0.1 Objetivo

Este capítulo está diseñado para ofrecer un repaso breve sobre algunos términos y métodos para la manipulación de las matemáticas. Sin duda usted ya estudió mucho de este material con anterioridad. Sin embargo, ya que estos temas son importantes para el manejo de las matemáticas que vienen después, tal vez resulte benéfica una rápida exposición de ellos. Destine el tiempo que sea necesario para las secciones en que necesita un repaso.

OBJETIVO Familiarizarse con conjuntos, la clasificación de los números reales y la recta de los números reales.

0.2 Conjuntos y números reales

En términos sencillos, un *conjunto* es una colección de objetos. Por ejemplo, podemos hablar del conjunto de números pares entre 5 y 11, es decir, 6, 8 y 10. Un objeto de un conjunto se conoce como *elemento* o *miembro* de ese conjunto.

Una manera de especificar un conjunto es hacer una lista de sus elementos, en cualquier orden, dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto anterior es $\{6, 8, 10\}$, que podemos denotar por medio de una letra, como A. Un conjunto A se dice que es un subconjunto de un conjunto B si y sólo si todo elemento de A también es un elemento de B. Por ejemplo, si $A = \{6, 8, 10\}$ y $B = \{6, 8, 10, 12\}$, entonces A es un subconjunto de B.

Ciertos conjuntos de números tienen nombres especiales. Los números 1, 2, 3, y así sucesivamente, forman el conjunto de los **enteros positivos** (o **números naturales**):

$$\textit{conjunto de enteros positivos} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Los tres puntos significan que el listado de elementos continúa sin fin, aun cuando se sabe cuáles son los elementos.

Los enteros positivos junto con el cero, y los **enteros negativos** $-1, -2, -3, \dots$, forman el conjunto de los **enteros:**

$$\textit{conjunto de enteros} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

La razón para que $q \neq 0$, es que no podemos dividir entre cero.

Todo entero es un número racional.

El conjunto de los **números racionales** consiste en números como $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{3}$, que pueden escribirse como una razón (cociente) de dos enteros. Esto es, un número racional es aquél que puede escribirse como p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. (el símbolo "$\neq$" se lee "no es igual a" o "diferente de".) Por ejemplo, los números $\frac{19}{20}$, $\frac{-2}{7}$ y $\frac{-6}{-2}$ son racionales. Observemos que $\frac{2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{-4}{-8}$ y 0.5 representan todos al mismo número racional. El entero 2 es racional ya que $2 = \frac{2}{1}$. De hecho, todo entero es racional.

Todos los números racionales pueden representarse por números decimales que *terminan*, como $\frac{3}{4} = 0.75$ y $\frac{3}{2} = 1.5$, o bien por *decimales repetidos que no terminan* (un grupo de dígitos que se repiten sin fin), como $\frac{2}{3} = 0.666\dots$, $\frac{-4}{11} = -0.3636\dots$ y $\frac{2}{15} = 0.1333\dots$ Los números que se representan por decimales *no repetidos que no terminan* se conocen como **números irracionales.** Un número irracional no puede escribirse como un entero dividido entre un entero. Los números π (pi) y $\sqrt{2}$ son irracionales.

Los números reales consisten en todos los números decimales.

Juntos, los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de los **números reales.** Los números reales pueden representarse por puntos en una recta. Primero seleccionamos un punto en la recta para representar al cero. Este punto es llamado *origen* (véase la fig. 0.1). Después se elige una medida estándar de distancia, "unidad de distancia", y se marca sucesivamente en ambas direcciones a la derecha y a la izquierda del origen. Con cada punto sobre la recta asociamos una distancia dirigida, o *número con signo,* que depende de la posición del punto con respecto al origen. Las posiciones a la derecha del origen se consideran positivas (+) y las de la izquierda negativas (−). Por ejemplo, al punto ubicado a $\frac{1}{2}$ de unidad a la derecha del

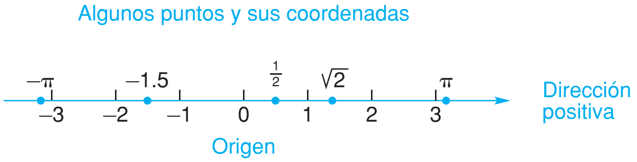

FIGURA 0.1 La recta de los números reales.

origen, le corresponde el número $\frac{1}{2}$, que se denomina **coordenada** de ese punto. En forma similar, la coordenada del punto situado a 1.5 unidades a la izquierda del origen es -1.5. En la figura 0.1 están marcadas las coordenadas de algunos puntos. La punta de la flecha indica que la dirección hacia la derecha a lo largo de la recta es positiva.

A cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un punto único de la recta. Por esta razón decimos que hay una *correspondencia uno a uno* entre los puntos de la recta y los números reales. Llamamos a esta recta la **recta de coordenadas** o **recta de números reales.** Tenemos la libertad para tratar a los números reales como puntos sobre dicha recta y viceversa.

Ejercicio 0.2

En los problemas del 1 al 12, clasifique los enunciados como verdaderos o falsos. Si es falso, dé una razón.

1. -7 es un entero.

2. $\frac{1}{6}$ es racional.

3. -3 es un número natural.

4. 0 no es racional.

5. 5 es racional.

6. $\frac{7}{0}$ es un número racional.

7. $\sqrt{25}$ no es un entero positivo.

8. π es un número real.

9. $\frac{0}{6}$ es racional.

10. $\sqrt{3}$ es un número natural.

11. -3 está a la derecha de -4 en la recta de los números reales.

12. Todo entero es positivo o negativo.

OBJETIVO Establecer e ilustrar las propiedades siguientes de los números reales: transitiva, conmutativa, asociativa, inversa y distributiva. Definir la resta y la división en términos de la suma y la multiplicación, respectivamente.

0.3 ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Ahora establezcamos algunas propiedades importantes de los números reales. Sean a, b y c números reales.

1. Propiedad transitiva de la igualdad

Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Por tanto, dos números que sean iguales a un tercer número son iguales entre sí. Por ejemplo, si $x = y$ y $y = 7$, entonces $x = 7$.

2. Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad ab = ba.$$

Esto significa que dos números pueden sumarse o multiplicarse en cualquier orden. Por ejemplo, $3 + 4 = 4 + 3$ y $7(-4) = (-4)(7)$.

3. Propiedad asociativa de la suma y de la multiplicación

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a(bc) = (ab)c.$$

Esto significa que en la suma o multiplicación, los números pueden agruparse en cualquier orden. Por ejemplo, $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$; en ambos casos la suma es 9. En forma semejante, $2x + (x + y) = (2x + x) + y$ y $6(\frac{1}{3} \cdot 5) = (6 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 5$.

4. Propiedades del inverso

Para cada número real a, existe un único número real denotado por $-a$ tal que,

$$a + (-a) = 0.$$

El número $-a$ es llamado el **inverso aditivo** o **negativo** de a.

Por ejemplo, ya que $6 + (-6) = 0$, el inverso aditivo de 6 es -6. El inverso aditivo de un número no necesariamente es un número negativo. Por ejemplo, el inverso aditivo de -6 es 6, ya que $(-6) + (6) = 0$. Esto es, el negativo de -6 es 6, de modo que podemos escribir $-(-6) = 6$.

Para cada número real a, excepto el cero, existe un único número real denotado por a^{-1} tal que,

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

El número a^{-1} se conoce como el **inverso multiplicativo** de a.

El cero no tiene inverso multiplicativo, ya que no existe número que cuando se multiplica por cero dé como resultado 1.

Por tanto, todos los números, con excepción del cero, tienen un inverso multiplicativo. Como se recordará, a^{-1} puede escribirse como $\frac{1}{a}$ y también se llama el *recíproco* de a. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de 3 es $\frac{1}{3}$, ya que $3(\frac{1}{3}) = 1$. Por lo que $\frac{1}{3}$ es el recíproco de 3. El recíproco de $\frac{1}{3}$ es 3, ya que $(\frac{1}{3})(3) = 1$. **El recíproco de 0 no está definido.**

5. Propiedades distributivas

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (b + c)a = ba + ca.$$

Por ejemplo, aunque $2(3 + 4) = 2(7) = 14$, podemos escribir

$$2(3 + 4) = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14.$$

En la misma forma,

$$(2 + 3)(4) = 2(4) + 3(4) = 8 + 12 = 20,$$

$$\text{y } x(z + 4) = x(z) + x(4) = xz + 4x.$$

La propiedad distributiva puede ser extendida a la forma

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

De hecho, puede ser extendida para sumas con cualquier número de términos.

La **resta** se define en términos de la suma:

$$a - b \text{ significa } a + (-b),$$

en donde $-b$ es el inverso aditivo de b. Así, $6 - 8$ significa $6 + (-8)$.

En forma semejante, definimos la **división** en términos de la multiplicación. Si $b \neq 0$, entonces $a \div b$, o $\frac{a}{b}$, está definida por

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}).$$

Como $b^{-1} = \frac{1}{b}$,

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}) = a\left(\frac{1}{b}\right).$$

$\frac{a}{b}$ significa a veces el recíproco de b.

Así, $\frac{3}{5}$ significa 3 veces $\frac{1}{5}$, en donde $\frac{1}{5}$ es el inverso multiplicativo de 5. Algunas veces nos referimos a $a \div b$ o $\frac{a}{b}$ como la *razón* de a a b. Observemos que como 0 no tiene inverso multiplicativo, **la división entre 0 no está definida.**

Los ejemplos siguientes muestran algunas aplicaciones de las propiedades anteriores.

EJEMPLO 1 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. $x(y - 3z + 2w) = (y - 3z + 2w)x$, por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

b. Por la propiedad asociativa de la multiplicación, $3(4 \cdot 5) = (3 \cdot 4)5$. Por tanto, el resultado de multiplicar 3 por el producto de 4 y 5 es el mismo que el de multiplicar el producto de 3 y 4 por 5. En cualquier caso el resultado es 60.

EJEMPLO 2 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. *Demostrar que* $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$.

Solución: por la definición de resta, $2 - \sqrt{2} = 2 + (-\sqrt{2})$. Sin embargo, por la propiedad conmutativa de la suma, $2 + (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 2$. Así, por la propiedad transitiva, $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$. De manera más concisa, omitimos pasos intermedios y escribimos directamente

$$2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2.$$

b. *Demostrar que* $(8 + x) - y = 8 + (x - y)$.

Solución: al empezar con el lado izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned}(8 + x) - y &= (8 + x) + (-y) && \text{(definición de la resta)}\\ &= 8 + [x + (-y)] && \text{(propiedad asociativa)}\\ &= 8 + (x - y) && \text{(definición de la resta).}\end{aligned}$$

Por lo que, por la propiedad transitiva,

$$(8 + x) - y = 8 + (x - y).$$

c. *Demostrar que* $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$.

Solución: por la propiedad distributiva,

$$3(4x + 2y + 8) = 3(4x) + 3(2y) + 3(8).$$

Pero por la propiedad asociativa de la multiplicación,

$$3(4x) = (3 \cdot 4)x = 12x \quad \text{y de manera similar} \quad 3(2y) = 6y.$$

Por tanto, $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$.

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. *Demostrar que* $\dfrac{ab}{c} = a\left(\dfrac{b}{c}\right)$ *para* $c \neq 0$.

Solución: por la definición de división,

$$\frac{ab}{c} = (ab) \cdot \frac{1}{c} \text{ para } c \neq 0.$$

Pero por la propiedad asociativa,

$$(ab) \cdot \frac{1}{c} = a\left(b \cdot \frac{1}{c}\right).$$

Sin embargo, por la definición de la división, $b \cdot \dfrac{1}{c} = \dfrac{b}{c}$. Por tanto,

$$\frac{ab}{c} = a\left(\frac{b}{c}\right).$$

También podemos demostrar que $\dfrac{ab}{c} = \left(\dfrac{a}{c}\right)b$.

b. *Demostrar que* $\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$ *para* $c \neq 0$.

Solución: por la definición de la división y la propiedad distributiva,

$$\frac{a + b}{c} = (a + b)\frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c}.$$

Sin embargo,

$$a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

De aquí que,

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Observamos que $\dfrac{a}{b + c} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$. Por ejemplo,

$$\frac{3}{2+1} \neq \frac{3}{2} + \frac{3}{1}.$$

La única forma para determinar el producto de varios números es considerar los productos de los números tomados de 2 en 2. Por ejemplo, para encontrar el producto de x, y y z podríamos multiplicar primero x por y y después multiplicar el producto resultante por z, esto es, encontrar $(xy)z$. O, de manera alterna, multiplicar x por el producto de y y z, esto es, encontrar $x(yz)$. La propiedad asociativa de la multiplicación garantiza que ambos resultados sean idénticos, sin importar cómo se agrupen los números. Por tanto, no es ambiguo escribir xyz. Este concepto puede ampliarse a más de tres números y se aplica de la misma manera a la suma.

Es importante hacer un comentario final antes de terminar esta sección. No sólo debe tener cuidado al aplicar las propiedades de los números reales, también debe conocer y familiarizarse con la terminología involucrada.

Ejercicio 0.3

En los problemas del 1 al 10, clasifique los enunciados como verdaderos o falsos.

1. Todo número real tiene un recíproco.

2. El recíproco de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$.

3. El inverso aditivo de 5 es $\frac{1}{5}$.

4. $2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3)(2 \cdot 4)$.

5. $-x + y = -y + x$.

6. $(x + 2)(4) = 4x + 8$.

7. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{x}{2} + 1$.

8. $3\left(\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{3x}{4}$.

9. $x + (y + 5) = (x + y) + (x + 5)$.

10. $8(9x) = 72x$.

En los problemas del 11 al 20, establezca cuál propiedad de los números reales se usa.

11. $2(x + y) = 2x + 2y$.

12. $(x + 5) + y = y + (x + 5)$.

13. $2(3y) = (2 \cdot 3)y$.

14. $\frac{6}{7} = 6 \cdot \frac{1}{7}$.

15. $2(x - y) = (x - y)(2)$.

16. $y + (x + y) = (y + x) + y$.

17. $8 - y = 8 + (-y)$.

18. $5(4 + 7) = 5(7 + 4)$.

19. $(8 + a)b = 8b + ab$.

20. $(-1)[-3 + 4] = (-1)(-3) + (-1)(4)$.

En los problemas del 21 al 26, demuestre que los enunciados son verdaderos, para ello utilice las propiedades de los números reales.

21. $5a(x + 3) = 5ax + 15a$.

22. $(2 - x) + y = 2 + (y - x)$.

23. $(x + y)(2) = 2x + 2y$.

24. $2[27 + (x + y)] = 2[(y + 27) + x]$.

25. $x[(2y + 1) + 3] = 2xy + 4x$.

26. $(x + 1)(y + z) = xy + xz + y + z$.

27. Demuestre que $a(b + c + d) = ab + ac + ad$. [*Sugerencia:* $b + c + d = (b + c) + d$.]

OBJETIVO Enlistar e ilustrar las propiedades más comunes de los números reales.

0.4 Operaciones con números reales

La lista siguiente establece las propiedades importantes de los números reales que usted debe estudiar a fondo. El ser capaz de manejar los números reales es esencial para tener éxito en matemáticas. A cada propiedad le sigue un ejemplo numérico. Todos los denominadores son diferentes de cero. Se supone que usted cuenta con un conocimiento previo de suma y resta de números reales.

	Propiedad	*Ejemplo(s)*
1.	$a - b = a + (-b)$.	$2 - 7 = 2 + (-7) = -5$.
2.	$a - (-b) = a + b$.	$2 - (-7) = 2 + 7 = 9$.
3.	$-a = (-1)(a)$.	$-7 = (-1)(7)$.
4.	$a(b + c) = ab + ac$.	$6(7 + 2) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 2 = 54$.
5.	$a(b - c) = ab - ac$.	$6(7 - 2) = 6 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 30$.
6.	$-(a + b) = -a - b$.	$-(7 + 2) = -7 - 2 = -9$.
7.	$-(a - b) = -a + b$.	$-(2 - 7) = -2 + 7 = 5$.
8.	$-(-a) = a$.	$-(-2) = 2$.
9.	$a(0) = 0$.	$2(0) = 0$.
10.	$(-a)(b) = -(ab) = a(-b)$.	$(-2)(7) = -(2 \cdot 7) = 2(-7) = -14$.
11.	$(-a)(-b) = ab$.	$(-2)(-7) = 2 \cdot 7 = 14$.
12.	$\frac{a}{1} = a$.	$\frac{7}{1} = 7, \frac{-2}{1} = -2$.
13.	$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$.	$\frac{2}{7} = 2\left(\frac{1}{7}\right)$.
14.	$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$.	$\frac{2}{-7} = -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7}$.
15.	$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.	$\frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$.
16.	$\frac{0}{a} = 0$ cuando $a \neq 0$.	$\frac{0}{7} = 0$.
17.	$\frac{a}{a} = 1$ cuando $a \neq 0$.	$\frac{2}{2} = 1, \frac{-5}{-5} = 1$.
18.	$a\left(\frac{b}{a}\right) = b$.	$2\left(\frac{7}{2}\right) = 7$.
19.	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ cuando $a \neq 0$.	$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.
20.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$.
21.	$\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)b = a\left(\frac{b}{c}\right)$.	$\frac{2 \cdot 7}{3} = \frac{2}{3} \cdot 7 = 2 \cdot \frac{7}{3}$.
22.	$\frac{a}{bc} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{a}{c}\right)$.	$\frac{2}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}$.
23.	$\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{c}\right) = \frac{ac}{bc}$ cuando $c \neq 0$.	$\frac{2}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5}$.
24.	$\frac{a}{b(-c)} = \frac{a}{(-b)(c)} = \frac{-a}{bc} = \frac{-a}{(-b)(-c)} = -\frac{a}{bc}$.	$\frac{2}{3(-5)} = \frac{2}{(-3)(5)} = \frac{-2}{3(5)} = \frac{-2}{(-3)(-5)} = -\frac{2}{3(5)} = -\frac{2}{15}$.

	Propiedad	*Ejemplo(s)*
25.	$\frac{a(-b)}{c} = \frac{(-a)b}{c} = \frac{ab}{-c} = \frac{(-a)(-b)}{-c} = -\frac{ab}{c}.$	$\frac{2(-3)}{5} = \frac{(-2)(3)}{5} = \frac{2(3)}{-5} = \frac{(-2)(-3)}{-5} = -\frac{2(3)}{5} = -\frac{6}{5}.$
26.	$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$	$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{2+3}{9} = \frac{5}{9}.$
27.	$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$	$\frac{2}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2-3}{9} = \frac{-1}{9}.$
28.	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$	$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{22}{15}.$
29.	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$	$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}.$
30.	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$
31.	$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$	$\frac{2}{\frac{3}{5}} = 2 \div \frac{3}{5} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}.$
32.	$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}.$	$\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}.$

La propiedad 23 es esencialmente el **principio fundamental de las fracciones,** el cual establece que *multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número, excepto el cero, tiene como resultado una fracción equivalente a* (*esto es, que tiene el mismo valor que*) *la fracción original*. Así,

$$\frac{7}{\frac{1}{8}} = \frac{7 \cdot 8}{\frac{1}{8} \cdot 8} = \frac{56}{1} = 56.$$

Por las propiedades 28 y 23 tenemos

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 \cdot 15 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 15} = \frac{50}{75} = \frac{2 \cdot 25}{3 \cdot 25} = \frac{2}{3}.$$

También podemos resolver este problema convirtiendo $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$ en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y después utilizar la propiedad 26. Las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$, pueden escribirse con un denominador común de $5 \cdot 15$,

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 15}{5 \cdot 15} \text{ y } \frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 5}.$$

Sin embargo, 15 es el *menor* de dichos denominadores comunes, el cual se conoce como el *mínimo común denominador* (MCD) de $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$. Por tanto,

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6+4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}-\frac{5}{12}&=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2} \qquad (\text{MCD}=24)\\ &=\frac{9}{24}-\frac{10}{24}=\frac{9-10}{24}\\ &=-\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Ejercicio 0.4

Simplifique, si es posible, cada una de las siguientes expresiones.

1. $-2+(-4)$. **2.** $-6+2$. **3.** $6+(-4)$. **4.** $7-2$.

5. $7-(-4)$. **6.** $-6-(-11)$. **7.** $-8-(-6)$. **8.** $(-2)(9)$.

9. $7(-9)$. **10.** $(-2)(-12)$. **11.** $(-1)6$. **12.** $-(-9)$.

13. $-(-6+x)$. **14.** $-7(x)$. **15.** $-12(x-y)$. **16.** $-[-6+(-y)]$.

17. $-3\div 15$. **18.** $-2\div(-4)$. **19.** $4\div(-2)$. **20.** $2(-6+2)$.

21. $3[-2(3)+6(2)]$. **22.** $(-2)(-4)(-1)$. **23.** $(-8)(-8)$. **24.** $x(0)$.

25. $3(x-4)$. **26.** $4(5+x)$. **27.** $-(x-2)$. **28.** $0(-x)$.

29. $8\left(\frac{1}{11}\right)$. **30.** $\frac{7}{1}$. **31.** $\frac{-5x}{7y}$. **32.** $\frac{3}{-2x}$.

33. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$. **34.** $\frac{a}{c}(3b)$. **35.** $(2x)\left(\frac{3}{2x}\right)$. **36.** $\frac{-18y}{-3x}$.

37. $\frac{7}{y}\cdot\frac{1}{x}$. **38.** $\frac{2}{x}\cdot\frac{5}{y}$. **39.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. **40.** $\frac{5}{12}+\frac{3}{4}$.

41. $\frac{3}{10}-\frac{7}{15}$. **42.** $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}$. **43.** $\frac{x}{9}-\frac{y}{9}$. **44.** $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$.

45. $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}$. **46.** $\dfrac{6}{\frac{x}{y}}$. **47.** $\dfrac{\frac{k}{9}}{n}$. **48.** $\dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{7}{10}}$.

49. $\frac{7}{0}$. **50.** $\frac{0}{7}$. **51.** $\frac{0}{0}$. **52.** $0\cdot 0$.

OBJETIVO Revisar los exponentes enteros positivos, el exponente cero, los exponentes enteros negativos, los exponentes racionales, las raíces principales, los radicales y el procedimiento de racionalización del denominador.

0.5 EXPONENTES Y RADICALES

El producto de $x\cdot x\cdot x$ se abrevia x^3. En general, para un entero positivo n, x^n es la abreviatura del producto de n factores, cada uno de los cuales es x. La letra n en x^n se denomina *exponente* y a x se le llama *base*. Específicamente, si n es un entero positivo tenemos:

1. $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ factores}}$.

2. $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}=\dfrac{1}{\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ factores}}}$.

3. $\dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$.

4. $x^0 = 1$ si $x \neq 0$. 0^0 no está definido.

EJEMPLO 1 **Exponentes**

a. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{16}$.

b. $3^{-5} = \dfrac{1}{3^5} = \dfrac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \dfrac{1}{243}$.

c. $\dfrac{1}{3^{-5}} = 3^5 = 243$.

d. $2^0 = 1$, $\pi^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$.

e. $x^1 = x$.

Si $r^n = x$, donde n es un entero positivo, entonces r es una *raíz* n*-ésima* de x. Por ejemplo, $3^2 = 9$ y así 3 es una raíz segunda de 9 (por lo común llamada una *raíz cuadrada*) de 9. Como $(-3)^2 = 9$, -3 también es una raíz cuadrada de 9. De modo similar, -2 es una *raíz cúbica* de -8, ya que $(-2)^3 = -8$.

Algunos números no tienen una raíz n-ésima que sea un número real. Por ejemplo, como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, no existe número real que sea una raíz cuadrada de -4.

La **raíz *n*-ésima principal** de x es la raíz n-ésima de x que sea positiva si x es positiva, y es la raíz n-ésima negativa si x es negativa y n es impar. Esta raíz la denotamos mediante $\sqrt[n]{x}$. Así,

$$\sqrt[n]{x} \text{ es } \begin{cases} \text{positiva si } x \text{ es positiva,} \\ \text{negativa si } x \text{ es negativa y } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por ejemplo, $\sqrt[2]{9} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$. Definimos $\sqrt[n]{0} = 0$.

El símbolo $\sqrt[n]{x}$ se denomina **radical,** Aquí n es el *índice*, x es el *radicando* y $\sqrt{}$ es el *signo radical*. Con las raíces cuadradas principales, por lo regular omitimos el índice y escribimos $\sqrt{x}$ en lugar de $\sqrt[2]{x}$. Por tanto, $\sqrt{9} = 3$.

Advertencia Aunque 2 y -2 son raíces cuadradas de 4, la raíz cuadrada **principal** de 4 es 2, no -2. Por lo que, $\sqrt{4} = 2$.

Si x es positiva, la expresión $x^{p/q}$, en donde p y q son enteros y q es positiva, se define como $\sqrt[q]{x^p}$. Por lo que,

$$x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}; \quad 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4;$$

$$4^{-1/2} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}.$$

A continuación se presentan las leyes básicas de los exponentes y radicales:[1]

Ley	*Ejemplo(s)*
1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.	$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256;\ x^2 \cdot x^3 = x^5$.
2. $x^0 = 1$ si $x \neq 0$.	$2^0 = 1$.
3. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.	$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.
4. $\dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$.	$\dfrac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8;\ \dfrac{1}{x^{-5}} = x^5$.
5. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$.	$\dfrac{2^{12}}{2^8} = 2^4 = 16;\ \dfrac{x^8}{x^{12}} = \dfrac{1}{x^4}$.
6. $\dfrac{x^m}{x^m} = 1$.	$\dfrac{2^4}{2^4} = 1$.
7. $(x^m)^n = x^{mn}$.	$(2^3)^5 = 2^{15};\ (x^2)^3 = x^6$.
8. $(xy)^n = x^n y^n$.	$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 512$.
9. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3};\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{1^5}{3^5} = \dfrac{1}{3^5} = 3^{-5}$.
10. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$.	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.
11. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.	$3^{1/5} = \sqrt[5]{3}$.
12. $x^{-1/n} = \dfrac{1}{x^{1/n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$.	$4^{-1/2} = \dfrac{1}{4^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$.
13. $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.	$\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{18}$.
14. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$.	$\dfrac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{90}{10}} = \sqrt[3]{9}$.
15. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$.
16. $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.	$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.
17. $(\sqrt[m]{x})^m = x$.	$(\sqrt[8]{7})^8 = 7$.

Cuando calculamos $x^{m/n}$, con frecuencia es más fácil determinar primero $\sqrt[n]{x}$ y luego elevar el resultado a la potencia m-ésima. Así, $(-27)^{4/3} = (\sqrt[3]{-27})^4 = (-3)^4 = 81$.

EJEMPLO 2 Exponentes y radicales

a. Por la ley 1,

$$x^6x^8 = x^{6+8} = x^{14},$$

$$a^3b^2a^5b = a^3a^5b^2b^1 = a^8b^3,$$

$$x^{11}x^{-5} = x^{11-5} = x^6,$$

$$z^{2/5}z^{3/5} = z^1 = z,$$

$$xx^{1/2} = x^1x^{1/2} = x^{3/2}.$$

[1]Aunque algunas leyes incluyen restricciones, éstas no son vitales para nuestro estudio.

b. Por la ley 16,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

c. $$\left(-\frac{8}{27}\right)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}\right)^4 \qquad \text{(Leyes 16 y 14)}$$

$$= \left(\frac{-2}{3}\right)^4$$

$$= \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81} \qquad \text{(Ley 9)}$$

d. $$(64a^3)^{2/3} = 64^{2/3}(a^3)^{2/3} \qquad \text{(Ley 8)}$$

$$= (\sqrt[3]{64})^2 a^2 \qquad \text{(Leyes 16 y 7)}$$

$$= (4)^2 a^2 = 16a^2.$$

La *racionalización del denominador* de una fracción es un procedimiento en el que una fracción que tiene un radical en su denominador se expresa como una fracción equivalente sin radical en su denominador. Para hacer esto utilizamos el principio fundamental de las fracciones, como lo muestra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Racionalización de denominadores

a. $$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5^{1/2}} = \frac{2\cdot 5^{1/2}}{5^{1/2}\cdot 5^{1/2}} = \frac{2\cdot 5^{1/2}}{5^1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

b. $$\frac{2}{\sqrt[6]{3x^5}} = \frac{2}{\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{x^5}} = \frac{2}{3^{1/6}x^{5/6}} = \frac{2\cdot 3^{5/6}x^{1/6}}{3^{1/6}x^{5/6}\cdot 3^{5/6}x^{1/6}}$$

$$= \frac{2(3^5x)^{1/6}}{3x} = \frac{2\sqrt[6]{3^5x}}{3x}.$$

Los ejemplos siguientes ilustran varias aplicaciones de las leyes de los exponentes y radicales.

EJEMPLO 4 Exponentes

a. *Elimine los exponentes negativos en* $\dfrac{x^{-2}y^3}{z^{-2}}$.

Solución:

$$\frac{x^{-2}y^3}{z^{-2}} = x^{-2}\cdot y^3\cdot\frac{1}{z^{-2}} = \frac{1}{x^2}\cdot y^3\cdot z^2 = \frac{y^3z^2}{x^2}.$$

Al comparar nuestra respuesta con la expresión original, concluimos que podemos llevar un factor del numerador al denominador, y viceversa, cambiando el signo del exponente.

b. *Simplifique* $\dfrac{x^2y^7}{x^3y^5}$.

Solución:

$$\frac{x^2y^7}{x^3y^5} = \frac{y^{7-5}}{x^{3-2}} = \frac{y^2}{x}.$$

c. *Simplifique* $(x^5y^8)^5$.

Solución:

$$(x^5y^8)^5 = (x^5)^5(y^8)^5 = x^{25}y^{40}.$$

d. *Simplifique* $(x^{5/9}y^{4/3})^{18}$.

Solución:

$$(x^{5/9}y^{4/3})^{18} = (x^{5/9})^{18}(y^{4/3})^{18} = x^{10}y^{24}.$$

e. *Simplifique* $\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5$.

Solución:

$$\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5 = \frac{(x^{1/5}y^{6/5})^5}{(z^{2/5})^5} = \frac{xy^6}{z^2}.$$

f. *Simplifique* $\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5}$.

Solución:

$$\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5} = \frac{x^3}{y^2} \cdot \frac{y^5}{x^6} = \frac{y^3}{x^3}.$$

EJEMPLO 5 Exponentes

a. *Elimine los exponentes negativos de* $x^{-1} + y^{-1}$ *y simplifique.*

Solución:

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy}.$$

$$\left(Nota\text{: } x^{-1} + y^{-1} \neq \frac{1}{x + y}.\right)$$

b. *Simplifique* $x^{3/2} - x^{1/2}$ *usando la ley distributiva.*

Solución:

$$x^{3/2} - x^{1/2} = x^{1/2}(x - 1).$$

c. *Elimine los exponentes negativos en* $7x^{-2} + (7x)^{-2}$.

Solución:

$$7x^{-2} + (7x)^{-2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(7x)^2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{49x^2}.$$

d. *Elimine los exponentes negativos en* $(x^{-1} - y^{-1})^{-2}$.

Solución:

$$(x^{-1} - y^{-1})^{-2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y - x}{xy}\right)^{-2}$$
$$= \left(\frac{xy}{y - x}\right)^{2} = \frac{x^2y^2}{(y - x)^2}.$$

e. *Aplique la ley distributiva a* $x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5})$.

Solución:

$$x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5}) = x^{2/5}y^{1/2} + 2x^{8/5}.$$

EJEMPLO 6 Radicales

a. *Simplifique* $\sqrt[4]{48}$.

Solución:

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}.$$

b. *Reescriba* $\sqrt{2 + 5x}$ *sin utilizar el signo de radical.*

Solución:

$$\sqrt{2 + 5x} = (2 + 5x)^{1/2}.$$

c. *Racionalice el denominador de* $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}}$ *y simplifique.*

Solución:

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{2^{1/5} \cdot 6^{2/3}}{6^{1/3} \cdot 6^{2/3}} = \frac{2^{3/15}6^{10/15}}{6} = \frac{(2^3 6^{10})^{1/15}}{6} = \frac{\sqrt[15]{2^3 6^{10}}}{6}.$$

d. *Simplifique* $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$.

Solución:

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2.$$

EJEMPLO 7 Radicales

a. *Simplifique* $\sqrt[3]{x^6y^4}$.

Solución:

$$\sqrt[3]{x^6y^4} = \sqrt[3]{(x^2)^3y^3y} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y}$$
$$= x^2y\sqrt[3]{y} \qquad \text{(Ley 17).}$$

b. *Simplifique* $\sqrt{\frac{2}{7}}$.

Solución:

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

c. *Simplifique* $\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2} &= \sqrt{25 \cdot 10} - \sqrt{25 \cdot 2} + 15\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{10} - 5\sqrt{2} + 15\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{10} + 10\sqrt{2}. \end{aligned}$$

d. *Si x es cualquier número real, simplifique* $\sqrt{x^2}$.

Nota: $\sqrt{x^2} \neq x$.

Solución:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es positivo,} \\ -x, & \text{si } x \text{ es negativo,} \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Por tanto, $\sqrt{2^2} = 2$ y $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$.

Ejercicio 0.5

En los problemas del 1 al 14, simplifique y exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos.

1. $(2^3)(2^2)$.
2. x^6x^9.
3. w^4w^8.
4. $x^6x^4x^3$.
5. $\frac{x^2x^6}{y^7y^{10}}$.
6. $(x^{12})^4$.
7. $\frac{(a^3)^7}{(b^4)^5}$.
8. $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^5$.
9. $(2x^2y^3)^3$.
10. $\left(\frac{w^2s^3}{y^2}\right)^2$.
11. $\frac{x^8}{x^2}$.
12. $\left(\frac{3m^3}{9n^2}\right)^5$.
13. $\frac{(x^3)^6}{x(x^3)}$.
14. $\frac{(x^2)^3(x^3)^2}{(x^3)^4}$.

En los problemas del 15 al 28, evalúe las expresiones.

15. $\sqrt{25}$.
16. $\sqrt[3]{64}$.
17. $\sqrt[5]{-32}$.
18. $\sqrt{0.04}$.
19. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.
20. $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$.
21. $(49)^{1/2}$.
22. $(64)^{1/3}$.
23. $4^{3/2}$.
24. $(25)^{-3/2}$.
25. $(32)^{-2/5}$.
26. $(0.09)^{-1/2}$.
27. $\left(\frac{1}{32}\right)^{4/5}$.
28. $\left(-\frac{27}{64}\right)^{2/3}$.

En los problemas del 29 al 40, simplifique las expresiones.

29. $\sqrt{32}$. **30.** $\sqrt[3]{54}$. **31.** $\sqrt[3]{2x^3}$.

32. $\sqrt{4x}$. **33.** $\sqrt{16x^4}$. **34.** $\sqrt[4]{\dfrac{x}{16}}$.

35. $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt[3]{128}$. **36.** $\sqrt{\frac{5}{11}}$. **37.** $(9z^4)^{1/2}$.

38. $(16y^8)^{3/4}$. **39.** $\left(\dfrac{27t^3}{8}\right)^{2/3}$. **40.** $\left(\dfrac{625}{a^8}\right)^{-3/4}$.

En los problemas del 41 al 52, escriba las expresiones sólo en términos de exponentes positivos. Evite todos los radicales en la forma final. Por ejemplo:

$$y^{-1}\sqrt{x} = \frac{x^{1/2}}{y}.$$

41. $\dfrac{x^3y^{-2}}{z^2}$. **42.** $\sqrt[5]{x^2y^3z^{-10}}$. **43.** $5m^{-2}m^{-7}$. **44.** $x + y^{-1}$.

45. $(3t)^{-2}$. **46.** $(3 - z)^{-4}$. **47.** $\sqrt[3]{7s^2}$. **48.** $(x^{-2}y^2)^{-2}$.

49. $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. **50.** $\dfrac{u^{-2}v^{-6}w^3}{vw^{-5}}$. **51.** $x^2\sqrt[4]{xy^{-2}z^3}$. **52.** $(\sqrt[5]{xy^{-3}})x^{-1}y^{-2}$.

En los problemas del 53 al 58, escriba las formas exponenciales en una forma equivalente que involucre radicales.

53. $(8x - y)^{4/5}$. **54.** $(ab^2c^3)^{3/4}$. **55.** $x^{-4/5}$.

56. $2x^{1/2} - (2y)^{1/2}$. **57.** $3w^{-3/5} - (3w)^{-3/5}$. **58.** $[(x^{-4})^{1/5}]^{1/6}$.

En los problemas del 59 al 68, racionalice los denominadores.

59. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$. **60.** $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}}$. **61.** $\dfrac{4}{\sqrt{2x}}$. **62.** $\dfrac{y}{\sqrt{2y}}$.

63. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x}}$ **64.** $\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **65.** $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$. **66.** $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$.

67. $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{a^2b}}$. **68.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$.

En los problemas del 69 al 90, simplifique. Exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos. En donde sea necesario, racionalice el denominador con el fin de evitar exponentes fraccionarios en el denominador.

69. $2x^2y^{-3}x^4$. **70.** $\dfrac{3}{u^{5/2}v^{1/2}}$. **71.** $\sqrt{\sqrt[3]{t^4}}$. **72.** $\{[(2x^2)^3]^{-4}\}^{-1}$.

73. $\dfrac{2^0}{(2^{-2}x^{1/2}y^{-2})^3}$. **74.** $\dfrac{\sqrt{s^5}}{\sqrt[3]{s^2}}$. **75.** $\sqrt[3]{x^2yz^3}\,\sqrt[3]{xy^2}$. **76.** $(\sqrt[5]{2})^{10}$.

77. $3^2(81)^{-3/4}$. **78.** $(\sqrt[5]{x^2y})^{2/5}$. **79.** $(2x^{-1}y^2)^2$. **80.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{x}}$.

81. $\sqrt{x}\sqrt{x^2y^3}\sqrt{xy^2}$. **82.** $\sqrt{75k^4}$. **83.** $\dfrac{(x^2y^{-1}z)^{-2}}{(xy^2)^{-4}}$. **84.** $\sqrt[3]{5(25)}$.

85. $\dfrac{(x^2)^3}{x^4} \div \left[\dfrac{x^3}{(x^3)^2}\right]^2$. **86.** $\sqrt{(-6)(-6)}$. **87.** $-\dfrac{8s^{-2}}{2s^3}$. **88.** $(x^{-1}y^{-2}\sqrt{z})^4$.

89. $(2x^2y \div 3y^3z^{-2})^2$. **90.** $\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2x^{-2}}}{\sqrt{16x^3}}\right)^2}$.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS CON NÚMERO IMPAR

EJERCICIO 0.2 (página 3)

1. Verdadero. **3.** Falso; los números naturales son 1, 2, 3…, etc. **5.** Verdadero. **7.** Falso; $\sqrt{25} = 5$, un entero positivo. **9.** Verdadero. **11.** Verdadero.

EJERCICIO 0.3 (página 7)

1. Falso. **3.** Falso. **5.** Falso. **7.** Verdadero. **9.** Falso. **11.** Distributiva. **13.** Asociativa. **15.** Conmutativa. **17.** Definición de resta. **19.** Distributiva.

EJERCICIO 0.4 (página 10)

1. -6. **3.** 2. **5.** 11. **7.** -2. **9.** -63. **11.** -6. **13.** $6 - x$. **15.** $-12x + 12y$ (o $12y - 12x$). **17.** $-\frac{1}{5}$. **19.** -2. **21.** 18. **23.** 64. **25.** $3x - 12$. **27.** $-x + 2$. **29.** $\frac{8}{11}$. **31.** $-\frac{5x}{7y}$. **33.** $\frac{2}{3x}$. **35.** 3. **37.** $\frac{7}{xy}$. **39.** $\frac{5}{6}$. **41.** $-\frac{1}{6}$. **43.** $\frac{x - y}{9}$. **45.** $\frac{1}{40}$. **47.** $\frac{k}{9n}$. **49.** No definida. **51.** No definida.

EJERCICIO 0.5 (página 16)

1. $2^5\ (= 32)$. **3.** w^{12}. **5.** $\frac{x^8}{x^{17}}$. **7.** $\frac{a^{21}}{b^{20}}$.

9. $8x^6y^9$. **11.** x^6. **13.** x^{14}. **15.** 5. **17.** -2.

19. $\frac{1}{2}$. **21.** 7. **23.** 8. **25.** $\frac{1}{4}$. **27.** $\frac{1}{16}$.

29. $4\sqrt{2}$. **31.** $x\sqrt[3]{2}$. **33.** $4x^2$. **35.** $-2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{2}$.

37. $3z^2$. **39.** $\frac{9t^2}{4}$. **41.** $\frac{x^3}{y^2z^2}$. **43.** $\frac{5}{m^9}$. **45.** $\frac{1}{9t^2}$.

47. $7^{1/3}s^{2/3}$. **49.** $x^{1/2} - y^{1/2}$. **51.** $\frac{x^{9/4}z^{3/4}}{y^{1/2}}$.

53. $\sqrt[5]{(8x - y)^4}$. **55.** $\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$. **57.** $\frac{3}{\sqrt[5]{w^3}} - \frac{1}{\sqrt[5]{27w^3}}$.

59. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$. **61.** $\frac{2\sqrt{2x}}{x}$. **63.** $\frac{\sqrt[3]{9x^2}}{3x}$. **65.** 4.

67. $\frac{\sqrt[20]{16a^{10}b^{15}}}{ab}$. **69.** $\frac{2x^6}{y^3}$. **71.** $t^{2/3}$. **73.** $\frac{64y^6x^{1/2}}{x^2}$.

75. xyz. **77.** $\frac{1}{3}$. **79.** $\frac{4y^4}{x^2}$. **81.** $x^2y^{5/2}$. **83.** $\frac{y^{10}}{z^2}$.

85. x^8. **87.** $-\frac{4}{s^5}$. **89.** $\frac{4x^4z^4}{9y^4}$.