1.

i) Indicar el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x)=\sqrt{x+2}$ b) $g(x)=\frac{8}{3x-6}$ c) $h(x)=\frac{x^3-2x^2+4x}{-5x-2x^3}$

ii) Calcula, si es posible, los siguientes límites. En el caso que no sea posible, justifique.

a. $\lim_{x\to -2} f(x)=$ b. $\lim_{x\to 1} g(x)=$

c. $\lim_{x\to \infty} h(x)=$ d. $\lim_{x\to 2} g(x)=$

2. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique en ambos casos

a) El resultado de la siguiente integral $\int_{-1}^{2}\frac{4}{x^3}\,dx$ es $-\frac{2}{x^2}\Big]_{-1}^{2}=\frac{3}{2}$

b) La función $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x<1\\ x, & x>1\\ 5, & x=1\end{cases}$ es continua en x=1 porque los limites laterales coinciden.

c) El $\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{-27x^2+1}{2+x^2}}$ existe y es -3

d) La curva $y=\frac{5x+3}{x^2}$ presenta una recta tangente horizontal en el punto (-6/5,-25/12).

3. Dada la curva $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^{\frac{2}{3}}}$, encuentra la ecuación de la recta tangente y normal a la curva en el punto (1, 4).

4.i) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_5^7\left(\frac{x}{\sqrt{2x^2-3}}\right)\mathrm{dx}=$ b) $\int e^{2x}(2x+2x^2+10)dx=$

ii) Calcula el área encerrada por las siguientes curvas:

- La recta que pasar por los puntos (0,3) y (4,1)
- La parábola con vértice en (4,3) y pasa por (2,2)
- Y las rectas x=0 y x=5

Realiza un dibujo de la región determinada por las curvas.

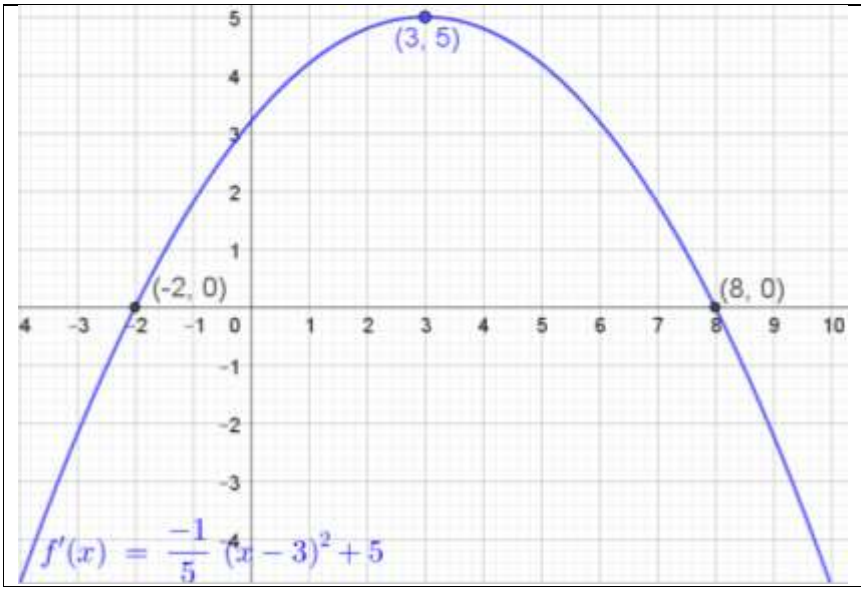
1. Si la función f(x) es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$ significa que f(x) es continua en todos los reales, excepto en x=2

FALSO: $f(x)=|x-2|$ es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$ pero es continua en es derivable en $\mathbb{R}$

2. Si g(x) es una función definida en $[-2{,}3]$, entonces presenta un máximo o mínimo absoluto en ese intervalo.

FALSO: Si g(x) no es continua en $[-2{,}3]$ entonces no necesariamente presenta puntos extremos.

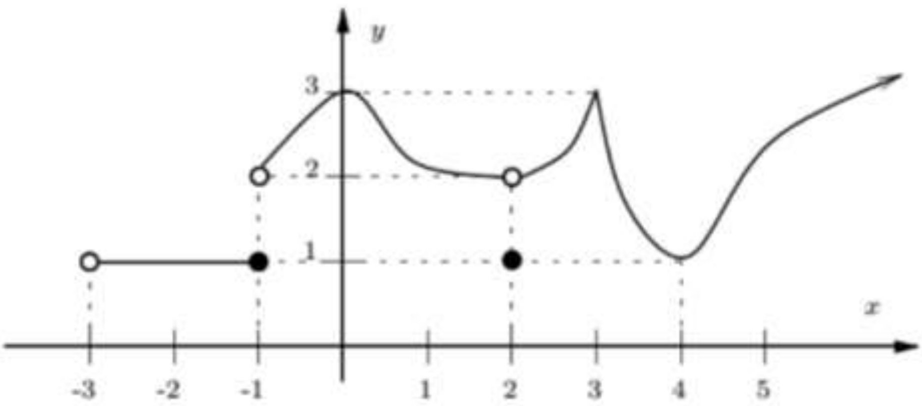
3. A partir de la siguiente gráfica, indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas



a) La función f(x) es continua en $[-3{,}9]$
b) La función f(x) presenta un máximo en x=3
c) La función f(x) presente puntos críticos en x=8 y x=-2
d) El $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=4{,}2$
e) La función f(x) tiene un mínimo local en x=8

a) V
b) F
c) V
d) V
e) F

4. Calcula los siguientes limites e imágenes de la función



(a) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

(b) $\lim_{x\to -1} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(d) $f(-1)$; $f(2)$

(e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

a) 1

b) no existe

c) 2

d) f(-1)=1 y f(2)=1

e)∞

5.- Se considera la función $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. Estudiar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos.

El dominio de definición de esta función es $\mathbb{R}-\{1\}$, calculamos su derivada:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Esta derivada es cero:

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	No definida	-	0	+
f(x)	↗	Max	↘	A.V.	↘	Min	↗

Por tanto la función f(x)
es decreciente en $[0,1[\cup]1,2]$
es creciente en $]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$
Máximo Relativo (0,0)
Mínimo Relativo (2,4)

6.- Encontrar las funciones polinómicas de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cuya segunda derivada sea x-1. ¿Cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4,\frac{-1}{3}\right)$.

Calculamos la primera derivada de f(x): $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
Y después calculamos la segunda derivada: $f'(x)=6ax+2b$
Igualamos ambas:

$$6ax+2b=x-1\Rightarrow\begin{cases}6a=1\rightarrow a=\frac{1}{6}\\2b=-1\rightarrow b=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

Así que las funciones cuya segunda derivada es x-1 son funciones de la forma: $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+cx+d$

Si además tienen un mínimo en el $\left(4,\frac{-1}{3}\right)$, ocurre que $f(4)=-\frac{1}{3}$ y que $f'(4)=0$.

Por tanto:

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ ➔ $f'(4)=48a+8b+c=0$ ➔ $f'(4)=\frac{48}{6}-\frac{8}{2}+c=0$ ➔ C=-4

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ➔ $f(4)=\frac{64}{6}-\frac{16}{2}-16+d=\frac{-1}{3}$ ➔ $d=-11+8+16$ ➔ d=13

Por tanto la función de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cuya derivada segunda sea x-1 y que además tienen un mínimo en $\left(4,\frac{-1}{3}\right)$es:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{6}x^3+-\frac{1}{2}x^2-4x+13}$$

7. Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes. Las alambradas de las divisiones deben quedar paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que su área sea la mayor posible?

Rta debe medir 40x20

8.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hallar los coeficientes a,b,c,d, sabiendo que la función tiene un máximo en (0,3) un mínimo en x=2 y un punto de inflexión en (1,1).

Del máximo en (0,3) $\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$ → $\begin{cases} f(0) = d = 3 \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(0) = c = 0 \end{cases}$

Del mínimo en x=2 → $f'(2) = 0$ → $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(2) = 6a + 4b + c = 2$

Del punto de inflexión en (1,1) → $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f''(1) = 0 \end{cases}$ → $\begin{cases} f(1) = a + b + c + d = 1 \\ f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 6a + 2b = 0 \end{cases}$

Con todas estas ecuaciones tenemos:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 6a + 2b = 0 \\ c = 0 \\ d = 3 \end{cases}$$

De donde:

(2)-2(1)→ 4a-6=-2 → a=1

Y de (2) b=-3

Por tanto la función pedida es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

9.- Hallar un punto del intervalo [0,1], donde la tangente a la curva $f(x) = 1 + x - x^2$, sea paralela al eje de abscisas.

Si la recta tangente es paralela al eje de abscisas, es porque su pendiente es cero, entonces en ese punto la derivada es cero:

$$f'(c) = 0$$

Calculamos la derivada f(x):

$$f'(c) = 1 - 2c$$

Y tiene que ser igual a cero.

$$f'(c) = 0 \rightarrow 1 - 2c = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Vemos que el punto donde la curva de f(x) tiene una tangente de pendiente cero, o paralela al eje OX, es en el x=0,5, que por supuesto pertenece al intervalo [0,1].

10.- Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ ***sea:***

a) Paralela el eje OX
b) Paralela a la recta: $g(x)=5x+3$

c) Perpendicular a la recta: $h(x)=\frac{x}{3}+1$

a) Si la recta tangente es paralela al eje OX, entonces su pendiente es cero. m=0.

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=0 \\ f'(c)=c^2-2c-3 \end{array}\right\} \rightarrow c^2-2c-c=0 \rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ c=3 \end{cases}$$

Entonces la curva de f(x) tiene rectas tangentes paralelas al eje Ox en los puntos x=-1 y x=3.

b) Si la recta tangente es paralela a otra, entonces su pendiente es la misma que la de esta otra recta. Por tanto aquí m=5.

Así que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=5 \\ f'(c)=c^2-2c-3 \end{array}\right\} \rightarrow c^2-2c-3=5 \rightarrow c^2-2c-8=0 \rightarrow \begin{cases} c=4 \\ c=-2 \end{cases}$$

Entonces la curva de f(x) tiene rectas tangentes paralelas a la recta y=5x+3 los puntos x=-2 y x=4.

c) Si la recta tangente es perpendicular a otra recta, entonces su pendiente es la opuesta de la inversa, es decir: Si como en este caso la pendiente de la recta es $m=\frac{1}{3}$, lo que hacemos es invertirla: $m'=3$, y después le cambiamos el signo: $m''=-3$.

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=-3 \\ f'(c)=c^2-2c-3 \end{array}\right\} \rightarrow c^2-2c-3=-3 \rightarrow c^2-2c=0 \rightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=2 \end{cases}$$

Entonces la curva de f(x) tiene rectas tangentes perpendiculares a la recta $\frac{x}{3}+1$ en los puntos x=0 y x=2.

11.- *Halla el punto de la curva $f(x)=\ln(1+x^2)$ en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa x=1.*

En este ejercicio lo primero es calcular la recta tangente en el punto x=1.

Calculamos f'(1): $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2} \rightarrow f'(1)=\dfrac{2}{2}=1$, por tanto la pendiente de la recta tangente en x=1 es m=1.

Como dicen que es perpendicular, la invertimos y le cambiamos el signo: $m'=-1$
Así que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=-1 \\ f'(c)=\dfrac{2c}{1+c^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2c}{1+c^2}=-1 \rightarrow 2c=-1-c^2 \rightarrow c^2+2c+1=0 \rightarrow (c+1)^2=0 \rightarrow c=-1$$

Entonces la curva de f(x) tiene una recta tangente perpendicular a la recta tangente trazada en el punto x=1 en el punto de abscisa x=-1.

12.- *Consideremos la función la función $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$*

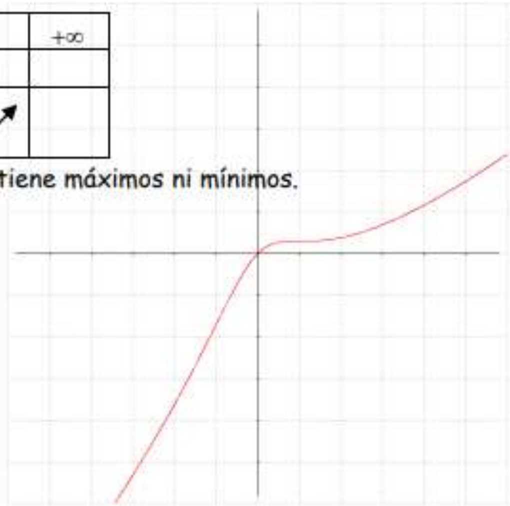
a) *Determina sus máximos, mínimos y puntos de inflexión*

b) *Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

El dominio de definición de esta función es la recta real. $Dom(f)=\mathbb{R}$
Calculamos su derivada:

$$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1} \rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

	$-\infty$		+1		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f(x)		↗		↗	



Como $f'(x)\geq 0$, la función es siempre creciente, por tanto no tiene máximos ni mínimos.

Para ver sus puntos de inflexión calculamos la 2ª derivada:

$$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}$$
$$f''(x)=-\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$
$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

Por tanto la función presenta sendos puntos de inflexión en los puntos de abscisas x=-1 y x=1.