1.10 RECTAS

Pendiente de una recta ▶ Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta ▶ Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta ▶ Rectas verticales y horizontales ▶ Ecuación general de una recta ▶ Rectas paralelas y perpendiculares ▶ Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

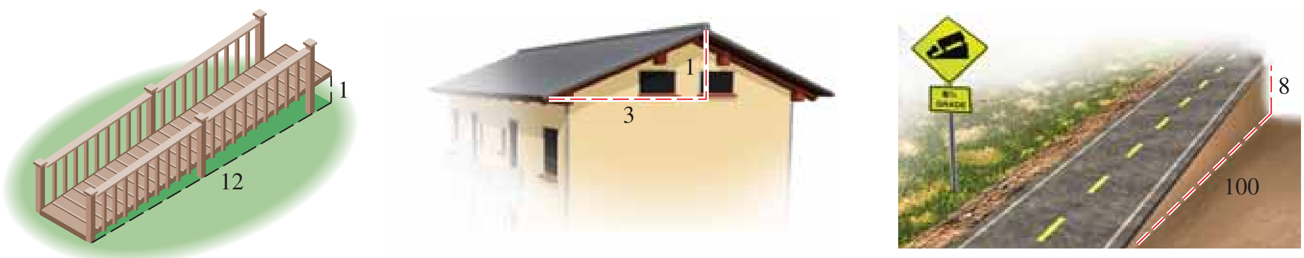
En esta sección encontramos ecuaciones para rectas que se encuentren en un plano de coordenadas. Las ecuaciones dependerán de cómo esté inclinada la recta, por lo que empezamos por estudiar el concepto de pendiente.

▼ Pendiente de una recta

Primero necesitamos una forma de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Definimos el *corrimiento* como la distancia que nos movemos a la derecha y la *elevación* como la distancia correspondiente que la recta sube (o baja). La *pendiente* de una recta es la relación entre la elevación y el corrimiento:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}}$$

La Figura 1 muestra situaciones en las que la pendiente es importante. Los carpinteros usan el término *inclinación* para la pendiente de un techo o una escalera; el término *pendiente* se usa para la pendiente de una carretera.



Pendiente de una rampa
Pendiente $= \frac{1}{12}$

Inclinación de un techo
Pendiente $= \frac{1}{3}$

Pendiente de una carretera
Pendiente $= \frac{8}{100}$

FIGURA 1

Si una recta está en un plano de coordenadas, entonces el **corrimiento** es el cambio en la coordenada x y la **elevación** es el cambio correspondiente en la coordenada y entre cualesquier dos puntos sobre la recta (vea Figura 2). Esto nos da la siguiente definición de pendiente.

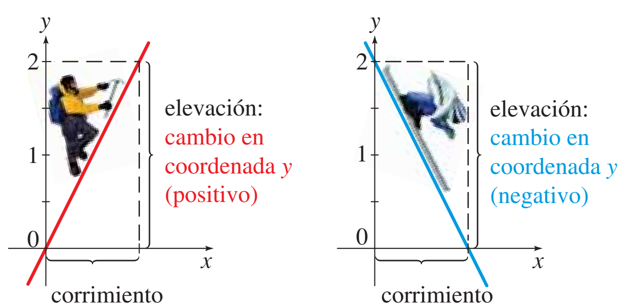


FIGURA 2

PENDIENTE DE UNA RECTA

La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

La pendiente es independiente de cuáles dos puntos se escojan sobre la recta. Podemos ver que esto es verdadero en los triángulos semejantes de la Figura 3:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

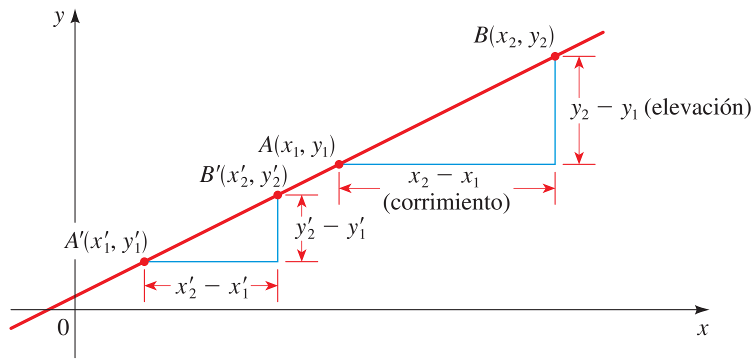


FIGURA 3

La Figura 4 muestra varias rectas marcadas con sus pendientes. Observe que las rectas con pendiente positiva se inclinan hacia arriba a la derecha, mientras que las rectas con pendiente negativa se inclinan hacia abajo a la derecha. Las rectas más inclinadas son aquellas para las que el valor absoluto de la pendiente es muy grande; una recta horizontal tiene pendiente cero.

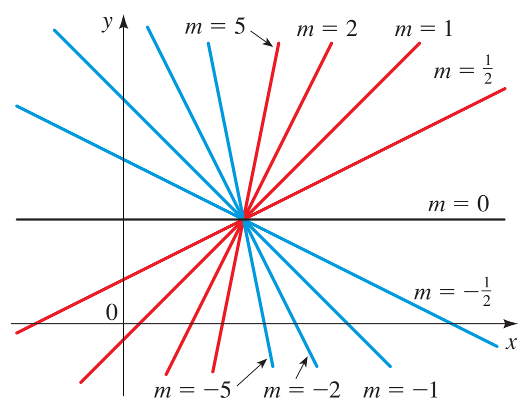


FIGURA 4 Rectas con varias pendientes

EJEMPLO 1 | Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

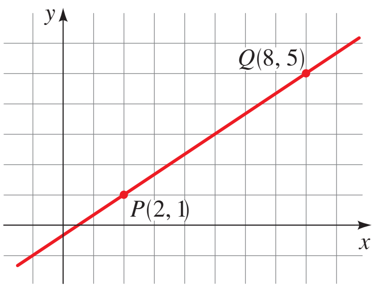


FIGURA 5

SOLUCIÓN Dado que cualesquier dos puntos determinan una recta, sólo una recta pasa por estos dos puntos. De la definición, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto nos dice que por cada 3 unidades que nos movemos a la derecha, la recta sube 2 unidades. La recta está trazada en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

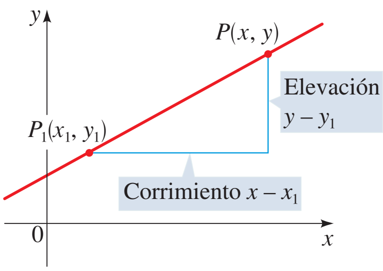


FIGURA 6

Encontremos ahora la ecuación de la recta que pasa por un punto determinado $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m. Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ está sobre esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m (vea Figura 6), es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$; nótese que la ecuación también se satisface cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por lo tanto, es una ecuación de la recta dada.

FORMA PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 2 | Hallar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados

(a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.

(b) Trace la recta.

SOLUCIÓN

(a) Usando la forma punto-pendiente con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos la ecuación de la recta como

$$\begin{aligned} y + 3 &= -\tfrac{1}{2}(x - 1) && \text{Pendiente } m = -\tfrac{1}{2}, \text{ punto } (1, -3) \\ 2y + 6 &= -x + 1 && \text{Multiplique por 2} \\ x + 2y + 5 &= 0 && \text{Reacomode} \end{aligned}$$

(b) El hecho de que la pendiente es $-\frac{1}{2}$ nos dice que cuando nos movemos 2 unidades a la derecha, la recta baja 1 unidad. Esto hace posible que tracemos la recta de la Figura 7.

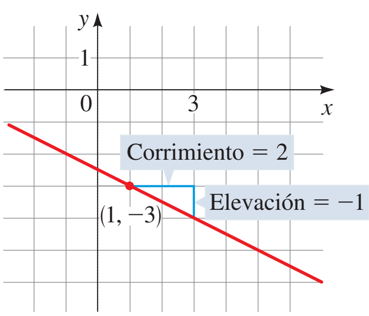


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

EJEMPLO 3 | Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos determinados

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Podemos usar *ya sea* el punto $(-1, 2)$ *o* el punto $(3, -4)$, en la ecuación punto-pendiente. Terminaremos con la misma respuesta final.

Usando la forma punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{3}{2}, \text{ punto } (-1, 2)$$
$$2y - 4 = -3x - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$
$$3x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta

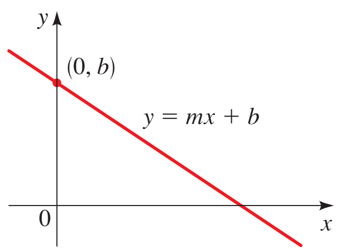


FIGURA 8

Suponga que una recta no vertical tiene pendiente m y a b como punto de intersección con el eje y (vea Figura 8). Esto significa que la recta cruza el eje y en el punto $(0, b)$, de modo que la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con $x = 0$ y $y = 0$, se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica a $y = mx + b$, que se denomina **forma pendiente-punto de intersección** de la ecuación de una recta.

FORMA PENDIENTE-PUNTO DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y es

$$y = mx + b$$

EJEMPLO 4 | Rectas en forma de pendiente e intersección

(a) Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y de -2.

(b) Encuentre la pendiente e intersección y de la recta $3y - 2x = 1$.

SOLUCIÓN

(a) Como $m = 3$ y $b = -2$, de la forma de pendiente-punto de intersección de la ecuación de una recta obtenemos

$$y = 3x - 2$$

(b) Primero escribimos la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$3y - 2x = 1$$
$$3y = 2x + 1 \qquad \text{Sume } 2x$$
$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Pendiente

Intersección en eje y

$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}$$

De la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección en el eje y es $b = \frac{1}{3}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **47**

Rectas verticales y horizontales

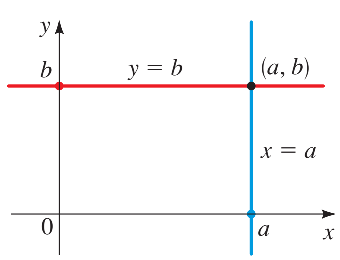


FIGURA 9

Si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es el punto de intersección con el eje y (vea Figura 9). Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x, porque la coordenada x de todo punto en la recta es a.

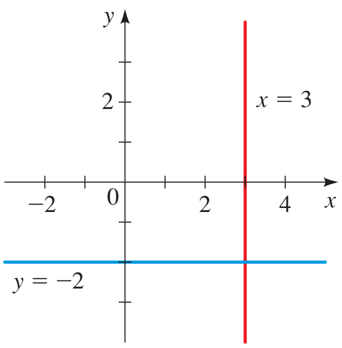


FIGURA 10

RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

Una ecuación de la recta vertical que pasa por (a, b) es $x = a$.

Una ecuación de la recta horizontal que pasa por (a, b) es $y = b$.

EJEMPLO 5 | Rectas verticales y horizontales

(a) Una ecuación para la recta vertical que pasa por (3, 5) es $x = 3$.

(b) La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección 3 en el eje x.

(c) Una ecuación para la recta horizontal que pasa por $(8, -2)$ es $y = -2$.

(d) La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una recta horizontal con intersección -2 en el eje y.

Las rectas están graficadas en la Figura 10.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **33**

Ecuación general de una recta

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes y A y B no son 0 ambas. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

- Una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$, que es una ecuación lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o $x - a = 0$, que es una ecuación lineal con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

A la inversa, la gráfica de una ecuación lineal es una recta.

- Si $B \neq 0$, la ecuación se convierte en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \text{Divida por } B$$

y ésta es la forma de pendiente-intersección de la ecuación de una recta (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).

- Si $B = 0$, la ecuación se convierte en

$$Ax + C = 0 \qquad \text{Haga } B = 0$$

o $x = -C/A$, que representa una recta vertical.

Hemos demostrado lo siguiente.

EUCACIÓN GENERAL DE UNA RECTA

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A, B \text{ no son cero ambas})$$

es una recta. A la inversa, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

EJEMPLO 6 | Graficar una ecuación lineal

Trace la gráfica de la ecuación $2x - 3y - 12 = 0$.

SOLUCIÓN 1 Como la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para trazar la gráfica, es suficiente hallar dos puntos cualesquiera en la recta. Los puntos de intersección son los más fáciles de hallar.

Punto de intersección con x: Sustituya $y = 0$, para obtener $2x - 12 = 0$, por lo que $x = 6$

Punto de intersección con y: Sustituya $x = 0$, para obtener $-3y - 12 = 0$, por lo que $y = -4$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica de la Figura 11.

SOLUCIÓN 2 Escribimos la ecuación en forma pendiente-intersección:

$$
\begin{aligned}
2x - 3y - 12 &= 0 \\
2x - 3y &= 12 && \text{Sume 12} \\
-3y &= -2x + 12 && \text{Reste } 2x \\
y &= \tfrac{2}{3}x - 4 && \text{Divida entre } -3
\end{aligned}
$$

Esta ecuación está en la forma $y = mx + b$, por lo que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección y es $b = -4$. Para trazar la gráfica, localizamos el punto de intersección con el eje y y nos movemos 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba, como se muestra en la Figura 12.

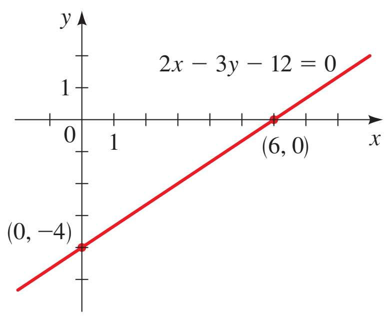


FIGURA 11

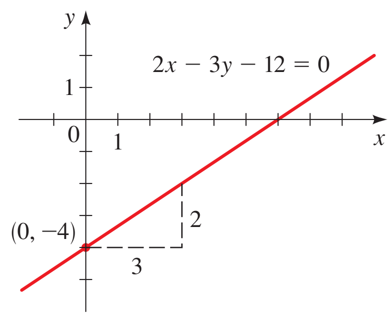


FIGURA 12

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

Rectas paralelas y perpendiculares

Como la pendiente mide la inclinación de una recta, parece razonable que las rectas paralelas deban tener la misma pendiente. De hecho, podemos demostrar esto.

RECTAS PARALELAS

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

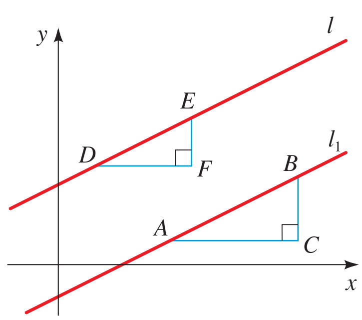


FIGURA 13

DEMOSTRACIÓN Consideremos que las rectas l1 y l2 de la Figura 13 tienen pendientes m_1 y m_2. Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectos ABC y DEF son semejantes, por lo que

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, F)} = m_2$$

A la inversa, si las pendientes son iguales, entonces los triángulos serán semejantes, por lo que $\angle BAC = \angle EDF$ y las rectas son paralelas.

EJEMPLO 7 | Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN Primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma de pendiente-intersección.

$$4x + 6y + 5 = 0$$

$$6y = -4x - 5 \qquad \text{Reste } 4x + 5$$

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6} \qquad \text{Divida entre 6}$$

Por lo tanto, la recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Como la recta requerida es paralela a la recta dada, también tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{2}{3}, \text{ punto } (5, 2)$$

$$3y - 6 = -2x + 10 \qquad \text{Multiplique por 3}$$

$$2x + 3y - 16 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta requerida es $2x + 3y - 16 = 0$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como la de las rectas paralelas.

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$, es decir, sus pendientes son recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).

DEMOSTRACIÓN En la Figura 14 mostramos dos rectas que se cruzan en el origen. (Si las rectas se cruzan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cruzan en el origen. Estas rectas tienen las mismas pendientes que las rectas originales.

Si las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2, entonces sus ecuaciones son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Observe que $A(1, m_1)$ está sobre l_1 y $B(1, m_2)$ está sobre l_2. Por el Teorema de Pitágoras y su inverso (vea página 219) $OA \perp OB$ si y sólo si

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2$$

Por la Fórmula de la Distancia, esto se convierte en

$$(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

$$2 = -2m_1m_2$$

$$m_1m_2 = -1$$

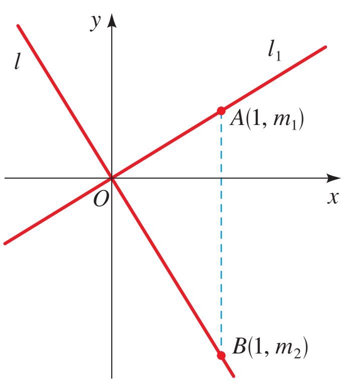


FIGURA 14

EJEMPLO 8 | Rectas perpendiculares

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

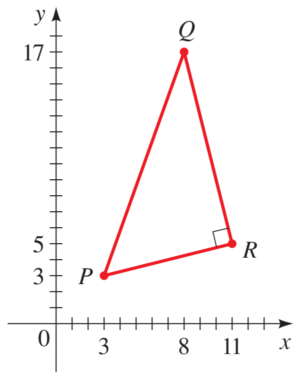


FIGURA 15

SOLUCIÓN Las pendientes de las rectas que contienen a PR y QR son, respectivamente,

$$m_1 = \frac{5-3}{11-3} = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{5-17}{11-8} = -4$$

Como $m_1 m_2 = -1$, estas rectas son perpendiculares, de modo que PQR es un triángulo rectángulo que aparece en la Figura 15.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57**

EJEMPLO 9 | Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen.

SOLUCIÓN En el Ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Entonces, la pendiente de una recta perpendicular es el recíproco negativo, es decir, $\frac{3}{2}$. Como la recta pedida pasa por (0, 0), la forma punto-pendiente da

$$y - 0 = \tfrac{3}{2}(x - 0) \qquad \text{Pendiente } m = \tfrac{3}{2}, \text{ punto } (0, 0)$$

$$y = \tfrac{3}{2}x \qquad \text{Simplifique}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 10 | Graficar una familia de rectas

Use una calculadora graficadora para graficar la familia de rectas

$$y = 0.5x + b$$

para $b = -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Qué propiedad comparten las rectas?

SOLUCIÓN Las rectas están graficadas en la Figura 16 en el rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-6, 6]$. Las rectas tienen todas ellas la misma pendiente, por lo que son paralelas.

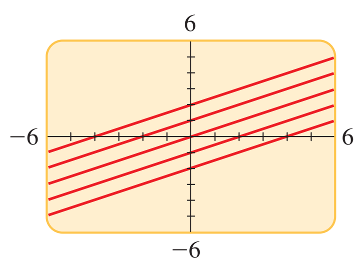


FIGURA 16 $y = 0.5x + b$

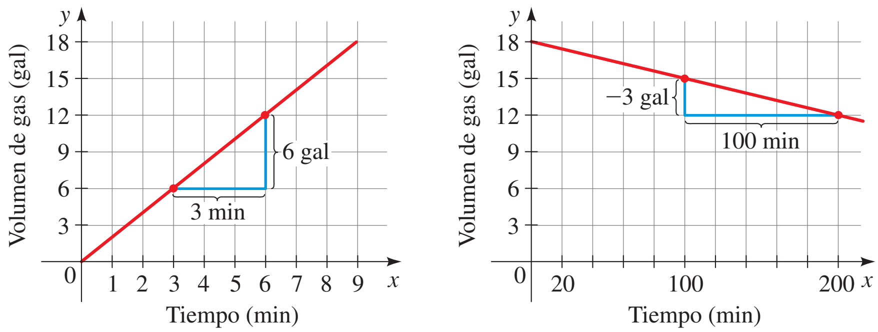
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

▼ Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

Cuando se usa una recta para modelar la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **rapidez de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 17(a) en la página siguiente da la cantidad de gas en un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$m = \frac{6 \text{ galones}}{3 \text{ minutos}} = 2 \text{ gal/min}$$

La pendiente es la *rapidez* a la que se está llenando el tanque, 2 galones por minuto. En la Figura 17(b) el tanque se está drenando con una *rapidez* de 0.03 galones por minuto y la pendiente es -0.03.



(a) Tanque llenado a 2 gal/min
La pendiente de la recta es 2

(b) Tanque drenado a 0.03 gal/min
La pendiente de la recta es -0.03

FIGURA 17

Los siguientes dos ejemplos dan otras situaciones en las que la pendiente de una recta es una rapidez de cambio.

EJEMPLO 11 | Pendiente como rapidez de cambio

Una presa se construye en un río para crear un estanque. El nivel de agua w del estanque está dado por la ecuación

$$w = 4.5t + 28$$

donde t es el número de años desde que se construyó la presa y w se mide en pies.

(a) Trace la gráfica de esta ecuación.

(b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección w de esta gráfica?

SOLUCIÓN

(a) Esta ecuación es lineal, por lo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, localizamos dos puntos que estén sobre la gráfica y trazamos una recta que pase por ellos.

Cuando $t = 0$, entonces $w = 4.5(0) + 28 = 28$, por lo que $(0, 28)$ está sobre la recta.

Cuando $t = 2$, entonces $w = 4.5(2) + 28 = 37$, por lo que $(2, 37)$ está sobre la recta.

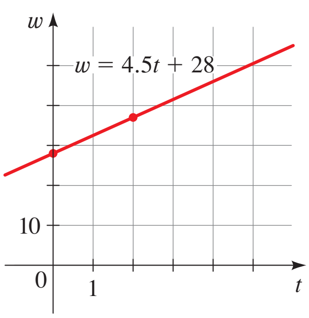


FIGURA 18

La recta determinada por esos puntos se muestra en la figura 18.

(b) La pendiente es $m = 4.5$; representa la rapidez de cambio del nivel de agua con respecto al tiempo. Esto significa que el nivel de agua *aumenta* 4.5 pies por año. El punto de intersección w es 28 y se presenta cuando $t = 0$, por lo que representa el nivel de agua cuando la presa se construyó.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

EJEMPLO 12 | Relación lineal entre temperatura y elevación

(a) A medida que el aire seco sube, se dilata y se enfría. Si la temperatura al nivel del suelo es de 20°C y la temperatura a una altitud de 1 km es 10°C, exprese la temperatura T (en °C) en términos de la altitud h (en km). (Suponga que la relación entre T y H es lineal.)

(b) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa su pendiente?

(c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

SOLUCIÓN

(a) Como estamos suponiendo una relación lineal entre T y h, la ecuación debe ser de la forma

$$T = mh + b$$

donde m y b son constantes. Cuando $h = 0$, nos dicen que $T = 20$, de modo que

$$20 = m(0) + b$$
$$b = 20$$

Por lo tanto, tenemos

$$T = mh + 20$$

Cuando $h = 1$, tenemos $T = 10$ y entonces

$$10 = m(1) + 20$$
$$m = 10 - 20 = -10$$

La expresión requerida es

$$T = -10h + 20$$

(b) La gráfica está trazada en la Figura 19. La pendiente es $m = -10°\text{C/km}$, y ésta representa la rapidez de cambio de temperatura con respecto a la distancia arriba del suelo. En consecuencia, la temperatura *disminuye* 10ºC por kilómetro de altitud.

(c) A una altitud de $h = 2.5$ km la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5\,°\text{C}$$

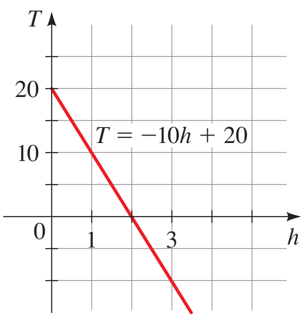


FIGURA 19

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **73**

1.10 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Encontramos la "inclinación", o pendiente, de una recta que pasa por dos puntos al dividir la diferencia en las coordenadas ____ de estos puntos entre la diferencia en las coordenadas ____. Entonces, la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (2, 5) tiene pendiente ________.

2. Una recta tiene la ecuación $y = 3x + 2$.
   (a) Esta recta tiene pendiente ______.
   (b) Cualquier recta paralela a esta recta tiene pendiente____.
   (c) Cualquier recta perpendicular a esta recta tiene pendiente ___.

3. La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (1, 2) es______.

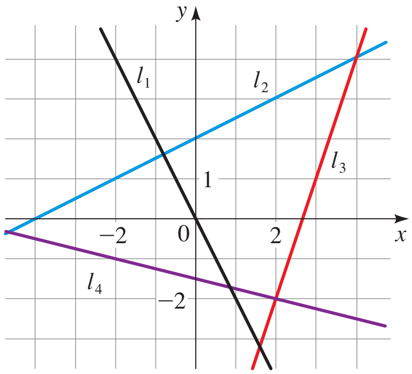
4. (a) La pendiente de una recta horizontal es____. La ecuación de la recta horizontal que pasa por (2, 3) es______.
   (b) La pendiente de una recta vertical es_____. La ecuación de la recta vertical que pasa por (2, 3) es_____.

HABILIDADES

5-12 ■ Encuentre la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

5. $P(0, 0)$, $Q(4, 2)$
6. $P(0, 0)$, $Q(2, -6)$
7. $P(2, 2)$, $Q(-10, 0)$
8. $P(1, 2)$, $Q(3, 3)$
9. $P(2, 4)$, $Q(4, 3)$
10. $P(2, -5)$, $Q(-4, 3)$
11. $P(1, -3)$, $Q(-1, 6)$
12. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

13. Encuentre las pendientes de las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 en la figura siguiente.

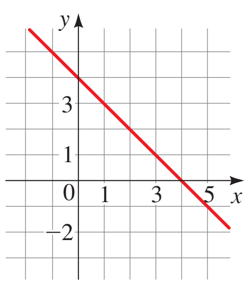


14. **(a)** Trace rectas que pasen por (0, 0) con pendientes 1, 0, $\frac{1}{2}$, 2 y -1.

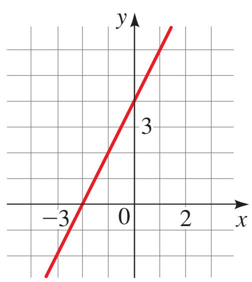
(b) Trace rectas que pasen por (0, 0) con pendientes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ y 3.

15-18 ■ Encuentre la ecuación para la recta cuya gráfica está trazada.

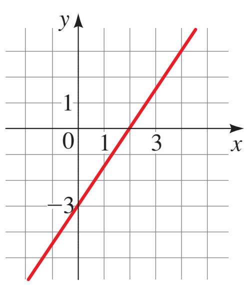
15.



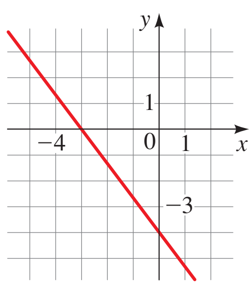
16.



17.



18.



19-38 ■ Encuentre la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

19. Pasa por (2, 3), pendiente 5

20. Pasa por $(-2, 4)$, pendiente -1

21. Pasa por (1, 7), pendiente $\frac{2}{3}$

22. Pasa por $(-3, -5)$, pendiente $-\frac{7}{2}$

23. Pasa por (2, 1) y (1, 6)

24. Pasa por $(-1, -2)$ y (4, 3)

25. Pendiente 3; intersección en y es -2

26. Pendiente $\frac{2}{5}$; intersección en y es 4

27. Intersección en x es 1; intersección en y es -3

28. Intersección en x es -8; intersección en y es 6

29. Pasa por (4, 5); paralela al eje x

30. Pasa por (4, 5); paralela al eje y

31. Pasa por $(1, -6)$; paralela a la recta $x + 2y = 6$

32. Intersección en y es 6; paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

33. Pasa por $(-1, 2)$; paralela a la recta $x = 5$

34. Pasa por (2, 6); perpendicular a la recta $y = 1$

35. Pasa por $(-1, -2)$; perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$

36. Pasa por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$; perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

37. Pasa por (1, 7); paralela a la recta que pasa por (2, 5) y $(-2, 1)$

38. Pasa por $(-2, -11)$; perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y $(5, -1)$

39. **(a)** Trace la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el punto $(-2, 1)$

(b) Encuentre la ecuación para esta recta.

40. **(a)** Trace la recta con pendiente -2 que pasa por el punto $(4, -1)$

(b) Encuentre la ecuación para esta recta.

41-44 ■ Use calculadora graficadora para graficar la familia de rectas dada en el mismo rectángulo de vista. ¿Qué tienen en común las rectas?

41. $y = -2x + b$ para $b = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6$

42. $y = mx - 3$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

43. $y = m(x - 3)$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

44. $y = 2 + m(x + 3)$ para $m = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm$

45-56 ■ Encuentre la pendiente y el punto de intersección y de la recta y trace su gráfica.

45. $x + y = 3$

46. $3x - 2y = 12$

47. $x + 3y = 0$

48. $2x - 5y = 0$

49. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$

50. $-3x - 5y + 30 = 0$

51. $y = 4$

52. $x = -5$

53. $3x - 4y = 12$

54. $4y + 8 = 0$

55. $3x + 4y - 1 = 0$

56. $4x + 5y = 10$

57. Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.

58. Use pendientes para demostrar que $A(-3, -1)$, $B(3, 3)$ y $C(-9, 8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

59. Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son vértices de un rectángulo.

60. Use pendientes para determinar si los puntos dados son colineales (están sobre una recta).

(a) (1, 1), (3, 9), (6, 21)
(b) $(-1, 3)$, (1, 7), (4, 15)

61. Encuentre una ecuación del bisector perpendicular del segmento de recta que une los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$

62. Encuentre el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta

$$2y + 3x - 6 = 0$$

63. **(a)** Demuestre que si los puntos de intersección x y y de una recta son números diferentes de cero a y b, entonces la ecuación de la recta se puede escribir en la forma

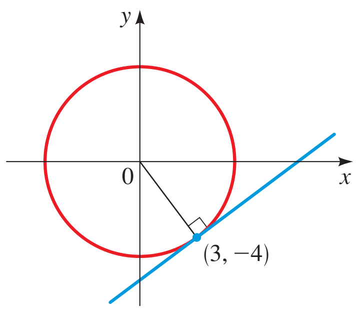
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ésta se llama **forma dos puntos de intersección** de la ecuación de una recta.

(b) Use la parte (a) para hallar la ecuación de la recta cuyo punto de intersección x es 6 y cuyo punto de intersección y es -8.

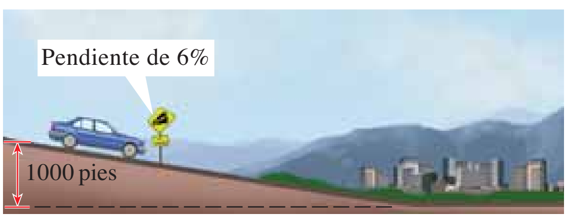
64. **(a)** Encuentre la ecuación para la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$. (Vea la figura.)

(b) ¿En qué otro punto sobre la circcunferencia es que una recta tangente será paralela a la recta tangente de la parte (a)?



APLICACIONES

65. **Pendiente de una carretera** Al poniente de Albuquerque, Nuevo México, la Ruta 40 que se dirige al oriente es recta y con un agudo descenso hacia la ciudad. La carretera tiene una pendiente del 6%, lo cual significa que su pendiente es $-\frac{6}{100}$. Manejando en esta carretera, observa por señales de elevación que usted ha descendido una distancia de 1000 pies. ¿Cuál es el cambio en su distancia horizontal?



66. **Calentamiento global** Algunos científicos piensan que el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra ha estado subiendo constantemente. El promedio de la temperatura de la superficie se puede modelar con

$$T = 0.02t + 15.0$$

donde T es la temperatura en ºC y t es años desde 1950.

(a) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección T?

(b) Use la ecuación para pronosticar el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra en 2050.

67. **Dosis de medicamentos** Si la dosis recomendada a un adulto para un medicamento es D (en mg), entonces, para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a, los farmacéuticos usan la ecuación

$$c = 0.0417D(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es 200 mg.

(a) Encuentre la pendiente. ¿Qué representa ésta?

(b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

68. **Mercado de segunda mano** La gerente de un mercado de segunda mano en fin de semana sabe, por experiencia del pasado, que si ella cobra x dólares por la renta de espacio en el mercado de segunda mano, entonces el número y de espacios que ella renta está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.

(a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal. (Recuerde que el cargo por renta de espacio, así como el número de espacios rentados, deben ser cantidades no negativas ambas.)

(b) ¿Qué representan la pendiente, el punto de intersección y y el punto de intersección x de la gráfica?

69. **Costo de producción** Un pequeño fabricante de enseres electrodomésticos encuentra que si produce x hornos tostadores por mes, su costo de producción está dado por la ecuación

$$y = 6x + 3000$$

(donde y se mide en dólares).

(a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

(b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?

70. **Escalas de temperatura** La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

(a) Complete la tabla para comparar las dos escalas a los valores dados.

(b) Encuentre la temperatura a la que las escalas son iguales. [*Sugerencia:* Suponga que a es la temperatura a la que las escalas son iguales. Haga $F = a$ y $C = a$ y a continuación despeje a.]

C	*F*
−30°	
−20°	
−10°	
0°	
	50°
	68°
	86°

71. **Grillos y temperatura** Los biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 120 chirridos por minuto a 70ºF y 168 chirridos por minuto a 80ºF.

(a) Encuentre la ecuación lineal que relacione la temperatura t y el número de chirridos por minuto n.

(b) Si los grillos están chirriando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

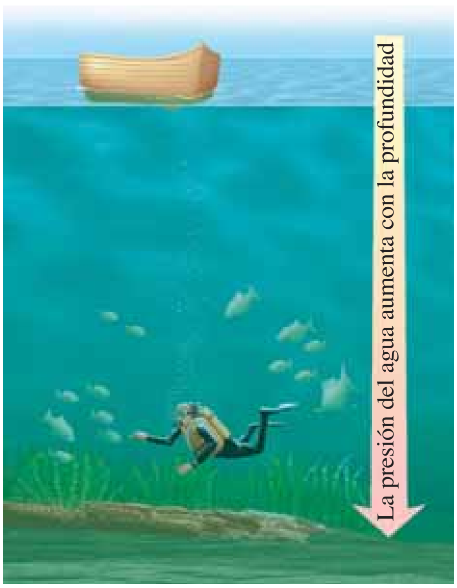
72. **Depreciación** Un pequeño negocio compra una computadora en $4000. Después de 4 años el valor de la computadora se espera que sea de $200. Para fines de contabilidad, el negocio usa *depreciación lineal* para evaluar el valor de la computadora en un tiempo determinado.

Esto significa que si V es el valor de la computadora en el tiempo t, entonces se usa una ecuación lineal para relacionar V y t.

(a) Encuentre una ecuación lineal que relacione V y t.
(b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.
(c) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección V de la gráfica?
(d) Encuentre el valor depreciado de la computadora 3 años a partir de la fecha de compra.

73. Presión y profundidad En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la del aire que está sobre el agua, 15 lb/pulg.². Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 4.34 lb/pulg.² por cada 10 pies de descenso.

(a) Encuentre una ecuación para la relación entre presión y profundidad debajo de la superficie del océano.
(b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.
(c) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?
(d) ¿A qué profundidad es de 100 lb/pulg.² la presión?



74. Distancia, rapidez y tiempo Jason y Debbie salen de Detroit a las 2:00 p.m. y manejan a una rapidez constante, viajando hacia al poniente en la carretera I−90. Pasan Ann Arbor, a 40 millas de Detroit, a las 2:50 p.m.

(a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.
(b) Trace la gráfica de la ecuación de la parte (a).
(c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

75. Costo de conducir un auto El costo mensual de conducir un auto depende del número de millas recorridas. Lynn encontró que en mayo su costo de conducción fue de \$380 por 480 millas y, en junio, su costo fue de \$460 por 800 millas. Suponga que hay una relación lineal entre el costo mensual C de conducir un auto y la distancia recorrida d.

(a) Encuentre una ecuación lineal que relacione C y d.
(b) Use la parte (a) para predecir el costo de conducir 1500 millas por mes.
(c) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente de la recta?
(d) ¿Qué representa el punto de intersección y de la gráfica?
(e) ¿Por qué una relación lineal es un modelo apropiado para esta situación?

76. Costo de manufactura El gerente de una fábrica de muebles encuentra que cuesta \$2200 manufacturar 100 sillas en un día y \$4800 producir 300 sillas en un día.

(a) Suponiendo que la relación entre el costo y el número de sillas producidas sea lineal, encuentre una ecuación que exprese esta relación. A continuación, grafique la ecuación.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la recta de la parte (a), y qué representa?
(c) ¿Cuál es el punto de intersección y de esta recta, y qué representa?

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

77. ¿Qué significa la pendiente? Suponga que la gráfica de la temperatura exterior en cierto tiempo es una recta. ¿Cómo está cambiando el clima si la pendiente de la recta es positiva? ¿Si es negativa? ¿Y si es cero?

78. Puntos colineales Suponga que nos dan las coordenadas de tres puntos en el plano y se desea ver si están en la misma recta. ¿Cómo se puede hacer esto usando pendientes? ¿Usando la Fórmula de la Distancia? ¿Puede usted considerar otro método?

1.11 MODELOS CON EL USO DE VARIACIONES

Variación directa ▶ Variación inversa ▶ Variación conjunta

Cuando los científicos hablan de un modelo matemático para un fenómeno real, con frecuencia se refieren a una ecuación que describe la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, el modelo podría describir la forma en que la población de una especie animal varía con el tiempo, o el modo en que la presión de un gas varía a medida que cambia la temperatura. En esta sección estudiamos una clase de modelado llamado *variación.*

3.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal ▶ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas ▶ Modelado con funciones cuadráticas

Una función polinomial es una función que está definida por una expresión con polinomios. Entonces una **función polinomial de grado *n*** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Las expresiones de polinomios están definidas en la Sección 1.3.

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Éstas son funciones de la forma $P(x) = a_0$ y $P(x) = a_1 x + a_0$, respectivamente, cuyas gráficas son rectas. En esta sección estudiamos funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

Vemos en esta sección la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

▼ Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal

Para una definición geométrica de parábolas, vea la Sección 11.1.

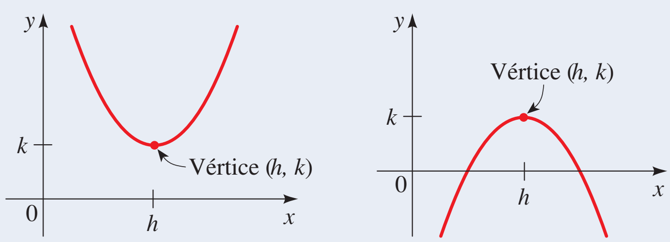
Si tomamos $a = 1$ y $b = c = 0$ en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos la función cuadrática $f(x) = x^2$, cuya gráfica es la parábola graficada en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; puede obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^2$ por las transformaciones dadas en la Sección 2.5.

FORMA NORMAL DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k); la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k, \; a > 0$ $\qquad$ $f(x) = a(x - h)^2 + k, \; a < 0$

EJEMPLO 1 | Forma normal de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

(a) Exprese f en forma normal. $\qquad$ **(b)** Trace la gráfica de f.

Completar el cuadrado se estudia en la Sección 1.5.

$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

El vértice es $(3, 5)$

SOLUCIÓN

(a) Como el coeficiente de x^2 no es 1, debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen x antes de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 23 && \text{Factorice 2 de los términos en } x \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 2\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 2(x - 3)^2 + 5 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

La forma normal es $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$.

(b) La forma normal nos dice que obtenemos la gráfica de f al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en $(3, 5)$, y la parábola abre hacia arriba. Alargamos la gráfica de la Figura 1 observando que el punto de intersección en y es $f(0) = 23$.

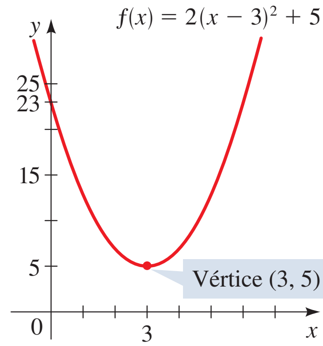


FIGURA 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

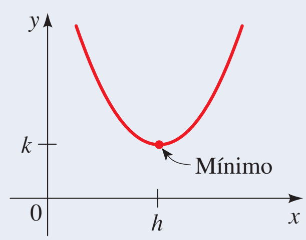
Si una función cuadrática tiene vértice (h, k), entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo. Por ejemplo, la función graficada en la Figura 1 tiene valor mínimo 5 cuando $x = 3$, porque el vértice $(3, 5)$ es el punto más bajo en la gráfica.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

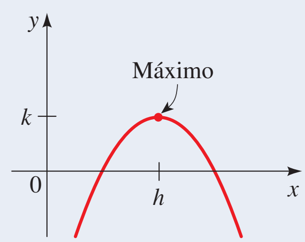
Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el valor máximo de f es $f(h) = k$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k, a > 0$



$f(x) = a(x - h)^2 + k, a < 0$

EJEMPLO 2 | Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

(a) Exprese f en forma normal.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre el valor mínimo de f.

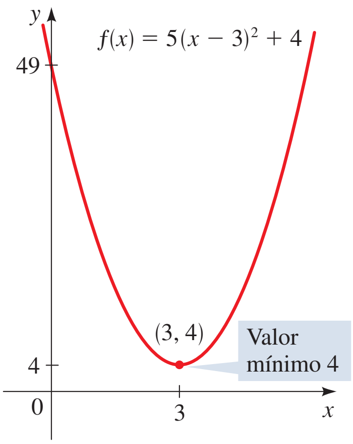


FIGURA 2

SOLUCIÓN

(a) Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de términos en } x \\ &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 5\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 5(x-3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

(b) La gráfica es la parábola que tiene su vértice en (3, 4) y abre hacia arriba, como se ve en la Figura 2.

(c) Como el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$.

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **25**

EJEMPLO 3 | Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

(a) Exprese f en forma normal.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre el valor máximo de f.

SOLUCIÓN

(a) Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + x + 2 \\ &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice } -1 \text{ de los términos en } x \\ &= -\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) + 2 - (-1)\tfrac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: Sume } \tfrac{1}{4} \text{ dentro de paréntesis, reste } (-1)\tfrac{1}{4} \text{ fuera} \\ &= -\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

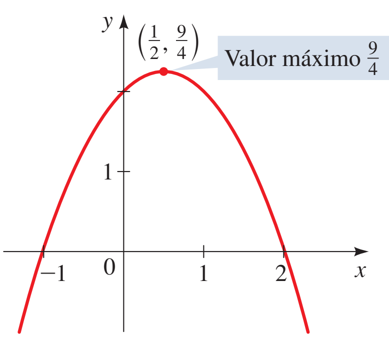


FIGURA 3 Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

(b) De la forma normal vemos que la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y tiene vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Como ayuda para trazar la gráfica, encontramos los puntos de intersección. El punto de intersección en y es $f(0) = 2$. Para hallar los puntos de intersección en x, hacemos $f(x) = 0$ y factorizamos la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 0 && \text{Haga } y = 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Multiplique por } -1 \\ (x-2)(x+1) &= 0 && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Así, los puntos de intersección en x son $x = 2$ y $x = -1$. La gráfica de f se traza en la Figura 3.

(c) Como el coeficiente de x^2 es negativo, f tiene un valor máximo, que es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

Expresar una función cuadrática en forma normal nos ayuda a trazar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si estamos interesados en hallar el valor máximo o mínimo, entonces existe una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorice } a \text{ de los términos en } x \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{Complete el cuadrado: sume } \frac{b^2}{4a^2} \text{ dentro de paréntesis, reste } a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \text{ fuera} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Esta ecuación está en forma normal con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Como el valor máximo o mínimo se presenta en $x = h$, tenemos el siguiente resultado.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

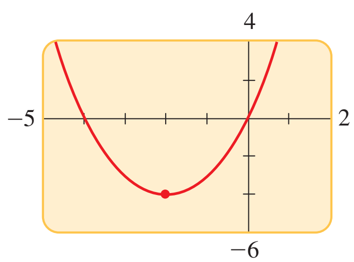
Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

EJEMPLO 4 | Hallar valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Encuentre el valor máximo o mínimo de estas funciones cuadráticas.

(a) $f(x) = x^2 + 4x$ **(b)** $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$



El valor mínimo ocurre en $x = -2$.

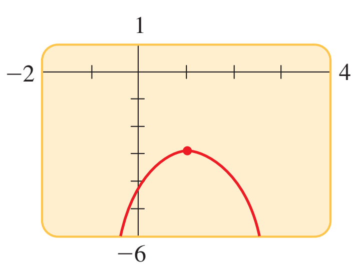
SOLUCIÓN

(a) Ésta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Como $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*.

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$



El valor máximo ocurre en $x = 1$.

(b) Ésta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **35** ■

▼ Modelado con funciones cuadráticas

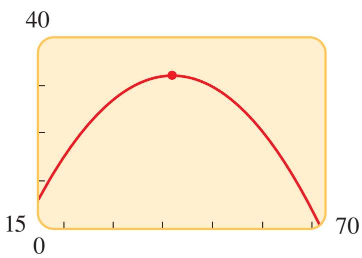
Estudiamos algunos ejemplos de fenómenos reales que son modelados por funciones cuadráticas. Estos ejemplos y los ejercicios de *Aplicación* para esta sección presentan parte de la variedad de situaciones que de manera natural son modelados por funciones cuadráticas.

EJEMPLO 5 | Rendimiento máximo en kilometraje de un auto

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una velocidad relativamente baja. El rendimiento M para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31, \qquad 15 \le s \le 70$$

donde s es la rapidez en mi/h y M se mide en mi/gal. ¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué velocidad se obtiene?



El rendimiento máximo ocurre a 42 mi/h.

SOLUCIÓN La función M es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Entonces, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\left(-\frac{1}{28}\right)} = 42$$

El máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Por lo tanto, el mejor rendimiento del auto es de 32 mi/gal, cuando está corriendo a 42 mi/h.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67**

EJEMPLO 6 | Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15,000 espectadores. Con el precio del boleto a \$14, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos?

SOLUCIÓN

(a) Exprese verbalmente el modelo. El modelo que buscamos es una función que dé el ingreso para cualquier precio del boleto.

ingreso = precio del boleto × asistencias

Escoja la variable. Hay dos cantidades que varían: precio del boleto y asistencia. Como la función que buscamos depende del precio, hacemos

$$x = \text{precio del boleto}$$

A continuación, expresamos la asistencia en términos de x.

Verbalmente	**En álgebra**
Precio del boleto	x
Cantidad que baja precio del boleto	$14 - x$
Aumento en asistencia	$1000(14 - x)$
Asistencia	$9500 + 1000(14 - x)$

Establezca el modelo. El modelo que buscamos es la función R que da el ingreso para un determinado precio de boleto x.

$$\boxed{\text{ingreso}} = \boxed{\text{precio del boleto}} \times \boxed{\text{asistencias}}$$

$$R(x) = x \times [9500 + 1000(14 - x)]$$
$$R(x) = x(23{,}500 - 1000x)$$
$$R(x) = 23{,}500x - 1000x^2$$

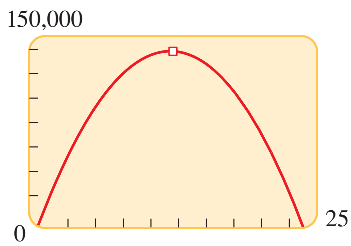
(b) Use el modelo. Como R es función cuadrática con $a = -1000$ y $b = 23{,}500$, el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23{,}500}{2(-1000)} = 11.75$$

Por lo tanto, el precio de boleto de \$11.75 da el máximo ingreso.

(c) Use el modelo. Deseamos hallar el precio del boleto por el que $R(x) = 0$.

$$23{,}500x - 1000x^2 = 0 \qquad \text{Haga } R(x) = 0$$
$$23.5x - x^2 = 0 \qquad \text{Divida entre 1000}$$
$$x(23.5 - x) = 0 \qquad \text{Factorice}$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 23.5 \qquad \text{Despeje } x$$



La asistencia máxima ocurre cuando el precio del boleto es \$11.75.

Por lo tanto, de acuerdo con este modelo, el precio del boleto de \$23.50 es simplemente demasiado alto; a ese precio, nadie va a ver jugar a su equipo. (Desde luego, el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

3.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para poner la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma normal, completamos el_________.

2. La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ está en forma normal.

(a) La gráfica de f es una parábola con vértice (___,___).

(b) Si $a > 0$, la gráfica de f abre hacia ______. En este caso $f(h) = k$ es el valor ______de f.

(c) Si $a < 0$, la gráfica de f abre hacia ______. En este caso $f(h) = k$ es el valor ______de f.

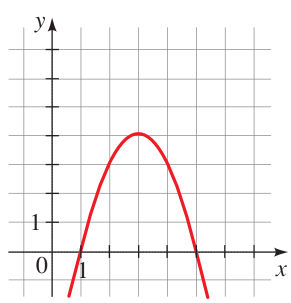
3. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (____,___), y $f(3) =$ ____es el valor (mínimo/máximo)____de f.

4. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (____,___), y $f(3) =$ ____ es el valor (mínimo/máximo)____ de f.

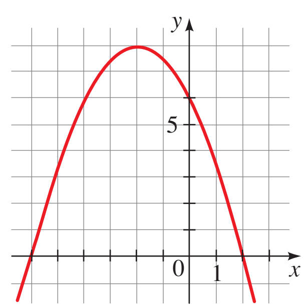
HABILIDADES

5-8 ■ Nos dan la gráfica de una función cuadrática f. **(a)** Encuentre las coordenadas del vértice. **(b)** Encuentre el valor máximo o mínimo de f. **(c)** Encuentre el dominio y rango de f.

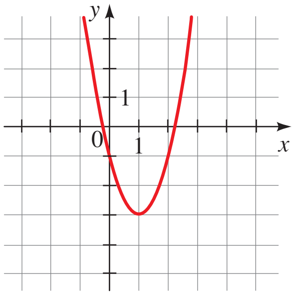
5. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



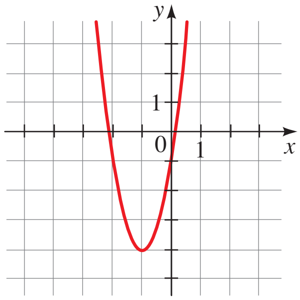
6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



8. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



9-22 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma normal. **(b)** Encuentre su vértice y su(s) punto(s) de intersección *x* y *y*. **(c)** Trace su gráfica.

9. $f(x) = x^2 - 6x$

10. $f(x) = x^2 + 8x$

11. $f(x) = 2x^2 + 6x$

12. $f(x) = -x^2 + 10x$

13. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

14. $f(x) = x^2 - 2x + 2$

15. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$

16. $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

17. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

18. $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

19. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$

20. $f(x) = 2x^2 + x - 6$

21. $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$

22. $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

23-32 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma normal. **(b)** Trace su gráfica. **(c)** Encuentre su valor máximo o mínimo.

23. $f(x) = x^2 + 2x - 1$

24. $f(x) = x^2 - 8x + 8$

25. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

26. $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

27. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$

28. $f(x) = 1 - 6x - x^2$

29. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$

30. $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

31. $h(x) = 1 - x - x^2$

32. $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

33-42 ■ Encuentre el valor máximo o mínimo de la función.

33. $f(x) = x^2 + x + 1$

34. $f(x) = 1 + 3x - x^2$

35. $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$

36. $f(t) = 10t^2 + 40t + 113$

37. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$

38. $g(x) = 100x^2 - 1500x$

39. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

40. $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x + 7$

41. $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$

42. $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

43. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(4, 16)$.

44. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(3, 4)$ y que pasa por el punto $(1, -8)$.

45-48 ■ Encuentre el dominio y rango de la función.

45. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

46. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

47. $f(x) = 2x^2 + 6x - 7$

48. $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

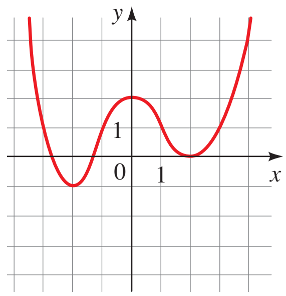
49-50 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Use una calculadora graficadora para hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática *f*, correcta a dos lugares decimales. **(b)** Encuentre el valor exacto máximo o mínimo de *f*, y compárelo con su respuesta de la parte (a).

49. $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

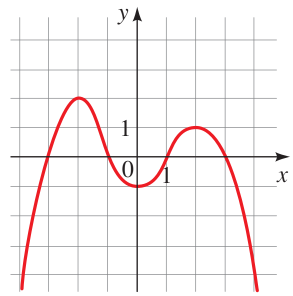
50. $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

51-54 ■ Encuentre todos los valores máximo y mínimo de la función cuya gráfica se muestra.

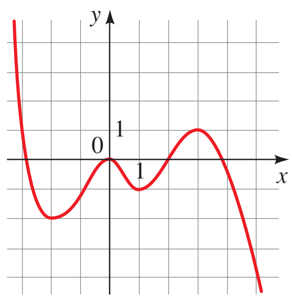
51.



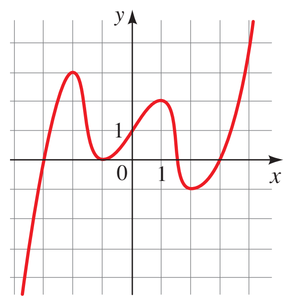
52.



53.



54.



55-62 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de *x* en el que se presenta cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

55. $f(x) = x^3 - x$

56. $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

57. $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

58. $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

59. $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

60. $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

61. $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$

62. $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

APLICACIONES

63. Altura de una pelota Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de *t* segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

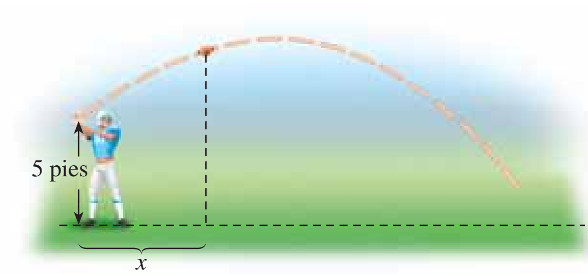
64. Trayectoria de un balón Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 5 pies sobre el suelo, a un ángulo de 45º con la horizontal, a una velocidad de 20 pies/s. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -\frac{32}{(20)^2}x^2 + x + 5$$

donde x es la distancia en pies que el balón ha recorrido horizontalmente.

(a) Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.

(b) Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.



65. Ingresos Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierta mercancía está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

66. Ventas Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que si vende x latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

67. Publicidad La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$$E(n) = \tfrac{2}{3}n - \tfrac{1}{90}n^2$$

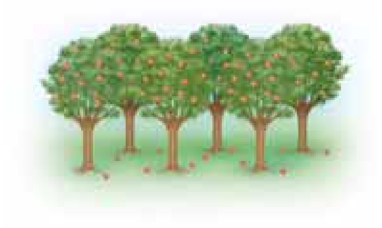
donde n es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

68. Productos farmacéuticos Cuando cierto medicamento se toma oralmente, la concentración de la droga en el torrente sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \le t \le 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de suero, y cuál es esa máxima concentración?

69. Agricultura El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con que estén plantados los árboles. Si n árboles se plantan en un acre de terreno, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Por lo tanto, el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles deben plantarse por acre para obtener la máxima producción de manzanas?



70. Agricultura En cierto viñedo se encuentra que cada una de las vides produce unas 10 libras de uvas en una temporada cuando unas 700 vides están plantadas por acre. Por cada vid individual que se planta, la producción de cada vid disminuye alrededor de 1 por ciento. Por lo tanto, el número de libras de uvas producidas por acre está modelado por

$$A(n) = (700 + n)(10 - 0.01n)$$

donde n es el número de vides adicionales. Encuentre el número de vides que deben plantarse para llevar al máximo la producción de uvas.

71-74 ■ Use las fórmulas de esta sección par dar una solución alternativa al problema indicado en *Enfoque en el modelado: Modelado con funciones* en las páginas 220-221.

71. Problema 21

72. Problema 22

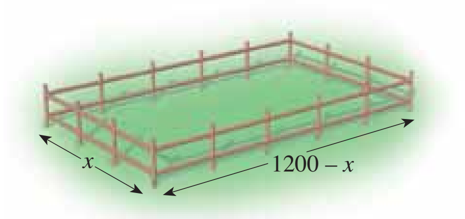
73. Problema 25

74. Problema 24

75. Cercar un corral para caballos Carol tiene 2400 pies de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

(a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho x del corral.

(b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.

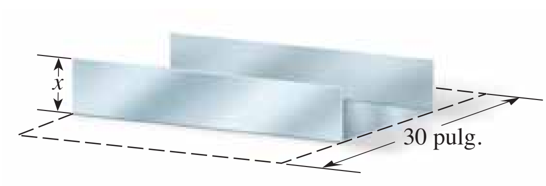


76. Hacer un canal para agua de lluvia Un canal para agua llovediza se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 pulgadas de ancho, como se ve en la figura.

(a) Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de x.

(b) Encuentre el valor de x que lleve al máximo el área de sección transversal del canal.

(c) ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?



77. Ingresos en un estadio Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55,000 espectadores. Con el precio del boleto en \$10, el promedio de asistencia en partidos recientes ha sido de 27,000. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, la asistencia aumenta en 3000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo los ingresos por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto como para no generar ingresos?

78. Maximizar utilidades Una sociedad observadora de aves en cierta comunidad hace y vende alimentadores sencillos de aves, para recaudar dinero para sus actividades de conservación. Los materiales para cada alimentador cuestan \$6, y la sociedad vende un promedio de 20 por semana a un precio de \$10 cada uno. La sociedad ha estado considerando elevar el precio, de modo que lleva a cabo un estudio y encuentra que por cada dólar de aumento, pierde 2 ventas por semana.

(a) Encuentre una función que modele las utilidades semanales en términos del precio por alimentador.

(b) ¿Qué precio debe cobrar la sociedad por cada alimentador para maximizar las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades máximas semanales?

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

79. Vértice y puntos de intersección x Sabemos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = (x - m)(x - n)$ es una parábola. Trace una gráfica aproximada del aspecto que tendría esa parábola. ¿Cuáles son los puntos de intersección x de la gráfica de f? ¿Puede el lector saber de su gráfica cuál es la coordenada x del vértice en términos de m y n? (Use la simetría de la parábola.) Confirme su respuesta al expandir y usar las fórmulas de esta sección.

80. Máximo de una función polinomial de cuarto grado Encuentre el valor máximo de la función

$$f(x) = 3 + x^2 - x^4$$

[*Sugerencia:* Sea $t = x^2$.]

3.2 FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

Graficar funciones polinomiales básicas ▶ Comportamiento final y el término principal ▶ Uso de ceros para graficar funciones polinomiales ▶ Forma de la gráfica cerca de un cero ▶ Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

En esta sección estudiamos funciones polinomiales de cualquier grado. Pero antes de trabajar con funciones polinomiales, debemos estar de acuerdo con cierta terminología.

FUNCIONES POLINOMIALES

Una **función polinomial de grado n** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n, el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal**, y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Con frecuencia nos referimos a funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6.

Coeficiente principal 3

Grado 5

Término constante -6

$$3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 6$$

Término principal $3x^5$

Coeficientes 3, 6, -2, 1, 7 y -6