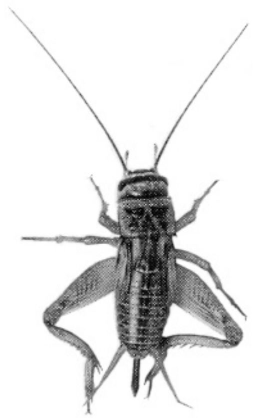


CAPÍTULO 1

Ecuaciones

Cuando se trabaja con un problema de aplicación de la vida real, con frecuencia nos encontramos con una o más ecuaciones que modelan dicha situación. Muchos fenómenos pueden describirse utilizando ecuaciones lineales, que son el tipo más simple para trabajar.

Un ejemplo es el chirrido del grillo del árbol de nieve (*Oecanthulus niveus*), que se encuentra en el medio oeste de Estados Unidos. A finales de 1890, los naturalistas establecieron que cuando este grillo chirría (lo cual hace sólo al final del verano), la velocidad del chirrido de N chirridos por minuto está relacionada con la temperatura del aire T en grados Fahrenheit por medio de la ecuación.

$$N = 4.7T - 190.$$[1]

Cuando T aumenta, también lo hace N, lo cual significa que el grillo chirría más rápido en clima cálido. Para predecir la velocidad de chirrido a partir de la temperatura, simplemente multiplicamos la temperatura por 4.7 y restamos 190. Por ejemplo, cuando la temperatura es de 60 grados, el grillo chirría a una velocidad de $4.7(60) - 190 = 92$ chirridos por minuto.

¿Podemos utilizar los chirridos del grillo como un termómetro para indicar la temperatura? Sí. Primero debemos despejar a T de la ecuación, utilizando las técnicas que se explicarán en este capítulo. El resultado es:

$$T = \frac{N + 190}{4.7}.$$

Esto significa que si en una tarde de agosto en Nebraska, sentados en el exterior oímos un grillo que emite 139 chirridos por minuto, entonces sabemos que la temperatura es alrededor de $(139 + 190)/4.7 = 70$ grados.

En este capítulo, desarrollaremos técnicas para resolver no sólo las ecuaciones lineales, sino también las cuadráticas.

[1] C. A. Bessey y E. A. Bessey, "Further Notes on Thermometer Crickets". *American Naturalist,* 32 (1898), 263-264.

OBJETIVO Estudiar las ecuaciones equivalentes y desarrollar técnicas para resolver ecuaciones lineales, que incluyan las ecuaciones con literales.

1.1 Ecuaciones lineales

Ecuaciones

Una **ecuación** es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus **lados** o **miembros**, y están separadas por el **signo de igualdad** "=".

Principios en práctica 1
Ejemplos de ecuaciones

Usted está empacando material de cercado para un jardín rectangular en el que el largo es 2 pies mayor que el ancho. Escriba una ecuación que represente los pies lineales P necesarios para un jardín con ancho w.

EJEMPLO 1 Ejemplos de ecuaciones

a. $x + 2 = 3.$ **b.** $x^2 + 3x + 2 = 0.$

c. $\dfrac{y}{y-4} = 6.$ **d.** $w = 7 - z.$

En el ejemplo 1 cada ecuación contiene al menos una variable. Una **variable** es un símbolo que puede ser reemplazado por un número cualquiera de un conjunto de números diferentes. Los símbolos más comunes para las variables son las últimas letras del alfabeto, x, y, z, w y t. De aquí que se diga de (a) y (c) que son ecuaciones en las variables x y y, respectivamente. La ecuación (d) es una ecuación en las variables w y z. En la ecuación $x + 2 = 3$, los números 2 y 3 se conocen como *constantes*, ya que son números fijos.

Aquí estudiamos las restricciones sobre las variables.

Nunca permitamos que en una ecuación haya una variable que tenga un valor para el cual esa ecuación no esté definida. Por tanto, en

$$\frac{y}{y-4} = 6,$$

y no puede ser 4, porque provocaría que el denominador fuese cero (no podemos dividir entre cero). En algunas ecuaciones los valores permisibles de una variable están restringidos por razones físicas. Por ejemplo, si la variable t representa el tiempo, los valores negativos de t pueden no tener sentido. Entonces debemos suponer que $t \geq 0$.

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores se conocen como *soluciones* de la ecuación y se dice que *satisfacen* la ecuación. Cuando sólo está implicada una variable, una solución también se conoce como **raíz.** Al conjunto de todas las soluciones se le llama **conjunto solución** de la ecuación. En ocasiones, a una letra que representa una cantidad desconocida en una ecuación se le denomina *incógnita* (o *indeterminada*). Ahora ilustraremos estos términos.

EJEMPLO 2 Terminología para las ecuaciones

a. En la ecuación $x + 2 = 3$, la variable x es la incógnita. Obviamente el único valor de x que satisface la ecuación es 1. De aquí que 1 sea una raíz y el conjunto solución sea $\{1\}$.

b. -2 es una raíz de $x^2 + 3x + 2 = 0$ porque sustituir -2 por x hace que la ecuación sea verdadera: $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$.

c. $w = 7 - z$ es una ecuación con dos incógnitas. Una solución es la pareja de valores $w = 4$ y $z = 3$. Sin embargo, existe una infinidad de soluciones. ¿Podría pensar en otra?

Ecuaciones equivalentes

Resolver una ecuación puede implicar la realización de operaciones en ella. Es preferible que al aplicar cualquiera de tales operaciones se obtenga otra ecuación con exactamente las mismas soluciones que la ecuación original. Cuando esto ocurre, se dice que las ecuaciones son **equivalentes.** Existen tres operaciones que garantizan la equivalencia:

1. Sumar (o restar) el mismo polinomio[2] a (de) ambos miembros de una ecuación, en donde el polinomio está en la misma variable que aparece en la ecuación.

Por ejemplo, si $-5x = 5 - 6x$, entonces sumar $6x$ a ambos miembros nos da la ecuación equivalente $-5x + 6x = 5 - 6x + 6x$, o $x = 5$.

La equivalencia no se garantiza si ambos lados se multiplican o dividen por una expresión que incluya una variable.

2. Multiplicar (dividir) ambos miembros de una ecuación por la misma constante, excepto el cero.

Por ejemplo, si $10x = 5$, entonces dividir ambos miembros entre 10 nos da la ecuación equivalente $\frac{10x}{10} = \frac{5}{10}$, o $x = \frac{1}{2}$.

3. Reemplazar cualquiera de los miembros de una ecuación por una expresión igual (equivalente).

Por ejemplo, si $x(x + 2) = 3$, entonces reemplazar el miembro izquierdo por la expresión equivalente $x^2 + 2x$, da la ecuación equivalente $x^2 + 2x = 3$.

Repetimos: la aplicación de las operaciones, de la 1 a la 3, garantiza que la ecuación resultante sea equivalente a la original. Sin embargo, algunas veces, para resolver una ecuación, tenemos que aplicar otras operaciones, distintas de la 1 a la 3. Estas operaciones *no* necesariamente resultan en ecuaciones equivalentes. Se incluyen las siguientes.

Operaciones que pueden no producir ecuaciones equivalentes

4. Multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable.

5. Dividir ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable.

6. Elevar ambos miembros de una ecuación al mismo exponente.

La operación 6 incluye tomar raíces en ambos miembros.

Ilustraremos las últimas tres operaciones. Por ejemplo, por inspección la única raíz de $x - 1 = 0$ es 1. Multiplicar cada miembro por x (operación 4) nos da $x^2 - x = 0$, ecuación que se satisface si x es 0 o 1 (verifique esto por sustitución). Pero 0 *no* satisface la ecuación *original*. Por tanto, las ecuaciones no son equivalentes.

Asimismo, puede verificar que la ecuación $(x - 4)(x - 3) = 0$ se satisface cuando x es 4 o 3. Dividir ambos miembros entre $x - 4$ (operación 5) nos da $x - 3 = 0$, cuya única raíz es 3. Otra vez no tenemos una equivalencia, ya que, en este caso, se ha "perdido" una raíz. Observe que cuando x es 4, la división entre $x - 4$ implica dividir entre 0, una operación que no es válida.

[2]Véase la sección 0.6 para una definición de polinomio.

Por último, elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación $x = 2$ (operación 6) da $x^2 = 4$, la cual es verdadera si $x = 2$ o -2. Pero -2 no es raíz de la ecuación original.

De este estudio, queda claro que cuando realicemos las operaciones 4 al 6, debemos ser cuidadosos acerca de las conclusiones concernientes a las raíces de una ecuación dada. Las operaciones 4 y 6, *pueden* producir una ecuación con más raíces. Por tanto, se debe verificar si la "solución" obtenida por estas operaciones satisface o no la ecuación *original*. La operación 5 *puede* producir una ecuación con menos raíces. En este caso, cualquier raíz "perdida" tal vez nunca pueda determinarse. Por ello, si es posible, evite efectuar la operación 5.

En resumen, una ecuación puede pensarse como un conjunto de restricciones sobre cualquier variable de la ecuación. Las operaciones 4, 5 y 6 pueden aumentar o disminuir las restricciones, lo que da lugar a soluciones diferentes de la ecuación original. Sin embargo, las operaciones 1, 2 y 3 nunca afectan las restricciones.

Tecnología

Una calculadora gráfica puede utilizarse para comprobar una raíz. Por ejemplo, suponga que queremos determinar si 3/2 es una raíz de la ecuación

$$2x^3 + 7x^2 = 19x + 60.$$

Primero, reescribimos la ecuación de modo que un miembro sea 0. Restar $19x + 60$ de ambos miembros nos da la ecuación equivalente

$$2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0.$$

En una calculadora gráfica TI-83 ingresamos la expresión $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60$ como Y_1 y después evaluamos Y_1 en $x = 3/2$. La figura 1.1 muestra que el resultado es –66, el cual es diferente de cero. Por tanto, 3/2 no es una raíz. Sin embargo, si Y_1 es evaluada en $x = -5/2$ esto nos *da* 0. De modo que $-5/2$ es una raíz de la ecuación original.

Conviene destacar que si la ecuación original hubiera estado en términos de la variable t,

$$2t^3 + 7t^2 = 19t + 60,$$

entonces debemos reemplazar t por x, ya que la calculadora evalúa Y_1 en un valor específico de x, no de t.

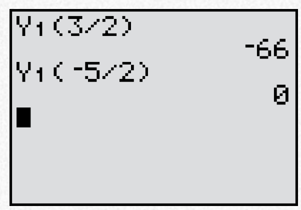


FIGURA 1.1 Para $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0$, $^3/_2$ no es raíz, pero $^{-5}/_2$ sí lo es.

Ecuaciones lineales

Los principios presentados hasta aquí se demostrarán ahora en la solución de una *ecuación lineal*.

Definición

Una ***ecuación lineal*** en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax + b = 0, \tag{1}$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Una ecuación lineal también se conoce como ecuación de primer grado o ecuación de grado uno, ya que la potencia más alta de la variable que aparece en la ecuación (1) es la primera.

Para resolver una ecuación lineal realizamos operaciones en ella hasta obtener una ecuación equivalente cuyas soluciones son *obvias*. Esto significa una ecuación en la que la variable queda aislada en un lado de la ecuación, como lo muestran los ejemplos siguientes.

Principios en práctica 2
Resolución de una ecuación lineal

El ingreso total de una cafetería con base en la venta de x cafés especiales está dado por $r = 2.25x$, y sus costos totales diarios están dados por $c = 0.75x + 300$. ¿Cuántos cafés especiales se necesitan vender cada día para obtener el punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo el ingreso es igual a los costos?

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $5x - 6 = 3x$.

Solución: empezamos por dejar los términos que incluyen a x en un lado y las constantes en el otro. Entonces despejamos x por medio de las operaciones matemáticas adecuadas. Tenemos

$$\begin{aligned}
5x - 6 &= 3x, & \\
5x - 6 + (-3x) &= 3x + (-3x) & &\text{(sumando } -3x \text{ a ambos miembros),}\\
2x - 6 &= 0 & &\text{(simplificando, esto es, operación 3),}\\
2x - 6 + 6 &= 0 + 6 & &\text{(sumando 6 a ambos miembros),}\\
2x &= 6 & &\text{(simplificando),}\\
\frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} & &\text{(dividiendo ambos miembros entre 2),}\\
x &= 3. & &
\end{aligned}$$

Es claro que 3 es la única raíz de la última ecuación. Como cada ecuación es equivalente a la anterior, concluimos que 3 debe ser la única raíz de $5x - 6 = 3x$. Esto es, el conjunto solución es $\{3\}$. Podemos describir el primer paso en la solución de una ecuación como el mover un término de un lado a otro cambiando su signo; esto por lo regular se conoce como *transponer*. Observe que como la ecuación original puede escribirse en la forma $2x + (-6) = 0$, resulta ser una ecuación lineal.

Principios en práctica 3
Resolución de una ecuación lineal

Mónica y Pedro han convenido en juntar sus ahorros cuando hayan ahorrado la misma cantidad de dinero. Mónica puede ahorrar \$40 semanales, pero ella primero debe usar \$125 para pagar la deuda de su tarjeta de crédito. Pedro ha ahorrado \$35 semanales durante tres semanas. ¿Dentro de cuánto tiempo juntarán sus ahorros? ¿Cuánto habrá ahorrado cada uno de ellos?

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $2(p + 4) = 7p + 2$.

Solución: primero quitamos los paréntesis. Después agrupamos los términos semejantes y resolvemos. Tenemos

$$\begin{aligned}
2(p + 4) &= 7p + 2 & &\\
2p + 8 &= 7p + 2 & &\text{(propiedad distributiva),}\\
2p &= 7p - 6 & &\text{(restando 8 de ambos lados),}\\
-5p &= -6 & &\text{(restando 7p de ambos lados),}\\
p &= \frac{-6}{-5} & &\text{(dividiendo ambos lados entre } -5\text{),}\\
p &= \frac{6}{5}. & &
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $\dfrac{7x+3}{2} - \dfrac{9x-8}{4} = 6.$

Solución: primero eliminamos fracciones multiplicando *ambos* lados de la ecuación por el mínimo común denominador (MCD),[3] que es 4. Después efectuamos varias operaciones algebraicas para obtener una solución. Así,

La propiedad distributiva requiere de que *ambos* términos en el paréntesis sean multiplicados por 4.

$$4\left(\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4}\right) = 4(6),$$

$$4 \cdot \frac{7x+3}{2} - 4 \cdot \frac{9x-8}{4} = 24 \qquad \text{(propiedad distributiva),}$$

$$2(7x+3) - (9x-8) = 24 \qquad \text{(simplificando),}$$

$$14x + 6 - 9x + 8 = 24 \qquad \text{(propiedad distributiva),}$$

$$5x + 14 = 24 \qquad \text{(simplificando),}$$

$$5x = 10 \qquad \text{(restando 14 de ambos lados),}$$

$$x = 2 \qquad \text{(dividiendo ambos lados entre 5).}$$

Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz.

Cada ecuación de los ejemplos 3 al 5 tiene una sola raíz. Esto es cierto para toda ecuación lineal en una variable.

Ecuaciones con literales

Las ecuaciones en las que algunas de las constantes no están especificadas pero están representadas por letras, tales como *a, b, c* o *d*, se llaman **ecuaciones con literales** y las letras se conocen como **constantes literales** o **constantes arbitrarias.** Por ejemplo, en la ecuación con literales $x + a = 4b$, podemos considerar a *a* y *b* como constantes arbitrarias. Las fórmulas como $I = Prt$, que expresan una relación entre ciertas cantidades, pueden considerarse como ecuaciones con literales. Si queremos expresar una letra en particular en términos de las otras, esta letra es considerada la incógnita.

Principios en práctica 4
Resolución de una ecuación con literales

La fórmula $d = rt$ proporciona la distancia d que un objeto recorre viajando a una velocidad r durante un tiempo t. ¿Cuál es la velocidad r de un tren que viaja d millas en t horas?

EJEMPLO 6 Resolución de ecuaciones con literales

a. *La ecuación $I = Prt$ es la fórmula para el interés simple I sobre un capital de P dólares a una tasa de interés anual r en un periodo de t años. Expresar r en términos de I, P y t.*

Solución: aquí consideramos que r será la incógnita. Para aislar a r dividimos ambos lados entre Pt. Tenemos

$$I = Prt,$$

$$\frac{I}{Pt} = \frac{Prt}{Pt},$$

$$\frac{I}{Pt} = r \quad \text{o} \quad r = \frac{I}{Pt}.$$

[3]El mínimo común denominador de dos o más fracciones es el número más pequeño con todos los denominadores como factores. Esto es, el MCD es el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

Cuando dividimos ambos lados entre Pt, suponemos que $Pt \neq 0$, ya que no podemos dividir entre 0. Suposiciones semejantes se harán al resolver otras ecuaciones con literales.

b. *La ecuación $S = P + Prt$ es la fórmula para el valor S de una inversión de un capital de P dólares a un interés anual simple r durante un periodo de t años. Resolver para P.*

Solución:

$$S = P + Prt,$$

$$S = P(1 + rt) \qquad \text{(factorizando)},$$

$$\frac{S}{1 + rt} = P \qquad \text{(dividiendo ambos lados entre } 1 + rt\text{)}.$$

■

Principios en práctica 5

Resolución de una ecuación con literales

La fórmula $S = 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ proporciona el área de la superficie S de una esfera con diámetro d. ¿Cuál es la longitud del lado de la caja más pequeña que podrá contener una bola con área de superficie igual a S?

EJEMPLO 7 Resolución de una ecuación con literales

Resolver $(a + c)x + x^2 = (x + a)^2$ para x.

Solución: primero debemos simplificar la ecuación y después colocar todos los términos que incluyan a x en un lado:

$$(a + c)x + x^2 = (x + a)^2,$$

$$ax + cx + x^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$ax + cx = 2ax + a^2,$$

$$cx - ax = a^2,$$

$$x(c - a) = a^2,$$

$$x = \frac{a^2}{c - a}.$$

■

Ejercicio 1.1

En los problemas del 1 al 6 determine por sustitución cuáles de los números dados satisfacen la ecuación.

1. $9x - x^2 = 0$; $1, 0$.

2. $20 - 9x = -x^2$; $5,4$.

3. $y + 2(y - 3) = 4$; $\frac{10}{3}, 1$.

4. $2x + x^2 - 8 = 0$; $2, -4$.

5. $x(6 + x) - 2(x + 1) - 5x = 4$; $-2, 0$.

6. $x(x + 1)^2(x + 2) = 0$; $0, -1, 2$.

En los problemas del 7 al 16 determine qué operaciones se aplicaron a la primera ecuación para obtener la segunda. Establezca si las operaciones garantizan o no que las ecuaciones sean equivalentes. No resuelva las ecuaciones.

7. $x - 5 = 4x + 10$; $x = 4x + 15$.

8. $8x - 4 = 16$; $x - \frac{1}{2} = 2$.

9. $x = 3$; $x^4 = 81$.

10. $\frac{1}{2}x^2 + 3 = x - 9$; $x^2 + 6 = 2x - 18$.

11. $x^2 - 2x = 0$; $x - 2 = 0$.

12. $\dfrac{2}{x - 2} + x = x^2$; $2 + x(x - 2) = x^2(x - 2)$.

13. $\dfrac{x^2-1}{x-1}=3;\ x^2-1=3(x-1).$

14. $x(x+11)(x+9)=x(x+5);$
$(x+11)(x+9)=x+5.$

15. $\dfrac{x(x+1)}{x-5}=x(x+9);\ x+1=(x+9)(x-5).$

16. $2x^2-9=x;\ x^2-\frac{1}{2}x=\frac{9}{2}.$

En los problemas del 17 al 46, resuelva las ecuaciones.

17. $4x=10.$

18. $0.2x=7.$

19. $3y=0.$

20. $2x-4x=-5.$

21. $-5x=10-15.$

22. $3-2x=4.$

23. $5x-3=9.$

24. $\sqrt{2}x+3=8.$

25. $7x+7=2(x+1).$

26. $6z+5z-3=41.$

27. $2(p-1)-3(p-4)=4p.$

28. $t=2-2[2t-3(1-t)].$

29. $\dfrac{x}{5}=2x-6.$

30. $\dfrac{5y}{7}-\dfrac{6}{7}=2-4y.$

31. $7+\dfrac{4x}{9}=\dfrac{x}{2}.$

32. $\dfrac{x}{3}-4=\dfrac{x}{5}.$

33. $q=\dfrac{3}{2}q-4.$

34. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=7.$

35. $3x+\dfrac{x}{5}-5=\dfrac{1}{5}+5x.$

36. $y-\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{y}{5}.$

37. $\dfrac{2y-3}{4}=\dfrac{6y+7}{3}.$

38. $\dfrac{p}{3}+\dfrac{3}{4}p=\dfrac{9}{2}(p-1).$

39. $w+\dfrac{w}{2}-\dfrac{w}{3}+\dfrac{w}{4}=5.$

40. $\dfrac{7+2(x+1)}{3}=\dfrac{6x}{5}.$

41. $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2-x}{6}=x-2.$

42. $\dfrac{x}{5}+\dfrac{2(x-4)}{10}=7.$

43. $\dfrac{9}{5}(3-x)=\dfrac{3}{4}(x-3).$

44. $\dfrac{2y-7}{3}+\dfrac{8y-9}{14}=\dfrac{3y-5}{21}.$

45. $\dfrac{3}{2}(4x-3)=2[x-(4x-3)].$

46. $(3x-1)^2-(5x-3)^2=-(4x-2)^2.$

En los problemas del 47 al 54 exprese el símbolo indicado en términos de los símbolos restantes.

47. $I=Prt;\ P.$

48. $ax+b=0;\ x.$

49. $p=8q-1;\ q.$

50. $p=-3q+6;\ q.$

51. $S=P(1+rt);\ r.$

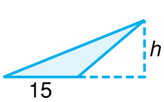
52. $r=\dfrac{2mI}{B(n+1)};\ m.$

53. $S=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n);\ a_1.$

54. $S=\dfrac{R[(1+i)^n-1]}{i};\ R.$

55. Geometría Utilice la fórmula $P=2l+2w$ para determinar el ancho w de un rectángulo con perímetro P de 960 m, cuyo largo l es de 360 m.

56. Geometría Utilice la fórmula $A=\frac{1}{2}bh$ para determinar la altura h de un triángulo con área de 75 cm^2, cuya base b es 15 cm.



57. Impuesto de venta Un agente de ventas necesita calcular el costo de un artículo con un impuesto de venta de 8.25%. Escriba una ecuación que represente el costo total c de un artículo que cuesta x dólares.

58. Ingreso El ingreso mensual total de una guardería obtenido del cuidado de x niños está dado por $r=450x$, y sus costos mensuales totales están dados por $c=380x+3500$. ¿Cuántos niños se necesitan inscribir mensualmente para llegar al punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo los ingresos igualan a los costos?

59. Depreciación lineal Si usted compra un artículo para uso empresarial, al preparar la declaración de impuestos usted puede repartir su costo entre toda la vida útil del artículo. Esto se denomina *depreciación*. Un método de depreciación es la *depreciación lineal*, en la que la depreciación anual se calcula dividiendo el costo del artículo, menos su valor de rescate, entre su vida útil. Supóngase que el costo es C dólares, la vida útil es N años y no hay valor de rescate. Entonces el valor V (en dólares) del artículo al final de n años está dado por

$$V=C\left(1-\frac{n}{N}\right).$$

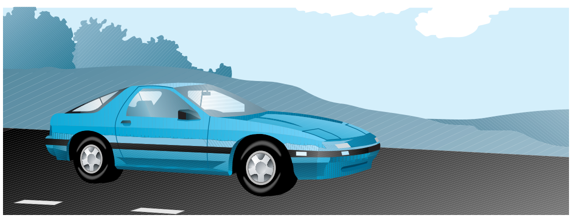
Si el mobiliario nuevo de una oficina se compró por \$3200, tiene una vida útil de 8 años y no tiene valor de rescate, ¿después de cuántos años tendrá un valor de \$2000?

60. Ondas de radar Cuando se utiliza un radar para determinar la velocidad de un automóvil en una autopista, una onda es enviada desde el radar y reflejada por el automóvil en movimiento. La diferencia F (en ciclos por segundo) de la frecuencia entre la onda original y la reflejada está dada por

$$F = \frac{vf}{334.8},$$

donde v es la velocidad del automóvil en millas por hora y f la frecuencia de la onda original (en megaciclos por segundo).

Suponga que usted está manejando en una autopista que tiene un límite de velocidad de 65 millas por hora. Un oficial de la policía dirige una onda de radar con una frecuencia de 2450 megaciclos por segundo a su automóvil y observa que la diferencia en las frecuencias es de 495 ciclos por segundo. ¿El oficial puede reclamarle que iba a exceso de velocidad?



61. Ahorros Paula y Sam quieren comprar una casa, de modo que han decidido ahorrar la cuarta parte de sus respectivos salarios. Paula gana $24.00 por hora y recibe $8.00 extra a la semana, por declinar las prestaciones de la empresa, mientras que Sam gana $28.00 por hora más las prestaciones. Ellos quieren ahorrar al menos $405.00 semanales. Si trabajan el mismo número de horas, ¿cuántas horas debe trabajar cada uno de ellos cada semana?

62. Gravedad La ecuación $h = -4.9t^2 + m$ es la fórmula para la altura h, en metros, de un objeto t segundos después que es soltado desde una posición inicial de m metros. ¿Cuánto tiempo t ha estado cayendo un objeto, si éste ha caído desde una altura m y ahora está a una altura h?

63. Expansión lineal Cuando los objetos sólidos son calentados se expanden en longitud –es la razón por la que en el pavimento y en los puentes se colocan juntas de expansión. Por lo general, cuando la temperatura de un cuerpo sólido de longitud I_0 se incremente desde T_0 hasta T, la longitud, I, del cuerpo está dada por

$$I = I_0[1 + \alpha(T - T_0)],$$

donde α (letra griega *alfa*) se denomina *coeficiente de expansión lineal*. Suponga que una varilla de metal de 1 m de longitud a 0 °C se expande 0.001 m cuando se calienta desde 0 hasta 100 °C. Encuentre el coeficiente de expansión lineal.

64. Relación presa-depredador Para estudiar la relación presa-depredador, se realizó un experimento[4] en el que un sujeto con los ojos vendados, el "depredador", se puso al frente de una mesa cuadrada de 3 pies por lado en la que se colocaron uniformemente distribuidos, discos de papel de lija como "presa". Durante un minuto el "depredador" buscó los discos dando golpecitos suaves con un dedo. Siempre que se encontraba con un disco lo retiraba y reanudaba la búsqueda. El experimento fue repetido para varias densidades de discos (número de discos por 9 pies^2). Se estimó que si y es el número de discos retirados en 1 minuto cuando x discos están en la mesa, entonces

$$y = a(1 - by)x,$$

donde a y b son constantes. Resuelva esta ecuación para y.

En los problemas del 65 al 68 utilice una calculadora gráfica para determinar, si los hay, cuáles de los números dados son raíces de la ecuación dada.

65. $112x^2 = 6x + 1;\ \frac{1}{8}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{14}.$

66. $8x^3 + 11x + 21 = 58x^2;\ 7, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}.$

67. $\dfrac{3.1t - 7}{4.8t - 2} = 7;\ \sqrt{6}, -\dfrac{47}{52}, \dfrac{14}{61}.$

68. $\left(\dfrac{v}{v + 3}\right)^2 = v;\ 0, \dfrac{27}{4}, \dfrac{13}{3}.$

OBJETIVO Resolver ecuaciones fraccionarias y con radicales que conducen a ecuaciones lineales.

1.2 Ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales

Ecuaciones fraccionarias

En esta sección, ilustramos que al resolver una ecuación no lineal puede suceder que ésta se reduzca a una ecuación lineal. Empezamos con una **ecuación fraccionaria,** que es una ecuación en que una incógnita está en un denominador.

Principios en práctica 1
Resolución de una ecuación fraccionaria

Un bote que viaja a una velocidad r, recorre 10 millas río abajo en una corriente de 2 millas por hora; al mismo tiempo un bote que viaja a la misma velocidad recorre 6 millas río arriba en contra de la corriente. Escriba una ecuación que describa esta situación, y determine la velocidad de los botes.

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación fraccionaria

Resolver $\dfrac{5}{x - 4} = \dfrac{6}{x - 3}$.

[4] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.

Solución:

Estrategia: primero escribimos la ecuación de manera que no tenga fracciones. Después utilizamos las técnicas algebraicas comunes para resolver la ecuación lineal resultante.

Multiplicando ambos lados por el MCD, $(x-4)(x-3)$, tenemos

$$(x-4)(x-3)\left(\frac{5}{x-4}\right) = (x-4)(x-3)\left(\frac{6}{x-3}\right),$$

$$5(x-3) = 6(x-4) \qquad \text{(ecuación lineal)},$$

$$5x - 15 = 6x - 24,$$

$$9 = x.$$

Una resolución alternativa que evita la multiplicación de ambos lados por el MCD es como sigue:

$$\frac{5}{x-4} - \frac{6}{x-3} = 0.$$

Suponiendo que x no es 3 ni 4 y combinando las fracciones tenemos

$$\frac{9-x}{(x-4)(x-3)} = 0.$$

Una fracción puede ser 0 sólo cuando su numerador es 0 y su denominador es distinto de cero. Por tanto, $x = 9$.

En el primer paso, multiplicamos cada lado por una expresión que incluya a la *variable* x. Como mencionamos en la sección 1.1, esto significa que no estamos garantizando que la última ecuación sea equivalente a la *original*. Así, debemos verificar si 9 satisface o no la ecuación *original*. Sustituyendo 9 por x en la ecuación, obtenemos

$$\frac{5}{9-4} = \frac{6}{9-3},$$

$$1 = 1,$$

que es un enunciado verdadero. Por tanto, 9 es una raíz.

Algunas ecuaciones que no son lineales no tienen solución. En ese caso, decimos que el conjunto solución es el **conjunto vacío** o **conjunto nulo,** al que denotamos por { } o ∅. El ejemplo 2 ilustra lo anterior.

EJEMPLO 2 Resolución de ecuaciones fraccionarias

a. *Resolver* $\dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{3x-5}{x-4} = \dfrac{12}{x^2-2x-8}$.

Solución: al observar los denominadores y notar que

$$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4),$$

concluimos que el MCD es $(x+2)(x-4)$. Multiplicando ambos miembros por el MCD, tenemos

$$(x+2)(x-4)\left(\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4}\right) = (x+2)(x-4)\cdot\frac{12}{(x+2)(x-4)},$$

$$(x-4)(3x+4) - (x+2)(3x-5) = 12,$$

$$3x^2 - 8x - 16 - (3x^2 + x - 10) = 12,$$

$$3x^2 - 8x - 16 - 3x^2 - x + 10 = 12,$$

$$-9x - 6 = 12,$$

$$-9x = 18,$$

$$x = -2. \qquad (1)$$

Sin embargo, la ecuación *original* no está definida para $x = -2$ (no podemos dividir entre cero), de modo que no existen raíces. Así, el conjunto solución es $\varnothing$. Aunque -2 es una solución de la ecuación (1), no lo es de la ecuación *original,* por lo que se le denomina **solución extraña** de la ecuación original.

b. *Resolver* $\dfrac{4}{x-5} = 0$.

Solución: la única manera que una fracción puede ser igual a cero es cuando el numerador es 0 pero su denominador no. Ya que el numerador, 4, nunca es 0, el conjunto solución es $\varnothing$.

Principios en práctica 2
Ecuación con literales

El tiempo que le toma a un aeroplano recorrer una distancia dada con viento a favor, puede calcularse dividiendo la distancia entre la suma de la velocidad del aeroplano y la velocidad del viento. Escriba una ecuación que calcule el tiempo t que le toma a un aeroplano, que viaja a una velocidad r con un viento w, cubrir una distancia d. Resuelva la ecuación para w.

EJEMPLO 3 Ecuación con literales

Si $s = \dfrac{u}{au + v}$, *exprese u en términos de las restantes letras; esto es, resolver para u.*

Solución:

Estrategia: como la incógnita, u, está en el denominador, primero quitamos las fracciones y después resolvemos para u.

$$s = \frac{u}{au + v},$$

$$s(au + v) = u \qquad \text{(multiplicando ambos lados por } au + v\text{)},$$

$$sau + sv = u,$$

$$sau - u = -sv,$$

$$u(sa - 1) = -sv,$$

$$u = \frac{-sv}{sa - 1} = \frac{sv}{1 - sa}.$$

Ecuaciones con radicales

Una **ecuación con radicales** (ecuación radical) es aquélla en la que una incógnita aparece en un radicando. Los dos ejemplos siguientes ilustran las técnicas empleadas para resolver tales ecuaciones.

Principios en práctica 3
Resolución de una ecuación con radicales

La diferencia entre la longitud de una rampa y la longitud de la distancia horizontal que cubre es de 2 pies. El cuadrado de la distancia vertical que cubre la rampa es de 16 pies cuadrados. Escriba una ecuación para la diferencia y resuélvala. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación con radicales

Resolver $\sqrt{x^2 + 33} - x = 3$.

Solución: para resolver esta ecuación radical, elevamos ambos miembros a la misma potencia para eliminar el radical. Esta operación *no* garantiza la equivalencia, de modo que debemos verificar las "soluciones" resultantes. Empezamos aislando el radical en un lado. Después elevamos al cuadrado ambos lados y despejamos utilizando las técnicas comunes. Así,

$$\sqrt{x^2 + 33} = x + 3,$$

$$x^2 + 33 = (x + 3)^2 \qquad \text{(elevando al cuadrado ambos lados)},$$

$$x^2 + 33 = x^2 + 6x + 9,$$
$$24 = 6x,$$
$$4 = x.$$

Por sustitución se debe demostrar que 4 es en realidad una raíz.

Con algunas ecuaciones radicales puede tener que elevar ambos lados a la misma potencia en más de una ocasión, como lo muestra el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación con radicales

Resolver $\sqrt{y-3} - \sqrt{y} = -3$.

Solución: cuando una ecuación tiene dos términos que implican radicales, primero la escribimos de modo que esté un radical en cada lado, si es posible. Después elevamos al cuadrado y resolvemos. Tenemos

La razón por la que deseamos una radical en cada lado es para eliminar elevando al cuadrado un binomio con dos radicales diferentes.

$$\sqrt{y-3} = \sqrt{y} - 3,$$
$$y - 3 = y - 6\sqrt{y} + 9 \quad \text{(elevando ambos lados al cuadrado),}$$
$$6\sqrt{y} = 12,$$
$$\sqrt{y} = 2,$$
$$y = 4 \quad \text{(elevando ambos lados al cuadrado).}$$

Sustituyendo 4 en el lado izquierdo de la ecuación *original* nos da $\sqrt{1} - \sqrt{4}$, que es -1. Ya que este resultado no es igual al del lado derecho, -3, no hay solución. Esto es, el conjunto solución es $\varnothing$. Aquí 4 es una solución extraña.

Ejercicio 1.2

En los problemas del 1 al 34 resuelva las ecuaciones.

1. $\frac{5}{x} = 25.$

2. $\frac{4}{x-1} = 2.$

3. $\frac{7}{3-x} = 0.$

4. $\frac{5x-2}{x+1} = 0.$

5. $\frac{4}{8-x} = \frac{3}{4}.$

6. $\frac{x+3}{x} = \frac{2}{5}.$

7. $\frac{q}{5q-4} = \frac{1}{3}.$

8. $\frac{4p}{7-p} = 1.$

9. $\frac{1}{p-1} = \frac{2}{p-2}.$

10. $\frac{2x-3}{4x-5} = 6.$

11. $\frac{1}{x} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$

12. $\frac{4}{t-3} = \frac{3}{t-4}.$

13. $\frac{3x-2}{2x+3} = \frac{3x-1}{2x+1}.$

14. $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+1}{3-x} = 0.$

15. $\frac{y-6}{y} - \frac{6}{y} = \frac{y+6}{y-6}.$

16. $\frac{y-3}{y+3} = \frac{y-3}{y+2}.$

17. $\frac{-4}{x-1} = \frac{7}{2-x} + \frac{3}{x+1}.$

18. $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{4}{1-2x}.$

19. $\frac{9}{x-3} = \frac{3x}{x-3}.$

20. $\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{3x-4}{x^2-9}.$

21. $\sqrt{x+5} = 4.$

22. $\sqrt{z-2} = 3.$

23. $\sqrt{5x-6} - 16 = 0.$

24. $6 - \sqrt{2x+5} = 0.$

25. $\sqrt{\frac{x}{2}+1}=\frac{2}{3}$.

26. $(x+6)^{1/2}=7$.

27. $\sqrt{4x-6}=\sqrt{x}$.

28. $\sqrt{5+2x}=\sqrt{4x-2}$.

29. $(x-3)^{3/2}=8$.

30. $\sqrt{y^2-9}=9-y$.

31. $\sqrt{y}+\sqrt{y+2}=3$.

32. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=1$.

33. $\sqrt{z^2+2z}=3+z$.

34. $\sqrt{\frac{1}{w}}-\sqrt{\frac{2}{5w-2}}=0$.

En los problemas del 35 al 38 exprese la letra indicada en términos de las letras restantes.

35. $r=\frac{d}{1-dt}$; t.

36. $\frac{x-a}{b-x}=\frac{x-b}{a-x}$; x.

37. $r=\frac{2ml}{B(n+1)}$; n.

38. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$; q.

39. Densidad de presas En cierta área el número, y, de larvas de polillas consumidas por un solo escarabajo depredador en un periodo determinado, está dado por

$$y=\frac{1.4x}{1+0.09x},$$

en donde x es la *densidad de presas* (el número de larvas por unidad de área). ¿Qué densidad de larvas permitiría sobrevivir a un escarabajo, si éste necesita consumir 10 larvas en el periodo dado?

40. Horas de servicio Supóngase que la razón del número de horas que una tienda de video está abierta al número de clientes diarios es constante. Cuando la tienda está abierta 8 horas, el número de clientes es 92 menos que el número máximo de clientes. Cuando la tienda permanece abierta 10 horas, el número de clientes es 46 menos que el número máximo de clientes. Escriba una ecuación que describa esta situación y determine el número máximo de clientes diarios.

41. Tiempo de viaje El tiempo que le toma a un bote recorrer una distancia dada río arriba (en contra de la corriente), puede calcularse dividiendo la distancia entre la diferencia de la velocidad del bote y la velocidad de la corriente. Escriba una ecuación que calcule el tiempo t que le toma a un bote, que se mueve a una velocidad r en contra de una corriente c, recorrer una distancia d. Resuelva su ecuación para r.

42. Longitud de una rampa La diferencia entre la longitud de una rampa y la longitud horizontal que cubre es de 5 pies. El cuadrado de la distancia vertical que cubre la rampa es 45 pies cuadrados. Escriba una ecuación para la diferencia y resuélvala. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

43. Horizonte de la radio El rango de trasmisión, en metros, de un trasmisor VHF de radio, es 4.1 veces la raíz cuadrada de la altura por encima del suelo de la antena, medida en metros. La antena A se coloca 8.25 m más arriba que la antena B y puede trasmitir 6.15 km más lejos. ¿Qué tan arriba del suelo están colocadas las antenas A y B?

44. Derrape de un automóvil La policía ha usado la fórmula $s=\sqrt{30\,fd}$ para estimar la velocidad s (en millas por hora) de un automóvil, si éste derrapó un tramo de d pies cuando se detuvo. La literal f es el coeficiente de fricción, determinado por la clase de camino (como concreto, asfalto, grava o alquitrán) y si está húmedo o seco. Algunos valores de f se dan en la tabla 1.1. ¿A 40 millas por hora, aproximadamente cuántos pies derrapará un automóvil en un camino de concreto seco? Dé la respuesta al pie más cercano.

TABLA 1.1

	Concreto	Alquitrán
Húmedo	0.4	0.5
Seco	0.8	1.0

OBJETIVO Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de factorización o con la fórmula cuadrática.

1.3 ECUACIONES CUADRÁTICAS

Para aprender cómo resolver problemas más complejos, pasemos a los métodos de solución de *ecuaciones cuadráticas*.

Definición

Una ***ecuación cuadrática*** en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Una ecuación cuadrática también se conoce como *ecuación de segundo grado* o *ecuación de grado dos,* ya que la potencia más grande que aparece en ella es la segunda. Mientras que una ecuación lineal sólo tiene una raíz, una ecuación cuadrática puede tener dos raíces diferentes.

Solución por factorización

Un método útil para resolver ecuaciones cuadráticas se basa en la factorización, como lo muestran los ejemplos siguientes.

Principios en práctica 1
Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

Un número elevado al cuadrado es 30 veces más que el número. ¿Cuál es el número?

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

a. *Resolver* $x^2 + x - 12 = 0$.

Solución: el lado izquierdo se factoriza con facilidad:

$$(x - 3)(x + 4) = 0.$$

Piense en esto como dos cantidades, $x - 3$ y $x + 4$, cuyo producto es cero. **Siempre que el producto de dos o más números sea *cero*, entonces, al menos uno de los números *debe* ser cero.** Esto significa que

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 4 = 0.$$

Resolviendo éstas tenemos $x = 3$ y $x = -4$. Por tanto, la raíces de la ecuación original son 3 y –4, y el conjunto solución es $\{3, -4\}$.

b. *Resolver* $6w^2 = 5w$.

No divida ambos miembros entre w (una variable), ya que esto no garantiza la equivalencia y podríamos "perder" una raíz.

Solución: escribimos la ecuación como

$$6w^2 - 5w = 0,$$

de modo que un miembro sea 0. Factorizando nos da

$$w(6w - 5) = 0.$$

Haciendo cada factor igual a cero, tenemos

$$w = 0 \quad \text{o} \quad 6w - 5 = 0.$$
$$6w = 5.$$

Por tanto, las raíces son $w = 0$ y $w = \frac{5}{6}$. Observe que si hubiésemos dividido ambos miembros de $6w^2 = 5w$ *entre* w y obtenido $6w = 5$, nuestra única solución sería $w = \frac{5}{6}$. Esto es, se habría perdido la raíz $w = 0$. Esto confirma nuestro estudio de la operación 5 en la sección 1.1.

Principios en práctica 2
Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

El área de un mural rectangular, que tiene un ancho de 10 pies menos que su largo, es de 3000 pies cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del mural?

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

Resolver $(3x - 4)(x + 1) = -2$.

Advertencia Usted debe abordar un problema como éste con cuidado. Si el producto de dos cantidades es igual a -2, no es verdadero que al menos una de las dos cantidades debe ser -2. ¿Por qué? **No** debe tomar cada factor igual a -2; al hacerlo así no obtendrá soluciones de la ecuación dada.

Solución: primero multiplicamos los factores del miembro izquierdo:

$$3x^2 - x - 4 = -2.$$

Al reescribirla de modo que 0 aparezca en un miembro, tenemos

$$3x^2 - x - 2 = 0,$$
$$(3x + 2)(x - 1) = 0,$$
$$x = -\frac{2}{3}, 1.$$

Algunas ecuaciones que no son cuadráticas pueden resolverse por factorización, como lo muestra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Resolución de ecuaciones de grado superior por factorización

a. *Resolver* $4x - 4x^3 = 0$.

Solución: ésta es una *ecuación de tercer grado*. Procedemos a resolverla como sigue:

$$4x - 4x^3 = 0,$$
$$4x(1 - x^2) = 0 \qquad \text{(factorizando),}$$
$$4x(1 - x)(1 + x) = 0 \qquad \text{(factorizando).}$$

No deje de tomar en cuenta que el factor x da lugar a una raíz.

Al hacer cada uno de los factores igual a cero, obtenemos $4 = 0$ (lo cual es imposible), $x = 0$, $1 - x = 0$, o bien $1 + x = 0$. Así,

$$x = 0, 1, -1,$$

que podemos escribir como $x = 0, \ \pm 1$.

b. *Resolver* $x(x + 2)^2(x + 5) + x(x + 2)^3 = 0$.

Solución: factorizando $x(x + 2)^2$ en ambos términos del miembro izquierdo, tenemos

$$x(x + 2)^2[(x + 5) + (x + 2)] = 0,$$
$$x(x + 2)^2(2x + 7) = 0.$$

De aquí que, $x = 0$, $x + 2 = 0$, o bien $2x + 7 = 0$, de lo cual concluimos que $x = 0, -2, -\frac{7}{2}$.

Principios en práctica 3

Resolución de una ecuación de grado más alto por factorización

Un prisma rectangular, con base cuadrada y altura que es 5 veces más larga que su ancho, tiene un volumen que es igual a 5 veces su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del prisma rectangular?

EJEMPLO 4 Una ecuación fraccionaria que se reduce a una ecuación cuadrática

Resolver

$$\frac{y + 1}{y + 3} + \frac{y + 5}{y - 2} = \frac{7(2y + 1)}{y^2 + y - 6}. \tag{2}$$

Solución: multiplicando ambos lados por el MCD, $(y + 3)(y - 2)$, obtenemos

$$(y - 2)(y + 1) + (y + 3)(y + 5) = 7(2y + 1). \tag{3}$$

Ya que la ecuación (2) se multiplicó por una expresión que incluye a la variable y, recuerde (de la sección 1.1) que la ecuación (3) no es necesariamente equivalente a la (2). Después de simplificar la ecuación (3) tenemos

$$2y^2 - 7y + 6 = 0 \qquad \text{(ecuación cuadrática)},$$
$$(2y - 3)(y - 2) = 0 \qquad \text{(factorizando)}.$$

Por tanto, $\frac{3}{2}$ y 2 son *posibles* raíces de la ecuación dada. Pero 2 no puede ser raíz de la ecuación (2) ya que la sustitución conduce a un denominador de 0. Sin embargo, debemos verificar que $\frac{3}{2}$ en verdad satisface la ecuación *original* para concluir así que es la raíz.

No concluya de manera precipitada que la solución de $x^2 = 3$ sólo consiste en $x = \sqrt{3}$.

Principios en práctica 4

Solución por medio de factorización

Si usted ganó $225 por la venta de x artículos a x dólares cada uno, ¿cuántos artículos vendió y a qué precio vendió cada uno de ellos?

EJEMPLO 5 Solución por factorización

Resolver $x^2 = 3$.

Solución:

$$x^2 = 3,$$
$$x^2 - 3 = 0.$$

Factorizando, obtenemos

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0.$$

Por tanto, $x - \sqrt{3} = 0$ o bien $x + \sqrt{3} = 0$, de modo que $x = \pm\sqrt{3}$.

Una forma más general de la ecuación $x^2 = 3$, es $u^2 = k$. Como antes, podemos mostrar lo siguiente

$$\text{Si } u^2 = k, \qquad \text{entonces} \qquad u = \pm\sqrt{k}. \qquad (4)$$

Fórmula cuadrática

Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización puede ser muy difícil, como es evidente al tratar ese método en la ecuación $0.7x^2 - \sqrt{2}x - 8\sqrt{5} = 0$. Sin embargo, existe una fórmula llamada *fórmula cuadrática*[5] que da las raíces de cualquier ecuación cuadrática

Fórmula cuadrática

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Advertencia Asegúrese de utilizar la fórmula cuadrática correctamente.

$$x \neq -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

[5]Una deducción de la fórmula cuadrática aparece en la sección 1.4.

Principios en práctica 5

Una ecuación cuadrática con dos raíces reales

Supóngase que la altura h, en pies, de fuegos artificiales lanzados directamente hacia arriba desde el nivel del suelo, está dada por $h = 160t - 16t^2$, en donde t está en segundos. ¿En cuánto tiempo los fuegos artificiales estarán a 300 pies del suelo?

EJEMPLO 6 Una ecuación cuadrática con dos raíces reales

Resolver $4x^2 - 17x + 15 = 0$ *mediante la fórmula cuadrática.*

Solución: aquí $a = 4$, $b = -17$ y $c = 15$. Por tanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(4)(15)}}{2(4)}$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8}.$$

$$\text{Las raíces son } \frac{17+7}{8} = \frac{24}{8} = 3 \text{ y } \frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Principios en práctica 6

Una ecuación cuadrática con una raíz real

Supóngase que el ingreso semanal r de una compañía está dado por la ecuación $r = -2p^2 + 400p$, en donde p es el precio del producto que vende la compañía. ¿Cuál es el precio del producto si el ingreso semanal es de \$20,000?

EJEMPLO 7 Una ecuación cuadrática con una raíz real

Resolver $2 + 6\sqrt{2}y + 9y^2 = 0$ *por medio de la fórmula cuadrática.*

Solución: vea el acomodo de los términos. Aquí $a = 9$, $b = 6\sqrt{2}$, y $c = 2$. Por lo que,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2(9)}.$$

Así,

$$y = \frac{-6\sqrt{2} + 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \text{o} \qquad y = \frac{-6\sqrt{2} - 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Por tanto, la única raíz es $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Principios en práctica 7

Una ecuación cuadrática sin raíces reales

Supóngase que la altura h, en pies, de fuegos artificiales lanzados directamente hacia arriba, desde el nivel del piso, está dada por $h = 160t - 16t^2$, en donde t está en segundos. ¿Cuándo estarán los fuegos artificiales a 500 pies del piso?

EJEMPLO 8 Una ecuación cuadrática sin raíces reales

Resolver por medio de la fórmula cuadrática $z^2 + z + 1 = 0$.

Solución: aquí $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Las raíces son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Ahora $\sqrt{-3}$ denota un número cuyo cuadrado es -3. Sin embargo, no existe tal número real, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. Entonces la ecuación no tiene raíces reales.[6]

[6] $\dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ puede expresarse como $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, en donde $i = \sqrt{-1}$ se denomina *unidad imaginaria*.

Esto describe la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.

De los ejemplos 6 al 8 puede verse que una ecuación cuadrática tiene dos raíces reales y diferentes, una raíz real, o bien no tiene raíces reales, dependiendo de que $b^2 - 4ac > 0, \ = \ 0$ o < 0, respectivamente.

Tecnología

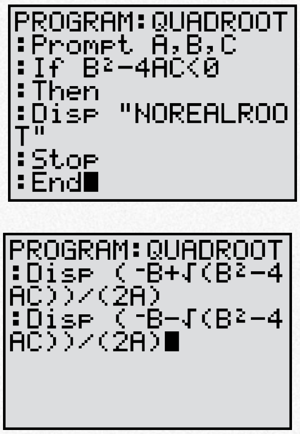


FIGURA 1.2 Programa para encontrar las raíces reales de $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Mediante la característica de programación de una calculadora gráfica, puede crearse un programa que proporcione las raíces reales de la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$. La figura 1.2 muestra un programa para la calculadora gráfica TI-83. A fin de ejecutarlo para

$$20x^2 - 33x + 10 = 0,$$

se le pide que introduzca los valores de A, B y C (véase la fig. 1.3). Las raíces resultantes son $x = 1.25$ y $x = 0.4$.

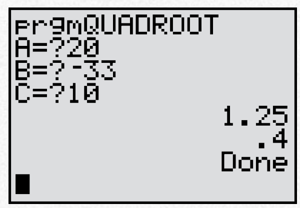


FIGURA 1.3 Raíces de $20x^2 - 33x + 10 = 0$.

Formas cuadráticas

Algunas veces una ecuación que no es cuadrática puede transformarse en cuadrática por medio de una sustitución adecuada. En este caso se dice que la ecuación dada tiene **forma cuadrática.** El ejemplo siguiente lo ilustrará.

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación que tiene forma cuadrática

Resolver $\dfrac{1}{x^6} + \dfrac{9}{x^3} + 8 = 0.$

Solución: esta ecuación puede escribirse como

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{x^3}\right) + 8 = 0.$$

de modo que es cuadrática en $1/x^3$, por lo que tiene forma cuadrática. Al sustituir la variable w por $1/x^3$ obtenemos una ecuación cuadrática en la variable w, la cual podemos resolver:

$$\begin{aligned} w^2 + 9w + 8 &= 0, \\ (w + 8)(w + 1) &= 0, \\ w = -8 \quad \text{o} \quad w &= -1. \end{aligned}$$

No suponga que -8 y -1 son soluciones de la ecuación *original*.

Regresando a la variable x, tenemos

$$\frac{1}{x^3} = -8 \quad \text{o} \quad \frac{1}{x^3} = -1.$$

Así,

$$x^3 = -\frac{1}{8} \quad \text{o} \quad x^3 = -1.$$

de lo cual se concluye que

$$x = -\frac{1}{2}, -1.$$

Al verificar, encontramos que estos valores de x satisfacen la ecuación original.

Ejercicio 1.3

En los problemas del 1 al 30 resuelva por factorización.

1. $x^2 - 4x + 4 = 0.$
2. $t^2 + 3t + 2 = 0.$
3. $y^2 - 7y + 12 = 0.$
4. $x^2 + x - 12 = 0.$
5. $x^2 - 2x - 3 = 0.$
6. $x^2 - 16 = 0.$
7. $u^2 - 13u = -36.$
8. $3w^2 - 12w + 12 = 0.$
9. $x^2 - 4 = 0.$
10. $2x^2 + 4x = 0.$
11. $z^2 - 8z = 0.$
12. $x^2 + 9x = -14.$
13. $4x^2 + 1 = 4x.$
14. $2z^2 + 9z = 5.$
15. $y(2y + 3) = 5.$
16. $8 + 2x - 3x^2 = 0.$
17. $-x^2 + 3x + 10 = 0.$
18. $\frac{1}{7}y^2 = \frac{3}{7}y.$
19. $2p^2 = 3p.$
20. $-r^2 - r + 12 = 0.$
21. $x(x + 4)(x - 1) = 0.$
22. $(x - 2)^2(x + 1)^2 = 0.$
23. $x^3 - 64x = 0.$
24. $x^3 - 4x^2 - 5x = 0.$
25. $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0.$
26. $(x + 1)^2 - 5x + 1 = 0.$
27. $(x + 3)(x^2 - x - 2) = 0.$
28. $3(x^2 + 3x - 10)(x - 8) = 0.$
29. $p(p - 3)^2 - 4(p - 3)^3 = 0.$
30. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$

En los problemas del 31 al 44 encuentre todas las raíces reales usando la fórmula cuadrática.

31. $x^2 + 2x - 24 = 0.$
32. $x^2 - 2x - 15 = 0.$
33. $4x^2 - 12x + 9 = 0.$
34. $p^2 + 2p = 0.$
35. $p^2 - 7p + 3 = 0.$
36. $2 - 2x + x^2 = 0.$
37. $4 - 2n + n^2 = 0.$
38. $2x^2 + x = 5.$
39. $6x^2 + 7x - 5 = 0.$
40. $w^2 - 2\sqrt{2}w + 2 = 0.$
41. $0.02w^2 - 0.3w = 20.$
42. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0.$
43. $2x^2 + 4x = 5.$
44. $-2x^2 - 6x + 5 = 0.$

En los problemas del 45 al 54 resuelva la ecuación dada que tiene forma cuadrática.

45. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0.$
46. $x^4 - 3x^2 - 10 = 0.$
47. $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 = 0.$
48. $x^{-2} + x^{-1} - 12 = 0.$

49. $x^{-4} - 9x^{-2} + 20 = 0$.

50. $\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{9}{x^2} + 8 = 0$.

51. $(x - 3)^2 + 9(x - 3) + 14 = 0$.

52. $(x + 5)^2 - 8(x + 5) = 0$.

53. $\dfrac{1}{(x - 2)^2} - \dfrac{12}{x - 2} + 35 = 0$.

54. $\dfrac{2}{(x + 4)^2} + \dfrac{7}{x + 4} + 3 = 0$.

En los problemas del 55 al 76 resuelva por cualquier método.

55. $x^2 = \dfrac{x + 3}{2}$.

56. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{x} - \dfrac{5}{2}$.

57. $\dfrac{3}{x - 4} + \dfrac{x - 3}{x} = 2$.

58. $\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{6}{2x + 1} = 5$.

59. $\dfrac{6x + 7}{2x + 1} - \dfrac{6x + 1}{2x} = 1$.

60. $\dfrac{6(w + 1)}{2 - w} + \dfrac{w}{w - 1} = 3$.

61. $\dfrac{2}{r - 2} - \dfrac{r + 1}{r + 4} = 0$.

62. $\dfrac{2x - 3}{2x + 5} + \dfrac{2x}{3x + 1} = 1$.

63. $\dfrac{y + 1}{y + 3} + \dfrac{y + 5}{y - 2} = \dfrac{14y + 7}{y^2 + y - 6}$.

64. $\dfrac{3}{t + 1} + \dfrac{4}{t} = \dfrac{12}{t + 2}$.

65. $\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x(x - 1)} = \dfrac{2}{x^2}$.

66. $5 - \dfrac{3(x + 3)}{x^2 + 3x} = \dfrac{1 - x}{x}$.

67. $\sqrt{2x - 3} = x - 3$.

68. $3\sqrt{x + 4} = x - 6$.

69. $q + 2 = 2\sqrt{4q - 7}$.

70. $x + \sqrt{4x} - 3 = 0$.

71. $\sqrt{x + 7} - \sqrt{2x} - 1 = 0$.

72. $\sqrt{x} - \sqrt{2x - 8} - 2 = 0$.

73. $\sqrt{x} - \sqrt{2x + 1} + 1 = 0$.

74. $\sqrt{y - 2} + 2 = \sqrt{2y + 3}$.

75. $\sqrt{x + 5} + 1 = 2\sqrt{x}$.

76. $\sqrt{\sqrt{x} + 2} = \sqrt{2x - 4}$.

En los problemas 77 y 78 encuentre las raíces, redondeadas a dos decimales.

77. $0.04x^2 - 2.7x + 8.6 = 0$.

78. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0$.

---

79. Geometría El área de una pintura rectangular, con ancho 2 pulgadas menor que el largo, es de 48 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son las dimensiones de la pintura?

80. Temperatura La temperatura se ha elevado X grados por día durante X días. Hace X días fue de 15 grados. Hoy es de 51 grados. ¿Cuánto se ha elevado la temperatura por día? ¿Durante cuántos días se ha estado elevando?

81. Economía Una raíz de la ecuación económica

$$\overline{M} = \frac{Q(Q + 10)}{44}$$

es $-5 + \sqrt{25 + 44\overline{M}}$. Verifique esto utilizando la fórmula cuadrática para despejar Q en términos de $\overline{M}$. Aquí Q es el ingreso real y $\overline{M}$ es el nivel de oferta de dinero.

82. Dieta para ratas Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteínas.[7] La proteína estaba compuesta de levadura y harina de maíz. Al cambiar el porcentaje P (expresado como un decimal) de levadura en la mezcla de la proteína, el grupo estimó que el promedio de aumento de peso g (en gramos) en una rata durante cierto periodo estaba dado por

$$g = -200P^2 + 200P + 20.$$

¿Cuál es el porcentaje de levadura que da un aumento promedio de peso de 70 gramos?

83. Dosis de droga Existen varias reglas para determinar las dosis de las medicinas para niños una vez especificadas las de los adultos. Tales reglas pueden tener como base el peso, la altura, etc. Si A es la edad del niño, d es la dosis para adulto y c la dosis para niño, a continuación se presentan dos reglas.

Regla de Young: $c = \dfrac{A}{A + 12}d$.

Regla de Cowling: $c = \dfrac{A + 1}{24}d$.

¿A qué edad las dosis para niños son las mismas usando estas reglas? Redondee al año más cercano.

[7]Adaptado de R. Bressani, "The use of Yeast in Human Foods", en R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (editores), *Single-Cell Protein* (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

84. Precio de envío de un bien En un estudio acerca del precio de envío de un bien desde una fábrica a un cliente, DeCaino[8] plantea y resuelve las dos ecuaciones cuadráticas siguientes

$$(2n - 1)v^2 - 2nv + 1 = 0,$$

y

$$nv^2 - (2n + 1)v + 1 = 0,$$

donde $n \geq 1$.

a. Resuelva la primera ecuación para v.
b. Resuelva la segunda ecuación para v si $v < 1$.

85. Óptica Un objeto está a 120 cm de una pared. Para enfocar la imagen del objeto sobre la pared, se utiliza una lente convergente con longitud focal de 24 cm. La lente se coloca entre el objeto y la pared, a una distancia de p centímetros del objeto, donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{120 - p} = \frac{1}{24}.$$

Determine p, redondeada a un decimal.

86. Física Un termómetro con resistencias de platino, de ciertas especificaciones, opera de acuerdo con la ecuación

$$R = 10{,}000 + (4.124 \times 10^{-2})T - (1.779 \times 10^{-5})T^2,$$

donde R es la resistencia (en ohms) del termómetro a la temperatura T (en grados Celsius). Si $R = 13.946$, determine el valor correspondiente de T. Redondee su respuesta al grado Celsius más cercano. Suponga que tal termómetro sólo se utiliza si $T < 600°$C.

87. Movimiento Suponga que la altura h de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$h = 44.1t - 4.9t^2,$$

donde h está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos.

a. ¿Después de cuántos segundos el objeto golpea el piso?
b. ¿Cuándo se encuentra a una altura de 88.2 m?

En los problemas del 88 al 93 utilice un programa para determinar las raíces reales de la ecuación. Redondee las respuestas a tres decimales. Para los problemas 88 y 89, confirme sus resultados de manera algebraica.

88. $2x^2 - 3x - 27 = 0.$

89. $8x^2 - 18x + 9 = 0.$

90. $15x^2 + 7x - 3 = 0.$

91. $27x^2 - \frac{11}{8}x + 5 = 0.$

92. $\frac{9}{2}z^2 - 6.3 = \frac{z}{3}(1.1 - 7z).$

93. $(\pi t - 4)^2 = 4.1t - 3.$

1.4 Deducción de la fórmula cuadrática

A continuación se presenta una deducción de la fórmula cuadrática. Suponga que $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación cuadrática. Ya que $a \neq 0$, podemos dividir ambos miembros entre a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Si sumamos a ambos lados $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, entonces el miembro izquierdo se factoriza como el cuadrado de un binomio:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Esta ecuación tiene la forma $u^2 = k$, así, de la ecuación (4) en la sección 1.3,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

[8]S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Revolution", *Quarterly Journal of Economics,* XCIX, núm. 2 (1984), 329-349.

Resolviendo para x se obtiene

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En resumen, las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por la **fórmula cuadrática:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 1.1 ecuación lado (miembro) de una ecuación variable raíz de una ecuación conjunto solución ecuaciones equivalentes ecuación lineal (primer grado) ecuación con literales constante arbitraria

Sección 1.2 ecuación fraccionaria conjunto vacío, $\varnothing$ solución extraña ecuación radical

Sección 1.3 ecuación cuadrática (segundo grado) fórmula cuadrática

Resumen

Cuando resolvemos una ecuación podemos aplicar ciertas reglas para obtener ecuaciones equivalentes, esto es, ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones que la ecuación dada originalmente. Estas reglas incluyen la suma (o resta) del mismo polinomio en (de) ambos miembros, así como la multiplicación (o división) de ambos miembros por (entre) la misma constante, excepto por (entre) cero.

Una ecuación lineal (en x) es de primer grado y tiene la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$. Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz. Para resolver una ecuación lineal hay que aplicarle operaciones matemáticas hasta obtener una ecuación equivalente en la que la incógnita queda aislada en un lado de la ecuación.

Una ecuación cuadrática (en x) es de segundo grado y tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$. Tiene dos raíces reales y diferentes, exactamente una raíz real, o bien no tiene raíces. Una ecuación cuadrática puede resolverse por factorización o por medio de la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando se resuelve una ecuación fraccionaria o radical, con frecuencia se aplican operaciones que no garantizan que la ecuación resultante sea equivalente a la original. Estas operaciones incluyen la multiplicación de ambos miembros por una expresión que contenga a la variable, y elevar ambos miembros a la misma potencia. En estos casos, todas las soluciones obtenidas al final de tales procedimientos deben verificarse sustituyéndolas en la ecuación original. De esta manera se pueden encontrar las llamadas soluciones extrañas.

Problemas de repaso

Los problemas que tienen números a color se presentan así como sugerencia para formar parte de una evaluación de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 44 resuelva las ecuaciones.

1. $4 - 3x = 2 + 5x.$

2. $\frac{5}{7}x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{21}x.$

3. $3[2 - 4(1 + x)] = 5 - 3(3 - x).$

4. $3(x + 4)^2 + 6x = 3x^2 + 7.$

5. $2 - w = 3 + w.$

6. $x = 2x.$

7. $x = 3x - (17 + 2x).$

8. $3x - 8 = 4(x - 2).$

9. $2(4 - \frac{3}{5}p) = 5.$

10. $\frac{5}{7}x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{21}.$

11. $\dfrac{3x - 1}{x + 4} = 0.$

12. $\dfrac{5}{p + 3} - \dfrac{2}{p + 3} = 0.$

13. $\frac{2x}{x-3} - \frac{x+1}{x+2} = 1.$

14. $\frac{t+3t+4}{7-t} = 12.$

15. $3x^2 + 2x - 5 = 0.$

16. $x^2 - 2x - 2 = 0.$

17. $5q^2 = 7q.$

18. $2x^2 - x = 0.$

19. $x^2 - 10x + 25 = 0.$

20. $r^2 + 10r - 25 = 0.$

21. $3x^2 - 7 = 1.$

22. $x(x-9) = 0.$

23. $(8t-5)(2t+6) = 0.$

24. $2(x^2-1) + 2x = x^2 - 6x + 1.$

25. $-3x^2 + 5x - 1 = 0.$

26. $y^2 = 6.$

27. $x^2(x^2-9) = 4(x^2-9).$

28. $4x^2(x-5) - 9(x-5) = 0.$

29. $\frac{6w+7}{2w+1} - \frac{6w+1}{2w} = 1.$

30. $\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x} - \frac{12}{x+2} = 0.$

31. $\frac{2}{x^2-9} - \frac{3x}{x+3} = \frac{1}{x-3}.$

32. $\frac{3}{x^2-4} + \frac{2}{x^2+4x+4} - \frac{4}{x+2} = 0.$

33. $\sqrt{2x+7} = 5.$

34. $\sqrt{3x-4} = \sqrt{2x+5}.$

35. $\sqrt[3]{11x+9} = 4.$

36. $\sqrt{x^2+5x+25} = x+4.$

37. $\sqrt{y} + 6 = 5.$

38. $\sqrt{z^2+9} = 5.$

39. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} = 7.$

40. $\sqrt{6x-29} = x-4.$

41. $x + 2 = 2\sqrt{4x-7}.$

42. $\sqrt{3z} - \sqrt{5z+1} + 1 = 0.$

43. $y^{2/3} + y^{1/3} - 2 = 0.$

44. $2y^{-2/3} - 5y^{-1/3} - 3 = 0.$

En los problemas del 45 al 52 resuelva la ecuación para la letra indicada.

45. $E = 4\pi k\frac{Q}{A};\ Q.$

46. $E_1 = i_2R_1 + i_3R_1 + i_2R_2;\ R_2.$

47. $n - 1 = C + \frac{C'}{\lambda^2};\ C'.$

48. $\sigma = \frac{n_0 - n_e}{\lambda}L;\ n_0.$

49. $T^2 = 4\pi^2\left(\frac{L}{g}\right);\ T.$

50. $s = \frac{1}{2}at^2;\ t.$

51. $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2;\ \omega.$

52. $P = \frac{E^2}{R+r} - \frac{E^2r}{(R+r)^2};\ E.$

---

53. **Electricidad** En estudios de redes eléctricas, aparece la ecuación siguiente:

$$S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC} = 0.$$

Demuestre que

$$S = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

54. **Electricidad** En un circuito eléctrico, se dice que hay resonancia cuando

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C},$$

donde f_r es una frecuencia de resonancia, L la inductancia y C la capacitancia. Resuelva para f_r si $f_r > 0$.

En los problemas 55 y 56 utilice una calculadora gráfica para determinar cuáles, si los hay, de los números dados son raíces de la ecuación dada.

55. $12x^3 + 61x = 83x^2 - 30;\ 4, 6, \frac{5}{4}.$

56. $\sqrt{t^2+4} = t + 1;\ \frac{2}{3}, \frac{14}{3}, \frac{3}{2}.$

En los problemas 57 y 58 utilice un programa para determinar las raíces reales de la ecuación. Redondee sus respuestas a tres decimales.

57. $5.6 - 7.2x - 19.3x^2 = 0.$

58. $(9x-3)^2 - \frac{7}{6}(x-2) = 18.$

Aplicación práctica

Crecimiento real de una inversión[9]

Cuando hablamos de crecimiento real de una inversión, nos estamos refiriendo al crecimiento en su poder de compra, esto es, al aumento en la cantidad de bienes que la inversión puede comprar. El crecimiento real depende de la influencia tanto del interés como de la inflación. El interés eleva el valor de la inversión, mientras que la inflación baja su crecimiento por el incremento en los precios, de ahí que disminuya su poder de compra. Por lo general, la tasa de crecimiento real no es igual a la diferencia entre la tasa de interés y la de la inflación, sino que se describe por una fórmula diferente conocida como "efecto de Fisher".

Puede entender el efecto de Fisher considerando cuidadosamente la siguiente pregunta. Durante el año 1998, la tasa anual de interés fue de 8.35% y la tasa anual de inflación de 1.6% (*fuente*: Oficina de Censos de Estados Unidos. Resumen estadístico de 1999 de Estados Unidos, `www.census.gov/statab/www/freq.html`). Bajo estas circunstancias, ¿cuál fue la tasa anual real de crecimiento de una inversión? Podría pensar que la respuesta se obtiene simplemente restando los porcentajes: 8.35% − 1.6% = 6.75%. Sin embargo, 6.75% no es la respuesta correcta.

Suponga que se analiza la situación en términos más específicos. Considere fresas que se venden a $1.00 por libra, y suponga que a causa de la inflación, este precio aumenta a una tasa de 1.6% en un año. De junio de 1998 a junio de 1999, el precio por libra se elevó de $1.00 a

$$\$1.00 + (1.6\% \text{ de } \$1.00) = \$1.016.$$

Por otra parte, considere 100 dólares invertidos en junio de 1998 a una tasa de interés anual de 8.35%. En junio de 1999 el interés ganado es de $100(0.0835), de modo que la cantidad acumulada es

$$\$100 + \$100(0.0835) = \$108.35.$$

Ahora, compare el poder de compra de 100 dólares en junio de 1998 con el de $108.35 en junio de 1999. En 1998, los 100 dólares compraban 100 libras de fresas a $1.00 por libra. En 1999 las fresas estaban a $1.016 por libra, de modo que la cantidad acumulada de $108.35 compró $108.35/1.016 \approx 106.64$ libras de fresas (el símbolo $\approx$ significa *aproximadamente igual a*).

¿Qué cambio ocurrió en el poder de compra de la inversión? Se incrementó de 100 a 106.64 libras, un incremento de 6.64%. Esto es,

$$\frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}} = \frac{106.64 - 100}{100}$$

$$= 0.0664 = 6.64\%.$$

Así, 6.64% es el crecimiento real, que es menor a la diferencia del 8.35% − 1.6% = 6.75%. Realmente esta diferencia no tiene significado, ya que los tres porcentajes se refieren a tres cantidades diferentes: (a) interés (una fracción de la inversión −8.35% de $100), (b) inflación (una fracción del precio por unidad de los bienes −1.6% de $1.00) y (c) la tasa de crecimiento real (un porcentaje del poder de compra −6.64% de la cantidad inicial de fresas).

Para deducir una fórmula de la tasa de crecimiento real, g, sean y la tasa anual de interés (el rendimiento) e i la tasa anual de inflación. En un año, una inversión de P dólares (el capital o principal) gana un interés de $y \cdot P$ dólares, de modo que produce una cantidad acumulada en (dólares) de

$$P + y \cdot P = P(1 + y) \quad \text{(factorizando).}$$

En un año el precio de los bienes, digamos p dólares por unidad, aumenta $i \cdot p$ dólares a un nuevo precio de

$$p + i \cdot p = p(1 + i)$$

dólares por unidad. El poder de compra inicial representa la cantidad inicial de bienes:

$$\text{cantidad inicial} = \frac{\text{cantidad}}{\text{precio inicial}} = \frac{P}{p}.$$

[9]Adaptado de Yves Nievergelt, "Fisher's Effect: Real Growth Is Not Interest Less Inflation", *Mathematics Teacher*, 81 (octubre de 1988), 546-547. Con permiso de National Council of Teachers of Mathematics.

Un año después, la nueva cantidad de bienes que la cantidad acumulada de la inversión compraría al nuevo precio está dada por

$$\text{nueva cantidad} = \frac{\text{nuevo saldo}}{\text{nuevo precio}} = \frac{P(1+y)}{p(1+i)}.$$

En consecuencia, la tasa de crecimiento, o cambio relativo, del poder de compra está dada por

$$g = \frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}}$$

$$= \frac{\dfrac{P(1+y)}{p(1+i)} - \dfrac{P}{p}}{\dfrac{P}{p}}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador por p/P se obtiene

$$g = \frac{1+y}{1+i} - 1$$

$$= \frac{(1+y)-(1+i)}{1+i} = \frac{y-i}{1+i}.$$

Así, la tasa real de crecimiento está dada por la ecuación con literales

$$g = \frac{y-i}{1+i}. \qquad \textbf{(1)}$$

La relación en la ecuación (1) es el efecto de Fisher.[10] Para ilustrar su uso, aplíquela al ejemplo anterior, en donde $y = 8.35\%$ e $i = 1.6\%$. La fórmula de Fisher da

$$g = \frac{0.0835 - 0.016}{1 + 0.016} \approx 0.0664 = 6.64\%.$$

Ejercicios

1. Durante 1994, la tasa promedio de interés promediaba 7.15% cuando la inflación estaba en 2.6%.

a. Calcule el monto acumulado de una inversión de $100 después de un año a 7.15%.

b. Si una libra de chabacano seco costó $10 en enero de 1994, ¿cuánto costó un año después?

c. Si una libra de chabacano seco costó $10 en enero de 1994, ¿qué cantidad de chabacanos se compraron con $100 en 1994?

d. Un año después, ¿qué cantidad de chabacanos se compraron con la cantidad acumulada [véase la parte (a)]?

e. Utilice los resultados de las partes (c) y (d) para calcular la tasa real de crecimiento por medio de la ecuación

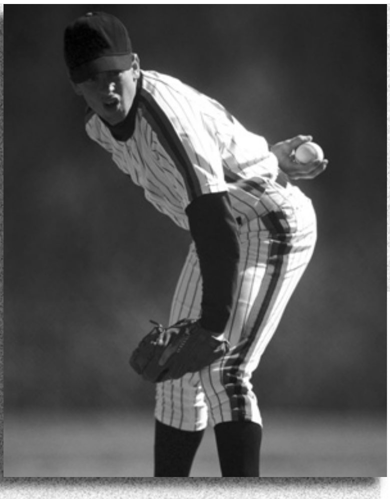
$$g = \frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}}.$$

f. Verifique su respuesta de la parte (e) por medio de la fórmula de Fisher.

2. Determine la tasa real de crecimiento, dadas una tasa de interés de 10% y una tasa de inflación de 5%.

3. Determine la tasa real de crecimiento, dadas una tasa de interés de 1% y una tasa de inflación de 3%. ¿Qué significa la respuesta? ¿Tiene sentido en vista de la información dada?

[10] Irving Fisher, "Appreciation and Interest", *Publications of the American Economic Association*, tercera serie, 11 (agosto de 1986), 331-442.



CAPÍTULO 2

Aplicaciones de ecuaciones y desigualdades

En este capítulo aplicaremos las ecuaciones a situaciones cotidianas. Después haremos lo mismo con las desigualdades, que son proposiciones en que una cantidad es mayor, menor, no mayor o no menor que otra cantidad.

Una aplicación de las desigualdades es la regulación de equipo deportivo. En un juego común de las ligas mayores, se utilizan algunas docenas de pelotas de béisbol y no sería lógico esperar que todas pesasen exactamente $5\frac{1}{8}$ onzas. Pero es razonable pedir que cada una pese no menos de 5 onzas ni más de $5\frac{1}{4}$ onzas, que es como se lee en las reglas oficiales (`www.majorleaguebaseball.com`).

Otra desigualdad se aplica para el caso de los veleros utilizados en las carreras de la Copa América, la cual se efectúa cada tres o cuatro años (la siguiente es en 2003). La International America's Cup Class (IACC) da la siguiente regla de definición para yates:

$$\frac{L + 1.25\sqrt{S} - 9.8\sqrt[3]{DSP}}{0.679} \leq 24.000 \text{ m.}$$

El símbolo "$\leq$" significa que la expresión del lado izquierdo debe ser menor o igual a los 24 m del lado derecho. L, S y DSP también están especificadas por complicadas fórmulas, pero aproximadamente, L es la longitud, S es el área del velamen y DSP es el desplazamiento (el volumen del casco bajo la línea de flotación).

La fórmula IACC proporciona a los diseñadores de yates un poco de flexibilidad. Supóngase que un yate tiene $L = 20.2$ m, $S = 282$ m^3 y $DSP = 16.4$ m^3. Como la fórmula es una desigualdad, el diseñador podría reducir el área del velamen mientras deja sin cambios la longitud y el desplazamiento. Sin embargo, por lo común, los valores de L, S y DSP se utilizan para que hagan que la expresión de lado izquierdo quede tan cercana como sea posible a 24 m.

Además de analizar aplicaciones de ecuaciones y desigualdades lineales, en este capítulo se revisará el concepto de valor absoluto.

OBJETIVO Modelar situaciones que se describen por medio de ecuaciones lineales o cuadráticas.

2.1 Aplicaciones de ecuaciones

En la mayoría de los casos, para resolver problemas prácticos, las relaciones establecidas deben traducirse a símbolos matemáticos. Esto se conoce como *modelado.* Los ejemplos siguientes nos ilustran las técnicas y conceptos básicos. Examine cada uno de ellos con mucho cuidado antes de pasar a los ejercicios.

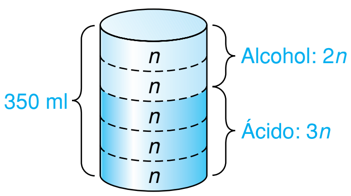


FIGURA 2.1 Solución química (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Mezcla

Un químico debe preparar 350 ml *de una solución compuesta por* 2 *partes de alcohol y* 3 *de ácido. ¿Cuánto debe utilizar de cada una?*

Solución: sea n el número de mililitros de cada parte. La figura 2.1 muestra la situación. A partir del diagrama tenemos

$$\begin{aligned} 2n + 3n &= 350, \\ 5n &= 350, \\ n &= \frac{350}{5} = 70. \end{aligned}$$

Observe que la solución de una ecuación no necesariamente es la solución del problema propuesto.

Pero $n = 70$ *no* es la respuesta al problema original. Cada *parte* tiene 70 ml. La cantidad de alcohol es $2n = 2(70) = 140$, y la cantidad de ácido es $3n = 3(70) = 210$. Así, el químico debe utilizar 140 ml de alcohol y 210 ml de ácido. Este ejemplo muestra cómo nos puede ser útil un diagrama para plantear un problema dado en palabras.

EJEMPLO 2 Plataforma de observación

Se construirá una plataforma rectangular de observación que dominará un valle [véase *la fig.* 2.2 (a)]. *Sus dimensiones serán de* 6 *por* 12 m. *Un cobertizo rectangular de* 40 m^2 *de área estará en el centro de la plataforma, y la parte no cubierta será un pasillo de anchura uniforme. ¿Cuál debe ser el ancho de este pasillo?*

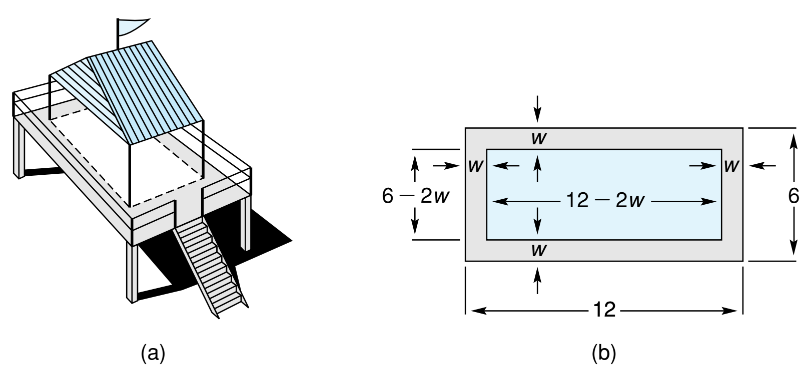


FIGURA 2.2 Pasillo en la plataforma de observación (ejemplo 2).

Solución: un diagrama de la plataforma se muestra en la figura 2.2(b). Sea w el ancho (en metros) del pasillo. Entonces, la parte destinada al cobertizo tiene dimensiones de $12 - 2w$ por $6 - 2w$, y como su área debe ser de 40 m^2, en donde área = (largo)(ancho), tenemos

$$\begin{aligned} (12 - 2w)(6 - 2w) &= 40, \\ 72 - 36w + 4w^2 &= 40 \qquad \text{(multiplicando),} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4w^2 - 36w + 32 &= 0, \\
w^2 - 9w + 8 &= 0 \qquad \text{(dividiendo ambos lados entre 4)}, \\
(w - 8)(w - 1) &= 0, \\
w &= 8, 1.
\end{aligned}
$$

Aunque 8 es una solución de la ecuación, *no* es una solución para nuestro problema, ya que una de las dimensiones de la plataforma es de sólo 6 m. Así, la única solución posible es que el pasillo mida 1 m de ancho.

Las palabras clave que aquí se introducen son *costo fijo, costo variable, costo total, ingreso total y utilidad.* Éste es el momento para que usted adquiera familiaridad con estos términos, ya que aparecen a lo largo de todo el libro.

En el ejemplo siguiente nos referimos a algunos términos de negocios relativos a una compañía manufacturera. **Costo fijo** (*o gastos generales*) es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, como renta, seguros, etc. Este costo debe pagarse independientemente de que se produzca o no. **Costo variable** es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, como salarios y materiales. **Costo total** es la suma de los costos variable y fijo:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}.$$

Ingreso total es el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producto. Está dado por:

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas}).$$

Utilidad (o ganancia) es el ingreso total menos el costo total:

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

EJEMPLO 3 Utilidad

La compañía Anderson fabrica un producto para el cual el costo variable por unidad es de \$6 *y el costo fijo de* \$80,000. *Cada unidad tiene un precio de venta de* \$10. *Determine el número de unidades que deben venderse para obtener una utilidad de* \$60,000.

Solución: sea q el número de unidades que deben venderse (en muchos problemas de negocios, q representa la cantidad). Entonces, el costo variable (en dólares) es $6q$. Por tanto, el *costo total* será $6q + 80{,}000$. Y el ingreso total por la venta de q unidades es $10q$. Ya que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total},$$

nuestro modelo para este problema es

$$60{,}000 = 10q - (6q + 80{,}000).$$

Resolviendo se obtiene

$$
\begin{aligned}
60{,}000 &= 10q - 6q - 80{,}000, \\
140{,}000 &= 4q, \\
35{,}000 &= q.
\end{aligned}
$$

Por tanto, se deben vender 35,000 unidades para obtener una ganancia de \$60,000.

EJEMPLO 4 Precios

Una fábrica produce ropa deportiva para dama y está planeando vender su nueva línea de conjuntos deportivos a detallistas. El costo para éstos será de \$33 *por conjunto. Por conveniencia del detallista, la fábrica colocará una etiqueta con el precio en cada conjunto. ¿Qué cantidad debe ser marcada en las etiquetas de modo que el detallista pueda reducir este precio en un* 20% *durante una liquidación y aún obtener una ganancia de* 15% *sobre el costo?*

Solución: aquí se usa la relación

Observe que *precio = costo + utilidad*

$$\text{precio de venta} = \text{costo por conjunto} + \text{utilidad por conjunto}.$$

Sea p el precio, en dólares, por conjunto en la etiqueta. Durante la liquidación el detallista realmente recibe $p - 0.2p$. Esto debe ser igual al costo, 33, más la utilidad, (0.15)(33). De aquí que

$$\begin{aligned} \text{precio de venta} &= \text{costo} + \text{utilidad} \\ p - 0.2p &= 33 + (0.15)(33), \\ 0.8p &= 37.95, \\ p &= 47.4375. \end{aligned}$$

Desde un punto de vista práctico, el fabricante debe marcar las etiquetas con un precio de $47.44.

EJEMPLO 5 Inversión

Un total de $10,000 *se invirtieron en dos empresas comerciales A y B. Al final del primer año, A y B tuvieron rendimientos de* 6 *y* $5\frac{3}{4}$%*, respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cuál fue la cantidad original asignada a cada empresa, si la utilidad total fue de* $588.75*?*

Solución: sea x la cantidad, en dólares, invertida al 6%. Entonces $10{,}000 - x$ se invirtieron al $5\frac{3}{4}$%. El interés ganado en A fue $(0.06)(x)$ y en B $(0.0575)(10{,}000 - x)$, que en total asciende a 588.75. De aquí que,

$$\begin{aligned} (0.06)x + (0.0575)(10{,}000 - x) &= 588.75, \\ 0.06x + 575 - 0.0575x &= 588.75, \\ 0.0025x &= 13.75, \\ x &= 5500. \end{aligned}$$

Así, $5500 se invirtieron al 6%, y $\$10{,}000 - \$5500 = \$4500$ al $5\frac{3}{4}$%.

EJEMPLO 6 Redención de un bono

La mesa directiva de cierta compañía acuerda en redimir algunos de sus bonos en 2 *años. En ese tiempo, se requerirán* $1,102,500*. Suponga que en este momento reservan* $1,000,000*. ¿A qué tasa de interés anual, compuesto anualmente, se debe tener invertido este dinero a fin de que su valor futuro sea suficiente para redimir los bonos?*

Solución: sea r la tasa anual necesaria. Al final del primer año, la cantidad acumulada será $1,000,000 más el interés $1{,}000{,}000r$ para un total de

$$1{,}000{,}000 + 1{,}000{,}000r = 1{,}000{,}000(1 + r).$$

Bajo interés compuesto, al final del segundo año la cantidad acumulada será de $1{,}000{,}000(1 + r)$ más el interés de esto, que es $1{,}000{,}000(1 + r)r$. Así, el valor total al final del segundo año será

$$1{,}000{,}000(1 + r) + 1{,}000{,}000\,(1 + r)r.$$

Esto debe ser igual a \$1,102,500:

$$1{,}000{,}000(1 + r) + 1{,}000{,}000(1 + r)r = 1{,}102{,}500. \qquad \mathbf{(1)}$$

Ya que $1{,}000{,}000(1 + r)$ es un factor común de ambos términos del miembro izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned}
1{,}000{,}000(1 + r)(1 + r) &= 1{,}102{,}500,\\
1{,}000{,}000(1 + r)^2 &= 1{,}102{,}500,\\
(1 + r)^2 &= \frac{1{,}102{,}500}{1{,}000{,}000} = \frac{11{,}025}{10{,}000} = \frac{441}{400},\\
1 + r &= \pm\sqrt{\frac{441}{400}} = \pm\frac{21}{20},\\
r &= -1 \pm \frac{21}{20}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $r = -1 + (21/20) = 0.05$ o $r = -1 - (21/20) = -2.05$. Aunque 0.05 y -2.05 son raíces de la ecuación (1), rechazamos -2.05, ya que necesitamos que r sea positiva. Por lo que $r = 0.05$, de modo que la tasa buscada es 5%.

En ocasiones puede haber más de una manera de modelar un problema que está dado en palabras, como lo muestra el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Renta de un departamento

Una compañía de bienes raíces es propietaria del conjunto de departamentos Parklane, el cual consiste en 96 *departamentos, cada uno de los cuales puede ser rentado en* \$550 *mensuales. Sin embargo, por cada* \$25 *mensuales de aumento en la renta, se tendrán tres departamentos desocupados sin posibilidad de que se renten. La compañía quiere recibir* \$54,600 *mensuales de rentas. ¿Cuál debe ser la renta mensual de cada departamento?*

Solución:

Método I. Suponga que r es la renta, en dólares, que se cobrará por cada departamento. Entonces el aumento sobre el nivel de \$550 es $r - 550$. Así, el número de aumentos de 25 dólares es $\frac{r - 550}{25}$. Como cada 25 dólares de aumento causa que tres departamentos queden sin rentar, el número total de departamentos sin rentar será $3\left(\frac{r - 550}{25}\right)$. De aquí que el número total de departamentos rentados será $96 - 3\left(\frac{r - 550}{25}\right)$. Como

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados),

tenemos

$$\begin{aligned}
54{,}600 &= r\left[96 - \frac{3(r - 550)}{25}\right],\\
54{,}600 &= r\left[\frac{2400 - 3r + 1650}{25}\right],
\end{aligned}$$

$$54{,}600 = r\left[\frac{4050 - 3r}{25}\right]$$

$$1{,}365{,}000 = r(4050 - 3r)$$

Por tanto,

$$3r^2 - 4050r + 1{,}365{,}000 = 0.$$

Utilizando la fórmula cuadrática,

$$r = \frac{4050 \pm \sqrt{(-4050)^2 - 4(3)(1{,}365{,}000)}}{2(3)}$$

$$= \frac{4050 \pm \sqrt{22{,}500}}{6} = \frac{4050 \pm 150}{6} = 675 \pm 25.$$

Así, la renta para cada departamento debe ser de \$650 o \$700.

Método II. Suponga que n es el número de incrementos de \$25. Entonces el aumento en la renta por departamento será $25n$ y habrá $3n$ departamentos sin rentar. Como

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados),

tenemos

$$54{,}600 = (550 + 25n)(96 - 3n),$$
$$54{,}600 = 52{,}800 + 750n - 75n^2,$$
$$75n^2 - 750n + 1800 = 0,$$
$$n^2 - 10n + 24 = 0,$$
$$(n - 6)(n - 4) = 0.$$

Así, $n = 6$ o $n = 4$. La renta que debe cobrarse es $550 + 25(6) = \$700$ o bien $550 + 25(4) = \$650$.

Ejercicio 2.1

1. **Cercado** Una malla de alambre se colocará alrededor de un terreno rectangular de modo que el área cercada sea de 800 pies^2 y el largo del terreno sea el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de malla se utilizarán?

2. **Geometría** El perímetro de un rectángulo es de 200 pies y su largo es tres veces el ancho. Determine las dimensiones del rectángulo.

3. **Lagarta (oruga)** Uno de los insectos defoliadores más importantes es la oruga lagarta, la cual se alimenta de plantas de sombra, de bosque y de árboles frutales. Una persona vive en un área en la que la oruga se ha convertido en un problema. Esta persona desea rociar los árboles de su propiedad antes de que ocurra una mayor defoliación. Necesita 128 onzas de una solución compuesta de 3 partes de insecticida A y 5 partes de insecticida B. Después de preparada la solución, se mezcla con agua. ¿Cuántas onzas de cada insecticida deben usarse?

4. **Mezcla de concreto** Un constructor fabrica cierto tipo de concreto, al mezclar 1 parte de cemento Portland (compuesto de cal y arcilla), 3 partes de arena y 5 partes de piedra pulverizada (en volumen). Si se necesitan 765 pies^3 de concreto, ¿cuántos pies cúbicos de cada ingrediente necesita el constructor?

5. **Acabado de muebles** De acuerdo con *The Consumer's Handbook* (Paul Fargis, ed., Nueva York, Hawthorn, 1974), un buen aceite para el acabado de muebles de madera contiene 2 partes de aceite de linaza y 1 parte

de trementina. Si usted necesita preparar una pinta (16 onzas líquidas) de este aceite, ¿cuántas onzas líquidas de trementina se necesitan?

6. **Administración de bosques** Una compañía maderera posee un bosque que tiene forma rectangular de 1×2 millas. Si se tala una franja uniforme de árboles en los extremos de este bosque, ¿cuál debe ser el ancho de la franja, si se deben conservar $\frac{3}{4}$ de millas cuadradas de bosque?

7. **Vereda de un jardín** Un terreno rectangular de 4×8 m se usa como jardín. Se decide poner una vereda en toda la orilla interior de modo que 12 m^2 del terreno se dejen para flores. ¿Cuál debe ser el ancho de la vereda?

8. **Conducto de ventilación** El diámetro de un conducto circular de ventilación es de 140 mm. Este conducto está acoplado a un conducto cuadrado como se muestra en la figura 2.3. Para asegurar un flujo suave de aire, las áreas de las secciones circular y cuadrada deben ser iguales. Calcule, al milímetro más cercano, cuál debe ser la longitud x del lado de la sección cuadrada.

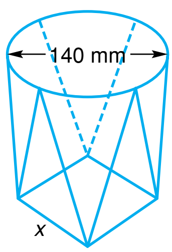
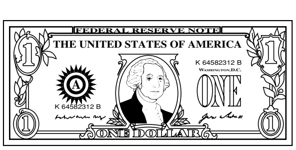


FIGURA 2.3 Conducto de ventilación (problema 8).

9. **Utilidad** Una compañía de refinación de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de \$76 por tonelada. Si los costos fijos son \$110,000 por mes y el alimento se vende en \$126 por tonelada, ¿cuántas toneladas deben venderse para que la compañía tenga una utilidad mensual de \$540,000?

10. **Ventas** La directiva de una compañía quiere saber cuántas unidades de su producto necesita vender para obtener una utilidad de \$100,000. Para este caso se cuenta con la siguiente información: precio de venta por unidad, \$20; costo variable por unidad, \$15; costo fijo total, \$600,000. A partir de estos datos determine las unidades que deben venderse.

11. **Inversión** Una persona desea invertir \$20,000 en dos empresas, de modo que el ingreso total por año sea de \$1440. Una empresa paga el 6% anual; la otra tiene mayor riesgo y paga un $7\frac{1}{2}$% anual. ¿Cuánto debe invertir en cada una?



12. **Inversión** Una persona invirtió \$20,000, parte a una tasa de interés de 6% anual y el resto al 7% anual. El interés total al final de un año fue equivalente a una tasa de $6\frac{3}{4}$% anual sobre el total inicial de \$20,000. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

13. **Precios** El costo de un producto al menudeo es de \$3.40. Si se desea obtener una ganancia del 20% sobre el precio de venta, ¿a qué precio debe venderse el producto?

14. **Retiro de bonos** En dos años una compañía requiere de \$1,123,600 con el fin de retirar algunos bonos. Si ahora invierte \$1,000,000 con este objetivo, ¿cuál debe ser la tasa de interés, compuesta anualmente, que debe recibir sobre este capital para retirar los bonos?

15. **Programa de expansión** En dos años una compañía iniciará un programa de expansión. Tiene decidido invertir \$2,000,000 ahora, de modo que en dos años el valor total de la inversión sea de \$2,163,200, la cantidad requerida para la expansión. ¿Cuál es la tasa de interés anual, compuesta anualmente, que la compañía debe recibir para alcanzar su objetivo?

16. **Negocios** Una compañía determina que si produce y vende q unidades de un producto, el ingreso total por las ventas será $100\sqrt{q}$. Si el costo variable por unidad es de \$2 y el costo fijo de \$1200, determine los valores de q para los que

$$\text{ingreso total por ventas} = \text{costo variable} + \text{costo fijo.}$$

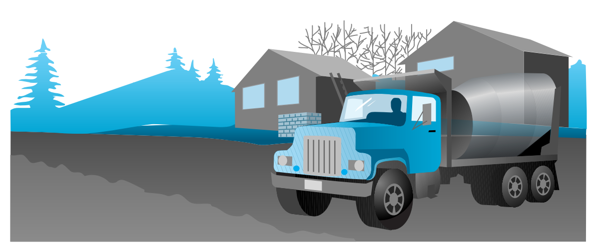
(Esto es, que la utilidad sea cero.)

17. **Alojamiento** El dormitorio de una universidad puede albergar a 210 estudiantes. Este otoño hay cuartos disponibles para 76 estudiantes de nuevo ingreso. En promedio un 95% de aquellos estudiantes de nuevo ingreso que hicieron una solicitud realmente reservan un cuarto. ¿Cuántas solicitudes de cuartos debe distribuir el colegio si quiere recibir 76 reservaciones?

18. **Encuestas** Un grupo de personas fue encuestado y el 20%, o 700, de ellas favoreció a un nuevo producto sobre la marca de mayor venta. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

19. **Salario de una celadora** Se reportó que en cierta prisión para mujeres, el salario de las celadoras era 30% menor (\$200 menos) por mes, que el de los hombres que ejercen el mismo trabajo. Determine el salario anual de un celador. Redondee su respuesta al dólar más cercano.

20. **Huelga de conductores** Hace pocos años, los transportistas de cemento estuvieron en huelga durante 46 días. Antes de la huelga recibían \$7.50 por hora y trabajan 260 días, 8 horas diarias durante un año. ¿Qué porcentaje de incremento en el ingreso anual fue necesario para, en un año, suplir la pérdida de esos 46 días?



21. Punto de equilibrio Un fabricante de cartuchos para juegos de vídeo, vende cada cartucho en \$19.95. El costo de fabricación de cada cartucho es de \$12.92. Los costos fijos mensuales son de \$8000. Durante el primer mes de ventas de un nuevo juego, ¿cuántos cartuchos debe vender el fabricante para llegar al punto de equilibrio (esto es, para que el ingreso total se igual al costo total)?

22. Club de inversión Un club de inversión compró un bono de una compañía petrolera por \$5000. El bono da un rendimiento de 8% anual. El club ahora quiere comprar acciones de una compañía de suministros para hospitales. El precio de cada acción es de \$20 y se gana un dividendo de \$0.50 al año por acción. ¿Cuántas acciones debe comprar el club de modo que de su inversión total en acciones y bonos obtenga el 5% anual?

23. Cuidado de la vista Como un beneficio complementario para sus empleados, una compañía estableció un plan de cuidado de la vista. Bajo este plan, cada año la compañía paga los primeros \$35 de los gastos de cuidado de la vista y el 80% de todos los gastos adicionales en ese rubro, hasta cubrir un *total* máximo de \$100. Para un empleado, determine los gastos anuales totales en cuidado de la vista cubiertos por este programa.

24. Control de calidad En un periodo determinado, el fabricante de una barra de dulce con centro de caramelo determinó que 3.1% de las barras fueron rechazadas por imperfecciones.

a. Si c barras de dulce se fabrican en un año, ¿cuántas esperaría rechazar el fabricante?

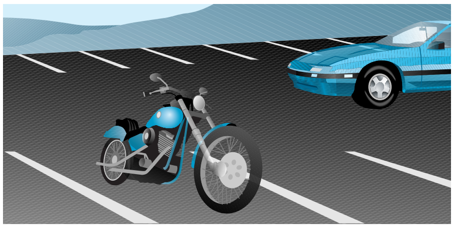
b. Para este año, el consumo anual del dulce se proyecta que será de 600,000,000 de barras. Aproximadamente, ¿cuántas barras tendrá que producir el fabricante, si toma en cuenta las rechazadas?

25. Negocios Suponga que los clientes comprarán q unidades de un producto cuando el precio es de $(80 - q)/4$ dólares *cada uno*. ¿Cuántas unidades deben venderse a fin de que el ingreso por ventas sea de 400 dólares?

26. Inversión ¿En cuánto tiempo se duplicará una inversión a interés simple con una tasa del 5% anual? [*Sugerencia:* véase el ejemplo 6(a) de la sec. 1.1 y exprese el 5% como 0.05.]

27. Alternativas en los negocios El inventor de un juguete nuevo ofrece a la compañía Kiddy Toy los derechos de exclusividad para fabricar y vender el juguete por una suma total de \$25,000. Después de estimar que las posibles ventas futuras al cabo de un año serán nulas, la compañía está revisando la siguiente propuesta alternativa: dar un pago total de \$2000 más una regalía de \$0.50 por cada unidad vendida. ¿Cuántas unidades deben venderse el primer año para hacer esta alternativa tan atractiva al inventor como la petición original? [*Sugerencia:* determine cuándo son iguales los ingresos con ambas propuestas.]

28. Estacionamiento Un estacionamiento es de 120 pies de largo por 80 pies de ancho. Debido a un incremento en el personal, se decidió duplicar el área del lote aumentando franjas de igual anchura en un extremo y un lado (en forma de escuadra). Determine el ancho de cada franja.



29. Rentas Usted es el asesor financiero de una compañía que posee un edificio con 50 oficinas. Cada una puede rentarse en \$400 mensuales. Sin embargo, por cada incremento de \$20 mensuales se quedarán dos vacantes sin posibilidad de que sean ocupadas. La compañía quiere obtener un total de \$20,240 mensuales de rentas del edificio. Se le pide determinar la renta que debe cobrarse por cada oficina. ¿Cuál es su respuesta?

30. Inversión Hace seis meses, una compañía de inversión tenía un portafolio de \$3,100,000, que consistía en acciones de primera y acciones atractivas. Desde entonces, el valor de la inversión en acciones de primera aumentó $\frac{1}{10}$, mientras que el valor de las acciones atractivas disminuyó $\frac{1}{10}$. El valor actual del portafolio es \$3,240,000. ¿Cuál es el valor *actual* de la inversión en acciones de primera?

31. Ingreso El ingreso mensual de cierta compañía está dado por $R = 800p - 7p^2$, donde p es el precio en dólares del producto que fabrica esa compañía. ¿A qué precio el ingreso será de \$10,000, si el precio debe ser mayor de \$50?

32. Razón precio-utilidad La *razón precio-utilidad* (P/U) de una compañía es el cociente que se obtiene de dividir el valor de mercado de una acción de sus acciones comunes en circulación, entre las utilidades por acción. Si P/U se incrementa en 10% y los ingresos por acción aumentan en 20%, determine el incremento porcentual en el valor de mercado por acción para las acciones comunes.

33. Equilibrio de mercado Cuando el precio de un producto es p dólares por unidad, suponga que un fabricante suministrará $2p - 8$ unidades del producto al mercado y que los consumidores demandarán $300 - 2p$ unidades. En el valor de p para el cual la oferta es igual a la demanda, se dice que el mercado está en equilibrio. Determine ese valor de p.

34. Equilibrio de mercado Repita el problema 33 para las condiciones siguientes: a un precio de p dólares por unidad, la oferta es $3p^2 - 4p$ y la demanda es $24 - p^2$.

35. Barda de seguridad Por razones de seguridad, una compañía cercará un área rectangular de 11,200 pies^2 en la parte posterior de su planta. Un lado estará delimitado por el edificio y los otros tres por la barda (véase la fig. 2.4). Si se van a utilizar 300 pies de barda, ¿cuáles son las dimensiones del área rectangular?

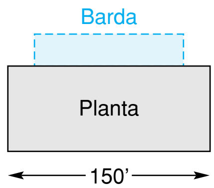


FIGURA 2.4
Barda de seguridad (problema 35).

36. Diseño de empaque Una compañía está diseñando un empaque para su producto. Una parte del empaque será una caja abierta fabricada a partir de una pieza cuadrada de aluminio, de la que se cortará un cuadrado de 2 pulgadas de cada esquina para así doblar hacia arriba los lados (véase la fig. 2.5). La caja es para contener 50 pulgadas^3. ¿Cuáles son las dimensiones de la pieza cuadrada de aluminio que debe utilizarse?

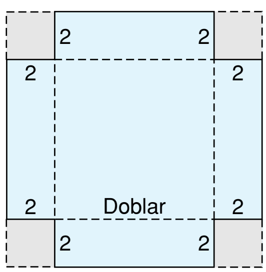


FIGURA 2.5
Construcción de una caja (problema 36).

37. Diseño de producto Una compañía de dulces fabrica una popular barra de forma rectangular con 10 cm de largo, por 5 cm de ancho y 2 cm de grosor (véase la fig. 2.6). A causa de un incremento en los costos, la compañía ha decidido reducir el volumen de la barra en un drástico 28%; el grosor será el mismo, pero el largo y el ancho se reducirán en la misma cantidad. ¿Cuál será el largo y el ancho de la nueva barra?

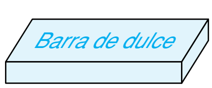


FIGURA 2.6
Barra de dulce (problema 37).

38. Diseño de producto Una compañía fabrica un dulce en forma de arandela (un dulce con un agujero en medio; véase la fig. 2.7). A causa del incremento en los costos, la compañía reducirá el volumen del dulce en un 20%. Para hacerlo conservarán el mismo grosor y radio exterior, pero harán mayor el radio interno. Actualmente el grosor es de 2 mm, el radio interno 2 mm y el radio exterior 7 mm. Determine el radio interno del dulce con el nuevo estilo. [*Sugerencia:* el volumen V de un disco sólido es $\pi r^2 h$, donde r es el radio y h el grosor del disco.]

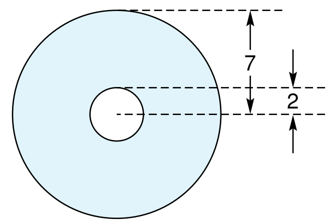
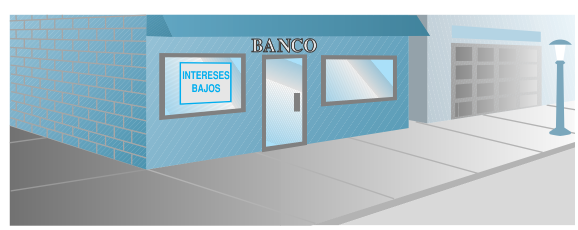


FIGURA 2.7 Dulce en forma de arandela (problema 38).

39. Saldo compensatorio Un *saldo compensatorio* se refiere a aquella práctica en la cual un banco requiere a quien solicita un crédito, mantenga en depósito una cierta parte de un préstamo durante el plazo del mismo. Por ejemplo, si una compañía obtiene un préstamo de \$100,000, el cual requiere de un saldo compensatorio del 20%, tendría que dejar \$20,000 en depósito y usar sólo \$80,000. Para satisfacer los gastos de renovación de sus herramientas, Victor Manufacturing Company debe pedir prestados \$95,000. El banco, con el que no han tenido tratos previos, requiere de un saldo compensatorio del 15%. Aproximando a la unidad de millar de dólares más cercana, diga, ¿cuál debe ser el monto total del préstamo para obtener los fondos necesarios?



40. Plan de incentivos Una compañía de maquinaria tiene un plan de incentivos para sus agentes de ventas. Por cada máquina que un agente venda la comisión es de \$40. La comisión por cada máquina vendida se incrementa en \$0.04, siempre que se vendan más de 600 unidades. Por ejemplo, la comisión sobre cada una de 602 máquinas vendidas será de \$40.08. ¿Cuántas máquinas debe vender un agente para obtener ingresos por \$30,800?

41. Bienes raíces Una compañía fraccionadora compra una parcela en \$7200. Después de vender todo, excepto

20 acres, con una ganancia de \$30 por acre sobre su costo original, el costo total de la parcela se recuperó. ¿Cuántos acres se vendieron?

42. Margen de utilidad EL *margen de utilidad* de una compañía es su ingreso neto dividido entre sus ventas totales. El margen de utilidad en cierta compañía aumentó en 0.02 con respecto al año anterior. El año anterior vendió su producto en \$3.00 cada uno y tuvo un ingreso neto de \$4500. Este año incrementó el precio de su producto en \$0.50 por unidad, vendió 2000 más y tuvo un ingreso neto de \$7140. La compañía nunca ha tenido un margen de utilidad mayor que 0.15. ¿Cuántos de sus productos vendió la compañía el año pasado y cuántos vendió este año?

43. Negocios Una compañía fabrica los productos A y B. El costo de producir cada unidad de A es \$2 más que el de B. Los costos de producción de A y B son \$1500 y \$1000, respectivamente, y se hacen 25 unidades más de A que de B. ¿Cuántas unidades de cada producto se fabrican?

OBJETIVO Resolver desigualdades lineales con una variable e introducir la notación de intervalos.

2.2 DESIGUALDADES LINEALES

Suponga que a y b son dos puntos sobre la recta de los números reales. Entonces, a y b coinciden, a se encuentra a la izquierda de b, o a se encuentra a la derecha de b (véase la fig. 2.8).

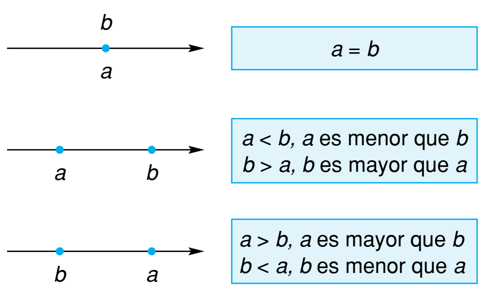


FIGURA 2.8 Posición relativa de dos puntos.

Si a y b coinciden entonces $a = b$. Si a se encuentra a la izquierda de b, decimos que a es menor que b y escribimos $a < b$, en donde el *símbolo de desigualdad* "$<$" se lee "es menor que". Por otra parte, si a se encuentra a la derecha de b, decimos que a es mayor que b y escribimos $a > b$. Los enunciados $a > b$ y $b < a$ son equivalentes.

Otro símbolo de desigualdad, "$\leq$", se lee "es menor o igual a" y se define como: $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o $a = b$. De manera semejante, el símbolo "$\geq$" está definido como: $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o $a = b$. En este caso decimos que a es mayor o igual a b.

Usaremos las palabras *números reales* y *puntos* de manera indistinta, ya que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos que están sobre una recta. Así, podemos hablar de los puntos $-5, -2, 0$, 7 y 9, y escribir $7 < 9$, $-2 > -5$, $7 \leq 7$ y $7 \geq 0$ (véase la fig. 2.9). Claramente, si $a > 0$, entonces a es positivo; si $a < 0$, entonces a es negativo.

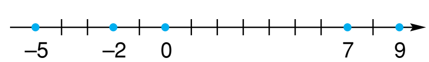


FIGURA 2.9 Puntos en la recta numérica.

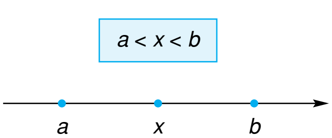


FIGURA 2.10 $a < x$ y $x < b$.

Suponga que $a < b$, y x está entre a y b (véase la fig. 2.10). Entonces no sólo $a < x$, sino también $x < b$. Indicamos esto escribiendo $a < x < b$, que puede considerarse como una desigualdad doble. Por ejemplo, $0 < 7 < 9$ (como referencia regrese a la fig. 2.9).

Acabamos de definir una desigualdad usando la relación menor que ($<$), pero las otras ($>$, $\leq$, $\geq$) también podrían haber sido utilizadas.

Definición

Una ***desigualdad*** es un enunciado que establece que un número es menor que otro.

Por supuesto, representamos las desigualdades por medio de símbolos de desigualdad. Si dos desigualdades tienen sus símbolos apuntando en la misma dirección, entonces decimos que tienen el *mismo sentido*. Si no, se dice que son de *sentidos opuestos* o que una tiene el *sentido contrario* de la otra. Por tanto, $a < b$ y $c < d$ tienen el mismo sentido, pero $a < b$ tiene el sentido contrario de $c > d$.

Resolver una desigualdad, como $2(x - 3) < 4$, significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales dicha desigualdad es cierta. Esto implica la aplicación de ciertas reglas que ahora establecemos:

Reglas para las desigualdades

Tenga en mente que las reglas también se aplican a $\leq$, $>$, y $\geq$.

1. Si un mismo número se suma o resta en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b, \text{ entonces } a + c < b + c \text{ y } a - c < b - c.$$

Por ejemplo, $7 < 10$, de modo que $7 + 3 < 10 + 3$.

2. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número **positivo,** la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } ac < bc \text{ y } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo, $3 < 7$ y $2 > 0$, de modo que $3(2) < 7(2)$ y $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$.

El sentido de una desigualdad debe invertirse cuando multiplicamos o dividimos ambos lados por un número negativo.

3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número ***negativo,*** entonces la desigualdad resultante tendrá el sentido ***contrario*** de la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } a(-c) > b(-c) \text{ y } \frac{a}{-c} > \frac{b}{-c}.$$

Por ejemplo, $4 < 7$ pero $4(-2) > 7(-2)$ y $\dfrac{4}{-2} > \dfrac{7}{-2}$.

4. Cualquier lado de una desigualdad puede reemplazarse por una expresión equivalente a ella. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } a = c, \text{ entonces } c < b.$$

Por ejemplo, si $x < 2$ y $x = y + 4$, entonces $y + 4 < 2$.

5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, entonces sus recíprocos[1] respectivos estarán relacionados por un símbolo de desigualdad con sentido ***contrario*** a la desigualdad original. Por ejemplo, $2 < 4$, pero $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.
6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y elevamos cada lado a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. Por tanto, si $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces

$$a^n < b^n \text{ y } \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b},$$

en donde suponemos que n es un entero positivo en la última desigualdad. Por ejemplo, $4 < 9$ de modo que $4^2 < 9^2$ y $\sqrt{4} < \sqrt{9}$.

El resultado de aplicar las reglas 1 a 4 a una desigualdad se conoce como *desigualdad equivalente.* Ésta es una desigualdad cuya solución es exactamente la misma que la de la original. Aplicaremos estas reglas a una *desigualdad lineal*.

Definición

Una ***desigualdad lineal*** en la variable x es aquella que puede escribirse en la forma

$$ax + b < 0,$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

La definición también aplica para $\leq$, $>$, y $\geq$.

> ***Principios en práctica 1***
> **Resolución de una desigualdad lineal**
>
> Un agente de ventas tiene un ingreso mensual dado por $I = 200 + 0.8S$, en donde S es el número de productos vendidos en el mes. ¿Cuántos productos debe vender para obtener al menos \$4500 en un mes?

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resolver $2(x - 3) < 4$.

Solución:

> **Estrategia:** reemplazaremos la desigualdad dada por desigualdades equivalentes hasta que la solución sea evidente.

$$\begin{aligned} 2(x - 3) &< 4, & \\ 2x - 6 &< 4 & \text{(Regla 4),} \\ 2x - 6 + 6 &< 4 + 6 & \text{(Regla 1),} \\ 2x &< 10 & \text{(Regla 4),} \\ \frac{2x}{2} &< \frac{10}{2} & \text{(Regla 2),} \\ x &< 5. & \end{aligned}$$

Todas las desigualdades son equivalentes. Por tanto, la desigualdad original es cierta para *todos* los números reales x tales que $x < 5$. Por ejemplo, la desigualdad es cierta para $x = -10, -0.1, 0, \frac{1}{2}$ y 4.9. Podemos escribir nuestra solución simplemente como $x < 5$ y representarla de manera geométrica por medio de una semirrecta gruesa en la figura 2.11. El paréntesis indica que el 5 *no está incluido* en la solución.

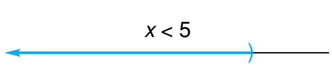


FIGURA 2.11 Todos los números reales menores que 5.

[1]El *recíproco* de un número diferente de cero, a, se define como $\frac{1}{a}$.

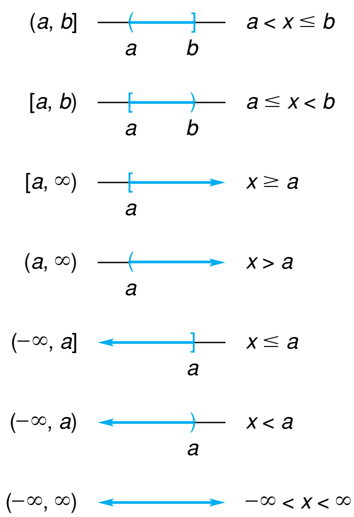


FIGURA 2.13 Intervalos.

En el ejemplo 1, la solución consistía en un conjunto de números, a saber, todos los menores que 5. En general, es común utilizar el término **intervalo** para referirse a tales conjuntos. En el caso del ejemplo 1, el conjunto de todas las x tales que $x < 5$ puede denotarse por la *notación de intervalo* $(-\infty, 5)$. El símbolo $-\infty$ no es un número, sino sólo una convención para indicar que el intervalo se extiende de manera indefinida hacia la izquierda.

Existen otros tipos de intervalos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números x para los cuales $a \leq x \leq b$ se conoce como un **intervalo cerrado,** que incluye a los números a y b, los cuales se llaman *extremos* del intervalo. Este intervalo se denota mediante $[a, b]$ y se muestra en la figura 2.12(a). Los corchetes indican que a y b *están incluidos* en el intervalo. Por otra parte, el conjunto de todas las x para las que

FIGURA 2.12 Intervalos cerrados y abiertos.

$a < x < b$ se llama **intervalo abierto** y se denota mediante (a, b). Los extremos *no* son parte de este conjunto [véase la fig. 2.12(b)]. Para ampliar estos conceptos, tenemos los intervalos mostrados en la figura 2.13.

EJEMPLO 2 **Resolución de una desigualdad lineal**

Resolver $3 - 2x \leq 6$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\leq 6, \\ -2x &\leq 3 && \text{(Regla 1),} \\ x &\geq -\frac{3}{2} && \text{(Regla 3).} \end{aligned}$$

Al dividir ambos lados entre –2 se invierte el sentido de la desigualdad.

La solución es $x \geq -\frac{3}{2}$, o, en notación de intervalo, $[-\frac{3}{2}, \infty)$. Esto se representa geométricamente en la figura 2.14.

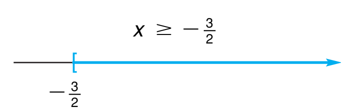


FIGURA 2.14 El intervalo $(-\frac{3}{2}, \infty)$.

Principios en práctica 2

Resolución de una desigualdad lineal

El veterinario de un zoológico puede comprar cuatro diferentes alimentos para animales con diferentes valores de nutrimentos, para los animales de pastoreo. Sea x_1 el número de bolsas de alimento 1, x_2 el número de bolsas de alimento 2, y así sucesivamente. El número de bolsas de cada alimento necesario puede describirse por medio de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} x_1 &= 150 - x_4 \\ x_2 &= 3x_4 - 210 \\ x_3 &= x_4 + 60 \end{aligned}$$

Con base en estas ecuaciones, plantee cuatro desigualdades, suponiendo que cada variable debe ser no negativa.

EJEMPLO 3 **Resolución de una desigualdad lineal**

Resolver $\frac{3}{2}(s - 2) + 1 > -2(s - 4)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}(s - 2) + 1 &> -2(s - 4), \\ 2[\tfrac{3}{2}(s - 2) + 1] &> 2[-2(s - 4)] && \text{(Regla 2),} \end{aligned}$$

$$3(s - 2) + 2 > -4(s - 4),$$
$$3s - 4 > -4s + 16,$$
$$7s > 20 \qquad \text{(Regla 1)},$$
$$s > \frac{20}{7} \qquad \text{(Regla 2)}.$$

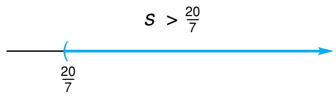


FIGURA 2.15 El intervalo $(\frac{20}{7}, \infty)$.

La solución es $(\frac{20}{7}, \infty)$. Véase la figura 2.15.

EJEMPLO 4 Resolución de desigualdades lineales

a. *Resolver* $2(x - 4) - 3 > 2x - 1$.

Solución:

$$2(x - 4) - 3 > 2x - 1,$$
$$2x - 8 - 3 > 2x - 1,$$
$$-11 > -1.$$

Como nunca será verdadero que $-11 > -1$, no existe solución y el conjunto solución es $\varnothing$.

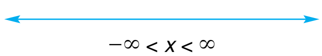


FIGURA 2.16 El intervalo $(-\infty, \infty)$.

b. *Resolver* $2(x - 4) - 3 < 2x - 1$.

Solución: procediendo como en la parte (a), obtenemos $-11 < -1$. Esto es verdadero para todos los números reales x, de modo que la solución es $(-\infty, \infty)$; véase la figura 2.16.

Ejercicio 2.2

En los problemas del 1 al 34 resuelva las desigualdades. Dé su respuesta en notación de intervalo y represéntela en forma geométrica sobre la recta de los números reales.

1. $3x > 12$.

2. $4x < -2$.

3. $4x - 13 \leq 7$.

4. $3x \geq 0$.

5. $-4x \geq 2$.

6. $2y + 1 > 0$.

7. $5 - 7s > 3$.

8. $4s - 1 < -5$.

9. $3 < 2y + 3$.

10. $6 \leq 5 - 3y$.

11. $2x - 3 \leq 4 + 7x$.

12. $-3 \geq 8(2 - x)$.

13. $3(2 - 3x) > 4(1 - 4x)$.

14. $8(x + 1) + 1 < 3(2x) + 1$.

15. $2(3x - 2) > 3(2x - 1)$.

16. $3 - 2(x - 1) \leq 2(4 + x)$.

17. $x + 2 < \sqrt{3} - x$.

18. $\sqrt{2}(x + 2) > \sqrt{8}(3 - x)$.

19. $\frac{5}{6}x < 40$.

20. $-\frac{2}{3}x > 6$.

21. $\frac{9y + 1}{4} \leq 2y - 1$

22. $\frac{4y - 3}{2} \geq \frac{1}{3}$.

23. $4x - 1 \geq 4(x - 2) + 7.$

24. $0x \leq 0.$

25. $\frac{1 - t}{2} < \frac{3t - 7}{3}.$

26. $\frac{3(2t - 2)}{2} > \frac{6t - 3}{5} + \frac{t}{10}.$

27. $2x + 13 \geq \frac{1}{2}x - 4.$

28. $4x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}x.$

29. $\frac{2}{3}r < \frac{5}{6}r.$

30. $\frac{7}{4}t > -\frac{8}{3}t.$

31. $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} > y + \frac{y}{5}.$

32. $9 - 0.1x \leq \frac{2 - 0.01x}{0.2}.$

33. $0.1(0.03x + 4) \geq 0.02x + 0.434.$

34. $\frac{5y - 1}{-3} < \frac{7(y + 1)}{-2}.$

35. Utilidades Cada mes del año pasado una compañía tuvo utilidades mayores que \$37,000 pero menores que \$53,000. Si S representa los ingresos totales del año, describa S utilizando desigualdades.

36. Utilizando desigualdades, simbolice el enunciado siguiente. El número de horas de trabajo x para fabricar un producto no es menor que $2\frac{1}{2}$ ni mayor que 4.

37. Geometría En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos x es menor que 3 veces el otro ángulo agudo más 10 grados. Resuelva para x.

38. Gasto Una estudiante tiene \$360 para gastar en un sistema estereofónico y algunos discos compactos. Si ella compra un estereofónico que cuesta \$219 y el costo de los discos es de \$18.95 cada uno, determine el mayor número de discos que ella puede comprar.

OBJETIVO Modelar situaciones en términos de desigualdades.

2.3 APLICACIONES DE DESIGUALDADES

La resolución de problemas expresados con palabras algunas veces puede implicar desigualdades, como lo ilustran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Utilidad

Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios, el costo combinado de mano de obra y material es de \$21 *por calentador. Los costos fijos* (*costos en que se incurre en un periodo dado, sin importar la producción*) *son* \$70,000. *Si el precio de venta de un calentador es* \$35, *¿cuántos debe vender para que la compañía genere utilidades?*

Solución:

Estrategia: recuerde que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

Debemos encontrar el ingreso total y después determinar cuándo su diferencia es positiva.

Sea q el número de calentadores que deben venderse. Entonces su costo es $21q$. Por tanto, el costo total para la compañía es $21q + 70{,}000$. El ingreso total de la venta de q calentadores será $35q$. Ahora,

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total},$$

y queremos que la utilidad > 0. Así,

$$\begin{aligned} \text{ingreso total} - \text{costo total} &> 0. \\ 35q - (21q + 70{,}000) &> 0, \\ 14q &> 70{,}000, \\ q &> 5000. \end{aligned}$$

Por tanto, deben venderse al menos 5001 calentadores para que la compañía genere utilidades.

EJEMPLO 2 Renta *versus* compra

Un constructor debe decidir entre rentar o comprar una máquina excavadora. Si fuese a rentar la máquina, el costo de la renta sería de \$3000 *mensuales* (*sobre la base de un año*) *y el costo diario* (*gas, aceite y operador*) *sería de* \$180 *por cada día que la máquina se utilice. Si él fuese a comprarla, sus costos fijos anuales serían de* \$20,000 *y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de* \$230 *por cada día que la máquina se utilizara. ¿Cuántos días al año por lo menos, tendría que utilizar el constructor la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?*

Solución:

Estrategia: vamos a determinar expresiones para el costo anual de la renta y el costo anual de la compra, así encontraremos cuándo el costo de la renta es menor que el de la compra.

Sea d el número de días de cada año que la máquina será utilizada. Si la máquina se renta, el costo total anual consiste en los gastos de la renta, que son (12)(3000) y los costos diarios de $180d$. Si la máquina se compra, el costo por año es $20000 + 230d$. Queremos que

$$\begin{aligned} \text{costo}_{\text{renta}} &< \text{costo}_{\text{compra}}, \\ 12(3000) + 180d &< 20{,}000 + 230d, \\ 36{,}000 + 180d &< 20{,}000 + 230d, \\ 16{,}000 &< 50d, \\ 320 &< d. \end{aligned}$$

Por tanto, el constructor debe utilizar la máquina al menos 321 días para justificar rentarla.

EJEMPLO 3 Razón de activo

La *razón de activo* de un negocio es el cociente de sus activos circulantes (efectivo, inventario de mercancías y cuentas por cobrar), a sus pasivos circulantes (préstamos a corto plazo e impuestos).

Después de consultar con el contralor, el presidente de la Ace Sports Equipment Company decide pedir un préstamo a corto plazo para hacerse de inventario. La compañía tiene un activo de \$350,000 *y un pasivo de* \$80,000. *¿Cuánto pueden pedir prestado si quieren que su razón de activo no sea menor que* 2.5*?* (*Nota: los fondos que recibirán se consideran como activo y el préstamo como pasivo.*)

Solución: sea x la cantidad que la compañía puede pedir prestada. Entonces sus activos serán $350{,}000 + x$ y sus pasivos $80{,}000 + x$. Así,

$$\text{razón de activo} = \frac{\text{activo circulante}}{\text{pasivo circulante}} = \frac{350{,}000 + x}{80{,}000 + x}.$$

Aunque la desigualdad que debe resolverse no es lineal, conduce a una desigualdad lineal.

Queremos

$$\frac{350{,}000 + x}{80{,}000 + x} \geq 2.5.$$

Ya que x es positiva, también lo es $80{,}000 + x$. Por lo que podemos multiplicar ambos lados de la desigualdad por $80{,}000 + x$ y su sentido permanecerá igual. Tenemos

$$\begin{aligned} 350{,}000 + x &\geq 2.5(80{,}000 + x), \\ 150{,}000 &\geq 1.5x, \\ 100{,}000 &\geq x. \end{aligned}$$

En consecuencia, la compañía puede pedir prestado hasta \$100,000 y aún mantener una razón de activo no menor que 2.5.

EJEMPLO 4 Publicidad

Una compañía de publicidad determina que el costo por publicar cada ejemplar de una cierta revista es de \$1.50. *El ingreso recibido de los distribuidores es* \$1.40 *por revista. El ingreso por publicidad es* 10% *de los ingresos recibidos de los distribuidores por todos los ejemplares vendidos por arriba de* 10,000. *¿Cuál es el número mínimo de revistas que deben venderse de modo que la compañía obtenga utilidades?*

Solución:

Estrategia: tenemos que utilidad = ingreso total − costo total, de modo que encontramos una expresión para la utilidad y después la hacemos mayor que cero.

Sea q el número de revistas vendidas. El ingreso recibido de los distribuidores es $1.40q$ y el recibido por publicidad es $(0.10)[(1.40)(q - 10{,}000)]$. El costo total de la publicación es $1.50q$. Así,

$$\begin{aligned} \text{ingreso total} - \text{costo total} &> 0. \\ 1.40q + (0.10)[(1.40)(q - 10{,}000)] - 1.50q &> 0, \\ 1.4q + 0.14q - 1400 - 1.5q &> 0, \\ 0.04q - 1400 &> 0, \\ 0.04q &> 1400, \\ q &> 35{,}000. \end{aligned}$$

Por tanto, el número total de revistas debe ser mayor que 35,000. Esto es, al menos 35,001 ejemplares deben venderse para garantizar utilidades.

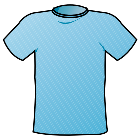
Ejercicio 2.3

1. **Utilidades** La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de \$20 y un costo unitario de \$15. Si los costos fijos son de \$600,000, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la compañía tenga utilidades.

2. **Utilidades** Para producir una unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de \$2.50 y el de mano de obra de \$4. El gasto general, sin importar el volumen de ventas, es de \$5000. Si el precio para un mayorista es de \$7.40 por unidad, determine el número mínimo de unidades que debe venderse para que la compañía obtenga utilidades.

3. **Arrendamiento con opción a compra vs. compra** Una mujer de negocios quiere determinar la diferencia entre el costo de poseer un automóvil y el de arrendarlo con opción a compra. Ella puede arrendar un automóvil por \$420 al mes (con una base anual). Bajo este plan, el costo por milla (gasolina y aceite) es \$0.06. Si ella compra el automóvil, el gasto fijo anual sería de \$4700, y otros costos ascenderían a \$0.08 por milla. ¿Cuántas millas por lo menos tendría que conducir ella por año para que el arrendamiento no fuese más caro que la compra?

4. **Fabricación de camisetas** Una fábrica de camisetas produce N camisetas con un costo de mano de obra total (en dólares) de $1.2N$ y un costo total por material de $0.3N$. Los gastos generales para la planta son de \$6000. Si cada camiseta se vende en \$3, ¿cuántas camisetas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?



5. **Publicidad** El costo unitario de publicación de una revista es de \$0.65. Cada una se vende al distribuidor en \$0.60, y la cantidad que se recibe por publicidad es el 10% de la cantidad recibida por todas las revistas vendidas arriba de las 10,000. Encuentre el menor número de revistas que pueden publicarse sin pérdida, esto es, que utilidad ≥ 0. (Suponga que toda la emisión se venderá.)

6. **Asignación de producción** Una compañía produce relojes despertadores. Durante una semana normal de trabajo, el costo por mano de obra para producir un reloj es de \$2.00, pero si es hecho en tiempo extra su costo asciende a \$3.00. El administrador ha decidido no gastar más de \$25,000 por semana en mano de obra. La compañía debe producir 11,000 relojes esta semana. ¿Cuál es la cantidad mínima de relojes que deben producirse durante una semana normal de trabajo?

7. **Inversión** Una compañía invierte \$30,000 de sus fondos excedentes a dos tasas de interés anual: 5 y $6\frac{3}{4}$%. Desea un rendimiento anual que no sea menor al $6\frac{1}{2}$%. ¿Cuál es la cantidad mínima que debe invertir a la tasa de $6\frac{3}{4}$%?

8. **Razón de activo** La tasa de activo de Precision Machine Products es 3.8. Si sus activos circulantes son de \$570,000, ¿cuáles son sus pasivos circulantes? Para elevar sus fondos de reserva, ¿cuál es la cantidad máxima que puede pedir prestada a corto plazo si quiere que su razón de activo no sea menor que 2.6? (Véase el ejemplo 3 para una explicación de la razón de activo.)

9. **Asignación de ventas** Actualmente, un fabricante tiene 2500 unidades de un producto en inventario. Hoy el precio unitario del producto es de \$4 por unidad. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en \$0.50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2500 unidades no sea menor que \$10,750. ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse este mes?

10. **Ingresos** Suponga que los consumidores comprarán q unidades de un producto al precio de $\frac{100}{q} + 1$ dólares por unidad. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que deben venderse para que el ingreso por ventas sea mayor que \$5000?

11. **Sueldo por hora** A los pintores con frecuencia se les paga por hora o por obra determinada. El salario que reciben puede afectar su velocidad de trabajo. Por ejemplo, suponga que unos pintores pueden trabajar por \$8.50 la hora, o por \$300 más \$3 por cada hora por debajo de 40, si completan el trabajo en menos de 40 horas. Suponga que el trabajo les toma t horas. Si $t \geq 40$, claramente el sueldo por hora es mejor. Si $t < 40$, ¿para qué valores de t el salario por hora es mejor?

12. **Compensación** Suponga que una compañía le ofrece un puesto en ventas y que usted elige entre dos métodos para determinar su salario. Un método paga \$12,600 más un bono del 2% sobre sus ventas anuales. El otro método paga una comisión directa del 8% sobre sus ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor seleccionar el primer método?

13. **La razón de prueba de ácido** La *razón de prueba de ácido* (o *razón rápida*) de un negocio es la razón de la liquidez de sus activos —efectivo y valores más cuentas por cobrar— a sus obligaciones actuales. La mínima razón para que una compañía tenga unas finanzas sólidas es alrededor de 1.0, pero, por lo común, esto varía un poco de industria a industria. Si una compañía tiene \$450,000 en efectivo y valores, y tiene \$398,000 en obligaciones actuales, ¿cuánto necesita tener en cuentas por cobrar para mantener la razón en o por arriba de 1.3?

OBJETIVO Resolver ecuaciones y desigualdades que incluyan valores absolutos.

2.4 VALOR ABSOLUTO

Ecuaciones con valor absoluto

En la recta de los números reales, a la distancia desde el cero hasta un número x se le llama el **valor absoluto** de x, el cual se denota por $|x|$. Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = 5$, ya que tanto el 5 como el -5 están a 5 unidades del cero (véase la fig. 2.17). En forma similar, $|0| = 0$. Note que x nunca puede ser negativo, esto es $|x| \geq 0$.

Básicamente, el valor absoluto de un número real es su valor cuando se ignora su signo.

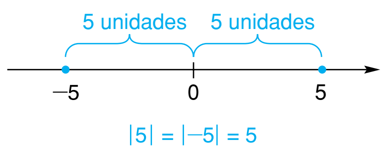


FIGURA 2.17 Valor absoluto.

Si x es positiva o cero, entonces $|x|$ es simplemente x misma, de modo que podemos omitir las líneas verticales y escribir $|x| = x$. Por otra parte, considere el valor absoluto de un número negativo, como $x = -5$.

$$|x| = |-5| = 5 = -(-5) = -x.$$

Así, si x es negativa, entonces $|x|$ es el número positivo $-x$. El signo menos indica que hemos cambiado el signo de x. Así, directamente de su interpretación geométrica, el valor absoluto puede definirse como sigue.

Definición

El ***valor absoluto*** de un número real x, escrito $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0, \\ -x, \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Aplicando la definición, tenemos $|3| = 3$, $|-8| = -(-8)$ y $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. También, $-|2| = -2$ y $-|-2| = -2$.

Advertencia $\sqrt{x^2}$ no necesariamente es x, pero

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ no -2. Esto concuerda con el hecho que

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

También, $|-x| \neq x$ y

$$|-x - 1| \neq x + 1.$$

Por ejemplo, si hacemos $x = -3$, entonces $|-(-3)| \neq -3$, y

$$|-(-3) - 1| \neq -3 + 1.$$

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones con valor absoluto

a. *Resolver* $|x - 3| = 2$.

Solución: esta ecuación establece que $x - 3$ es un número que está a 2 unidades del cero. Por tanto,

$$x - 3 = 2 \text{ o } x - 3 = -2.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $x = 5$ o $x = 1$.

b. *Resolver* $|7 - 3x| = 5$.

Solución: esta ecuación es verdadera si $7 - 3x = 5$ o si $7 - 3x = -5$. Resolviéndolas se obtiene $x = \frac{2}{3}$ o $x = 4$.

c. *Resolver* $|x - 4| = -3$.

Solución: el valor absoluto de un número nunca es negativo, de modo que el conjunto solución es $\varnothing$.

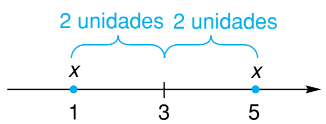


FIGURA 2.18 La solución de $|x - 3| = 2$ es 1 o 5.

Podemos interpretar $|a - b|$ o $|b - a|$ como la distancia entre a y b. Por ejemplo, la distancia entre 5 y 9 es

$$|9 - 5| = |4| = 4,$$

o $$|5 - 9| = |-4| = 4.$$

En forma análoga, la ecuación $|x - 3| = 2$ establece que la distancia entre x y 3 son 2 unidades. Por tanto, x puede ser 1 o 5, como se muestra en el ejemplo 1(a) y la figura 2.18.

Desigualdades con valor absoluto

Ahora estudiaremos las desigualdades que incluyen valores absolutos. Si $|x| < 3$, entonces x está a menos de 3 unidades del cero. Por tanto, x debe estar entre -3 y 3, esto es, en el intervalo $-3 < x < 3$ [véase la fig. 2.19(a)]. Por otra parte, si $|x| > 3$, entonces x debe estar a más de 3 unidades del cero. Así, existen dos intervalos en la solución: $x < -3$ o $x > 3$ [véase la fig. 2.19(b)]. Podemos extender estas ideas como sigue. Si $|x| \le 3$, entonces $-3 \le x \le 3$. Si $|x| \ge 3$, entonces $x \le -3$ o bien $x \ge 3$. La tabla 2.1 presenta un resumen de las soluciones para desigualdades con valor absoluto.

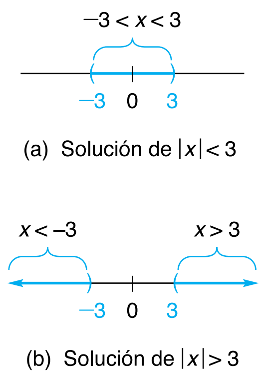


FIGURA 2.19 Solución de $|x| < 3$ y $|x| > 3$.

TABLA 2.1

Desigualdad ($d > 0$)	Solución
$\lvert x\rvert < d$	$-d < x < d$
$\lvert x\rvert \le d$	$-d \le x \le d$
$\lvert x\rvert > d$	$x < -d$ o $x > d$
$\lvert x\rvert \ge d$	$x \le -d$ o $x \ge d$

EJEMPLO 2 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. *Resolver* $|x - 2| < 4$.

Solución: el número $x - 2$ debe estar a menos de 4 unidades del cero. Del análisis anterior, eso significa que $-4 < x - 2 < 4$. Podemos establecer el procedimiento para resolver esta desigualdad como sigue:

$$-4 < x - 2 < 4,$$

$$-4 + 2 < x < 4 + 2 \qquad \text{(sumando 2 a cada miembro)},$$

$$-2 < x < 6.$$

Así, la solución es el intervalo abierto $(-2, 6)$. Esto significa que todos los números reales entre -2 y 6 satisfacen la desigualdad original (véase la fig. 2.20).

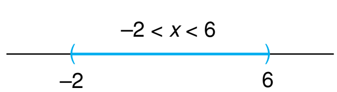


FIGURA 2.20 La solución de $|x - 2| < 4$ es el intervalo $(-2, 6)$.

b. *Resolver* $|3 - 2x| \le 5$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
-5 \le 3 - 2x &\le 5, \\
-5 - 3 \le -2x &\le 5 - 3 \qquad \text{(restando 3 de cada miembro)}, \\
-8 \le -2x &\le 2, \\
4 \ge x &\ge -1 \qquad \text{(dividiendo cada miembro entre } -2\text{)}, \\
-1 \le x &\le 4 \qquad \text{(reescribiendo)}.
\end{aligned}
$$

Note que el sentido de la desigualdad original se *invirtió* cuando dividimos entre un número negativo. La solución es el intervalo cerrado $[-1, 4]$.

EJEMPLO 3 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. *Resolver* $|x + 5| \ge 7$.

Solución: aquí $x + 5$ debe estar *al menos* a 7 unidades del cero. Así que, $x + 5 \le -7$ o bien $x + 5 \ge 7$. Esto significa que $x \le -12$ o bien $x \ge 2$. Por tanto, la solución consiste en dos intervalos: $(-\infty, -12]$ y $[2, \infty)$. Podemos abreviar esta colección de números escribiendo

$$(-\infty, -12] \cup [2, \infty).$$

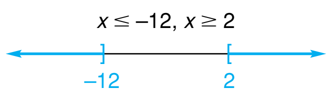


FIGURA 2.21 La unión $(-\infty, -12] \cup [2, \infty)$.

donde el símbolo $\cup$ es llamado el símbolo de la *unión* (véase la fig. 2.21). Más formalmente, la **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto que consiste en todos los elementos que están en A o en B (o en ambos).

Las desigualdades $x < 1$ y $x > \frac{5}{3}$ no pueden combinarse en una sola desigualdad, aunque podría parecer que sí. Es incorrecto combinar $\frac{5}{3} < x$ y $x < 1$ como $\frac{5}{3} < x < 1$, ya que esto implica que $\frac{5}{3} < 1$.

b. *Resolver* $|3x - 4| > 1$.

Solución: $3x - 4 < -1$ o bien $3x - 4 > 1$. Así que $3x < 3$ o bien $3x > 5$. Por tanto, $x < 1$ o $x > \frac{5}{3}$, de modo que la solución consiste en todos los números reales en el conjunto $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$.

Principios en práctica 1
Notación de valor absoluto

Exprese el enunciado siguiente utilizando la notación de valor absoluto: el peso real w de una caja de cereal debe estar alrededor de 0.3 onzas del peso que se indica en la caja, que es de 22 onzas.

EJEMPLO 4 Notación de valor absoluto

Por medio de la notación de valor absoluto, exprese los enunciados siguientes:

a. x está a menos de 3 unidades del 5.

Solución:

$$|x - 5| < 3.$$

b. x difiere de 6 en por lo menos 7.

Solución:

$$|x - 6| \ge 7.$$

c. $x < 3$ y $x > -3$ de manera simultánea.

Solución:

$$|x| < 3.$$

d. x está a más de 1 unidad de -2.

Solución:

$$|x - (-2)| > 1,$$
$$|x + 2| > 1.$$

e. x está a menos de σ (letra griega "sigma") unidades de μ (letra griega "mu").

Solución:

$$|x-\mu| < \sigma.$$

Propiedades del valor absoluto

Cuatro propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
3. $|a-b| = |b-a|$.
4. $-|a| \leq a \leq |a|$.

Por ejemplo, la propiedad 1 establece que el valor absoluto del producto de dos números es igual al producto de los valores absolutos de esos números.

EJEMPLO 5 Propiedades del valor absoluto

a. $|(-7)\cdot 3| = |-7| \cdot |3| = 21$.

b. $|4-2| = |2-4| = 2$.

c. $|7-x| = |x-7|$.

d. $\left|\dfrac{-7}{3}\right| = \dfrac{|-7|}{|3|} = \dfrac{7}{3}$; $\left|\dfrac{-7}{-3}\right| = \dfrac{|-7|}{|-3|} = \dfrac{7}{3}$.

e. $\left|\dfrac{x-3}{-5}\right| = \dfrac{|x-3|}{|-5|} = \dfrac{|x-3|}{5}$.

f. $-|2| \leq 2 \leq |2|$.

Ejercicio 2.4

En los problemas del 1 al 10 escriba una forma equivalente sin el símbolo de valor absoluto.

1. $|-13|$. **2.** $|2^{-1}|$. **3.** $|8-2|$. **4.** $|(-4-6)/2|$.

5. $|3(-\frac{5}{3})|$. **6.** $|2-7| - |7-2|$. **7.** $|x| < 4$. **8.** $|x| < 10$.

9. $|2-\sqrt{5}|$. **10.** $|\sqrt{5}-2|$.

11. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese cada uno de los siguientes enunciados:

a. x está a menos de 3 unidades de 7.
b. x difiere de 2 en menos de 3.
c. x no está a más de 5 unidades de 7.
d. La distancia entre 7 y x es 4.
e. $x+4$ está a menos de 2 unidades de 0.
f. x está entre -3 y 3, pero no es igual a 3 ni a -3.
g. $x < -6$ o $x > 6$.
h. $x-6 > 4$ o $x-6 < -4$.
i. El número x de horas que una máquina funcionará de manera eficiente difiere de 105 en menos de 3.
j. El ingreso promedio mensual x (en dólares) de una familia difiere de 850 en menos de 100.

12. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que x y μ difieren en no más de σ.

13. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que los precios p_1 y p_2 de dos productos pueden diferir en no más de 8 (dólares).

14. Determine todos los valores de x tales que $|x-\mu| \leq 2\sigma$.

En los problemas del 15 al 36 resuelva la ecuación o desigualdad dada.

15. $|x| = 7.$

16. $|-x| = 2.$

17. $\left|\frac{x}{3}\right| = 2.$

18. $\left|\frac{4}{x}\right| = 8.$

19. $|x - 5| = 8.$

20. $|4 + 3x| = 6.$

21. $|5x - 2| = 0.$

22. $|7x + 3| = x.$

23. $|7 - 4x| = 5.$

24. $|1 - 2x| = 1.$

25. $|x| < 4.$

26. $|-x| < 3.$

27. $\left|\frac{x}{4}\right| > 2.$

28. $\left|\frac{x}{3}\right| > \frac{1}{2}.$

29. $|x + 7| < 2.$

30. $|5x - 1| < -6.$

31. $|x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}.$

32. $|1 - 3x| > 2.$

33. $|5 - 8x| \leq 1.$

34. $|4x - 1| \geq 0.$

35. $\left|\frac{3x - 8}{2}\right| \geq 4.$

36. $\left|\frac{x - 8}{4}\right| \leq 2.$

En los problemas 37 y 38 exprese el enunciado utilizando la notación de valor absoluto.

37. En un experimento científico, la medida de una distancia d es 17.2 m, lo que es preciso a ± 30 cm.

38. La diferencia de temperatura entre dos sustancias químicas que se están mezclando no debe ser menor que 5 grados ni mayor que 10 grados.

39. Estadística En el análisis estadístico, la desigualdad de Chebyshev asegura que si x es una variable aleatoria, μ su media y σ su desviación estándar, entonces

$$(\text{probabilidad de que } |x - \mu| > h\sigma) \geq \frac{1}{h^2}.$$

Determine aquellos valores de x tales que $|x - \mu| > h\sigma$.

40. Tolerancia de manufactura En la fabricación de artefactos, la dimensión promedio de una parte es 0.01 cm. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese el hecho de que una medida individual x de una parte, no debe diferir del promedio en más de 0.005 cm.

2.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 2.1 costo fijo gasto general costo variable costo total ganancia total utilidad

Sección 2.2 $a < b$ $a \leq b$ $a > b$ $a \geq b$ $a < x < b$ desigualdad sentido de una desigualdad desigualdad equivalente desigualdad lineal $-\infty < x < \infty$ intervalo abierto intervalo cerrado extremos notación de intervalo

Sección 2.4 valor absoluto $|x|$ unión $\cup$

Resumen

Si un problema está expresado en palabras usted debe transformarlo en una ecuación. Debe plantear los enunciados en forma de una ecuación (o en una desigualdad). Esto se conoce como *modelado matemático.* Es importante que primero lea el problema más de una vez de modo que entienda con claridad la información y qué es lo que se pide encontrar. Después debe seleccionar una letra para representar la cantidad desconocida que quiere determinar. Utilice las relaciones e información que el problema proporciona, y forme una ecuación que incluya a la letra dicha. Por último, resuelva la ecuación y vea si su solución responde lo que se pregunta. Algunas veces la solución de la *ecuación* no es la respuesta al *problema,* pero puede ser útil para obtenerla.

Algunas relaciones básicas que se utilizan para resolver problemas de administración son las siguientes:

costo total = costo variable + costo fijo,

ingreso total =
(precio por unidad)(número de unidades vendidas),

utilidad = ingreso total − costo total.

Los símbolos de desigualdad $>, \leq, >$ y $\geq$ se utilizan para representar una desigualdad, la cual es un enunciado en el que un número es, por ejemplo, menor que otro. Tres operaciones básicas que cuando se aplican a una desigualdad, garantizan una desigualdad equivalente son:

1. Sumar (o restar) el mismo número a (o de) ambos lados.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número positivo.
3. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo e invertir el sentido de la desigualdad.

Estas operaciones son útiles para resolver una desigualdad lineal (ésta es una que pueda escribirse en la forma $ax + b < 0$ o $ax + b \leq 0$, donde $a \neq 0$).

Una definición algebraica de valor absoluto es:

$$|x| = x, \text{ si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad |x| = -x, \text{ si } \quad x < 0.$$

Interpretamos $|a - b|$ o $|b - a|$ como la distancia entre a y b. Si $d > 0$, entonces la solución de la desigualdad $|x| < d$ es el intervalo $(-d, d)$. La solución a $|x| > d$ consiste en dos intervalos y está dada por $(-\infty, -d) \cup (d, \infty)$. Algunas propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
3. $|a - b| = |b - a|$.
4. $-|a| \leq a \leq |a|$.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 15 resuelva la ecuación o la desigualdad.

1. $3x - 8 \geq 4(x - 2)$.
2. $2x - (7 + x) \leq x$.
3. $-(5x + 2) < -(2x + 4)$.
4. $-2(x + 6) > x + 4$.
5. $3p(1 - p) > 3(2 + p) - 3p^2$.
6. $2(4 - \frac{3}{5}q) < 5$.
7. $\frac{x + 5}{3} - \frac{1}{2} \leq 2$.
8. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > \frac{x}{4}$.
9. $\frac{1}{4}s - 3 \leq \frac{1}{8}(3 + 2s)$.
10. $\frac{1}{3}(t + 2) \geq \frac{1}{4}t + 4$.
11. $|3 - 2x| = 7$.
12. $\left|\frac{5x - 6}{13}\right| = 0$.
13. $|4t - 1| < 1$.
14. $4 < \left|\frac{2}{3}x + 5\right|$.
15. $|3 - 2x| \geq 4$.

16. **Utilidad** ¿A qué porcentaje de la utilidad sobre el costo es equivalente una utilidad del 40% sobre el precio de venta de un producto?
17. **Intercambio de existencias** En cierto día, se negociaron 1132 diferentes emisiones en el mercado de acciones de Nueva York. Había 48 emisiones más que mostraban incremento de las que mostraban bajas, y ninguna emisión permaneció sin cambio. ¿Cuántas emisiones sufrieron bajas?
18. **Impuesto a las ventas** El impuesto sobre la renta en cierto estado es de 6%. Si durante un año hubo un total de \$3017.29 en compras, incluyendo el impuesto, ¿cuánto corresponde al impuesto?
19. **Asignación de producción** Una compañía fabricará un total de 10,000 unidades de su producto en las plantas A y B. La información disponible aparece a continuación.

	Planta A	Planta B
Costo unitario por mano de obra y material	\$5	\$5.50
Costos fijos	\$30,000	\$35,000

Considerando las dos plantas la compañía ha decidido asignar no más de \$117,000 para costos totales. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe producir la planta A?

20. **Tanque de almacenamiento** Una compañía va a reemplazar dos tanques cilíndricos de almacenamiento de petróleo por un tanque nuevo. Los tanques viejos miden 16 pies de altura cada uno. Uno tiene un radio de 15 pies y el otro un radio de 20 pies. El tanque nuevo también será de 16 pies de altura. Determine su radio si tiene el mismo volumen que los dos tanques juntos. (*Sugerencia:* el volumen V de un tanque cilíndrico es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h la altura.)
21. **Razón de operación** La *razón de operación* de un negocio de ventas al menudeo es la razón, expresada como un porcentaje, de los costos de operación (todo, desde gastos en publicidad hasta depreciación del equipo) a las ventas netas (es decir, ventas brutas menos devoluciones y rebajas). Una razón de operación menor al 100% indica una operación rentable, mientras que una razón de operación en el rango de 80% a 90% es extremadamente buena. Si una compañía tiene ventas netas de \$236,460 en un periodo, escriba una desigualdad que describa los costos de operación que mantendrían la razón de operación por debajo de 90%.

OBJETIVO Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables por medio de la técnica de eliminación por adición o por sustitución (en el capítulo 6 se mostrarán otros métodos).

4.4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sistemas con dos variables

Cuando una situación debe describirse matemáticamente, no es raro que surja un *conjunto* de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que el administrador de una fábrica establece un plan de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 piezas del tipo I y 9 piezas del tipo II. El modelo B requiere de 5 piezas del tipo I y 14 piezas del tipo II. De sus proveedores, la fábrica obtiene 335 piezas del tipo I y 850 piezas del tipo II cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir cada día, de modo que todas las piezas del tipo I y piezas del tipo II sean utilizadas?

Es buena idea construir una tabla que resuma la información importante. La tabla 4.2 muestra el número de piezas del tipo I y piezas del tipo II requeridas para cada modelo, así como el número total disponible.

TABLA 4.2

	Modelo A	Modelo B	Total disponible
Piezas tipo I	4	5	335
Piezas tipo II	9	14	850

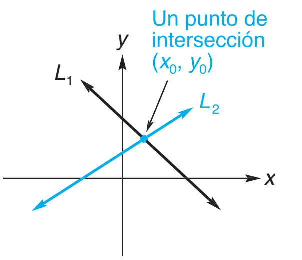


FIGURA 4.28 Sistema lineal (una solución).

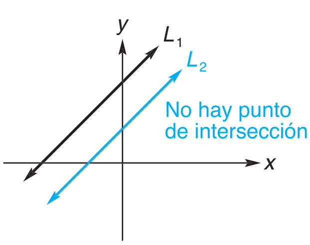


FIGURA 4.29 Sistema lineal (no hay solución).

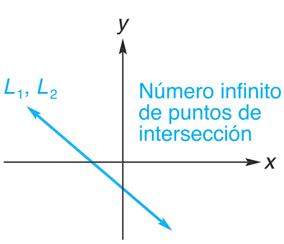


FIGURA 4.30 Sistema lineal (un número infinito de soluciones).

Suponga que hacemos x igual al número de artículos del modelo A fabricados cada día, y y igual al número de artículos del modelo B. Entonces éstos requieren de $4x + 5y$ piezas del tipo I y $9x + 14y$ piezas del tipo II. Como están disponibles 335 y 850 piezas del tipo I y II, respectivamente, tenemos

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & \textbf{(1)} \\ 9x + 14y = 850. & \textbf{(2)} \end{cases}$$

A este conjunto de ecuaciones le llamamos **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables (o incógnitas) x y y. El problema es encontrar valores de x y y para los cuales *ambas* ecuaciones sean verdaderas de manera *simultánea*. Estos valores se llaman *soluciones* del sistema.

Como las ecuaciones (1) y (2) son lineales, sus gráficas son líneas rectas; llamémoslas L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen la ecuación de esa línea; esto es, hacen a la ecuación verdadera. Por tanto, las coordenadas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Esto significa que un punto de intersección da una solución del sistema.

Si L_1 y L_2 se dibujan en el mismo plano, existen tres posibles situaciones:

1. L_1 y L_2 pueden intersecarse en exactamente un punto, digamos (x_0, y_0). (Véase la fig. 4.28). Por tanto, el sistema tiene la solución $x = x_0$ y $y = y_0$.
2. L_1 y L_2 pueden ser paralelas y no tener puntos en común (véase la fig. 4.29). En este caso no existe solución.
3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta (véase la fig. 4.30). Por tanto, las coordenadas de cualquier punto sobre la recta son una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.

Nuestro objetivo principal aquí es estudiar los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En esencia, remplazamos de manera sucesiva un sistema por otro que tenga la misma solución (esto es, remplazamos el sistema original por *sistemas equivalentes*), *pero cuyas ecuaciones tengan una forma progresivamente más adecuada para determinar la solución. En términos más precisos, buscamos un sistema equivalente que contenga una ecuación en la que una de las variables no aparezca (esto es, eliminar una de las variables).* Ilustraremos este procedimiento para el sistema propuesto originalmente:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & (3) \\ 9x + 14y = 850. & (4) \end{cases}$$

Para empezar, obtendremos un sistema equivalente en el que x no aparezca en una ecuación. Primero encontramos un sistema equivalente en el que los coeficientes de los términos en x en cada ecuación sean iguales excepto por el signo. Multiplicando la ecuación (3) por 9 [esto es, multiplicando ambos miembros de la ecuación (3) por 9] y multiplicando la ecuación (4) por -4 se obtiene

$$\begin{cases} 36x + 45y = 3015, & (5) \\ -36x - 56y = -3400. & (6) \end{cases}$$

Los miembros izquierdo y derecho de la ecuación (6) son iguales, de modo que cada miembro puede *sumarse* al correspondiente de la ecuación (5). Esto tiene como resultado

$$-11y = -385,$$

que sólo tiene una variable, como se planeó. Resolviéndola se obtiene

$$y = 35,$$

así obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 35, & (7) \\ -36x - 56y = -3400. & (8) \end{cases}$$

Al remplazar y en la ecuación (8) por 35, obtenemos

$$\begin{aligned} -36x - 56(35) &= -3400, \\ -36x - 1960 &= -3400, \\ -36x &= -1440, \\ x &= 40. \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = 35, \\ x = 40. \end{cases}$$

Podemos verificar nuestra respuesta sustituyendo $x = 40$ y $y = 35$ en *ambas* ecuaciones originales. En la ecuación (3) obtenemos $4(40 + 5(35) = 335$, o $335 = 335$. En la ecuación (4) obtenemos $9(40) + 14(35) = 850$, o bien, $850 = 850$. Por tanto, la solución es

$$x = 40 \quad \text{y} \quad y = 35.$$

Cada día el administrador debe planear la fabricación de 40 productos del modelo A y 35 del modelo B. El procedimiento efectuado se conoce como **eliminación por adición.** Aunque elegimos eliminar primero x, pudimos haber hecho lo mismo para y, mediante un procedimiento similar.

EJEMPLO 1 Método de eliminación por adición

Utilizar eliminación por adición para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 3y + 2x = 3. \end{cases}$$

Solución: por conveniencia alineamos los términos en x y en y para obtener

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (9) \\ 2x + 3y = 3. & (10) \end{cases}$$

Para eliminar y, multiplicamos la ecuación (9) por 3 y la ecuación (10) por 4:

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (11) \\ 8x + 12y = 12. & (12) \end{cases}$$

Sumando la ecuación (11) a la (12) se obtiene $17x = 51$, de la cual $x = 3$. Tenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (13) \\ x = 3. & (14) \end{cases}$$

Al remplazar x por 3 en la ecuación (13) se obtiene

$$9(3) - 12y = 39,$$
$$-12y = 12,$$
$$y = -1,$$

de modo que el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = -1, \\ x = 3. \end{cases}$$

La solución es $x = 3$ y $y = -1$. La figura 4.31 muestra una gráfica del sistema.

Principios en práctica 1

Método de eliminación por adición

Un especialista en computadoras tiene invertidos $200,000 para su retiro, parte al 9% y parte al 8%. Si el ingreso anual total por las inversiones es de $17,200, ¿cuánto está invertido en cada tasa?

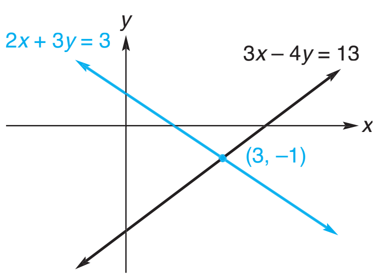


FIGURA 4.31 Sistema lineal del ejemplo 1; una solución.

El sistema del ejemplo 1,

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (15) \\ 2x + 3y = 3, & (16) \end{cases}$$

puede resolverse de otra manera. Primero elegimos una de las ecuaciones, por ejemplo, la ecuación (15), y despejamos una de las incógnitas en términos de la otra, digamos x en términos de y. Así la ecuación (15) es equivalente a $3x = 4y + 13$, o

$$x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3},$$

y obtenemos

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3}, & (17) \\ 2x + 3y = 3. & (18) \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x de la ecuación (17) en la ecuación (18) se obtiene

$$2\left(\frac{4}{3}y + \frac{13}{3}\right) + 3y = 3. \qquad (19)$$

De este modo ya eliminamos x. Resolviendo la ecuación (19), tenemos

$$\frac{8}{3}y + \frac{26}{3} + 3y = 3,$$

$$8y + 26 + 9y = 9 \qquad \text{(eliminando fracciones),}$$

$$17y = -17,$$

$$y = -1.$$

Al remplazar y en la ecuación (17) por -1, se obtiene $x = 3$, y el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -1, \end{cases}$$

como vimos antes, este método se llama **eliminación por sustitución.**

Principios en práctica 2

Método de eliminación por sustitución

A dos especies de ciervos, A y B, que viven en un refugio de vida salvaje se les da alimento extra en invierno. Cada semana reciben 2 toneladas de alimento en forma de croqueta y 4.75 toneladas de heno. Cada ciervo de la especie A requiere 4 libras de croquetas y 5 libras de heno. Cada ciervo de la especie B requiere 2 libras de las croquetas y 7 libras de heno. ¿Cuántos ciervos de cada especie se podrán sustentar con el alimento, de modo que todo el alimento se consuma cada semana?

EJEMPLO 2 Método de eliminación por sustitución

Utilizar eliminación por sustitución para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0, \\ 2x + 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Solución: es fácil resolver la primera ecuación para x. Esto da el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & \textbf{(20)} \\ 2x + 4y + 4 = 0. & \textbf{(21)} \end{cases}$$

Al sustituir $-2y + 8$ por x en la ecuación (21) se obtiene

$$2(-2y + 8) + 4y + 4 = 0,$$

$$-4y + 16 + 4y + 4 = 0.$$

Esta última ecuación se simplifica a $20 = 0$. Por tanto, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & \textbf{(22)} \\ 20 = 0. & \textbf{(23)} \end{cases}$$

Ya que le ecuación (23) *nunca* es verdadera, **no existe solución** para el sistema original. La razón es clara si observamos que las ecuaciones originales pueden escribirse en la forma pendiente-ordenada al origen como

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

y

$$y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Estas ecuaciones representan líneas rectas que tienen pendientes de $-\frac{1}{2}$, pero diferentes intersecciones y, 4 y -1. Esto es, especifican rectas paralelas diferentes (véase la fig. 4.32).

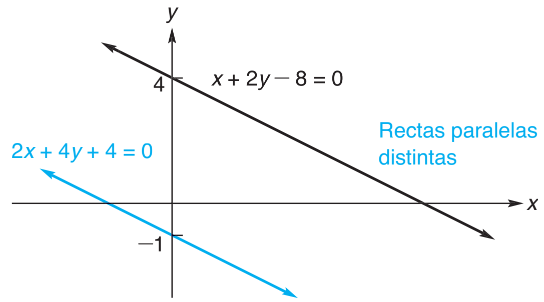


FIGURA 4.32 Sistema lineal del ejemplo 2; no hay solución.

> ***Principios en práctica 3***
> **Un sistema lineal con un número infinito de soluciones**
>
> Dos especies de peces, A y B, están criándose en una granja piscícola, en donde se les alimenta con dos suplementos vitamínicos. Todos los días reciben 100 gramos del primer suplemento y 200 gramos del segundo suplemento. Cada pez de la especie A requiere 15 mg del primer suplemento y 30 mg del segundo suplemento. Cada pez de la especie B requiere 20 mg del primer suplemento y 40 mg del segundo suplemento. ¿Cuántos peces de cada especie puede sustentar la granja de modo que todos los suplementos se consuman cada día?

EJEMPLO 3 Un sistema lineal con un número infinito de soluciones

Resolver

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(24)} \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y = 1. & \textbf{(25)} \end{cases}$$

Solución: empezamos eliminando x de la segunda ecuación. Multiplicando la ecuación (25) por -2, tenemos

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(26)} \\ -x - 5y = -2. & \textbf{(27)} \end{cases}$$

Sumando la ecuación (26) a la (27) se obtiene

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(28)} \\ 0 = 0. & \textbf{(29)} \end{cases}$$

Puesto que la ecuación (29) *siempre* es cierta, cualquier solución de la ecuación (28) es una solución del sistema. Ahora veamos cómo podemos expresar nuestra respuesta. De la ecuación (28) tenemos $x = 2 - 5y$, donde y puede ser cualquier número real, digamos r. Por tanto, podemos escribir $x = 2 - 5r$. La solución completa es

$$x = 2 - 5r,$$
$$y = r,$$

donde r es cualquier número real. En esta situación, r se denomina un **parámetro,** y decimos que tenemos una familia de soluciones con un parámetro. Cada valor de r determina una solución particular. Por ejemplo, si $r = 0$, entonces $x = 2$ y $y = 0$, es una solución; si $r = 5$, entonces $x = -23$ y $y = 5$ es otra solución. Es claro que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Es útil notar que al escribir las ecuaciones (24) y (25) en sus formas pendientes-intersección al origen, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \end{cases}$$

en el que ambas ecuaciones representan a la misma recta. De aquí que las rectas coincidan (véase la fig. 4.33) y las ecuaciones (24) y (25) sean equivalentes. La solución al sistema consiste en las parejas de coordenadas de todos los puntos sobre la recta $x + 5y = 2$, puntos que están dados por nuestra solución paramétrica.

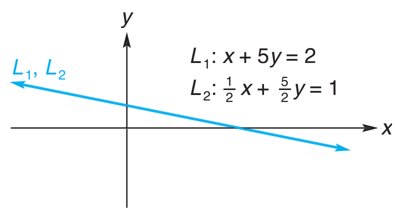


FIGURA 4.33 Sistema lineal del ejemplo 3; un número infinito de soluciones.

Tecnología

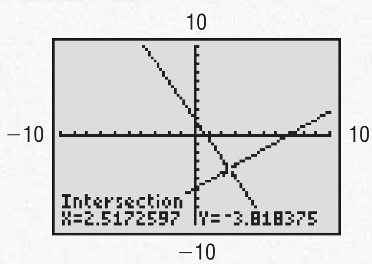


FIGURA 4.34 Solución gráfica del sistema.

Resolver de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 9x + 4.1y = 7, \\ 2.6x - 3y = 18. \end{cases}$$

Solución: primero resolvemos cada ecuación para y de modo que cada ecuación tenga la forma $y = f(x)$.

$$y = \frac{1}{4.1}(7 - 9x),$$

$$y = -\frac{1}{3}(18 - 2.6x).$$

Ahora introducimos estas funciones como Y_1 y Y_2, y las desplegamos sobre el mismo rectángulo de visualización (véase la fig. 4.34). Por último, ya sea utilizando la característica de trazado y acercamiento, o bien, la de intersección, estimamos la solución como $x = 2.52$ $y = -3.82$.

EJEMPLO 4 Mezcla

Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 litros de solución de ácido al 25% (25% del volumen es ácido). Si en existencia hay disponibles soluciones al 30% y al 18%, ¿cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?

Solución: sean x y y, respectivamente, el número de litros de las soluciones al 30% y 18% que deben mezclarse. Entonces

$$x + y = 500.$$

Para ayudar a visualizar la situación, dibujamos el diagrama en la figura 4.35. En 500 litros de una solución al 25%, habrá $0.25(500) = 125$ litros de ácido. Este ácido proviene de dos fuentes: $0.30x$ litros de la solución al 30% y $0.18y$ litros provienen de la solución al 18%. De aquí que,

$$0.30x + 0.18y = 125.$$

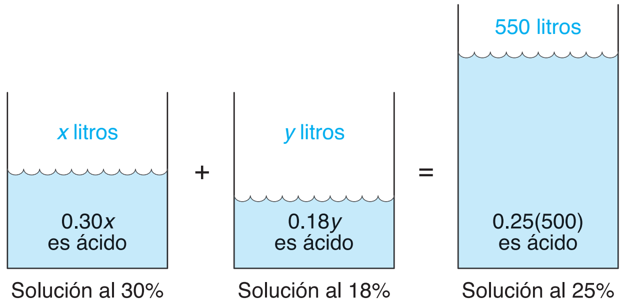


FIGURA 4.35 Problema de la mezcla.

Estas dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si resolvemos la primera para x obtenemos $x = 500 - y$. Sustituyendo en la segunda se obtiene

$$0.30(500 - y) + 0.18y = 125.$$

Resolviendo ésta para y, encontramos que $y = 208\frac{1}{3}$ litros. Así $x = 500 - 208\frac{1}{3} = 291\frac{2}{3}$ litros (véase la fig. 4.36).

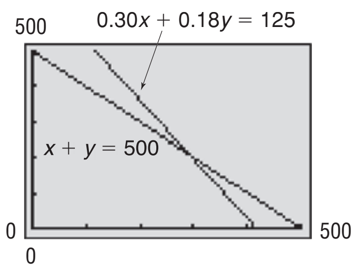


FIGURA 4.36 Gráfica para el ejemplo 4.

Sistemas con tres variables

Los métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables también pueden utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables. Una **ecuación lineal general con tres variables *x*, *y* y *z*** es una ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + Cz = D,$$

donde A, B, C y D son constantes y A, B y C no son todas cero. Por ejemplo, $2x - 4y + z = 2$ es una de tales ecuaciones. Una ecuación lineal general con tres variables representa geométricamente un *plano* en el espacio, y una solución al sistema de tales ecuaciones es la intersección de los planos. El ejemplo 5 muestra cómo resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

Principios en práctica 4

Resolución de un sistema lineal de tres variables

Una cafetería se especializa en mezclas de café. Con base en café de tipo A, tipo B y tipo C, el dueño quiere preparar una mezcla que venderá en \$8.50 por una bolsa de una libra. El costo por libra de estos cafés es de \$12, \$9 y \$7, respectivamente. La cantidad del tipo B debe ser el doble de la cantidad del tipo A. ¿Cuánto café de cada tipo estará en la mezcla final?

EJEMPLO 5 Resolución de un sistema lineal con tres variables

Resolver

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3, & (30) \\ -x + 2y + 2z = 1, & (31) \\ x - y - 3z = -6. & (32) \end{cases}$$

Solución: este sistema está constituido por tres ecuaciones lineales con tres variables. De la ecuación (32), $x = y + 3z - 6$. Sustituyendo este valor para x en las ecuaciones (30) y (31), obtenemos

$$\begin{cases} 2(y + 3z - 6) + y + z = 3, \\ -(y + 3z - 6) + 2y + 2z = 1, \\ x = y + 3z - 6. \end{cases}$$

Simplificando, se obtiene

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & (33) \\ \quad y - z = -5, & (34) \\ \qquad x = y + 3z - 6. & (35) \end{cases}$$

Observe que x no aparece en las ecuaciones (33) y (34). Puesto que cualquier solución del sistema original debe satisfacer las ecuaciones (33) y (34), primero debemos considerar su solución:

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & (33) \\ \ y - \ \ z = -5. & (34) \end{cases}$$

De la ecuación (34), $y = z - 5$. Esto significa que podemos remplazar la ecuación (33) por

$$3(z - 5) + 7z = 15, \quad \text{o} \quad z = 3.$$

Como z es 3, podemos remplazar la ecuación (34) por $y = -2$. De aquí que el sistema anterior sea equivalente a

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

El sistema original se transforma en

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2, \\ x = y + 3z - 6, \end{cases}$$

de lo cual $x = 1$. La solución es $x = 1$, $y = -2$, y $z = 3$, que usted puede verificar.

Al igual que un sistema de dos variables puede tener una familia de soluciones con un parámetro, un sistema con tres variables puede tener una familia de soluciones con uno o dos parámetros.[6] Los dos ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 6 Familia de soluciones con un parámetro

Resolver

$$\begin{cases} \qquad x - 2y = 4, & (35) \\ 2x - 3y + 2z = -2, & (36) \\ 4x - 7y + 2z = 6. & (37) \end{cases}$$

Solución: observe que, ya que la ecuación (35) puede escribirse como $x - 2y + 0z = 4$, podemos considerar a las ecuaciones (35) a (37) como un sistema de tres ecuaciones lineales en las variables x, y y z. De la ecuación (35) tenemos $x = 2y + 4$. Podemos emplear esta ecuación y el método de sustitución para eliminar x de las ecuaciones (36) y (37):

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad x = 2y + 4, \\ 2(2y + 4) - 3y + 2z = -2, \\ 4(2y + 4) - 7y + 2z = 6. \end{cases}$$

[6] Nota para el profesor: los ejemplos 6 y 7 pueden omitirse sin pérdida de continuidad.

O de manera más sencilla,

$$\begin{cases} x = 2y + 4, & (38) \\ y + 2z = -10, & (39) \\ y + 2z = -10. & (40) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (40) por -1 se obtiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ y + 2z = -10, \\ -y - 2z = 10. \end{cases}$$

Sumando la segunda ecuación a la tercera se obtiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ y + 2z = -10, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Como la ecuación $0 = 0$ siempre es verdadera, en esencia podemos tratar con el sistema

$$\begin{cases} x = 2y + 4, & (41) \\ y + 2z = -10. & (42) \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación (42) para y, tenemos

$$y = -10 - 2z,$$

que expresa a y en términos de z. También podemos expresar a x en términos de z. De la ecuación (41),

$$\begin{aligned} x &= 2y + 4 \\ &= 2(-10 - 2z) + 4 \\ &= -16 - 4z. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{cases} x = -16 - 4z, \\ y = -10 - 2z. \end{cases}$$

Como no hay restricciones sobre z, esto sugiere una familia de soluciones paramétricas. Haciendo $z = r$, tenemos la familia de soluciones siguiente para el sistema dado:

$$\begin{aligned} x &= -16 - 4r, \\ y &= -10 - 2r, \\ z &= r, \end{aligned}$$

Son posibles otras representaciones paramétricas de la solución.

donde r puede ser cualquier número real. Entonces, vemos que el sistema dado tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, haciendo $r = 1$ se obtiene la solución particular $x = -20$, $y = -12$ y $z = 1$.

EJEMPLO 7 Familia de soluciones con dos parámetros

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 2x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$$

Solución: éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables. Eliminaremos x de la segunda ecuación multiplicándola primero por $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ -x - 2y - z = -4. \end{cases}$$

Sumando la primera ecuación a la segunda se obtiene

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación, obtenemos

$$x = 4 - 2y - z.$$

Como no existe restricción sobre y o z, éstos pueden ser números reales arbitrarios, lo que nos da una familia de soluciones con dos parámetros. Haciendo $y = r$ y $z = s$, encontramos que la solución del sistema es

$$x = 4 - 2r - s,$$

$$y = r,$$

$$z = s,$$

donde r y s pueden ser cualesquiera números reales. Cada asignación de valores a r y a s da una solución del sistema, de modo que existe un número infinito de soluciones. Por ejemplo, haciendo $r = 1$ y $s = 2$ se obtiene la solución particular $x = 0$, $y = 1$ y $z = 2$.

Ejercicio 4.4

En los problemas del 1 al 24 resuelva algebraicamente los sistemas.

1. $\begin{cases} x + 4y = 3, \\ 3x - 2y = -5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 2y = 9, \\ 5y - 4x = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -x + 2y = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5v + 2w = 36, \\ 8v - 3w = -54. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -p - q = -3, \\ 3p + 2q = 19. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y = -7, \\ 5x + 3y = -9. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ 5x + 9y = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 3x - 7y, \\ x + 5y - 2 = y + 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6, \\ \frac{21}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2, \\ \frac{3}{8}x + \frac{5}{6}y = -\frac{11}{2}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}w = \frac{1}{6}, \\ z + \frac{1}{2}w = \frac{2}{3}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4p + 12q = 6, \\ 2p + 6q = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ -10x + 6y = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + y + 6z = 3, \\ x - y + 4z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 3x + y + z = 1, \\ 4x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x - 7y + 4z = 2, \\ 3x + 2y - 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ -2x + y - 3z = 15, \\ \frac{3}{2}x + \frac{4}{5}y + 4z = 10. \end{cases}$

[7]**19.** $\begin{cases} x - 2z = 1, \\ y + z = 3. \end{cases}$

[7]**20.** $\begin{cases} 2y + 3z = 1, \\ 3x - 4z = 0. \end{cases}$

[7]**21.** $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

[7]**22.** $\begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x - 4y - 2z = 0, \\ -x + 2y + z = 0. \end{cases}$

[7]**23.** $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3, \\ 4x + 4y - 2z = 6. \end{cases}$

[7]**24.** $\begin{cases} x + 2y - 3z = -4, \\ 2x + y - 3z = 4. \end{cases}$

[7]Hace referencia a los conceptos de los ejemplos 6 y 7.

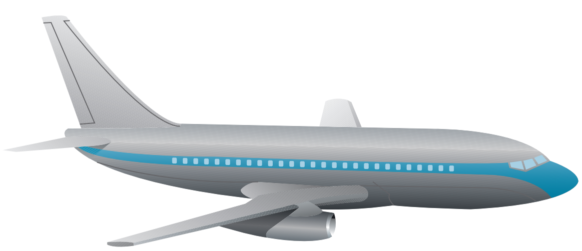
25. Mezcla Un fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 700 galones de una solución de ácido al 24%. En existencia tiene soluciones al 20% y 30%. ¿Cuántos galones de cada solución debe mezclar para surtir el pedido?

26. Mezcla Un jardinero tiene dos fertilizantes que contienen diferentes concentraciones de nitrógeno. Uno tiene 3% de nitrógeno y el otro tiene 11% de nitrógeno. ¿Cuántas libras de cada fertilizante debe mezclar para obtener 20 libras con una concentración de 9%?

27. Tejidos Una fábrica de tejidos produce un tejido hecho a partir de diferentes fibras. Con base en algodón, poliéster y nylon, el propietario necesita producir un tejido combinado que cueste $3.25 por libra fabricada. El costo por libra de estas fibras es de $4.00, $3.00 y $2.00, respectivamente. La cantidad de nylon debe ser la misma que la cantidad de poliéster. ¿Cuánto de cada fibra debe tener el tejido final?

28. Impuesto Una compañía tiene ingresos gravables por $312,000. El impuesto federal es el 25% de la parte que queda después que el impuesto estatal ha sido pagado. El impuesto estatal es un 10% de la parte que queda después que el federal ha sido pagado. Encuentre los impuestos federal y estatal.

29. Velocidad de un aeroplano Un aeroplano recorre 900 millas en 3 horas con viento a favor. Le toma 3 horas 36 minutos el viaje de regreso volando en contra del viento. Encuentre la velocidad del aeroplano sin viento, calcule también la velocidad del viento.

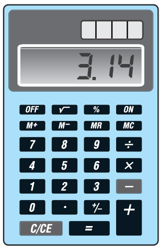


30. Velocidad de una balsa En un viaje en balsa tomó $\frac{3}{4}$ de hora recorrer 12 millas río abajo. El viaje de regreso tomó $1\frac{1}{2}$ horas. Encuentre la velocidad de la balsa con el agua en calma, y calcule la velocidad de la corriente.

31. Venta de muebles Un fabricante de comedores produce dos estilos, Early American y Contemporáneo. Por su experiencia, el administrador ha determinado que pueden venderse 20% más comedores Early American que Contemporáneo. En cada venta de un Early American hay una utilidad de $250, mientras que se gana $350 en cada Contemporáneo. Si en el año próximo, el administrador desea una ganancia total de $130,000, ¿cuántas unidades de cada estilo deben venderse?

32. Encuesta A Encuestas Nacionales se le concedió un contrato para realizar una encuesta de preferencia de producto para Crispy Crackers. Un total de 250 personas fueron entrevistadas. Encuestas Nacionales reportó que a 62.5% más de las personas les gustaba Crispy Crakers que a las que no les gustaba. Sin embargo, el reporte no indicó que el 16% de las personas entrevistadas no habían contestado. ¿A cuántas de las personas entrevistadas les gustó Crispy Crakers? ¿A cuántas no? ¿Cuántas no contestaron?

33. Costo de igualación Productos Unidos, S. A., fabrica calculadoras y tiene plantas en las ciudades de Exton y Whyton. En la planta de Exton, los costos fijos son de $7000 por mes, y el costo de producir cada calculadora es de $7.50. En la planta de Whyton, los costos fijos son de $8800 por mes y cada calculadora cuesta $6 producirla. Si el mes siguiente, Productos Unidos debe producir 1500 calculadoras, ¿cuántas debe producir cada planta si el costo total en cada una debe ser el mismo?



34. Mezcla de café Un comerciante de café mezcla tres tipos de café que cuestan $2.20, $2.30 y $2.60 por libra, para obtener 100 lb de café que vende a $2.40 por libra. Si utiliza la misma cantidad de los dos cafés más caros, ¿cuánto de cada tipo debe utilizar en la mezcla?

35. Comisiones Una compañía paga a sus agentes de ventas con base en un porcentaje de los primeros $100,000 en ventas, más otro porcentaje sobre cualquier cantidad que rebase esos $100,000. Si un agente recibió $8500 por ventas de $175,000, y otro recibió $14,800 por ventas de $280,000, encuentre los dos porcentajes.

36. Utilidades anuales En reportes financieros, las utilidades de una compañía en el año actual (T) con frecuencia son comparadas con las del año anterior (L), pero los valores reales de T y L no siempre son dados. Este año una compañía tuvo una utilidad de $20 millones más que el año pasado. Las utilidades fueron 25% mayores. A partir de estos datos determine T y L.

37. Producción La compañía Controles Universales fabrica unidades de control. Sus modelos nuevos son el Argón I y el Argón II. Para fabricar cada unidad de Argón I, usan 6 medidores y 3 controladores. Para fabricar cada unidad de Argón II, usan 10 medidores y 8 controladores. La compañía recibe un total de 760 medidores y 500 controladores diarios de sus proveedores. ¿Cuántas unidades de cada modelo puede producir diariamente? Suponga que se utilizan todas las partes.

38. Inversiones Una persona tiene dos inversiones y el porcentaje de ganancia por año en cada una de ellas es el mismo. Del total de la cantidad invertida $\frac{3}{10}$ de ella más $600 se invirtieron en una empresa de riesgo, y al final de un año la persona recibió un rendimiento de $384 de esa empresa. Si el rendimiento total después de un año fue de $1120, encuentre la cantidad total invertida.

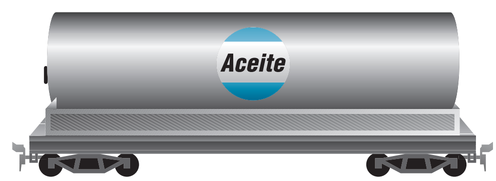
39. Producción Una compañía produce tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla siguiente. La compañía tiene en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, la compañía quiere utilizar todas sus existencias. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	**Plástico**	**Aluminio**
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón reclinable	1 unidad	2 unidades	5 unidades

40. Inversiones Un total de $35,000 se invirtieron a tres tasas de interés: 7, 8 y 9%. El interés en el primer año fue de $2830, que no se reinvirtió. El segundo año la cantidad originalmente invertida al 9% devengó un 10%, y las otras tasas permanecieron iguales. El interés total en el segundo año fue de $2960. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

41. Contratación de trabajadores Una compañía paga a sus trabajadores calificados $15 por hora en su departamento de ensamblado. Los trabajadores semicalificados en ese departamento ganan $9 por hora. A los empleados de envíos se les paga $10 por hora. A causa de un incremento en los pedidos, la compañía necesita contratar un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamblado y envíos. Pagará un total de $760 por hora a estos empleados. A causa de un contrato con el sindicato, deben emplearse el doble de trabajadores semicalificados que de trabajadores calificados. ¿Cuántos trabajadores semicalificados, calificados y empleados de envíos debe contratar la compañía?

42. Almacenamiento de un disolvente Un tanque de ferrocarril de 10,000 galones se llenará con disolvente de dos tanques de almacenamiento, A y B. El disolvente de A se bombea a una velocidad de 20 gal/min. El disolvente B se bombea a una velocidad de 30 gal/min. En general, ambas bombas operan al mismo tiempo. Sin embargo, a causa de un fusible fundido la bomba en A estuvo sin funcionar 10 minutos. ¿Cuántos galones de cada tanque de almacenamiento se utilizarán para llenar el tanque del ferrocarril?



43. Verifique su respuesta al problema 1 utilizando su calculadora gráfica.

44. Verifique su respuesta al problema 11 utilizando su calculadora gráfica.

45. Resuelva de manera gráfica el sistema.

$$\begin{cases} 0.24x - 0.34y = 0.04, \\ 0.11x + 0.21y = 0.75. \end{cases}$$

46. Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}y = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a dos decimales.

47. Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 0.5736x - 0.3420y = 0, \\ 0.8192x + 0.9397y = 20. \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a un decimal.

OBJETIVO Utilizar la sustitución para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

4.5 Sistemas no lineales

Un sistema de ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal se llama **sistema no lineal.** Con frecuencia podemos resolver un sistema no lineal por sustitución, como se hizo con los sistemas lineales. Los ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema no lineal

Resolver

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y - 7 = 0, & \textbf{(1)} \\ 3x - y + 1 = 0. & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Solución:

Estrategia: si un sistema no lineal contiene una ecuación lineal, en general despejamos una de las variables de la ecuación lineal y sustituimos esa variable en la otra ecuación.

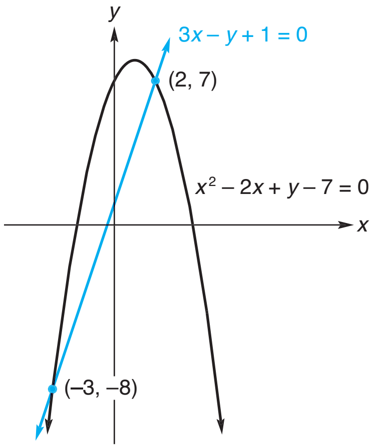


FIGURA 4.37 Sistema de ecuaciones no lineales.

Si resolvemos la ecuación (2) para y se obtiene

$$y = 3x + 1. \tag{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y simplificando, tenemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + (3x + 1) - 7 &= 0, \\ x^2 + x - 6 &= 0, \\ (x + 3)(x - 2) &= 0, \\ x = -3 \quad \text{o} \quad x &= 2. \end{aligned}$$

Si $x = -3$, entonces la ecuación (3) implica que $y = -8$; si $x = 2$, entonces $y = 7$. Debe verificar que cada pareja de valores satisfaga el sistema dado. De aquí que las soluciones sean $x = -3, y = -8$ y $x = 2, y = 7$. La solución geométrica se presenta en la gráfica del sistema de la figura 4.37. Observe que la gráfica de la ecuación (1) es una parábola y la de la ecuación (2) una recta. Las soluciones corresponden a los puntos de intersección $(-3, -8)$ y $(2, 7)$.

Este ejemplo ilustra la necesidad de verificar todas las "soluciones".

EJEMPLO 2 Resolución de un sistema no lineal

Resolver

$$\begin{cases} y = \sqrt{x + 2}, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Solución: al resolver la segunda ecuación, que es lineal, para y se obtiene

$$y = 4 - x. \tag{4}$$

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} 4 - x &= \sqrt{x + 2}, \\ 16 - 8x + x^2 &= x + 2 \qquad \text{(elevando al cuadrado ambos lados)}, \\ x^2 - 9x + 14 &= 0, \\ (x - 2)(x - 7) &= 0. \end{aligned}$$

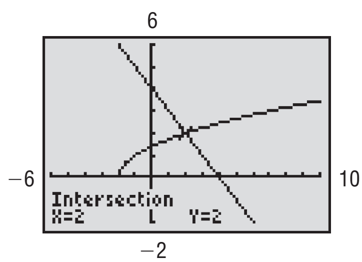


FIGURA 4.38 Sistema no lineal del ejemplo 2.

Por tanto, $x = 2$ o $x = 7$. De la ecuación (4), si $x = 2$, entonces $y = 2$; si $x = 7$, entonces $y = -3$. Puesto que realizamos la operación de elevar al cuadrado en ambos miembros, debemos verificar nuestros resultados. Mientras que la pareja $x = 2$ y $y = 2$ satisface ambas ecuaciones originales, éste no es el caso para $x = 7$ y $y = -3$. Por tanto, la solución es $x = 2, y = 2$ (véase la fig. 4.38).

Tecnología

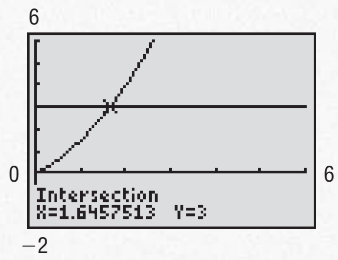


FIGURA 4.39 Solución de $0.5x^2 + x = 3$.

Resolver gráficamente la ecuación $0.5x^2 + x = 3$, *donde* $x \geq 0$.

Solución: para resolver la ecuación, podríamos encontrar los ceros de la función $f(x) = 0.5x^2 + x - 3$. De manera alterna, podemos pensar en este problema como la solución del sistema no lineal

$$y = 0.5x^2 + x,$$
$$y = 3.$$

En la figura 4.39, se estima que el punto de intersección es $x = 1.65$, $y = 3$. Observe que la gráfica de $y = 3$ es una recta horizontal. La solución de la ecuación dada es $x = 1.65$.

Ejercicio 4.5

En los problemas del 1 al 14 resuelva el sistema no lineal dado.

1. $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ 3x + y = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = x^3, \\ x - y = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} p^2 = 5 - q, \\ p = q + 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 28, \\ x - y = 14. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = y^2, \\ y = x^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} p^2 - q = 0, \\ 3q - 2p - 1 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = 4x - x^2 + 8, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} p = \sqrt{q}, \\ p = q^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} z = 4/w, \\ 3z = 2w + 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 = y^2 + 13, \\ y = x^2 - 15. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = y + 6, \\ y = 3\sqrt{x + 4}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{x - 1} + 1, \\ y = \dfrac{1}{x - 1}. \end{cases}$

15. Decoración La forma de una serpentina suspendida por encima de una pista de baile, puede describirse por medio de la función $y = 0.01x^2 + 0.01x + 7$, en donde y es la altura de la serpentina (en pies) por encima del piso, y x es la distancia horizontal (en pies) desde el centro del salón. Una cuerda descrita por medio de la función $y = 0.01x + 8.0$, y que sujeta otra decoración toca a la serpentina. ¿En dónde toca la cuerda a la serpentina?

16. Marquesina La forma de una marquesina decorativa sobre una fachada puede describirse por medio de la función $y = 0.06x^2 + 0.012x + 8$, en donde y es la altura del borde de la marquesina (en pies) por encima de la acera, y x es la distancia (en pies) medida desde el centro del portal de la tienda. Un vándalo mete un palo a través de la marquesina, perforando en dos lugares. La posición del palo puede describirse por medio de la función $y = 0.912x + 5$. ¿En qué parte de la marquesina están los agujeros que hizo el vándalo?

17. Determine de manera gráfica, el número de soluciones que tiene el sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

18. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = 6 - x^2 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

19. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = x^3 + x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

20. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^3 - x, \\ y = 4x \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

En los problemas del 21 al 23 resuelva gráficamente la ecuación tratándola como un sistema. Redondee las respuestas a dos decimales.

21. $0.8x^2 + 2x = 6$, donde $x \geq 0$.

22. $\sqrt{x + 2} = 5 - x$.

23. $x^3 - 3x^2 = x - 8$.

OBJETIVO Resolver sistemas que describen situaciones de equilibrio y puntos de equilibrio.

4.6 Aplicaciones de sistemas de ecuaciones

Equilibrio

Recuerde de la sección 4.2 que una ecuación que relaciona el precio por unidad y la cantidad demandada (suministrada), se llama *ecuación de demanda* (*ecuación de oferta*). Suponga que para un producto Z la ecuación de demanda es

$$p = -\frac{1}{180}q + 12 \tag{1}$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{1}{300}q + 8, \tag{2}$$

donde $q, p \geq 0$. Las correspondientes curvas de demanda y oferta son las líneas de las figuras 4.40 y 4.41, respectivamente. Al analizar la figura 4.40, vemos que los clientes comprarán 540 unidades por semana cuando el precio sea de \$9 por unidad, 1080 unidades cuando el precio sea \$6 y así sucesivamente. La figura 4.41 muestra que cuando el precio es de \$9 por unidad, los productores colocarán 300 unidades por semana en el mercado, a \$10 colocarán 600 unidades, y así sucesivamente.

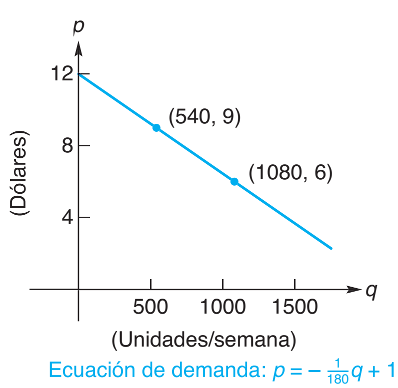


FIGURA 4.40 Curva de demanda.

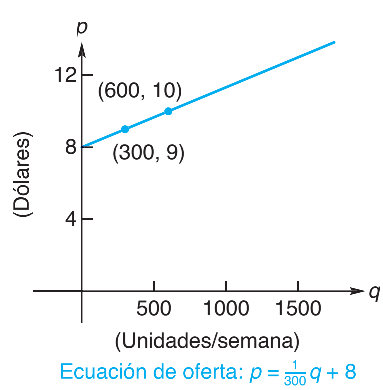


FIGURA 4.41 Curva de oferta.

Cuando las curvas de demanda y oferta de un producto se representan en el mismo plano de coordenadas, el punto (m, n) en donde las curvas se intersecan se llama **punto de equilibrio** (véase la fig. 4.42). El precio, n, llamado **precio de equilibrio,** es el precio al que los consumidores comprarán la misma cantidad de un producto, que los productores ofrezcan a ese precio. En resumen, n es el precio en que se da una estabilidad entre productor y consumidor. La cantidad m se llama **cantidad de equilibrio.**

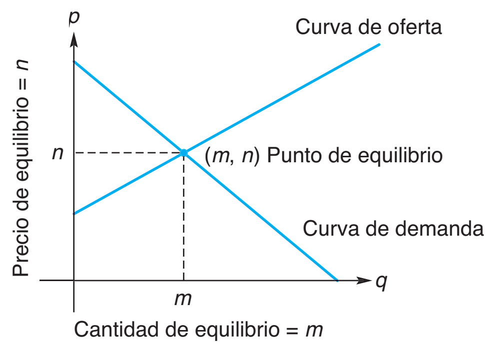


FIGURA 4.42 Equilibrio.

Para determinar con precisión el punto de equilibrio, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda. Hagamos esto para los datos anteriores, es decir, el sistema

$$\begin{cases} p = -\dfrac{1}{180}q + 12 & \text{(ecuación de demanda),} \\[2ex] p = \dfrac{1}{300}q + 8 & \text{(ecuación de oferta).} \end{cases}$$

Sustituyendo p por $\dfrac{1}{300}q + 8$ en la ecuación de demanda, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{300}q + 8 &= -\frac{1}{180}q + 12, \\ \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{180}\right)q &= 4, \\ q &= 450 \qquad \text{(cantidad de equilibrio).} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{300}(450) + 8 \\ &= 9.50 \qquad \text{(precio de equilibrio),} \end{aligned}$$

y el punto de equilibrio es (450, 9.50). Por tanto, al precio de \$9.50 por unidad, los fabricantes producirían exactamente la cantidad (450) de unidades por semana que los consumidores comprarían a ese precio (véase la fig. 4.43).

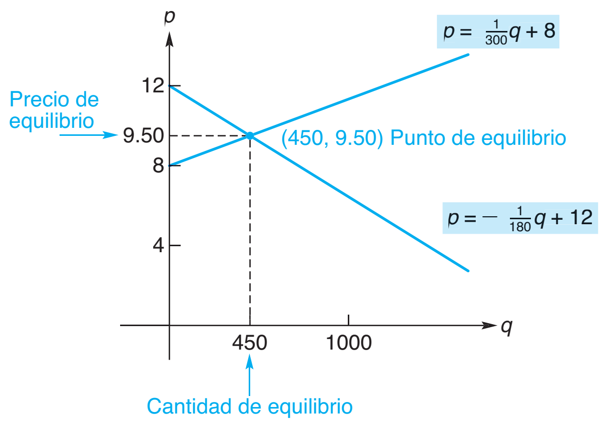


FIGURA 4.43 Equilibrio.

EJEMPLO 1 Efecto de los impuestos sobre el equilibrio

Sea $p = \frac{8}{100}q + 50$ la ecuación de oferta para el producto de un fabricante y suponga que la ecuación de demanda es $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

a. *Si se cobra al fabricante un impuesto de \$1.50 por unidad, ¿cómo se afectará el precio de equilibrio original si la demanda permanece igual?*

Solución: antes del impuesto, el precio de equilibrio se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{8}{100}q + 50, \\ p = -\dfrac{7}{100}q + 65. \end{cases}$$

Por sustitución,

$$\begin{aligned} -\frac{7}{100}q + 65 &= \frac{8}{100}q + 50, \\ 15 &= \frac{15}{100}q, \\ 100 &= q, \end{aligned}$$

y

$$p = \frac{8}{100}(100) + 50 = 58.$$

Por tanto, \$58 es el precio de equilibrio original. Antes del impuesto el fabricante ofrecía q unidades a un precio de $p = \frac{8}{100}q + 50$ por unidad. Después del impuesto venderá las mismas q unidades con el \$1.50 adicional por unidad. El precio por unidad será $(\frac{8}{100}q + 50) + 1.50$, de modo que la nueva ecuación de oferta es

$$p = \frac{8}{100}q + 51.50.$$

La resolución del sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{8}{100}q + 51.50, \\ p = -\dfrac{7}{100}q + 65 \end{cases}$$

dará el nuevo precio de equilibrio:

$$\frac{8}{100}q + 51.50 = -\frac{7}{100}q + 65,$$

$$\frac{15}{100}q = 13.50,$$

$$q = 90,$$

$$p = \frac{8}{100}(90) + 51.50 = 58.70.$$

El impuesto de \$1.50 por unidad incrementó el precio de equilibrio en \$0.70 (véase la fig. 4.44). Observe que también existe una disminución en la cantidad de equilibrio, de $q = 100$ a $q = 90$, a causa del cambio en el precio de equilibrio (en los ejercicios se le pide que determine el efecto de un subsidio dado al fabricante, lo cual reducirá el precio del producto).

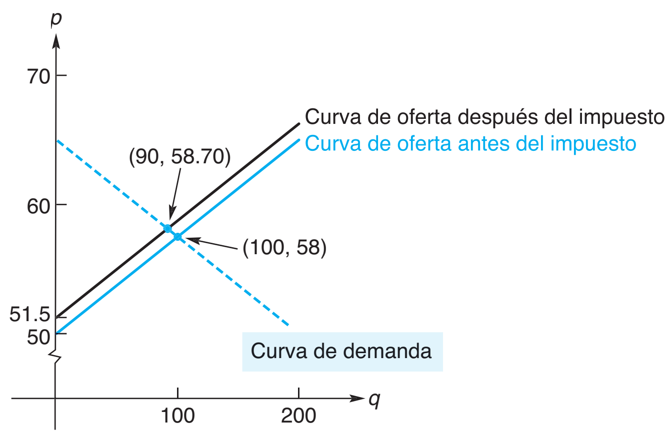


FIGURA 4.44 Equilibrio antes y después del impuesto.

b. *Determinar el ingreso total obtenido por el fabricante en el punto de equilibrio antes y después del impuesto.*

Solución: si se venden q unidades de un producto a un precio de p dólares cada una, entonces el ingreso total está dado por

$$y_{TR} = pq.$$

Antes del impuesto, el ingreso en (100, 58) es (en dólares)

$$y_{TR} = (58)(100) = 5800.$$

Después del impuesto es

$$y_{TR} = (58.70)(90) = 5283,$$

que es una disminución.

■ **EJEMPLO 2** **Equilibrio con demanda no lineal**

Encontrar el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son $p = \frac{q}{40} + 10$ *y* $p = \frac{8000}{q}$*, respectivamente.*

Solución: aquí la ecuación de demanda no es lineal. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{q}{40} + 10, \\ p = \dfrac{8000}{q} \end{cases}$$

por sustitución se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{8000}{q} &= \frac{q}{40} + 10, \\ 320{,}000 &= q^2 + 400q \quad \text{(multiplicando ambos miembros por } 40q\text{)}, \\ q^2 + 400q - 320{,}000 &= 0, \\ (q + 800)(q - 400) &= 0, \\ q = -800 \quad &\text{o} \quad q = 400. \end{aligned}$$

Descartamos $q = -800$, ya que q representa una cantidad. Eligiendo $q = 400$, tenemos $p = (8000/400) = 20$, de modo que el punto de equilibrio es $(400, 20)$. (Véase la fig. 4.45.)

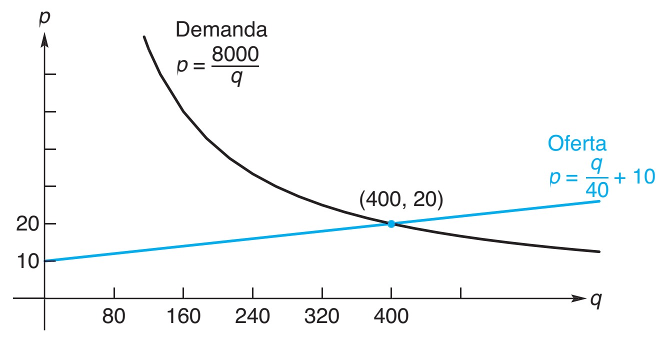


FIGURA 4.45 Equilibrio con demanda no lineal.

Puntos de equilibrio

Suponga que un fabricante produce un producto A y lo vende a $8 por unidad. Entonces, el ingreso total y_{TR} recibido (en dólares) de la venta de q unidades es

$$y_{TR} = 8q \qquad \text{(ingreso total).}$$

La diferencia entre el ingreso total recibido por q unidades y el costo total de q unidades, es la utilidad del fabricante (o pérdida si es negativa):

$$\textbf{utilidad (o pérdida)} = \textbf{ingreso total} - \textbf{costo total.}$$

El **costo total,** y_{TR}, es la suma de los costos totales variables y_{VC}, y los costos totales fijos y_{FC}.

$$y_{\text{TC}} = y_{\text{VC}} + y_{\text{FC}}.$$

Los **costos fijos** son aquellos costos que bajo condiciones normales no dependen del nivel de producción; esto es, en algún periodo permanecen constantes en todos los niveles de producción (ejemplos son renta, salario de los oficinistas y mantenimiento normal). Los **costos variables** son los que varían con el nivel de producción (como el costo de materiales, salarios, mantenimiento debido al uso y desgaste, etc.). Suponga que, para q unidades de producto A,

$$y_{\text{FC}} = 5000 \qquad \text{(costo fijo)}$$

$$\text{y} \quad y_{\text{VC}} = \frac{22}{9}q \qquad \text{(costo variable).}$$

Entonces

$$y_{\text{TC}} = \frac{22}{9}q + 5000 \qquad \text{(costo total).}$$

Las gráficas del costo total y del ingreso total aparecen en la figura 4.46. El eje horizontal representa el nivel de producción, q, y el eje vertical representa el valor total, en dólares, del ingreso o del costo. El **punto de equilibrio** es el punto en que el ingreso total es igual al costo total (TR $=$ TC); ocurre cuando los niveles de producción y de ventas tienen como resultado cero pérdidas y cero utilidades. En el diagrama, llamado *diagrama del punto de equilibrio*, está el punto (m, n), en el que las gráficas de $y_{\text{TR}} = 8q$ y $y_{\text{TC}} = \frac{22}{9}q + 5000$ se intersecan. Llamamos a m la **cantidad de equilibrio** y a n el **ingreso de equilibrio.** Cuando el costo total y el ingreso total están relacionados de manera lineal con la producción, como es nuestro caso, para cualquier nivel de producción mayor que m, el ingreso total es mayor que el costo total, lo que trae como resultado una utilidad. Sin embargo, en cualquier nivel menor de m unidades, el ingreso total es menor que el costo total, lo que trae como resultado una pérdida. Para una producción de m unidades la utilidad es cero. En el ejemplo siguiente examinaremos nuestros datos con mayor detalle.

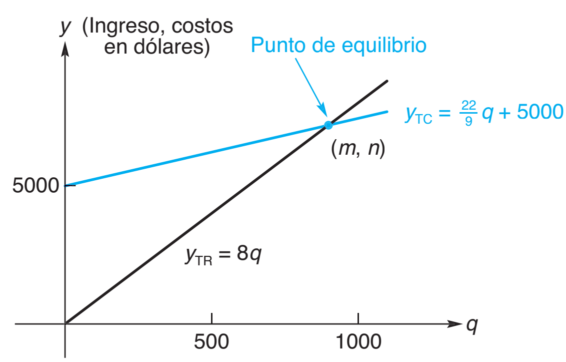


FIGURA 4.46 Diagrama de equilibrio.

EJEMPLO 3 Punto de equilibrio, utilidad y pérdida.

Un fabricante vende un producto a \$8 por unidad, y vende todo lo que produce. El costo fijo es de \$5000 y el variable por unidad es de $\frac{22}{9}$ *(dólares).*

a. *Encontrar la producción y el ingreso total en el punto de equilibrio.*

Solución: a un nivel de producción de q unidades, el costo variable es $y_{VC} = \frac{22}{9}q$ y el ingreso total es $y_{TR} = 8q$. De aquí que

$$y_{TR} = 8q,$$

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC} = \frac{22}{9}q + 5000.$$

En el punto de equilibrio, el ingreso total es igual al costo total. Ahora resolvemos el sistema formado por las ecuaciones anteriores. Como

$$y_{TR} = y_{TC},$$

Tenemos

$$8q = \frac{22}{9}q + 5000,$$

$$\frac{50}{9}q = 5000,$$

$$q = 900.$$

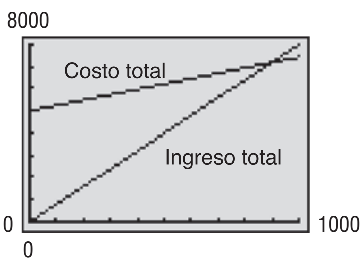


FIGURA 4.47 Punto de equilibrio (900, 7200).

Así que la producción deseada es de 900 unidades, lo que resulta en un ingreso total (en dólares) de

$$y_{TR} = 8(900) = 7200.$$

(Véase la fig. 4.47.)

b. *Encontrar la utilidad cuando se producen* 1800 *unidades.*

Solución: ya que utilidad = ingreso total − costo total, cuando $q = 1800$ tenemos

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(1800) - \left[\frac{22}{9}(1800) + 5000\right]$$
$$= 5000.$$

La utilidad cuando se producen y venden 1800 unidades es de \$5000.

c. *Encontrar la pérdida cuando se producen* 450 *unidades.*

Solución: cuando $q = 450$,

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(450) - \left[\frac{22}{9}(450) + 5000\right] = -2500.$$

Ocurre una pérdida de \$2500 cuando el nivel de producción es de 450 unidades.

d. *Encontrar la producción requerida para obtener una utilidad de* \$10,000.

Solución: para obtener una utilidad de \$10,000 tenemos

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total},$$

$$10{,}000 = 8q - \left(\frac{22}{9}q + 5000\right),$$

$$15{,}000 = \frac{50}{9}q,$$

$$q = 2700.$$

Así, deben producirse 2700 unidades.

EJEMPLO 4 Cantidad de equilibrio

Determinar la cantidad de equilibrio de Fabricaciones XYZ dada la información siguiente: costo fijo total, \$1200*; costo variable por unidad*, \$2*; ingreso total por la venta de q unidades*, $y_{TR} = 100\sqrt{q}$.

Solución: por q unidades de producción,

$$y_{TR} = 100\sqrt{q},$$

$$y_{TC} = 2q + 1200.$$

Igualando el ingreso total al costo total se obtiene

$$100\sqrt{q} = 2q + 1200,$$

$$50\sqrt{q} = q + 600 \quad \text{(dividiendo ambos lados entre 2).}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos

$$2500q = q^2 + 1200q + (600)^2,$$

$$0 = q^2 - 1300q + 360{,}000.$$

Por medio de la fórmula cuadrática,

$$q = \frac{1300 \pm \sqrt{250{,}000}}{2},$$

$$q = \frac{1300 \pm 500}{2},$$

$$q = 400 \quad \text{o} \quad q = 900.$$

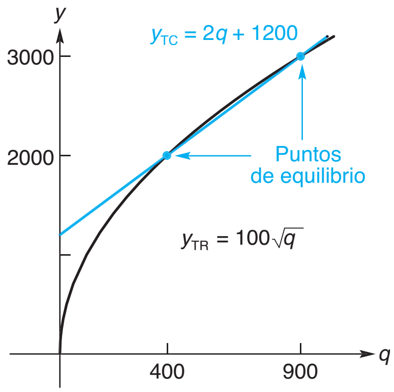


FIGURA 4.48 Dos puntos de equilibrio.

Aunque tanto $q = 400$, como $q = 900$ son cantidades de equilibrio, observe en la figura 4.48 que cuando $q > 900$, el costo total es mayor que el ingreso total, de modo que siempre se tendrá una pérdida. Esto ocurre porque aquí el ingreso total no está relacionado linealmente con la producción. Por tanto, producir más de la cantidad de equilibrio no necesariamente garantiza una utilidad.

Ejercicio 4.6

En los problemas del 1 al 8 se le da una ecuación de oferta y una de demanda para un producto. Si p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades por unidad de tiempo, encuentre el punto de equilibrio. En los problemas 1 y 2, plantee el sistema.

1. Oferta: $p = \frac{3}{100}q + 2$,
Demanda: $p = -\frac{7}{100}q + 12$.

2. Oferta: $p = \frac{1}{2000}q + 3$,
Demanda: $p = -\frac{1}{2500}q + \frac{42}{5}$.

3. Oferta: $35q - 2p + 250 = 0$,
Demanda: $65q + p - 537.5 = 0$.

4. Oferta: $246p - 3.25q - 2460 = 0$,
Demanda: $410p + 3q - 14{,}452.5 = 0$.

5. Oferta: $p = 2q + 20$,
Demanda: $p = 200 - 2q^2$.

6. Oferta: $p = (q + 10)^2$,
Demanda: $p = 388 - 16q - q^2$.

7. Oferta: $p = \sqrt{q + 10}$,
Demanda: $p = 20 - q$.

8. Oferta: $p = \frac{1}{5}q + 7$,
Demanda: $p = \dfrac{3240}{q + 20}$.

En los problemas del 9 al 14 y_{TR} representa el ingreso total en dólares y y_{TC} el costo total en dólares para un fabricante. Si q representa tanto el número de unidades producidas como el número de unidades vendidas, encuentre la cantidad de equilibrio. Esquematice un diagrama de equilibrio en los problemas 9 y 10.

9. $y_{TR} = 3q$,
$y_{TC} = 2q + 4500$.

10. $y_{TR} = 14q$,
$y_{TC} = \frac{40}{3}q + 1200$.

11. $y_{TR} = 0.05q$,
$y_{TC} = 0.85q + 600$.

12. $y_{TR} = 0.25q$,
$y_{TC} = 0.16q + 360$.

13. $y_{TR} = 100 - \dfrac{1000}{q + 5}$,
$y_{TC} = q + 35$.

14. $y_{TR} = 0.1q^2 + 7q$,
$y_{TC} = 2q + 500$.

15. Negocios Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son

$$3q - 200p + 1800 = 0$$

y

$$3q + 100p - 1800 = 0,$$

respectivamente, donde p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades vendidas por periodo.

a. Encuentre algebraicamente el precio de equilibrio y dedúzcalo por medio de una gráfica.
b. Encuentre el precio de equilibrio cuando se fija un impuesto de 27 centavos por unidad al proveedor.

16. Negocios Un fabricante vende todo lo que produce. Su ingreso total está dado por $y_{TR} = 7q$ y el costo total es $y_{TC} = 6q + 800$, donde q representa el número de unidades producidas y vendidas.

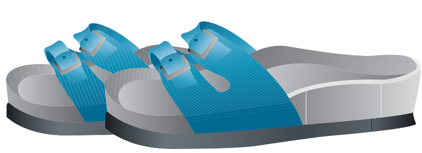
a. Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio y dibuje el diagrama de equilibrio.
b. Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio, si el costo total se incrementa en 5%.

17. Negocios Un fabricante vende un producto a \$8.35 por unidad, y vende todo lo que produce. Los costos fijos son de \$2116 y el costo variable es de \$7.20 por unidad. ¿A qué nivel de producción existirán utilidades de \$4600? ¿A qué nivel de producción habrá una pérdida de \$1150? ¿A qué nivel de producción ocurre el punto de equilibrio?

18. Negocios El punto de equilibrio de mercado para un producto ocurre cuando se producen 13,500 unidades a un precio de \$4.50 por unidad. El productor no proveerá unidades a \$1 y el consumidor no demandará unidades a \$20. Encuentre las ecuaciones de oferta y demanda si ambas son lineales.

19. Negocios Un fabricante de juguetes para niños alcanzará el punto de equilibrio en un volumen de ventas de \$200,000. Los costos fijos son de \$40,000 y cada unidad de producción se vende a \$5. Determine el costo variable por unidad.

20. Negocios La compañía Sandalias Cómodas fabrica sandalias para las que el costo del material es de \$0.80 por par, y el costo de mano de obra es de \$0.90 por par. Hay costos adicionales por par de \$0.30. Los costos fijos son de \$70,000. Si cada par se vende a \$2.50, ¿cuántos pares se deben vender para que la compañía llegue al equilibrio?



21. Negocios Encuentre el punto de equilibrio para la compañía Z, que vende todo lo que produce, si el costo variable por unidad es de \$2, los costos fijos de \$1050 y $y_{TR} = 50\sqrt{q}$, donde q es el número de unidades producidas.

22. Negocios Una compañía determinó que la ecuación de demanda para su producto es $p = 1000/q$, donde p es el precio por unidad para q unidades en algún periodo. Determine la cantidad demandada cuando el precio por unidad es (a)\$4, (b)\$2 y (c)\$0.50. Para cada uno de estos precios calcule el ingreso total que la compañía recibirá. ¿Cuál será el ingreso sin importar el precio? (*Sugerencia*: encuentre el ingreso cuando el precio es p dólares.)

23. Negocios Utilizando los datos del ejemplo 1, determine cómo se afectará el precio de equilibrio original, si la compañía recibe un subsidio del gobierno de \$1.50 por unidad.

24. Negocios La compañía Aceros Forjados vende un producto de acero corrugado a Fabricaciones Modelo, y compite para hacer estas ventas con otros proveedores. El vicepresidente de ventas de Aceros Forjados cree que reduciendo el precio del producto, se podría asegurar un 40% de incremento en el volumen de unidades vendidas a Fabricaciones Modelo. Como administrador del departamento de costos y análisis, a usted se le ha consultado para que analice la propuesta del vicepresidente, y exponga sus recomendaciones de si ésta es financieramente benéfica. Se le pide que determine específicamente:

a. Ganancia o pérdida neta con base en el precio propuesto.
b. Volumen de ventas de unidades que, bajo el precio propuesto, se requieren para obtener las mismas utilidades de \$40,000 que se reciben con el precio y volumen de ventas actuales.

Utilice la siguiente información en su análisis:

	Operaciones actuales	**Propuesta del vicepresidente de ventas**
Precio unitario	\$2.50	\$2.00
Volumen de ventas	200,000 unidades	280,000 unidades
Costo variable		
Total	\$350,000	\$490,000
Por unidad	\$1.75	\$1.75
Costo fojo	\$110,000	\$110,000
Ganancia	\$40,000	?

25. Negocios Suponga que los productos A y B tienen ecuaciones de demanda y oferta que están relacionadas una con otra. Si q_A y q_B son las cantidades producidas y vendidas de A y B, respectivamente, y p_A y p_B sus respectivos precios, las ecuaciones de demanda son

$$q_A = 8 - p_A + p_B$$

y

$$q_B = 26 + p_A - p_B,$$

y las ecuaciones de oferta son

$$q_A = -2 + 5p_A - p_B$$

y

$$q_B = -4 - p_A + 3p_B.$$

Elimine q_A y q_B para obtener los precios de equilibrio.

26. Negocios La ecuación de oferta para un producto es

$$p = 0.3q^2 + 14.6,$$

y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{35.2}{1 + 0.3q}.$$

Aquí p representa el precio por unidad en dólares, y q el número de unidades (en miles) por unidad de tiempo. Grafique ambas ecuaciones y a partir de su gráfica determine el precio y la cantidad de equilibrio a un decimal.

27. Negocios Para un fabricante la ecuación de ingreso total es

$$y_{TR} = 20.5\sqrt{q + 4} - 41$$

y la ecuación de costo total es

$$y_{TC} = 0.02q^3 + 10.4,$$

donde q representa (en miles) tanto el número de unidades producidas como el de unidades vendidas. Grafique un diagrama de equilibrio y encuentre la cantidad de equilibrio.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS CON NÚMERO IMPAR

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.1

1. $P = 2(w + 2) + 2w = 2w + 4 + 2w = 4w + 4.$
2. 200 cafés especiales. **3.** 46 semanas; \$1715.
4. $r = \frac{d}{t}$. **5.** $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

EJERCICIO 1.1 (página 41)

1. 0. **3.** $\frac{10}{3}$. **5.** -2.
7. Sumando 5 a ambos lados; se garantiza la equivalencia.
9. Elevando ambos lados a la cuarta potencia; la equivalencia *no* se garantiza.
11. Dividiendo ambos lados entre x; la equivalencia *no* se garantiza.
13. Multiplicando ambos lados por $x - 1$; la equivalencia *no* se garantiza.
15. Multiplicando ambos lados por $(x - 5)/x$; la equivalencia *no* se garantiza.
17. $\frac{5}{2}$. **19.** 0. **21.** 1. **23.** $\frac{12}{5}$. **25.** -1.
27. 2. **29.** $\frac{10}{3}$. **31.** 126. **33.** 8. **35.** $-\frac{26}{9}$.
37. $-\frac{37}{18}$. **39.** $\frac{60}{17}$. **41.** $\frac{14}{3}$. **43.** 3. **45.** $\frac{7}{8}$.
47. $P = \frac{I}{rt}$. **49.** $q = \frac{p+1}{8}$. **51.** $r = \frac{S - P}{Pt}$.
53. $a_1 = \frac{2S - na_n}{n}$. **55.** 120 m.
57. $c = x + 0.0825x = 1.0825x$. **59.** 3 años.
61. 31 horas. **63.** 0.00001. **65.** $\frac{1}{8}, -\frac{1}{14}$. **67.** $\frac{14}{61}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.2

1. $\frac{10}{r+2} = \frac{6}{r-2}$; 8 mi/h. **2.** $t = \frac{d}{r+w}$; $w = \frac{d}{t} - r$.
3. $\sqrt{x^2 + 16} - x = 2$; $x = 3$; la rampa es de 5 pies de largo.

EJERCICIO 1.2 (página 46)

1. $\frac{1}{5}$. **3.** $\varnothing$. **5.** $\frac{8}{3}$. **7.** 2. **9.** 0. **11.** $\frac{5}{3}$.
13. $\frac{1}{8}$. **15.** 3. **17.** $\frac{5}{13}$. **19.** $\varnothing$. **21.** 11.
23. $\frac{262}{5}$. **25.** $-\frac{10}{9}$. **27.** 2. **29.** 7. **31.** $\frac{49}{36}$.
33. $-\frac{9}{4}$. **35.** $t = \frac{r-d}{rd}$. **37.** $n = \frac{2mI}{rB} - 1$.
39. 20. **41.** $t = \frac{d}{r-c}$; $r = \frac{d}{t} + c$.
43. La antena B: 4 m; la antena A: 12.25 m.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.3

1. El número es -5 o 6. **2.** 50 pies por 60 pies.
3. $1 \times 1 \times 5$. **4.** 15 artículos a $15 por artículo.
5. 2.5 segundos y 7.5 segundos. **6.** $100 **7.** Nunca.

EJERCICIO 1.3 (página 53)

1. 2. **3.** 4, 3. **5.** 3, -1. **7.** 4, 9. **9.** ± 2.
11. 0, 8. **13.** $\frac{1}{2}$. **15.** 1, $-\frac{5}{2}$. **17.** 5, -2. **19.** 0, $\frac{3}{2}$.
21. 0, 1, -4. **23.** 0, ± 8. **25.** 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{4}{3}$. **27.** -3, -1, 2.
29. 3, 4. **31.** 4, -6. **33.** $\frac{3}{2}$. **35.** $\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$.
37. No tiene raíces reales. **39.** $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{3}$. **41.** 40, -25.
43. $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$. **45.** $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{2}$. **47.** 2, $-\frac{1}{2}$.
49. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\pm\frac{1}{2}$. **51.** -4, 1. **53.** $\frac{15}{7}$, $\frac{11}{5}$. **55.** $\frac{3}{2}$, -1.
57. 6, -2. **61.** 5, -2. **63.** $\frac{3}{2}$. **65.** -2. **67.** 6.
69. 4, 8. **71.** 2. **73.** 0, 4. **75.** 4. **77.** 64.15, 3.35.
79. 6 pulgadas por 8 pulgadas. **83.** 1 año y 10 años.
85. 86.8 cm o 33.2 cm. **87.** **a.** 9 s; **b.** 3 s o 6 s.
89. 1.5, 0.75. **91.** No tiene raíces reales. **93.** 1.999, 0.963.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 1 (página 56)

1. $\frac{1}{4}$. **3.** $-\frac{2}{15}$. **5.** $-\frac{1}{2}$. **7.** $\varnothing$. **9.** $\frac{5}{2}$. **11.** $\frac{1}{3}$.

13. $-\frac{9}{7}$. **15.** $-\frac{5}{3}, 1$. **17.** $0, \frac{7}{5}$. **19.** 5. **21.** $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

23. $\frac{5}{8}, -3$. **25.** $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$. **27.** $\pm 2, \pm 3$. **29.** $\frac{1}{2}$.

31. $\frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}$. **33.** 9. **35.** 5. **37.** No tiene solución.

39. 10. **41.** 4, 8. **43.** $-8, 1$. **45.** $Q = \frac{EA}{4\pi k}$.

47. $C' = \lambda^2(n - 1 - C)$. **49.** $T = \pm 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

51. $\omega = \pm\sqrt{\frac{2mgh - mv^2}{I}}$. **55.** $6, \frac{5}{4}$.

57. $-0.757, 0.384$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 1 (página 58)

1. **a.** \$107.15; **b.** \$10.26; **c.** 10 lb; **d.** 10.44 lb; **e.** 4.4%
3. −1.9%.

EJERCICIO 2.1 (página 66)

1. 120. **3.** 48 de A, 80 de B. **5.** $5\frac{1}{3}$. **7.** 1 m.

9. 13,000. **11.** \$4000 al 6%, \$16,000 al $7\frac{1}{2}$%.

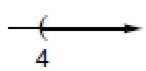
13. \$4.25. **15.** 4%. **17.** 80. **19.** \$8000.
21. 1138. **23.** \$116.25. **25.** 40. **27.** 46,000.
29. \$440 o \$460. **31.** \$100. **33.** 77.
35. 80 pies por 140 pies. **37.** 9 cm de largo, 4 cm de ancho.
39. \$112,000. **41.** 60. **43.** 125 unidades de A y 100 unidades de B o bien 150 unidades de A y 125 unidades de B.

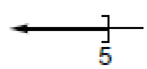
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.2

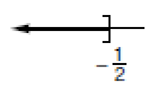
1. 5375.
2. $150 - x_4 \geq 0$; $3x_4 - 210 \geq 0$; $x_4 + 60 \geq 0$; $x_4 \geq 0$.

EJERCICIO 2.2 (página 74)

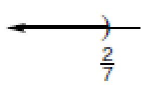
1. $(4, \infty)$. **3.** $(-\infty, 5]$. **5.** $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

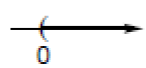


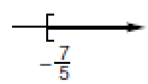




7. $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$. **9.** $(0, \infty)$. **11.** $\left[-\frac{7}{5}, \infty\right)$.

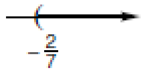






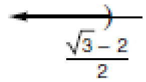
5

13. $\left(-\frac{2}{7}, \infty\right)$.

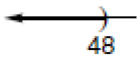


15. $\varnothing$.

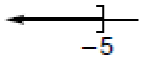
17. $\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$.



19. $(-\infty, 48)$.

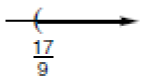


21. $(-\infty, -5]$.

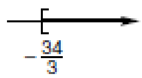


23. $(-\infty, \infty)$.

25. $\left(\frac{17}{9}, \infty\right)$.

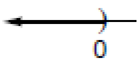


27. $\left[-\frac{34}{3}, \infty\right)$.



29. $(0, \infty)$.

31. $(-\infty, 0)$.



33. $(-\infty, -2]$.

35. $444{,}000 < S < 636{,}000$. **37.** $x < 70$ grados.

35. $444{,}000 < S < 636{,}000$. **37.** $x < 70$ grados.

EJERCICIO 2.3 (página 78)

1. 120,001. **3.** 17,000. **5.** 60,000. **7.** \$25,714.29.
9. 1000. **11.** $t > 36.5$. **13.** Al menos \$67,400.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.4

1. $|w - 22 \text{ oz}| \leq 0.3$ oz.

EJERCICIO 2.4 (página 82)

1. 13. **3.** 6. **5.** 5. **7.** $-4 < x < 4$.
9. $\sqrt{5} - 2$. **11.** **a.** $|x - 7| < 3$; **b.** $|x - 2| < 3$;
c. $|x - 7| \leq 5$; **d.** $|x - 7| = 4$; **e.** $|x + 4| < 2$;
f. $|x| < 3$; **g.** $|x| > 6$; **h.** $|x - 6| > 4$; **i.** $|x - 105| < 3$;
j. $|x - 850| < 100$. **13.** $|p_1 - p_2| \leq 8$. **15.** ± 7.
17. ± 6. **19.** $13, -3$. **21.** $\frac{2}{5}$. **23.** $\frac{1}{2}, 3$.
25. $(-4, 4)$. **27.** $(-\infty, -8) \cup (8, \infty)$. **29.** $(-9, -5)$.
31. $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. **33.** $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.
35. $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{16}{3}, \infty\right)$. **37.** $|d - 17.2| \leq 0.03$ m
39. $(-\infty, \mu - h\sigma) \cup (\mu + h\sigma, \infty)$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 2 (página 84)

1. $(-\infty, 0]$. **3.** $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. **5.** $\varnothing$. **7.** $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$.
9. $(-\infty, \infty)$. **11.** $-2, 5$. **13.** $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
15. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, \infty\right)$. **17.** 542. **19.** 6000.
21. $c <$ \$212,814.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 2 (página 85)

1. 1 hora. **3.** 1 hora. **5.** 600; 310.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.4

1. \$120,000 al 9% y \$80,000 al 8%.
2. 500 especies A y 1000 especies B.
3. Un número infinito de soluciones de la forma
$A = \frac{20{,}000}{3} - \frac{4}{3}r, B = r$ donde $0 \leq r \leq 5000$.
4. $\frac{1}{6}$ lb de A; $\frac{1}{3}$ lb de B; $\frac{1}{2}$ lb de C.

EJERCICIO 4.4 (página 161)

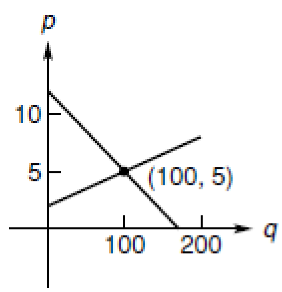
1. $x = -1, y = 1$. **3.** $x = 3, y = -1$.
5. $v = 0, w = 18$. **7.** $x = -3, y = 2$.
9. No hay solución. **11.** $x = 12, y = -12$.
13. $p = \frac{3}{2} - 3r, q = r$; r es cualquier número real.
15. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}$. **17.** $x = 1, y = 1, z = 1$.
19. $x = 1 + 2r, y = 3 - r, z = r$; r es cualquier número real.
21. $x = -\frac{1}{3}r, y = \frac{5}{3}r, z = r$; r es cualquier número real.
23. $x = \frac{3}{2} - r + \frac{1}{2}s, y = r, z = s$; r y s son cualesquiera números reales.
25. 420 galones de solución al 20%, 280 galones de solución al 30%.
27. 0.5 lb de algodón; 0.25 lb de poliéster; 0.25 lb de nylon.
29. 275 mi/h (velocidad del aeroplano en aire calmo), 21 mi/h (velocidad del viento).
31. 240 unidades (Early American), 200 unidades (Contemporáneo).
33. 800 calculadoras de la planta Exton, 700 de la planta Whyton.
35. 4% sobre los primeros \$100,000, 6% sobre el resto.
37. 60 unidades de Argón I, 40 unidades de Argón II.
39. 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sillones reclinables.
41. 40 trabajadores semicalificados, 20 trabajadores calificados y 10 empleados de envíos. **45.** $x = 3, y = 2$.
47. $x = 8.3, y = 14.0$.

EJERCICIO 4.5 (página 165)

1. $x = 4, y = -12; x = -1, y = 3.$
3. $p = -3, q = -4; p = 2, q = 1.$
5. $x = 0, y = 0; x = 1, y = 1.$
7. $x = 4, y = 8; x = -1, y = 3.$
9. $p = 0, q = 0; p = 1, q = 1.$
11. $x = \sqrt{17}, y = 2;\ x = -\sqrt{17}, y = 2; x = \sqrt{14}, y = -1; x = -\sqrt{14}, y = -1.$ **13.** $x = 21, y = 15.$
15. En $(10, 8.1)$ y $(-10, 7.9)$. **17.** Tres.
19. $x = -1.3, y = 5.1.$ **21.** $x = 1.76.$ **23.** $x = -1.46.$

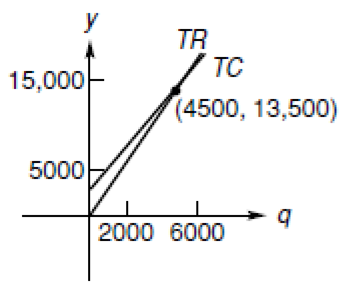
EJERCICIO 4.6 (página 174)

1.



3. $(5, 212.50)$. **5.** $(9, 38)$. **7.** $(15, 5)$.

9.



11. No puede tener punto de equilibrio para ningún nivel de producción.
13. 15 unidades o 45 unidades. **15. a.** \$12; **b.** \$12.18.
17. 5840 unidades; 840 unidades; 1840 unidades. **19.** \$4.
21. El costo total siempre excede al ingreso total, no hay punto de equilibrio. **23.** Disminuye en \$0.70.
25. $p_A = 5; p_B = 10.$ **27.** 2.4 y 11.3.