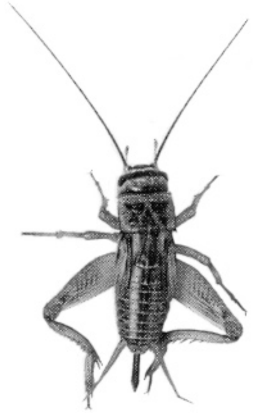


CAPÍTULO 1

Ecuaciones

Cuando se trabaja con un problema de aplicación de la vida real, con frecuencia nos encontramos con una o más ecuaciones que modelan dicha situación. Muchos fenómenos pueden describirse utilizando ecuaciones lineales, que son el tipo más simple para trabajar.

Un ejemplo es el chirrido del grillo del árbol de nieve (*Oecanthulus niveus*), que se encuentra en el medio oeste de Estados Unidos. A finales de 1890, los naturalistas establecieron que cuando este grillo chirría (lo cual hace sólo al final del verano), la velocidad del chirrido de N chirridos por minuto está relacionada con la temperatura del aire T en grados Fahrenheit por medio de la ecuación.

$$N = 4.7T - 190.$$[1]

Cuando T aumenta, también lo hace N, lo cual significa que el grillo chirría más rápido en clima cálido. Para predecir la velocidad de chirrido a partir de la temperatura, simplemente multiplicamos la temperatura por 4.7 y restamos 190. Por ejemplo, cuando la temperatura es de 60 grados, el grillo chirría a una velocidad de $4.7(60) - 190 = 92$ chirridos por minuto.

¿Podemos utilizar los chirridos del grillo como un termómetro para indicar la temperatura? Sí. Primero debemos despejar a T de la ecuación, utilizando las técnicas que se explicarán en este capítulo. El resultado es:

$$T = \frac{N + 190}{4.7}.$$

Esto significa que si en una tarde de agosto en Nebraska, sentados en el exterior oímos un grillo que emite 139 chirridos por minuto, entonces sabemos que la temperatura es alrededor de $(139 + 190)/4.7 = 70$ grados.

En este capítulo, desarrollaremos técnicas para resolver no sólo las ecuaciones lineales, sino también las cuadráticas.

[1] C. A. Bessey y E. A. Bessey, "Further Notes on Thermometer Crickets". *American Naturalist,* 32 (1898), 263-264.

OBJETIVO Estudiar las ecuaciones equivalentes y desarrollar técnicas para resolver ecuaciones lineales, que incluyan las ecuaciones con literales.

1.1 Ecuaciones lineales

Ecuaciones

Una **ecuación** es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus **lados** o **miembros**, y están separadas por el **signo de igualdad** "$=$".

Principios en práctica 1
Ejemplos de ecuaciones

Usted está empacando material de cercado para un jardín rectangular en el que el largo es 2 pies mayor que el ancho. Escriba una ecuación que represente los pies lineales P necesarios para un jardín con ancho w.

EJEMPLO 1 Ejemplos de ecuaciones

a. $x + 2 = 3.$

b. $x^2 + 3x + 2 = 0.$

c. $\dfrac{y}{y - 4} = 6.$

d. $w = 7 - z.$

En el ejemplo 1 cada ecuación contiene al menos una variable. Una **variable** es un símbolo que puede ser reemplazado por un número cualquiera de un conjunto de números diferentes. Los símbolos más comunes para las variables son las últimas letras del alfabeto, x, y, z, w y t. De aquí que se diga de (a) y (c) que son ecuaciones en las variables x y y, respectivamente. La ecuación (d) es una ecuación en las variables w y z. En la ecuación $x + 2 = 3$, los números 2 y 3 se conocen como *constantes*, ya que son números fijos.

Aquí estudiamos las restricciones sobre las variables.

Nunca permitamos que en una ecuación haya una variable que tenga un valor para el cual esa ecuación no esté definida. Por tanto, en

$$\frac{y}{y - 4} = 6,$$

y no puede ser 4, porque provocaría que el denominador fuese cero (no podemos dividir entre cero). En algunas ecuaciones los valores permisibles de una variable están restringidos por razones físicas. Por ejemplo, si la variable t representa el tiempo, los valores negativos de t pueden no tener sentido. Entonces debemos suponer que $t \geq 0$.

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores se conocen como *soluciones* de la ecuación y se dice que *satisfacen* la ecuación. Cuando sólo está implicada una variable, una solución también se conoce como **raíz.** Al conjunto de todas las soluciones se le llama **conjunto solución** de la ecuación. En ocasiones, a una letra que representa una cantidad desconocida en una ecuación se le denomina *incógnita* (o *indeterminada*). Ahora ilustraremos estos términos.

EJEMPLO 2 Terminología para las ecuaciones

a. En la ecuación $x + 2 = 3$, la variable x es la incógnita. Obviamente el único valor de x que satisface la ecuación es 1. De aquí que 1 sea una raíz y el conjunto solución sea $\{1\}$.

b. -2 es una raíz de $x^2 + 3x + 2 = 0$ porque sustituir -2 por x hace que la ecuación sea verdadera: $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$.

c. $w = 7 - z$ es una ecuación con dos incógnitas. Una solución es la pareja de valores $w = 4$ y $z = 3$. Sin embargo, existe una infinidad de soluciones. ¿Podría pensar en otra?

Ecuaciones equivalentes

Resolver una ecuación puede implicar la realización de operaciones en ella. Es preferible que al aplicar cualquiera de tales operaciones se obtenga otra ecuación con exactamente las mismas soluciones que la ecuación original. Cuando esto ocurre, se dice que las ecuaciones son **equivalentes.** Existen tres operaciones que garantizan la equivalencia:

1. Sumar (o restar) el mismo polinomio[2] a (de) ambos miembros de una ecuación, en donde el polinomio está en la misma variable que aparece en la ecuación.

Por ejemplo, si $-5x = 5 - 6x$, entonces sumar $6x$ a ambos miembros nos da la ecuación equivalente $-5x + 6x = 5 - 6x + 6x$, o $x = 5$.

La equivalencia no se garantiza si ambos lados se multiplican o dividen por una expresión que incluya una variable.

2. Multiplicar (dividir) ambos miembros de una ecuación por la misma constante, excepto el cero.

Por ejemplo, si $10x = 5$, entonces dividir ambos miembros entre 10 nos da la ecuación equivalente $\frac{10x}{10} = \frac{5}{10}$, o $x = \frac{1}{2}$.

3. Reemplazar cualquiera de los miembros de una ecuación por una expresión igual (equivalente).

Por ejemplo, si $x(x + 2) = 3$, entonces reemplazar el miembro izquierdo por la expresión equivalente $x^2 + 2x$, da la ecuación equivalente $x^2 + 2x = 3$.

Repetimos: la aplicación de las operaciones, de la 1 a la 3, garantiza que la ecuación resultante sea equivalente a la original. Sin embargo, algunas veces, para resolver una ecuación, tenemos que aplicar otras operaciones, distintas de la 1 a la 3. Estas operaciones *no* necesariamente resultan en ecuaciones equivalentes. Se incluyen las siguientes.

Operaciones que pueden no producir ecuaciones equivalentes

4. Multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable.

5. Dividir ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable.

6. Elevar ambos miembros de una ecuación al mismo exponente.

La operación 6 incluye tomar raíces en ambos miembros.

Ilustraremos las últimas tres operaciones. Por ejemplo, por inspección la única raíz de $x - 1 = 0$ es 1. Multiplicar cada miembro por x (operación 4) nos da $x^2 - x = 0$, ecuación que se satisface si x es 0 o 1 (verifique esto por sustitución). Pero 0 *no* satisface la ecuación *original*. Por tanto, las ecuaciones no son equivalentes.

Asimismo, puede verificar que la ecuación $(x - 4)(x - 3) = 0$ se satisface cuando x es 4 o 3. Dividir ambos miembros entre $x - 4$ (operación 5) nos da $x - 3 = 0$, cuya única raíz es 3. Otra vez no tenemos una equivalencia, ya que, en este caso, se ha "perdido" una raíz. Observe que cuando x es 4, la división entre $x - 4$ implica dividir entre 0, una operación que no es válida.

[2]Véase la sección 0.6 para una definición de polinomio.

Por último, elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación $x = 2$ (operación 6) da $x^2 = 4$, la cual es verdadera si $x = 2$ o -2. Pero -2 no es raíz de la ecuación original.

De este estudio, queda claro que cuando realicemos las operaciones 4 al 6, debemos ser cuidadosos acerca de las conclusiones concernientes a las raíces de una ecuación dada. Las operaciones 4 y 6, *pueden* producir una ecuación con más raíces. Por tanto, se debe verificar si la "solución" obtenida por estas operaciones satisface o no la ecuación *original*. La operación 5 *puede* producir una ecuación con menos raíces. En este caso, cualquier raíz "perdida" tal vez nunca pueda determinarse. Por ello, si es posible, evite efectuar la operación 5.

En resumen, una ecuación puede pensarse como un conjunto de restricciones sobre cualquier variable de la ecuación. Las operaciones 4, 5 y 6 pueden aumentar o disminuir las restricciones, lo que da lugar a soluciones diferentes de la ecuación original. Sin embargo, las operaciones 1, 2 y 3 nunca afectan las restricciones.

Tecnología

Una calculadora gráfica puede utilizarse para comprobar una raíz. Por ejemplo, suponga que queremos determinar si 3/2 es una raíz de la ecuación

$$2x^3 + 7x^2 = 19x + 60.$$

Primero, reescribimos la ecuación de modo que un miembro sea 0. Restar $19x + 60$ de ambos miembros nos da la ecuación equivalente

$$2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0.$$

En una calculadora gráfica TI-83 ingresamos la expresión $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60$ como Y_1 y después evaluamos Y_1 en $x = 3/2$. La figura 1.1 muestra que el resultado es –66, el cual es diferente de cero. Por tanto, 3/2 no es una raíz. Sin embargo, si Y_1 es evaluada en $x = -5/2$ esto nos *da* 0. De modo que $-5/2$ es una raíz de la ecuación original.

Conviene destacar que si la ecuación original hubiera estado en términos de la variable t,

$$2t^3 + 7t^2 = 19t + 60,$$

entonces debemos reemplazar t por x, ya que la calculadora evalúa Y_1 en un valor específico de x, no de t.

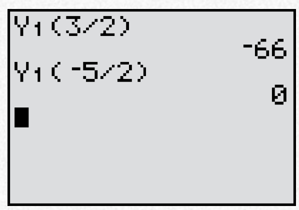


FIGURA 1.1 Para $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0$, $^3/_2$ no es raíz, pero $^{-5}/_2$ sí lo es.

Ecuaciones lineales

Los principios presentados hasta aquí se demostrarán ahora en la solución de una *ecuación lineal*.

Definición

Una ***ecuación lineal*** en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax + b = 0, \tag{1}$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Una ecuación lineal también se conoce como ecuación de primer grado o ecuación de grado uno, ya que la potencia más alta de la variable que aparece en la ecuación (1) es la primera.

Para resolver una ecuación lineal realizamos operaciones en ella hasta obtener una ecuación equivalente cuyas soluciones son *obvias*. Esto significa una ecuación en la que la variable queda aislada en un lado de la ecuación, como lo muestran los ejemplos siguientes.

Principios en práctica 2
Resolución de una ecuación lineal

El ingreso total de una cafetería con base en la venta de x cafés especiales está dado por $r = 2.25x$, y sus costos totales diarios están dados por $c = 0.75x + 300$. ¿Cuántos cafés especiales se necesitan vender cada día para obtener el punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo el ingreso es igual a los costos?

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $5x - 6 = 3x$.

Solución: empezamos por dejar los términos que incluyen a x en un lado y las constantes en el otro. Entonces despejamos x por medio de las operaciones matemáticas adecuadas. Tenemos

$$\begin{aligned}
5x - 6 &= 3x, \\
5x - 6 + (-3x) &= 3x + (-3x) && \text{(sumando } -3x \text{ a ambos miembros),} \\
2x - 6 &= 0 && \text{(simplificando, esto es, operación 3),} \\
2x - 6 + 6 &= 0 + 6 && \text{(sumando 6 a ambos miembros),} \\
2x &= 6 && \text{(simplificando),} \\
\frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} && \text{(dividiendo ambos miembros entre 2),} \\
x &= 3.
\end{aligned}$$

Es claro que 3 es la única raíz de la última ecuación. Como cada ecuación es equivalente a la anterior, concluimos que 3 debe ser la única raíz de $5x - 6 = 3x$. Esto es, el conjunto solución es $\{3\}$. Podemos describir el primer paso en la solución de una ecuación como el mover un término de un lado a otro cambiando su signo; esto por lo regular se conoce como *transponer*. Observe que como la ecuación original puede escribirse en la forma $2x + (-6) = 0$, resulta ser una ecuación lineal.

Principios en práctica 3
Resolución de una ecuación lineal

Mónica y Pedro han convenido en juntar sus ahorros cuando hayan ahorrado la misma cantidad de dinero. Mónica puede ahorrar \$40 semanales, pero ella primero debe usar \$125 para pagar la deuda de su tarjeta de crédito. Pedro ha ahorrado \$35 semanales durante tres semanas. ¿Dentro de cuánto tiempo juntarán sus ahorros? ¿Cuánto habrá ahorrado cada uno de ellos?

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $2(p + 4) = 7p + 2$.

Solución: primero quitamos los paréntesis. Después agrupamos los términos semejantes y resolvemos. Tenemos

$$\begin{aligned}
2(p + 4) &= 7p + 2 \\
2p + 8 &= 7p + 2 && \text{(propiedad distributiva),} \\
2p &= 7p - 6 && \text{(restando 8 de ambos lados),} \\
-5p &= -6 && \text{(restando 7p de ambos lados),} \\
p &= \frac{-6}{-5} && \text{(dividiendo ambos lados entre } -5\text{),} \\
p &= \frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4} = 6.$

Solución: primero eliminamos fracciones multiplicando *ambos* lados de la ecuación por el mínimo común denominador (MCD),[3] que es 4. Después efectuamos varias operaciones algebraicas para obtener una solución. Así,

La propiedad distributiva requiere de que *ambos* términos en el paréntesis sean multiplicados por 4.

$$
\begin{aligned}
4\left(\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4}\right) &= 4(6), \\
4 \cdot \frac{7x+3}{2} - 4 \cdot \frac{9x-8}{4} &= 24 && \text{(propiedad distributiva),} \\
2(7x+3) - (9x-8) &= 24 && \text{(simplificando),} \\
14x + 6 - 9x + 8 &= 24 && \text{(propiedad distributiva),} \\
5x + 14 &= 24 && \text{(simplificando),} \\
5x &= 10 && \text{(restando 14 de ambos lados),} \\
x &= 2 && \text{(dividiendo ambos lados entre 5).}
\end{aligned}
$$

Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz.

Cada ecuación de los ejemplos 3 al 5 tiene una sola raíz. Esto es cierto para toda ecuación lineal en una variable.

Ecuaciones con literales

Las ecuaciones en las que algunas de las constantes no están especificadas pero están representadas por letras, tales como *a, b, c* o *d*, se llaman **ecuaciones con literales** y las letras se conocen como **constantes literales** o **constantes arbitrarias.** Por ejemplo, en la ecuación con literales $x + a = 4b$, podemos considerar a *a* y *b* como constantes arbitrarias. Las fórmulas como $I = Prt$, que expresan una relación entre ciertas cantidades, pueden considerarse como ecuaciones con literales. Si queremos expresar una letra en particular en términos de las otras, esta letra es considerada la incógnita.

Principios en práctica 4
Resolución de una ecuación con literales

La fórmula $d = rt$ proporciona la distancia d que un objeto recorre viajando a una velocidad r durante un tiempo t. ¿Cuál es la velocidad r de un tren que viaja d millas en t horas?

EJEMPLO 6 Resolución de ecuaciones con literales

a. *La ecuación $I = Prt$ es la fórmula para el interés simple I sobre un capital de P dólares a una tasa de interés anual r en un periodo de t años. Expresar r en términos de I, P y t.*

Solución: aquí consideramos que r será la incógnita. Para aislar a r dividimos ambos lados entre Pt. Tenemos

$$
\begin{aligned}
I &= Prt, \\
\frac{I}{Pt} &= \frac{Prt}{Pt}, \\
\frac{I}{Pt} &= r \quad \text{o} \quad r = \frac{I}{Pt}.
\end{aligned}
$$

[3] El mínimo común denominador de dos o más fracciones es el número más pequeño con todos los denominadores como factores. Esto es, el MCD es el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

Cuando dividimos ambos lados entre Pt, suponemos que $Pt \neq 0$, ya que no podemos dividir entre 0. Suposiciones semejantes se harán al resolver otras ecuaciones con literales.

b. *La ecuación $S = P + Prt$ es la fórmula para el valor S de una inversión de un capital de P dólares a un interés anual simple r durante un periodo de t años. Resolver para P.*

Solución:

$$\begin{aligned} S &= P + Prt, \\ S &= P(1 + rt) && \text{(factorizando)}, \\ \frac{S}{1 + rt} &= P && \text{(dividiendo ambos lados entre } 1 + rt\text{)}. \end{aligned}$$

■ Principios en práctica 5
Resolución de una ecuación con literales

La fórmula $S = 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ proporciona el área de la superficie S de una esfera con diámetro d. ¿Cuál es la longitud del lado de la caja más pequeña que podrá contener una bola con área de superficie igual a S?

EJEMPLO 7 Resolución de una ecuación con literales

Resolver $(a + c)x + x^2 = (x + a)^2$ para x.

Solución: primero debemos simplificar la ecuación y después colocar todos los términos que incluyan a x en un lado:

$$\begin{aligned} (a + c)x + x^2 &= (x + a)^2, \\ ax + cx + x^2 &= x^2 + 2ax + a^2, \\ ax + cx &= 2ax + a^2, \\ cx - ax &= a^2, \\ x(c - a) &= a^2, \\ x &= \frac{a^2}{c - a}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1

En los problemas del 1 al 6 determine por sustitución cuáles de los números dados satisfacen la ecuación.

1. $9x - x^2 = 0;\ 1, 0.$

2. $20 - 9x = -x^2;\ 5, 4.$

3. $y + 2(y - 3) = 4;\ \frac{10}{3}, 1.$

4. $2x + x^2 - 8 = 0;\ 2, -4.$

5. $x(6 + x) - 2(x + 1) - 5x = 4;\ -2, 0.$

6. $x(x + 1)^2(x + 2) = 0;\ 0, -1, 2.$

En los problemas del 7 al 16 determine qué operaciones se aplicaron a la primera ecuación para obtener la segunda. Establezca si las operaciones garantizan o no que las ecuaciones sean equivalentes. No resuelva las ecuaciones.

7. $x - 5 = 4x + 10;\ x = 4x + 15.$

8. $8x - 4 = 16;\ x - \frac{1}{2} = 2.$

9. $x = 3;\ x^4 = 81.$

10. $\frac{1}{2}x^2 + 3 = x - 9;\ x^2 + 6 = 2x - 18.$

11. $x^2 - 2x = 0;\ x - 2 = 0.$

12. $\dfrac{2}{x - 2} + x = x^2;\ 2 + x(x - 2) = x^2(x - 2).$

13. $\dfrac{x^2-1}{x-1}=3;\ x^2-1=3(x-1).$

14. $x(x+11)(x+9)=x(x+5);$
$(x+11)(x+9)=x+5.$

15. $\dfrac{x(x+1)}{x-5}=x(x+9);\ x+1=(x+9)(x-5).$

16. $2x^2-9=x;\ x^2-\frac{1}{2}x=\frac{9}{2}.$

En los problemas del 17 al 46, resuelva las ecuaciones.

17. $4x=10.$

18. $0.2x=7.$

19. $3y=0.$

20. $2x-4x=-5.$

21. $-5x=10-15.$

22. $3-2x=4.$

23. $5x-3=9.$

24. $\sqrt{2}x+3=8.$

25. $7x+7=2(x+1).$

26. $6z+5z-3=41.$

27. $2(p-1)-3(p-4)=4p.$

28. $t=2-2[2t-3(1-t)].$

29. $\dfrac{x}{5}=2x-6.$

30. $\dfrac{5y}{7}-\dfrac{6}{7}=2-4y.$

31. $7+\dfrac{4x}{9}=\dfrac{x}{2}.$

32. $\dfrac{x}{3}-4=\dfrac{x}{5}.$

33. $q=\dfrac{3}{2}q-4.$

34. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=7.$

35. $3x+\dfrac{x}{5}-5=\dfrac{1}{5}+5x.$

36. $y-\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{y}{5}.$

37. $\dfrac{2y-3}{4}=\dfrac{6y+7}{3}.$

38. $\dfrac{p}{3}+\dfrac{3}{4}p=\dfrac{9}{2}(p-1).$

39. $w+\dfrac{w}{2}-\dfrac{w}{3}+\dfrac{w}{4}=5.$

40. $\dfrac{7+2(x+1)}{3}=\dfrac{6x}{5}.$

41. $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2-x}{6}=x-2.$

42. $\dfrac{x}{5}+\dfrac{2(x-4)}{10}=7.$

43. $\dfrac{9}{5}(3-x)=\dfrac{3}{4}(x-3).$

44. $\dfrac{2y-7}{3}+\dfrac{8y-9}{14}=\dfrac{3y-5}{21}.$

45. $\dfrac{3}{2}(4x-3)=2[x-(4x-3)].$

46. $(3x-1)^2-(5x-3)^2=-(4x-2)^2.$

En los problemas del 47 al 54 exprese el símbolo indicado en términos de los símbolos restantes.

47. $I=Prt;\ P.$

48. $ax+b=0;\ x.$

49. $p=8q-1;\ q.$

50. $p=-3q+6;\ q.$

51. $S=P(1+rt);\ r.$

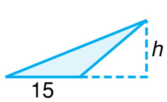
52. $r=\dfrac{2mI}{B(n+1)};\ m.$

53. $S=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n);\ a_1.$

54. $S=\dfrac{R[(1+i)^n-1]}{i};\ R.$

55. Geometría Utilice la fórmula $P=2l+2w$ para determinar el ancho w de un rectángulo con perímetro P de 960 m, cuyo largo l es de 360 m.

56. Geometría Utilice la fórmula $A=\frac{1}{2}bh$ para determinar la altura h de un triángulo con área de 75 cm^2, cuya base b es 15 cm.



57. Impuesto de venta Un agente de ventas necesita calcular el costo de un artículo con un impuesto de venta de 8.25%. Escriba una ecuación que represente el costo total c de un artículo que cuesta x dólares.

58. Ingreso El ingreso mensual total de una guardería obtenido del cuidado de x niños está dado por $r=450x$, y sus costos mensuales totales están dados por $c=380x+3500$. ¿Cuántos niños se necesitan inscribir mensualmente para llegar al punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo los ingresos igualan a los costos?

59. Depreciación lineal Si usted compra un artículo para uso empresarial, al preparar la declaración de impuestos usted puede repartir su costo entre toda la vida útil del artículo. Esto se denomina *depreciación*. Un método de depreciación es la *depreciación lineal*, en la que la depreciación anual se calcula dividiendo el costo del artículo, menos su valor de rescate, entre su vida útil. Supóngase que el costo es C dólares, la vida útil es N años y no hay valor de rescate. Entonces el valor V (en dólares) del artículo al final de n años está dado por

$$V=C\left(1-\frac{n}{N}\right).$$

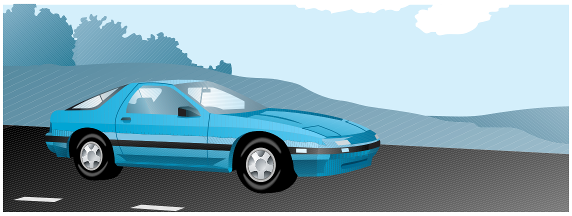
Si el mobiliario nuevo de una oficina se compró por \$3200, tiene una vida útil de 8 años y no tiene valor de rescate, ¿después de cuántos años tendrá un valor de \$2000?

60. Ondas de radar Cuando se utiliza un radar para determinar la velocidad de un automóvil en una autopista, una onda es enviada desde el radar y reflejada por el automóvil en movimiento. La diferencia F (en ciclos por segundo) de la frecuencia entre la onda original y la reflejada está dada por

$$F = \frac{vf}{334.8},$$

donde v es la velocidad del automóvil en millas por hora y f la frecuencia de la onda original (en megaciclos por segundo).

Suponga que usted está manejando en una autopista que tiene un límite de velocidad de 65 millas por hora. Un oficial de la policía dirige una onda de radar con una frecuencia de 2450 megaciclos por segundo a su automóvil y observa que la diferencia en las frecuencias es de 495 ciclos por segundo. ¿El oficial puede reclamarle que iba a exceso de velocidad?



61. Ahorros Paula y Sam quieren comprar una casa, de modo que han decidido ahorrar la cuarta parte de sus respectivos salarios. Paula gana \$24.00 por hora y recibe \$8.00 extra a la semana, por declinar las prestaciones de la empresa, mientras que Sam gana \$28.00 por hora más las prestaciones. Ellos quieren ahorrar al menos \$405.00 semanales. Si trabajan el mismo número de horas, ¿cuántas horas debe trabajar cada uno de ellos cada semana?

62. Gravedad La ecuación $h = -4.9t^2 + m$ es la fórmula para la altura h, en metros, de un objeto t segundos después que es soltado desde una posición inicial de m metros. ¿Cuánto tiempo t ha estado cayendo un objeto, si éste ha caído desde una altura m y ahora está a una altura h?

63. Expansión lineal Cuando los objetos sólidos son calentados se expanden en longitud –es la razón por la que en el pavimento y en los puentes se colocan juntas de expansión. Por lo general, cuando la temperatura de un cuerpo sólido de longitud I_0 se incremente desde T_0 hasta T, la longitud, I, del cuerpo está dada por

$$I = I_0[1 + \alpha(T - T_0)],$$

donde α (letra griega *alfa*) se denomina *coeficiente de expansión lineal*. Suponga que una varilla de metal de 1 m de longitud a 0 °C se expande 0.001 m cuando se calienta desde 0 hasta 100 °C. Encuentre el coeficiente de expansión lineal.

64. Relación presa-depredador Para estudiar la relación presa-depredador, se realizó un experimento[4] en el que un sujeto con los ojos vendados, el "depredador", se puso al frente de una mesa cuadrada de 3 pies por lado en la que se colocaron uniformemente distribuidos, discos de papel de lija como "presa". Durante un minuto el "depredador" buscó los discos dando golpecitos suaves con un dedo. Siempre que se encontraba con un disco lo retiraba y reanudaba la búsqueda. El experimento fue repetido para varias densidades de discos (número de discos por 9 pies^2). Se estimó que si y es el número de discos retirados en 1 minuto cuando x discos están en la mesa, entonces

$$y = a(1 - by)x,$$

donde a y b son constantes. Resuelva esta ecuación para y.

En los problemas del 65 al 68 utilice una calculadora gráfica para determinar, si los hay, cuáles de los números dados son raíces de la ecuación dada.

65. $112x^2 = 6x + 1;\ \frac{1}{8}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{14}.$

66. $8x^3 + 11x + 21 = 58x^2;\ 7, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}.$

67. $\dfrac{3.1t - 7}{4.8t - 2} = 7;\ \sqrt{6}, -\dfrac{47}{52}, \dfrac{14}{61}.$

68. $\left(\dfrac{v}{v+3}\right)^2 = v;\ 0, \dfrac{27}{4}, \dfrac{13}{3}.$

OBJETIVO Resolver ecuaciones fraccionarias y con radicales que conducen a ecuaciones lineales.

1.2 Ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales

Ecuaciones fraccionarias

En esta sección, ilustramos que al resolver una ecuación no lineal puede suceder que ésta se reduzca a una ecuación lineal. Empezamos con una **ecuación fraccionaria,** que es una ecuación en que una incógnita está en un denominador.

Principios en práctica 1
Resolución de una ecuación fraccionaria

Un bote que viaja a una velocidad r, recorre 10 millas río abajo en una corriente de 2 millas por hora; al mismo tiempo un bote que viaja a la misma velocidad recorre 6 millas río arriba en contra de la corriente. Escriba una ecuación que describa esta situación, y determine la velocidad de los botes.

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación fraccionaria

Resolver $\dfrac{5}{x-4} = \dfrac{6}{x-3}.$

[4] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.

Solución:

Estrategia: primero escribimos la ecuación de manera que no tenga fracciones. Después utilizamos las técnicas algebraicas comunes para resolver la ecuación lineal resultante.

Multiplicando ambos lados por el MCD, $(x - 4)(x - 3)$, tenemos

$$(x-4)(x-3)\left(\frac{5}{x-4}\right) = (x-4)(x-3)\left(\frac{6}{x-3}\right),$$

$$5(x-3) = 6(x-4) \qquad \text{(ecuación lineal),}$$

$$5x - 15 = 6x - 24,$$

$$9 = x.$$

En el primer paso, multiplicamos cada lado por una expresión que incluya a la *variable* x. Como mencionamos en la sección 1.1, esto significa que no estamos garantizando que la última ecuación sea equivalente a la *original*. Así, debemos verificar si 9 satisface o no la ecuación *original*. Sustituyendo 9 por x en la ecuación, obtenemos

$$\frac{5}{9-4} = \frac{6}{9-3},$$

$$1 = 1,$$

que es un enunciado verdadero. Por tanto, 9 es una raíz.

Una resolución alternativa que evita la multiplicación de ambos lados por el MCD es como sigue:

$$\frac{5}{x-4} - \frac{6}{x-3} = 0.$$

Suponiendo que x no es 3 ni 4 y combinando las fracciones tenemos

$$\frac{9-x}{(x-4)(x-3)} = 0.$$

Una fracción puede ser 0 sólo cuando su numerador es 0 y su denominador es distinto de cero. Por tanto, $x = 9$.

Algunas ecuaciones que no son lineales no tienen solución. En ese caso, decimos que el conjunto solución es el **conjunto vacío** o **conjunto nulo,** al que denotamos por $\{\ \}$ o $\varnothing$. El ejemplo 2 ilustra lo anterior.

EJEMPLO 2 Resolución de ecuaciones fraccionarias

a. *Resolver* $\dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{3x-5}{x-4} = \dfrac{12}{x^2-2x-8}$.

Solución: al observar los denominadores y notar que

$$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4),$$

concluimos que el MCD es $(x + 2)(x - 4)$. Multiplicando ambos miembros por el MCD, tenemos

$$(x+2)(x-4)\left(\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4}\right) = (x+2)(x-4)\cdot\frac{12}{(x+2)(x-4)},$$

$$(x-4)(3x+4) - (x+2)(3x-5) = 12,$$

$$3x^2 - 8x - 16 - (3x^2 + x - 10) = 12,$$

$$3x^2 - 8x - 16 - 3x^2 - x + 10 = 12,$$

$$-9x - 6 = 12,$$

$$-9x = 18,$$

$$x = -2. \qquad \textbf{(1)}$$

Sin embargo, la ecuación *original* no está definida para $x = -2$ (no podemos dividir entre cero), de modo que no existen raíces. Así, el conjunto solución es $\varnothing$. Aunque -2 es una solución de la ecuación (1), no lo es de la ecuación *original,* por lo que se le denomina **solución extraña** de la ecuación original.

b. *Resolver* $\dfrac{4}{x-5} = 0.$

Solución: la única manera que una fracción puede ser igual a cero es cuando el numerador es 0 pero su denominador no. Ya que el numerador, 4, nunca es 0, el conjunto solución es $\varnothing$.

EJEMPLO 3 Ecuación con literales

Si $s = \dfrac{u}{au + v}$, *exprese u en términos de las restantes letras; esto es, resolver para u.*

Solución:

Estrategia: como la incógnita, u, está en el denominador, primero quitamos las fracciones y después resolvemos para u.

$$\begin{aligned}
s &= \frac{u}{au+v}, \\
s(au+v) &= u && \text{(multiplicando ambos lados por } au+v\text{)}, \\
sau + sv &= u, \\
sau - u &= -sv, \\
u(sa-1) &= -sv, \\
u &= \frac{-sv}{sa-1} = \frac{sv}{1-sa}.
\end{aligned}$$

> ***Principios en práctica 2***
> **Ecuación con literales**
>
> El tiempo que le toma a un aeroplano recorrer una distancia dada con viento a favor, puede calcularse dividiendo la distancia entre la suma de la velocidad del aeroplano y la velocidad del viento. Escriba una ecuación que calcule el tiempo t que le toma a un aeroplano, que viaja a una velocidad r con un viento w, cubrir una distancia d. Resuelva la ecuación para w.

Ecuaciones con radicales

Una **ecuación con radicales** (ecuación radical) es aquélla en la que una incógnita aparece en un radicando. Los dos ejemplos siguientes ilustran las técnicas empleadas para resolver tales ecuaciones.

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación con radicales

Resolver $\sqrt{x^2 + 33} - x = 3.$

Solución: para resolver esta ecuación radical, elevamos ambos miembros a la misma potencia para eliminar el radical. Esta operación *no* garantiza la equivalencia, de modo que debemos verificar las "soluciones" resultantes. Empezamos aislando el radical en un lado. Después elevamos al cuadrado ambos lados y despejamos utilizando las técnicas comunes. Así,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+33} &= x + 3, \\
x^2 + 33 &= (x+3)^2 && \text{(elevando al cuadrado ambos lados)},
\end{aligned}$$

> ***Principios en práctica 3***
> **Resolución de una ecuación con radicales**
>
> La diferencia entre la longitud de una rampa y la longitud de la distancia horizontal que cubre es de 2 pies. El cuadrado de la distancia vertical que cubre la rampa es de 16 pies cuadrados. Escriba una ecuación para la diferencia y resuélvala. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

$$x^2 + 33 = x^2 + 6x + 9,$$
$$24 = 6x,$$
$$4 = x.$$

Por sustitución se debe demostrar que 4 es en realidad una raíz.

Con algunas ecuaciones radicales puede tener que elevar ambos lados a la misma potencia en más de una ocasión, como lo muestra el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación con radicales

Resolver $\sqrt{y-3} - \sqrt{y} = -3$.

Solución: cuando una ecuación tiene dos términos que implican radicales, primero la escribimos de modo que esté un radical en cada lado, si es posible. Después elevamos al cuadrado y resolvemos. Tenemos

La razón por la que deseamos una radical en cada lado es para eliminar elevando al cuadrado un binomio con dos radicales diferentes.

$$\sqrt{y-3} = \sqrt{y} - 3,$$
$$y - 3 = y - 6\sqrt{y} + 9 \quad \text{(elevando ambos lados al cuadrado),}$$
$$6\sqrt{y} = 12,$$
$$\sqrt{y} = 2,$$
$$y = 4 \quad \text{(elevando ambos lados al cuadrado).}$$

Sustituyendo 4 en el lado izquierdo de la ecuación *original* nos da $\sqrt{1} - \sqrt{4}$, que es -1. Ya que este resultado no es igual al del lado derecho, -3, no hay solución. Esto es, el conjunto solución es $\varnothing$. Aquí 4 es una solución extraña.

Ejercicio 1.2

En los problemas del 1 al 34 resuelva las ecuaciones.

1. $\dfrac{5}{x} = 25.$

2. $\dfrac{4}{x-1} = 2.$

3. $\dfrac{7}{3-x} = 0.$

4. $\dfrac{5x-2}{x+1} = 0.$

5. $\dfrac{4}{8-x} = \dfrac{3}{4}.$

6. $\dfrac{x+3}{x} = \dfrac{2}{5}.$

7. $\dfrac{q}{5q-4} = \dfrac{1}{3}.$

8. $\dfrac{4p}{7-p} = 1.$

9. $\dfrac{1}{p-1} = \dfrac{2}{p-2}.$

10. $\dfrac{2x-3}{4x-5} = 6.$

11. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}.$

12. $\dfrac{4}{t-3} = \dfrac{3}{t-4}.$

13. $\dfrac{3x-2}{2x+3} = \dfrac{3x-1}{2x+1}.$

14. $\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{x+1}{3-x} = 0.$

15. $\dfrac{y-6}{y} - \dfrac{6}{y} = \dfrac{y+6}{y-6}.$

16. $\dfrac{y-3}{y+3} = \dfrac{y-3}{y+2}.$

17. $\dfrac{-4}{x-1} = \dfrac{7}{2-x} + \dfrac{3}{x+1}.$

18. $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{4}{1-2x}.$

19. $\dfrac{9}{x-3} = \dfrac{3x}{x-3}.$

20. $\dfrac{x}{x+3} - \dfrac{x}{x-3} = \dfrac{3x-4}{x^2-9}.$

21. $\sqrt{x+5} = 4.$

22. $\sqrt{z-2} = 3.$

23. $\sqrt{5x-6} - 16 = 0.$

24. $6 - \sqrt{2x+5} = 0.$

25. $\sqrt{\frac{x}{2}+1}=\frac{2}{3}$.

26. $(x+6)^{1/2}=7$.

27. $\sqrt{4x-6}=\sqrt{x}$.

28. $\sqrt{5+2x}=\sqrt{4x-2}$.

29. $(x-3)^{3/2}=8$.

30. $\sqrt{y^2-9}=9-y$.

31. $\sqrt{y}+\sqrt{y+2}=3$.

32. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=1$.

33. $\sqrt{z^2+2z}=3+z$.

34. $\sqrt{\frac{1}{w}}-\sqrt{\frac{2}{5w-2}}=0$.

En los problemas del 35 al 38 exprese la letra indicada en términos de las letras restantes.

35. $r=\frac{d}{1-dt}$; t.

36. $\frac{x-a}{b-x}=\frac{x-b}{a-x}$; x.

37. $r=\frac{2ml}{B(n+1)}$; n.

38. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$; q.

39. Densidad de presas En cierta área el número, y, de larvas de polillas consumidas por un solo escarabajo depredador en un periodo determinado, está dado por

$$y=\frac{1.4x}{1+0.09x},$$

en donde x es la *densidad de presas* (el número de larvas por unidad de área). ¿Qué densidad de larvas permitiría sobrevivir a un escarabajo, si éste necesita consumir 10 larvas en el periodo dado?

40. Horas de servicio Supóngase que la razón del número de horas que una tienda de video está abierta al número de clientes diarios es constante. Cuando la tienda está abierta 8 horas, el número de clientes es 92 menos que el número máximo de clientes. Cuando la tienda permanece abierta 10 horas, el número de clientes es 46 menos que el número máximo de clientes. Escriba una ecuación que describa esta situación y determine el número máximo de clientes diarios.

41. Tiempo de viaje El tiempo que le toma a un bote recorrer una distancia dada río arriba (en contra de la corriente), puede calcularse dividiendo la distancia entre la diferencia de la velocidad del bote y la velocidad de la corriente. Escriba una ecuación que calcule el tiempo t que le toma a un bote, que se mueve a una velocidad r en contra de una corriente c, recorrer una distancia d. Resuelva su ecuación para r.

42. Longitud de una rampa La diferencia entre la longitud de una rampa y la longitud horizontal que cubre es de 5 pies. El cuadrado de la distancia vertical que cubre la rampa es 45 pies cuadrados. Escriba una ecuación para la diferencia y resuélvala. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

43. Horizonte de la radio El rango de trasmisión, en metros, de un trasmisor VHF de radio, es 4.1 veces la raíz cuadrada de la altura por encima del suelo de la antena, medida en metros. La antena A se coloca 8.25 m más arriba que la antena B y puede trasmitir 6.15 km más lejos. ¿Qué tan arriba del suelo están colocadas las antenas A y B?

44. Derrape de un automóvil La policía ha usado la fórmula $s=\sqrt{30\,fd}$ para estimar la velocidad s (en millas por hora) de un automóvil, si éste derrapó un tramo de d pies cuando se detuvo. La literal f es el coeficiente de fricción, determinado por la clase de camino (como concreto, asfalto, grava o alquitrán) y si está húmedo o seco. Algunos valores de f se dan en la tabla 1.1. ¿A 40 millas por hora, aproximadamente cuántos pies derrapará un automóvil en un camino de concreto seco? Dé la respuesta al pie más cercano.

TABLA 1.1

	Concreto	Alquitrán
Húmedo	0.4	0.5
Seco	0.8	1.0

OBJETIVO Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de factorización o con la fórmula cuadrática.

1.3 Ecuaciones cuadráticas

Para aprender cómo resolver problemas más complejos, pasemos a los métodos de solución de *ecuaciones cuadráticas*.

Definición

Una ***ecuación cuadrática*** en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes y $a\neq 0$.

Una ecuación cuadrática también se conoce como *ecuación de segundo grado* o *ecuación de grado dos,* ya que la potencia más grande que aparece en ella es la segunda. Mientras que una ecuación lineal sólo tiene una raíz, una ecuación cuadrática puede tener dos raíces diferentes.

Solución por factorización

Un método útil para resolver ecuaciones cuadráticas se basa en la factorización, como lo muestran los ejemplos siguientes.

Principios en práctica 1

Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

Un número elevado al cuadrado es 30 veces más que el número. ¿Cuál es el número?

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

a. *Resolver* $x^2 + x - 12 = 0$.

Solución: el lado izquierdo se factoriza con facilidad:

$$(x - 3)(x + 4) = 0.$$

Piense en esto como dos cantidades, $x - 3$ y $x + 4$, cuyo producto es cero. **Siempre que el producto de dos o más números sea *cero*, entonces, al menos uno de los números *debe* ser cero.** Esto significa que

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 4 = 0.$$

Resolviendo éstas tenemos $x = 3$ y $x = -4$. Por tanto, la raíces de la ecuación original son 3 y –4, y el conjunto solución es $\{3, -4\}$.

b. *Resolver* $6w^2 = 5w$.

No divida ambos miembros entre w (una variable), ya que esto no garantiza la equivalencia y podríamos "perder" una raíz.

Solución: escribimos la ecuación como

$$6w^2 - 5w = 0,$$

de modo que un miembro sea 0. Factorizando nos da

$$w(6w - 5) = 0.$$

Haciendo cada factor igual a cero, tenemos

$$w = 0 \quad \text{o} \quad 6w - 5 = 0.$$
$$6w = 5.$$

Por tanto, las raíces son $w = 0$ y $w = \frac{5}{6}$. Observe que si hubiésemos dividido ambos miembros de $6w^2 = 5w$ *entre* w y obtenido $6w = 5$, nuestra única solución sería $w = \frac{5}{6}$. Esto es, se habría perdido la raíz $w = 0$. Esto confirma nuestro estudio de la operación 5 en la sección 1.1.

Principios en práctica 2

Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

El área de un mural rectangular, que tiene un ancho de 10 pies menos que su largo, es de 3000 pies cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del mural?

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

Resolver $(3x - 4)(x + 1) = -2$.

Advertencia Usted debe abordar un problema como éste con cuidado. Si el producto de dos cantidades es igual a -2, no es verdadero que al menos una de las dos cantidades debe ser -2. ¿Por qué? **No** debe tomar cada factor igual a -2; al hacerlo así no obtendrá soluciones de la ecuación dada.

Solución: primero multiplicamos los factores del miembro izquierdo:

$$3x^2 - x - 4 = -2.$$

Al reescribirla de modo que 0 aparezca en un miembro, tenemos

$$\begin{aligned} 3x^2 - x - 2 &= 0, \\ (3x + 2)(x - 1) &= 0, \\ x &= -\frac{2}{3}, 1. \end{aligned}$$

Algunas ecuaciones que no son cuadráticas pueden resolverse por factorización, como lo muestra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Resolución de ecuaciones de grado superior por factorización

a. *Resolver* $4x - 4x^3 = 0$.

Solución: ésta es una *ecuación de tercer grado*. Procedemos a resolverla como sigue:

$$\begin{aligned} 4x - 4x^3 &= 0, \\ 4x(1 - x^2) &= 0 && \text{(factorizando),} \\ 4x(1 - x)(1 + x) &= 0 && \text{(factorizando).} \end{aligned}$$

No deje de tomar en cuenta que el factor x da lugar a una raíz.

Al hacer cada uno de los factores igual a cero, obtenemos $4 = 0$ (lo cual es imposible), $x = 0$, $1 - x = 0$, o bien $1 + x = 0$. Así,

$$x = 0, 1, -1,$$

que podemos escribir como $x = 0, \ \pm 1$.

b. *Resolver* $x(x + 2)^2(x + 5) + x(x + 2)^3 = 0$.

Solución: factorizando $x(x + 2)^2$ en ambos términos del miembro izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned} x(x + 2)^2[(x + 5) + (x + 2)] &= 0, \\ x(x + 2)^2(2x + 7) &= 0. \end{aligned}$$

De aquí que, $x = 0$, $x + 2 = 0$, o bien $2x + 7 = 0$, de lo cual concluimos que $x = 0, -2, -\frac{7}{2}$.

Principios en práctica 3

Resolución de una ecuación de grado más alto por factorización

Un prisma rectangular, con base cuadrada y altura que es 5 veces más larga que su ancho, tiene un volumen que es igual a 5 veces su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del prisma rectangular?

EJEMPLO 4 Una ecuación fraccionaria que se reduce a una ecuación cuadrática

Resolver

$$\frac{y + 1}{y + 3} + \frac{y + 5}{y - 2} = \frac{7(2y + 1)}{y^2 + y - 6}. \quad \textbf{(2)}$$

Solución: multiplicando ambos lados por el MCD, $(y + 3)(y - 2)$, obtenemos

$$(y - 2)(y + 1) + (y + 3)(y + 5) = 7(2y + 1). \quad \textbf{(3)}$$

Ya que la ecuación (2) se multiplicó por una expresión que incluye a la variable y, recuerde (de la sección 1.1) que la ecuación (3) no es necesariamente equivalente a la (2). Después de simplificar la ecuación (3) tenemos

$$2y^2 - 7y + 6 = 0 \quad \text{(ecuación cuadrática)},$$
$$(2y - 3)(y - 2) = 0 \quad \text{(factorizando)}.$$

Por tanto, $\frac{3}{2}$ y 2 son *posibles* raíces de la ecuación dada. Pero 2 no puede ser raíz de la ecuación (2) ya que la sustitución conduce a un denominador de 0. Sin embargo, debemos verificar que $\frac{3}{2}$ en verdad satisface la ecuación *original* para concluir así que es la raíz.

No concluya de manera precipitada que la solución de $x^2 = 3$ sólo consiste en $x = \sqrt{3}$.

Principios en práctica 4

Solución por medio de factorización

Si usted ganó $225 por la venta de x artículos a x dólares cada uno, ¿cuántos artículos vendió y a qué precio vendió cada uno de ellos?

EJEMPLO 5 Solución por factorización

Resolver $x^2 = 3$.

Solución:

$$x^2 = 3,$$
$$x^2 - 3 = 0.$$

Factorizando, obtenemos

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0.$$

Por tanto, $x - \sqrt{3} = 0$ o bien $x + \sqrt{3} = 0$, de modo que $x = \pm\sqrt{3}$.

Una forma más general de la ecuación $x^2 = 3$, es $u^2 = k$. Como antes, podemos mostrar lo siguiente

$$\text{Si } u^2 = k, \quad \text{entonces} \quad u = \pm\sqrt{k}. \qquad (4)$$

Fórmula cuadrática

Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización puede ser muy difícil, como es evidente al tratar ese método en la ecuación $0.7x^2 - \sqrt{2}x - 8\sqrt{5} = 0$. Sin embargo, existe una fórmula llamada *fórmula cuadrática*[5] que da las raíces de cualquier ecuación cuadrática

Fórmula cuadrática

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Advertencia Asegúrese de utilizar la fórmula cuadrática correctamente.

$$x \neq -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

[5] Una deducción de la fórmula cuadrática aparece en la sección 1.4.

Principios en práctica 5
Una ecuación cuadrática con dos raíces reales

Supóngase que la altura h, en pies, de fuegos artificiales lanzados directamente hacia arriba desde el nivel del suelo, está dada por $h = 160t - 16t^2$, en donde t está en segundos. ¿En cuánto tiempo los fuegos artificiales estarán a 300 pies del suelo?

EJEMPLO 6 Una ecuación cuadrática con dos raíces reales

Resolver $4x^2 - 17x + 15 = 0$ *mediante la fórmula cuadrática.*

Solución: aquí $a = 4$, $b = -17$ y $c = 15$. Por tanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(4)(15)}}{2(4)}$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8}.$$

Las raíces son $\frac{17+7}{8} = \frac{24}{8} = 3$ y $\frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

Principios en práctica 6
Una ecuación cuadrática con una raíz real

Supóngase que el ingreso semanal r de una compañía está dado por la ecuación $r = -2p^2 + 400p$, en donde p es el precio del producto que vende la compañía. ¿Cuál es el precio del producto si el ingreso semanal es de $20,000?

EJEMPLO 7 Una ecuación cuadrática con una raíz real

Resolver $2 + 6\sqrt{2}y + 9y^2 = 0$ *por medio de la fórmula cuadrática.*

Solución: vea el acomodo de los términos. Aquí $a = 9$, $b = 6\sqrt{2}$, y $c = 2$. Por lo que,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2(9)}.$$

Así,

$$y = \frac{-6\sqrt{2} + 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{o} \quad y = \frac{-6\sqrt{2} - 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Por tanto, la única raíz es $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Principios en práctica 7
Una ecuación cuadrática sin raíces reales

Supóngase que la altura h, en pies, de fuegos artificiales lanzados directamente hacia arriba, desde el nivel del piso, está dada por $h = 160t - 16t^2$, en donde t está en segundos. ¿Cuándo estarán los fuegos artificiales a 500 pies del piso?

EJEMPLO 8 Una ecuación cuadrática sin raíces reales

Resolver por medio de la fórmula cuadrática $z^2 + z + 1 = 0$.

Solución: aquí $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Las raíces son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Ahora $\sqrt{-3}$ denota un número cuyo cuadrado es -3. Sin embargo, no existe tal número real, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. Entonces la ecuación no tiene raíces reales.[6]

[6] $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ puede expresarse como $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, en donde $i = \sqrt{-1}$ se denomina *unidad imaginaria*.

Esto describe la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.

De los ejemplos 6 al 8 puede verse que una ecuación cuadrática tiene dos raíces reales y diferentes, una raíz real, o bien no tiene raíces reales, dependiendo de que $b^2 - 4ac > 0$, $= 0$ o < 0, respectivamente.

Tecnología

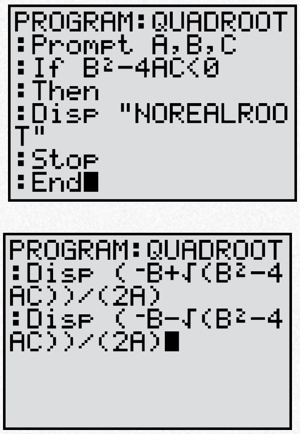


FIGURA 1.2 Programa para encontrar las raíces reales de $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Mediante la característica de programación de una calculadora gráfica, puede crearse un programa que proporcione las raíces reales de la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$. La figura 1.2 muestra un programa para la calculadora gráfica TI-83. A fin de ejecutarlo para

$$20x^2 - 33x + 10 = 0,$$

se le pide que introduzca los valores de A, B y C (véase la fig. 1.3). Las raíces resultantes son $x = 1.25$ y $x = 0.4$.

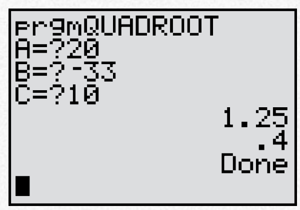


FIGURA 1.3 Raíces de $20x^2 - 33x + 10 = 0$.

Formas cuadráticas

Algunas veces una ecuación que no es cuadrática puede transformarse en cuadrática por medio de una sustitución adecuada. En este caso se dice que la ecuación dada tiene **forma cuadrática.** El ejemplo siguiente lo ilustrará.

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación que tiene forma cuadrática

Resolver $\dfrac{1}{x^6} + \dfrac{9}{x^3} + 8 = 0.$

Solución: esta ecuación puede escribirse como

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{x^3}\right) + 8 = 0.$$

de modo que es cuadrática en $1/x^3$, por lo que tiene forma cuadrática. Al sustituir la variable w por $1/x^3$ obtenemos una ecuación cuadrática en la variable w, la cual podemos resolver:

$$w^2 + 9w + 8 = 0,$$
$$(w + 8)(w + 1) = 0,$$
$$w = -8 \quad \text{o} \quad w = -1.$$

No suponga que -8 y -1 son soluciones de la ecuación *original*.

Regresando a la variable x, tenemos

$$\frac{1}{x^3} = -8 \quad \text{o} \quad \frac{1}{x^3} = -1.$$

Así,

$$x^3 = -\frac{1}{8} \quad \text{o} \quad x^3 = -1.$$

de lo cual se concluye que

$$x = -\frac{1}{2}, -1.$$

Al verificar, encontramos que estos valores de x satisfacen la ecuación original.

Ejercicio 1.3

En los problemas del 1 al 30 resuelva por factorización.

1. $x^2 - 4x + 4 = 0.$

2. $t^2 + 3t + 2 = 0.$

3. $y^2 - 7y + 12 = 0.$

4. $x^2 + x - 12 = 0.$

5. $x^2 - 2x - 3 = 0.$

6. $x^2 - 16 = 0.$

7. $u^2 - 13u = -36.$

8. $3w^2 - 12w + 12 = 0.$

9. $x^2 - 4 = 0.$

10. $2x^2 + 4x = 0.$

11. $z^2 - 8z = 0.$

12. $x^2 + 9x = -14.$

13. $4x^2 + 1 = 4x.$

14. $2z^2 + 9z = 5.$

15. $y(2y + 3) = 5.$

16. $8 + 2x - 3x^2 = 0.$

17. $-x^2 + 3x + 10 = 0.$

18. $\frac{1}{7}y^2 = \frac{3}{7}y.$

19. $2p^2 = 3p.$

20. $-r^2 - r + 12 = 0.$

21. $x(x + 4)(x - 1) = 0.$

22. $(x - 2)^2(x + 1)^2 = 0.$

23. $x^3 - 64x = 0.$

24. $x^3 - 4x^2 - 5x = 0.$

25. $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0.$

26. $(x + 1)^2 - 5x + 1 = 0.$

27. $(x + 3)(x^2 - x - 2) = 0.$

28. $3(x^2 + 3x - 10)(x - 8) = 0.$

29. $p(p - 3)^2 - 4(p - 3)^3 = 0.$

30. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$

En los problemas del 31 al 44 encuentre todas las raíces reales usando la fórmula cuadrática.

31. $x^2 + 2x - 24 = 0.$

32. $x^2 - 2x - 15 = 0.$

33. $4x^2 - 12x + 9 = 0.$

34. $p^2 + 2p = 0.$

35. $p^2 - 7p + 3 = 0.$

36. $2 - 2x + x^2 = 0.$

37. $4 - 2n + n^2 = 0.$

38. $2x^2 + x = 5.$

39. $6x^2 + 7x - 5 = 0.$

40. $w^2 - 2\sqrt{2}w + 2 = 0.$

41. $0.02w^2 - 0.3w = 20.$

42. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0.$

43. $2x^2 + 4x = 5.$

44. $-2x^2 - 6x + 5 = 0.$

En los problemas del 45 al 54 resuelva la ecuación dada que tiene forma cuadrática.

45. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0.$

46. $x^4 - 3x^2 - 10 = 0.$

47. $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x} - 2 = 0.$

48. $x^{-2} + x^{-1} - 12 = 0.$

49. $x^{-4} - 9x^{-2} + 20 = 0.$

50. $\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{9}{x^2} + 8 = 0.$

51. $(x-3)^2 + 9(x-3) + 14 = 0.$

52. $(x+5)^2 - 8(x+5) = 0.$

53. $\dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{12}{x-2} + 35 = 0.$

54. $\dfrac{2}{(x+4)^2} + \dfrac{7}{x+4} + 3 = 0.$

En los problemas del 55 al 76 resuelva por cualquier método.

55. $x^2 = \dfrac{x+3}{2}.$

56. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{x} - \dfrac{5}{2}.$

57. $\dfrac{3}{x-4} + \dfrac{x-3}{x} = 2.$

58. $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{6}{2x+1} = 5.$

59. $\dfrac{6x+7}{2x+1} - \dfrac{6x+1}{2x} = 1.$

60. $\dfrac{6(w+1)}{2-w} + \dfrac{w}{w-1} = 3.$

61. $\dfrac{2}{r-2} - \dfrac{r+1}{r+4} = 0.$

62. $\dfrac{2x-3}{2x+5} + \dfrac{2x}{3x+1} = 1.$

63. $\dfrac{y+1}{y+3} + \dfrac{y+5}{y-2} = \dfrac{14y+7}{y^2+y-6}.$

64. $\dfrac{3}{t+1} + \dfrac{4}{t} = \dfrac{12}{t+2}.$

65. $\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{2}{x^2}.$

66. $5 - \dfrac{3(x+3)}{x^2+3x} = \dfrac{1-x}{x}.$

67. $\sqrt{2x-3} = x-3.$

68. $3\sqrt{x+4} = x-6.$

69. $q + 2 = 2\sqrt{4q-7}.$

70. $x + \sqrt{4x} - 3 = 0.$

71. $\sqrt{x+7} - \sqrt{2x} - 1 = 0.$

72. $\sqrt{x} - \sqrt{2x-8} - 2 = 0.$

73. $\sqrt{x} - \sqrt{2x+1} + 1 = 0.$

74. $\sqrt{y-2} + 2 = \sqrt{2y+3}.$

75. $\sqrt{x+5} + 1 = 2\sqrt{x}.$

76. $\sqrt{\sqrt{x}+2} = \sqrt{2x-4}.$

En los problemas 77 y 78 encuentre las raíces, redondeadas a dos decimales.

77. $0.04x^2 - 2.7x + 8.6 = 0.$

78. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0.$

---

79. Geometría El área de una pintura rectangular, con ancho 2 pulgadas menor que el largo, es de 48 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son las dimensiones de la pintura?

80. Temperatura La temperatura se ha elevado X grados por día durante X días. Hace X días fue de 15 grados. Hoy es de 51 grados. ¿Cuánto se ha elevado la temperatura por día? ¿Durante cuántos días se ha estado elevando?

81. Economía Una raíz de la ecuación económica

$$\overline{M} = \frac{Q(Q+10)}{44}$$

es $-5 + \sqrt{25 + 44\overline{M}}$. Verifique esto utilizando la fórmula cuadrática para despejar Q en términos de $\overline{M}$. Aquí Q es el ingreso real y $\overline{M}$ es el nivel de oferta de dinero.

82. Dieta para ratas Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteínas.[7] La proteína estaba compuesta de levadura y harina de maíz. Al cambiar el porcentaje P (expresado como un decimal) de levadura en la mezcla de la proteína, el grupo estimó que el promedio de aumento de peso g (en gramos) en una rata durante cierto periodo estaba dado por

$$g = -200P^2 + 200P + 20.$$

¿Cuál es el porcentaje de levadura que da un aumento promedio de peso de 70 gramos?

83. Dosis de droga Existen varias reglas para determinar las dosis de las medicinas para niños una vez especificadas las de los adultos. Tales reglas pueden tener como base el peso, la altura, etc. Si A es la edad del niño, d es la dosis para adulto y c la dosis para niño, a continuación se presentan dos reglas.

Regla de Young: $c = \dfrac{A}{A+12}d.$

Regla de Cowling: $c = \dfrac{A+1}{24}d.$

¿A qué edad las dosis para niños son las mismas usando estas reglas? Redondee al año más cercano.

[7]Adaptado de R. Bressani, "The use of Yeast in Human Foods", en R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (editores), *Single-Cell Protein* (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

84. Precio de envío de un bien En un estudio acerca del precio de envío de un bien desde una fábrica a un cliente, DeCaino[8] plantea y resuelve las dos ecuaciones cuadráticas siguientes

$$(2n - 1)v^2 - 2nv + 1 = 0,$$

y

$$nv^2 - (2n + 1)v + 1 = 0,$$

donde $n \geq 1$.

a. Resuelva la primera ecuación para v.
b. Resuelva la segunda ecuación para v si $v < 1$.

85. Óptica Un objeto está a 120 cm de una pared. Para enfocar la imagen del objeto sobre la pared, se utiliza una lente convergente con longitud focal de 24 cm. La lente se coloca entre el objeto y la pared, a una distancia de p centímetros del objeto, donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{120 - p} = \frac{1}{24}.$$

Determine p, redondeada a un decimal.

86. Física Un termómetro con resistencias de platino, de ciertas especificaciones, opera de acuerdo con la ecuación

$$R = 10{,}000 + (4.124 \times 10^{-2})T - (1.779 \times 10^{-5})T^2,$$

donde R es la resistencia (en ohms) del termómetro a la temperatura T (en grados Celsius). Si $R = 13.946$, determine el valor correspondiente de T. Redondee su respuesta al grado Celsius más cercano. Suponga que tal termómetro sólo se utiliza si $T < 600°\text{C}$.

87. Movimiento Suponga que la altura h de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$h = 44.1t - 4.9t^2,$$

donde h está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos.

a. ¿Después de cuántos segundos el objeto golpea el piso?
b. ¿Cuándo se encuentra a una altura de 88.2 m?

En los problemas del 88 al 93 utilice un programa para determinar las raíces reales de la ecuación. Redondee las respuestas a tres decimales. Para los problemas 88 y 89, confirme sus resultados de manera algebraica.

88. $2x^2 - 3x - 27 = 0.$

89. $8x^2 - 18x + 9 = 0.$

90. $15x^2 + 7x - 3 = 0.$

91. $27x^2 - \frac{11}{8}x + 5 = 0.$

92. $\frac{9}{2}z^2 - 6.3 = \frac{z}{3}(1.1 - 7z).$

93. $(\pi t - 4)^2 = 4.1t - 3.$

1.4 Deducción de la fórmula cuadrática

A continuación se presenta una deducción de la fórmula cuadrática. Suponga que $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación cuadrática. Ya que $a \neq 0$, podemos dividir ambos miembros entre a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Si sumamos a ambos lados $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, entonces el miembro izquierdo se factoriza como el cuadrado de un binomio:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Esta ecuación tiene la forma $u^2 = k$, así, de la ecuación (4) en la sección 1.3,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

[8]S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Revolution", *Quarterly Journal of Economics,* XCIX, núm. 2 (1984), 329-349.