OBJETIVO Sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas. Definir lo que es un polinomio, utilizar productos especiales y emplear la división larga para dividir polinomios.

0.6 Operaciones con expresiones algebraicas

Cuando se combinan números, representados por símbolos, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces, entonces la expresión resultante se llama *expresión algebraica*.

EJEMPLO 1 Expresiones algebraicas

a. $\sqrt[3]{\dfrac{3x^3 - 5x - 2}{10 - x}}$ es una expresión algebraica en la variable x.

b. $10 - 3\sqrt{y} + \dfrac{5}{7 + y^2}$ es una expresión algebraica en la variable y.

c. $\dfrac{(x + y)^3 - xy}{y} + 2$ es una expresión algebraica en las variables x y y.

La expresión algebraica $5ax^3 - 2bx + 3$ consiste de tres *términos:* $+5ax^3$, $-2bx$ y $+3$. Algunos de los *factores* del primer término, $5ax^3$, son 5, a, x, x^2, x^3, $5ax$ y ax^2. También, $5a$ es el coeficiente de x^3 y 5 es el *coeficiente numérico* de ax^3. Si en un análisis a y b representan números fijos, entonces a a y b se les denomina *constantes*.

Las expresiones algebraicas que tienen exactamente un término se denominan *monomios*. Aquéllas que tienen exactamente dos términos son *binomios* y las que tienen exactamente tres términos son *trinomios*. Las expresiones algebraicas con más de un término se denominan *multinomios*. Así, el multinomio $2x - 5$ es un binomio; el multinomio $3\sqrt{y} + 2y - 4y^2$ es un trinomio.

Un *polinomio en x* es una expresión algebraica de la forma[2]

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

Las palabras *polinomio* y *multinomio* no deben utilizarse en forma indistinta. Por ejemplo, $\sqrt{x} + 2$ es un multinomio, pero no un polinomio. Por otra parte, $x + 2$ es un multinomio y un polinomio.

en donde n es un entero no negativo y los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes con $c_n \neq 0$. Llamamos a n el *grado* del polinomio. Por lo que, $4x^3 - 5x^2 + x - 2$ es un polinomio en x de grado 3 y $y^5 - 2$ es un polinomio en y de grado 5. Una constante distinta de cero es un polinomio de grado cero, así 5 es un polinomio de grado cero. La constante 0 se considera un polinomio, sin embargo, no se le asigna grado alguno.

En los ejemplos siguientes ilustraremos las operaciones con expresiones algebraicas.

EJEMPLO 2 Suma de expresiones algebraicas

Simplifique $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$.

Solución: primero debemos eliminar los paréntesis. Después, usando la propiedad conmutativa de la suma, reunimos todos los términos semejantes. *Términos semejantes* son los que sólo difieren por sus coeficientes numéricos. En este ejemplo, $3x^2y$ y $4x^2y$ son semejantes, así como las parejas $-2x$ y $6x$, y 1 y -3. Por tanto,

$$(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$$

[2]Los tres puntos indican los términos que se entiende serán incluidos en la suma.

$$= 3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3$$
$$= 3x^2y + 4x^2y - 2x + 6x + 1 - 3.$$

Por la propiedad distributiva,

$$3x^2y + 4x^2y = (3 + 4)x^2y = 7x^2y$$

$$\text{y} \quad -2x + 6x = (-2 + 6)x = 4x.$$

De aquí que, $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) = 7x^2y + 4x - 2.$

EJEMPLO 3 Sustracción de expresiones algebraicas

Simplifique $(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)$.

Solución: aquí aplicamos la definición de la sustracción y la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}
&(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)\\
&= (3x^2y - 2x + 1) + (-1)(4x^2y + 6x - 3)\\
&= (3x^2y - 2x + 1) + (-4x^2y - 6x + 3)\\
&= 3x^2y - 2x + 1 - 4x^2y - 6x + 3\\
&= 3x^2y - 4x^2y - 2x - 6x + 1 + 3\\
&= (3 - 4)x^2y + (-2 - 6)x + 1 + 3\\
&= -x^2y - 8x + 4.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Eliminación de los símbolos de agrupación

Simplifique $3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\}$.

Solución: primero debemos eliminar los símbolos de agrupación más internos (los paréntesis). Después repetimos el proceso hasta eliminar todos los símbolos de agrupación, reduciendo los términos semejantes siempre que sea posible. Tenemos,

$$\begin{aligned}
&3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\}\\
&= 3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - 3 + 4x]\}\\
&= 3\{4x^2 + 6x + 20x^2 - 15 + 20x\}\\
&= 3\{24x^2 + 26x - 15\}\\
&= 72x^2 + 78x - 45.
\end{aligned}$$

La propiedad distributiva es la herramienta clave al multiplicar expresiones. Por ejemplo, para multiplicar $ax + c$ por $bx + d$, podemos considerar $ax + c$ como un solo número y entonces utilizar la propiedad distributiva:

$$(ax + c)(bx + d) = (ax + c)bx + (ax + c)d.$$

Usando nuevamente la propiedad distributiva, tenemos,

$$\begin{aligned}(ax + c)bx + (ax + c)d &= abx^2 + cbx + adx + cd \\ &= abx^2 + (ad + cb)x + cd.\end{aligned}$$

Por lo que, $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd$. En particular, si $a = 2, b = 1, c = 3$ y $d = -2$, entonces

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x - 2) &= 2(1)x^2 + [2(-2) + 3(1)]x + 3(-2) \\ &= 2x^2 - x - 6.\end{aligned}$$

A continuación damos una lista de productos especiales que pueden obtenerse a partir de la propiedad distributiva y son útiles al multiplicar expresiones algebraicas.

Productos especiales

1. $x(y + z) = xy + xz$ (propiedad distributiva).

2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$

3. $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd.$

4. $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio).

5. $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio).

6. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ (producto de suma y diferencia).

7. $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ (cubo de un binomio).

8. $(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ (cubo de un binomio).

EJEMPLO 5 Productos especiales

a. Por la regla 2,

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 5) &= [x + 2][x + (-5)] \\ &= x^2 + (2 - 5)x + 2(-5) \\ &= x^2 - 3x - 10.\end{aligned}$$

b. Por la regla 3,

$$\begin{aligned}(3z + 5)(7z + 4) &= 3 \cdot 7z^2 + (3 \cdot 4 + 5 \cdot 7)z + 5 \cdot 4 \\ &= 21z^2 + 47z + 20.\end{aligned}$$

c. Por la regla 5,

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 &= x^2 - 2(4)x + 4^2 \\ &= x^2 - 8x + 16.\end{aligned}$$

d. Por la regla 6,

$$\begin{aligned}(\sqrt{y^2 + 1} + 3)(\sqrt{y^2 + 1} - 3) &= (\sqrt{y^2 + 1})^2 - 3^2 \\ &= (y^2 + 1) - 9 \\ &= y^2 - 8.\end{aligned}$$

e. Por la regla 7,

$$\begin{aligned}(3x+2)^3 &= (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)^2(3x) + (2)^3 \\ &= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8.\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Multiplicación de multinomios

Encuentre el producto $(2t-3)(5t^2+3t-1)$.

Solución: tratamos a $2t-3$ como un solo número y aplicamos la propiedad distributiva dos veces:

$$\begin{aligned}(2t-3)(5t^2+3t-1) &= (2t-3)5t^2 + (2t-3)3t - (2t-3)1 \\ &= 10t^3 - 15t^2 + 6t^2 - 9t - 2t + 3 \\ &= 10t^3 - 9t^2 - 11t + 3.\end{aligned}$$

En el ejemplo 3b de la sección 0.3, mostramos que $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Del mismo modo, $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$. Usando estos resultados, podemos dividir un multinomio entre un monomio, si dividimos cada término del multinomio entre el monomio.

EJEMPLO 7 División de un multinomio entre un monomio

a. $\dfrac{x^3+3x}{x} = \dfrac{x^3}{x} + \dfrac{3x}{x} = x^2 + 3.$

b. $$\begin{aligned}\frac{4z^3 - 8z^2 + 3z - 6}{2z} &= \frac{4z^3}{2z} - \frac{8z^2}{2z} + \frac{3z}{2z} - \frac{6}{2z} \\ &= 2z^2 - 4z + \frac{3}{2} - \frac{3}{z}.\end{aligned}$$

División larga

Para dividir un polinomio entre un polinomio usamos la llamada división larga cuando el grado del divisor es menor o igual que el del dividendo, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 División larga

Divida $2x^3 - 14x - 5$ *entre* $x - 3$.

Solución: aquí $2x^3 - 14x - 5$ es el *dividendo* y $x - 3$ es el *divisor*. Para evitar errores, es mejor escribir el dividendo como $2x^3 + 0x^2 - 14x - 5$. Observe que las potencias de x están en orden decreciente. Tenemos

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & 2x^2 + 6x + 4 \leftarrow \text{cociente} \\
x - 3 & \overline{)\,2x^3 + 0x^2 - 14x - 5} \\
 & \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 & \quad 6x^2 - 14x \\
 & \quad \underline{6x^2 - 18x} \\
 & \qquad 4x - 5 \\
 & \qquad \underline{4x - 12} \\
 & \qquad\quad 7 \leftarrow \text{residuo.}
\end{array}
$$

Observe que dividimos x (el primer término del divisor) entre $2x^3$ y obtuvimos $2x^2$. Después multiplicamos $2x^2$ por $x - 3$, obteniendo $2x^3 - 6x^2$. Después de restar $2x^3 - 6x^2$ de $2x^3 + 0x^2$, obtuvimos $6x^2$ y entonces "bajamos" el término $-14x$. Este proceso continúa hasta que lleguemos a 7, el *residuo*. Siempre nos detendremos cuando el residuo sea 0 o un polinomio cuyo grado sea menor que el grado del divisor. Nuestra respuesta la podemos escribir como

$$2x^2 + 6x + 4 + \frac{7}{x - 3}.$$

Esto es, la respuesta tiene la forma

$$\text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}.$$

Una manera de comprobar una división es verificar que

$$(\text{cociente})(\text{divisor}) + \text{residuo} = \text{dividendo}.$$

Por medio de esta ecuación usted debe ser capaz de verificar el resultado de este ejemplo.

Ejercicio 0.6

Realice las operaciones indicadas y simplifique.

1. $(8x - 4y + 2) + (3x + 2y - 5)$.

2. $(6x^2 - 10xy + 2) + (2z - xy + 4)$.

3. $(8t^2 - 6s^2) + (4s^2 - 2t^2 + 6)$.

4. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$.

5. $(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) + (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$.

6. $(2x + 3y - 5) - (7x - 6y + 2)$.

7. $(6x^2 - 10xy + \sqrt{2}) - (2z - xy + 4)$.

8. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$.

9. $(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) - (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$.

10. $4(2z - w) - 3(w - 2z)$.

11. $3(3x + 3y - 7) - 3(8x - 2y + 2)$.

12. $(2s + t) - 3(s - 6) + 4(1 - t)$.

13. $3(x^2 + y^2) - x(y + 2x) + 2y(x + 3y)$.

14. $2 - [3 + 4(s - 3)]$.

15. $2\{3[3(x^2 + 2) - 2(x^2 - 5)]\}$.

16. $4\{3(t + 5) - t[1 - (t + 1)]\}$.

17. $-3\{4x(x + 2) - 2[x^2 - (3 - x)]\}$.

18. $-\{-2[2a + 3b - 1] + 4[a - 2b] - a[2(b - 3)]\}$.

19. $(x + 4)(x + 5)$.

20. $(u + 2)(u + 5)$.

21. $(w + 2)(w - 5)$.

22. $(z - 7)(z - 3)$.

23. $(2x + 3)(5x + 2)$.

24. $(y - 4)(2y + 3)$.

25. $(x + 3)^2$.

26. $(2x - 1)^2$.

27. $(x - 5)^2$.

28. $(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 5)$.

29. $(\sqrt{2y} + 3)^2$.

30. $(y - 4)(y + 4)$.

31. $(2s - 1)(2s + 1)$.

32. $(z^2 - 3w)(z^2 + 3w)$.

33. $(x^2 - 3)(x + 4)$.

34. $(x + 1)(x^2 + x + 3)$.

35. $(x^2 - 4)(3x^2 + 2x - 1)$.

36. $(2x - 1)(3x^3 + 7x^2 - 5)$.

37. $x\{3(x - 1)(x - 2) + 2[x(x + 7)]\}$.

38. $[(2z + 1)(2z - 1)](4z^2 + 1)$.

39. $(x + y + 2)(3x + 2y - 4)$.

40. $(x^2 + x + 1)^2$.

41. $(x + 5)^3$.

42. $(x - 2)^3$.

43. $(2x - 3)^3$.

44. $(x + 2y)^3$.

45. $\dfrac{z^2 - 18z}{z}$.

46. $\dfrac{2x^3 - 7x + 4}{x}$.

47. $\dfrac{6x^5 + 4x^3 - 1}{2x^2}$.

48. $\dfrac{(4x - 3) - (8x + 9)}{4x}$.

49. $(x^2 + 3x - 1) \div (x + 3)$.

50. $(x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$.

51. $(3x^3 - 2x^2 + x - 3) \div (x + 2)$.

52. $(x^4 + 2x^2 + 1) \div (x - 1)$.

53. $t^2 \div (t - 8)$.

54. $(4x^2 + 6x + 1) \div (2x - 1)$.

55. $(3x^2 - 4x + 3) \div (3x + 2)$.

56. $(z^3 + z^2 + z) \div (z^2 - z + 1)$.

OBJETIVO Establecer las reglas básicas para factorizar y aplicarlas para factorizar expresiones.

0.7 Factorización

Cuando multiplicamos entre sí dos o más expresiones, éstas reciben el nombre de *factores* del producto. Por lo que si $c = ab$, entonces a y b son factores del producto c. Al proceso por el cual una expresión se escribe como el producto de sus factores se le llama *factorización*.

A continuación se presentan las reglas para la factorización de expresiones, la mayoría de las cuales surgen de los productos especiales vistos en la sección 0.6. El lado derecho de cada identidad es la forma factorizada de la que aparece a la izquierda.

Reglas de factorización

1. $xy + xz = x(y + z)$ (factor común).

2. $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.

3. $abx^2 + (ad + cb)x + cd = (ax + c)(bx + d)$.

4. $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto).

5. $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto).

6. $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ (diferencia de dos cuadrados).

7. $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$ (suma de dos cubos).

8. $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ (diferencia de dos cubos).

Cuando factorizamos un polinomio, por lo común, elegimos factores que sean polinomios. Por ejemplo, $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. No escribiremos $x - 4$ como $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$.

Siempre factorice completamente. Por ejemplo,

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x + 2)(x - 2).$$

EJEMPLO 1 **Factores comunes**

a. *Factorice completamente* $3k^2x^2 + 9k^3x$.

Solución: ya que $3k^2x^2 = (3k^2x)(x)$ y $9k^3x = (3k^2x)(3k)$, cada término de la expresión original contiene el factor común $3k^2x$. Así, por la regla 1,

$$3k^2x^2 + 9k^3x = 3k^2x(x + 3k).$$

Observe que aun cuando $3k^2x^2 + 9k^3x = 3(k^2x^2 + 3k^3x)$, no podemos decir que la expresión esté completamente factorizada, ya que $k^2x^2 + 3k^3x$ todavía puede factorizarse.

b. *Factorice completamente* $8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2$.

Solución:

$$\begin{aligned} &8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2 \\ &= 2a^2y(4a^3x^2y^2 - 3b^3z - a^2b^4xyz^2). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Factorización de trinomios

a. *Factorice completamente* $3x^2 + 6x + 3$.

Solución: primero sacamos un factor común. Después factorizamos por completo la expresión resultante. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 3 &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ &= 3(x + 1)^2 \qquad \text{(Regla 4).} \end{aligned}$$

b. *Factorice completamente* $x^2 - x - 6$.

Solución: si este trinomio se puede factorizar en la forma $(x + a)(x + b)$, que es el producto de dos binomios, entonces debemos determinar los valores de a y de b. Como $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, entonces

$$x^2 + (-1)x + (-6) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Igualando los coeficientes correspondientes, queremos que

$$a + b = -1 \quad \text{y} \quad ab = -6.$$

Si $a = -3$ y $b = 2$ entonces ambas condiciones se cumplen y de aquí,

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Como verificación es conveniente multiplicar el lado derecho para ver si coincide con el izquierdo.

c. *Factorice completamente* $x^2 - 7x + 12$.

Solución:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

EJEMPLO 3 Factorización

A continuación tenemos una variedad de expresiones completamente factorizadas. Los números entre paréntesis hacen referencia a las reglas utilizadas.

a. $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ (4).

b. $9x^2 + 9x + 2 = (3x + 1)(3x + 2)$ (3).

c. $6y^3 + 3y^2 - 18y = 3y(2y^2 + y - 6)$ (1)

$= 3y(2y - 3)(y + 2)$ (3).

d. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ (5).

e. $z^{1/4} + z^{5/4} = z^{1/4}(1 + z)$ (1).

f. $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ (6)

$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ (6).

g. $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 4 = (x^{1/3} - 1)(x^{1/3} - 4)$ (2).

h. $ax^2 - ay^2 + bx^2 - by^2 = (ax^2 - ay^2) + (bx^2 - by^2)$

$= a(x^2 - y^2) + b(x^2 - y^2)$ (1)

$= (x^2 - y^2)(a + b)$ (1)

$= (x + y)(x - y)(a + b)$ (6).

i. $8 - x^3 = (2)^3 - (x)^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$ (8).

j. $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$ (6)

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ (7), (8).

Observe en el ejemplo 3f que $x^2 - 1$ es factorizable, pero $x^2 + 1$ no. En el ejemplo 3h, factorizamos haciendo uso de la agrupación.

Ejercicio 0.7

Factorice completamente las expresiones siguientes.

1. $6x + 4$.

2. $6y^2 - 4y$.

3. $10xy + 5xz$.

4. $3x^2y - 9x^3y^3$.

5. $8a^3bc - 12ab^3cd + 4b^4c^2d^2$.

6. $6z^2t^3 + 3zst^4 - 12z^2t^3$.

7. $z^2 - 49$.

8. $x^2 + 3x - 4$.

9. $p^2 + 4p + 3$.

10. $s^2 - 6s + 8$.

11. $16x^2 - 9$.

12. $x^2 + 2x - 24$.

13. $z^2 + 6z + 8$.

14. $4t^2 - 9s^2$.

15. $x^2 + 6x + 9$.

16. $y^2 - 15y + 50$.

17. $5x^2 + 25x + 30$.

18. $2x^2 + 7x - 15$.

19. $3x^2 - 3$.

20. $4y^2 - 8y + 3$.

21. $6y^2 + 13y + 2$.

22. $4x^2 - x - 3$.

23. $12s^3 + 10s^2 - 8s$.

24. $9z^2 + 30z + 25$.

25. $x^{2/3}y - 4x^{8/3}y^3$.

26. $9x^{4/7} - 1$.

27. $2x^3 + 2x^2 - 12x$.

28. $x^2y^2 - 4xy + 4$.

29. $(4x + 2)^2$.

30. $3s^2(3s - 9s^2)^2$.

31. $x^3y^2 - 4x^2y + 49x$.

32. $(3x^2 + x) + (6x + 2)$.

33. $(x^3 - 4x) + (8 - 2x^2)$.

34. $(x^2 - 1) + (x^2 - x - 2)$.

35. $(y^4 + 8y^3 + 16y^2) - (y^2 + 8y + 16)$.

36. $x^3y - 4xy + z^2x^2 - 4z^2$.

37. $x^3 + 8$.

38. $x^3 - 1$.

39. $x^6 - 1$.

40. $27 + 8x^3$.

41. $(x + 3)^3(x - 1) + (x + 3)^2(x - 1)^2$.

42. $(x + 5)^2(x + 1)^3 + (x + 5)^3(x + 1)^2$.

43. $P(1 + r) + P(1 + r)r$.

44. $(x - 3)(2x + 3) - (2x + 3)(x + 5)$.

45. $x^4 - 16$.

46. $81x^4 - y^4$.

47. $y^8 - 1$.

48. $t^4 - 4$.

49. $x^4 + x^2 - 2$.

50. $x^4 - 10x^2 + 9$.

51. $x^4y - 2x^2y + y$.

52. $4x^3 - 6x^2 - 4x$.

OBJETIVO Simplificar fracciones y sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. Racionalizar el denominador de una fracción.

0.8 Fracciones

Simplificación de fracciones

Por medio del principio fundamental de las fracciones (sección 0.4), podemos ser capaces de simplificar fracciones. Ese principio nos permite multiplicar o dividir el numerador y denominador de una fracción entre la misma cantidad diferente de cero. La fracción resultante será equivalente a la original. Las fracciones que consideremos se supone que tienen denominadores distintos de cero.

EJEMPLO 1 Simplificación de fracciones

a. *Simplifique* $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12}$.

Solución: primero factorizamos completamente el numerador y el denominador:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)}.$$

Dividiendo numerador y denominador entre el factor común $x - 3$, tenemos

$$\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{1(x+2)}{1(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}.$$

En general, sólo escribimos

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x-3)}}\,(x+2)}{\underset{1}{\cancel{(x-3)}}(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}$$

o

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}.$$

El proceso de eliminar el factor común, $x - 3$, por lo regular se conoce como "cancelación".

b. *Simplifique* $\dfrac{2x^2 + 6x - 8}{8 - 4x - 4x^2}$.

Solución:

$$\frac{2x^2 + 6x - 8}{8 - 4x - 4x^2} = \frac{2(x^2 + 3x - 4)}{4(2 - x - x^2)} = \frac{2(x-1)(x+4)}{4(1-x)(2+x)}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+4)}{2(2)[(-1)(x-1)](2+x)}$$

Observe como $1 - x$ se escribe como $(-1)(x - 1)$ para permitir la cancelación.

$$= \frac{x+4}{-2(2+x)} = -\frac{x+4}{2(x+2)}.$$

Multiplicación y división de fracciones

La regla para multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ es

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

EJEMPLO 2 Multiplicación de fracciones

a. $\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x-5} = \frac{x(x+3)}{(x+2)(x-5)}.$

b. $$\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x-3} \cdot \frac{6x^2-6}{x^2+2x-8} = \frac{[(x-2)^2][6(x+1)(x-1)]}{[(x+3)(x-1)][(x+4)(x-2)]}$$
$$= \frac{6(x-2)(x+1)}{(x+3)(x+4)}.$$

Para dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$, donde $c \neq 0$, tenemos

En resumen, invertimos el divisor y multiplicamos.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

EJEMPLO 3 División de fracciones

a. $\frac{x}{x+2} \div \frac{x+3}{x-5} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x-5}{x+3} = \frac{x(x-5)}{(x+2)(x+3)}.$

b. $$\frac{\frac{x-5}{x-3}}{2x} = \frac{\frac{x-5}{x-3}}{\frac{2x}{1}} = \frac{x-5}{x-3} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{x-5}{2x(x-3)}.$$

c. $$\frac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{2x^2+8x}{x-1}} = \frac{4x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{2x^2+8x} = \frac{4x(x-1)}{[(x+1)(x-1)][2x(x+4)]}$$
$$= \frac{2}{(x+1)(x+4)}.$$

Racionalización del denominador

Algunas veces el denominador de una fracción tiene dos términos e incluye raíces cuadradas, como $2 - \sqrt{3}$ o $\sqrt{5} + \sqrt{2}$. Entonces, el denominador puede racionalizarse al multiplicarlo por una expresión que lo convierta en una diferencia de dos cuadrados. Por ejemplo,

$$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

La racionalización del *numerador* es un procedimiento sencillo.

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}.$$

EJEMPLO 4 Racionalización de denominadores

a. $$\frac{x}{\sqrt{2}-6} = \frac{x}{\sqrt{2}-6} \cdot \frac{\sqrt{2}+6}{\sqrt{2}+6} = \frac{x(\sqrt{2}+6)}{(\sqrt{2})^2-6^2}$$

$$= \frac{x(\sqrt{2}+6)}{2-36} = -\frac{x(\sqrt{2}+6)}{34}.$$

b. $$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{5-2} = \frac{5-2\sqrt{5}\sqrt{2}+2}{3} = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}.$$

Suma y resta de fracciones

En el ejemplo 3b de la sección 0.3, se mostró que $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. Esto es, si sumamos dos fracciones que tienen un denominador común, entonces el resultado será una fracción cuyo denominador es el denominador común. El numerador será la suma de los numeradores de las fracciones originales. De modo semejante, $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

EJEMPLO 5 Suma y resta de fracciones

a. $$\frac{p^2-5}{p-2} + \frac{3p+2}{p-2} = \frac{(p^2-5)+(3p+2)}{p-2}$$

$$= \frac{p^2+3p-3}{p-2}.$$

b. $$\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3} - \frac{x^2+2x}{x^2+5x+6} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+3)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x-4}{x+3} - \frac{x}{x+3} = \frac{(x-4)-x}{x+3} = -\frac{4}{x+3}.$$

c. $$\frac{x^2+x-5}{x-7} - \frac{x^2-2}{x-7} + \frac{-4x+8}{x^2-9x+14}$$

$$= \frac{x^2+x-5}{x-7} - \frac{x^2-2}{x-7} + \frac{-4(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})(x-7)}$$

$$= \frac{(x^2 + x - 5) - (x^2 - 2) + (-4)}{x - 7}$$

$$= \frac{x - 7}{x - 7} = 1.$$

Para sumar (o restar) dos fracciones con denominadores diferentes, utilice el principio fundamental de las fracciones para reescribirlas como fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Después proceda con la suma (o resta) por el método descrito anteriormente.

Por ejemplo, para encontrar

$$\frac{2}{x^3(x - 3)} + \frac{3}{x(x - 3)^2},$$

podemos convertir la primera fracción en una fracción equivalente, multiplicando el numerador y el denominador por $x - 3$:

$$\frac{2(x - 3)}{x^3(x - 3)^2};$$

y convertir la segunda fracción multiplicando el numerador y el denominador por x^2:

$$\frac{3x^2}{x^3(x - 3)^2}.$$

Estas fracciones tienen el mismo denominador. De aquí que,

$$\frac{2}{x^3(x - 3)} + \frac{3}{x(x - 3)^2} = \frac{2(x - 3)}{x^3(x - 3)^2} + \frac{3x^2}{x^3(x - 3)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 2x - 6}{x^3(x - 3)^2}.$$

Podríamos haber convertido las fracciones originales en fracciones equivalentes con *cualquier* denominador común. Sin embargo, preferimos convertirlas en fracciones con el denominador $x^3(x - 3)^2$. Éste es el **mínimo común denominador (MCD)** de las fracciones $2/[x^3(x - 3)]$ y $3/[x(x - 3)^2]$.

En general, para encontrar el MCD de dos o más fracciones, primero se factoriza completamente cada denominador. *El MCD es el producto de cada uno de los distintos factores que aparecen en los denominadores, cada uno elevado a la potencia más grande a la que se presenta en alguno de los denominadores.*

EJEMPLO 6 Suma y resta de fracciones

a. *Reste:* $\dfrac{t}{3t + 2} - \dfrac{4}{t - 1}.$

Solución: el MCD es $(3t + 2)(t - 1)$. Por lo que tenemos

$$\frac{t}{(3t + 2)} - \frac{4}{t - 1} = \frac{t(t - 1)}{(3t + 2)(t - 1)} - \frac{4(3t + 2)}{(3t + 2)(t - 1)}$$

$$= \frac{t(t - 1) - 4(3t + 2)}{(3t + 2)(t - 1)}$$

$$= \frac{t^2 - t - 12t - 8}{(3t + 2)(t - 1)} = \frac{t^2 - 13t - 8}{(3t + 2)(t - 1)}.$$

b. *Sume:* $\dfrac{4}{q - 1} + 3.$

Solución: el MCD es $q - 1$.

$$\frac{4}{q - 1} + 3 = \frac{4}{q - 1} + \frac{3(q - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{4 + 3(q - 1)}{q - 1} = \frac{3q + 1}{q - 1}.$$

El ejemplo 8 muestra dos métodos para simplificar una fracción "compleja".

EJEMPLO 7 Resta de fracciones

$$\frac{x - 2}{x^2 + 6x + 9} - \frac{x + 2}{2(x^2 - 9)}$$

$$= \frac{x - 2}{(x + 3)^2} - \frac{x + 2}{2(x + 3)(x - 3)} \quad [\text{MCD} = 2(x + 3)^2(x - 3)]$$

$$= \frac{(x - 2)(2)(x - 3)}{(x + 3)^2(2)(x - 3)} - \frac{(x + 2)(x + 3)}{2(x + 3)(x - 3)(x + 3)}$$

$$= \frac{(x - 2)(2)(x - 3) - (x + 2)(x + 3)}{2(x + 3)^2(x - 3)}$$

$$= \frac{2(x^2 - 5x + 6) - (x^2 + 5x + 6)}{2(x + 3)^2(x - 3)}$$

$$= \frac{2x^2 - 10x + 12 - x^2 - 5x - 6}{2(x + 3)^2(x - 3)}$$

$$= \frac{x^2 - 15x + 6}{2(x + 3)^2(x - 3)}.$$

EJEMPLO 8 Operaciones combinadas con fracciones

Simplifique $\dfrac{\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}}{h}.$

Solución: primero combinamos las fracciones en el numerador y obtenemos

$$\frac{\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{\dfrac{x}{x(x + h)} - \dfrac{x + h}{x(x + h)}}{h} = \frac{\dfrac{x - (x + h)}{x(x + h)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

La fracción original también puede simplificarse multiplicando el numerador y el denominador por el MCD de las fracciones implicadas en el numerador (y denominador), a saber, $x(x+h)$:

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\left[\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right]x(x+h)}{h[x(x+h)]}$$

$$= \frac{x-(x+h)}{x(x+h)h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

Ejercicio 0.8

En los problemas del 1 al 6, simplifique.

1. $\frac{x^2-4}{x^2-2x}$.

2. $\frac{x^2-5x-6}{x^2-2x-3}$.

3. $\frac{x^2-9x+20}{x^2+x-20}$.

4. $\frac{3x^2-27x+24}{2x^3-16x^2+14x}$.

5. $\frac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$.

6. $\frac{12x^2-19x+4}{6x^2-17x+12}$.

En los problemas del 7 al 48 realice las operaciones y simplifique tanto como sea posible.

7. $\frac{y^2}{y-3} \cdot \frac{-1}{y+2}$.

8. $\frac{z^2-4}{z^2+2z} \cdot \frac{z^2}{z^2-4z+4}$.

9. $\frac{2x-3}{x-2} \cdot \frac{2-x}{2x+3}$.

10. $\frac{x^2-y^2}{x+y} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{y-x}$.

11. $\frac{2x-2}{x^2-2x-8} \div \frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$.

12. $\frac{x^2+2x}{3x^2-18x+24} \div \frac{x^2-x-6}{x^2-4x+4}$.

13. $\frac{\frac{x^2}{6}}{\frac{x}{3}}$.

14. $\frac{\frac{4x^3}{9x}}{\frac{x}{18}}$.

15. $\frac{\frac{2m}{n^2}}{\frac{6m}{n^3}}$.

16. $\frac{\frac{c+d}{c}}{\frac{c-d}{2c}}$.

17. $\frac{\frac{4x}{3}}{2x}$.

18. $\frac{4x}{\frac{3}{2x}}$.

19. $\frac{-9x^3}{\frac{x}{3}}$.

20. $\frac{\frac{-9x^3}{x}}{3}$.

21. $\frac{\frac{x-5}{x^2-7x+10}}{x-2}$.

22. $\frac{\frac{x^2+6x+9}{x}}{x+3}$.

23. $\frac{\frac{10x^3}{x^2-1}}{\frac{5x}{x+1}}$.

24. $\frac{\frac{x^2-x-6}{x^2-9}}{\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}}$.

25. $\frac{\frac{x^2+7x+10}{x^2-2x-8}}{\frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}}$.

26. $\frac{\frac{(x+2)^2}{3x-2}}{\frac{9x+18}{4-9x^2}}$.

27. $\frac{\frac{4x^2-9}{x^2+3x-4}}{\frac{2x-3}{1-x^2}}$.

28. $\frac{\frac{6x^2y+7xy-3y}{xy-x+5y-5}}{\frac{x^3y+4x^2y}{xy-x+4y-4}}$.

29. $\dfrac{x^2}{x+3} + \dfrac{5x+6}{x+3}$.

30. $\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{x}{x+2}$.

31. $\dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{3t}$.

32. $\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.

33. $1 - \dfrac{p^2}{p^2-1}$.

34. $\dfrac{4}{s+4} + s$.

35. $\dfrac{4}{2x-1} + \dfrac{x}{x+3}$.

36. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}$.

37. $\dfrac{1}{x^2-x-2} + \dfrac{1}{x^2-1}$.

38. $\dfrac{2}{3y^2-5y-2} - \dfrac{y}{3y^2-7y+2}$.

39. $\dfrac{4}{x-1} - 3 + \dfrac{-3x^2}{5-4x-x^2}$.

40. $\dfrac{2x-3}{2x^2+11x-6} - \dfrac{3x+1}{3x^2+16x-12} + \dfrac{1}{3x-2}$.

41. $(1+x^{-1})^2$.

42. $(x^{-1}+y^{-1})^2$.

43. $(x^{-1}-y)^{-1}$.

44. $(x-y^{-1})^2$.

45. $\dfrac{4+\dfrac{1}{x}}{3}$.

46. $\dfrac{\dfrac{x+3}{x}}{x-\dfrac{9}{x}}$.

47. $\dfrac{3-\dfrac{1}{2x}}{x+\dfrac{x}{x+2}}$.

48. $\dfrac{\dfrac{x-1}{x^2+5x+6} - \dfrac{1}{x+2}}{3+\dfrac{x-7}{3}}$.

En los problemas 49 y 50 realice las operaciones indicadas, pero no racionalice los denominadores.

49. $\dfrac{2}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

50. $\dfrac{v\sqrt{v}}{\sqrt{2+v}} + \dfrac{1}{\sqrt{v}}$.

En los problemas del 51 al 60 simplifique y exprese su respuesta de manera que no aparezcan radicales en el denominador.

51. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

52. $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$.

53. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$.

54. $\dfrac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$.

55. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

56. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

57. $\dfrac{1}{x+\sqrt{5}}$.

58. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{4}{\sqrt{x}-1}$.

59. $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}} - \dfrac{4}{1-\sqrt{2}}$.

60. $\dfrac{4}{\sqrt{x}+2} \cdot \dfrac{x^2}{3}$.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS CON NÚMERO IMPAR

EJERCICIO 0.6 (página 22)

1. $11x - 2y - 3$. **3.** $6t^2 - 2s^2 + 6$.
5. $2\sqrt{x} + \sqrt{2y} + \sqrt{3z}$.
7. $6x^2 - 9xy - 2z + \sqrt{2} - 4$.
9. $\sqrt{2y} - \sqrt{3z}$. **11.** $-15x + 15y - 27$.
13. $x^2 + 9y^2 + xy$. **15.** $6x^2 + 96$.
17. $-6x^2 - 18x - 18$. **19.** $x^2 + 9x + 20$.
21. $w^2 - 3w - 10$. **23.** $10x^2 + 19x + 6$.
25. $x^2 + 6x + 9$. **27.** $x^2 - 10x + 25$.
29. $2y + 6\sqrt{2y} + 9$. **31.** $4s^2 - 1$.
33. $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$.
35. $3x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 8x + 4$. **37.** $5x^3 + 5x^2 + 6x$.
39. $3x^2 + 2y^2 + 5xy + 2x - 8$.
41. $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$.
43. $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$. **45.** $z - 18$.
47. $3x^3 + 2x - \dfrac{1}{2x^2}$. **49.** $x + \dfrac{-1}{x+3}$.
51. $3x^2 - 8x + 17 + \dfrac{-37}{x+2}$. **53.** $t + 8 + \dfrac{64}{t-8}$.
55. $x - 2 + \dfrac{7}{3x+2}$.

EJERCICIO 0.7 (página 25)

1. $2(3x + 2)$. **3.** $5x(2y + z)$.
5. $4bc(2a^3 - 3ab^2d + b^3cd^2)$. **7.** $(z + 7)(z - 7)$.
9. $(p + 3)(p + 1)$. **11.** $(4x + 3)(4x - 3)$.
13. $(z + 4)(z + 2)$. **15.** $(x + 3)^2$.
17. $5(x + 3)(x + 2)$. **19.** $3(x - 1)(x + 1)$.
21. $(6y + 1)(y + 2)$. **23.** $2s(3s + 4)(2s - 1)$.
25. $x^{2/3}y(1 + 2xy)(1 - 2xy)$. **27.** $2x(x + 3)(x - 2)$.
29. $4(2x + 1)^2$. **31.** $x(xy - 7)^2$.
33. $(x - 2)^2(x + 2)$. **35.** $(y + 4)^2(y + 1)(y - 1)$.
37. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.
39. $(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$.
41. $2(x + 3)^2(x + 1)(x - 1)$. **43.** $P(1 + r)^2$.
45. $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$.
47. $(y^4 + 1)(y^2 + 1)(y + 1)(y - 1)$.
49. $(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$. **51.** $y(x + 1)^2(x - 1)^2$.

EJERCICIO 0.8 (página 31)

1. $\frac{x+2}{x}$. **3.** $\frac{x-5}{x+5}$. **5.** $\frac{3x+2}{x+2}$.

7. $-\frac{y^2}{(y-3)(y+2)}$. **9.** $\frac{3-2x}{3+2x}$.

11. $\frac{2(x+4)}{(x-4)(x+2)}$. **13.** $\frac{x}{2}$. **15.** $\frac{n}{3}$. **17.** $\frac{2}{3}$.

19. $-27x^2$. **21.** 1. **23.** $\frac{2x^2}{x-1}$. **25.** 1.

27. $-\frac{(2x+3)(1+x)}{x+4}$. **29.** $x+2$. **31.** $\frac{7}{3t}$.

33. $\frac{1}{1-p^2}$. **35.** $\frac{2x^2+3x+12}{(2x-1)(x+3)}$.

37. $\frac{2x-3}{(x-2)(x+1)(x-1)}$. **39.** $\frac{35-8x}{(x-1)(x+5)}$.

41. $\frac{x^2+2x+1}{x^2}$. **43.** $\frac{x}{1-xy}$. **45.** $\frac{4x+1}{3x}$.

47. $\frac{(x+2)(6x-1)}{2x^2(x+3)}$. **49.** $\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$.

51. $2-\sqrt{3}$. **53.** $-\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}$. **55.** $-4-2\sqrt{6}$.

57. $\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$. **59.** $4\sqrt{2}-5\sqrt{3}+14$.