fue $x = -3r$, $y = -r$ y $z = r$.

Tecnología

Para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ x + 4y = -8, \end{cases}$$

con una calculadora gráfica, introducimos la matriz de coeficientes como [A] y la matriz columna de constantes como [B]. El producto $[\mathrm{A}]^{-1}[\mathrm{B}]$ en la figura 6.6 proporciona la solución $x = 4$, $y = -3$.

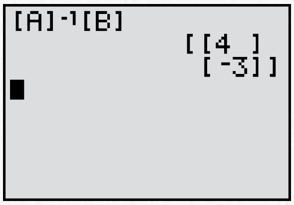


FIGURA 6.6 $[\mathrm{A}]^{-1}[\mathrm{B}]$ proporciona la solución $x = 4$, $y = -3$ para el sistema de ecuaciones.

Ejercicio 6.6

En los problemas del 1 al 18, si la matriz dada es invertible, encuentre su inversa.

1. $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

13. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14. $\begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

16. $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$.

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

19. Resuelva $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ si

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

20. Resuelva $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ si

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para cada uno de los problemas del 21 al 34, si la matriz de coeficientes del sistema es invertible, resuelva el sistema utilizando la inversa. Si no es así, resuelva el sistema por el método de reducción.

21. $\begin{cases} 6x + 5y = 2, \\ x + y = -3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ -x + 5y = -2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x - y = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x + 2y = 26, \\ 4x + 3y = 37. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 6y = 2, \\ 3x + 9y = 3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x + 8y = 3, \\ 3x + 12y = 6. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x + z = 2, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - y + z = -2, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - y + z = 1, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x + 8z = 8, \\ -x + 4y = 36, \\ 2x + y = 9. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + 3y + 3z = 7, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + 3y + 3z = 7, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

33. $\begin{cases} w + 2y + z = 4, \\ w - x + 2z = 12, \\ 2w + x + z = 12, \\ w + 2x + y + z = 12. \end{cases}$

34. $\begin{cases} w + x + z = 2, \\ w + y = 0, \\ x + y + z = 4, \\ y + z = 1. \end{cases}$

Para cada uno de los problemas 35 *y* 36, *encuentre* $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ *para la matriz* **A** *dada.*

35. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$

36. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$

37. Producción de automóviles Resuelva los problemas siguientes utilizando la inversa de la matriz implicada.

a. Una fábrica de automóviles produce dos modelos, A y B. El modelo A requiere 1 hora de mano de obra para pintarlo y $\frac{1}{2}$ hora de mano de obra para pulirlo, el modelo B requiere de 1 hora de mano de obra para cada uno de los dos procesos. Durante cada hora que la línea de ensamblado está funcionando, existen 100 horas de mano de obra disponibles para pintura y 80 horas de mano de obra disponibles para pulido. ¿Cuántos automóviles de cada modelo pueden terminarse cada hora si se utilizan todas las horas de mano de obra?

b. Suponga que cada modelo A requiere 10 partes de tipo 1 y 14 de tipo 2, mientras que cada modelo B requiere 7 partes tipo 1 y 10 de tipo 2. La fábrica puede obtener 800 partes tipo 1 y 1130 de tipo 2. ¿Cuántos automóviles de cada modelo se producen, si se utilizan todas las partes disponibles?

38. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, donde $a, b, c \neq 0$, demuestre que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}.$$

39. a. Si **A** y **B** son matrices invertibles con el mismo orden, demuestre que $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. [*Sugerencia:* demuestre que

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{I},$$

y utilice el hecho de que la inversa es única.]

b. Si

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

encuentre $(\mathbf{AB})^{-1}$.

40. Si **A** es invertible, puede demostrarse que $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$. Verifique esta relación si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

41. Una matriz **P** se dice que es *ortogonal* si $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{T}$. ¿La matriz $\mathbf{P} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ es ortogonal?

42. Mensaje secreto Un amigo le ha enviado un mensaje secreto que consiste en tres matrices renglón de números como sigue:

$$\mathbf{R}_1 = [33 \quad 87 \quad 70], \qquad \mathbf{R}_2 = [57 \quad 133 \quad 20],$$

$$\mathbf{R}_3 = [38 \quad 90 \quad 33].$$

Entre los dos han diseñado la siguiente matriz (utilizada por su amigo para codificar el mensaje):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Descifre el mensaje procediendo de la manera siguiente:

a. Calcule los tres productos matriciales $\mathbf{R}_1\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{R}_2\mathbf{A}^{-1}$, y $\mathbf{R}_3\mathbf{A}^{-1}$.

b. Suponga que las letras del alfabeto corresponden a los números del 1 al 26, reemplace los números en estas tres matrices por letras y determine el mensaje.

43. Inversión Un grupo de inversionistas decide invertir \$500,000 en las acciones de tres compañías. La compañía D vende en \$60 una acción y tiene un rendimiento esperado de 16% anual. La compañía E vende en \$80 cada acción y tiene un rendimiento esperado de 12% anual. La compañía F vende cada acción en \$30 y tiene un rendimiento esperado de 9% anual. El grupo planea comprar cuatro veces más acciones de la compañía F que de la compañía E. Si la meta del grupo es 13.68% de rendimiento anual, ¿cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas?

44. Inversión Los inversionistas del problema 43 deciden tratar una nueva estrategia de inversión con las mismas compañías. Ellos desean comprar el doble de acciones de la compañía F que de la compañía E, y tienen la meta de 14.52% de rendimiento anual. ¿Cuántas acciones de cada tipo deben comprar?

En los problemas 45 y 46 utilice una calculadora gráfica para (a) encontrar $\mathbf{A}^{-1}$; *exprese sus entradas en forma decimal redondeando a dos decimales. (b) Exprese las entradas de* $\mathbf{A}^{-1}$ *en forma de fracciones, si su calculadora tiene esa capacidad. [Precaución: para la parte (b), utilice la matriz* $\mathbf{A}^{-1}$ *de la calculadora para convertir las entradas a forma de fracciones: no utilice la matriz de valores redondeados de la parte (a).]*

45. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} \end{bmatrix}.$

46. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 8 & 9 \\ -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$

47. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & -0.3 \\ 0.2 & 0.1 & -0.1 \\ 0.3 & 0.2 & -0.4 \end{bmatrix}$, encuentre $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de orden 3. Redondee las entradas a dos decimales.

En los problemas 48 y 49 utilice una calculadora gráfica para resolver el sistema utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

48. $\begin{cases} 0.9x + 3y - 4.7z = 13, \\ 2x - 0.4y + 2z = 4.7, \\ x - 0.8y - 0.5z = 7.2. \end{cases}$

49. $\begin{cases} \frac{2}{5}w + 4x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{7}z = \frac{14}{13}, \\ \frac{5}{9}w - \frac{2}{3}x - 4y - z = \frac{7}{8}, \\ x - \frac{4}{9}y + \frac{5}{6}z = 9, \\ \frac{1}{2}w + 4y - \frac{1}{3}z = \frac{4}{7}. \end{cases}$

OBJETIVO Encontrar el determinante de una matriz cuadrada por medio del uso de menores y cofactores, y considerar algunas propiedades que simplifiquen la evaluación de un determinante.

El determinante de **A** también se denota como det **A**.

6.7 DETERMINANTES

Ahora introducimos una nueva función, la *función determinante*. Aquí las entradas serán matrices *cuadradas*, pero las salidas serán números reales. Si **A** es una matriz cuadrada, entonces la función determinante asocia con **A** exactamente un número real llamado *determinante* de **A.** Al denotar el determinante de **A** con $|\mathbf{A}|$ (esto es, utilizando líneas verticales), podemos pensar en la función determinante como una correspondencia:

$$\underset{\substack{\text{matriz} \\ \text{cuadrada}}}{\mathbf{A}} \quad \to \quad \underset{\substack{\text{número} \\ \text{real}}}{|\mathbf{A}|} = \substack{\text{determinante} \\ \text{de } \mathbf{A}}$$

El uso de los determinantes en la solución de sistemas lineales se estudiará posteriormente. Veamos cómo un número real es asignado a una matriz cuadrada; primero consideraremos los casos especiales de matrices de orden 1 y 2. Después extenderemos la definición a matrices de orden n.

Definición
Si $\mathbf{A} = [a_{11}]$ es una matriz cuadrada de orden 1, entonces $|\mathbf{A}| = a_{11}$.

Esto es, la función determinante asigna a la matriz cuadrada de una entrada $[a_{11}]$ el número a_{11}. De aquí que si $\mathbf{A} = [6]$ entonces $|\mathbf{A}| = 6$.

Definición
Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2, entonces

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esto es, el determinante de una matriz de 2×2, se obtiene tomando el producto de las entradas de la diagonal principal y restándole el producto de las entradas de la otra diagonal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Hablamos del determinante de 2×2, como un *determinante de orden* 2.

EJEMPLO 1 Evaluación de determinantes de orden 2

a. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (1)(3) = -8 - 3 = -11.$

b. $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) - (-2)(0) = -3 - 0 = -3.$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (0)(0) = 1.$

d. $\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix} = (x)(1) - (0)(y) = x.$

El determinante de una matriz cuadrada **A** de orden n ($n > 2$), está definido de la manera siguiente. Con una entrada dada de **A,** asociamos la matriz cuadrada de orden $n - 1$, obtenida al eliminar las entradas en el renglón y columna a los que la entrada pertenece. Por ejemplo, dada la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

para la entrada a_{21} eliminamos las entradas del renglón 2 y de la columna 1, sombreada en la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Esto deja la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

de orden 2. El *determinante* de esta matriz se conoce como el **menor** de a_{21}. En forma análoga, el menor de a_{22} es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

y para a_{23} es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Con cada entrada a_{ij} asociamos también un número determinado por los subíndices de la entrada:

$$(-1)^{i+j},$$

donde $i + j$ es la suma del número de renglón i y del número de columna j en los que se encuentra la entrada. Con la entrada a_{21} asociamos $(-1)^{2+1} = -1$, con a_{22} el número $(-1)^{2+2} = 1$ y con a_{23} asociamos $(-1)^{2+3} = -1$. El **cofactor**

c_{ij} de la entrada a_{ij} es el producto de $(-1)^{i+j}$ y el menor de a_{ij}. Por ejemplo, el cofactor de a_{21} es

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

La única diferencia entre un cofactor y un menor es el factor $(-1)^{i+j}$.

Determinante de una matriz cuadrada

Para encontrar el determinante de cualquier matriz cuadrada **A** de orden n ($n > 2$), seleccione *cualquier* renglón (o columna) de **A** y multiplique cada entrada en el renglón (columna) por su cofactor. La suma de estos productos será el determinante de **A,** llamado **determinante de orden *n*.**

Por ejemplo, encontraremos el determinante de

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicando la regla anterior al primer renglón (algunas veces indicado como "desarrollo con respecto al primer renglón"). Para la entrada a_{11} obtenemos

$$(2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1)(5) = 10.$$

Para a_{12}, obtenemos

$$(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(13) = 13,$$

y para a_{13}, obtenemos

$$(3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(1)(3) = 9.$$

De aquí,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 13 + 9 = 32.$$

De manera análoga, si hubiésemos desarrollado con respecto a la segunda columna, entonces

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 13 + 0 + 19 = 32,$$

como antes.

Puede demostrarse que el determinante de una matriz es único y no depende del renglón o columna seleccionados para su evaluación. En el problema anterior, la segunda expansión es preferible por el cero en la columna 2, el cual no contribuye a la suma, lo que simplifica, por tanto, el cálculo.

Principios en práctica 1

Evaluación de un determinante de orden 3 por medio de cofactores

Una botánica cultiva tres tipos diferentes de algas en el mismo medio ambiente de su laboratorio. Ella proporciona diariamente a las algas una mezcla que contiene tres diferentes nutrimentos (1, 2 y 3). Los requerimientos de cada nutrimento de los tres tipos de algas (A, B y C) pueden representarse por medio de la matriz siguiente:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 10 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Encuentre el determinante de esta matriz.

EJEMPLO 2 Evaluación de un determinante de orden 3 por medio de cofactores

Encontrar $|\mathbf{A}|$ *si*

a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$

Solución: al desarrollar a lo largo del primer renglón, tenemos

$$|\mathbf{A}| = 12(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 12(1)(-1) + (-1)(-1)(-1) + 3(1)(4) = -1.$$

b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$

Solución: al desarrollar por conveniencia con respecto a la primera columna, tenemos

$$|\mathbf{A}| = 0 + 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 2(-1)(4) = -8.$$

EJEMPLO 3 Evaluación de un determinante de orden 4

Evaluar $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ *desarrollando con respecto al primer renglón.*

Solución:

$$|\mathbf{A}| = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ahora hemos expresado $|\mathbf{A}|$ en términos de determinantes de orden 3. Al desarrollar cada uno de estos determinantes con respecto al primer renglón, tenemos

$$|\mathbf{A}| = 2(1)\left[1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right] + 1(-1)\left[1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 2[1(1)(-6) + 3(1)(-2)] + (-1)[(1)(-1)(-1)] = -25.$$

También podemos evaluar un determinante de orden 3 como sigue. Copie la primera y la segunda columnas del determinante a su derecha, para obtener

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right..$$

Ahora tome la suma de los tres productos de las entradas sobre las flechas que apuntan a la derecha y reste de ésta la suma de los tres productos de las entradas sobre las flechas que apuntan hacia la izquierda. El resultado es

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Verifique este método para los determinantes del ejemplo 2. Es importante destacar que no hay una forma semejante para la evaluación de determinantes de orden mayor que tres.

La evaluación de determinantes con frecuencia se simplifica utilizando varias propiedades, algunas de las cuales ahora listamos. En cada caso **A** denota una matriz cuadrada:

1. Si cada una de las entradas de un renglón (o columna) de A es 0, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.

Por tanto

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Si dos renglones (o columnas) de A son idénticos, $|\mathbf{A}| = 0$.

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ ya que la columna } 1 = \text{columna } 3.$$

3. Si A es triangular superior (o inferior), entonces $|\mathbf{A}|$ es igual al producto de las entradas de la diagonal principal.

De aquí que,

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2)(5)(-2)(1) = -20.$$

De esta propiedad concluimos que el determinante de una matriz identidad es 1.

4. Si B es la matriz que se obtiene sumando un múltiplo de un renglón (o columna) de A a otro renglón (columna), entonces $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$.

Por tanto, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

y **B** es la matriz obtenida a partir de **A,** sumando −2 veces el renglón 3 al renglón 1, entonces

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = |\mathbf{B}|.$$

Por la propiedad 1, $|\mathbf{B}| = 0$ y así $|\mathbf{A}| = 0$.

5. Si B es la matriz que se obtiene al intercambiar dos renglones (o columnas) de A, entonces $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$, o en forma equivalente, $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{B}|$.

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

al intercambiar los renglones 2 y 4, por la propiedad 3 tenemos

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2)(1)(2)(1) = -4.$$

6. Si B es la matriz que se obtiene multiplicando cada entrada de un renglón (o columna) de A por el mismo número k, entonces $|\mathbf{B}| = k|\mathbf{A}|$.

En esencia, con esta propiedad un número puede ser "factorizado" ("sacado") de un renglón o columna. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(3) & 2(5) & 2(7) \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix}.$$

Así,

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_1}{=} 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix},$$

donde la notación $\frac{1}{2}R_1$ indica que multiplicamos el renglón 1 por $\frac{1}{2}$ e insertamos un factor 2 al frente. Continuando, tenemos

$$2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_3}{=} 2(3)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2(3)(0) = 0,$$

ya que los renglones 1 y 3 son iguales.

7. Si k es una constante y A tiene orden n, entonces $|k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$. Esto es una consecuencia de la propiedad 6, ya que cada uno de los n renglones de $k\mathbf{A}$ tiene un factor común de k.

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

entonces $|\mathbf{A}| = -2$, de modo que $|4\mathbf{A}| = 4^2|\mathbf{A}| = 16(-2) = -32$.

8. El determinante del producto de dos matrices de orden n es el producto de sus determinantes. Esto es, $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$.

Por tanto, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(3) = -6.$$

El hecho de que las propiedades 1 a la 6 sean verdaderas para columnas, así como para renglones, es resultado de otra propiedad: *el determinante de una matriz cuadrada y el determinante de su transpuesta son iguales*, que en forma simbólica es

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|.$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{y} \quad \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Las propiedades 1 a la 6 son útiles en la evaluación de $|\mathbf{A}|$, ya que nos dan una manera de expresar $\mathbf{A}$ en forma triangular (decimos que "triangulamos"); entonces, por la propiedad 3, tomamos el producto de la diagonal principal.

EJEMPLO 4 Evaluación de un determinante por triangulación

Evaluar

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solución: tenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_2}{=} 3\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-2R_1 + R_2}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} \overset{-4R_1 + R_3}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= -3(1)(-7)(-11) = -231.$$

EJEMPLO 5 Evaluación de un determinante por triangulación

Evaluar

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Solución: tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \overset{-R_1 + R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-3R_1 + R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -19 \end{vmatrix} \overset{-2R_2 + R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & -3 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3R_2 + R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -34 \end{vmatrix} \overset{3R_3 + R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1)(-1)(-1) = 1.$$

Tecnología

La figura 6.7 muestra el resultado de evaluar $|\mathbf{A}|$ con una calculadora gráfica, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.8 & 1 & -0.3 \\ 0.4 & 2 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

La evaluación da $|\mathbf{A}| = 0.34$

FIGURA 6.7 Al evaluar det **A** se obtiene 0.34.

Ejercicio 6.7

En los problemas del 1 al 6 evalúe los determinantes.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -a & b \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} -2 & -a \\ -a & 9 \end{vmatrix}$.

En los problemas 7 y 8 evalúe las expresiones dadas.

7. $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}$.

8. $\dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}$.

9. Resuelva para k si $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 12$.

En los problemas del 10 al 13, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

determine cada expresión.

10. El menor de a_{31}.

11. El menor de a_{22}.

12. El cofactor de a_{23}.

13. El cofactor de a_{32}.

14. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es 50×50 y el menor de $a_{43,47}$ es igual a 20, ¿cuál es el valor del cofactor de $a_{43,47}$?

En los problemas del 15 al 18, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

escriba cada expresión.

15. El menor de a_{32}.

16. El menor de a_{24}.

17. El cofactor de a_{13}.

18. El cofactor de a_{43}.

En los problemas del 19 al 38 evalúe el determinante. Si es posible, utilice las propiedades de los determinantes.

19. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 4 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{8} & -2 \\ -\frac{1}{8} & \frac{9}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

31. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

33. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

34. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 13 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

35. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

36. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & -1 & -7 \\ 1 & 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}$.

37. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

38. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

En los problemas 39 y 40 resuelva para x.

39. $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 7 & 7-x \end{vmatrix} = 26.$

40. $\begin{vmatrix} 3 & x & 2x \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 60.$

---

41. Si **A** es de orden 4×4 y $|\mathbf{A}| = 12$, ¿cuál es el valor del determinante de la matriz obtenida al multiplicar cada entrada de **A** por 2?

42. Suponga que **A** es una matriz cuadrada de orden 5 y $|\mathbf{A}| = \frac{1}{2}$. Sea **B** la matriz obtenida al multiplicar el tercer renglón de **A** por 7 (los otros renglones permanecen sin cambio). Encuentre $|2\mathbf{B}|$.

43. Puede demostrarse que una matriz cuadrada **A** es invertible si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$.

a. Si **A** es invertible, demuestre que

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}.$$

b. Si $|\mathbf{A}| = 3$, encuentre $|\mathbf{A}^{-1}|$.

44. Si la matriz **A** tiene orden 4×4 y $|\mathbf{A}| = 2$, encuentre los valores de (a) $|3\mathbf{A}|$, (b) $|-\mathbf{A}|$ y (c) $|\mathbf{A}^{-1}|$. [*Sugerencia:* para la parte (c), consulte el problema 43.]

45. Determine el(los) valor(es) de la constante c, para el (los) cual(es) el sistema siguiente tiene un número infinito de soluciones:

$$\begin{cases} x = -2z - 3y, \\ cy + x = -4z, \\ 2y + cz = 0. \end{cases}$$

[*Sugerencia:* véanse los dos párrafos que preceden al ejemplo 6 de la sección 6.6 y el inicio del enunciado del problema 43 anterior].

En los problemas del 46 al 48 utilice una calculadora gráfica para evaluar el determinante.

46. $\begin{vmatrix} 40 & 85 & 7 \\ -23 & 46 & 18 \\ 15 & 10 & -9 \end{vmatrix}$.

47. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

48. $\begin{vmatrix} 0.3 & -9.1 & 7.4 & 4.7 \\ -6.2 & 3.4 & 9.6 & 3.2 \\ 5.2 & 0.2 & 8.0 & 1.6 \\ 5.1 & 7.2 & 9.6 & -0.4 \end{vmatrix}$.

---

49. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, encuentre $|2\mathbf{A} - \mathbf{B}^2|$.

OBJETIVO Emplear una fórmula, denominada regla de Cramer, para la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, y generalizar la regla a n ecuaciones lineales con n incógnitas.

6.8 Regla de Cramer

Los determinantes pueden aplicarse para resolver ciertos tipos de sistemas de ecuaciones lineales. De hecho, es a partir del análisis de tales sistemas que surgió el estudio de los determinantes. Primero consideraremos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Después los resultados se extenderán para incluir situaciones más generales.

Resolvamos

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Para encontrar una fórmula explícita para x, examinamos $x\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$:

$$\begin{aligned} x\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11}x & a_{12} \\ a_{21}x & a_{22} \end{vmatrix} && \text{(propiedad 6 de la sec. 6.7)} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y & a_{12} \\ a_{21}x + a_{22}y & a_{22} \end{vmatrix} && \text{(sumando } y \text{ veces la columna 2 a la columna 1)} \\ &= \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} && \text{[de la ecu. (1)].} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$x\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

así

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{2}$$

Para encontrar una fórmula para y, examinamos $y\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$:

$$\begin{aligned} y\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y \\ a_{21} & a_{22}y \end{vmatrix} && \text{(propiedad 6 de la sec. 6.7)} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21} & a_{21}x + a_{22}y \end{vmatrix} && \text{(sumando } x \text{ veces la columna 1 a la columna 2)} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} && \text{[de la ecu. (1)].} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$y\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix},$$

así

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{3}$$

Observe que en las ecuaciones (2) y (3), los denominadores son iguales, a saber, el determinante de la matriz de coeficientes del sistema dado. Para encontrar x, el numerador en la ecuación (2) es el determinante que se obtiene reemplazando la "columna de las x" (esto es la columna 1) de la matriz de coeficientes, por la columna de constantes $\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}$. De manera análoga, el numerador en la ecuación (3) es el determinante de la matriz que se obtiene a partir de la matriz de coeficientes cuando la "columna de las y" (esto es, la columna 2) es reemplazada por $\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$. A condición de que el determinante de la matriz de coeficientes sea diferente de cero, el sistema original tendrá solución única. Sin embargo, si este determinante es cero, el procedimiento no es aplicable y el sistema puede tener un número infinito de soluciones, o bien ninguna solución. En tales casos se deben utilizar los métodos que vimos anteriormente para resolver el sistema.

Emplearemos los resultados anteriores para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 5 = 0, \\ 3y + x = 6. \end{cases}$$

Primero, escribimos el sistema en la forma apropiada:

$$\begin{cases} 2x + y = -5, \\ x + 3y = 6. \end{cases}$$

El determinante Δ de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 1(1) = 5.$$

Ya que $\Delta \neq 0$, existe una única solución. Resolviendo para x, tenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-21}{5} = -\frac{21}{5}.$$

Resolviendo para y, obtenemos

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{17}{5}.$$

De este modo la solución es $x = -\frac{21}{5}$ y $y = \frac{17}{5}$.

El método que se acaba de describir puede extenderse a sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas; dicho método se conoce como la *regla de Cramer*.

Regla de Cramer

Sea un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n. \end{cases}$$

Si el determinante Δ de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es diferente de cero, entonces el sistema tiene una única solución. Además, la solución está dada por

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

donde Δ_k, el numerador de x_k, es el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la k-ésima columna de $\mathbf{A}$ por la columna de constantes.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de Cramer

Resolver el sistema siguiente utilizando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 4x + 3y + 2z = 2, \\ 2x - y - 3z = 0. \end{cases}$$

Solución: el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -8.$$

Ya que $\Delta \neq 0$, existe una solución única. Si resolvemos para x, reemplazamos la primera columna de la matriz de coeficientes por la columna de constantes y obtenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2},$$

De manera análoga,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1.$$

La solución es $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$ y $z = -1$.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de Cramer

Resolver el sistema siguiente para z utilizando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x + y + 5w = 6, \\ x + 2y + z = 4, \\ 2y + z + w = 6, \\ 3x - 4w = 2. \end{cases}$$

Solución: tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Aquí transformamos a la forma triangular superior y determinamos el producto de las entradas de la diagonal principal (sec. 6.7, ejs. 4 y 5). De manera similar, obtenemos,

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{5} \end{vmatrix} = -98.$$

La regla de Cramer nos permite resolver para hallar una incógnita sin tener que resolver para las otras.

De aquí, $z = \Delta_z/\Delta = -98/1 = -98$.

Ejercicio 6.8

En los problemas del 1 al 16 resuelva. Si es posible utilice la regla de Cramer.

1. $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 4x + y = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + y = 6, \\ 7x - 2y = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x = 4 - 3y, \\ y = 6x - 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0, \\ y - 1 = 3x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3(x + 2) = 5, \\ 6(x + y) = -8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} w - 2z = 4, \\ 3w - 4z = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}z = 1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}z = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 0.6x - 0.7y = 0.33, \\ 2.1x - 0.9y = 0.69. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x - y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 13, \\ x + y - z = -4, \\ x + 2y - 3z = -12. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0, \\ x + y - 3z = 4, \\ 3x + 2y - z = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3r - t = 7, \\ 4r - s + 3t = 9, \\ 3s + 2t = 15. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y + z = 3, \\ 2x + y + 2z = 6, \\ x + 8y + z = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ x - y + z = 4, \\ 5x + y + 3z = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -2, \\ x - 6y + 3z = -2, \\ 3x + 3y - 2z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x - z = 14, \\ y + z = 21, \\ x - y + z = -10. \end{cases}$

En los problemas 17 y 18 utilice la regla de Cramer para resolver las incógnitas indicadas.

17. $\begin{cases} x - y + 3z + w = -14, \\ x + 2y - 3w = 12, \\ 2x + 3y + 6z + w = 1, \\ x + y + z + w = 6. \end{cases}$; y, w.

18. $\begin{cases} x + y + 5z = 6, \\ x + 2y + w = 4, \\ 2y + z + w = 6, \\ 3x - 4z = 2. \end{cases}$; x, y.

19. Demuestre que la regla de Cramer *no* se aplica a

$$\begin{cases} 2 - y = x, \\ 3 + x = -y, \end{cases}$$

pero que, a partir de consideraciones geométricas, el sistema no tiene solución.

20. Determine todos los valores de c tales que la regla de Cramer no pueda utilizarse para resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + cy + 8z = -4, \\ cx - z = 1, \\ -53x - 6y + z = 2. \end{cases}$$

21. Eventos especiales Una estudiante determinó que tiene suficiente tiempo disponible para asistir a 24 eventos especiales durante el año escolar. Entre los eventos están conciertos, juegos de hockey y producciones teatrales. Ella siente que un balance ideal se alcanzaría si fuera el doble de veces a conciertos que a juegos de hockey, y si el número de conciertos a los que asistiera fuera igual al *promedio* del número de juegos de hockey y el número de obras de teatro. Utilice la regla de Cramer para determinar el número de juegos de hockey a los que asistirá para alcanzar este balance ideal.

22. Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema siguiente, para y:

$$\begin{cases} 3w + 2x - 7y + z = 11, \\ \quad\ - 5x - 6y + 3z = 8, \\ 4w \qquad\quad + 2y + 9z = 3, \\ 7w - 2x + 4y + 5z = 9. \end{cases}$$

Redondee su respuesta a dos decimales.

23. Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{4}{7}x - \frac{7}{3}y + \frac{2}{5}z = \frac{14}{9}, \\ -8x + \frac{5}{8}y - 6z = \frac{13}{9}, \\ 2x + \frac{3}{5}y + \frac{4}{3}z = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Redondee su respuesta a dos decimales.

OBJETIVO Utilizar los métodos de este capítulo para analizar la producción de sectores industriales de una economía.

6.9 ANÁLISIS DE INSUMO-PRODUCTO CON UNA CALCULADORA GRÁFICA

Las matrices de insumo-producto, desarrolladas por Wassily W. Leontief,[1] indican las interrelaciones que se dan entre la oferta y la demanda en los diferentes sectores de una economía durante algún periodo. La frase "insumo-producto" se utiliza porque las matrices muestran los valores de los productos de cada industria que son vendidos como insumo, tanto a las industrias como a los consumidores finales.

Un ejemplo hipotético para una economía muy simplificada que consta de dos industrias, está dado por la matriz de insumo-producto siguiente. Antes de que expliquemos la matriz, digamos que los sectores *industriales* puede suponerse que son los de manufactura, acero, agricultura, carbón, etc. Los *otros factores de producción* del sector consisten en los costos para las respectivas industrias, como mano de obra, utilidad, etc. El sector de *demanda final* podría ser de consumo doméstico, gubernamental, etc. La matriz es como sigue:

$$\begin{array}{rcc}
 & \textit{Consumidores (insumo)} & \\
 & \begin{array}{ccc} \textit{Industria A} & \textit{Industria B} & \textit{Demanda final} \end{array} & \\
\textit{Productores (producto):} & & \textit{Totales} \\
\begin{array}{r} \textit{Industria A} \\ \textit{Industria B} \\ \\ \textit{Otros factores de producción} \end{array} & \left[\begin{array}{cc:c} 240 & 500 & 460 \\ 360 & 200 & 940 \\ \hdashline 600 & 800 & — \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1200 \\ 1500 \\ \\ \\ \end{array} \\
\textit{Totales} & \begin{array}{ccc} 1200 & 1500 & \end{array} &
\end{array}$$

Cada industria aparece en un renglón y en una columna. El renglón muestra las compras del producto de una industria por parte de los sectores industriales y por los consumidores finales (de aquí el término "demanda final"). Las entradas representan los valores de los productos y podrían estar en unidades de millones de dólares del producto. Por ejemplo, de la producción total de la industria A, 240 fueron como insumo para la propia industria (para uso interno),

[6]Leontief ganó el premio Nobel de economía en 1973 por el desarrollo del método de "insumo-producto" y sus aplicaciones a problemas económicos.

500 fueron para la industria B y 460 fueron directamente al sector de la demanda final. La producción total de A es la suma de la demanda industrial y la demanda final ($240 + 500 + 460 = 1200$).

La columna de cada industria da el valor de lo que ésta compró como insumo de cada una de las industrias, así como lo gastado por otros conceptos. Por ejemplo, a fin de producir 1200 unidades, la industria A compró 240 unidades de su producto, 360 de la producción de B y tiene gastos de mano de obra y otros por 600 unidades.

Observe que para cada industria, la suma de las entradas en su renglón es igual a la suma de las entradas en su columna. Esto es, el valor de la producción total de A es igual al valor de los insumos totales de A.

El análisis de insumo-producto nos permite estimar la producción total de cada sector *industrial* si existe un cambio en la demanda final, *mientras la estructura básica de la economía permanece igual*. Esta importante suposición significa que para cada industria, la cantidad gastada en cada insumo por cada dólar de producto, debe permanecer fija.

Por ejemplo, al tener una producción con un valor de 1200 unidades, la industria A compra 240 unidades de la industria A, 360 de la industria B y gasta 600 unidades en otros conceptos. Así, por cada dólar de producción, la industria A gasta $\frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$ (= \$0.20) en A, $\frac{360}{1200} = \frac{3}{10}$ (= \$0.30) en B y $\frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$ (= \$0.50) en otros conceptos. Combinando estas razones fijas de la industria A con aquellas de la industria B, podemos dar los requerimientos por dólar de producción para cada industria:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ \\ \textit{Otros} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{240}{1200} & \frac{500}{1500} \\ \frac{360}{1200} & \frac{200}{1500} \\ \hdashline \frac{600}{1200} & \frac{800}{1500} \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \\ \hdashline \frac{1}{2} & \frac{8}{15} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ \\ \textit{Otros} \end{array}$$

Las entradas en la matriz se llaman **coeficientes de insumo-producto.** La suma de cada columna es 1.

Ahora, suponga que el valor de la demanda final cambia de 460 a 500 para la industria A, y de 940 a 1200 para la industria B. Nos gustaría estimar el valor de la producción *total* que A y B deben alcanzar para satisfacer esta meta, a condición de que la estructura en la matriz precedente permanezca igual.

Sean X_A y X_B los nuevos valores de producción total para las industrias A y B, respectivamente. Ahora, para A.

$$\begin{array}{c}\text{valor total}\\ \text{de la}\\ \text{producción } A\end{array} = \begin{array}{c}\text{Valor}\\ \text{consumido}\\ \text{por } A\end{array} + \begin{array}{c}\text{Valor}\\ \text{consumido}\\ \text{por } B\end{array} + \begin{array}{c}\text{Valor consumido}\\ \text{por la demanda}\\ \text{final,}\end{array}$$

así, tenemos

$$X_A = \tfrac{1}{5}X_A + \tfrac{1}{3}X_B + 500.$$

Del mismo modo, para B,

$$X_B = \tfrac{3}{10}X_A + \tfrac{2}{15}X_B + 1200.$$

Utilizando la notación matricial podemos escribir

$$\begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

En esta ecuación matricial, sean

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \end{bmatrix}.$$

Llamamos a **X** la **matriz de producción, A** es la **matriz de coeficientes** y **C** la **matriz de demanda final.** De la ecuación (1),

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{C},$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{AX} = \mathbf{C}.$$

Si **I** es la matriz identidad de 2×2, entonces

$$\mathbf{IX} - \mathbf{AX} = \mathbf{C},$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{C}.$$

Si $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ existe, entonces

$$\boxed{\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}.}$$

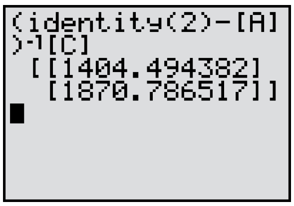


FIGURA 6.8 Evaluación de una matriz de producción.

La matriz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ se conoce como la **matriz de Leontief.** Vamos a introducir las matrices **A** y **C** en una calculadora gráfica. Con una TI-83, la matriz identidad de orden 2 se obtiene con el comando "identity 2". La evaluación de $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}$, como se muestra en la figura 6.8, da la matriz de producción

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1404.49 \\ 1870.79 \end{bmatrix}.$$

Aquí redondeamos las entradas de **X** a dos decimales. Así, para satisfacer la meta, la industria A debe producir 1404.49 unidades y la industria B debe producir 1870.79. Si estuviéramos interesados en el valor de los otros factores de producción para A, digamos, P_A, entonces

$$P_A = \tfrac{1}{2}X_A = 702.25.$$

EJEMPLO 1 Análisis de insumo-producto

Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

$$\begin{array}{r} \\ \\ \textit{Industria: } A \\ B \\ C \\ \\ \textit{Otros} \end{array}
\begin{array}{c} \textit{Industria} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \quad \textit{Demanda final} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 240 & 180 & 144 & 36 \\ 120 & 36 & 48 & 156 \\ 120 & 72 & 48 & 240 \\ \hdashline 120 & 72 & 240 & — \end{array}\right] \end{array},$$

suponga que la demanda final cambia a 77 para A, 154 para B y 231 para C. Determine la matriz de producción para esta economía (las entradas están en millones de dólares).

Solución: sumamos por separado las entradas en los primeros tres renglones. Los valores totales de producción para las industrias A, B y C son 600, 360 y 480, respectivamente. Para obtener la matriz de coeficientes **A,** dividimos las entradas de las industrias en cada columna entre el valor total de la producción para esa industria:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{240}{600} & \frac{180}{360} & \frac{144}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{36}{360} & \frac{48}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{72}{360} & \frac{48}{480} \end{bmatrix}.$$

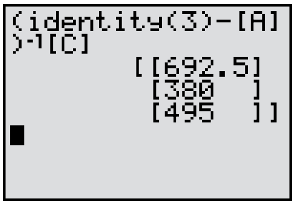


FIGURA 6.9 Evaluación de la matriz de producción del ejemplo 1.

La matriz de demanda final es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 77 \\ 154 \\ 231 \end{bmatrix}.$$

La figura 6.9 muestra el resultado de evaluar $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}$. Así, la matriz de producción es

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 692.5 \\ 380 \\ 495 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6.9

1. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria		
	Acero	*Carbón*	*Demanda final*
Industria: Acero	200	500	500
Carbón	400	200	900
Otros	600	800	—

encuentre la matriz de producción, si la demanda final cambia a 600 para acero y 805 para carbón. Encuentre el valor total de los otros costos de producción que esto implica.

2. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria		
	Educación	*Gobierno*	*Demanda final*
Industria: Educación	40	120	40
Gobierno	120	90	90
Otros	40	90	—

encuentre la matriz de producción si la demanda final cambia a (a) 200 para educación y 300 para gobierno; (b) 64 para educación y 64 para gobierno.

3. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria			
	Grano	*Fertilizante*	*Ganado vacuno*	*Demanda final*
Industria: Grano	18	30	45	15
Fertilizante	27	30	60	3
Ganado vacuno	54	40	60	26
Otros	9	20	15	—

encuentre la matriz de producción (con entradas redondeadas a dos decimales), si la demanda final cambia a (a) 50 para granos, 40 para fertilizante y 30 para ganado vacuno; (b) 10 para grano, 10 para fertilizante y 24 para ganado vacuno.

4. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria			
	Agua	*Electricidad*	*Agricultura*	*Demanda final*
Industria: Agua	100	400	240	260
Electricidad	100	80	480	140
Agricultura	300	160	240	500
Otros	500	160	240	—

encuentre la matriz de producción, si la demanda final cambia a 300 para agua, 200 para electricidad y 400 para agricultura. Redondee sus entradas a dos decimales.

5. Dada la matriz de insumo-producto

	Industria			
	Gobierno	*Agricultura*	*Manufactura*	*Demanda final*
Industria: Gobierno	400	200	200	200
Agricultura	200	400	100	300
Manufactura	200	100	300	400
Otros	200	300	400	—

con entradas en miles de millones de dólares, determine la matriz de producción para la economía, si la demanda final cambia a 300 para gobierno, 350 para agricultura y 450 para manufactura. Redondee las entradas al entero de miles de millones de dólares más cercano.

6. Dada la matriz de insumo-producto del problema 5, determine la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 150 para gobierno, 200 para agricultura y 300 para manufactura. Redondee las entradas al entero de miles de millones de dólares más cercano.

7. Dada la matriz de insumo-producto del problema 5, determine la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 250 para gobierno, 300 para agricultura y 350 para manufactura. Redondee las entradas al entero de miles de millones de dólares más cercano.

8. Dada la matriz de insumo-producto del problema 5, determine la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 400 para gobierno, 500 para agricultura y 300 para manufactura. Redondee las entradas al entero de miles de millones de dólares más cercano.

6.10 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 6.1 matriz orden (o tamaño) entrada a_{ij}, de $[a_{ij}]$ matriz (o vector) renglón matriz (o vector) columna igualdad de matrices transpuesta de una matriz, $\mathbf{A}^T$ matriz cero, $\mathbf{O}$ matriz cuadrada diagonal principal matriz diagonal matriz triangular superior (inferior)

Sección 6.2 multiplicación por un escalar suma y resta de matrices

Sección 6.3 multiplicación de matrices matriz identidad, $\mathbf{I}$ potencia de una matriz ecuación matricial, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

Sección 6.4 matriz de coeficientes matriz aumentada operación elemental sobre renglón matrices equivalentes matriz reducida entrada principal parámetro

Sección 6.5 sistema homogéneo sistema no homogéneo solución trivial

Sección 6.6 matriz inversa matriz invertible (no singular) matriz elemental

Sección 6.7 determinante de una matriz menor de una entrada cofactor de una entrada

Sección 6.8 regla de Cramer

Sección 6.9 matriz de insumo-producto matriz de Leontief

Resumen

Una matriz es un arreglo rectangular de números encerrados entre corchetes. Hay tres tipos especiales de matrices: matriz cero $\mathbf{O}$, matriz cuadrada y matriz identidad $\mathbf{I}$. Además de la operación básica de multiplicación por un escalar, están definidas las operaciones de suma y resta de matrices, que se aplican a matrices del mismo orden. El producto $\mathbf{AB}$ está definido cuando el número de columnas de $\mathbf{A}$ es igual al número de renglones de $\mathbf{B}$. Aunque la suma de matrices es conmutativa, la multiplicación no lo es. Utilizando la multiplicación matricial podemos expresar un sistema de ecuaciones lineales como la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o bien un número infinito de soluciones. Tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales por medio de matrices son: (1) utilizar las tres operaciones elementales sobre renglones, (2) usar una matriz inversa, y (3) por medio de determinantes. El primer método implica aplicar las operaciones elementales sobre renglones a la matriz aumentada del sistema, hasta que se obtiene una matriz reducida equivalente. La matriz reducida hace que la solución o soluciones para el sistema sean obvias (suponiendo que existan). Si tiene un número infinito de soluciones, la solución general implica al menos un parámetro.

El segundo método de resolución de un sistema de ecuaciones lineales involucra inversas. La inversa (si existe) de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es una matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Si $\mathbf{A}$ es invertible, podemos encontrar $\mathbf{A}^{-1}$ aumentando $\mathbf{A}$ con $\mathbf{I}$, y aplicando operaciones elementales sobre renglones hasta que $\mathbf{A}$ sea reducida a $\mathbf{I}$. El resultado de aplicar las mismas operaciones elementales sobre renglones a $\mathbf{I}$ es $\mathbf{A}^{-1}$. La inversa de una matriz puede utilizarse para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas dado por $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, a condición de que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ sea invertible. La solución única está dada por $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Si $\mathbf{A}$ no es invertible, el sistema no tiene solución, o bien tiene un número infinito de soluciones.

El tercer método para resolver un sistema de ecuaciones lineales emplea determinantes, y se conoce como la regla de Cramer. Se aplica a sistemas de n ecuaciones con n incógnitas cuando el determinante de la matriz de coeficientes no es cero.

Nuestra aplicación final de matrices trata las relaciones que existen entre los diferentes sectores de una economía, lo que se conoce como análisis de insumo-producto.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 8 simplifique.

1. $2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. $8\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -9 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

6. $-\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}\right)$.

7. $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

8. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^2$.

En los problemas del 9 al 12 calcule la matriz requerida si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. $(2\mathbf{A})^{\mathrm{T}} - 3\mathbf{I}^2$.

10. $\mathbf{A}(2\mathbf{I}) - \mathbf{A}\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$.

11. $\mathbf{B}^4 + \mathbf{I}^4$.

12. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

En los problemas 13 y 14 resuelva para x y para y.

13. $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}[x] = \begin{bmatrix} 15 \\ y \end{bmatrix}$.

14. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix}$.

En los problemas del 15 al 18 reduzca las matrices dadas.

15. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

16. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

17. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$.

18. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En los problemas del 19 al 22 resuelva cada uno de los sistemas por el método de reducción.

19. $\begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ 4x + 3y = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ 3x + y + z = 5. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 3x - 2y - 4z = -7, \\ 2x - y - 2z = 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x + z + 3 = 0. \end{cases}$

En los problemas del 23 al 26 encuentre las inversas de las matrices.

23. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$.

24. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

25. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

En los problemas 27 y 28 resuelva el sistema dado utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

27. $\begin{cases} 3x + y + 4z = 1, \\ x + z = 0, \\ 2y + z = 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3x + z = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

En los problemas del 29 al 34 evalúe los determinantes.

29. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

31. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

33. $\begin{vmatrix} r & p & q & a \\ 0 & i & j & m \\ 0 & 0 & c & n \\ 0 & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$.

34. $\begin{vmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ a & r & 0 & 0 \\ p & j & n & 0 \\ s & k & t & i \end{vmatrix}$.

Resuelva los sistemas de los problemas 35 y 36 utilizando la regla de Cramer.

35. $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ y + 4z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$

---

37. Dado que $|\mathbf{A}| = -2$, $|\mathbf{B}| = 4$ y $|\mathbf{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$, encuentre $|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{T}|$.

38. Construya la matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3\times 3}$ si $a_{ij} = |i - j|$.

39. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Encuentre las matrices $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^{-1}$, y $\mathbf{A}^{2000}$.

40. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, demuestre que $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$.

41. Suponga que a, b y c son constantes diferentes de cero. Utilice la regla de Cramer para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + cz = a, \\ bx + by = b, \\ ax + ay + cz = c. \end{cases}$$

42. Demuestre que la regla de Cramer puede utilizarse para resolver el siguiente sistema, y después use esto para encontrar el valor de x que satisface el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 2w + 1 = z, \\ 2w + z = 2x + 4y + 1, \\ x + 2y + 3z + 3w - 3 = 0, \\ 2x + 7y + 6z + 2w = 6. \end{cases}$$

43. Un consumidor desea completar su consumo vitamínico en *exactamente* 13 unidades de vitamina A, 22 de vitamina B y 31 de vitamina C por semana. Hay disponibles tres marcas de cápsulas vitamínicas. La marca I contiene 1 unidad de cada una de las vitaminas A, B y C por cápsula; la marca II contiene 1 unidad de vitamina A, 2 de B y 3 de C, y la marca III contiene 4 unidades de A, 7 de B y 10 de C.

a. ¿Cuál combinación de cápsulas de las marcas I, II y III producirá *exactamente* las cantidades deseadas?
b. Si las cápsulas de la marca I, cuestan 5 centavos cada una, de la marca II, 7 centavos cada una y de la marca III, 20 centavos cada una, ¿cuál combinación minimizará su costo semanal?

44. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz invertible de $n \times n$.

a. Demuestre que $\mathbf{A}^3$ es invertible.
b. Si $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son matrices de $n \times n$ tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, demuestre que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
c. Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ (decimos que $\mathbf{A}$ es *idempotente*), encuentre $\mathbf{A}$.

45. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$ encuentre $3\mathbf{AB} - 4\mathbf{B}^2$.

46. Utilizando la inversa de la matriz de coeficientes, resuelva el sistema

$$\begin{cases} 9.7x - 3.4y + 7.2z = 19.1, \\ 4.3x + 8.5y - 6.7z = 20.8, \\ 5.4x - 2.6y - 4.7z = 30.9, \end{cases}$$

Redondee su respuesta a dos decimales.

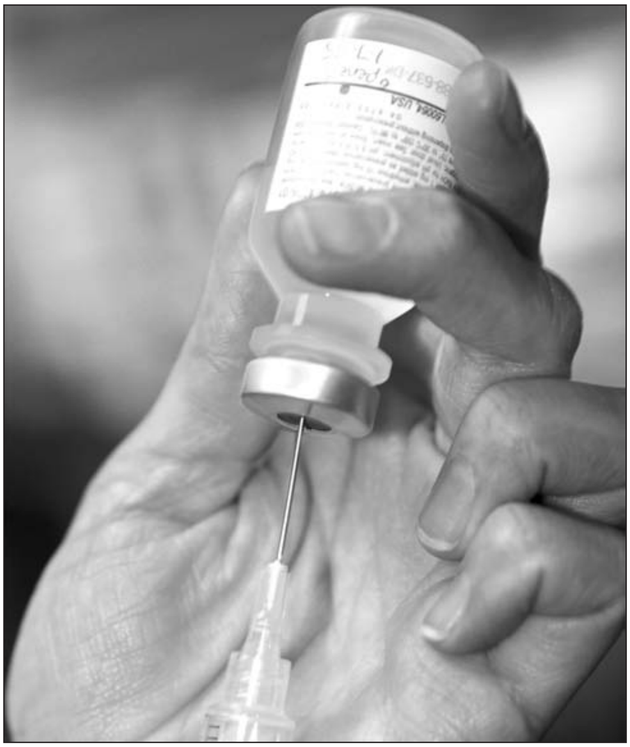
47. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

$$\begin{array}{r} \\ \\ \textit{Industria: } A \\ B \\ \textit{Otros} \end{array}
\begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{\textit{Industria}} \\ A \quad\;\; B \\ \left[\begin{array}{cc:c} 10 & 20 & 4 \\ 15 & 14 & 10 \\ \hdashline 9 & 5 & - \end{array}\right. \end{array}
\begin{array}{c} \textit{Demanda} \\ \textit{final} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] \end{array},$$

encuentre la matriz de producción, si la demanda final cambia a 8 para A y 8 para B (los datos están en miles de millones de dólares).

Aplicación práctica

Requerimientos de insulina como un proceso lineal[7]



Una posada vacacional en las montañas del estado de Washington tiene una bien merecida reputación por la atención que brinda a las necesidades especiales de salud de sus huéspedes. La semana siguiente el administrador de la posada espera recibir cuatro huéspedes diabéticos dependientes de insulina.

Estos huéspedes planean permanecer en la posada durante 7, 14, 21 y 28 días, respectivamente.

La posada se encuentra muy alejada de la farmacia más cercana, de modo que antes de que lleguen los huéspedes, el administrador planea obtener la cantidad total de insulina que se necesitará. Se requieren tres tipos diferentes de insulina: lenta, semilenta y ultralenta. El administrador almacenará la insulina y después el personal de la posada administrará la dosis diaria de los tres tipos a cada uno de los huéspedes.

Los requerimientos diarios de los tres huéspedes son:

Huésped 1 20 unidades de insulina semilenta, 30 de lenta y 10 de ultralenta.
Huésped 2 40 unidades de insulina semilenta, 0 de lenta y 0 de ultralenta.
Huésped 3 30 unidades de insulina semilenta, 10 de lenta y 30 de ultralenta.
Huésped 4 10 unidades de insulina semilenta, 10 de lenta y 50 de ultralenta.

Esta información se representa en la siguiente matriz de "requerimientos" **A:**

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3\times 4}, \qquad \text{donde } \mathbf{A} \text{ está dada por}$$

$$\begin{array}{l} \\ \text{Insulina semilenta} \\ \text{Insulina lenta} \\ \text{Insulina ultralenta} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Huésped 1} & \text{Huésped 2} & \text{Huésped 3} & \text{Huésped 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Recuerde que el huésped 1 permanecerá 7 días, el 2 estará 14 días, el 3 durante 21 días y el huésped 4 durante 28 días. Puede hacer que el vector columna **T** represente el tiempo, en días, que cada huésped permanecerá en la posada:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Para determinar las cantidades totales de los tres tipos de insulina necesarios para los cuatro huéspedes, calcule el producto matricial **AT.**

$$\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$= 10(7) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= 70 \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

El vector **B** (o **AT**) indica que un total de 1610 unidades de insulina semilenta, 700 unidades de insulina lenta y 2100 unidades de insulina ultralenta serán requeridas en total por los cuatro huéspedes.

Ahora, cambiemos un poco el problema. Suponga que cada huésped decidió duplicar su tiempo de estan-

[7]Adaptado de Richard F. Baum, "Insulin Requirements as a Linear Process", en R.M. Thrall, J.A. Mortimer, K.R. Rebman y R.F. Baum, (editores), *Some Mathematical Models in Biology*, ed. rev. Reporte 40241-R-7. Preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

cia original. El vector que da la cantidad total de insulina necesaria de los tres tipos es

$$\mathbf{A}(2\mathbf{T}) = 2(\mathbf{AT}) = 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3220 \\ 1400 \\ 4200 \end{bmatrix}.$$

En efecto, si cada huésped planeó extender por un factor k ($k \geq 0$) su tiempo original en la posada (esto es, el huésped 1 planeó permanecer durante $k \cdot 7$ días, el huésped 2 por $k \cdot 14$ días, y así sucesivamente), entonces los requerimientos de insulina serán

$$\mathbf{A}(k\mathbf{T}) = k(\mathbf{AT}) = k\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k \cdot 1610 \\ k \cdot 700 \\ k \cdot 2100 \end{bmatrix}.$$

Del mismo modo, si los huéspedes decidieran agregar 1, 3, 4 y 6 días, respectivamente, a los tiempos que originalmente proyectaron permanecer, entonces las cantidades de insulina requeridas serán

$$\mathbf{A}(\mathbf{T} + \mathbf{T}_1) = \mathbf{AT} + \mathbf{AT}_1, \qquad \text{donde } \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Con base en los resultados hasta aquí obtenidos, es obvio que la siguiente ecuación matricial generaliza la situación.

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

o

$$\begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

que representa al sistema lineal

$$\begin{cases} 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 10x_4 = b_1, \\ 30x_1 \qquad\quad\;\, + 10x_3 + 10x_4 = b_2, \\ 10x_1 \qquad\quad\;\, + 30x_3 + 50x_4 = b_3, \end{cases}$$

donde x_1 es el número de días que el huésped i permanece en la posada, y b_1, b_2 y b_3 dan, respectivamente, el número total de unidades de insulina semilenta, lenta y ultralenta necesarias para los cuatro huéspedes durante su estancia completa en la posada.

Por último, suponga una vez más que el vector $\mathbf{T}$ representa el número de días que cada huésped planeó permanecer originalmente en la posada. Además, suponga que el vector $\mathbf{C}$ proporciona el costo (en centavos) por unidad de insulina de los tres tipos, donde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \text{matriz de costo.}$$

Esto es, una unidad de insulina semilenta cuesta 9 centavos, una unidad de lenta cuesta 8 centavos y una unidad de ultralenta cuesta 10 centavos. Entonces la cantidad total pagada por la posada por toda la insulina para los cuatro huéspedes es

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{AT}) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = [9 \quad 8 \quad 10] \begin{bmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{bmatrix} = [41{,}090],$$

esto es, 41,090 centavos o \$410.90.

Ejercicios

1. Suponga que el huésped 1 permanecerá en la posada por 7 días, el huésped 2 durante 10 días, el huésped 3 por 7 días y el huésped 4 por 5 días. Suponga que los requerimientos diarios de los cuatro y la matriz de costo son los mismos que los dados en el estudio anterior. Encuentre la cantidad total que la posada debe pagar por toda la insulina necesaria para los huéspedes.
2. Suponga que los requerimientos de insulina de los cuatro huéspedes ascienden a 1180 unidades de insulina semilenta, 580 de lenta y 1500 de ultralenta. Suponga que los requerimientos diarios para los cuatro huéspedes son los mismos que en el análisis. Utilizando el método de la matriz inversa en una calculadora gráfica, determine la duración de la estancia de cada huésped, si el número total de días para los cuatro huéspedes es de 52.
3. Suponga que los requerimientos diarios de los cuatro huéspedes y la matriz de costo son los mismos que los dados en el análisis. Dada solamente la cantidad total (en dólares), ¿es posible que la posada deba pagar por toda la insulina requerida, para determinar la duración de estancia de cada huésped? ¿Por qué sí o por qué no?

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS CON NÚMERO IMPAR

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.1

1. 3×2 o 2×3. **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 6.1 (página 229)

1. a. $2 \times 3, 3 \times 3, 3 \times 2, 2 \times 2, 4 \times 4, 1 \times 2, 3 \times 1, 3 \times 3, 1 \times 1$; **b. B, D, E, H, J; c. H, J** triangulares superiores; **D, J** triangulares inferiores; **d. F, J; e. G, J.**
3. 2. **5.** 4. **7.** 0. **9.** 7, 2, 1, 0.
11. $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 & 12 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \end{bmatrix}$. **13.** 120 entradas, 1, 0, 1, 0.
15. a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
17. $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. **19.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -3 & 3 & 13 \end{bmatrix}$. **13.** $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. **15.** **O.**

17. $\begin{bmatrix} 28 & 22 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. **19.** No definida. **21.** $\begin{bmatrix} -22 & -15 \\ -11 & 9 \end{bmatrix}$.

23. $\begin{bmatrix} 21 & \frac{29}{2} \\ \frac{19}{2} & -\frac{15}{2} \end{bmatrix}$. **29.** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 20 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. **31.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$.

33. Imposible. **35.** $x = \dfrac{146}{13}, y = -\dfrac{28}{13}$.

37. $x = 6,\ y = \dfrac{4}{3}$. **39.** $x = -6,\ y = -14,\ z = 1$.

41. $\begin{bmatrix} 35 & 65 \\ 75 & 55 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$. **43.** 1.1. **45.** $\begin{bmatrix} 15 & -4 & 26 \\ 4 & 7 & 30 \end{bmatrix}$.

47. $\begin{bmatrix} -10 & 22 & 12 \\ 24 & 36 & -44 \end{bmatrix}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.3

1. \$5780. **2.** \$22,843.75. **3.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 6.3 (página 249)

1. −12. **3.** 19. **5.** 7. **7.** 2 × 2; 4.
9. 3 × 5; 15. **11.** 2 × 1; 2. **13.** 3 × 3; 9.

15. 3×1; 3. **17.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **19.** $\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$.

21. $\begin{bmatrix} 23 \\ 50 \end{bmatrix}$. **23.** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. **25.** $\begin{bmatrix} -6 & 16 & 10 & -6 \end{bmatrix}$.

27. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 & 6 \\ 6 & 9 & -6 & 9 \\ -8 & -12 & 8 & -12 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. **29.** $\begin{bmatrix} 78 & 84 \\ -21 & -12 \end{bmatrix}$.

31. $\begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$. **33.** $\begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix}$. **35.** $\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}$.

37. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. **39.** $\begin{bmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 23 \end{bmatrix}$. **41.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

43. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 17 \\ 1 & 31 \end{bmatrix}$. **45.** Imposible. **47.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

49. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. **51.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

53. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **55.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **57.** $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$.

59. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

61. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$. **63.** \$2075. **65.** \$1,133,850.

67. **a.** \$180,000, \$520,000, \$400,000, \$270,000, \$380,000, \$640,000; **b.** \$390,000, \$100,000, \$800,000; **c.** \$2,390,000; **d.** $\frac{110}{239}, \frac{129}{239}$. **71.** $\begin{bmatrix} 72.82 & -9.8 \\ 51.32 & -36.32 \end{bmatrix}$.

73. $\begin{bmatrix} 15.606 & 64.08 \\ -739.428 & 373.056 \end{bmatrix}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.4

1. 5 bloques de A, 2 bloques de B y 1 bloque de C.
2. 3 de X; 4 de Y; 2 de Z. **3.** A = 3D; B = 1000 − 2D; C = 500 − D; D = cualquier cantidad (≤ 500).

EJERCICIO 6.4 (página 261)

1. No reducida. **3.** Reducida. **5.** No reducida.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. $x = 2$, $y = 1$. **15.** No hay solución.

17. $x = -\frac{2}{3}r + \frac{5}{3}$, $y = -\frac{1}{6}r + \frac{7}{6}$, $z = r$, en donde r es cualquier número real. **19.** No hay solución.

21. $x = -3$, $y = 2$, $z = 0$. **23.** $x = 2$, $y = -5$, $z = -1$.

25. $x_1 = 0$, $x_2 = -r$, $x_3 = -r$, $x_4 = -r$, $x_5 = r$, donde r es cualquier número real. **27.** Federal, \$72,000; estatal, \$24,000.

29. A, 2000; B, 4000; C, 5000. **31. a.** 3 de X, 4 de Z; 2 de X, 1 de Y, 5 de Z; 1 de X; 2 de Y, 6 de Z; 3 de Y, 7 de Z; **b.** 3 de X, 4 de Z; **c.** 3 de X, 4 de Z; 3 de Y, 7 de Z.

33. a. Sean s, d, g el número de unidades de S, D y G, respectivamente. Las seis combinaciones están dadas por:

s	5	4	3	2	1	0
d	8	7	6	5	4	3
g	0	1	2	3	4	5

b. La combinación $s = 0$, $d = 3$, $g = 5$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.5

1. Un número infinito de soluciones:

$x + \frac{1}{2}z = 0$, $y + \frac{1}{2}z = 0$; en forma paramétrica:

$x = -\frac{1}{2}r$, $y = -\frac{1}{2}r$, $z = r$, donde r es cualquier número real.

EJERCICIO 6.5 (página 267)

1. $w = -r - 3s + 2$, $x = -2r + s - 3$, $y = r$, $z = s$ (donde r y s son cualesquiera números reales).
3. $w = -s$, $x = -3r - 4s + 2$, $y = r$, $z = s$ (donde r y s son cualesquiera números reales).
5. $w = -2r + s - 2$, $x = -r + 4$, $y = r$, $z = s$ (donde r y s son cualesquiera números reales).
7. $x_1 = -2r + s - 2t + 1$, $x_2 = -r - 2s + t + 4$, $x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$ (donde r, s y t son cualesquiera números reales).
9. Un número infinito de soluciones. **11.** Solución trivial.
13. Un número infinito de soluciones. **15.** $x = 0$, $y = 0$.
17. $x = -\frac{6}{5}r$, $y = \frac{8}{15}r$, $z = r$. **19.** $x = 0$, $y = 0$.
21. $x = r$, $y = -2r$, $z = r$.
23. $w = -2r$, $x = -3r$, $y = r$, $z = r$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.6

1. Sí. **2.** TE VERÉ EL VIERNES.
3. $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$; **F** no es invertible.
4. A: 5000 acciones; B: 2500 acciones; C: 2500 acciones.

EJERCICIO 6.6 (página 275)

1. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$. **3.** No es invertible. **5.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

7. No es invertible.

9. No es invertible (no es una matriz cuadrada).

11. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **13.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

19. $x_1 = 10, x_2 = 20$. **21.** $x = 17, y = -20$.

23. $x = 1, y = 3$. **25.** $x = -3r + 1, y = r$.

27. $x = 0, y = 1, z = 2$. **29.** $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$.

31. No hay solución. **33.** $w = 1, x = 3, y = -2, z = 7$.

35. $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. **37. a.** 40 del modelo A, 60 del modelo B;

41. Sí. **43.** D: 5000 acciones; E: 1000 acciones; F: 4000 acciones.

45. a. $\begin{bmatrix} 1.46 & 0.56 \\ 0.51 & 1.35 \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{bmatrix}$.

47. $\begin{bmatrix} 1.80 & 1.10 & -0.46 \\ 0.35 & 1.31 & -0.17 \\ 0.44 & 0.42 & 0.59 \end{bmatrix}$.

49. $w = 14.44$, $x = 0.03$, $y = -0.80$, $z = 10.33$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.7

1. 6.

EJERCICIO 6.7 (página 285)

1. 1. **3.** −16. **5.** y. **7.** $-\frac{2}{7}$. **9.** 12.

11. −12. **13.** 6. **15.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$. **19.** -16. **21.** 98. **23.** -89.

25. -1. **27.** 2. **29.** -90. **31.** 1. **33.** 24.

35. 0. **37.** 0. **39.** 3, 4. **41.** 192. **43.** **b.** $\frac{1}{3}$.

45. $c = -1$ o $c = 4$. **47.** -1630. **49.** -3864.

EJERCICIO 6.8 (página 290)

1. $x = \frac{3}{2}, y = -1$. **3.** $x = \frac{7}{16}, y = \frac{13}{8}$.

5. $x = -\frac{1}{3}, y = -1$. **7.** $x = \frac{6}{5}, z = \frac{16}{5}$.

9. $x = 4, y = 2, z = 0$. **11.** $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{28}{15}, z = -\frac{26}{15}$.

13. $x = 3 - r, y = 0, z = r$. **15.** $x = 1, y = 3, z = 5$.

17. $y = 6, w = 1$. **19.** Ya que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

no es aplicable la regla de Cramer. Pero la ecuación en

$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = -3, \end{cases}$ representa rectas paralelas distintas y pc

tanto no existe solución. **21.** Cuatro juegos.

23. $x = 17.85, y = -0.42, z = -24.09$.

EJERCICIO 6.9 (página 294)

1. $\begin{bmatrix} 1290 \\ 1425 \end{bmatrix}$; 1405. **3.** **a.** $\begin{bmatrix} 297.80 \\ 349.54 \\ 443.12 \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} 102.17 \\ 125.28 \\ 175.27 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1301 \\ 1215 \\ 1188 \end{bmatrix}$. **7.** $\begin{bmatrix} 1073 \\ 1016 \\ 952 \end{bmatrix}$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 6 (página 296)

1. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -16 & -10 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 42 & 5 \\ 2 & -18 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 22 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 6 \\ 32 \end{bmatrix}$. **9.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. **11.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$.

13. $x = 3, y = 21$. **15.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

19. $x = 0, y = 0$. **21.** No hay solución. **23.** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

25. No existe la inversa. **27.** $x = 0, y = 1, z = 0$.
29. 18. **31.** 3. **33.** *rich*. **35.** $x = 1, y = 2$.
37. -2. **39.** $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_3, \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}, \mathbf{A}^{2000} = \mathbf{I}_3$.

41. $x = 2 - \dfrac{c}{a}, y = \dfrac{c}{a} - 1, z = 1 - \dfrac{a}{c}$.

43. **a.** Sean x, y, z las dosis de cápsulas semanales de las marcas I, II, III, respectivamente. Las combinaciones están dadas por:

	x	y	z
combinación 1	4	9	0
combinación 2	3	6	1
combinación 3	2	3	2
combinación 4	1	0	3

b. Combinación 4: $x = 1, y = 0, z = 3$.

45. $\begin{bmatrix} 215 & 87 \\ 89 & 141 \end{bmatrix}$. **47.** $\begin{bmatrix} 40.8 \\ 40.56 \end{bmatrix}$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 6 (página 298)

1. \$151.40. **3.** No es posible, ya que los huéspedes 3 y 4 le cuestan a la posada la misma cantidad por día.