UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SANTA FE

Facultad de Ciencias de la Salud

Carrera: Farmacia

Matemática: 2da Parte

Equipo docente: Lic. Dra. Karina Torres
Prof. María Eugenia Cammisi

<u>TEMAS:</u>

LÍMITES, DERIVADAS Y DIFERENCIALES

INTEGRALES

DERIVADAS PARCIALES

INTEGRALES MULTIPLES Y CURVILINEAS

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

EDICIÓN REVISADA

CÁLCULO

De una variable

Trascendentes tempranas

JAMES STEWART

Sexta edición

CÁLCULO

DE UNA VARIABLE

Trascendentes tempranas

SEXTA EDICIÓN

(Edición revisada)

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY

Traducción:

Jorge Humberto Romo M.
Traductor Profesional

Revisión técnica:

Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional Interdisciplinaria
en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional

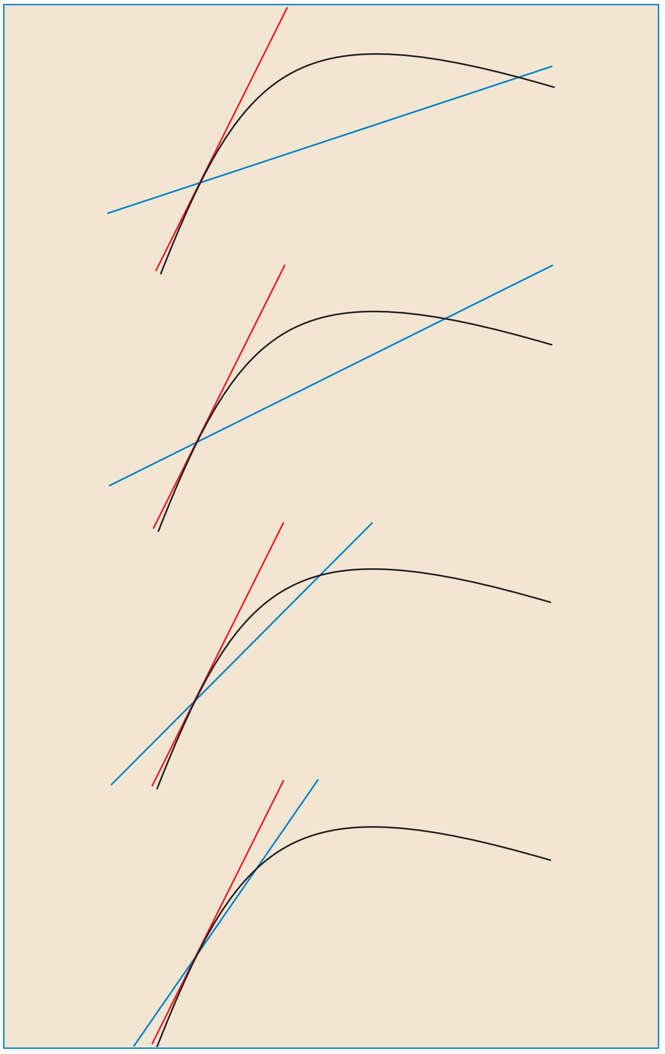
M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

CENGAGE Learning

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

2

LÍMITES Y DERIVADAS



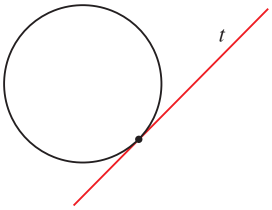
La idea de un límite se ilustra mediante líneas secantes que se aproximan a una línea tangente.

En la presentación preliminar del Cálculo (página 2) se ve cómo la idea de límite sustenta las diversas ramas del cálculo; de ahí la importancia de empezar el estudio de éste investigando los límites y sus propiedades. El tipo especial de límites utilizados para la obtención de tangentes y velocidades conducen a la idea central del Cálculo Diferencial: la derivada.

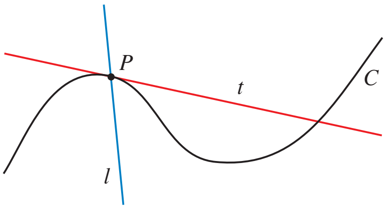
2.1 LA TANGENTE Y LOS PROBLEMAS DE LA VELOCIDAD

En esta sección se analiza cómo surgen los límites cuando se intenta hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

PROBLEMA DE LA TANGENTE



(a)



(b)

FIGURA 1

La palabra *tangente* se deriva de la palabra latina *tangens*, la cual significa "tocar". De este modo, una tangente a una curva es una recta que toca la curva. ¿De qué manera se puede precisar esta idea?

Para una circunferencia podría seguirse la idea de Euclides y decir que una tangente es una recta que intersecta a la circunferencia una y sólo una vez como en la figura 1(a). Para curvas más complicadas, esta definición es inadecuada. En la figura 1(b), se muestran dos rectas, l y t, que intersectan a la curva C en un punto P. La recta l interseca C sólo una vez, pero es evidente que no se parece a lo que consideramos una tangente. Por otra parte, la recta t parece una tangente pero intersecta a la curva C dos veces.

Para ser específicos, considere el problema de intentar hallar una recta tangente t a la parábola $y = x^2$ en el ejemplo siguiente.

▼ EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1, 1)$.

SOLUCIÓN Podremos obtener la ecuación de la recta tangente al conocer su pendiente. La dificultad es que se conoce sólo un punto P, de t, en tanto que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente. Pero puede calcular una aproximación para m si elige un punto cercano $Q(x, x^2)$ de la parábola (como en la figura 2) y calcular la pendiente m_{PQ} de la línea secante PQ.

Elija $x \neq 1$, de modo que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

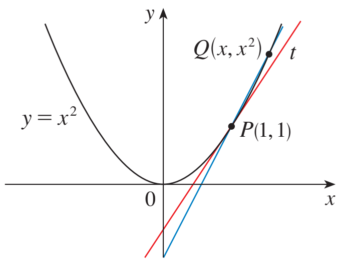


FIGURA 2

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Por ejemplo, para el punto $Q(1.5, 2.25)$

$$m_{PQ} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

Las tablas en el margen muestran los valores de m_{PQ} para varios valores de x cercanos a 1. Entre más cerca está Q de P, más lo está x de 1 y, por lo que se ve en las tablas, m_{PQ} está más próxima a 2. Esto sugiere que la pendiente de la recta tangente t debe ser $m = 2$.

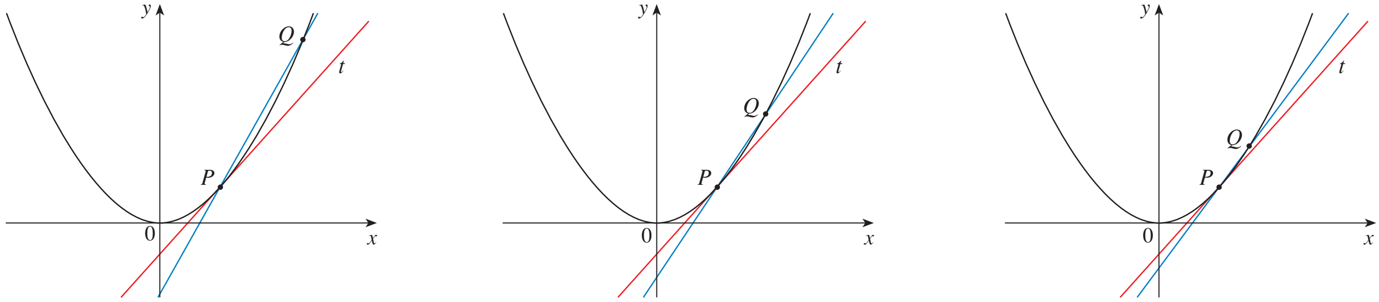
Decimos que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes y, simbólicamente, expresamos esto al escribir

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

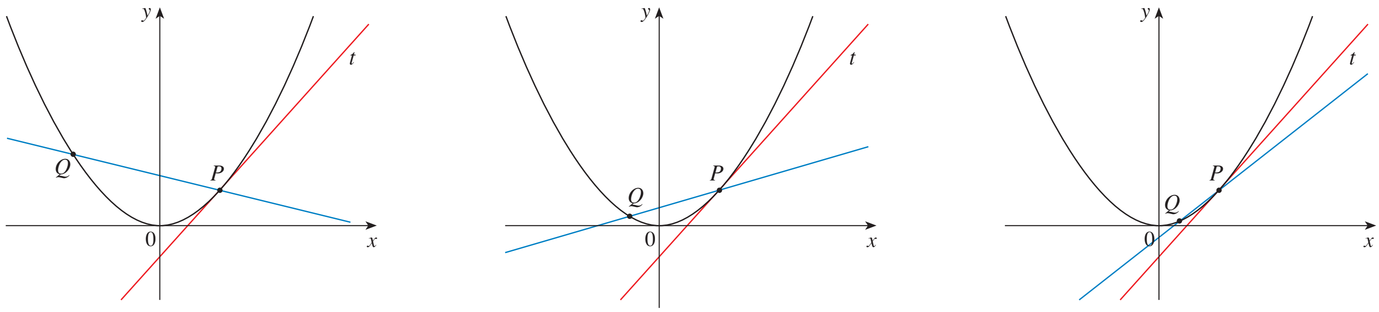
Si supone que, en efecto, la pendiente de la recta tangente es 2, use la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta (véase el apéndice B) para escribir la ecuación de la recta tangente que pasa por $(1, 1)$ como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

La figura 3 ilustra el proceso de límite que se presenta en este ejemplo. Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la parábola, las rectas secantes correspondientes rotan en torno a P y se aproximan a la recta tangente t.



Q se aproxima a P desde la derecha



Q se aproxima a P desde la izquierda

FIGURA 3

□

TEC En Visual 2.1 puede ver cómo funciona el proceso en la figura 3 para funciones adicionales.

Muchas funciones que se encuentran en las ciencias no se describen mediante una ecuación explícita; se definen por medio de información experimental. En el ejemplo siguiente se indica cómo estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de ese tipo de funciones.

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

V EJEMPLO 2 La unidad de destello (*flash*) de una cámara funciona por el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina al disparar la unidad. Los datos que se muestran al margen describen la carga Q que resta en el capacitor (medida en microcoulombs) en el tiempo t (medido en segundos después de que la unidad de destello ha sido apagada). Use los datos para dibujar la gráfica de esta función y estime la pendiente de la recta tangente en el punto donde $t = 0.04$. [Nota: la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica que circula del capacitor al bulbo del flash (medida en microamperes).]

SOLUCIÓN En la figura 4 está la información que se proporcionó y se usa para dibujar una curva que se aproxime a la gráfica de la función.

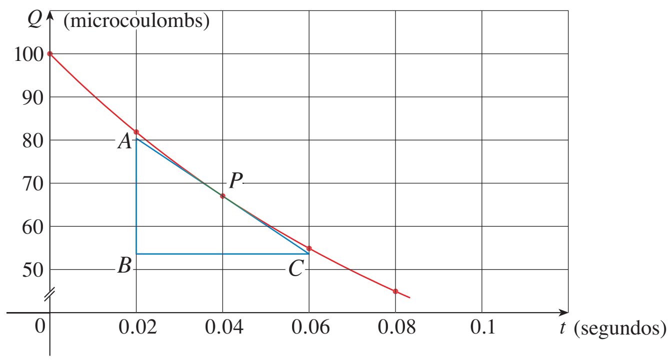


FIGURA 4

A partir de los puntos $P(0.04, 67.03)$ y $R(0.00, 100.00)$ de la gráfica la pendiente de la recta secante es

$$m_{PR} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

En la tabla que aparece a la izquierda se muestran los resultados de cálculos similares para las pendientes de otras rectas secantes. Con base en esa tabla cabe esperar que la pendiente de la recta tangente en $t = 0.04$ se encuentre en algún valor entre -742 y -607.5. De hecho, el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes más próximas es

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75$$

Así, mediante este método estimamos la pendiente de la recta tangente como -675.

Otro método es trazar una aproximación a la recta tangente en P y medir los lados del triángulo ABC como en la figura 4. Esto da una estimación de la pendiente de la recta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670$$ □

■ El significado físico de la respuesta del ejemplo 2 es que la corriente eléctrica que fluye del capacitor al foco del *flash* después de 0.04 de segundo es de casi de –670 microamperes.

EL PROBLEMA DE LA VELOCIDAD

Si observa el velocímetro de un automóvil al viajar en el tráfico de la ciudad, puede ver que la aguja no permanece inmóvil mucho tiempo; es decir, la velocidad del auto no es constante. Al observar el velocímetro, el vehículo tiene una velocidad definida en cada momento, ¿pero cómo se define la velocidad "instantánea"? Investiguemos el ejemplo de una pelota que cae.

La Torre CN en Toronto es el edificio autoestable más alto del mundo en la actualidad.

V EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la Torre CN en Toronto, 450 m por encima del nivel del suelo. Encuentre la velocidad de la pelota una vez que transcurren 5 segundos.

SOLUCIÓN A través de experimentos que se llevaron a cabo cuatro siglos atrás, Galileo descubrió que la distancia que recorre cualquier cuerpo que cae libremente es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (En este modelo de caída libre no se considera la resistencia del aire.) Si la distancia recorrida después de t segundos se denota mediante $s(t)$ y se mide en metros, entonces la ley de Galileo se expresa con la ecuación

$$s(t) = 4.9t^2$$

La dificultad para hallar la velocidad después de 5 s es que trata con un solo instante ($t = 5$), de modo que no interviene un intervalo. Sin embargo, puede tener una aproximación de la cantidad deseada calculando la velocidad promedio durante el breve intervalo de una décima de segundo, desde $t = 5$ hasta $t = 5.1$:

$$\begin{aligned}\text{velocidad promedio} &= \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}}\\ &= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1}\\ &= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s}\end{aligned}$$

En la tabla siguiente se muestran los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante periodos sucesivamente cada vez más pequeños

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53.9
$5 \leqslant t \leqslant 5.1$	49.49
$5 \leqslant t \leqslant 5.05$	49.245
$5 \leqslant t \leqslant 5.01$	49.049
$5 \leqslant t \leqslant 5.001$	49.0049

Parece que conforme acorta el periodo, la velocidad promedio se aproxima a 49 m/s. La **velocidad instantánea**, cuando $t = 5$, se define como el valor límite de estas velocidades promedio, durante periodos cada vez más cortos que se inician en $t = 5$. En estos términos, la velocidad (instantánea) después de 5 s es

$$v = 49 \text{ m/s}$$ □

Quizá sienta que los cálculos que se utilizan en la solución de este problema son muy semejantes a los que se aplicaron con anterioridad en esta sección para hallar tangentes. De hecho, existe una relación íntima entre el problema de la tangente y el de hallar velocidades. Si dibuja la gráfica de la función distancia de la pelota (como en la figura 5) y considera los puntos $P(a, 4.9a^2)$ y $Q(a + h, 4.9(a + h)^2)$ de la gráfica, en tonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h) - a}$$

la cual es la misma que la velocidad promedio durante el periodo $[a, a + h]$. Por lo tanto, la velocidad en el instante $t = a$ (el límite de estas velocidades promedio a medida que h tiende a 0) debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en P (el límite de las pendientes de las rectas secantes).

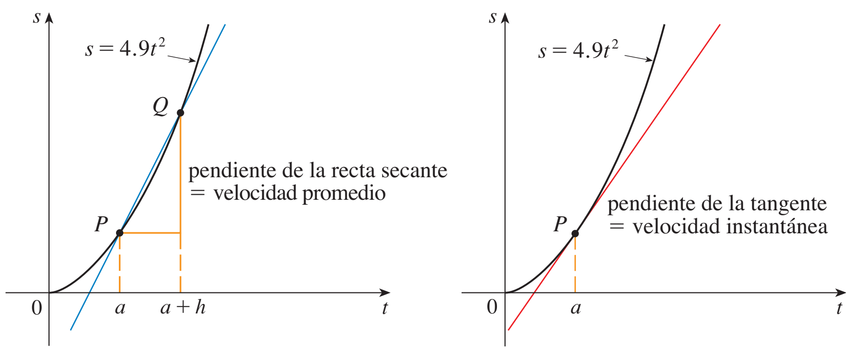


FIGURA 5

Los ejemplos 1 y 3 hacen ver que para resolver problemas de tangentes y de velocidades, debe ser capaz de hallar límites. Después de estudiar los métodos para calcular límites en las cinco secciones siguientes, en la sección 2.7 regresará a los problemas de hallar tangentes y velocidades.

2.1 EJERCICIOS

1. Un depósito contiene 1 000 galones de agua que se drenan desde la parte inferior en media hora. Los valores que aparecen en la tabla muestran el volumen V de agua que resta en el tanque (en galones) una vez que transcurren t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

(a) Si P es el punto (15, 250) en la gráfica de V, encuentre las pendientes de las rectas secantes PQ cuando Q es el punto en la gráfica con $t = 5$, 10, 20, 25 y 30.
(b) Estime la pendiente de la recta tangente en P promediando las pendientes de dos rectas secantes.
(c) Use una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en P. (Esta pendiente representa la cantidad a la que fluye el agua desde el tanque después de 15 minutos.)

2. Se usa un monitor cardiaco para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. Éste recopila el número de latidos cardiacos después de t minutos. Cuando se sitúan los datos de la tabla en una gráfica, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Latidos cardiacos	2 530	2 661	2 806	2 948	3 080

El monitor estima este valor calculando la pendiente de una recta secante. Use los datos para estimar la frecuencia cardiaca del paciente, después de 42 minutos, usando la recta secante entre los puntos
(a) $t = 36$ y $t = 42$ (b) $t = 38$ y $t = 42$
(c) $t = 40$ y $t = 42$ (d) $t = 42$ y $t = 44$
¿Cuáles son sus conclusiones?

3. El punto $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ está sobre la curva $y = x/(1 + x)$.
(a) Si Q es el punto $(x, x/(1 + x))$, use su calculadora para hallar la pendiente de la recta secante PQ (correcta hasta seis cifras decimales) para los valores de x que se enumeran a continuación:
(i) 0.5 (ii) 0.9 (iii) 0.99 (iv) 0.999
(v) 1.5 (vi) 1.1 (vii) 1.01 (viii) 1.001
(b) Mediante los resultados del inciso (a) conjeture el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Usando la pendiente del inciso (b) encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

4. El punto $P(3, 1)$ se encuentra sobre la curva $y = \sqrt{x - 2}$
(a) Si Q es el punto $\left(x, \sqrt{x - 2}\right)$, mediante una calculadora determine la pendiente de la secante PQ (con seis cifras decimales) para los valores siguientes de x:
(i) 2.5 (ii) 2.9 (iii) 2.99 (iv) 2.999
(v) 3.5 (vi) 3.1 (vii) 3.01 (viii) 3.001
(b) Por medio de los resultados del inciso (a), conjeture el valor de la pendiente de la recta tangente en $P(3, 1)$.
(c) Mediante la pendiente del inciso (b), halle una ecuación de la recta tangente a la curva en $P(3, 1)$.
(d) Trace la curva, dos de las rectas secantes y la recta tangente.

5. Si se lanza una pelota en el aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura en pies, después de t segundos, se expresa por $y = 40t - 16t^2$.
(a) Encuentre la velocidad promedio para el periodo que se inicia cuando $t = 2$ y dura:
(i) 0.5 seg (ii) 0.1 seg
(iii) 0.05 seg (iv) 0.01 seg
(b) Estime la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

6. Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura en metros t segundos después se proporciona mediante $y = 10t - 1.86t^2$.
(a) Hallar la velocidad promedio en los intervalos de tiempo que se proporcionan:
(i) [1, 2] (ii) [1, 1.5] (iii) [1, 1.1]
(iv) [1, 1.01] (v) [1, 1.001]
(b) Estimar la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

7. La tabla exhibe la posición de un ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

(a) Hallar la velocidad promedio para cada periodo:
(i) [1, 3] (ii) [2, 3] (iii) [3, 5] (iv) [3, 4]
(b) Use la gráfica de s como una función de t para estimar la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

8. El desplazamiento (en centímetros) de una partícula de atrás hacia adelante en una línea recta se conoce por la ecuación de movimiento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, donde t se mide en segundos.
(a) Encuentre la velocidad promedio durante cada periodo:
(i) [1, 2] (ii) [1, 1.1]
(iii) [1, 1.01] (iv) [1, 1.001]
(b) Estimar la velocidad instantánea de la partícula cuando $t = 1$.

9. El punto $P(1, 0)$ está sobre la curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.
(a) Si Q es el punto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, encuentre la pendiente de la recta secante PQ (correcta hasta cuatro cifras decimales) para $s = 2$, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9. ¿Parece que las pendientes tienden a un límite?
(b) Use una gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes del inciso (a) no están cercanas a la pendiente de la recta tangente en P.
(c) Mediante la selección de rectas secantes apropiadas, estime la pendiente de la recta tangente en P.

2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

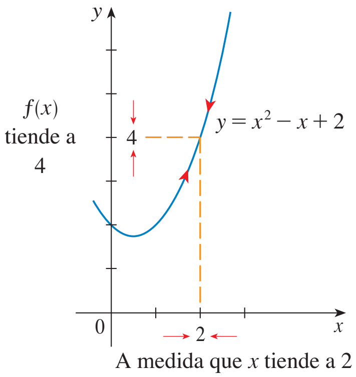


FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Advierta la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, nunca consideró $x = a$. De hecho, incluso no es necesario que $f(x)$ esté definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo está definida f *cerca de a*.

En la figura 2 se muestran las gráficas de tres funciones. Observe que en la parte (c), $f(a)$ no está definida y, en la parte (b), $f(a) \neq L$. Pero en cada caso, sin importar lo que suceda en a, es verdadero que $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

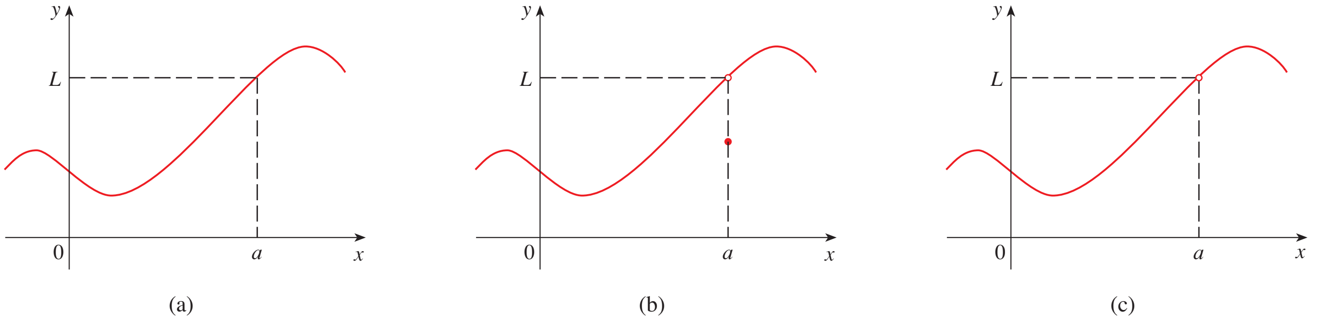


FIGURA 2 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ en los tres casos

EJEMPLO 1 Conjeture el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

SOLUCIÓN Advierta que la función $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero eso no importa porque la definición de $\lim_{x\to a} f(x)$ dice que considere valores de x próximos a a pero diferentes de a.

En las tablas que aparecen al margen izquierdo se proporcionan los valores de $f(x)$ (correctos hasta seis posiciones decimales) para valores de x que tienden a 1 (pero no son iguales a 1). Con base en los valores de las tablas, suponga que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$ □

El ejemplo 1 se ilustra mediante la gráfica de f de la figura 3. Cambie ahora ligeramente el valor de f, dándole un valor de 2 cuando $x = 1$ y denominando a la función resultante como g.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función g todavía tiene el mismo límite conforme x tiende a 1 (véase la figura 4).

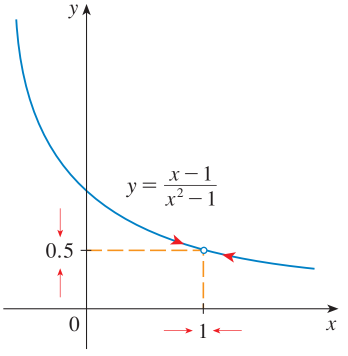


FIGURA 3

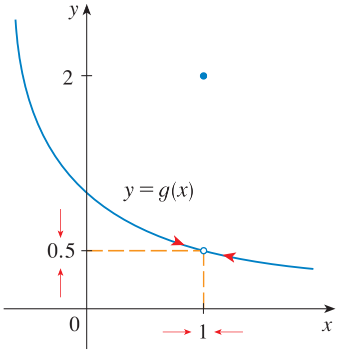


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Estime el valor de $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN En la tabla se enumeran los valores de la función para varios valores de t cercanos a 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

A medida que t tiende a 0, los valores de la función parecen acercarse a 0.1666666... y, por consiguiente, supone que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$ □

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

En el ejemplo 2, ¿qué habría sucedido si hubiera tomado valores incluso más pequeños de t? En la tabla al margen se muestran los resultados que se obtuvieron con una calculadora; usted puede ver que parece suceder algo extraño.

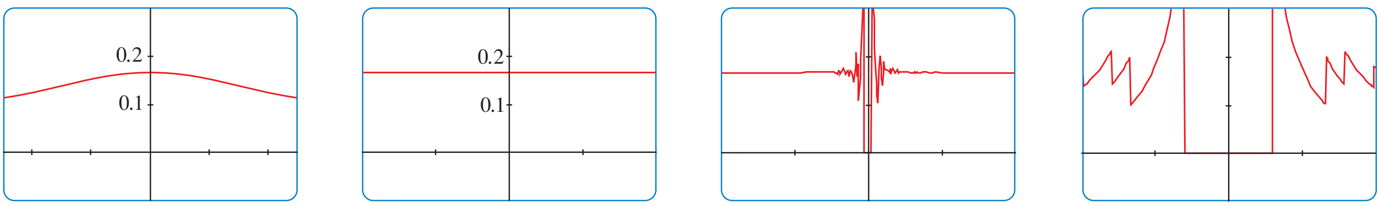
Si intenta realizar estos cálculos en su calculadora podría obtener valores diferentes, pero llegará un momento en que obtendrá el valor 0, si reduce t lo suficiente. ¿Significa esto que la respuesta en realidad es 0, en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como se demostrará en la sección siguiente. El problema es que las calculadoras dan valores falsos porque $\sqrt{t^2 + 9}$ está muy cercana a 3 cuando t es pequeño. (De hecho, cuando t es lo suficientemente pequeño, el valor para $\sqrt{t^2 + 9}$ de una calculadora es 3.000... hasta el número de dígitos que la calculadora es capaz de llevar.)

Algo similar sucede cuando intenta trazar la gráfica de la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

del ejemplo 2 en una calculadora graficadora o en una computadora. Los incisos (a) y (b) de la figura ilustran gráficas bastante exactas de f y, cuando se usa el modo de trazo (si cuenta con él), puede estimar con facilidad que el límite es alrededor de $\frac{1}{6}$. Pero si realiza un acercamiento muy grande, como en los incisos (c) y (d), obtiene gráficas inexactas, una vez más debido a problemas con la sustracción.

www.stewartcalculus.com
Para una explicación más detallada de por qué en ocasiones las calculadoras dan valores falsos, véase el sitio en la red. Dé un clic en *Additional Topics* y luego en *Lies My Calculator and Computer Told Me*. En particular, refiérase a la sección llamada *The Perils of Subtraction*.



(a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$ (b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

FIGURA 5

EJEMPLO 3 Encuentre el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida cuando $x = 0$. Con una calculadora (y recordando que si $x \in \mathbb{R}$, sen x quiere decir el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x), construya la tabla siguiente de valores, correctos hasta ocho posiciones decimales. A partir de la tabla a la izquierda y de la gráfica de la figura 6, suponga que

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

De hecho, esta conjetura es correcta, como se probará en el capítulo 3 mediante la aplicación de un argumento geométrico.

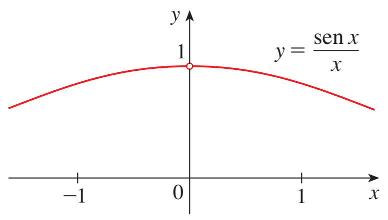


FIGURA 6

□

EJEMPLO 4 Investigue $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Una vez más, la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Si se evalúa la función para algunos valores pequeños de x, resulta

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$
$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$
$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

De manera análoga, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información, podría sentirse tentado a presumir que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

pero en esta ocasión su conjetura es errónea. Advierta que aun cuando $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$, para cualquier entero n, también se cumple que $f(x) = 1$ para un número infinito de valores de x que tienden a 0. La gráfica de f se da en la figura 7.

■ SISTEMAS ALGEBRAICOS PARA COMPUTADORA

Los sistemas algebraicos para computadora (CAS: computer algebra systems, CAS) tienen comandos que calculan límites. En virtud de las dificultades que se demostraron en los ejemplos 2, 4 y 5, no encuentran los límites por experimentación numérica, sino que aplican técnicas más elaboradas, como el cálculo de series infinitas. Si tiene acceso a un CAS, use el comando límite, calcule los límites de los ejemplos de esta sección y compruebe sus respuestas a los ejercicios de este capítulo.

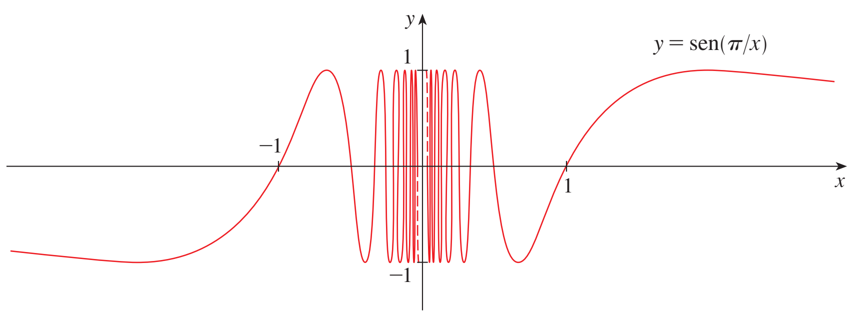


FIGURA 7

Los valores de sen $\left(\frac{\pi}{x}\right)$ fluctúan entre -1 y 1 infinidad de veces, cuando x tiende a cero. (Véase el ejercicio 39.)

Ya que el valor de $f(x)$ no se aproxima a un número fijo cuando x se aproxima a cero.

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{no existe} \qquad \square$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

EJEMPLO 5 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right)$.

SOLUCIÓN Como antes construya una tabla de valores. A partir de la primera tabla que aparece en el margen

$$\lim_{x \to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0$$

Pero si perseveran con valores más pequeños de x, la segunda tabla sugiere que

$$\lim_{x \to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0.000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Más adelante verá que $\lim_{x \to 0} \cos 5x = 1$ y en tal caso se concluye que el límite es 0.0001. $\square$

Los ejemplos 4 y 5 ilustran algunos de los riesgos en la suposición del valor de un límite. Es fácil suponer un valor erróneo, si se usan valores inapropiados de x, pero es difícil saber cuándo suspender el cálculo de valores. Y, como hace ver el análisis que sigue al ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores erróneos. Sin embargo, más adelante se desarrollan métodos infalibles para calcular límites.

V EJEMPLO 6 La función de Heaviside H se define por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

[Esta función recibe ese nombre en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que se hace circular en el instante $t = 0$.] En la figura 8 se muestra su gráfica.

Conforme t se acerca a 0 por la izquierda, $H(t)$ tiende a 0. Cuando t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ tiende a 1. No existe un número único al que $H(t)$ se aproxime cuando t tiende a 0. Por consiguiente, $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe. $\square$

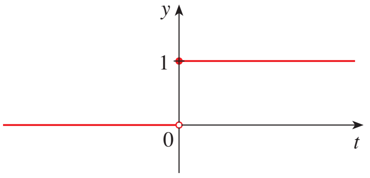


FIGURA 8

LÍMITES LATERALES

En el ejemplo 6 se vio que $H(t)$ tiende a 0 cuando t lo hace a 0 por la izquierda y que esa función tiende a 1 cuando t lo hace a 0 por la derecha. Se indica simbólicamente esta situación escribiendo

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que sólo se consideran valores de t menores que 0. Del mismo modo "$t \to 0^+$" indica que sólo se consideran valores de t mayores que 0.

2 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

y se lee **el límite izquierdo de $f(x)$ cuando x tiende a a** [o el **límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la izquierda**] es igual a L, si puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de a pero menor que a.

Advierta que la definición 2 difiere de la 1 sólo en que x debe ser menor que a. De manera análoga, si requiere que x sea mayor que a, obtiene: "el límite de $f(x)$ por **la derecha cuando x se aproxima a a** es igual a L" y escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Así, el símbolo "$x \to a^+$" significa que considere sólo $x > a$. En la figura 9 se ilustran estas definiciones

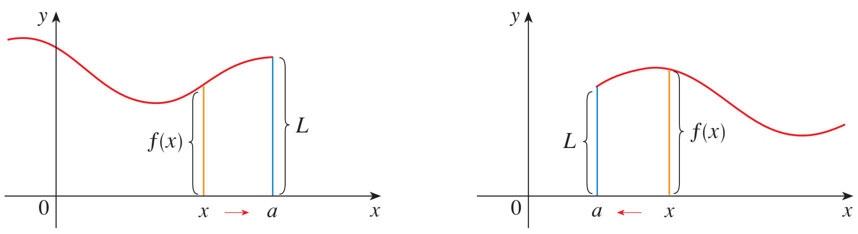


FIGURA 9

(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Al comparar la definición 1 con las definiciones de los límites laterales, se cumple lo siguiente

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

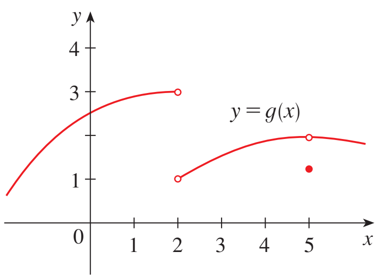


FIGURA 10

V EJEMPLO 7 En la figura 10 se muestra la gráfica de una función g. Úsela para dar los valores (si existen) de los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUCIÓN A partir de la gráfica es claro que los valores de $g(x)$ tienden a 3 cuando x tiende a 2 por la izquierda, pero se acercan a 1 cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Por consiguiente

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Como los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, con base en (3) se concluye que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe

La gráfica muestra también que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) En esta ocasión los límites por la izquierda y la derecha son los mismos y, de este modo, con base en (3)

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

A pesar de este hecho, observe que $g(5) \neq 2$. □

LÍMITES INFINITOS

EJEMPLO 8 Halle $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si existe.

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

SOLUCIÓN Conforme x se aproxima a 0, x^2 también se aproxima a 0 y $1/x^2$ se hace muy grande. (Vea la tabla en el margen.) De hecho, al ver la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ que se muestra en la figura 11, parece que los valores de $f(x)$ se pueden aumentar en forma arbitraria, si se escoge una x lo suficientemente cerca de 0. De este modo los valores de $f(x)$ no tienden a un número, de tal manera que $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ no existe. □

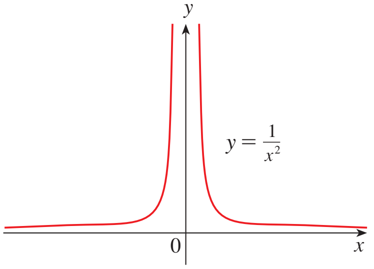


FIGURA 11

Para indicar la clase de comportamiento que se muestra en el ejemplo 8, utilice la notación

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no quiere decir que se considere ∞ como un número. Ni siquiera significa que el límite existe. Simplemente expresa la manera particular en la cual el límite no existe: $1/x^2$ puede ser tan grande como guste llevando a x lo suficientemente cerca de 0.

En general, se escribe simbólicamente

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se vuelven más y más grandes, es decir (se "incrementan sin límite") a medida que x se acerca más y más a a.

4 DEFINICIÓN Sea f una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en a; entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (tan grandes como uno quiera) haciendo que x se acerque suficientemente a a, pero no es igual que a.

Otra notación para $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ es

$$f(x) \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

Recuerde que el símbolo ∞ no es un número, pero la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ se lee con frecuencia como

"el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es el infinito"

o bien, "$f(x)$ se vuelve infinita cuando x se aproxima a a"

o bien, "$f(x)$ se incrementa sin límite cuando x tiende a a"

Esta definición se ilustra en la figura 12.

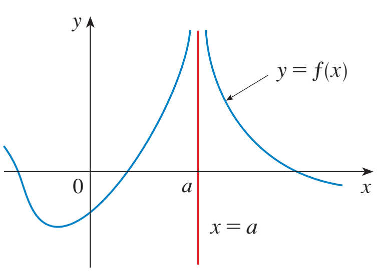


FIGURA 12
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

■ Al decir que un número es "negativo muy grande" significa que es negativo pero su magnitud (valor absoluto) es muy grande o considerablemente grande.

Un tipo similar de límite, para el caso de funciones que manifiestan valores negativos muy grandes cuando x tiende a a, se presenta en la definición 5 y se ilustra en la figura 13.

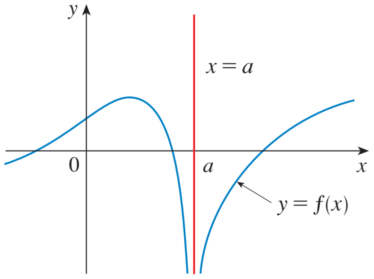


FIGURA 13
$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

5 DEFINICIÓN Sea f una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer de manera arbitraria grandes y negativos al dar valores a x que estén muy cerca de a, pero sin que lleguen a ser iguales a a.

El símbolo $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ quiere decir "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es el infinito negativo" o bien, "$f(x)$ decrece sin cota inferior cuando x tiende a a". Como ejemplo tiene

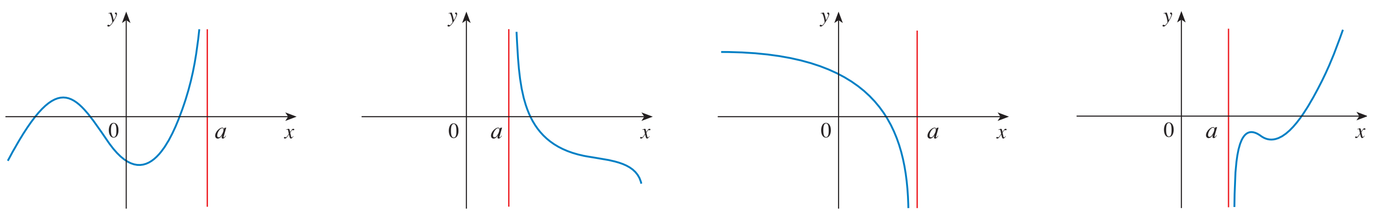
$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

Definiciones similares se pueden dar para los límites infinitos laterales

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

sin olvidar que "$x \to a^-$" significa que considera sólo valores de x que sean menores que a y, de igual manera, "$x \to a^+$" quiere decir que considera sólo $x > a$. Ejemplos de estos cuatro casos se presentan en la figura 14.



(a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$

(b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$

(c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

(d) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

6 DEFINICIÓN La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos uno de los siguientes enunciados es verdadero

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo, el eje y es una asíntota vertical de la curva $y = 1/x^2$ porque $\lim_{x\to 0}(1/x^2) = \infty$. En la figura 14, la recta $x = a$ es una asíntota vertical en cada uno de los cuatro casos mostrados. En general, es muy útil conocer las asíntotas verticales para trazar las gráficas.

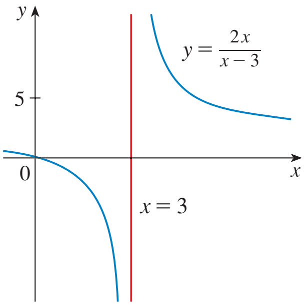


FIGURA 15

EJEMPLO 9 Determine $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ y $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

SOLUCIÓN Si x está en la vecindad de 3, pero es mayor que 3, entonces el denominador $x - 3$ es un número positivo pequeño y $2x$ está cercano a 6. Así, el cociente $2x/(x - 3)$ es un número *positivo* grande. En estos términos, ve intuitivamente que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

De manera similar, si x está cerca de 3 pero es más pequeña que 3, entonces $x - 3$ es un número negativo pequeño, pero $2x$ es aún un número positivo, cercano a 6. De esa manera, $2x/(x - 3)$ es en su magnitud un número *negativo* grande. Por esto,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

La gráfica de la curva $y = 2x/(x - 3)$ se ilustra en la figura 15. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. □

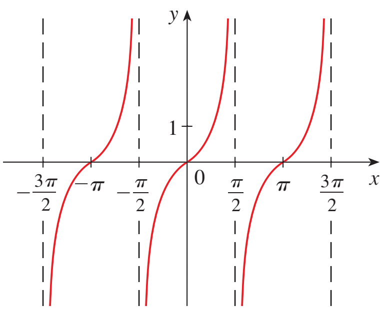


FIGURA 16
$y = \tan x$

EJEMPLO 10 Determine las asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

hay asíntotas verticales potenciales donde $\cos x = 0$. En efecto, como $\cos x \to 0^+$ cuando $x \to (\pi/2)^-$ y $\cos x \to 0^-$ cuando $x \to (\pi/2)^+$, en vista de que sen x es positiva cuando x está cerca de $\pi/2$,

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

Esto demuestra que la recta $x = \pi/2$ es una asíntota vertical. Un razonamiento similar muestra que las rectas $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un entero, son asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$. La gráfica de la figura 16 lo confirma. □

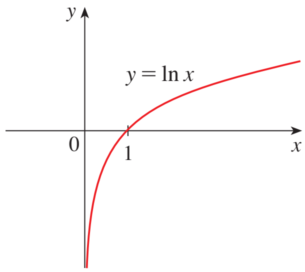


FIGURA 17
El eje y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

Otro ejemplo de una función cuya gráfica tiene una asíntota vertical es la función logaritmo natural $y = \ln x$. A partir de la figura 17

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

y de este modo la recta $x = 0$ (el eje y) es una asíntota vertical. En efecto, lo mismo se cumple para $y = \log_a x$ siempre que $a > 1$. (Véase figuras 11 y 12 de la sección 1.6.)

2.2 EJERCICIOS

1. Explique con sus propias palabras qué se quiere dar a entender mediante la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que se cumpla esta proposición y todavía $f(2) = 3$? Dé una explicación.

2. Explique qué se quiere dar a entender con

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación ¿es posible que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Dé una explicación.

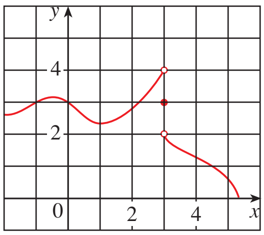
3. Explique el significado de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Para la función f cuya gráfica se proporciona, establezca el valor de cada cantidad, si existe. Si no la hay, explique por qué.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

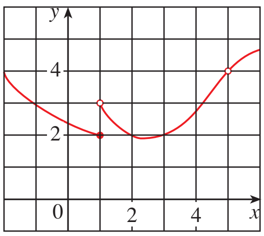
(d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



5. Use la gráfica de f que se proporciona para establecer el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ (e) $f(5)$



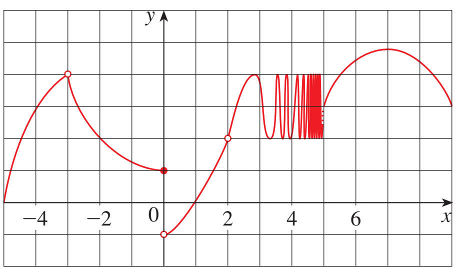
6. Para la función h, cuya gráfica se da, determine el valor de cada cantidad, si existe. En caso que no exista explique por qué.

(a) $\lim\limits_{x\to -3^-} h(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to -3^+} h(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim\limits_{x\to 5^+} h(x)$ (l) $\lim\limits_{x\to 5^-} h(x)$

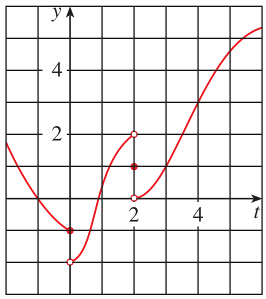


7. Para la función g cuya gráfica se proporciona, establezca el valor de cada cantidad, si acaso existe. Si no existe, explique la razón.

(a) $\lim\limits_{t\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$

(d) $\lim\limits_{t\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(t)$ (f) $\lim\limits_{t\to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim\limits_{t\to 4} g(t)$

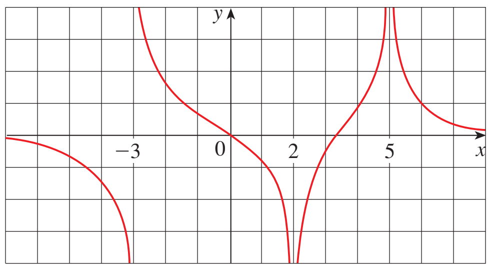


8. En el caso de la función R cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} R(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 5} R(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to -3^-} R(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to -3^+} R(x)$

(e) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.

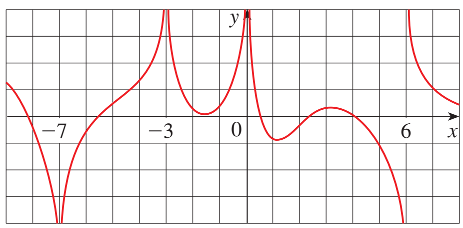


9. En el caso de la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)$

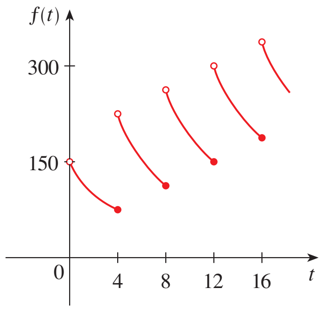
(f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



10. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo, después de t horas.

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

y explique el significado de estos límites laterales.



11. Use la gráfica de la función $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ para establecer el valor de cada límite, si es que existe. Si no existe dé la razón.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

12. Trace la gráfica de la función siguiente y úsela para determinar los valores de a para los cuales existe $\lim_{x\to a} f(x)$ si:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

13–16 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

13. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$

14. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0,$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0)$ no está definida

15. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to -2} f(x) = 2,$

$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

16. $\lim_{x\to 1} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = -3,$

$f(1) = 1, \; f(4) = -1$

17–20 Suponga el valor del límite (siempre y cuando exista) evaluando la función en los números dados (con seis cifras decimales).

17. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001,$
$1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$

18. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 0, -0.5, -0.9, -0.95, -0.99, -0.999,$
$-2, -1.5, -1.1, -1.01, -1.001$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01$

20. $\lim_{x\to 0^+} x \ln(x + x^2)$, $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$

21–24 Mediante una tabla de valores estime el valor del límite. Si dispone de una calculadora o de una computadora para graficar, úsela para confirmar gráficamente sus resultados.

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$

23. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

25–32 Determine el límite infinito.

25. $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{x+2}{x+3}$

26. $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{x+2}{x+3}$

27. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(x-1)^2}$

28. $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{e^x}{(x-5)^3}$

29. $\lim_{x\to 3^+} \ln(x^2 - 9)$

30. $\lim_{x\to \pi^-} \cot x$

31. $\lim_{x\to 2\pi^-} x \csc x$

32. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

33. Determine $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ y $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$

(a) evaluando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para encontrar valores de x que se aproximen a 1 desde la izquierda y desde la derecha.

(b) planteando un razonamiento como en el ejemplo 9 y

(c) a partir de la gráfica de f.

34. (a) Determine las asíntotas verticales de la función

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

(b) Confirme su respuesta del inciso (a) graficando la función.

35. (a) Estime el valor del límite $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$ hasta cinco cifras decimales. ¿Le resulta familiar este número?

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la función $y = (1 + x)^{1/x}$.

36. (a) Grafique la función $f(x) = (\tan 4x)/x$ y realice un acercamiento hacia el punto donde la gráfica cruza el eje y, estimar el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Verificar su respuesta del inciso (a) evaluando $f(x)$ para valores de x que se aproximan a cero.

37. (a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ para $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ y 0.05 y conjeture el valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1000} \right)$$

(b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003$ y 0.001. Conjeture de nuevo.

38. (a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.05

(b) Conjeture el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

(c) Evalúe $h(x)$ para valores cada vez más pequeños de x hasta que finalmente llegue a valores 0 para $h(x)$. ¿Aún está seguro de que lo que conjeturó en el inciso (b) es correcto? Explique por qué obtuvo valores 0 en algún momento. (En la sección 4.4 se explicará un método para evaluar el límite.)

(d) Dibuje la función h en el rectángulo de visualización $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. A continuación haga un acercamiento hasta el punto en que la gráfica cruza el eje y para estimar el límite de $h(x)$ conforme x se aproxima a 0. Prosiga con el acercamiento hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso (c).

39. Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ del ejemplo 4 en el rectángulo de visión $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Después efectúe varias veces un acercamiento hacia el origen. Comente el comportamiento de esta función.

40. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la rapidez de la luz. ¿Qué sucede cuando $v \to c^-$?

41. Estime mediante una gráfica las ecuaciones de todas las asíntotas verticales de la curva

$$y = \tan(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Luego determine las ecuaciones exactas de estas asíntotas.

42. (a) Use evidencia numérica y gráfica para conjeturar el valor del límite.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) ¿Qué tan cerca de 1 tiene que estar x para asegurar que la función del inciso (a) esté dentro de una distancia 0.5 respecto de su límite?

2.3 CÁLCULO DE LÍMITES UTILIZANDO LAS LEYES DE LOS LÍMITES

En la sección 2.2 usó calculadoras y gráficas para suponer los valores de los límites, pero fue claro que esos métodos no siempre conducen a la respuesta correcta. En esta sección aplicará las siguientes propiedades de los límites, conocidas como *leyes de los límites*, para calcularlos.

LEYES DE LOS LÍMITES Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existen. Entonces

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Estas leyes se pueden expresar en forma verbal como sigue

LEY DE LA SUMA

1. El límite de una suma es la suma de los límites.

LEY DE LA DIFERENCIA

2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.

LEY DE MÚLTIPLO CONSTANTE

3. El límite de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por el límite de la función

LEY DEL PRODUCTO

4. El límite de un producto es el producto de los límites.

LEY DEL COCIENTE

5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero).

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ está cercano a L y $g(x)$ lo está de M, resulta razonable concluir que $f(x) + g(x)$ está cercano a $L + M$. Esto da una base intuitiva para creer que la ley 1 es verdadera. En la sección 2.4 aparece una definición precisa de límite; la cual se utilizará para demostrar esta ley. Las demostraciones de las leyes restantes se proporcionan en el apéndice F.

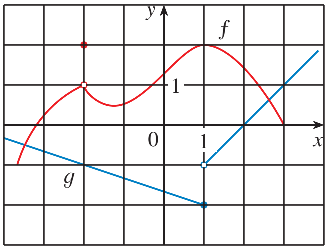


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Use las leyes de los límites y las gráficas de f y g de la figura 1 para evaluar los límites siguientes, si existen.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

SOLUCIÓN

(a) A partir de las gráficas de f y g,

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -2} g(x) = -1$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2} [5g(x)] && \text{(por la ley 1)}\\ &= \lim_{x\to -2} f(x) + 5 \lim_{x\to -2} g(x) && \text{(por la ley 3)}\\ &= 1 + 5(-1) = -4\end{aligned}$$

(b) Observe que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$$

De suerte que no es posible usar la ley 4 para el límite deseado. Pero puede usar la ley 4 para los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x\to 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

los límites izquierdo y derecho no son iguales, así $\lim_{x\to 1} [f(x)g(x)]$ no existe.

(c) Las gráficas muestran que

$$\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = 0$$

Ya que el límite del denominador es 0, no puede aplicar la ley 5. El límite dado no existe porque el denominador se aproxima a cero en tanto que el numerador tiende a un número no cero. □

Si aplica la ley del producto repetidas veces, con $g(x) = f(x)$, obtiene la ley siguiente:

LEY DE LA POTENCIA

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ donde n es un entero positivo

En la aplicación de estas seis leyes de los límites, necesita usar dos límites especiales:

7. $\lim_{x \to a} c = c$

8. $\lim_{x \to a} x = a$

Estos límites son evidentes desde un punto de vista intuitivo (establézcalos verbalmente o dibuje $y = c$ y $y = x$), pero demostraciones en términos de la definición precisa se piden en los ejercicios de la sección 2.4.

Si en la ley 6 pone ahora $f(x) = x$ y aplica la Ley 8, obtiene otro límite especial útil.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo

Se cumple un límite similar para las raíces, como sigue. (En el caso de las raíces cuadradas la demostración se esboza en el ejercicio 37 de la sección 2.4.)

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo

(Si n es par, considere que $a > 0$.)

De modo más general, tiene la siguiente ley, que es verificada como una consecuencia de la ley 10 en la sección 2.5.

LEY DE LA RAÍZ

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo

$\left[\text{Si } n \text{ es par, suponga que } \lim_{x \to a} f(x) > 0.\right]$

EJEMPLO 2 Evalúe los límites siguientes y justifique cada paso.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por las leyes 2 y 1)} \\ &= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por la 3)} \\ &= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(por las 9, 8 y 7)} \\ &= 39 \end{aligned}$$

NEWTON Y LOS LÍMITES

Isaac Newton nació el día de Navidad, en 1642, el año en que murió Galileo. Cuando ingresó a la Universidad de Cambridge, en 1661, no sabía mucho de matemáticas, pero aprendió con rapidez leyendo a Euclides y Descartes y asistiendo a las conferencias de Isaac Barrow. Cambridge se cerró debido a la plaga de 1665 y 1666, y Newton regresó a casa a reflexionar en lo que había aprendido. Esos dos años fueron asombrosamente productivos porque hizo cuatro de sus principales descubrimientos: 1) su representación de funciones como sumas de series infinitas, incluyendo el teorema del binomio; 2) su trabajo sobre el cálculo diferencial e integral; 3) sus leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal y 4) sus experimentos del prisma acerca de la naturaleza de la luz y del color. Debido a cierto temor a la controversia y a la crítica, se mostró renuente a publicar sus descubrimientos y no fue sino hasta 1687, a instancias del astrónomo Halley, que publicó *Principia Mathematica*. En este trabajo, el tratado científico más grande jamás escrito, Newton expuso su versión del cálculo y lo usó para investigar la mecánica, la dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, así como para explicar el movimiento de los planetas y de los cometas.

Los inicios del cálculo se encuentran en las operaciones para hallar las áreas y los volúmenes que realizaron los antiguos eruditos griegos, como Eudoxo y Arquímedes. Aun cuando los aspectos de la idea de límite se encuentran implícitos en su "método de agotamiento", Eudoxo y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de límite. Del mismo modo, matemáticos como Cavalieri, Fermat y Barrow, los precursores inmediatos de Newton en el desarrollo del cálculo, no usaron los límites. Isaac Newton fue el primero en hablar explícitamente al respecto. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se acercan más que cualquier diferencia dada". Newton expresó que el límite era el concepto básico del cálculo, pero fue tarea de matemáticos posteriores, como Cauchy, aclarar sus ideas acerca de los límites.

(b) Empiece con la ley 5, pero su aplicación sólo se justifica plenamente en la etapa final, cuando los límites del numerador y del denominador existen, y este último no es 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x\to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2} (5 - 3x)} && \text{(por la ley 5)}\\
&= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x} && \text{(por las 1, 2 y 3)}\\
&= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} && \text{(por las 9, 8 y 7)}\\
&= -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

□

NOTA Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En otras palabras, habría obtenido la respuesta correcta del ejemplo 2(a) sustituyendo x con 5. De manera análoga, la sustitución directa da la respuesta correcta en el inciso (b). Las funciones del ejemplo 2 son un polinomio y una función racional, respectivamente y el uso semejante de las leyes de los límites prueba que la sustitución directa siempre funciona para este tipo de funciones (vea los ejercicios 53 y 54). Este hecho se expresa del modo siguiente:

PROPIEDAD DE SUSTITUCIÓN DIRECTA Si f es un polinomio o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman *continuas en a* y se estudian en la sección 2.5. Sin embargo, no todos los límites se pueden evaluar por sustitución directa, como los ejemplos siguientes hacen ver.

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No puede hallar el límite al sustituir $x = 1$ porque $f(1)$ no está definido. tampoco puede aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. En lugar de ello, necesita algo de álgebra preliminar. Factorice el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando toma el límite a medida que x tiende a 1, tiene $x \neq 1$ y, por lo tanto, $x - 1 \neq 0$. Por consiguiente, cancele el factor común y calcule el límite como sigue:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

El límite de este ejemplo surgió en la sección 2.1, cuando trató de hallar la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). □

NOTA En el ejemplo 3 fue capaz de calcular el límite sustituyendo la función dada $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ por una función más sencilla, $g(x) = x + 1$, con el mismo límite.

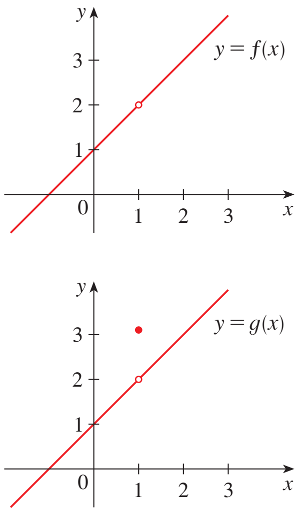


FIGURA 2
Las gráficas de las funciones f (del ejemplo 3) y g (del ejemplo 4)

Esto es válido porque $f(x) = g(x)$ excepto cuando $x = 1$, y al calcular un límite conforme x se aproxima a 1 no se considera qué sucede cuando x es en realidad *igual* a 1. En general tiene el hecho útil siguiente.

> Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, en caso de que exista el límite.

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x \to 1} g(x)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN En este caso, g está definida en $x = 1$ y $g(1) = \pi$, pero el valor de un límite cuando x tiende a 1 no depende del valor de la función en 1. Como $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2 \qquad \square$$

Advierta que los valores de las funciones de los ejemplos 3 y 4 son idénticos, excepto cuando $x = 1$ (véase la figura 2), de modo que tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si define

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

en tal caso, como en el ejemplo 3, no puede calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ haciendo $h = 0$, ya que $F(0)$ no está definido. Pero si simplifica $F(h)$ algebraicamente, encuentra que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que sólo se considera $h \neq 0$ cuando se hace que h tienda a 0.) De este modo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6 \qquad \square$$

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No puede aplicar la ley del cociente de inmediato, puesto que el límite del denominador es 0. En el presente caso, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Este cálculo confirma lo que se conjeturó en el ejemplo 2 de la sección 2.2. $\square$

Lo mejor para calcular algunos límites es hallar en primer lugar los límites por la izquierda y por la derecha. El teorema siguiente es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 2.2. Afirma que existe un límite bilateral si y sólo si los dos límites laterales existen y son iguales.

1 TEOREMA $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Cuando calculamos un límite lateral aplicamos el hecho de que las Leyes de los Límites también se cumplen para los límites de este tipo.

■ Según la figura 3, el resultado del ejemplo 7 parece plausible.

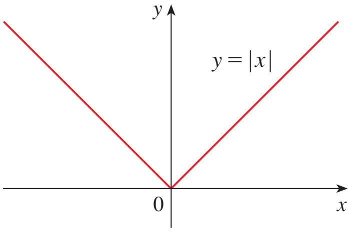


FIGURA 3

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como $|x| = x$ para $x > 0$, tiene

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, tiene $|x| = -x$ y, por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

En consecuencia, por el teorema 1,

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

□

EJEMPLO 8 Compruebe que $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

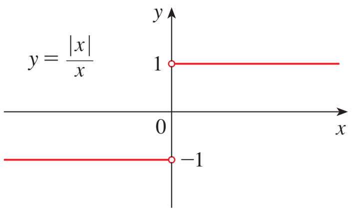


FIGURA 4

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

Como los límites por la derecha y por la izquierda son diferentes, por el teorema 1 se concluye que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe. La figura 4 muestra la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ y apoya los límites laterales que encontró. □

EJEMPLO 9 Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

determine si existe $\lim_{x\to 4} f(x)$.

■ Se demuestra en el ejemplo 3 de la sección 2.4 que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $x > 4$, tiene

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

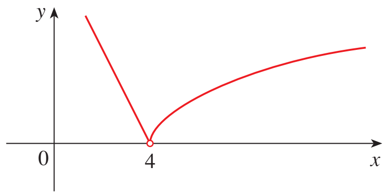


FIGURA 5

Puesto que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, tiene

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Los límites del lado derecho y del lado izquierdo son iguales. Por lo tanto, el límite existe y

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0$$

La gráfica de f se ilustra en la figura 5. □

■ Otras expresiones para $[\![x]\!]$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$. A la función entero máximo algunas veces se le llama la *función piso*.

EJEMPLO 10 La **función mayor entero** se define como $[\![x]\!]$ = el entero más grande que es menor o igual que x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe.

SOLUCIÓN En la figura 6 se muestra la gráfica de la función entero máximo. Puesto que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, tiene

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

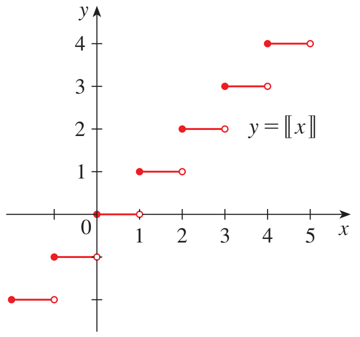


FIGURA 6
Función máximo entero

Dado que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, tiene

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

En virtud de que estos límites unilaterales no son iguales, por el teorema 1, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe. □

En los dos teoremas siguientes se dan dos propiedades adicionales de los límites. Sus demostraciones se proporcionan en el apéndice F.

2 TEOREMA Si $f(x) \leqslant g(x)$, cuando x está cerca de a (excepto posiblemente en a), y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

3 TEOREMA DE LA COMPRESIÓN Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, cuando x está cerca de a (excepto quizá en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces $$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

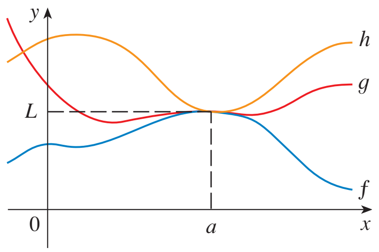


FIGURA 7

En la figura 7 se ilustra el teorema de la compresión, a veces conocido como teorema del emparedado o del apretón. Afirma que si $g(x)$ se comprime entre $f(x)$ y $h(x)$, cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, por lo tanto es forzoso que g tenga el mismo límite L en a

V EJEMPLO 11 Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN En primer lugar, note que **no puede** aplicar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (véase el ejemplo 4, en la sección 2.2). Sin embargo, como

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

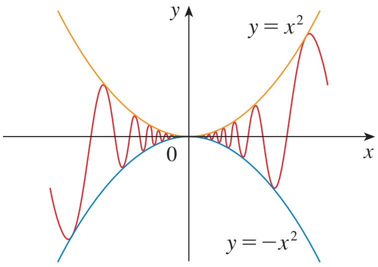


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

tiene, como se ilustra mediante la figura 8,

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

Sabe que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Al tomar $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $h(x) = x^2$ en el teorema de la compresión, obtiene

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$ □

2.3 EJERCICIOS

1. Dado que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 2} h(x) = 0$$

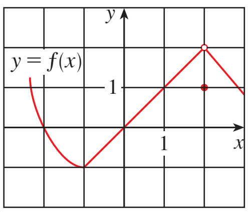
encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

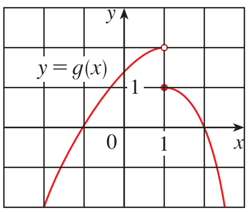
(a) $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim\limits_{x \to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Se dan las gráficas de f y g. Úselas para evaluar cada límite, si existe. Si el límite no existe, explique por qué.





(a) $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim\limits_{x \to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–9 Evalúe el límite y justifique cada etapa indicando la(s) ley(es) de los límites apropiada(s).

3. $\lim\limits_{x \to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$ **4.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4}$

5. $\lim\limits_{x \to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$ **6.** $\lim\limits_{t \to -1} (t^2 + 1)^3(t + 3)^5$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4} \right)^3$ **8.** $\lim\limits_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

9. $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

10. (a) ¿Qué está incorrecto en la ecuación siguiente?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) En vista del inciso (a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 3)$$

es correcta.

11–30 Evalúe el límite, si existe.

11. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x\to -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t\to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

17. $\lim_{h\to 0} \frac{(4 + h)^2 - 16}{h}$

18. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

19. $\lim_{x\to -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{h\to 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

21. $\lim_{t\to 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

22. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

23. $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$

24. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{x\to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

26. $\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t}\right)$

27. $\lim_{x\to 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h\to 0} \frac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \frac{1}{t}\right)$

30. $\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

---

31. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

dibujando la función $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

(b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cerca de 0 e intente el valor del límite.

(c) Use las leyes de los límites para probar que su conjetura es correcta.

32. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ hasta dos cifras decimales.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro cifras decimales.

(c) Utilice las leyes de los límites para hallar el valor exacto del límite.

33. Aplique el teorema de la compresión para demostrar que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos 20\pi x = 0$. Ilustre dibujando las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ y $h(x) = x^2$ en la misma pantalla.

34. Aplique el teorema de la compresión para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\, \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

Ilustre dibujando las funciones f, g y h (en la notación de ese teorema) en la misma pantalla.

35. Si $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, hallar el $\lim_{x\to 4} f(x)$.

36. Si $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para toda x, valorar el $\lim_{x\to 1} g(x)$.

37. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$.

38. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

39–44 Determine el límite, si acaso existe. Si el límite no existe explique la razón.

39. $\lim_{x\to 3} (2x + |x - 3|)$

40. $\lim_{x\to -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}$

41. $\lim_{x\to -0.5^-} \frac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

42. $\lim_{x\to -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$

43. $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$

44. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$

---

45. La *función signum* o *signo* se denota mediante sgn y se define como

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Trace la gráfica de esta función.

(b) Calcule cada uno de los límites siguientes o explique por qué no existe.

(i) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x$

(iii) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

46. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

(b) ¿Existe $\lim_{x\to 2} f(x)$?

(c) Trace la gráfica de f.

47. Sea $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

(a) Encuentre

(i) $\lim_{x\to 1^+} F(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1^-} F(x)$

(b) ¿Existe $\lim_{x\to 1} F(x)$?

(c) Trace la gráfica de F.

48. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada uno de los límites siguientes, si es que existe.

(i) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2} g(x)$

(b) Trace la gráfica de g.

49. (a) Si el símbolo $[\![\ ]\!]$ denota la función mayor entero definida en el ejemplo 10, evalúe

(i) $\lim_{x\to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x\to -2.4} [\![x]\!]$

(b) Si n es un entero, evalúe

(i) $\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$

(c) ¿Para cuáles valores de a existe $\lim_{x\to a} [\![x]\!]$?

50. Sea $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Trace la gráfica de f

(b) Evalúe cada límite, si es que existe.

(i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to(\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to\pi/2} f(x)$

(c) ¿Para cuáles valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$?

51. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, demuestre que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe pero no es igual a $f(2)$.

52. En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad v respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la rapidez de la luz. Encuentre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué se necesita un límite por la izquierda?

53. Si p es un polinomio, demuestre que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

54. Si r es una función racional, aplique el resultado del ejercicio 53 para demostrar que $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$, para todo número a en el dominio de r.

55. Si $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, hallar $\lim_{x\to 1} f(x)$.

56. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, hallar los límites que siguen.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

57. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

58. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aunque no existan ni $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

59. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ puede existir aunque no existan ni $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

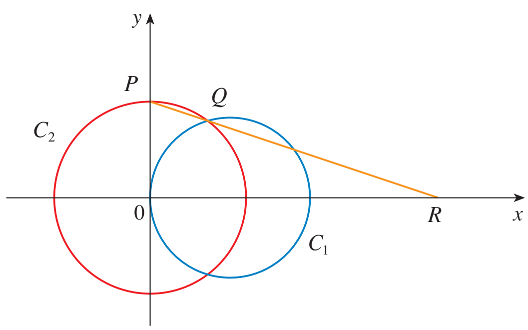
60. Evalúe $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

61. ¿Hay un número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Si es así, encuentre los valores de a y del límite.

62. En la figura se muestra una circunferencia C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y una circunferencia C_2 que se contrae, con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de los dos círculos y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje x. ¿Qué le sucede a R al contraerse C_2; es decir, cuando $r \to 0^+$?



2.5 CONTINUIDAD

En la sección 2.3 se le hizo notar que a menudo se puede hallar el límite de una función cuando x tiende a a, con sólo calcular el valor de la función en a. Se dice que las funciones con esta propiedad son *continuas en a*. Ahora verá que la definición matemática de continuidad corresponde íntimamente al significado de la palabra *continuidad* en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo tiene lugar gradualmente, sin interrupción ni cambio abrupto.)

1 DEFINICIÓN Una función f es **continua en un número a** si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

■ Como se ilustra en la figura 1, si f es continua, después los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de f tienden al punto $(a, f(a))$ de la gráfica. Así, no hay brecha alguna en la curva.

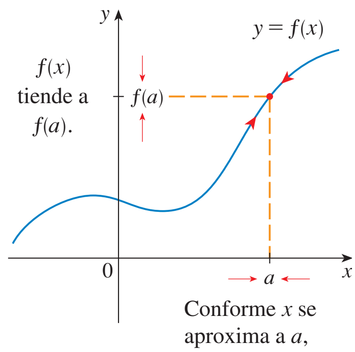


FIGURA 1

Advierta que la definición 1 requiere implícitamente tres cosas si f es continua en a:

1. $f(a)$ está definido (es decir, a está en el dominio de f)

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

La definición afirma que f es continua en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a. Así, una función continua tiene la propiedad de que un cambio pequeño en x sólo produce una pequeña alteración en $f(x)$. De hecho, el cambio en $f(x)$ se puede mantener tan pequeño como desee, restringiendo el cambio en x lo necesario.

Si f está definida cerca de a (en otras palabras, f está definida en un intervalo abierto que contiene a, excepto tal vez en a), f es **discontinua en a** (o f tiene una **discontinuidad** en a) si f no es continua en a.

Los fenómenos físicos suelen ser continuos. Por ejemplo, el desplazamiento o la velocidad de un vehículo varían en forma continua con el tiempo, como pasa con la estatura de una persona. Pero en realidad se presentan discontinuidades en situaciones como las corrientes eléctricas. [Vea el ejemplo 6, de la sección 2.2, donde la función de Heaviside es discontinua en 0 porque $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.]

Geométricamente, una función continua en todo número en un intervalo se puede concebir como una función cuya gráfica no se interrumpe. La gráfica se puede trazar sin levantar la pluma del papel.

EJEMPLO 1 En la figura 2 se muestra la gráfica de una función f. ¿En cuáles números es f discontinua? ¿Por qué?

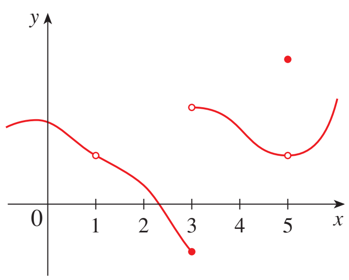


FIGURA 2

SOLUCIÓN Se ve como si hubiera una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene una ruptura allí. La razón oficial de que f sea discontinua en 1 es que $f(1)$ no está definido.

La gráfica también tiene una ruptura cuando $a = 3$, pero la razón de la discontinuidad es diferente. En este caso, $f(3)$ está definido, pero $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes). Por lo tanto, f es discontinua en 3.

¿Qué pasa cuando $x = 5$? En tal caso, $f(5)$ está definido y $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son los mismos). Pero

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

De este modo, f es discontinua en 5. □

Observe ahora cómo detectar las discontinuidades cuando una fórmula define a la función.

EJEMPLO 2 ¿En dónde son discontinuas cada una de las funciones siguientes?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN

(a) Advierta que $f(2)$ no está definido, también f es discontinua en 2. Más adelante verá por qué es continua en todos los otros números.

(b) En este caso, $f(0) = 1$ está definido pero

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe. (Véase el ejemplo 8 en la sección 2.2.) Así, f es discontinua en 0.

(c) En este caso $f(2) = 1$ está definido y

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

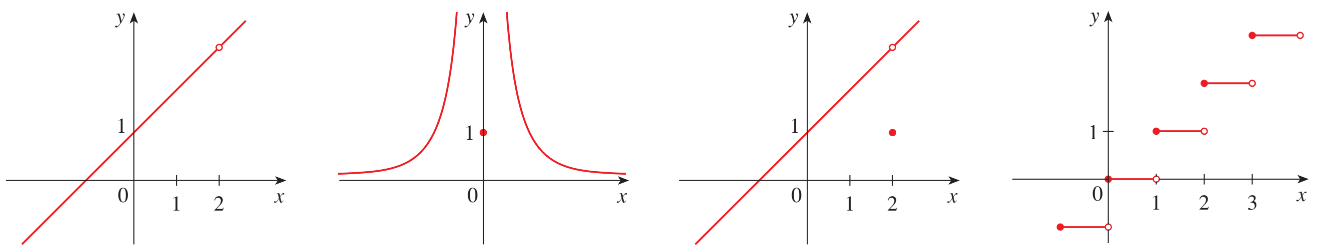
existe. Pero

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

por eso, f no es continua en 2.

(d) La función mayor entero $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros porque $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ no existe si n es un entero. (Véase el ejemplo 10 y el ejercicio 49 de la sección 2.3.) □

En la figura 3 se muestran las gráficas de las funciones del ejemplo 2. En cada caso no se puede dibujar la gráfica sin levantar la pluma del papel, porque se presenta un agujero, una ruptura o un salto en esa gráfica. El tipo de discontinuidad que se ilustra en los incisos (a) y (c) se conoce como **removible** porque la discontinuidad podría eliminarse al redefinir f justo en el número único 2. [La función $g(x) = x + 1$ es continua.] La discontinuidad del inciso (b) recibe el nombre de **discontinuidad infinita**. Las discontinuidades del inciso (d) se llaman **discontinuidad por salto** porque la función "salta" de un valor a otro.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3 Gráficas de las funciones del ejemplo 2

2 DEFINICIÓN Una función f es **continua desde la derecha en un número a** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua desde la izquierda en a** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO 3 En cada entero n, la función $f(x) = [\![x]\!]$ [véase la figura 3(d)] es continua desde la derecha pero discontinua desde la izquierda porque

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

pero
$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$ □

3 DEFINICIÓN Una función f es **continua sobre un intervalo** si es continua en todo número en el intervalo. (Si f se define únicamente en un lado de un punto extremo del intervalo, *continua* quiere decir *continua desde la derecha* o *continua desde la izquierda*.)

EJEMPLO 4 Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN Si $-1 < a < 1$ entonces, al aplicar las leyes de los límites

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(por las leyes 2 y 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(por la ley 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(por las leyes 2, 7 y 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

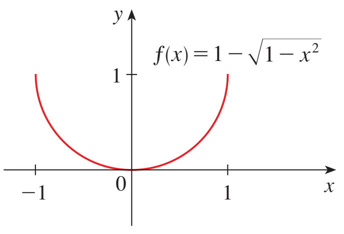


FIGURA 4

De suerte que por la definición 1, f es continua en a si $-1 < a < 1$. Cálculos similares hacen ver que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

de modo que f es continua desde la derecha en -1 y continua desde la izquierda en 1. Por consiguiente, según la definición 3, f es continua sobre $[-1, 1]$.

En la figura 4 se ilustra la gráfica de f. Es la mitad inferior de la circunferencia

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$ □

En lugar de aplicar siempre las definiciones 1, 2 y 3 para comprobar la continuidad de una función, como en el ejemplo 4, a menudo resulta conveniente aplicar el teorema siguiente, el cual muestra cómo formar funciones continuas complicadas a partir de funciones sencillas.

4 TEOREMA Si f y g son continuas en a y c es una constante, entonces las funciones siguientes también son continuas en a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Cada una de las cinco partes de este teorema se infieren de la ley de los límites correspondiente de la sección 2.3. Por ejemplo, demuestra la parte 1. Puesto que f y g son continuas en a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{(por la Ley 1)} \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a) \end{aligned}$$

Esto muestra que $f + g$ es continua en a. □

Del teorema 4 y la definición 3 se deduce que si f y g son continuas sobre un intervalo, también lo son las funciones $f + g$, $f - g$, cf, fg y (si g nunca es 0) f/g. En la sección 2.3 se enunció el siguiente teorema como propiedad de sustitución directa.

5 TEOREMA
(a) Cualquier polinomio es continuo en todas partes; es decir, es continuo sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
(b) Cualquier función racional es continua, siempre que esté definida; es decir, es continua en su dominio.

DEMOSTRACIÓN
(a) Un polinomio es una función de la forma

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes. Sabe que

$$\lim_{x \to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(por la ley 7)}$$

y
$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1.2, \ldots, n \qquad \text{(por la ley 9)}$$

Esta ecuación es precisamente la proposición de que la función $f(x) = x^m$ es una función continua. Por esto, con base en la parte 3 del teorema 4, la función $g(x) = cx^m$ es continua. Dado que P es una suma de funciones de esta forma y una función constante, a partir de la parte 1 del teorema 4 se deduce que P es continua.

(b) Una función racional es una función de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio de f es $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Sabe, del inciso (a), que P y Q son continuas en todas partes. De esta manera, f es continua en todo número en D, de acuerdo con la parte 5 del teorema 4. □

Como ilustración del teorema 5, observe que el volumen de una esfera varía continuamente con su radio porque la fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ hace ver que V es una función polinomial de r. Del mismo modo, si se lanza una pelota verticalmente en el aire, con una velocidad de 50 ft/s, después la fórmula $h = 50t - 16t^2$ expresa la altura de la pelota, en pies, después de t segundos. De nuevo, es una función polinomial, de modo que la altura es una función continua del tiempo transcurrido.

Saber cuáles funciones son continuas permite evaluar algunos límites con mucha rapidez, como demuestra el ejemplo siguiente. Compárelo con el ejemplo 2(b) de la sección 2.3.

EJEMPLO 5 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUCIÓN La función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es racional, de modo que por el teorema 5 es continua sobre su dominio, el cual es $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$. En consecuencia

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$ □

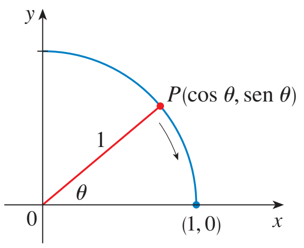


FIGURA 5

Resulta que la mayor parte de las funciones conocidas son continuas en todo número en su dominio. Por ejemplo, la ley de los límites 10 (página 110) es exactamente la proposición de que las funciones raíz son continuas.

Con base en el aspecto de las gráficas de las funciones seno y coseno (figura 18, en la sección 1.2), podría suponer con toda certeza que son continuas. De acuerdo con la definición de sen θ y cos θ sabe que las coordenadas del punto P de la figura 5 son (cos θ, sen θ). Cuando $\theta \to 0$, P tiende al punto (1, 0) y, por consiguiente, cos $\theta \to 1$ y sen $\theta \to 0$. De esta manera

6 $$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$$

■ Otra forma de establecer los límites en (6) es usar el teorema de la compresión con la desigualdad sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), lo cual se prueba en la sección 3.3.

Como cos 0 = 1 y sen 0 = 0, las ecuaciones dadas en (6) afirman que las funciones seno y coseno son continuas en 0. Por lo tanto se pueden aplicar las fórmulas de la adición para coseno y seno para deducir que estas funciones son continuas en todas partes (véase los ejercicios 56 y 57).

De la parte 5 del teorema 4, se deduce que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

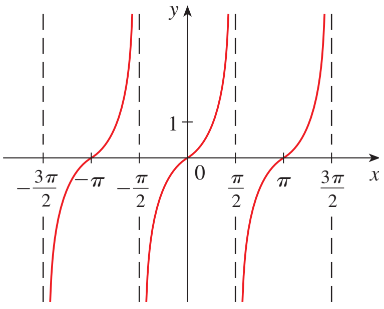


FIGURA 6 $y = \tan x$

■ En la sección 1.6 se hace un repaso de las funciones trigonométricas inversas.

es continua excepto donde $\cos x = 0$. Esto sucede cuando x es un múltiplo impar de $\pi/2$, de modo que $y = \tan x$ tiene discontinuidades infinitas cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, y así sucesivamente (véase la figura 6).

La función inversa de cualquier función uno a uno continua también es continua. (Este hecho se comprueba en el apéndice F, pero la intuición geométrica lo hace parecer razonable: La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la recta $y = x$. También, si la gráfica de f no tiene ruptura alguna, tampoco la tiene la gráfica de f^{-1}.) De este modo, las funciones trigonométricas inversas son continuas.

En la sección 1.5 se definió la función exponencial $y = a^x$ de modo que se llenaran los agujeros en la gráfica de esta función donde x es racional. En otras palabras, la simple definición de $y = a^x$ la hace una función continua sobre $\mathbb{R}$. Por lo tanto, su función inversa $y = \log_a x$ es continua sobre $(0, \infty)$.

7 TEOREMA Los tipos siguientes de funciones son continuos en todo número en sus dominios:

polinomios	funciones racionales	funciones raíz
funciones trigonométricas	funciones trigonométricas inversas	
funciones exponenciales	funciones logarítmicas	

EJEMPLO 6 ¿En dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$?

SOLUCIÓN Por el teorema 7, sabe que la función $y = \ln x$ es continua para $x > 0$ y que $y = \tan^{-1} x$ es continua sobre $\mathbb{R}$. Así, por la parte 1 del teorema 4, $y = \ln x + \tan^{-1} x$ es continua sobre $(0, \infty)$. El denominador, $y = x^2 - 1$, es un polinomio, de modo que es continuo en todas partes. Por lo tanto, por la parte 5 del teorema 4, f es continua en todos los números positivos x, excepto donde $x^2 - 1 = 0$. De este modo, f es continua en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. □

EJEMPLO 7 Hallar el valor numérico del $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUCIÓN El teorema 7 dice que $y = \operatorname{sen} x$ es continua. La función en el denominador, $y = 2 + \cos x$, es la suma de dos funciones continuas y en consecuencia es continua. Dese cuenta que esta función jamás es cero porque $\cos x \geqslant -1$ para toda x y también $2 + \cos x > 0$ en todas partes. En estos términos la relación

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

es continua en todas partes. Por lo tanto, mediante la definición de función continua,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$ □

Otra manera de combinar las funciones continuas f y g para obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es una consecuencia del teorema siguiente.

■ Este teorema expresa que se puede mover un símbolo de límite a través de un símbolo de función, si la función es continua y el límite existe. En otras palabras, se puede invertir el orden de estos dos símbolos.

8 TEOREMA Si f es continua en b y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. En otras palabras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

A nivel intuitivo, este teorema resulta razonable porque si x está cerca de a, después $g(x)$ está cerca de b y como f es continua en b, si $g(x)$ está cerca de b, en seguida $f(g(x))$ está cerca de $f(b)$. Una demostración del teorema 8 se proporciona en el apéndice F.

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$.

SOLUCIÓN Ya que arcsen es una función continua, aplique el teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

□

Aplique el teorema 8 en el caso especial donde $f(x) = \sqrt[n]{x}$, y n es un entero positivo. Entonces

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y

$$f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Si sustituye estas expresiones en el teorema 8 obtiene

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

con lo que queda demostrada la ley 11 de los límites. (Supone que las raíces existen.)

9 TEOREMA Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a.

A menudo, este teorema se expresa de manera informal diciendo: "una función continua de una función continua es una función continua".

DEMOSTRACIÓN Como g es continua en a

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Como f es continua en $b = g(a)$, puede aplicar el teorema 8 para obtener

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que es precisamente la proposición de que la función $h(x) = f(g(x))$ es continua en a; es decir, $f \circ g$ es continua en a. □

EJEMPLO 9 ¿En dónde son continuas las funciones siguientes?

(a) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ (b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUCIÓN

(a) Tiene $h(x) = f(g(x))$ donde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \operatorname{sen} x$$

Ahora g es continua sobre $\mathbb{R}$, puesto que es un polinomio, y f también es continua en todas partes. Por consiguiente, $h = f \circ g$ es continua sobre $\mathbb{R}$ por el teorema 9.

(b) Con base en el teorema 7, sabe que $f(x) = \ln x$ es continua y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua (porque tanto $y = 1$ como $y = \cos x$ son continuas). Por lo tanto, del teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ es continuo siempre que esté definido. Ahora bien, $\ln(1 + \cos x)$ está definido cuando $1 + \cos x > 0$. De este modo, no está definido cuando $\cos x = -1$, y esto sucede cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Por esto, F tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua sobre los intervalos entre estos valores. (Véase la figura 7.) □

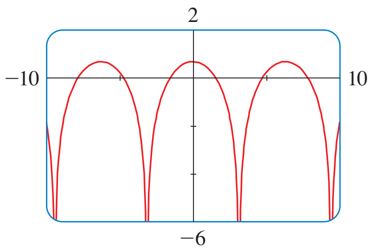


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

Una propiedad importante de las funciones continuas se expresa con el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en libros más avanzados de cálculo.

10 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

El teorema del valor intermedio afirma que una función continua toma todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$. Este hecho se ilustra en la figura 8. Observe que el valor N se puede tomar una vez [como en la parte (a)] o más de una vez [como en la parte (b)].

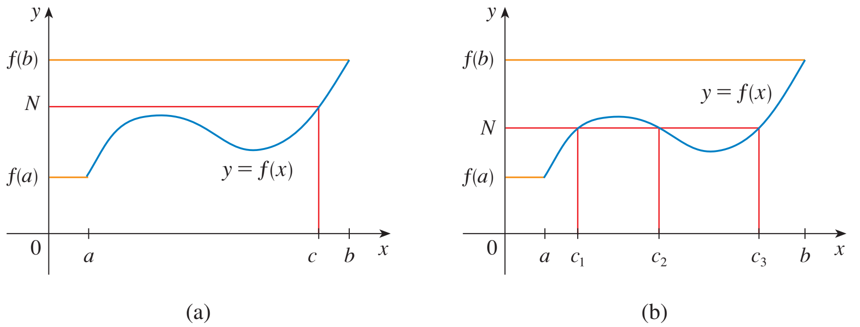


FIGURA 8

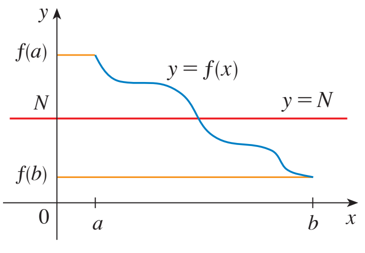


FIGURA 9

Si piensa en una función continua como en una función cuya gráfica no tiene agujeros o rupturas, en tal caso es fácil creer que el teorema del valor intermedio es cierto. En términos geométricos, dice que si se da cualquier recta horizontal $y = N$ entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$, como en la figura 9, por lo tanto la gráfica de f no puede saltar sobre la recta. Debe intersecar $y = N$ en alguna parte.

Es importante que la función f del teorema 10 sea continua. En general, el teorema del valor intermedio no se cumple para las funciones discontinuas (véase el ejercicio 44).

Un uso del teorema del valor intermedio es hallar las raíces de ecuaciones, como en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 10 Demuestre que existe una raíz de la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Busca una solución de la ecuación dada; es decir, un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Por lo tanto, en el teorema 10, toma $a = 1$, $b = 2$ y $N = 0$. Tiene

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

y
$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Por esto, $f(1) < 0 < f(2)$; es decir, $N = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora bien, f es continua porque es un polinomio, de modo que el teorema del valor intermedio afirma que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene por lo menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

De hecho, podemos localizar una raíz con mayor precisión aplicando de nuevo el teorema del valor intermedio. Puesto que

$$f(1.2) = -0.128 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.3) = 0.548 > 0$$

una raíz se debe encontrar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por tanteos,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

de modo que una raíz se encuentra en el intervalo $(1.22, 1.23)$. □

Use una calculadora graficadora o una computadora para ilustrar la aplicación del teorema del valor intermedio en el ejemplo 10. En la figura 10 se muestra la gráfica de f en rectángulo de visualización $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$ y se puede ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. En la figura 11 se muestra el resultado de realizar un acercamiento hacia la pantalla $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$.

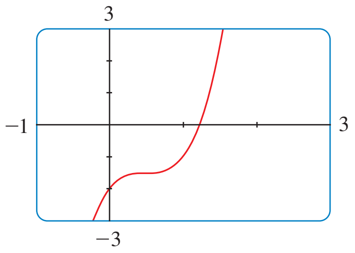


FIGURA 10

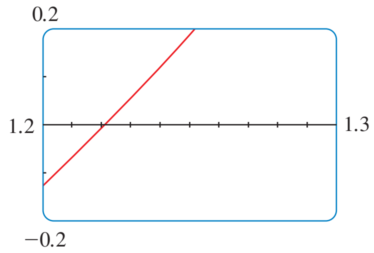


FIGURA 11

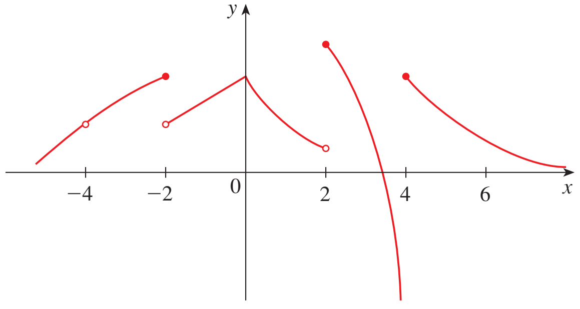
De hecho, el teorema del valor intermedio desempeña un papel en la manera en que funcionan estos aparatos graficadores. Una computadora calcula un número finito de puntos de la gráfica y hace aparecer los pixeles que contienen estos puntos calculados. Supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. En consecuencia, la computadora une los pixeles al hacer aparecer los pixeles intermedios.

2.5 EJERCICIOS

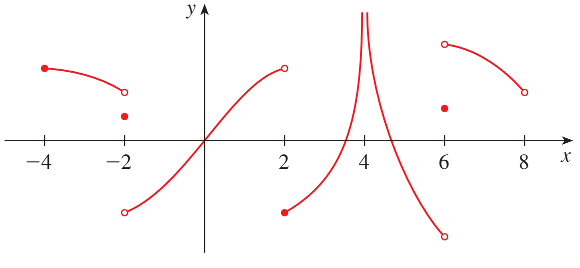
1. Escriba una ecuación que exprese el hecho de que una función f es continua en el número 4.

2. Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, ¿qué puede decir acerca de su gráfica?

3. (a) A partir de la gráfica de f, establezca el número al cual f es discontinua y explique por qué.
   (b) Para cada uno de los números que se determinaron en el inciso (a), determine si f es continua desde la derecha, desde la izquierda o desde ninguno de los dos lados.



4. A partir de la gráfica de g, dé los intervalos sobre los que g es continua.



5. Trace la gráfica de una función que sea continua en todas partes, excepto en $x = 3$, y sea continua desde la izquierda en 3.

6. Dibuje una función que tenga una discontinuidad de salto en $x = 2$ y una discontinuidad removible en $x = 4$, pero que sea continua en todas las demás partes.

7. En un lote de estacionamiento se cobran \$3 por la primera hora (o fracción) y \$2 por cada hora (o fracción) subsiguiente, hasta un máximo diario de \$10.
   (a) Dibuje el costo de estacionar un automóvil en este lote, como función del tiempo que permanezca allí.
   (b) Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que estacione su automóvil en el lote.

8. Explique por qué cada función es continua o discontinua.
   (a) La temperatura en un lugar específico como función del tiempo.
   (b) La temperatura en un momento dado como función de la distancia hacia el oeste de la ciudad de Nueva York
   (c) La altitud sobre el nivel del mar como función de la distancia hacia el oeste de la ciudad de Nueva York.
   (d) El costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida.
   (e) La corriente en el circuito para las luces de una habitación como función del tiempo.

9. Si f y g son funciones continuas con $f(3) = 5$ y $\lim_{x\to 3} [2f(x) - g(x)] = 4$, encuentre $g(3)$.

10–12 Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua en el número a dado.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4$

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

12. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

13–14 Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua en el intervalo

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

14. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$.

15–20 Explique por qué la función es discontinua en el punto dado a. Dibuje la gráfica de la función.

15. $f(x) = \ln|x - 2| \qquad a = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

17. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad a = 0$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

21–28 Con los teoremas 4, 5, 7 y 9 explique por qué la función es continua en todo número en su dominio. Dé el dominio.

21. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$

22. $G(x) = \sqrt[3]{x}\,(1 + x^3)$

23. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$

24. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$

25. $L(t) = e^{-5t} \cos 2\pi t$

26. $F(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 - 1)$

27. $G(t) = \ln(t^4 - 1)$

28. $H(x) = \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

29–30 Localice las discontinuidades de la función e ilústrelas trazando una gráfica.

29. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

30. $y = \ln(\tan^2 x)$

31–34 Aplique la continuidad para evaluar el límite.

31. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

32. $\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

33. $\lim\limits_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

34. $\lim\limits_{x \to 2} \arctan\left(\dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

35–36 Demuestre que f es continua sobre $(-\infty, \infty)$.

35. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{si } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

37–39 Determine los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos valores f es continua por la derecha, por la izquierda o no lo es ni por la derecha ni por la izquierda? Trace la gráfica de f.

37. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

40. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\[2ex] \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G es la constante gravitacional. ¿F es una función continua de r?

41. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

42. Hallar el valor de a y b que hace a f continua en todas partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

43. ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en a? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y es continua en $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

44. Suponga que una función f es continua sobre $[0, 1]$, excepto en 0.25, y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Sea $N = 2$. Trace dos gráficas posibles de f, una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema (aun cuando no satisfaga la hipótesis).

45. Si $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, demuestre que hay un número c tal que $f(c) = 1\,000$.

46. Considere que f es continua en $[1, 5]$ y la única solución de $f(x) = 6$ son $x = 1$ y $x = 4$. Si $f(2) = 8$, explique ¿por qué $f(3) > 6$?

47–50 Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación dada en el intervalo especificado.

47. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

48. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

49. $\cos x = x, \quad (0, 1)$

50. $\ln x = e^{-x}, \quad (1, 2)$

51–52 (a) Compruebe que la ecuación tiene cuando menos una raíz real. (b) Use su calculadora para hallar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

51. $\cos x = x^3$

52. $\ln x = 3 - 2x$

53–54 (a) Pruebe que la ecuación tiene cuando menos una raíz real. (b) Utilice su dispositivo graficador para encontrar la raíz correcta hasta tres cifras decimales.

53. $100e^{-x/100} = 0.01x^2$

54. $\arctan x = 1 - x$

55. Demuestre que f es continua en a si y sólo si

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

56. Para demostrar que seno es continuo necesita demostrar que $\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real a. Según el ejercicio 55, una proposición equivalente es que

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a$$

Aplique (6) para demostrar que esto es cierto.

57. Compruebe que coseno es una función continua.

58. (a) Demuestre el teorema 4, parte 3.
(b) Demuestre el teorema 4, parte 5.

59. ¿Para qué valores de x es continua f?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

60. ¿Para qué valores de x es continua g?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

61. ¿Hay un número que es exactamente 1 más que su cubo?

62. Si a y b son números positivos, comprobar que la ecuación

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tiene por lo menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

63. Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en $(-\infty, \infty)$.

64. (a) Demuestre que la función de valor absoluto $F(x) = |x|$ es continua en todas partes.
(b) Compruebe que si f es una función continua sobre un intervalo, entonces también lo es $|f|$.
(c) ¿Lo inverso de la proposición del inciso (b) también es verdadero? En otras palabras, ¿si $|f|$ es continua se deduce que f es continua? De ser así, compruébelo. En caso de no ser así, halle un ejemplo contrario.

65. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 A.M. y emprende su camino habitual hacia la cima de la montaña, a donde llega a las 7:00 P.M. La mañana siguiente inicia el regreso desde la cima por la misma ruta a las 7:00 A.M. y llega al monasterio a las 7:00 P.M. Mediante el teorema del valor intermedio demuestre que existe un punto a lo largo de la ruta que el monje cruzará exactamente a la misma hora en ambos días.

2.6 LÍMITES AL INFINITO, ASÍNTOTAS HORIZONTALES

En las secciones 2.2 y 2.4 se trataron los límites infinitos y las asíntotas verticales. Ahí se dejó que x se aproximara a un número y el resultado es que los valores de y se vuelven arbitrariamente grandes (ya sean positivos o negativos). En esta sección se permite que x se vuelva arbitrariamente grande en magnitud y se observa qué le sucede a y.

Empiece por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

cuando x se hace grande. La tabla al margen da valores de esta función correctos hasta seis posiciones decimales (o seis dígitos decimales) y, en la figura 1, se ha trazado la gráfica de f por medio de una computadora.

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

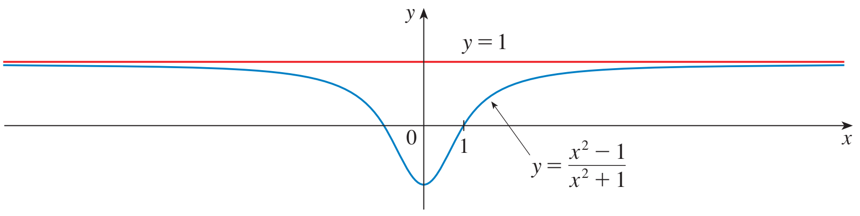


FIGURA 1

Conforme x crece más y más, se puede ver que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a 1. De hecho, parece que puede acercar cuanto quiera los valores de $f(x)$ a 1 eligiendo una x lo suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica escribiendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, use el simbolismo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a L conforme x se hace más y más grande.

> **1 DEFINICIÓN** Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces
>
> $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
>
> significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como desee, si escoge una x suficientemente grande.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{conforme} \quad x \to \infty$$

El símbolo ∞ no representa un número. No obstante, la expresión $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ a menudo se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito, es L"

o "el límite de $f(x)$, cuando x se hace infinito, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x crece sin cota, es L"

La definición 1 da el significado de esas frases. Una definición más exacta, similar a la definición de ε, δ de la sección 2.4 se encuentra al final de esta sección

En la figura 2 se muestran ilustraciones geométricas de la definición 1. Advierta que hay muchas maneras de aproximar la gráfica de f a la recta $y = L$ (la cual se llama *asíntota horizontal*) a medida que ve hacia el extremo derecho de cada gráfica.

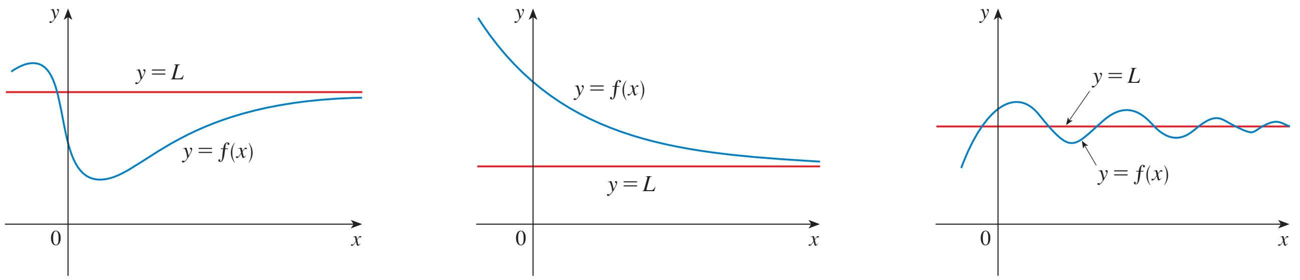


FIGURA 2
Ejemplos que ilustran $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

Si vuelve a la figura 1, verá que para valores negativos de x grandes en magnitud, los valores de $f(x)$ están cercanos a 1. Al decrecer x a través de valores negativos sin cota, puede acercar $f(x)$ a 1 cuanto quiera. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es como sigue:

> **2 DEFINICIÓN** Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces
>
> $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
>
> quiere decir que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea negativa y suficientemente grande en magnitud.

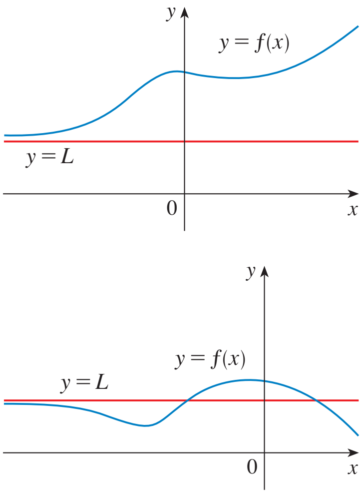


FIGURA 3
Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

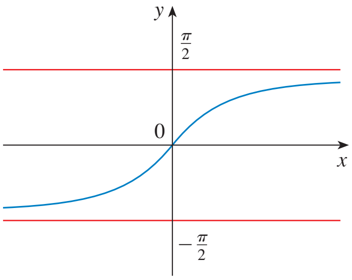


FIGURA 4
$y = \tan^{-1}x$

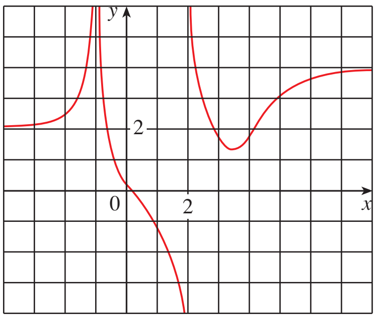


FIGURA 5

Es necesario remarcar que el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se lee a menudo como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito negativo, es L".

La definición 2 se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica tiende a la recta $y = L$ como en el extremo izquierdo de cada gráfica.

3 DEFINICIÓN La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Por ejemplo, la curva que se ilustra en la figura 1 tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1}x$. (Véase la figura 4.) En efecto,

4
$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que las dos rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Éste surge a partir del hecho de que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan.)

EJEMPLO 1 Encuentre los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función f cuya gráfica se muestra en la figura 5.

SOLUCIÓN Ya que los valores de $f(x)$ se vuelven grandes cuando $x \longrightarrow -1$ por ambos lados; por lo tanto

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Advierta que $f(x)$ se hace negativo grande en magnitud cuando x tiende a 2 por la izquierda, pero grande positivo cuando x tiende a 2 por la derecha. De este modo,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

De esta suerte, las dos rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Cuando x crece, $f(x)$ tiende a 4. Pero cuando x decrece a través de valores negativos, $f(x)$ tiende a 2. Así entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Esto significa que tanto $y = 4$ como $y = 2$ son asíntotas horizontales. □

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeño. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001$$

De hecho, si elige una x suficientemente grande, puede aproximar $1/x$ a 0 cuanto quiera. Por lo tanto, según la definición 4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar hace ver que cuando x es negativo grande en magnitud, $1/x$ es pequeño negativo; de este modo, también tiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

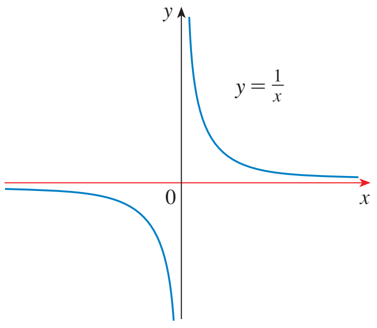


FIGURA 6

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Se infiere que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$ (que es una hipérbola equilátera; véase la figura 6). □

La mayor parte de las leyes de los límites que se dieron en la sección 2.3 también se cumplen para los límites en el infinito. Se puede probar que las *leyes de los límites, cuya lista se da en la sección 2.3 (con la excepción de las leyes 9 y 10), también son válidas si "$x \to a$" se reemplaza con "$x \to \infty$" o con "$x \to -\infty$"*. En particular, si combina la ley 6 con los resultados del ejemplo 2, obtiene la importante regla que sigue para el cálculo de límites.

5 TEOREMA Si $r > 0$ es un número racional, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida para toda x, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

V EJEMPLO 3 Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique las propiedades de límites que se usan en cada etapa.

SOLUCIÓN Conforme x se hace más grande, tanto el numerador como el denominador se hacen más grandes, por lo tanto no resulta evidente qué sucede con su proporción. Necesita hacer algunas operaciones algebraicas preliminares.

Para evaluar el límite en el infinito de una función racional, divida el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que hay en el denominador. (Puede suponer que $x \neq 0$, puesto que sólo está interesado en los valores grandes de x.) En este caso, la mayor potencia de x en el dominador es x^2, con lo cual tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(por la ley de los Límites 5)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} \qquad \text{(por 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \qquad \text{(por 7 y el teorema 5)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

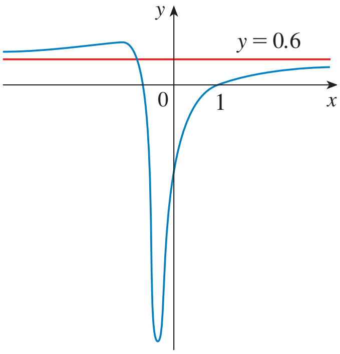


FIGURA 7

$y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

Un cálculo semejante hace ver que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. En la figura 7 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$. □

EJEMPLO 4 Determine las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

SOLUCIÓN Al dividir tanto el numerador como el denominador entre x y aplicar las propiedades de los límites tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} \qquad \left(\text{puesto que } \sqrt{x^2} = x \text{ para } x > 0\right)$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3 - \frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3 - 5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2 + 0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por lo tanto, la recta $y = \sqrt{2}/3$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Si calcula el límite cuando $x \to -\infty$, debe recordar que para $x < 0$, tiene $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. De donde, al dividir el numerador entre x, para $x < 0$ obtiene

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2 + 1} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}}=\frac{-\sqrt{2+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{3-5\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

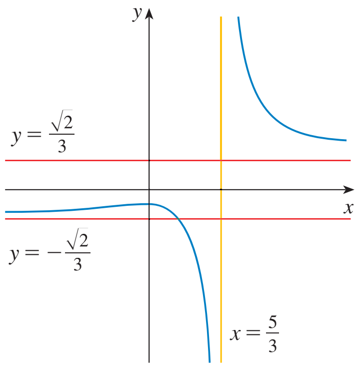


FIGURA 8

$y=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

Así, la recta $y=-\sqrt{2}/3$ también es una asíntota horizontal.

Es probable que haya una asíntota vertical cuando el denominador, $3x-5$, es 0, es decir, cuando $x=\frac{5}{3}$. Si x tiende a $\frac{5}{3}$ y $x>\frac{5}{3}$, después el denominador está cercano a 0 y $3x-5$ es positivo. El numerador $\sqrt{2x^2+1}$ siempre es positivo, de modo que $f(x)$ es positivo. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to(5/3)^+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\infty$$

Si x está cerca de $\frac{5}{3}$ pero $x<\frac{5}{3}$, en seguida $3x-5<0$ y $f(x)$ es grande y negativa. De esta manera,

$$\lim_{x\to(5/3)^-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\infty$$

La asíntota vertical es $x=\frac{5}{3}$. Las tres asíntotas se ilustran en la figura 8. □

EJEMPLO 5 Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

SOLUCIÓN Ya que tanto $\sqrt{x^2+1}$ como x son grandes cuando x es grande, es difícil ver qué sucede con su diferencia, por eso, use el álgebra para escribir de nuevo la función. En primer lugar multiplique el numerador y el denominador por el radical conjugado.

■ Puede considerar que la función dada tiene un denominador de 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)&=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\end{aligned}$$

Se podría aplicar el teorema de la compresión para demostrar que este límite es 0. Pero un método más fácil es dividir el numerador y el denominador entre x. Al efectuar esto y aplicar las leyes de los límites obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0\end{aligned}$$

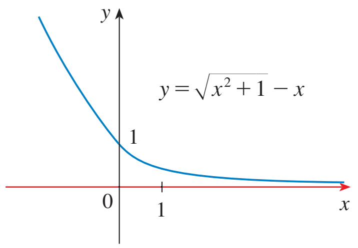


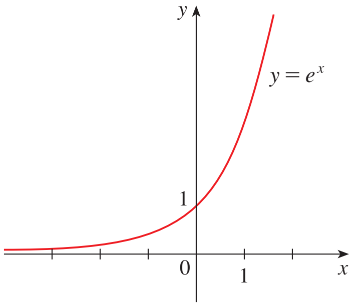
FIGURA 9

En la figura 9 se ilustra este resultado. □

En la gráfica de la función exponencial natural $y=e^x$ tiene la recta $y=0$ (el eje x) como asíntota horizontal. (Lo mismo se cumple para cualquier función exponencial con base $a > 1$.) En efecto, a partir de la gráfica de la figura 10 y la tabla correspondiente de valores observe que

6 $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

Advierta que los valores de e^x tienden a 0 con mucha rapidez.



x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

FIGURA 10

■ La estrategia para resolver problemas para el ejemplo 6 es *introducir algo adicional* (véase página 76). En este caso, lo adicional, el elemento auxiliar, es la variable t.

V EJEMPLO 6 Evalúe $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

SOLUCIÓN Si hace que $t = 1/x$, sabe que $t \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Por lo tanto, de acuerdo con (6),

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

(Véase ejercicio 71.) □

EJEMPLO 7 Evalúe $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Cuando x crece, los valores de sen x oscilan entre 1 y -1 infinitamente a menudo, y, de este modo, no se aproximan a ningún número definido. Así, $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ no existe. □

LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO

La notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

se usa para indicar que los valores de $f(x)$ se agrandan cuando x se hace grande. Se asocian significados semejantes a los símbolos siguientes:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

EJEMPLO 8 Determine $\lim_{x \to \infty} x^3$ y $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

SOLUCIÓN Cuando x se incrementa, también lo hace x^3. Por ejemplo,

$$10^3 = 1000 \qquad 100^3 = 1\,000\,000 \qquad 1000^3 = 1\,000\,000\,000$$

En efecto, puede hacer a x^3 tan grande como quiera incrementando de manera suficiente a x. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

de manera similar, cuando x toma un valor negativo grande, así es x^3. En estos términos

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Asimismo, eatas proposiciones de los límites se pueden ver en la gráfica de $y = x^3$ en la figura 11. □

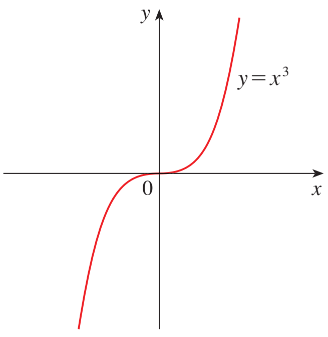


FIGURA 11
$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

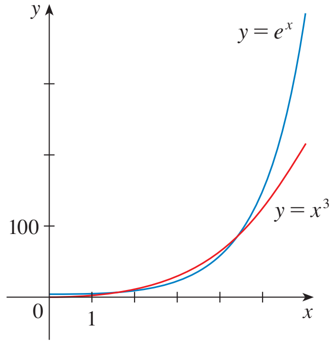


FIGURA 12

e^x es tan grande como x^3 cuando x es grande.

Al examinar la figura 10 observe que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

pero, como se muestra en la figura 12, $y = e^x$ se hace grande cuando $x \to \infty$ con mucha mayor rapidez que $y = x^3$.

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x)$.

SOLUCIÓN Advierta que **no puede** escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty$$

Las leyes de los límites no se pueden aplicar a los límites infinitos porque ∞ no es un número ($\infty - \infty$ está indefinido). Sin embargo, *puede* escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x - 1) = \infty$$

porque tanto x como $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes y, por lo tanto, también su producto. □

EJEMPLO 10 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3, divida el numerador y denominador entre la potencia más alta de x en el denominador, que es justamente x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

porque $x + 1 \to \infty$ y $3/x - 1 \to -1$ cuando $x \to \infty$. □

En el ejemplo siguiente se muestra que al analizar límites infinitos en el infinito, junto con intersecciones, es posible llegar a tener una idea general de la gráfica de un polinomio sin tener que graficar una gran cantidad de puntos.

V EJEMPLO 11 Trace la gráfica de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ con ayuda de las intersecciones y sus límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

SOLUCIÓN La intersección con el eje y es $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$ y los cortes con el eje x se encuentran al hacer $y = 0$: $x = 2, -1, 1$. Observe que como $(x - 2)^4$ es positiva, la función no cambia de signo en 2; de este modo, la gráfica no corta el eje x en 2. La gráfica corta el eje en -1 y 1.

Cuando x adquiere un valor grande y positivo, los tres factores son grandes, de modo que

$$\lim_{x \to \infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Cuando x tiene un valor grande y negativo, el primer factor toma un valor grande y positivo y el segundo y el tercer factores son grandes negativos, por lo que

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Al combinar esta información, obtiene un esbozo de la gráfica en la figura 13. □

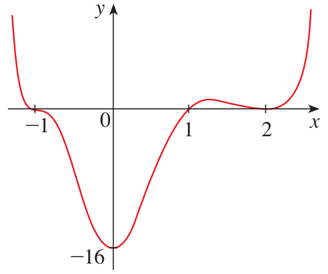


FIGURA 13
$y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$

DEFINICIONES EXACTAS

La definición 1 se puede establecer precisamente como se indica a continuación.

7 DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que para toda $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

En lenguaje común, esto establece que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L (dentro de una distancia ε, donde ε es cualquier número positivo) al hacer que x tome valores suficientemente grandes (más grandes que N, donde N depende de ε). Desde el punto de vista gráfico, esto plantea que al escoger valores grandes de x (mayores que algún número N) es posible hacer que la gráfica de f se sitúe entre las rectas horizontales $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$ como en la figura 14. Esto se tiene que cumplir sin que importe qué tan pequeño sea ε. En la figura 15 se ilustra que si se escoge un valor pequeño de ε, después se podría requerir un valor mayor de N.

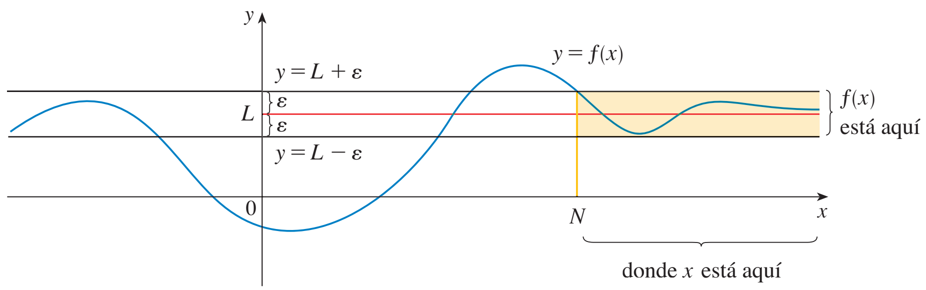


FIGURA 14
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

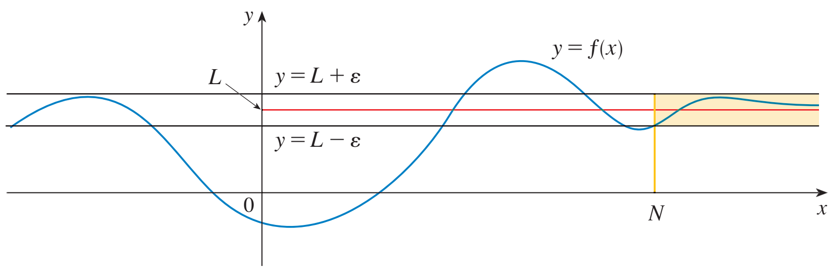


FIGURA 15
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

De igual manera, una versión exacta de la definición 2 se proporciona mediante la definición 8, la cual se ilustra en la figura 16.

8 DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo de $(-\infty, a)$. Entonces,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

quiere decir que para toda $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente N tal que

$$\text{si} \quad x < N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

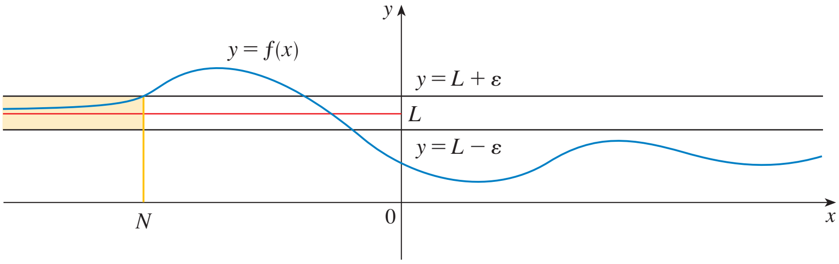


FIGURA 16
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

En el ejemplo 3 se calculó que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

En el ejemplo siguiente se utiliza una calculadora o computadora para relacionar este enunciado de la definición 7 con $L = \frac{3}{5}$ y $\varepsilon = 0.1$.

EJEMPLO 12 Mediante una gráfica determine un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

SOLUCIÓN Reescriba la desigualdad como

$$0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$$

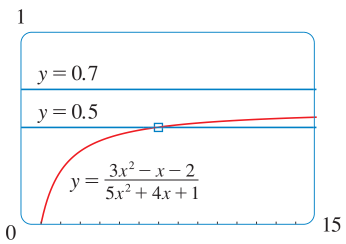


FIGURA 17

Es necesario determinar los valores de x para los cuales la curva dada queda entre las rectas horizontales $y = 0.5$ y $y = 0.7$. La curva y las rectas están graficadas en la figura 17. Luego, por medio del cursor, se estima que la curva cruza la recta $y = 0.5$ cuando $x \approx 6.7$. A la derecha de este número, la curva se localiza entre las rectas $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Efectúe un redondeo y después

$$\text{si} \quad x > 7 \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

En otras palabras, para $\varepsilon = 0.1$ puede elegir $N = 7$ (o cualquier otro número mayor) en la definición 7. □

EJEMPLO 13 Mediante la definición 7 demuestre que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Dado $\varepsilon > 0$, busque N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Al calcular el límite podría suponer que $x > 0$. Entonces $1/x < \varepsilon \iff x > 1/\varepsilon$. Seleccione $N = 1/\varepsilon$. De esa manera

$$\text{si} \quad x > N = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

De donde, según la definición 7,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

En la figura 18 se ilustra la demostración en la que se muestran algunos valores de ε y los valores correspondientes de N.

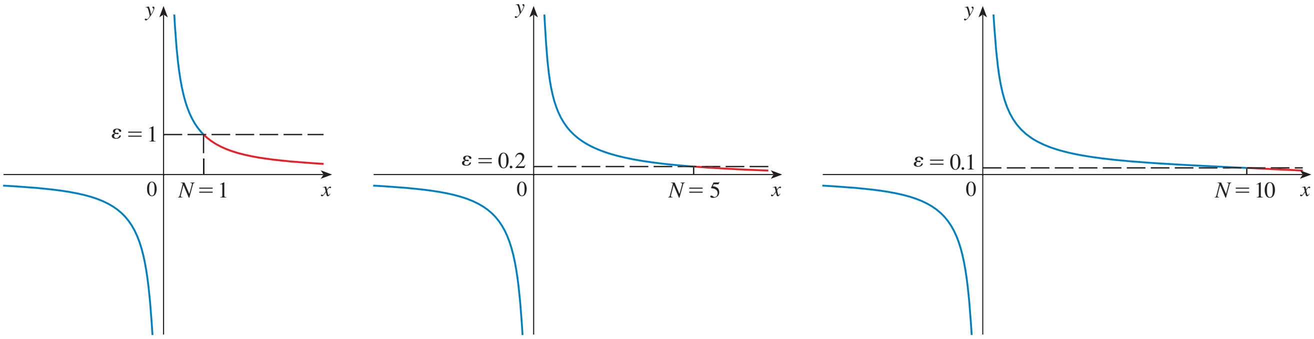


FIGURA 18

□

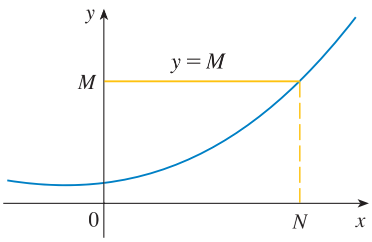


FIGURA 19
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Para finalizar, observe que se puede definir un límite infinito en el infinito como sigue. La representación geométrica se proporciona en la figura 19.

9 DEFINICIÓN Si f es una función definida en algún intervalo (a, ∞). entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M hay un número positivo correspondiente N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad f(x) > M$$

Definiciones similares son válidas cuando el símbolo ∞ se reemplaza con $-\infty$. (Véase ejercicio 70.)

2.6 EJERCICIOS

1. Explique con sus propias palabras el significado de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

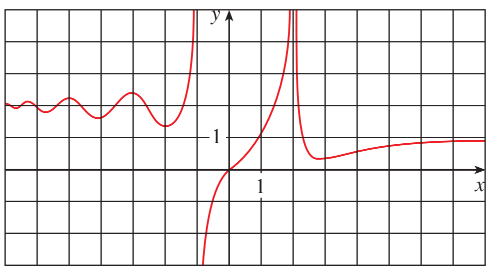
2. (a) ¿La gráfica de $y = f(x)$ se puede intersecar con una asíntota vertical? ¿Se puede intersecar con una asíntota horizontal? Ilustre trazando gráficas.
(b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas para ilustrar las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica se ilustra, dé lo siguiente:

(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

(d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (e) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(f) Las ecuaciones de las asíntotas.

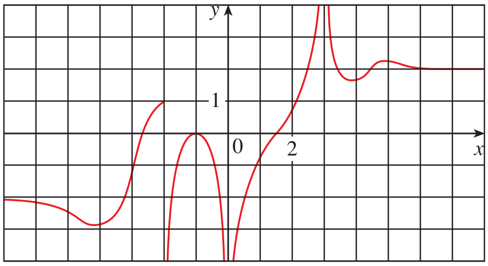


4. Para la función g cuya gráfica se ilustra, proporcione lo siguiente:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$ (f) Las ecuaciones de las asíntotas.



5–10 Dibuje el ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

5. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, f es impar

6. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$

7. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$

9. $f(0) = 3$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f es par

11. Determine el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

evaluando la función $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100. A continuación, utilice una gráfica de f para respaldar su conjetura.

12. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ correcto hasta dos cifras decimales

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro cifras decimales.

13–14 Evalúe un límite y justifique cada etapa señalando las propiedades adecuadas de los límites.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$ **14.** $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15–36 Calcule el límite.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x + 3}$ **16.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$ **18.** $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$ **20.** $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1}$

21. $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{4u^4 + 5}{(u^2 - 2)(2u^2 - 1)}$ **22.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$ **24.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$ **26.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + x^3 + x^5}{1 - x^2 + x^4}$ **30.** $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

31. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 + x^5)$ **32.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 3}{5 - 2x^2}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$ **34.** $\lim\limits_{x\to\infty} \tan^{-1}(x^2 - x^4)$

35. $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{-2x} \cos x)$ **36.** $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} e^{\tan x}$

37. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

dibujando la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para conjeturar el valor del límite.

(c) Pruebe que su conjetura es correcta.

38. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ hasta una cifra decimal.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro cifras decimales.

(c) Halle el valor exacto del límite.

39–44 Hallar las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo graficador, verifique su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

39. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

40. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

41. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

42. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

43. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

44. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

45. Estimar la asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$$

mediante la gráfica de f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Después calcule la ecuación de la asíntota evaluando el límite. ¿Cómo explica la discrepancia?

46. (a) Grafique la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

¿Cuántas asíntotas horizontales y verticales observa? Use la gráfica para estimar el valor de los límites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calcular los valores de $f(x)$, proporcione estimaciones numéricas de los límites del inciso (a).

(c) Calcular los valores exactos de los límites en el inciso (a) obtenga el mismo valor o valores diferentes de esos dos límites [con respecto a su respuesta del inciso (a), tendrá que verificar su cálculo para el segundo límite].

47. Encuentre una fórmula para una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

48. Plantee una fórmula para una función cuyas asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

49–52 Determine los límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Utilice esta información junto con las intersecciones para conseguir un esbozo de la gráfica como en el ejemplo 11.

49. $y = x^4 - x^6$

50. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

51. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

52. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

53. (a) Aplique el teorema de la compresión para evaluar $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(b) Grafique $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. ¿Cuántas veces la gráfica corta la asíntota?

54. Por *comportamiento al final* de una función debe dar a entender una descripción de lo que sucede a sus valores cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

(a) Describa y compare el comportamiento al final de las funciones

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

dibujando las dos funciones en los rectángulos de visualización $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$.

(b) Se dice que dos funciones tienen el *mismo comportamiento al final* si su relación tiende a 1 cuando $x \to \infty$. Demuestre que P y Q tienen el mismo comportamiento al final.

55. Sean P y Q dos polinomios. Encuentre

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es (a) menor que el grado de Q y (b) mayor que el grado de Q.

56. Haga un boceto aproximado de la gráfica de la curva $y = x^n$ (n un entero) para los cinco casos siguientes:

(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n impar

(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n impar

(v) $n < 0$, n par

Después use estos bocetos para encontrar los límites siguientes.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^n$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} x^n$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^n$ (d) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^n$

57. Determine $\lim_{x \to \infty} f(x)$ si, para toda $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

58. (a) Un depósito contiene 5 000 L de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito a una proporción de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal t minutos después (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $t \to \infty$?

59. En el capítulo 9 se demostrará que, según ciertas hipótesis, la velocidad $v(t)$ de una gota de lluvia que cae, en el instante t, es

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y v^* es la *velocidad terminal* de la gota de lluvia.

(a) Encuentre $\lim_{t \to \infty} v(t)$.

(b) Trace la gráfica de $v(t)$ si $v^* = 1$ m/s y $g = 9.8$ m/s^2. ¿Cuánto tiempo transcurre para que la velocidad de la gota de agua alcance el 99% de su velocidad terminal?

60. (a) Mediante el trazo de $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra cuánto tiene que aumentar x de modo que $e^{-x/10} < 0.1$.
(b) ¿Puede resolver el inciso (a) sin un aparato graficador?

61. Mediante una gráfica determine un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1.5 \right| < 0.05$$

62. En el caso del límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre la definición 7 mediante la determinación de valores de N que corresponden a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

63. Ilustre la definición 8 para el límite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

determinando valores de N que corresponden a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

64. Ilustre la definición 9 para el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

calculando valores de N que corresponden a $M = 100$.

65. (a) ¿Qué tan grande tenemos que hacer x para que $1/x^2 < 0.0001$?
(b) Al hacer $r = 2$ en el Teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la Definición 7.

66. (a) ¿Qué tan grande tenemos que hacer x para que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?
(b) Al hacer $r = \frac{1}{2}$ en el Teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la Definición 7.

67. Aplique la Definición 8 para demostrar que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

68. Demuestre mediante la Definición 9 que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

69. Mediante la definición 9 demuestre que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

70. Formule una definición exacta de

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Luego aplique su definición para demostrar que

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

71. Demuestre que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(1/t)$$

$$\text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$$

si existen los límites.

2.7 DERIVADAS Y RAZONES DE CAMBIO

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto, involucran encontrar el mismo tipo de límite, como se vio en la sección 2.1. Esta clase especial de límite se denomina derivada y puede ser interpretada como una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o ingeniería.

TANGENTES

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere hallar la tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la línea secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En seguida, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, entonces defina la *tangente* t como la recta que pasa por P con

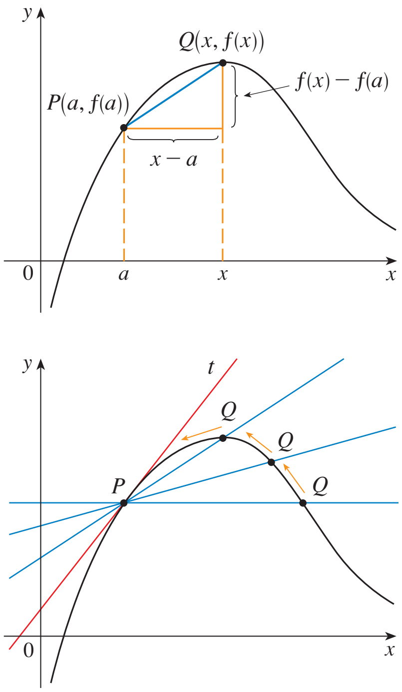


FIGURA 1

pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P. Véase la figura 1.)

> **1 DEFINICIÓN** La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente
>
> $$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> cuando el límite existe.

En el primer ejemplo, se confirma la suposición hecha en el ejemplo 1 de la sección 2.1.

V EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1, 1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

■ Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, se encuentra que una ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = 2x - 1$$

□

TEC Visual 2.7 muestra una animación de la figura 2.

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se acerca lo suficiente al punto, la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Entre más se acerque, la parábola más parece una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

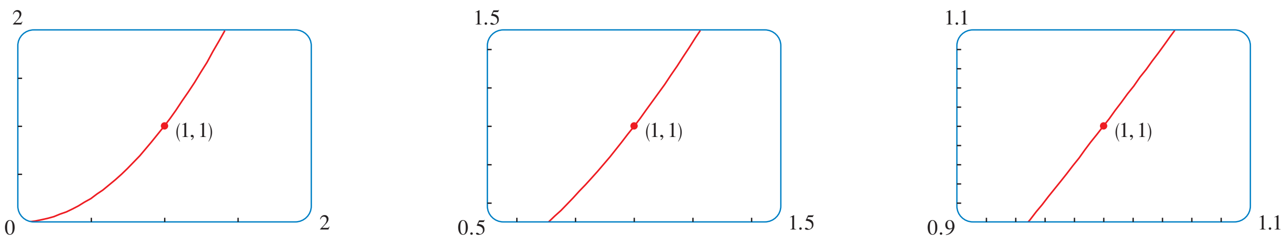


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) sobre la parábola $y = x^2$

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$ y así la pendiente de la línea secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

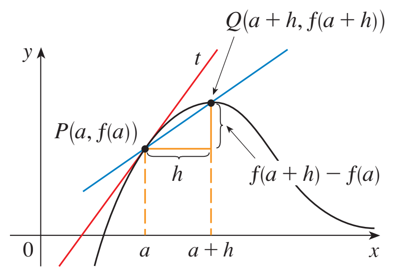


FIGURA 3

(Véase la figura 3, donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

Advierta que, cuando x tiende a a, h lo hace a 0 (porque $h = x - a$) y, de este modo, la expresión para la pendiente de la recta tangente, que se da en la definición 1, se convierte en

2
$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto $(3, 1)$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Por lo tanto, la pendiente de la tangente en $(3, 1)$ es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3 + h)}{3 + h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3 + h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3 + h} = -\frac{1}{3}$$

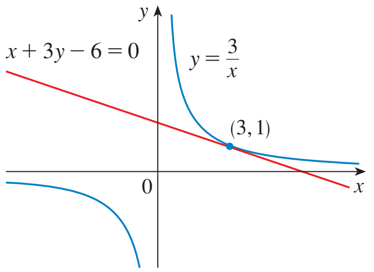


FIGURA 4

En consecuencia, una ecuación de la tangente en el punto $(3, 1)$ es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

la cual se simplifica hasta $\qquad x + 3y - 6 = 0$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente. □

VELOCIDADES

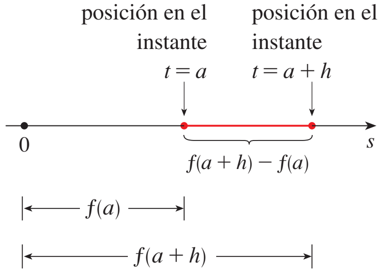
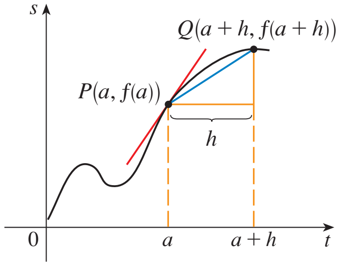


FIGURA 5

En la sección 2.1 se investigó el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre periodos cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia directa) del objeto respecto al origen, en el instante t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función de posición** del objeto. En el intervalo de $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.) La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$



$m_{PQ} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
$= \text{velocidad promedio}$

FIGURA 6

que es lo mismo que la pendiente de la secante PQ en la figura 6.

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre lapsos $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3
$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P. (Compare las ecuaciones 2 y 3.)

Ahora que sabe calcular límites, vuelva a considerar el problema de la pelota que cae.

V EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, 450 m sobre el nivel del suelo.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?
(b) ¿Con qué velocidad viaja cuando choca contra el suelo?

■ Recuerde que en la sección 2.1 vimos que la distancia (en metros) que recorre la pelota que cae una vez que transcurren t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Necesita hallar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera, que es eficaz iniciar la búsqueda de la velocidad en un tiempo común $t = a$. Empleando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, tiene

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4.9(a^2+2ah+h^2-a^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4.9(2ah+h^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 4.9(2a+h) = 9.8a \end{aligned}$$

(a) La velocidad después de 5 s es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.

(b) Como la plataforma de observación está 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t_1, cuando $s(t_1) = 450$; es decir,

$$4.9t_1^2 = 450$$

Esto da

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Por lo tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$ □

DERIVADAS

Ha visto que surge la misma clase de límite en la búsqueda de la pendiente de una línea tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3). En realidad, los límites de la forma

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

surgen cuando calcula una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite sucede, muy seguido, se proporciona un nombre y notación especial.

4 DEFINICIÓN La **derivada de una función f en un número a**, se indica mediante $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

si este límite existe.

■ $f'(a)$ se lee "f es fundamental de a".

Si escribe $x = a + h$, en tal caso, tiene $h = x - a$ y h se aproxima a 0 si y sólo si x se aproxima a a. En consecuencia, una manera equivalente de establecer la definición de la derivada, como se mencionó en la búsqueda de rectas tangentes, es

5
$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

V EJEMPLO 4 Hallar la derivada de la funcion $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a.

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(a + h)^2 - 8(a + h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$ □

Defina la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta tangente que pasa a través de P y tiene pendiente m, proporcionada por la ecuación 1 o 2, ya que, mediante la definición 4, es la misma que la derivada $f'(a)$, ahora puede decir lo siguiente.

> La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta tangente a través de $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en a.

Si usa la forma punto pendiente de la ecuación de una recta, puede escribir una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

V EJEMPLO 5 Halle una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

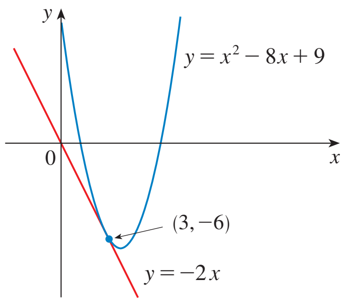


FIGURA 7

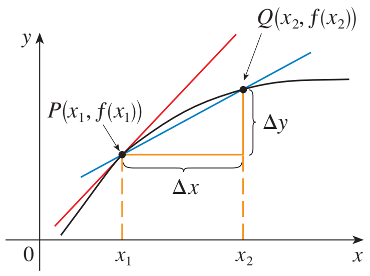
SOLUCIÓN Del ejemplo 4 sabe que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a es $f'(a) = 2a - 8$. En consecuencia la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. En estos términos, una ecuación de la recta tangente, se muestra en la figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{o bien} \qquad y = -2x$$ □

RELACIONES DE CAMBIO

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y escriba $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, por lo tanto el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

$$\Delta x = x_2 - x_1$$



razón promedio de cambio $= m_{PQ}$

razón instantánea de cambio $=$ pendiente de la tangente en P

FIGURA 8

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

se llama **razón de cambio promedio de y con respecto a x** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ de la figura 7.

Por analogía con la velocidad, considere la relación de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por lo tanto, al hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas relaciones de cambio promedio se llama **razón (instantánea) de cambio de y con respecto a x** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

6 $$\text{razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconocer este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Sabe que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tiene una segunda interpretación:

> La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = a$.

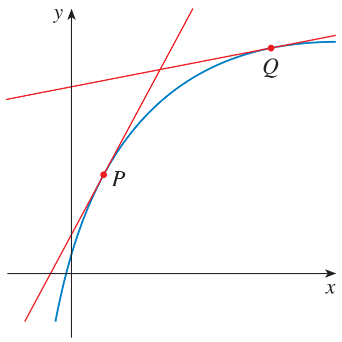


FIGURA 9
Los valores de y cambian con rapidez en P y con lentitud en Q

El enlace con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, a continuación la razón de cambio instantánea es la pendiente de la tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y en consecuencia, la curva es escarpada, como en el punto P de la figura 9), los valores de y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana y el valor de y cambia lentamente.

En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se traslada a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s con respecto al tiempo t. En otras palabras, $f'(a)$ *es la velocidad de la partícula en el tiempo* $t = a$. La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

En el siguiente ejemplo se analiza el significado de la derivada de una función que es definida verbalmente.

V EJEMPLO 6 Un fabricante produce un rollo de un tejido con un ancho fijo. El costo de producir x yardas de este tejido es de $C = f(x)$ dólares.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) En términos prácticos, ¿qué significa decir qué $f'(1000) = 9$?

(c) ¿Qué le hace pensar que es más grande $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Qué hay con respecto a $f'(5\,000)$?

SOLUCIÓN

(a) La derivada $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de C con respecto a x, es decir, $f'(x)$ significa la razón de cambio del costo de producción con respecto al número de yardas producidas. (Los economistas llaman a esto rapidez de cambio del *costo marginal*. Esta idea se analiza con más detalle en las secciones 3.7 y 4.7.)

Porque

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades para $f'(x)$ son las mismas que las unidades para el cociente de diferencia $\Delta C/\Delta x$. Ya que ΔC se mide en dólares y Δx en yardas, por lo que las unidades para $f'(x)$ son dólares por cada yarda.

(b) El enunciado de que $f'(1000) = 9$ significa que, después de fabricar 1000 yardas de tejido, la cantidad a la cual se incrementa el costo de producción es de 9 dólares/yarda. (Cuando $x = 1000$, C se incrementa 9 veces tan rápido como x.)

Ya que $\Delta x = 1$ es pequeño si se le compara con $x = 1000$, podría usarse la aproximación

■ En este caso suponga que la función costo se conduce bien, en otras palabras, $C(x)$ no oscila rápidamente cerca de $x = 1000$.

$$f'(1000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y decir que el costo de fabricación de la yarda 1000 (o de la 1001) es de casi 9 dólares.

(c) La proporción a la cual se incrementa el costo de producción (por cada yarda) probablemente es inferior cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricación de la yarda 500 es menor que el costo de la yarda 50) debido a la economía de proporción. (El fabricante hace más eficiente el uso de los costos de producción fijos.) De manera que

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, como se expande la producción, el resultado de la operación a gran escala será deficiente y con eso los costos de horas extras de trabajo. En estos términos es posible que la proporción de incremento de costos por último aumentarán. De este modo, es posible que suceda

$$f'(5000) > f'(500)$$ □

En el ejemplo siguiente estimará la proporción de cambio de la deuda nacional con respecto al tiempo. En este caso, la función no se define mediante una fórmula sino mediante una tabla de valores.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2

V EJEMPLO 7 Sea $D(t)$ la deuda nacional de Estados Unidos en el tiempo t. La tabla en el margen proporciona valores aproximados de esta función siempre que se estime a fin de año, en miles de míllones de dólares, desde 1980 hasta 2000. Explique y juzgue el valor de $D'(1990)$.

SOLUCIÓN La derivada $D'(1990)$ significa que la razón de cambio de D con respecto a t cuando $t = 1990$, es decir, la proporción de incremento de la deuda nacional en 1990.

De acuerdo a la ecuación 5,

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Así calcule y tabule los valores del cociente de diferencia (la razón de cambio promedio) como sigue.

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09

■ UNA NOTA SOBRE UNIDADES
Las unidades de la razón de cambio promedio $\Delta D/\Delta t$ son las unidades de ΔD divididas entre las unidades de Δt, o sea, de dólares por cada año. La razón de cambio instantánea es el límite de la razón de cambio promedio, de este modo, se mide en las mismas unidades: miles de millones de dólares por cada año.

A partir de esta tabla se ve que $D'(1990)$ se localiza en alguna parte entre 257.48 y 348.14 miles de millones de dólares por cada año. [En este caso, está haciendo la suposición razonable de que la deuda no fluctuará de manera errática entre 1980 y 2000.] Se estima que la proporción de incremento de la deuda nacional de Estados Unidos en 1990 fue el promedio de estos números, específicamente

$$D'(1990) \approx 303 \text{ miles de millones de dólares por cada año}$$

Otro método sería una gráfica de la función deuda y valorar la pendiente de la línea tangente cuando $t = 1990$. □

En los ejemplos 3, 6 y 7 aparecen tres casos específicos de razones de cambio: la velocidad de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción con respecto al número de artículos producidos; la razón de cambio de la deuda con respecto al tiempo es de interés en economía. En este caso, es una muestra pequeña de otras razones de cambio: En física, la razón de cambio de trabajo con respecto al tiempo se le denomina *potencia*. Los químicos quienes estudian una reacción química están interesados en la razón de cambio de la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (denominada *velocidad de reacción*). Un biólogo se interesa en la relación de cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería e, incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.7 se darán más ejemplos.

Todas estas razones de cambio se pueden interpretar como pendientes de tangentes. Esto le confiere un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que resulva problemas en que intervienen rectas tangentes, no resulve sólo un problema de geometría. También resuelve implícitamente una gran variedad de problemas de la ciencia y la ingeniería en que intervienen razones de cambio.

2.7 EJERCICIOS

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.
(a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
(b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Dibuje la curva $y = e^x$ en los rectángulos de visualización $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué advierte acerca de la curva conforme hace un acercamiento hacia el punto $(0, 1)$?

3. (a) Halle la pendiente de la línea tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1, 3)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Dibuje la parábola y la tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto $(1, 3)$ hasta que la parábola y la tangente sean indistinguibles.

4. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1, 0)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Halle una ecuación de la tangente del inciso (a).
(c) Dibuje la curva y la tangente en rectángulos de visualización cada vez más pequeñas centradas en $(1, 0)$ hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5–8 Encuentre una ecuación de la tangente a la curva en el punto dado.

5. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$, $(3, 2)$

6. $y = 2x^3 - 5x$, $(-1, 3)$

7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

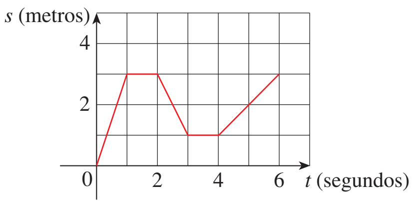
8. $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$, $(0, 0)$

9. (a) Determine la pendiente de la tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ en el punto donde $x = a$.
(b) Determine las ecuaciones de las tangentes en los puntos $(1, 5)$ y $(2, 3)$.
(c) Grafique la curva y ambas tangentes en una misma pantalla.

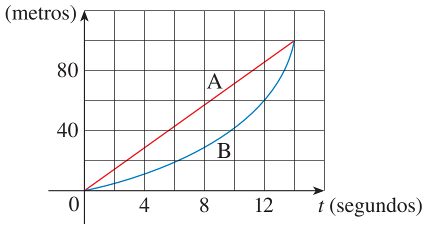
10. (a) Determine la pendiente de la tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = a$.
(b) Plantee las ecuaciones de las tangentes en los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Grafique la curva y las tres tangentes en una misma pantalla.

11. (a) Una partícula inicia moviéndose a la derecha a lo largo de una línea horizontal; se muestra la gráfica de su función de posición. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?

(b) Dibuje una gráfica de la función velocidad.



12. Se muestran las gráficas de las funciones de posición de dos competidoras, A y B, quienes compiten en los 100 m y terminan en empate.



(a) Relate y compare cómo desarrollaron la competencia.
(b) ¿En qué momento la distancia entre las competidoras es la más grande?
(c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

13. Si una pelota se lanza al aire hacia arriba, con una velocidad de 40 ft/s, su altura (en ft) una vez que transcurren t segundos, está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad después de $t = 2$.

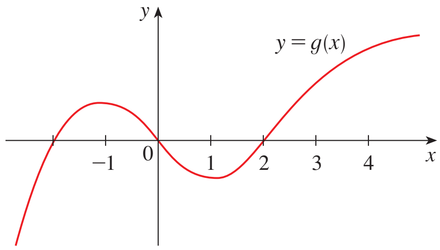
14. Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos se conoce por $H = 10t - 1.86t^2$.
(a) Halle la velocidad de la roca después de un segundo.
(b) Halle la velocidad de la roca cuando $t = a$.
(c) ¿Cuándo incidirá en la superficie la roca?
(d) ¿Con qué velocidad la roca incidirá en la superficie?

15. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación del movimiento $s = 1/t^2$, donde t se mide en segundos. Halle la velocidad de la partícula en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

16. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos
(a) Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3.5, 4]$
(iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4.5]$
(b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
(c) Dibuje la gráfica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio del inciso (a) y la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea del inciso (b).

17. Se proporciona la gráfica de la función g, reordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(2) \quad g'(4)$$



18. (a) Halle una ecuación de la línea tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.
(b) Si la línea tangente a $y = f(x)$ en $(4, 3)$ pasa a través del punto $(0, 2)$, halle $f(4)$ y $f'(4)$.

19. Dibuje la gráfica de una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

20. Dibuje la gráfica de una función g para la que $g(0) = g'(0) = 0$, $g'(-1) = -1$, $g'(1) = 3$ y $g'(2) = 1$.

21. Si $f(x) = 3x^2 - 5x$, halle $f'(2)$ y utilice esto para hallar una ecuación de la línea tangente a la parábola $y = 3x^2 - 5x$ en el punto $(2, 2)$.

22. Si $g(x) = 1 - x^3$, halle $g'(0)$ y utilice esto para hallar una ecuación de la línea tangente a la curva $y = 1 - x^3$ en el punto $(0, 1)$.

23. (a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, halle $F'(2)$ utilice esto para hallar una ecuación de la línea tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto $(2, 2)$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y la línea tangente en la misma pantalla.

24. (a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, hallar $G'(a)$ utilice esto para encontrar una ecuación de la línea tangente a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos $(2, 8)$ y $(3, 9)$.
(b) Ilustre el inciso (a) mediante la gráfica de la curva y la línea tangente en la misma pantalla.

25–30 Hallar $f'(a)$.

25. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

26. $f(t) = t^4 - 5t$

27. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

30. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

31–36 Cada límite representa la derivada de alguna función f en algún número a. Presente en cada caso las f y a.

31. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

32. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

33. $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

34. $\displaystyle\lim_{x \to \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

35. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

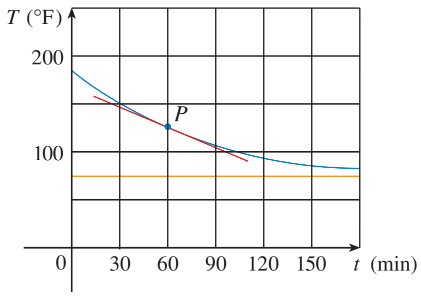
36. $\displaystyle\lim_{t \to 1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

37–38 Una partícula se traslada a lo largo de una línea recta con ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Halle la velocidad y la rapidez cuando $t = 5$.

37. $f(t) = 100 + 50t - 4.9t^2$ **38.** $f(t) = t^{-1} - t$

39. Se coloca una lata tibia de gaseosa en un refrigerador frío. Grafique la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la relación de cambio después de una hora?

40. Se saca un pavo asado del horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre la mesa de un cuarto donde la temperatura es de 75°F. En la gráfica se muestra cómo disminuye la temperatura del pavo y, finalmente, tiende a la temperatura del cuarto. Por medio de la medición de la pendiente de la tangente, estime la razón de cambio de la temperatura después de una hora.



41. La tabla muestra el porcentaje estimado P de la población de Europa que utiliza teléfono celular. (Se proporcionan estimaciones semestrales.)

Año	1998	1999	2000	2001	2002	2003
P	28	39	55	68	77	83

(a) Halle la razón de crecimiento promedio de celulares
 (i) de 2000 a 2002 (ii) de 2000 a 2001
 (iii) de 1999 a 2000
 En cada caso, incluya las unidades.
(b) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 tomando el promedio de dos relaciones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
(c) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 midiendo la pendiente de la tangente.

42. En la tabla se proporciona el número N de establecimientos de una popular cadena de cafeterías. (Se dan los números de establecimientos al 30 de junio.)

Año	1998	1999	2000	2001	2002
N	1 886	2 135	3 501	4 709	5 886

(a) Determine la tasa media de crecimiento
 (i) desde 2000 a 2002 (ii) desde 2000 a 2001
 (iii) de 1999 a 2000
 En cada caso incluya las unidades.
(b) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 considerando el promedio de dos relaciones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
(c) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 midiendo la pendiente de una tangente.

43. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.
(a) Encuentre la razón de cambio promedio de C con respecto a x, cuando se cambia el nivel de producción:
 (i) de $x = 100$ a $x = 105$
 (ii) de $x = 100$ a $x = 101$
(b) Halle la razón de cambio instantánea de C con respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como *costo marginal*. En la sección 3.7 se explica su significado.)

44. Si un tanque cilíndrico contiene 100 000 galones de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 h, la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 60$$

Encuentre la rapidez con que fluye el agua hacia afuera del tanque (la razón de cambio instantánea de V con respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 min, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Resuma sus hallazgos en una oración o dos. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

45. El costo de producir x onzas de oro a partir de una mina de oro reciente es $C = f(x)$ dólares.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Qué significa enunciar $f'(800) = 17$?
(c) ¿Los valores de $f'(x)$ se incrementarán o disminuirán en corto tiempo, cuál es su opinión? ¿Y a largo plazo? Explique.

46. El número de bacterias después de t horas en un experimento de laboratorio controlado es $n = f(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Considere que existe una cantidad de espacio y nutrimentos para la bacteria. ¿Cuál es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? Si se limita el suministro de nutrimentos, ¿afectaría su conclusión?

47. Sea $T(t)$ la temperatura (en °F) en Dallas t horas después de la medianoche el 2 de junio de 2001. La tabla muestra los valores de esta función registrada cada dos horas. ¿Cuál es el significado de $T'(10)$? Estime su valor.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

48. La cantidad (en libras) de un café que es vendido por una compañía en un precio de p dólares por cada libra es $Q = f(p)$.

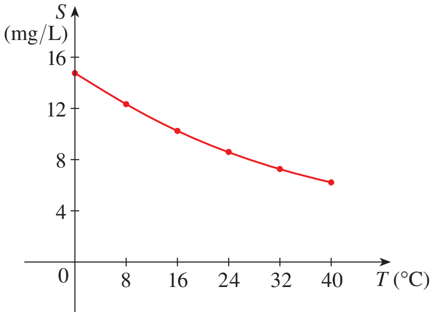
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿$f'(8)$ es positiva o negativa? Explique.

49. La cantidad de oxígeno que se puede disolver en agua depende de la temperatura del agua. (De esa manera la polución térmica induce el contenido de oxígeno en el agua.) La gráfica muestra cómo varía la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Estime e interprete el valor de $S'(16)$.

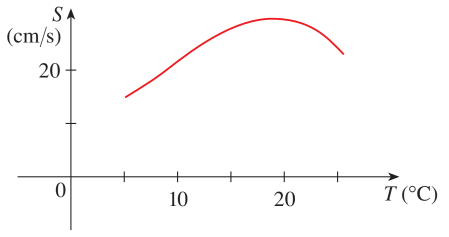


Adaptada de *Environmental Science: Science: Living Within the System of Nature*, 2d ed.; por Charles E. Kupchella, © 1989. Reimpreso, por autorización de Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ.

50. La gráfica muestra la influencia de la temperatura T en la rapidez máxima sostenible de nado del salmón Coho.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Estime los valores de $S'(15)$ y $S'(25)$ e interprételos.



51–52 Establezca si existe $f'(0)$.

51. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

REDACCIÓN DE PROYECTO

MÉTODOS ANTICIPADOS PARA LA BÚSQUEDA DE TANGENTES

La primera persona en formular explícitamente las ideas de los límites y derivadas fue Isaac Newton, en la década de 1660. Pero Newton reconoció: “Si he visto más lejos que otros hombres, es porque he estado parado sobre los hombros de gigantes.” Dos de esos gigantes fueron Pierre Fermat (1601-1665) y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estaba familiarizado con los métodos que estos hombres habían aplicado para hallar rectas tangentes y los métodos de ambos tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que llegó Newton.

Las referencias siguientes contienen explicaciones de estos métodos. Lea una o varias y escriba un informe en que compare los métodos de Fermat o de Barrow con los métodos modernos. En particular, aplique el método de la sección 2.7 para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 2x$ en el punto $(1, 3)$ y muestre cómo habrían resuelto Fermat o Barrow el mismo problema. Aunque usted usó derivadas y ellos no, señale las semejanzas entre los dos métodos.

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (Nueva York: Wiley, 1989), pp. 389, 432.

2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979), pp. 124, 132.

3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed. (Nueva York: Saunders, 1990), pp. 391, 395.

4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), pp. 344, 346.

2.8 LA DERIVADA COMO UNA FUNCIÓN

En la sección anterior consideró la derivada de una función f en un número fijo a:

1 $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ahora cambie su punto de vista y haga que el número a varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, obtiene

2 $$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Dado cualquier número x para el cual este límite exista, asigne a x el número $f'(x)$. De modo que considere f' como una nueva función, llamada **derivada de f** y definida por medio de la ecuación 2. Sabe que el valor de f' en x, $f'(x)$, se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f, porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de hallar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x)$ existe$\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

V EJEMPLO 1 En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Úsela para dibujar la derivada f'.

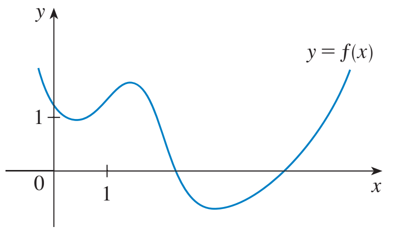


FIGURA 1

SOLUCIÓN Puede estimar el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trace la tangente en P de la figura 2(a) y estime su pendiente como alrededor de $\frac{3}{2}$, por tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. Si repite este procedimiento en varios puntos, obtiene la gráfica que se muestra en la figura 2(b). Advierta que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 allí y la gráfica de f' cruza el eje x en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B, las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva allí. Pero entre B y C, las tangentes tienen pendientes negativas, de modo que $f'(x)$ es negativa allí.

TEC Visual 2.8 muestra una animación de la figura 2 para diferentes funciones.

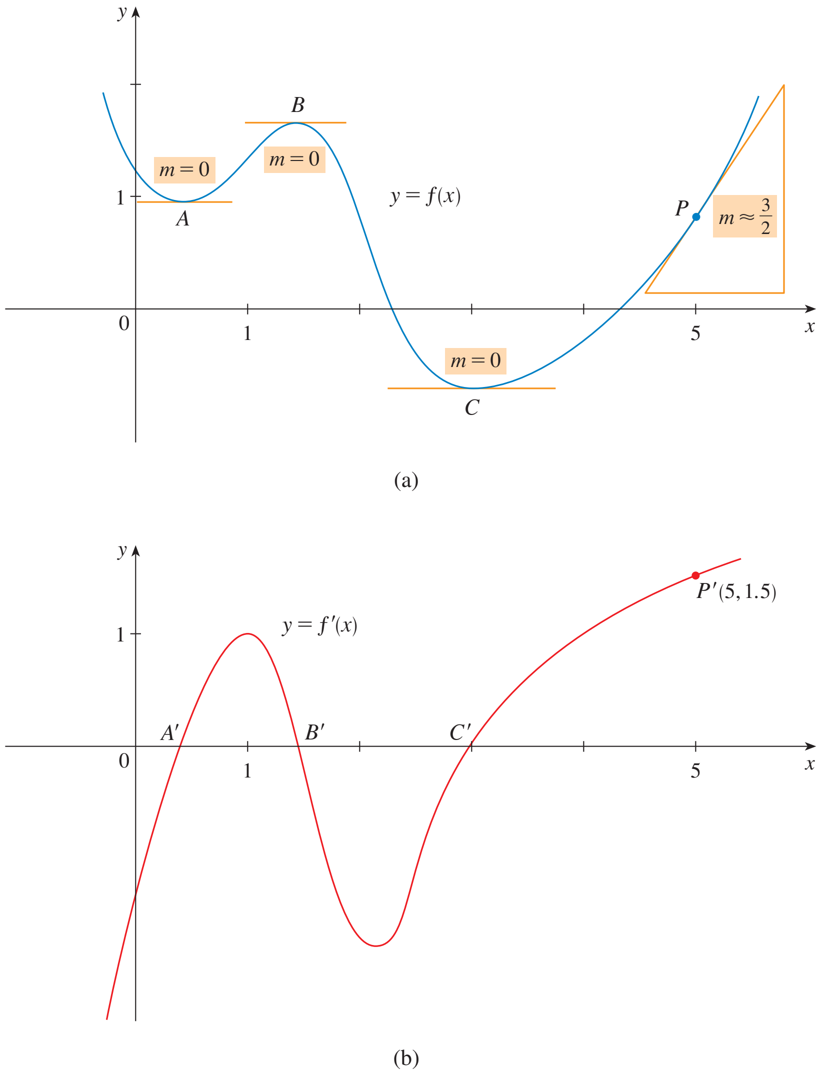


FIGURA 2

EJEMPLO 2

(a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.
(b) Ilústrela comparando las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN

(a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante, durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

(b) Use un aparato para trazar las gráficas de f y f' de la figura 3. Advierta que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y que $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendientes positivas. De modo que estas gráficas sirven como comprobación de nuestra solución del inciso (a).

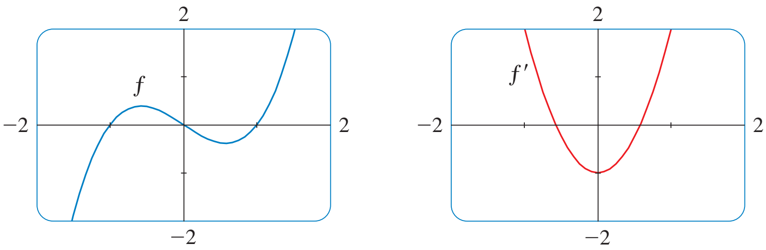


FIGURA 3

□

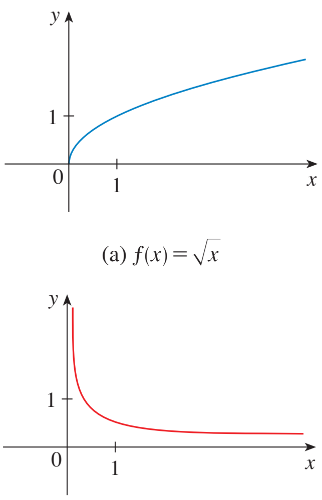
EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Establezca el dominio de f'.

SOLUCIÓN

Aquí racionalice el numerador.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$. Éste es menor que el dominio de f, el cual es $[0, \infty)$. □



(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 4

Compruebe que el resultado del ejemplo 3 es razonable observando las gráficas de f y f' en la figura 4. Cuando x está cerca de 0, $\sqrt{x}$ está cerca de 0, por lo tanto, $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ es muy grande y esto corresponde a las rectas tangentes empinadas cerca de $(0, 0)$ de la figura 4(a) y a los valores grandes de $f'(x)$ justo a la derecha de 0 en la figura 5(b). Cuando x es grande, $f'(x)$ es muy pequeño y esto corresponde a las rectas tangentes más aplanadas en la extrema derecha de la gráfica de f y la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

EJEMPLO 4 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1 - x}{2 + x}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}}{e} = \frac{ad - bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1 - (x+h)}{2 + (x+h)} - \dfrac{1 - x}{2 + x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(1 - x - h)(2 + x) - (1 - x)(2 + x + h)}{h(2 + x + h)(2 + x)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(2 - x - 2h - x^2 - xh) - (2 - x + h - x^2 - xh)}{h(2 + x + h)(2 + x)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(2 + x + h)(2 + x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(2 + x + h)(2 + x)} = -\frac{3}{(2 + x)^2} \end{aligned}$$

□

OTRAS NOTACIONES

Si usa la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, en tal caso algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de **derivación**, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx introducido por Leibniz no debe considerarse como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con base en la ecuación 2.7.6, puede volver a escribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico a, use la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{o bien} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$.

LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, en 1646, y estudió leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad de allí. Obtuvo el grado de bachiller a los 17 años. Después de lograr su doctorado en leyes a la edad de 20, ingresó al servicio diplomático y pasó la mayor parte de su vida viajando por las capitales de Europa, en misiones diplomáticas. En particular, trabajó para conjurar una amenaza militar francesa contra Alemania e intentó reconciliar las Iglesias católica y protestante.

Su estudio serio de las matemáticas no se inició sino hasta 1672, cuando se encontraba en una misión diplomática en París. Allí construyó una máquina para realizar cálculos y se encontró con científicos, como Huygens, quienes dirigieron su atención hacia los desarrollos más recientes en las matemáticas y las ciencias. Leibniz se empeñó en desarrollar una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara el razonamiento lógico. En la versión del cálculo que publicó en 1684 estableció la notación y las reglas para hallar derivadas que aún se usan en la actualidad.

Por desgracia, en la década de 1690 surgió una terrible disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibniz acerca de quién había inventado el cálculo. Leibniz incluso fue acusado de plagio por los miembros de la Real Academia de Inglaterra. La verdad es que cada uno lo inventó por separado. Newton llegó primero a su versión del cálculo pero, debido a su temor a la controversia, no la publicó de inmediato. Por tanto, el informe de Leibniz del cálculo en 1684 fue el primero en publicarse.

3 DEFINICIÓN Una función f es **derivable en a** si $f'(a)$ existe. Es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

V EJEMPLO 5 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y puede elegir h suficientemente pequeño que $x + h > 0$, de donde $|x + h| = x + h$. Por lo tanto, para $x > 0$ tiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

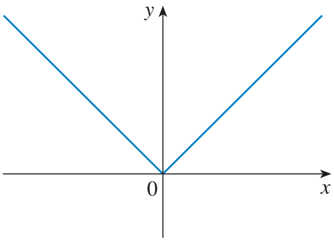
y así f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ tiene $|x| = -x$ y se puede elegir h suficientemente pequeño para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por lo tanto, para $x < 0$,

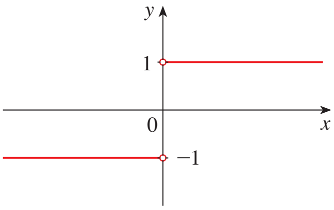
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

con lo que f es derivable para cualquier $x < 0$.



(a) $y = f(x) = |x|$



(b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

Para $x = 0$ debe investigar

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \qquad \text{(si existe)} \end{aligned}$$

Compare los límites por la izquierda y por la derecha, por separado:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Como estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, f es derivable en toda x, excepto 0.

Se da una fórmula para f'

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica aparece en la figura 5(b). La inexistencia de $f'(0)$ se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la figura 5(a).] □

Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función y el teorema siguiente muestra cómo se relacionan ambas

4 TEOREMA Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

DEMOSTRACIÓN Para probar que f es continua en a, debe probar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Lleve a cabo esto demostrando que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

La información dada es que f es derivable en a; es decir,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. (Véase la ecuación 2.7.5.) Para vincular lo dado con lo desconocido, divida y multiplique $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (lo cual es viable cuando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

De este modo, si usa la ley de producto y la ecuación (2.7.5), puede escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Para utilizar lo que acaba de probar, parta de $f(x)$ y súmele y réstele $f(a)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

En consecuencia, f es continua en a. □

NOTA El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas pero no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en 0 porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el ejemplo 7 de la sección 2.3.) Pero, en el ejemplo 5 demostró que f no es derivable en 0.

¿CÓMO DEJA DE SER DERIVABLE UNA FUNCIÓN?

En el ejemplo 5 vio que la función $y = |x|$ no es derivable en 0 y en la figura 5(a) muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "rizos", la gráfica de f no tiene tangente en esos puntos y f no es derivable allí. [Al intentar calcular $f'(a)$, encuentra que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El teorema 4 señala otra forma en que una función no tiene derivada. En él se afirma que si f no es continua en a, después f no es derivable en a. Por ende, en cualquier discontinuidad (por ejemplo, una discontinuidad por salto), f deja de ser derivable.

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en a y

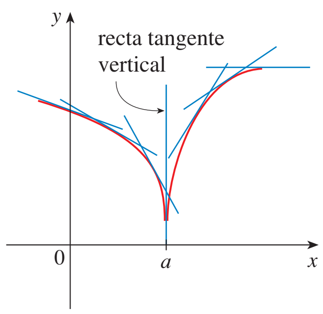
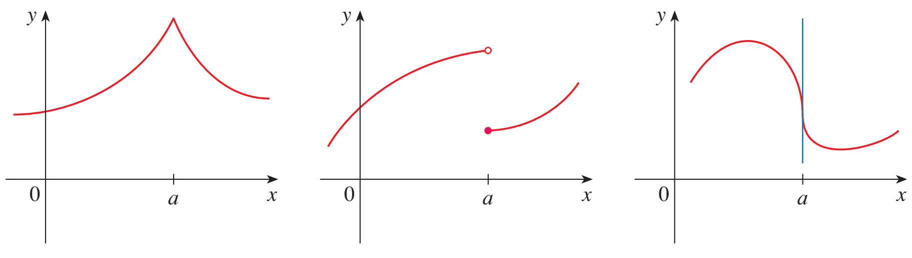


FIGURA 6

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7(c) ilustra otra. Las tres posibilidades recién analizadas se ilustran en la figura 7.



(a) Una esquina o rizo (b) Una dicontinuidad (c) Una tangente vertical

FIGURA 7
Tres maneras para que f no sea derivable en a

Una calculadora graficadora o una computadora ofrecen otra manera de ver la derivabilidad. Si f es derivable en a, por lo tanto, con un acercamiento al punto $(a, f(a))$, la gráfica se endereza y adquiere más y más la apariencia de un recta. (Véase la figura 8. Un ejemplo específico es la figura 2 de la sección 2.7.) Pero no importa cuánto se acerque a puntos como los de las figuras 6 y 7(a), no puede eliminar el punto agudo o esquina. (Véase la figura 9.)

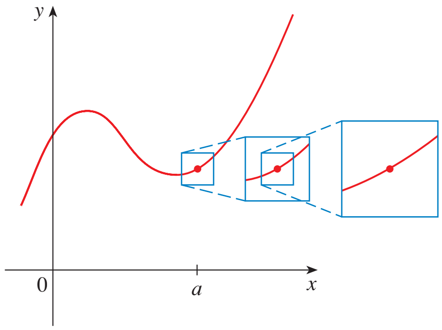


FIGURA 8
f es derivable en a

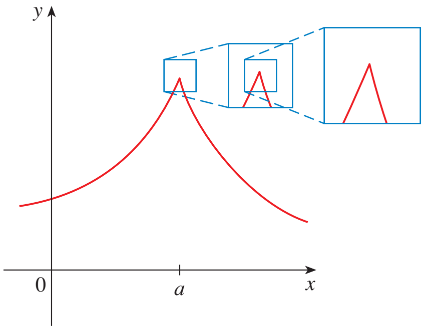


FIGURA 9
f no es derivable en a

DERIVADAS SUPERIORES

Si f es una función derivable, entonces su derivada f' también es una función, así, f' puede tener una derivada de sí misma, señalada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, se escribe la segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^3 - x$, hallar e interpretar $f''(x)$.

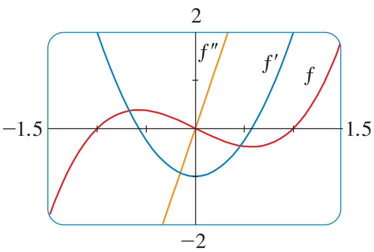


FIGURA 10

TEC En Module 2.8 puede ver cómo cambian los coeficientes de un polinomio f que afecta el aspecto de la gráfica de f, f' y f''.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 encontró que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. De este modo, la segunda derivada es

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h) = 6x$$

Las gráficas de f, f' y f'' se exhiben en la figura 10.

Puede interpretar $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la relación de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la figura 10 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. De esta manera, las gráficas sirven como una comprobación de sus cálculos. □

En general, se puede interpretar una segunda derivada como una relación de cambio de una relación de cambio. El ejemplo más familiar es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se traslada en una línea recta, se sabe que su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A la relación de cambio de la velocidad instantánea con respecto al tiempo se le llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La **tercera derivada** f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De este modo, $f'''(x)$ se puede interpretar como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la relación de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se señala mediante $f^{(4)}$. En general, la n-esima derivada de f se señala mediante $f^{(n)}$ y se obtiene de f derivando n veces. Si $y = f(x)$, escriba

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, hallar $f'''(x)$ e interpretar $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 encontró que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y de este modo, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Así, f''' es una función constante y su gráfica es una línea horizontal. En consecuencia, para todos los valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$ □

Se puede interpretar la tercera derivada físicamente en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se traslada a lo largo de una línea recta. Porque $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk** (impulso):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

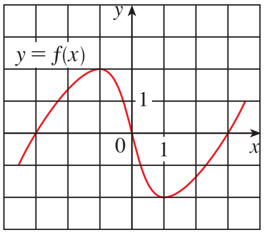
Por esto el jerk j es la razón de cambio de la aceleración. Nombre apropiado porque un jerk considerable significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' proporciona información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 vera cómo la segunda derivada y derivadas superiores permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

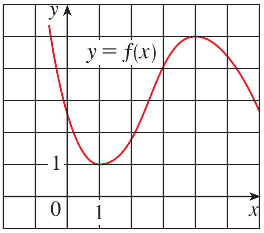
2.8 EJERCICIOS

1–2 Use la gráfica que se proporciona para estimar el valor de cada derivada. Luego dibuje f'.

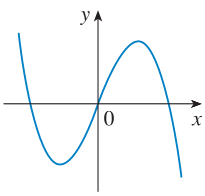
1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

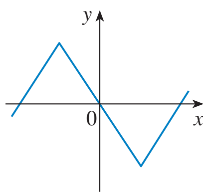


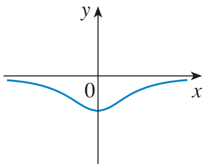
2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$

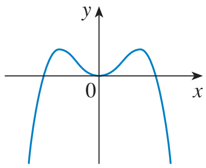


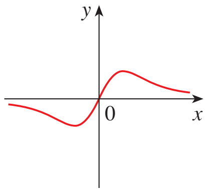
3. Correlacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)-(d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I a IV. Dé las razones para sus selecciones.

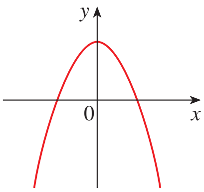
(a)


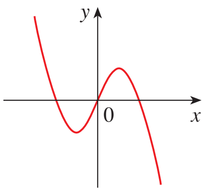
(b)


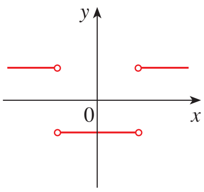
(c)


(d)


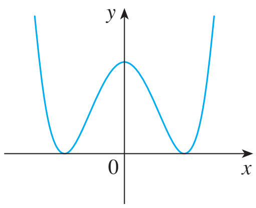
I


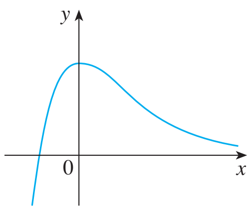
II


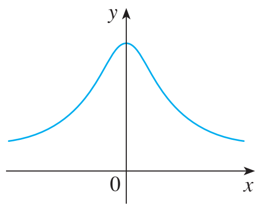
III


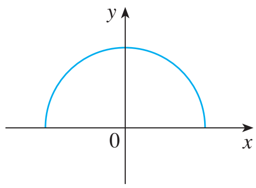
IV


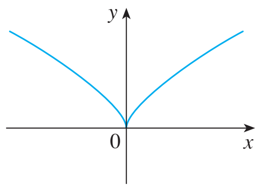
4–11 Trace o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego aplique el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de ella.

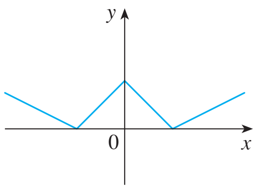
4.


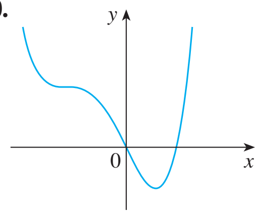
5.


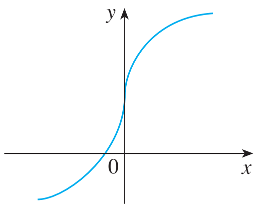
6.


7.


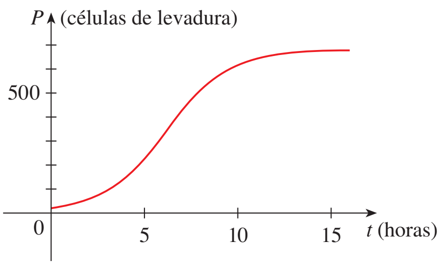
8.


9.


10.


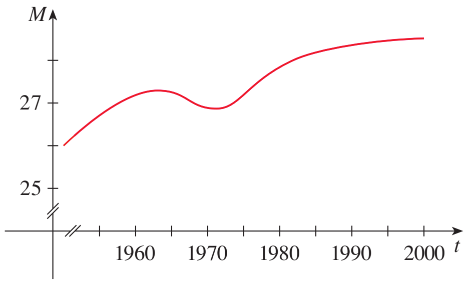
11.


12. Se muestra la gráfica de la función de población $P(t)$ para células de levadura en un cultivo de laboratorio. Use el método del



ejemplo 1 para dibujar la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?

13. La gráfica ilustra cómo ha variado la edad promedio en que contraían matrimonio por primera vez los hombres japoneses en la segunda mitad del siglo XX. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante cuáles años fue negativa la derivada?



14–16 Trace una gráfica cuidadosa de f y, debajo de ella, la gráfica de f' de la misma manera que en los ejercicios 4–11. ¿Puede intentar una fórmula para $f'(x)$ a partir de su gráfica?

14. $f(x) = \text{sen } x$

15. $f(x) = e^x$

16. $f(x) = \ln x$

17. Sea $f(x) = x^2$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$ y $f'(2)$ usando un aparato graficador para hacer un acercamiento sobre la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ y $f'(-2)$.
(c) Con los resultados de los incisos (a) y (b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
(d) Aplique la definición de derivada para probar que su proposición del inciso (c) es correcta.

18. Sea $f(x) = x^3$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$ usando un aparato graficador para hacer un acercamiento sobre la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ y $f'(-3)$.
(c) Use los valores de los incisos (a) y (b) para trazar la gráfica f'.
(d) Proponga una fórmula parar $f'(x)$.
(e) Aplique la definición de derivada para probar que su proposición del inciso (d) es correcta.

19–29 Encuentre la derivada de la función dada aplicando la definición de derivada. Dé los dominios de la función y de su derivada.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

20. $f(x) = mx + b$

21. $f(t) = 5t - 9t^2$

22. $f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

23. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

24. $f(x) = x + \sqrt{x}$

25. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$

26. $f(x) = \dfrac{3 + x}{1 - 3x}$

27. $G(t) = \dfrac{4t}{t + 1}$

28. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

29. $f(x) = x^4$

30. (a) Dibuje $f(x) = \sqrt{6 - x}$ a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ aplicando las transformaciones de la sección 1.3.
(b) Use la gráfica del inciso (a) para trazar la de f'.
(c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?
(d) Use un aparato graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su esquema del inciso (b).

31. (a) Si $f(x) = x^4 + 2x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

32. (a) Si $f(t) = t^2 - \sqrt{t}$, encuentre $f'(t)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

33. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla del Bureau of Labor Statistics (Oficina de Estadísticas de Empleo) proporciona el porcentaje de desempleados en la fuerza laboral de Estados Unidos de 1993 al 2002.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1993	6.9	1998	4.5
1994	6.1	1999	4.2
1995	5.6	2000	4.0
1996	5.4	2001	4.7
1997	4.9	2002	5.8

(a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $U'(t)$.

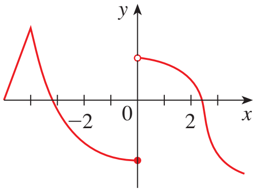
34. Sea $P(t)$ el porcentaje de estadounidenses por debajo de 18 años de edad en el instante t. La tabla proporciona valores de esta función en los años en que se levantó un censo de 1950 a 2000.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

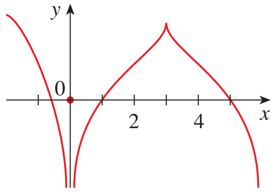
(a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $P'(t)$.
(c) Dibuje P y P'.
(d) ¿Cómo sería posible obtener valores más precisos para $P'(t)$?

35–38 Se proporciona la gráfica de f. Establezca, con argumentos, los números en que f no es derivable.

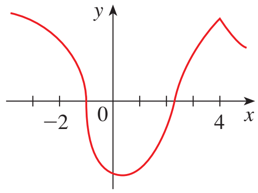
35.



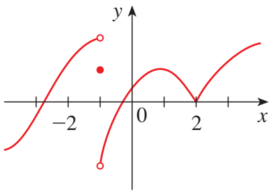
36.



37.



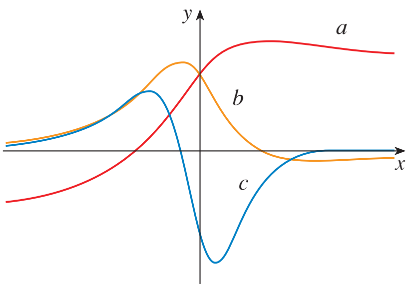
38.



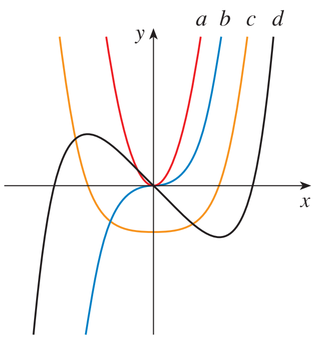
39. Dibuje la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Haga acercamientos sucesivos primero hacia el punto $(-1, 0)$ y luego en dirección al origen. ¿Qué diferencia existe en cuanto al comportamiento de f en las cercanías de estos dos puntos? ¿Qué conclusiones infiere acerca de la derivabilidad de f?

40. Haga un acercamiento hacia los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ sobre la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Qué advierte? Registre lo que observa en términos de la derivabilidad de g.

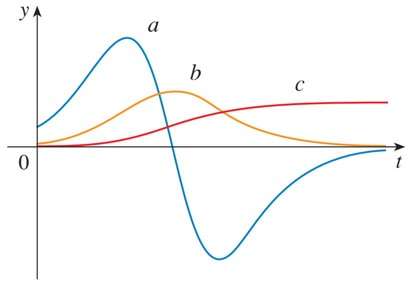
41. La figura exhibe las gráficas de f, f' y f''. Indique cada curva y explique su elección.



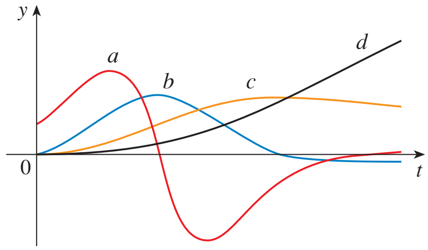
42. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada curva y explique su alternativa.



43. La figura describe las gráficas de tres funciones. Una es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo, y la de su aceleración. Identifique cada curva y explique su opción.



44. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones posición de un automóvil, otra la velocidad de él, la aceleración y la que resta su jerk. Identifique cada curva y explique su preferencia.

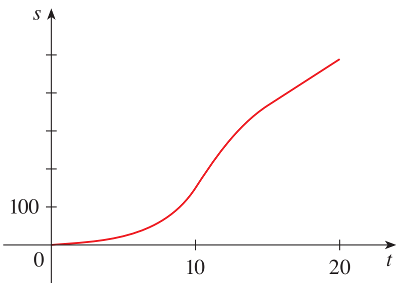


45–46 Aplique la definición de una derivada para hallar $f'(x)$ y $f''(x)$. Después, grafique f, f' y f'' en una misma pantalla y verifique para ver si sus respuestas son justas.

45. $f(x) = 1 + 4x - x^2$ **46.** $f(x) = 1/x$

47. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$, hallar $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Grafique f, f', f'' y f''' en una misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con la interpretación geométrica de estas derivadas?

48. (a) Se muestra la gráfica de una función posición de un automóvil, donde s se mide en pies y t en segundos. Utilice la gráfica de la velocidad y la aceleración del automóvil. ¿Cuál es la aceleración en $t = 10$ segundos?



(b) Aplique la curva de aceleración del inciso (a) para estimar el jerk en $t = 10$ segundos. ¿Cuáles son las unidades del jerk?

49. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Si $a \neq 0$, use la ecuación 2.7.5 para hallar $f'(a)$.
(b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
(c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en $(0, 0)$. (Recuerde la forma de la función de f. Véase la figura 13 de la sección 1.2.)

50. (a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g'(0)$ no existe.
(b) Si $a \neq 0$, encuentre $g'(a)$.
(c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una recta tangente vertical en $(0, 0)$.
(d) Ilustre el inciso (c) dibujando $y = x^{2/3}$.

51. Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en 6. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

52. ¿Dónde es no derivable la función entero máximo $f(x) = [\![x]\!]$? Halle una fórmula para f' y trace su gráfica.

53. (a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x\,|x|$.
(b) Para qué valores de x es f derivable.
(c) Halle una fórmula para f'.

54. Las **derivadas izquierda** y **derecha** de f en a están definidas por

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

y
$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si existen estos límites. En tal caso, $f'(a)$ existe si y sólo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

(a) Halle $f'_{-}(4)$ y $f'_{+}(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Dibuje la gráfica de f.
(c) ¿Dónde es f discontinua?
(d) ¿Dónde f no es derivable?

55. Recuerde que a una función se le denomina como *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para toda x. Pruebe cada uno de los siguientes
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

56. Cuando abre una llave de agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo que el agua ha estado corriendo.
(a) Trace una gráfica posible de T como función del tiempo transcurrido desde que abrió la llave.
(b) Describa cómo varía la relación de cambio de T con respecto a t, conforme ésta aumenta.
(c) Dibuje la derivada de T.

57. Sea ℓ la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$. El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que ℓ describe con la dirección positiva del eje x. Calcule ϕ correcto al grado más cercano.

2 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. Explique qué significa cada una de las siguientes e ilustre mediante un boceto.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$
(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$
(d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
(e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con bocetos.

3. Enuncie las leyes de los límites siguientes.
(a) Ley de la suma
(b) Ley de la diferencia
(c) Ley del múltiplo constante
(d) Ley del producto
(e) Ley del cociente
(f) Ley de la potencia
(g) Ley de la raíz

4. ¿Qué dice el teorema de la compresión?

5. (a) ¿Qué quiere darse a entender al decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.
(b) Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuál de las curvas siguientes tiene asíntotas verticales? ¿Cuál tiene asíntotas horizontales?
(a) $y = x^4$
(b) $y = \operatorname{sen} x$
(c) $y = \tan x$
(d) $y = \tan^{-1} x$
(e) $y = e^x$
(f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$
(h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) ¿Qué significa que f sea continua en a?
(b) ¿Qué significa que f sea continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de tal función?

8. ¿Qué dice el teorema del valor intermedio?

9. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

10. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea de un objeto en el instante $t = a$. ¿Cómo puede interpretar esta velocidad en términos de la gráfica de f?

11. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente:
(a) La razón promedio de cambio de y con respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$.
(b) La razón instantánea de cambio de y con respecto a x en $x = x_1$.

12. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

13. Defina la segunda derivada de f. Si $f(x)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?

14. (a) ¿Qué significa que f sea derivable en a?
(b) ¿Cuál es la relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función?
(c) Trace la gráfica de una función que es continua pero no derivable en $a = 2$.

15. Describa varias maneras en que una función puede no ser derivable. Ilustre con bocetos.

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{2x}{x-4} - \lim_{x\to 4}\frac{8}{x-4}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+2x-4} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-3)}{\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ no existe.

5. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ no existe.

6. Si $\lim_{x\to 6} f(x)g(x)$ existe, entonces el límite tiene que ser $f(6)g(6)$.

7. Si p es un polinomio, entonces $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

8. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, luego $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 0$.

9. Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas.

10. Si f tiene un dominio $[0, \infty)$ y no tiene asíntota horizontal entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

11. Si la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$, entonces f no está definida en 1.

12. Si $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c) = 0$.

13. Si f es continua en 5 y $f(5) = 2$ y $f(4) = 3$, entonces $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

14. Si f es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = 4$ y $f(1) = 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$.

15. Sea f una función tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Entonces existe un número δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - 6| < 1$.

16. Si $f(x) > 1$ para toda x y $\lim_{x\to 0} f(x)$ entonces $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

17. Si f es continua en a, entonces f es derivable en a.

18. Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

19. $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

20. La ecuación $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 2)$

EJERCICIOS

1. Se da la gráfica de f.

(a) Encuentre cada uno de los límites o explique por qué no existe.

(i) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to 4} f(x)$

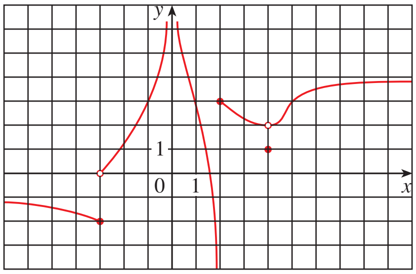
(v) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(vii) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

(b) Enuncie las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

(c) Enuncie las ecuaciones de las asíntotas verticales.

(d) ¿En qué números f es discontinua?



2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to -3^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2,$$

f es continua desde la derecha en 3.

3–20 Encuentre el límite

3. $\lim_{x\to 1} e^{x^3-x}$

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

5. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

6. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

7. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h-1)^3+1}{h}$

8. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2-4}{t^3-8}$

9. $\lim_{r\to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

10. $\lim_{v\to 4^+} \dfrac{4-v}{|4-v|}$

11. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4-1}{u^3+5u^2-6u}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

14. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

15. $\lim_{x\to\pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1-2x^2-x^4}{5+x-3x^4}$

17. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+4x+1}-x)$

18. $\lim_{x\to-\infty} e^{x-x^2}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(1/x)$

20. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

21–22 Use las gráficas para descubrir las asíntotas de la curva. Luego pruebe qué ha descubierto.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}$

23. Si $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encuentre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

24. Pruebe que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

25–28 Demuestre que cada afirmación es verdadera usando la definición precisa de límite.

25. $\lim_{x\to 2} (14-5x) = 4$

26. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x\to 2} (x^2-3x) = -2$

28. $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x-4}} = \infty$

29. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3-x & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada límite, si existe.

(i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 3} f(x)$

(b) ¿Dónde es discontinua f?

(c) Trace la gráfica de f.

30. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x-x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2-x & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \\ x-4 & \text{si } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(a) Para cada uno de los números 2, 3 y 4, descubra si g es continua por la izquierda, por la derecha o continua en el número.

(b) Bosqueje la gráfica de g.

31–32 Demuestre que cada función es continua en su dominio. Dé el dominio.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

32. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-2}$

33–34 Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación en el intervalo dado.

33. $2x^3 + x^2 + 2 = 0, \quad (-2, -1)$

34. $e^{-x^2} = x, \quad (0, 1)$

---

35. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente en la curva $y = 9 - 2x^2$ en el punto (2, 1).
(b) Escriba una ecuación de esta tangente.

36. Encuentre las ecuaciones de las tangentes a la curva

$$y = \frac{2}{1 - 3x}$$

en los puntos de abcisas 0 y -1.

37. La expresión $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, da el desplazamiento (en metros) de un objeto que se mueve en una línea recta. En dicha expresión, t se mide en segundos.
(a) Encuentre la velocidad promedio en los siguientes periodos
(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$
(iii) $[1, 1.5]$ (iv) $[1, 1.1]$
(b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

38. Según la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV = 800$, donde P se mide en libras por pulgada cuadrada y V en pulgadas cúbicas.
(a) Encuentre la razón promedio de cambio de P cuando V se incrementa de 200 pulg^3 a 250 pulg^3.
(b) Exprese V como función de P y demuestre que la razón instantánea de cambio de V con respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de esta última.

39. (a) Use la definición de derivada para hallar $f'(2)$, donde $f(x) = x^3 - 2x$.
(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto $(2, 4)$.
(c) Ilustre el inciso (b) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

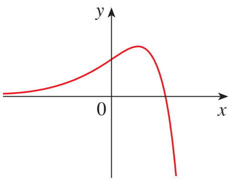
40. Encuentre una función f y un número a tales que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

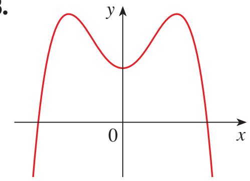
41. El costo total de pagar un préstamo para estudiante, a una tasa de interés de r% por año es $C = f(r)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(r)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Qué significa la proposición $f'(10) = 1200$?
(c) ¿$f'(r)$ siempre es positiva o cambia de signo?

42–44 Trace o copie la gráfica de la función dada. Luego dibuje directamente debajo su derivada.

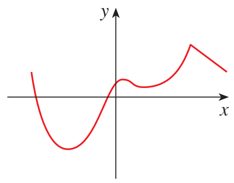
42.



43.



44.

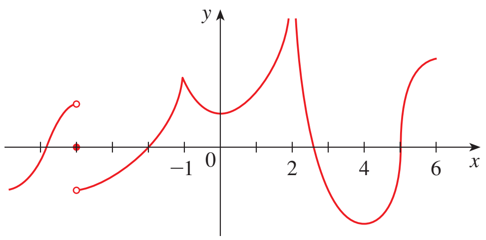


---

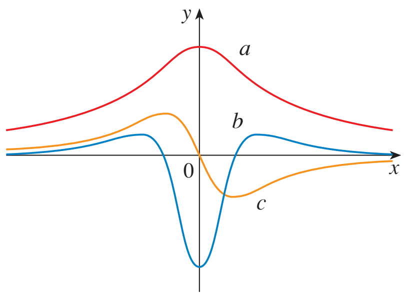
45. (a) Si $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
(b) Encuentre los dominios de f y f'.
(c) Trace f y f' en una pantalla común. Compare las gráficas para ver si su respuesta al inciso (a) es razonable.

46. (a) Encuentre las asíntotas de la gráfica de $f(x) = (4 - x)/(3 + x)$ y úselas para dibujar la gráfica.
(b) Use la gráfica del inciso (a) para graficar f'.
(c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
(d) Utilice un aparato graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su dibujo del inciso (b).

47. Se muestra la gráfica de f. Enuncie, con razones, los números en que f no es diferenciable.



48. La figura muestra la gráfica de f, f' y f''. Identifique cada curva y explique su elección.



49. Sea $C(t)$ el valor total de certificados bancarios en circulación en el instante t. La tabla de valores de esta función de 1980 a 2000, en miles de millones de dólares. Estime e interprete el valor de $C'(1990)$.

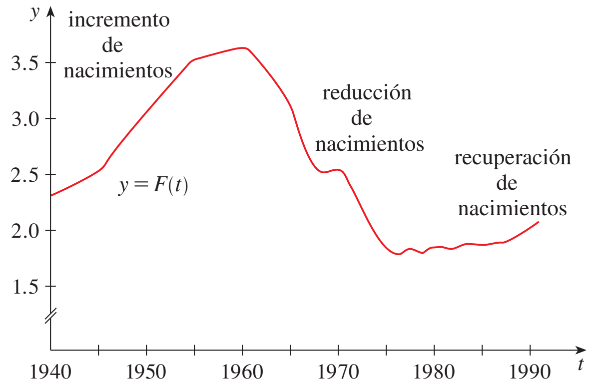
t	1980	1985	1990	1995	2000
$C(t)$	129.9	187.3	271.9	409.3	568.6

50. La *tasa de fertilidad total*, en el tiempo t, denotada con $F(t)$, es una estimación del número promedio de niños nacidos de cada mujer (suponiendo que las tasas de natalidad actuales permanezcan constantes). En la gráfica de la tasa de fertilidad total en Estados Unidos, se muestran las fluctuaciones desde 1940 hasta 1990.

(a) Estime los valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ y $F'(1987)$.

(b) ¿Cuáles son los significados de estas derivadas?

(c) ¿Puede sugerir razones de los valores de estas derivadas?



51. Suponga que $|f(x)| \leqslant g(x)$ para todo x, y que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Encuentre el $\lim_{x\to a} f(x)$.

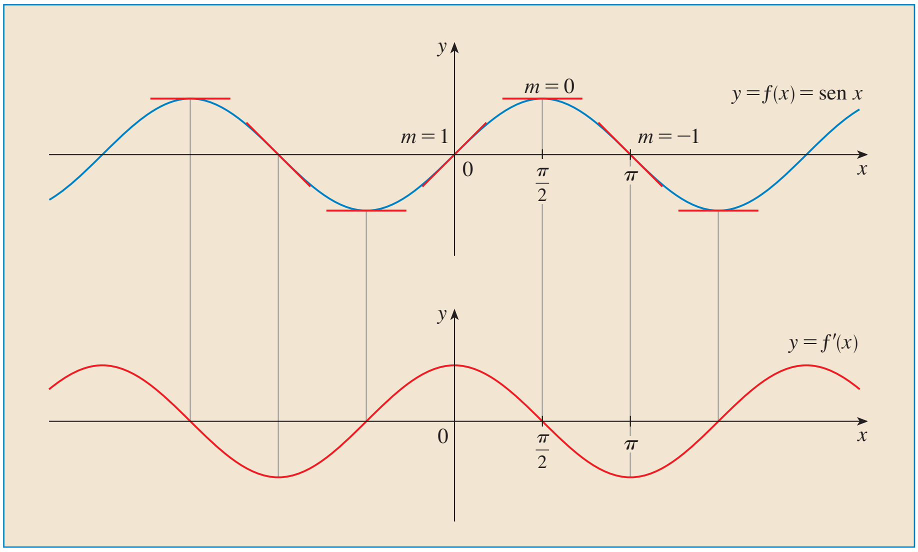
52. Sea $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

(a) ¿Para qué valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$?

(b) ¿En qué números es discontinua la función f?

3

REGLAS DE DERIVACIÓN



Al medir las pendientes en puntos que se localizan en la curva seno obtiene claras evidencias de que la derivada de la función seno es la función coseno

Hasta aquí, ha visto cómo interpretar las derivadas como pendientes y relaciones de cambio y ha estudiado cómo estimar las derivadas de funciones dadas por medio de tablas de valores. También ha aprendido la manera de graficar las derivadas de funciones que se definen gráficamente y ha usado la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Pero sería tedioso si siempre tuviéra que aplicar la definición, de modo que, en este capítulo se desarrollan reglas para hallar derivadas sin tener que usar directamente esa definición. Estas reglas de derivación permiten calcular con relativa facilidad las derivadas de polinomios, funciones racionales, funciones algebraicas, funciones exponenciales y logarítmicas y funciones trigonométricas inversas. A continuación usará estas reglas para resolver problemas en que intervienen relaciones de cambio, tangentes a curvas paramétricas y la aproximación de funciones.

3.1 DERIVADAS DE POLINOMIOS Y DE FUNCIONES EXPONENCIALES

En esta sección aprenderá la manera de derivar funciones constantes, funciones de potencias, polinomios y funciones exponenciales.

Empiece por la más sencilla de todas las funciones, la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, de modo que debe tener $f'(x) = 0$. (Véase la figura 1.) Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

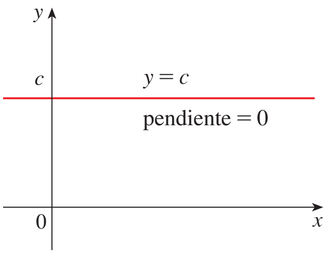


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$, por tanto $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

En la notación de Leibniz, se escribe está notación como sigue:

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

FUNCIONES POTENCIA

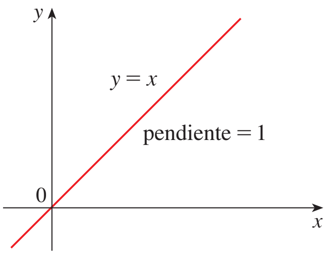


FIGURA 2
La gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, por tanto $f'(x) = 1$

En seguida, se consideran las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, la cual tiene pendiente 1 (véase la figura 2). De modo que

1 $$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

(También puede comprobar la ecuación 1 a partir de la definición de derivada.) Ya ha investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. En efecto, en la sección 2.8 (ejercicios 17 y 18), encontró que

2 $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$, la derivada de $f(x) = x^4$, queda como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Así

3 $$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si compara las ecuaciones (1), (2), (3), surge un patrón. Parece razonable presumir que, cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta cierto. Se demuestra de dos modos; en la segunda demostración se aplica el teorema del binomio

REGLA DE LA POTENCIA Si n es un entero positivo, en consecuencia

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN Puede verificar la fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

multiplicando sólo el lado derecho (o mediante la suma del segundo factor como una serie geométrica). Si $f(x) = x^n$, puede aplicar la ecuación 2.7.5 para $f'(a)$ y la ecuación anterior para escribir

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

■ El teorema del binomio se da en la página de referencia 1.

Al hallar la derivada de x^4, tuvo que desarrollar $(x + h)^4$. En este caso, necesita desarrollar $(x + h)^n$ y, para hacerlo, aplique el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

porque todos los términos, excepto el primero, tienen h como factor, y, por lo tanto, tienden a 0. □

En el ejemplo 1, se ilustra la regla de la potencia usando varias notaciones.

EJEMPLO 1

(a) Si $f(x) = x^6$, después $f'(x) = 6x^5$. (b) Si $y = x^{1000}$, por lo tanto $y' = 1000x^{999}$.

(c) Si $y = t^4$, en seguida $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. (d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$ □

¿Qué se puede decir acerca de las funciones potencia con exponentes enteros negativos? En el ejercicio 61 se le pide al lector que compruebe, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Por lo que puede escribir de nuevo esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y, por consiguiente, la regla de la potencia se cumple cuando $n = -1$. De hecho, en la sección siguiente [ejercicio 58(c)] se demuestra que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué sucede si el exponente es una fracción? En el ejemplo 3 de la sección 2.8 encontró que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

lo cual se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto hace ver que la regla de la potencia es verdadera incluso cuando $n = \frac{1}{2}$. De hecho, en la sección 3.6, se demuestra que es verdadera para todos los números reales n.

REGLA DE LA POTENCIA (VERSIÓN GENERAL) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

■ En la figura 3 se muestra la función y del ejemplo 2(b) y su derivada y'. Advierta que y no es derivable en 0 (y' no está definida allí). Observe que y' es positiva cuando y crece, y negativa cuando y decrece.

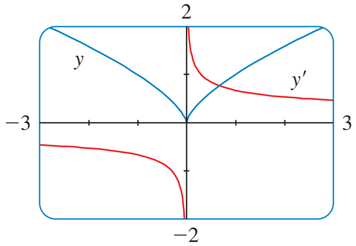


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

EJEMPLO 2 Derive:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN En cada caso, reescriba la función como una potencia de x.

(a) Como $f(x) = x^{-2}$, aplique la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$ □

La regla de la potencia permite hallar las líneas tangentes sin hacer uso de la definición de una derivada. Además permite encontrar *rectas normales*. La **recta normal** a una curva C en un punto P es la recta a través de P que es perpendicular a la recta tangente en P. (En el estudio de lo óptica, necesita considerar el ángulo entre un rayo de luz y la recta normal al lente.)

V EJEMPLO 3 Halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x\sqrt{x}$ en el punto $(1, 1)$. Ilustre dibujando la curva y estas rectas.

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

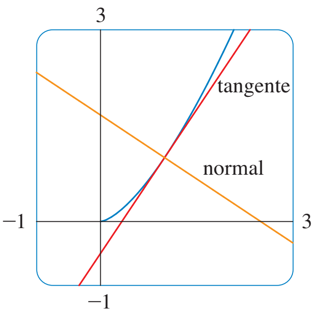


FIGURA 4

De este modo, la pendiente de la recta tangente en $(1, 1)$ es $f'(1) = \frac{3}{2}$. Por consiguiente la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

La línea normal es perpendicular a la línea tangente de tal manera que, su pendiente es el reciproco negativo de $\frac{3}{2}$, es decir, $-\frac{2}{3}$. En estos términos una ecuación de la línea normal es

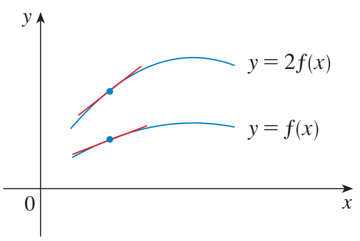
$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}$$

En la figura 4 se traza la gráfica de la curva y las rectas tangente y normal. □

NUEVAS DERIVADAS A PARTIR DE ANTERIORES

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones anteriores por adición, sustracción o multiplicación por una constante, sus derivadas se pueden calcular en términos de la derivada de sus funciones anteriores. En particular, en la fórmula siguiente se afirma que la *derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.*

■ INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los avances permanecen iguales. Las pendientes también se duplican.

REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

COMPROBACIÓN Sea $g(x) = cf(x)$. Después

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley de los límites 3)} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 4

(a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$ □

La siguiente regla dice que *la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas.*

■ Si se utiliza la notación prima, puede escribir la regla de la suma como

$$(f + g)' = f' + g'$$

REGLA DE LA SUMA Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

PRUEBA $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 1)} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

□

La regla de la suma se puede extender a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema dos veces obtiene

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicando la regla de la suma y la del múltiplo constante, obtiene la fórmula siguiente.

REGLA DE LA DIFERENCIA Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Estas tres reglas se pueden combinar con la regla de la potencia para derivar cualquier polinomio, como se demuestra en los ejemplos que siguen

EJEMPLO 5

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) \\
&\qquad = \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\
&\qquad = 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0 \\
&\qquad = 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6
\end{aligned}$$

□

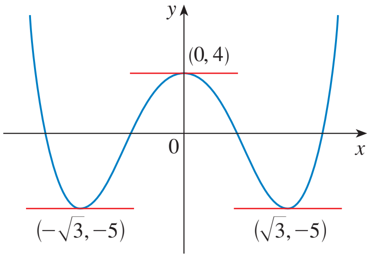


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus tangentes horizontales

V EJEMPLO 6 Encuentre sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$, los puntos donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)\\ &= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)\end{aligned}$$

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por eso, la curva dada tiene tangentes horizontales cuando $x = 0$, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son $(0, 4)$ $(\sqrt{3}, -5)$ y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.) □

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una partícula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centimetros y t en segundos. Hallar la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 s es $a(2) = 14$ cm/s^2. □

FUNCIONES EXPONENCIALES

Intente calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$, aplicando la función de derivada

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h - 1)}{h}\end{aligned}$$

El factor a^x no depende de h, de modo que puede llevarlo adelante del límite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

Advierta que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

En consecuencia, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = a^x$ es derivable en 0, entonces es derivable en todas partes y

4 $$f'(x) = f'(0)a^x$$

En esta ecuación se afirma que *la razón de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la propia función.* (La pendiente es proporcional a la altura.)

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

En la tabla que aparece a la izquierda, se da evidencia numérica de la existencia de $f'(0)$ en los casos $a = 2$ y $a = 3$. (Los valores se dan correctos hasta cuatro posiciones decimales.) Parece que los límites existen y

$$\text{Para } a = 2 \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{Para } a = 3 \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, se establecen los límites existentes y, correctos hasta seis cifras decimales, los valores son

$$\left.\frac{d}{dx}(2^x)\right|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \left.\frac{d}{dx}(3^x)\right|_{x=0} \approx 1.098612$$

Por esto, de la ecuación 4

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

De todas las ecuaciones posibles para la base a de la ecuación 4, se tiene la fórmula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de las estimaciones de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$, parece razonable que exista un número a entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es tradicional denotar este valor con la letra e. (De hecho, así se presentó e en la sección 1.5.) Por esto se tiene la siguiente definición

■ En el ejercicio 1 verá que e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Más adelante será capaz de demostrar que e con cinco dígitos (o posiciones) decimales es

$$e \approx 2.71828$$

DEFINICIÓN DEL NÚMERO e

$$e \text{ es el número tal que} \quad \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geométricamente, esto significa que de todas las funciones exponenciales posibles $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en $(0, 1)$ tiene una pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véase las figuras 6 y 7.)

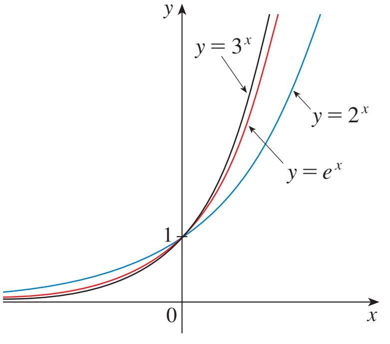


FIGURA 6

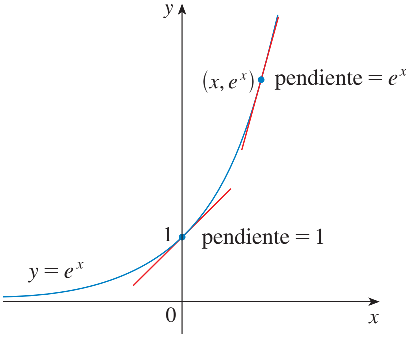


FIGURA 7

Si pone $a = e$ y, por lo tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la importante fórmula de derivación que se proporciona a continuación.

TEC Visual 3.1 aplica el alcance de una pendiente para examinar esta formula

DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

De donde la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y del punto (véase la figura 7).

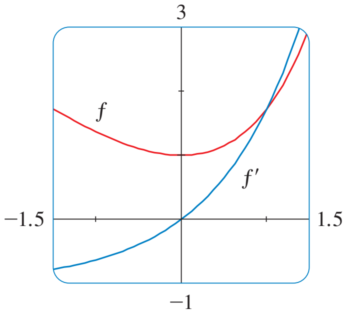


FIGURA 8

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

En la sección 2.8 se define la segunda derivada como la derivada de f', así

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

La función f y su derivada f' se grafican en la figura 8. Observe que f tiene una tangente horizontal cuando $x = 0$; esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Asimismo, observe que para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente. □

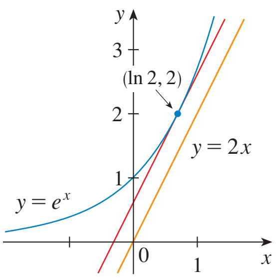


FIGURA 9

EJEMPLO 9 ¿En cuál punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Como $y = e^x$, tenemos $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Después, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, se tiene

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Por lo tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase la figura 9.) □

3.1 EJERCICIOS

1. (a) ¿Cómo se define el número e?
(b) Use una calculadora para estimar los valores de los límites

$$\lim_{h\to 0} \frac{2.7^h - 1}{h} \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{2.8^h - 1}{h}$$

correctos hasta dos dígitos decimales. ¿Qué puede concluir acerca del valor de e?

2. (a) Dibuje, a mano, la función $f(x) = e^x$, poniendo particular atención a la forma en que la gráfica cruza el eje y. ¿Qué hecho le permite hacer esto?
(b) ¿Qué tipos de funciones son $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^e$? Compare las fórmulas de derivación para f y g.
(c) ¿Cuál de las dos funciones del inciso (b) crece con mayor rapidez cuando x es grande?

3–32 Derive la función.

3. $f(x) = 186.5$

4. $f(x) = \sqrt{30}$

5. $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$

6. $F(x) = \frac{3}{4}x^8$

7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

8. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$

9. $f(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $y = x^{-2/5}$

12. $y = 5e^x + 3$

13. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

14. $R(t) = 5t^{-3/5}$

15. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

16. $B(y) = cy^{-6}$

17. $G(x) = \sqrt{x} - 2e^x$

18. $y = \sqrt[3]{x}$

19. $F(x) = (\frac{1}{2}x)^5$

20. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

21. $y = ax^2 + bx + c$

22. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$

25. $y = 4\pi^2$

26. $g(u) = \sqrt{2}u + \sqrt{3u}$

27. $H(x) = (x + x^{-1})3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33–34 Hallar una ecuación de la línea tangente a la curva en el punto que se indica.

33. $y = \sqrt[4]{x}$, (1.1)

34. $y = x^4 + 2x^2 - x$, (1.2)

35–36 Determine una ecuación de la tangente y la normal a la curva en el punto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$

36. $y = (1 + 2x)^2$, $(1, 9)$

37–38 Formule una ecuación para la tangente a la curva en el punto dado. Grafique la curva y la tangente en la misma pantalla.

37. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

39–42 Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de f y f' y úselas enseguida para explicar por qué su respuesta es razonable.

39. $f(x) = e^x - 5x$

40. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$

41. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$

42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

---

43. (a) Use una calculadora graficadora o una computadora para dibujar la función $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ en el rectángulo de visualización $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.

(b) Utilizando la gráfica del inciso (a) para estimar pendientes, haga a mano un boceto aproximado de la gráfica de f'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.9.)

(c) Calcule $f'(x)$ y use esta expresión, con un aparato graficador, para dibujar f'. Compare con el boceto que trazó usted en el inciso (b).

44. (a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para dibujar la función $g(x) = e^x - 3x^2$ en el rectángulo de visualización $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.

(b) Aplicando la gráfica del inciso (a) para estimar pendientes, haga a mano un boceto aproximado de la gráfica de g'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.8.)

(c) Calcule $g'(x)$ y aplique esta expresión, con un dispositivo graficador, para dibujar g'. Compare con su boceto del inciso (b).

45–46 Hallar la primera y segunda derivadas de la función

45. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 16x$

46. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

47–48 Hallar la primera y segunda derivadas de la función. Verifique para ver que sus respuestas sean razonables al comparar las gráficas de f, f' y f''

47. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

48. $f(x) = e^x - x^3$

---

49. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Hallar

(a) la velocidad y aceleración como funciones de t.

(b) la aceleración después de 2 s, y

(c) la aceleración cuando la velocidad es 0

50. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$, donde s esta en metros y t en segundos.

(a) Hallar la velocidad y aceleración como funciones de t.

(b) Hallar la aceleración después de 1 s.

(c) grafíque las funciones, posición, velocidad y aceleración en la misma pantalla

51. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la tangente es horizontal

52. ¿Para qué valores de x tiene una tangente horizontal la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$?

53. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4.

54. Encuentre una ecuación de la recta normal a la curva $y = x\sqrt{x}$ que es paralela a la línea $y = 1 + 3x$

55. Hallar una ecuación de ambas rectas que son tangente a la curva $y = 1 + x^3$ y paralela a la línea $12x - y = 1$

56. ¿En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ es la recta tangente paralela a la recta $3x - y = 5$. Ilústrelo dibujando la curva y ambas rectas.

57. Establezca una ecuación de la recta normal a la parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que es paralela a la recta normal $x - 34 = 5$

58. ¿Dónde corta por segunda vez la normal a la parábola $y = x - x^2$ que pasa por el punto (1, 0) a la misma parábola? Elabore un esquema.

59. Dibuje un diagrama para demostrar que hay dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(0, -4)$. Encuentre las coordenadas de los puntos donde estas rectas tangentes intersecan la parábola.

60. (a) Halle ecuaciones de ambas rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que sean tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.
(b) Muestre que no hay ninguna recta que pase por el punto (2, 7) que es tangente a la parábola. Cuando dibuje el diagrama verá por qué.

61. Aplique la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$. (Esto demuestra la regla de la potencia para el caso $n = -1$.)

62. Encuentre la derivada n-ésima de cada función calculando las primeras derivadas y observe el patrón que se desarrolla

(a) $f(x) = x^n$ $\qquad$ $f(x) = 1/x$

63. Hallar un polinomio de segundo grado P de tal manera que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$, y $P''(2) = 2$

64. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ se le llama **ecuación diferencial** porque involucra uno función desconocida y y sus derivadas y' y y''. Hallar las constantes A, B y C de tal manera que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface esta ecuación. (Las ecuaciones diferenciales se estudiarán con detalle en el capítulo 9.)

65. Hallar una función cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tiene una tangente horizontal en los puntos $(-2,6)$ y $(2,0)$.

66. Hallar una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente -8 en $x = -1$, y pasa a través de el punto (2, 15).

67. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Es derivable f en 1? Dibuje las gráficas f y f'.

68. ¿En qué valores la función siguiente g es derivable?

$$g(x) = \begin{cases} -1 - 2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Proporcione una fórmula para g' y trace las gráficas de g y g'.

69. (a) ¿Para qué valores de x la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es derivable? Encuentre una fórmula para f'.
(b) Grafique f y f'.

70. ¿Dónde es derivable la función $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$? Proporcione una fórmula para h' y grafique h y h'.

71. Determine la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx$ cuya tangente en (1, 1) tiene por ecuación $y = 3x - 2$.

72. Considere la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tiene una recta tangente donde $x = 0$ con ecuación $y = 2x + 1$ y una recta tangente cuando $x = 1$ con ecuación $y = 2 + 3x$. Halle los valores de a, b, c y d.

73. ¿Para qué valores de a y b es la recta $2x + y = b$ tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

74. Hallar el valor de c tal que la línea $y = \frac{3}{2}x + 6$ es tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$.

75. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine los valores de m y b que hacen que f sea siempre derivable.

76. Se dibuja una recta tangente a la hipérbola $xy = c$ en un punto P.
(a) Demuestre que el punto medio de este segmento de la recta que se corta de su recta tangente mediante los ejes de coordenadas es P.
(b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes de coordenadas tiene siempre la misma área, sin importar dónde se ubique P sobre la hipérbola.

77. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

78. Dibuje un diagrama en el que se muestren dos rectas perpendiculares que se intersecan sobre el eje y, y son tangentes a la parábola $y = x^2$. ¿Dónde se intersecan estas rectas?

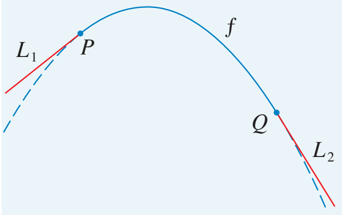
79. Si $c > \frac{1}{2}$, ¿cuántas líneas a través del punto (0, c) son rectas normales a la parábola $y = x^2$? ¿que sucede si $c \leqslant \frac{1}{2}$?

80. Dibuje la parábola $y = x^2$ y $y = x^2 - 2x + 2$. ¿Considera que existe una recta que es tangente a ambas curvas? De ser así, hallar su ecuación. Si no es así, ¿Por qué no?

PROYECTO DE APLICACIÓN

CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA

Suponga que se le solicita que diseñe el primer ascenso y descenso de una montaña rusa nueva. Después de estudiar fotografías de sus montañas rusas predilectas, decide hacer la pendiente del ascenso 0.8 y la del descenso -1.6. Opta por conectar estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ mediante parte de una parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en pies. Para que el trayecto sea uniforme no pueden existir cambios abruptos de dirección, por lo tanto desea que los



segmentos directos L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q. (Véase la figura.) Para simplificar las ecuaciones decide situar el origen en P.

1. (a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Escriba ecuaciones en a, b y c que aseguren que el trayecto es suave en los puntos de transición.
(b) Resuelva la ecuación del inciso (a) para a, b y c para hallar una fórmula para $f(x)$.
(c) Dibuje L_1, f y L_2 para verificar que las transiciones son uniformes.
(d) Encuentre la diferencia en elevación entre P y Q.

2. La solución del problema 1 quizá *parezca* suave, pero es posible que no *se sienta* suave debido a que la pieza definida como función [consistente de $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 100$ y $L_2(x)$ para $x > 100$] no tiene una segunda derivada continua. Por consiguiente decide mejorar el diseño aplicando una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ únicamente en el intervalo $10 \leqslant x \leqslant 90$ y conectándolo con las funciones lineales por medio de dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leqslant x < 10$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 90 < x \leqslant 100$$

(a) Escriba un sistema de ecuaciones en 11 incógnitas que aseguren que las funciones y sus dos primeras derivadas coincidan en los puntos de transición.
CAS (b) Resuelva las ecuaciones del inciso (a) con un sistema de computo algebraico para encontrar las fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.
(c) Dibuje L_1, g, q, h y L_2 y compárelos con las gráficas del problema 1 inciso (c).

3.2 LAS REGLAS DEL PRODUCTO Y EL COCIENTE

Las fórmulas de esta sección permiten derivar nuevas funciones formadas a partir de anteriores, por multiplicación o división.

REGLA DEL PRODUCTO

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría sentirse la tentación de presumir —como Leibniz lo hizo hace tres siglos— que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, puede ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Por lo tanto la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, de modo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Por eso, $(fg)' \neq f'g'$. La fórmula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

Antes de enunciar la regla del producto, vea cómo podría descubrirla. En el caso donde tanto $u = f(x)$ como $v = g(x)$ son funciones positivas, puede interpretar el producto uv como un área de un rectángulo (véase la figura 1). Si x cambia una cantidad Δx, en seguida los cambios correspondientes en u y v son

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

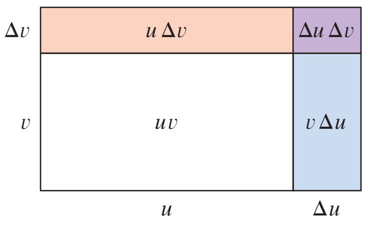


FIGURA 1
La geometría de la regla del producto

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, se puede interpretar como el área del rectángulo grande en la figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

$$\boxed{1} \qquad \Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$
$$= \text{la suma de las tres áreas sombreadas}$$

Si divide entre Δx, obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

■ Recuerde que en la notación de Leibniz la definición de derivada se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora hace que $\Delta x \longrightarrow 0$, obtiene la derivada de uv.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\ &= u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\ &= u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

(Advierta que $\Delta u \longrightarrow 0$ cuando $\Delta x \longrightarrow 0$, puesto que f es derivable y, por lo tanto, continua.)

Aun cuando se partió de la hipótesis (para la interpretación geométrica) que todas las cantidades son positivas, observe que la ecuación 1 siempre es verdadera. (El álgebra es válida si u, v, Δu y Δv son positivas o negativas.) De modo que ha probado la ecuación 2, conocida como regla del producto, para todas las funciones diferenciables u y v.

■ En notación prima:

$$(fg)' = fg' + gf'$$

REGLA DEL PRODUCTO Si tanto f como g son derivables, en tal caso

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\,\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En palabras, la regla del producto expresa que *la derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función.*

■ En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f del ejemplo 1 y su derivada f'. Advierta que $f'(x)$ es positiva cuando f crece y negativa cuando f disminuye.

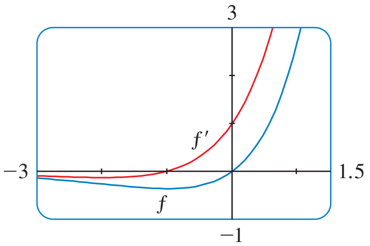


FIGURA 2

EJEMPLO 1

(a) Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.
(a) Hallar la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

SOLUCIÓN

(a) Por la regla del producto se tiene

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(xe^x) = x\,\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\,\frac{d}{dx}(x)\\ &= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x\end{aligned}$$

(b) Aplicando la regla del producto una segunda vez se obtiene

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] = (x+1)\,\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\,\frac{d}{dx}(x+1)\\ &= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x\end{aligned}$$

La aplicación adicional de la regla del producto proporciona

$$f'''(x) = (x + 3)e^x \qquad\qquad f^{(4)}(x) = (x + 4)e^x$$

En realidad, cada derivada que sigue adiciona otro término e^x, de esa manera

$$f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$$ □

■ En el ejemplo 2, a y b son constantes. En matemáticas es habitual aplicar letras cerca del inicio del alfabeto para representar constantes y las letras cercanas del final del alfabeto representan variables

EJEMPLO 2 Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$.

SOLUCIÓN 1 Si se aplica la regla del producto, tiene

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a + bt) + (a + bt)\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) \\ &= \sqrt{t}\cdot b + (a + bt)\cdot\tfrac{1}{2}t^{-1/2} \\ &= b\sqrt{t} + \frac{a + bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a + 3bt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si en primer lugar usa las leyes de los exponentes para volver a escribir $f(t)$, después puede proceder directamente, sin aplicar la regla del producto.

$$\begin{aligned} f(t) &= a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2} \\ f'(t) &= \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2} \end{aligned}$$

la cual equivale a la respuesta de la solución 1. □

En el ejemplo 2 se muestra que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones que utilizar la regla del producto. Sin embargo, en el ejemplo 1 esta regla es el único método posible.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}\,g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla del producto, obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\,g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] \\ &= \sqrt{x}\,g'(x) + g(x)\cdot\tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \sqrt{x}\,g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

De este modo $\quad f'(4) = \sqrt{4}\,g'(4) + \dfrac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2\cdot 3 + \dfrac{2}{2\cdot 2} = 6.5$ □

REGLA DEL COCIENTE

Encontrar una regla para derivar el cociente de dos funciones derivables $u = f(x)$ y $v = g(x)$ de manera muy similar a como se encontró la regla del producto. Si x, u y v cambian en cantidades Δx, Δu y Δv, en tal caso el cambio correspondiente en el cociente u/v es

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

por eso

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

A medida que $\Delta x \to 0$, $\Delta v \to 0$ también porque g es derivable y por consiguiente continua. Así, al aplicar las leyes de los límites, obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

■ En notación prima

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

REGLA DEL COCIENTE Si tanto f como g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

En palabras, en la regla del cociente se expresa que la *derivada de un cociente es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

La regla del cociente y las otras fórmulas de derivación permiten calcular la derivada de cualquier función racional, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

■ Puede usar un aparato graficador para comprobar que la respuesta al ejemplo 4 es plausible. En la figura 3 se muestran las gráficas de la función de ese ejemplo y su derivada. Advierta que cuando y crece con rapidez (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece con lentitud, y' está cercana a 0.

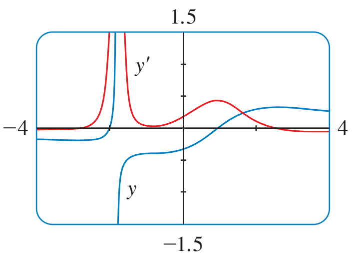


FIGURA 3

EJEMPLO 4 Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 5 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $(1, e/2)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla del cociente

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} \\
&= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}
\end{aligned}$$

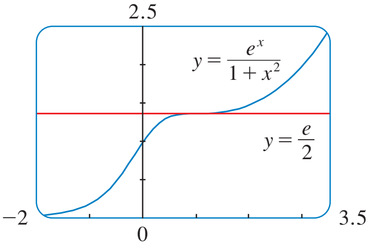


FIGURA 4

De modo que la pendiente de la recta tangente en $(1, \frac{1}{2}e)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $(1, \frac{1}{2}e)$ es horizontal y su ecuación es $y = \frac{1}{2}e$. [Véase la figura 4. Advierta que la función es creciente y cruza su recta tangente en $(1, \frac{1}{2}e)$.] □

NOTA No use la regla del cociente *cada* vez que vea un cociente. A veces es más fácil volver a escribir un cociente para ponerlo en una forma que sea más sencilla para los fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

aplicando la regla del cociente es más fácil dividir primero y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

Se resumen las fórmulas de derivación que ha aprendido hasta el momento como se describe a continuación:

TABLA DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 EJERCICIOS

1. Encuentre la derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Sus respuestas son equivalentes?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

de dos maneras: primero aplicando la regla del cociente y simplificando primero. Demuestre que sus respuestas son equivalentes. ¿Cuál método prefiere?

3–26 Derive la función

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \frac{e^x}{x^2}$

6. $y = \frac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \frac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \frac{2t}{4 + t^2}$

9. $V(x) = (2x^3 + 3)(x^4 - 2x)$

10. $Y(u) = (u^{-2} + u^{-3})(u^5 - 2u^2)$

11. $F(y) = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $R(t) = (t + e^t)(3 - \sqrt{t})$

13. $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \frac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \frac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$

16. $y = \frac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = (r^2 - 2r)e^r$

18. $y = \frac{1}{s + ke^s}$

19. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

20. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27–30 Hallar $f'(x)$ y $f''(x)$

27. $f(x) = x^4 e^x$

28. $f(x) = x^{5/2} e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{3 + e^x}$

31–32 Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva que se proporciona en el punto especifico.

31. $y = \dfrac{2x}{x + 1}$, $(1, 1)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

33–34 Halle ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la curva dada en el punto que se especifica.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$, $(4, 0.4)$

35. (a) La curva $y = 1/(1 + x^2)$ se llama **bruja de Agnesi**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre el inciso (a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

36. (a) La curva $y = x/(1 + x^2)$ se llama **serpentina**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(3, 0.3)$.
(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

37. (a) Si $f(x) = e^x/x^3$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

38. (a) Si $f(x) = x/(x^2 - 1)$, halle $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

39. (a) Si $f(x) = (x - 1)e^x$, hallar $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Verifique para ver que sus respuestas en el inciso (a) son razonables al comparar los gráficas de f, f' y f''.

40. (a) Si $f(x) = x/(x^2 + 1)$, hallar $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Verifique para comprobar que sus respuestas en el inciso (a) son son justas al comparar los gráficas de f, f' y f''.

41. Si $f(x) = x^2/(1 + x)$, hallar $f''(1)$.

42. Si $g(x) = x/e^x$, hallar $g^{(n)}(x)$.

43. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores siguientes
(a) $(fg)'(5)$
(b) $(f/g)'(5)$
(c) $(g/f)'(5)$

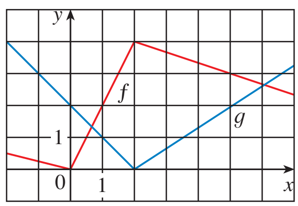
44. Considere que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$, encuentre $h'(2)$.
(a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$
(b) $h(x) = f(x)g(x)$
(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
(d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

45. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

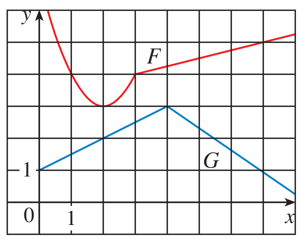
46. Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

47. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encuentre $u'(1)$.
(b) Encuentre $v'(5)$.



48. Sea $P(x) = F(x)G(x)$ y $Q(x) = F(x)/G(x)$, donde F y G son las funciones cuyas gráficas se muestran
(a) Encuentre $P'(2)$.
(b) Encuentre $Q'(7)$.



49. Si g es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ (c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

50. Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

51. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x + 1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En qué puntos toca la curva estas rectas tangentes?

52. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

53. En este ejercicio estime la proporción a la que se está elevando el ingreso personal total en el área metropolitana de Richmond-Petersburg, Virginia. En 1999, la población de esta área era 961 400 y la población aumentaba en alrededor de 9 200 personas al año. El ingreso anual promedio era \$30 593 per cápita, y este promedio aumentaba en cerca de \$1 400 al año (ligeramente por arriba del promedio nacional de alrededor de \$1 225 al año). Use la regla del producto y estas cifras para estimar la proporción en la que estaba aumentando el ingreso personal total en el área de Richmond-Petersburg en 1999. Explique el significado de cada término en la regla del producto.

54. Un fabricante produce rollos de una tela con un ancho fijo. La cantidad q de esta tela (medida en yardas) que se vende es función del precio de venta p (en dólares por yarda), de modo que $q = f(p)$. Luego el ingreso total que se percibe con el precio de venta p es $R(p) = pf(p)$.
(a) ¿Qué significa afirmar que $f(20) = 10\,000$ y $f'(20) = -350$?
(b) Suponiendo los valores del inciso (a), encuentre $R'(20)$ e interprete su respuesta.

55. (a) Utilice la regla del producto dos veces para probar que si f, g y h son derivables, en tal caso

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

(b) Tome $f = g = h$ en el inciso (a) y demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

(c) Aplique el resultado del inciso (b) para derivar $y = e^{3x}$.

56. (a) Si $F(x) = f(x)g(x)$, donde f y g son derivables en todos los ordenes y demostrar que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.
(b) Hallar formulas similares para F'' y $F^{(4)}$.
(c) Intente una formula para $F^{(n)}$.

57. Hallar expresiones para las primeras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. ¿Observa algún patrón en estas expresiones? Intente una formula para $f^{(n)}(x)$ y compruebe aplicando inducción matemática.

58. (a) Si g es derivable la **regla del recíproco** dice que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Aplique la regla del cociente para comprobar la regla del recíproco
(b) Utilice la regla del recíproco para derivar la función del ejercicio 18.
(c) Utilice la regla del recíproco para comprobar que la regla de la potencia es válida para números enteros negativos, es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todos los números enteros positivos n.

3.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

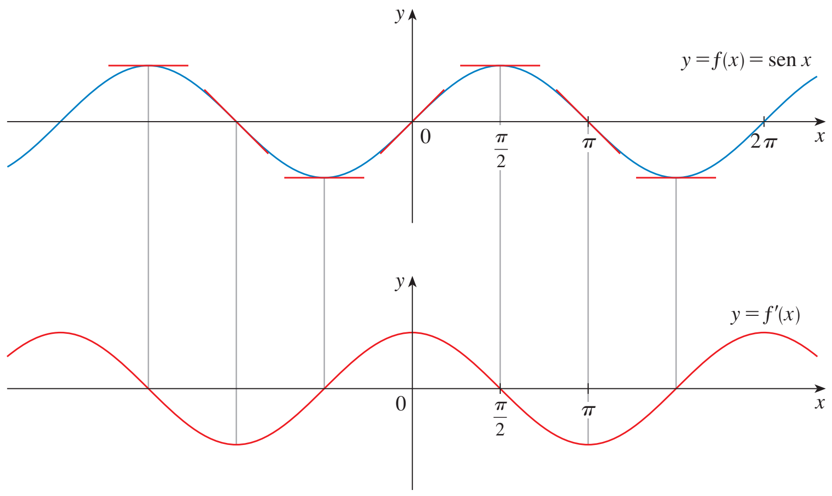
■ En el apéndice D se da un repaso de las funciones trigonométricas

Antes de iniciar esta sección, quizá podría necesitar repasar las funciones trigonométricas. En particular, es importante recordar que cuando habla de la función f definida para todos los números reales x por

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x. Se cumple una convención similar para las demás funciones trigonométricas: cos, tan, csc, sec y cot. Recuerde, por lo que se vio en la sección 2.5, que todas las funciones trigonométricas son continuas en cada número en sus dominios.

Si traza la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y utiliza la interpretación de $f'(x)$ como la pendiente de la tangente a la curva seno para trazar la gráfica de f' (véase el ejercicio 14 de la sección 2.8), parece que la gráfica de esta última es la misma que la curva coseno (véase figura 1).



TEC Visual 3.3 muestra una animación de la figura 1

FIGURA 1

Intente confirmar la conjetura de que si $f(x) = \text{sen}\, x$, por lo tanto $f'(x) = \cos x$. A partir de la definición de derivada

■ Se usa la fórmula de la adición para el seno. Véase el apéndice D.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, x \cos h + \cos x \,\text{sen}\, h - \text{sen}\, x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\text{sen}\, x \cos h - \text{sen}\, x}{h} + \frac{\cos x \,\text{sen}\, h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\text{sen}\, x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\text{sen}\, h}{h} \right) \right]$$

1 $$= \lim_{h\to 0} \text{sen}\, x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, h}{h}$$

Dos de estos cuatro límites son fáciles de evaluar. Puesto que se considera a x como constante al calcular un límite cuando $h \to 0$, tiene

$$\lim_{h\to 0} \text{sen}\, x = \text{sen}\, x \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \cos x = \cos x$$

El límite de $(\text{sen}\, h)/h$ no es tan obvio. Con base en la evidencia numérica y gráfica, en el ejemplo 3 de la sección 2.2, se infiere que

2 $$\boxed{\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\, \theta}{\theta} = 1}$$

Ahora, use un argumento geométrico para probar la ecuación 2. Suponga primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En la figura 2(a) se muestra un sector de círculo con centro en O, ángulo central θ y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de radián,

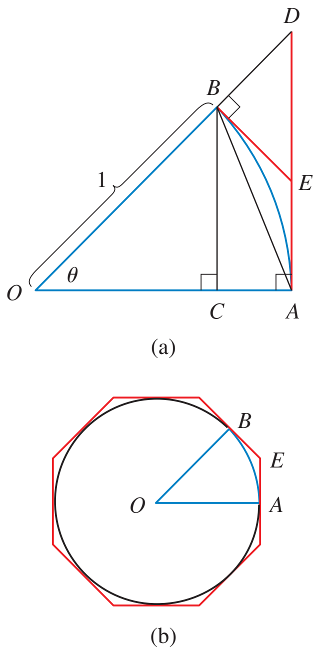


FIGURA 2

arco $AB = \theta$. Asimismo, $|BC| = |OB|$ sen $\theta =$ sen θ. Con base en el diagrama, se ve que

$$|BC| < |AB| < \text{arco } AB$$

En consecuencia $\quad \text{sen } \theta < \theta \quad$ de igual manera $\quad \dfrac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1$

Suponga que las tangentes en A y B se intersecan en E. Puede ver, con base en la figura 2(b) que la circunferencia de un círculo es menor que la longitud de un polígono circunscrito, de modo que arco $AB < |AE| + |EB|$. Así,

$$\begin{aligned} \theta = \text{arco } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan \theta \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

(En el apéndice F se demuestra directamente la desigualdad $\theta \leqslant \tan \theta$ a partir de la definición de la longitud de un arco, sin recurrir a la intuición geométrica como se hizo aquí.) Por lo tanto,

$$\theta < \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

de modo que $$\cos \theta < \frac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1$$

Sabe que $\lim_{\theta \to 0} 1 = 1$ y $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$; de este modo, por el teorema de la compresión

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

Pero la función (sen θ)/θ es una función par, de suerte que sus límites por la derecha y la izquierda deben ser iguales. De donde, tiene

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

de forma que ha probado la ecuación 2.

Puede deducir el valor del límite restante en (1), como sigue:

■ Multiplique el numerador y el denominador por $\cos \theta + 1$ para poner la función en una forma en que pueda usar los límites que conoce.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\cos \theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta + 1} \right) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta (\cos \theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\text{sen}^2 \theta}{\theta (\cos \theta + 1)} = -\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\text{sen } \theta}{\theta} \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + 1} \right) \\ &= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + 1} \\ &= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0 \qquad \text{(por la ecuación 2)} \end{aligned}$$

3 $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$$

Si ahora pone los límites (2) y (3) en (1), obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

Así ha probado la fórmula para la derivada de la función seno:

4 $$\frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x) = \cos x$$

■ La figura 3 muestra las gráficas de la función del ejemplo 1 y su derivada. Advierta que $y' = 0$ siempre que y tenga una tangente horizontal.

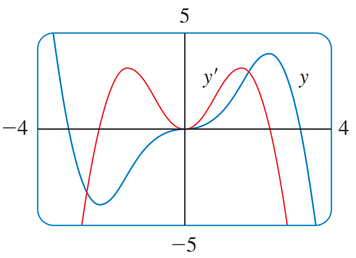


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Con la regla del producto y la fórmula 4, tiene

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx} (x^2)$$

$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$ □

Si se aplican los mismos métodos que en la demostración de la fórmula 4, se puede probar (véase el ejercicio 20) que

5 $$\frac{d}{dx} (\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

También se puede derivar la función tangente aplicando la definición de derivada, pero es más fácil usar la regla del cociente con las fórmulas 4 y 5:

$$\frac{d}{dx} (\tan x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx} (\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx} (\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

También es fácil hallar las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, aplicando la regla del cociente (véase los ejercicios 17-19). En la tabla siguiente aparecen todas las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas. Recuerde que son válidas sólo cuando x se mide en radianes.

■ Cuando memorice esta tabla, resulta útil notar que los signos menos van con las derivadas de las "cofunciones"; es decir, coseno, cosecante y cotangente.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una tangente horizontal?

SOLUCIÓN La regla del cociente da

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

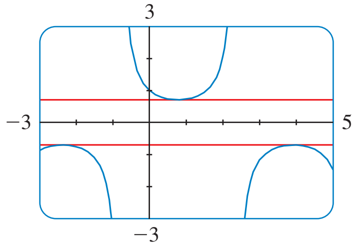


FIGURA 4
Las tangentes horizontales del ejemplo 2

Al simplificar la respuesta, se usó la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Como $\sec x$ nunca es 0, $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto sucede cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero (véase la figura 4). □

Las funciones trigonométricas se usan con frecuencia en el modelado de fenómenos del mundo real. En particular, las vibraciones, las ondas, los movimientos elásticos y otras cantidades que varían de manera periódica, se pueden describir por medio de las funciones trigonométricas. En el ejemplo siguiente, se analiza un caso de movimiento armónico simple.

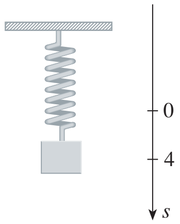


FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm más allá de su posición de reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

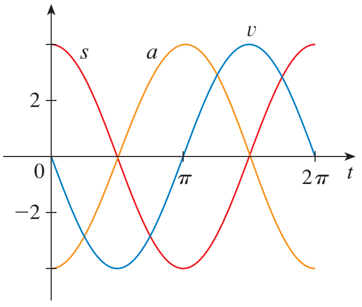


FIGURA 6

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$ cm) hasta el punto más alto ($s = -4$ cm). El periodo de la oscilación es 2π, el periodo de cos t.

La rapidez (magnitud de la velocidad) es $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, la cual es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$; es decir, cuando $\cos t = 0$. De modo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando sen $t = 0$; esto es, en los puntos alto y bajo. □

La aceleración $a = -4 \cos t = 0$ cuando $s = 0$. Alcanza la magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Observe la gráfica en la figura 6. □

■ Busque la norma

EJEMPLO 4 Hallar la vigésima séptima derivada de cos x.

SOLUCIÓN Las primeras derivadas de $f(x)$ cos x son como sigue:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen} x$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$$

Así que las derivadas sucesivas suceden en un ciclo de extención 4 y, en particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ cada vez que n es un múltiplo de 4. En consecuencia

$$f^{(24)}(x) = \cos x$$

y, derivando tres veces más, tiene

$$f^{(27)}(x) = \operatorname{sen} x$$ □

La principal aplicación del límite en la ecuación 2 ha sido comprobar la formula de derivación de la función seno. Pero este límite también se aplica en la búsqueda de otros límites trigonométricos, como en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Determine $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

SOLUCIÓN Con objeto de aplicar la ecuación 2, primero vuelva a escribir la función para multiplicar y dividir entre 7:

Observe que sen $7x \neq 7$ sen x.

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Si considera $\theta = 7x$, entonces $\theta \to 0$, cuando $x \to 0$, de este modo, mediante la ecuación 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x} \right) = \frac{7}{4} \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$ □

V EJEMPLO 6 Calcule $\lim_{x\to 0} x \cot x$.

SOLUCIÓN En este caso se divide tanto al numerador como el denominador entre x:

$$\lim_{x\to 0} x \cot x = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0} \cos x}{\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1}$$ (según la continuidad del coseno y la ecuación 2)

$$= 1$$ □

3.3 EJERCICIOS

1–16 Encuentre las derivadas de:

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$
2. $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cot x$
4. $y = 2 \csc x + 5 \cos x$
5. $g(t) = t^3 \cos t$
6. $g(t) = 4 \sec t + \tan t$
7. $h(\theta) = \csc \theta + e^{\theta} \cot \theta$
8. $y = e^{u}(\cos u + cu)$
9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$
10. $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$
11. $f(\theta) = \dfrac{\sec \theta}{1 + \sec \theta}$
12. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$
13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
14. $y = \csc \theta \, (\theta + \cot \theta)$
15. $f(x) = e x^{x} \csc x$
16. $y = x^2 \operatorname{sen} x \tan x$

17. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$.

18. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$.

19. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.

20. Aplique la definición de derivada y pruebe que si $f(x) = \cos x$, por lo tanto $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado.

21. $y = \sec x$, $(\pi/3, 2)$
22. $y = e^{x} \cos x$, $(0, 1)$
23. $y = x + \cos x$, $(0, 1)$
24. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$, $(0, 1)$

25. (a) Halle una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/2, \pi)$.
(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sec x - 2 \cos x$ en el punto $(\pi/3, 1)$.
(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

27. (a) Si $f(x) = \operatorname{sen} x - x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe para ver que su respuesta al inciso (a) es razonable trazando las gráficas de f y f' para $|x| < \pi/2$.

28. (a) Si $f(x) = e^{x} \cos x$, calcule $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Verifique que su respuesta del inciso (a) sea razonable graficando f, f' y f''.

29. Si $H(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$ hallar $H'(\theta)$ y $H''(\theta)$

30. Si $f(x) = \sec x$, hallar $f''(\pi/4)$.

31. (a) Aplique la regla del cociente para derivar la función.

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique la expresión de $f(x)$ expresándola en términos de sen x y cos x y en seguida halle $f'(x)$.
(c) Demuestre que sus respuestas a los incisos (a) y (b) son equivalentes

32. Considere $f(\pi/3) = 4$ y $f'(\pi/3) = -2$, y sea

$$g(x) = f(x) \operatorname{sen} x$$

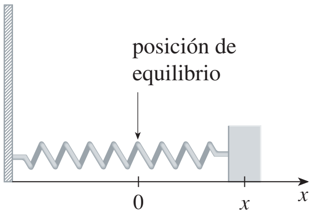
y $$h(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$$

Hallar (a) $g'(\pi/3)$ y (b) $h'(\pi/3)$.

33. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$ tiene una tangente horizontal?

34. Determine los puntos de la curva $y = (\cos x)/(2 + \operatorname{sen} x)$ en los cuales la tangente es horizontal.

35. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada, en un movimiento armónico simple. (Véase la figura.) Su ecuación del movimiento es $x(t) = 8$ sen t, donde t está en segundos y x en centímetros.
(a) Encuentre la velocidad y aclaración en el instante t.
(b) Encuentre la posición, la velocidad y la aclaración de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se desplaza en ese instante?



36. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego, se deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple. La ecuación del movimiento es $s = 2 \cos t + 3 \operatorname{sen} t$, $t \geqslant 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tome la dirección positiva correspondiente hacia abajo.)
(a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
(b) Dibuje las funciones velocidad y aceleración.
(c) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?
(d) ¿Cuán lejos de su posición de equilibrio viaja la masa?
(e) ¿Cuándo es máxima la magnitud de la velocidad?

37. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada sobre una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y x la distancia del extremo inferior de aquélla hasta la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared, ¿con qué rapidez cambia x con respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$?

38. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al propio objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, después la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción.*
(a) Encuentre la relación de cambio de F con respecto a θ.
(b) ¿Cuándo es igual a 0 esta relación de cambio?
(c) Si $W = 50$ lb y $\mu = 0.6$ dibuje la gráfica de F como función de θ y úsela para localizar el valor de esta última para el cual $dF/d\theta = 0$. ¿Resulta coherente el valor con su respuesta al inciso (b)?

39–48 Determine el límite

39. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 6x}$

41. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan 6t}{\operatorname{sen} 2t}$

42. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$

43. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\cos \theta)}{\sec \theta}$

44. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3t}{t^2}$

45. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \tan \theta}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$

47. $\lim\limits_{\pi \to \pi/4} \dfrac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

48. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

49. Derive cada identidad trigonométrica para obtener una identidad nueva (o conocida)

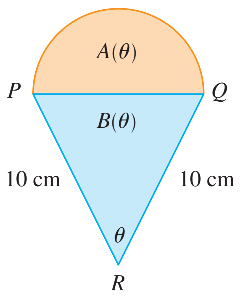
(a) $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{1 + \cot x}{\csc x}$

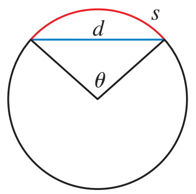
50. Un semicírculo con diámetro PQ descansa sobre un triángulo isósceles PQR para formar una región en forma de cono, como el que se ilustra en la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triángulo, halle

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



51. En la figura se muestra un arco circular de longitud s y una cuerda de longitud d, los dos subtendidos por un ángulo central θ. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$



3.4 LA REGLA DE LA CADENA

Suponga que se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación que aprendió en las secciones anteriores de este capítulo no lo capacitan para calcular $F'(x)$.

■ Vea la sección 1.3 para un repaso de funciones compuestas

Observe que F es una función compuesta. De hecho, si hace $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, en este caso puede escribir $y = F(x) = f(g(x))$, es decir, $F = f \circ g$. Sabe cómo derivar tanto f como g, de modo que sería útil contar con una regla que le diga cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Parece plausible, si interpreta las derivadas como razones de cambio. Considere du/dx como la relación de cambio de u con respecto a x, dy/du como la relación de cambio de y en relación a u y dy/du como la relación de cambio de y con respecto de x. Si u cambia al doble de rapidez de x y y cambia tres veces más rápido que u, en este caso resulta razonable que y cambie seis veces más rápido que x y por lo tanto esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

REGLA DE LA CADENA Si g es derivable en x y f en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$, en derivable x y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si tanto $y = f(u)$ como $u = g(x)$ son funciones diferenciables, por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

COMENTARIOS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x; es decir

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Por lo tanto el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Resulta tentador escribir

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
\boxed{1} \qquad &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

(Advierta que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ porque g es continua.)

El único defecto de este razonamiento es que, en (1), podría suceder que $\Delta u = 0$ (incluso cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no puede dividir entre 0. No obstante, este razonamiento por lo menos sugiere que la regla de la cadena es verdadera. Al final de esta sección se da una prueba completa de la regla de la cadena. □

La regla de la cadena se puede escribir con apóstrofos

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La ecuación 3 es fácil de recordar porque, si dy/du y du/dx fueran cocientes, después podría cancelar du. Sin embargo, recuerde que du no se ha definido y no debe concebir du/dx como un cociente real.

EJEMPLO 1 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (Con la ecuación 2): Al principio de esta sección, se expresó F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tiene

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 (con la ecuación 3): Si hace $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, después

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \square$$

Al utilizar la fórmula 3, debe tener presente que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando ésta se considera como función de x (llamada *derivada de y con respecto a x*), en tanto que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se considera como función de u (la derivada de y en función de u). Por lo tanto, en el ejemplo 1 y se puede considerar como función de x $\left(y = \sqrt{x^2 + 1}\right)$ y como función de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Advierta que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \text{en tanto que} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

NOTA En la aplicación de la regla de la cadena, trabaja del exterior hacia el interior. La fórmula 2 expresa que *deriva la función exterior f [en la función interior $g(x)$] y, a continuación, multiplica por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{interior}}}$$

V EJEMPLO 2 Derive (a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y (b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a) Si $y = \operatorname{sen}(x^2)$, por lo tanto la función exterior es la función seno y la interior es la función de elevar al cuadrado, de modo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{interior}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

(b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado y la interior es la función seno. Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\operatorname{sen} x)^2}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{interior}}}$$

La respuesta se puede dejar como $2 \operatorname{sen} x \cos x$, o bien, escribirse como $\operatorname{sen} 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como la fórmula del ángulo doble). $\square$

■ Véase la página de referencia 2 o el apéndice D.

En el ejemplo 2(a), combinó la regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \operatorname{sen} u$, donde u es una función diferenciable de x, en consecuencia, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

De esta manera, $$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De manera semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas se pueden combinar con la regla de la cadena.

Para hacer explícito el caso especial de la regla de la cadena donde la función exterior f es una función potencia. Si $y = [g(x)]^n$, entonces puede escribir $y = f(u) = u^n$, donde $u = g(x)$. Si aplica la regla de la cadena y, a continuación, la regla de la potencia, obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4 REGLA DE LA POTENCIA COMBINADA CON LA REGLA DE LA CADENA Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Advierta que la derivada del ejemplo 1 pudo calcularse al tomar $n = \frac{1}{2}$ en la regla 4.

EJEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Si, en (4), se toma $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$, tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$ □

V EJEMPLO 4 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescriba f: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$.

De este modo $$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$

$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$ □

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combina la regla de la potencia, la de la cadena y la del cociente, obtiene

$$g'(t) = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)$$

$$= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$ □

■ En la figura 1 se muestran las gráficas de las funciones y y y' del ejemplo 6. Advierta que y' es grande cuando y crece con rapidez, y $y' = 0$ cuando y tiene una tangente horizontal. De modo que la respuesta parece ser razonable.

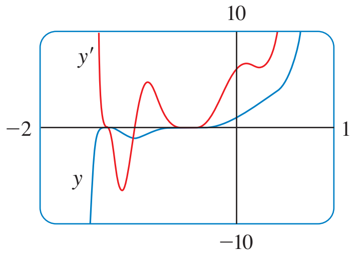


FIGURA 1

EJEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUCIÓN En este ejemplo debe aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (2x + 1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)^5 \\ &= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1) \\ &\qquad + (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1) \\ &= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2\end{aligned}$$

Al observar que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, podría factorizarlo y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$ □

EJEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN En este caso, la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$ y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por lo tanto, por la regla de la cadena,

■ La regla de la cadena en su forma más general

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x} \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$$ □

Puede aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $a > 0$. Recuerde, por lo visto en la sección 1.6, que $a = e^{\ln a}$. De este modo,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

y la regla de la cadena da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x} \frac{d}{dx}(\ln a)x \\ &= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a\end{aligned}$$

porque $\ln a$ es una constante. De este modo, tiene la fórmula

■ No confunda la fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la regla de la potencia (donde x es la base):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

En particular, si $a = 2$, obtiene

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

En la sección 3.1, se dio la estimación

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Esto resulta coherente con la fórmula exacta (6), porque $\ln 2 \approx 0.693147$.

Queda clara la razón del nombre "regla de la cadena", cuando se alarga una cadena, se agrega al otro eslabón. Suponga que $y = f(u)$, $u = g(x)$ y $x = h(t)$, donde f, g y h son funciones derivables. Entonces, para calcular la derivada de y con respecto a t, aplique dos veces la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x) \\ &= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x \end{aligned}$$

Advierta que la regla de la cadena se ha aplicado dos veces. □

EJEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función media es la función secante y la función interna es la función triplicadora. De modo que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta) \\ &= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta \tan 3\theta \frac{d}{d\theta}(3\theta) \\ &= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta \tan 3\theta \end{aligned}$$

□

CÓMO PROBAR LA REGLA DE LA CADENA

Recuerde que si $y = f(x)$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Según la definición de derivada

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Por consiguiente, si denota por medio de ε la diferencia entre el cociente de diferencia y la derivada, obtiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Si define ε como 0 cuando $\Delta x = 0$, entonces ε se convierte en función continua de Δx. De esta manera para una función f derivable, podemos escribir

7 $$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \quad \text{donde} \quad \varepsilon \to 0 \text{ a medida que } \Delta x \to 0$$

y ε es una función continua de Δx. Esta propiedad de las funciones derivables es lo que permite probar la regla de la cadena.

PRUEBA DE LA REGLA DE LA CADENA Suponga que $u = g(x)$ es derivable en a y $y = f(u)$ lo es en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento en x y Δu y Δy son los incrementos correspondientes en u y y, en seguida puede aplicar la ecuación 7 para escribir

8 $$\Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De manera análoga

9 $$\Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

donde $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. Si ahora sustituye la expresión para Δu de la ecuación 8 en la ecuación 9, obtiene

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

de modo que $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la ecuación 8 demuestra que $\Delta u \to 0$. De modo que tanto el $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ a medida que $\Delta x \to 0$. Debido a eso

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Esto prueba la regla de la cadena. □

3.4 EJERCICIOS

1–6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$]. Luego, encuentre la derivada dy/dx.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$

2. $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$

4. $y = \tan(\operatorname{sen} x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = \operatorname{sen}(e^x)$

7–46 Halle la derivada de la función.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$

10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$

12. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$

16. $y = 3\cos(n\theta)$

17. $g(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$

18. $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$

20. $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3$

22. $y = e^{-5x}\cos 3x$

23. $y = e^{x\cos x}$

24. $y = 10^{1-x^2}$

25. $F(z) = \sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$

26. $G(y) = \dfrac{(y-1)^4}{(y^2+2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+1}}$

28. $y = \dfrac{e^u - e^u}{e^u + e^{-u}}$

29. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$

30. $G(y) = \left(\dfrac{y^2}{y+1}\right)^5$

31. $y = 2^{\operatorname{sen}\pi x}$

32. $y = \tan^2(3\theta)$

33. $y = \sec^2 x + \tan^2 x$

34. $y = x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$

36. $f(t) = \sqrt{\dfrac{t}{t^2+4}}$

37. $y = \cot^2(\operatorname{sen}\theta)$

38. $y = e^{k\tan\sqrt{x}}$

39. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$

40. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

41. $f(t) = \operatorname{sen}^2(e^{\operatorname{sen}^2 t})$

42. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$

44. $y = 2^{3^{x^2}}$

45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}$

46. $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Hallar la primera y segunda derivadas de la función.

47. $h(x) = \sqrt{x^2+1}$

48. $y = xe^{cx}$

49. $y = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

50. $y = e^{e^x}$

51–54 Encuentre una ecuación de la recta tangente de la curva en un punto dado.

51. $y = (1+2x)^{10}$, $(0, 1)$

52. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, $(0, 0)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$

54. $y = x^2e^{-x}$ $(1, 1/e)$

55. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2/(1+e^{-x})$ en el punto $(0, 1)$.
(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente sobre la misma pantalla.

56. (a) La curva $y = |x|/\sqrt{2-x^2}$ se llama *curva nariz de bala*. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1)$.
(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente sobre la misma pantalla.

57. (a) Si $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

58. La función $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, surge en aplicaciones de la síntesis de modulación de frecuencia (FM).
(a) Use una gráfica de f producida por un aparato graficador para trazar un boceto aproximado de la gráfica de f'.
(b) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión, junto con un dispositivo graficador, para graficar f'. Compare con su boceto del inciso (a).

59. Encuentre todos los puntos en la gráfica de la función

$$f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$$

en los cuales la recta tangente es horizontal.

60. Determine las coordenadas x de todos los puntos de la curva $y = \operatorname{sen} 2x - 2\operatorname{sen} x$ en los cuales la tangente es horizontal.

61. Si $F(x) = f(g(x))$ donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$. $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$ Hallar $F'(5)$.

62. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, hallar $h'(1)$.

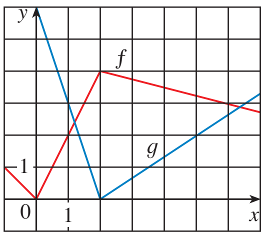
63. Se da una tabla de valores de f, g, f' y g'

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

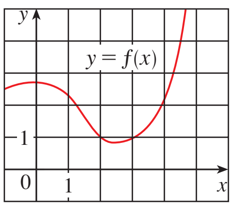
(a) Si $h(x) = f(g(x))$, encuentre $h'(1)$.
(b) Si $H(x) = g(f(x))$, halle $H'(1)$.

64. Sean f y g las funciones del ejercicio 63.
(a) Si $F(x) = f(f(x))$, encuentre $F'(2)$.
(b) Si $G(x) = g(g(x))$, encuentre $G'(3)$.

65. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sea $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre, si existe, cada derivada. En caso contrario, explique por qué.
(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



66. Si f es la derivada cuya gráfica se muestra, sea $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Utilice la gráfica de f para estimar el valor de cada derivada.
(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



67. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

68. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sea $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

69. Sea $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$. Encuentre $r'(1)$.

70. Si g es una función derivable dos veces y $f(x) = xg(x^2)$, hallar f'' en términos de g, g', y g''.

71. Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, hallar $F'(0)$.

72. Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$, y $f'(3) = 6$, hallar $F'(1)$.

73. Demuestre que la función $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$.

74. ¿Para que valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?

75. Hallar la quincuagésima derivada de $y = \cos 2x$.

76. Encuentre la derivada 1000 de $f(x) = xe^{-x}$.

77. La ecuación expresa el desplazamiento de una partícula de una cuerda vibrante.

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}(10\pi t)$$

En ella s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad y la aceleración de la partícula después de t segundos.

78. Si la ecuación del movimiento de una partícula está dada por $s = A\cos(\omega t + \delta)$, se dice que la partícula describe un *movimiento armónico simple*.

(a) Encuentre la velocidad de la partícula en el instante t.
(b) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

79. Una estrella variable Cefeida tiene brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es la Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0 y su brillantez cambia en ± 0.35. En vista de estos datos, la brillantez de la Delta Cefeida en el tiempo t, donde éste se mide en días, se ha modelado mediante la función

$$B(t) = 4.0 + 0.35\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

(a) Halle la relación de cambio de la brillantez después de t días.
(b) Encuentre, correcta hasta dos cifras decimales, la relación de aumento después de un día.

80. En el ejemplo 4 de la sección 1.3, obtuvo un modelo para la duración de la luz diurna (en horas) en Filadelfia en el t-ésimo día del año

$$L(t) = 12 + 2.8\,\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Aplique este modelo para comparar cómo aumentan las horas de luz diurna en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

81. El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2e^{-1.5t}\,\mathrm{sen}\, 2\pi t$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos. Halle la velocidad después que transcurren t segundos y dibuje las funciones de posición y de velocidad para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

82. En ciertas circunstancias, un rumor se esparce según la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que lo conoce en el tiempo t, y a y k son constantes positivas. [En la sección 9.4 verá que ésta es una ecuación razonable para $p(t)$.]

(a) Encuentre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.
(b) Halle la rapidez de esparcimiento del rumor.
(c) Dibuje p para el caso en que $a = 10$, $k = 0.5$, con t medido en horas. Use la gráfica para estimar cuánto tiempo transcurrirá para que el 80% de la población escuche el rumor.

83. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con desplazamiento $s(t)$, velocidad $v(t)$, y aceleración $a(t)$. Demuestre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique la diferencia entre los significados de los derivados dv/dt y dv/ds.

84. Se bombea aire dentro de un globo esférico para el clima. En cualquier tiempo t, el volumen del globos es $V(t)$ y su radio es $r(t)$.

(a) ¿qué representa las derivadas dV/dr y dV/dt.
(b) Expres dV/dt en terminos de dr/dt.

85. El *flash* (unidad de destello) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina cuando se lanza el destello. Los datos siguientes describen la carga que queda en el capacitor (en microcoulombs, μC) en el instante t (en segundos)

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

(a) Halle, usando una calculadora graficadora o una computadora, un modelo exponencial para la carga.
(b) La derivada $Q'(t)$ representa la corriente eléctrica (en microamperes, μA) que fluye del capacitor hacia el bulbo de la lámpara de destello. Con el resultado del inciso (a), estime la corriente cuando $t = 0.04$ s. Compare la respuesta con el resultado del ejemplo 2 de la sección 2.1.

86. En la tabla se da la población de estadounidenses, desde 1790 hasta 1860.

Año	Población	Año	Población
1790	3 929 000	1830	12 861 000
1800	5 308 000	1840	17 063 000
1810	7 240 000	1850	23 192 000
1820	9 639 000	1860	31 443 000

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para hacer coincidir una función exponencial con los datos. Dibuje los puntos correspondientes a los datos y el modelo exponencial. ¿Qué tan bien coinciden?

(b) Estime las proporción de incremento de la población en 1800 y 1850 promediando las pendientes de las rectas secantes.

(c) Use el modelo exponencial del inciso (a) para estimar las proporciones de crecimiento en 1800 y 1850. Compare estas estimaciones con las del inciso (b).

(d) Utilice el modelo exponencial para predecir la población en 1870. Compare con la población real de 38 558 000. ¿Puede explicar la discrepancia?

CAS **87.** Los sistemas algebraicos para computadora (CAS) tienen comandos que derivan funciones, pero la forma de la respuesta quizá no convenga, como consecuencia, pueden ser necesarios otros comandos para simplificarla.

(a) Use un CAS para hallar la derivada del ejemplo 5 y compárela con la respuesta en ese ejemplo. Enseguida, use el comando de simplificación y vuelva a comparar.

(b) Utilice un CAS para derivar la función del ejemplo 6. ¿Qué sucede si usa el comando de simplificación? ¿Qué ocurre si emplea el comando de factorización? ¿Cuál forma de la respuesta sería la mejor para localizar las tangentes horizontales?

CAS **88.** (a) Use un CAS para derivar la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

y simplificar el resultado.

(b) ¿En dónde tiene la gráfica de f tangentes horizontales?

(c) Trace las gráficas de f y f' en la misma pantalla. ¿Son coherentes las gráficas con su respuesta al inciso (b)?

89. Mediante la regla de la cadena demuestre lo siguiente.

(a) La derivada de una función par es una función impar.

(b) La derivada de una función impar es una función par.

90. Aplique la regla de la cadena y la regla del producto para obtener otra demostración de la regla del cociente. [*Sugerencia:* escriba $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

91. (a) Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n x \cos nx) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

(b) Plantee una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que es similar a la del inciso (a).

92. Suponga que $y = f(x)$ es una curva que siempre queda arriba del eje x y nunca tiene una tangente horizontal, donde f es derivable en todos los puntos. ¿Para qué valor de y la relación de cambio de y^5 con respecto a x es 80 veces la tasa de cambio de y con respecto a x?

93. Use la regla de la cadena para demostrar que si θ se mide en grados, después

$$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Esto da una razón para la convención de que siempre se use el radián cuando se manejen funciones trigonométricas en el cálculo: las fórmulas de derivación no serían tan sencillas si usara el grado.)

94. (a) Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y aplique la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, encuentre $f'(x)$ y trace las gráficas de f y f'. ¿En dónde f no es derivable?

(c) Si $g(x) = \operatorname{sen}|x|$, halle $g'(x)$ y dibuje g y g'. ¿En dónde g no es derivable?

95. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, f y g son funciones derivables dos veces, demuestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

96. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g tienen tercera derivada, hallar una formula por d^3y/dx^3 parecida a la que se proporciona en el ejercicio 95

PROYECTO DE APLICACIÓN

¿DÓNDE DEBE UN PILOTO INICIAR UN DESCENSO?

En la figura se muestra una trayectoria de aproximación para el aterrizaje de un avión que satisface las condiciones siguientes:

(i) La altura de crucero es h, cuando se inicia el descenso a una distancia ℓ del punto de contacto con la pista en el origen.

(ii) El piloto debe mantener una rapidez horizontal constante v a todo lo largo del descenso.

3.7 RAZONES DE CAMBIO EN LAS CIENCIAS NATURALES Y SOCIALES

Sabemos que si $y = f(x)$ la derivada dy/dx se puede interpretar como la razón de cambio de y con respecto a x. En esta sección se analizan algunas de las aplicaciones de esta idea a la física, la química, la biología, la economía y otras ciencias.

Con base en la sección 2.7, recuerde la idea básica que se encuentra detrás de las razones de cambio. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x es

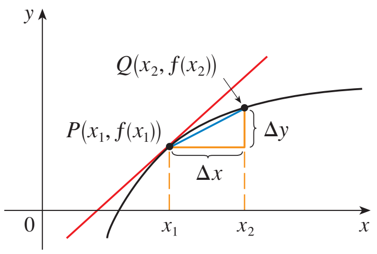
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



m_{PQ} = relación promedio de cambio
$m = f'(x_1)$ = relación de cambio instantánea

FIGURA 1

es la **razón promedio de cambio de *y* con respecto a *x*** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ de la figura 1. Su límite, cuando $\Delta x \to 0$ es la derivada $f'(x_1)$, la cual, puede interpretarse como la **razón de cambio instantánea de *y* con respecto a *x***, o sea, la pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$. Si se usa la notación de Leibniz, escriba el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio. (Como se analizó en la sección 2.7, las unidades de dy/dx son las unidades correspondientes a y divididas entre las de x.) Vea ahora algunas de estas interpretaciones en las ciencias naturales y sociales.

FÍSICA

Si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve en una línea recta, entonces $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ representa el promedio de la velocidad en un periodo Δt, y $v = \frac{ds}{dt}$ representa la **velocidad** instantánea (la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo). La razón de cambio instantáneo de la velocidad con respecto al tiempo es la **aceleración**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Esto se discutió en las secciones 2.7 y 2.8, pero ahora que conoce las fórmulas de derivación puede resolver con más facilidad, problemas que involucran el movimiento de objetos.

V EJEMPLO 1 La ecuación siguiente da la posición de una partícula

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?
(c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
(d) ¿Cuándo se mueve hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?
(e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
(f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.

(g) Hallar la aceleración en el tiempo t y después de 4 s.
(h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
(i) ¿Cuándo incrementa se rapidez la partícula? ¿cuándo la disminuye.

SOLUCIÓN

(a) La función velocidad es la derivada de la función de posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$; es decir,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad después de 4 s es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

(c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$. Por lo tanto, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.

(d) La partícula se mueve en dirección positiva cuando $v(t) > 0$, es decir,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando ambos factores son positivos $(t > 3)$ o cuando los dos son negativos $(t < 1)$. Así, la partícula se mueve en dirección positiva en los periodos $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás (en la dirección negativa) cuando $1 < t < 3$.

(e) En la figura 2, se esquematiza el movimiento de la partícula hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta (el eje s), aplicando la información del inciso (d).

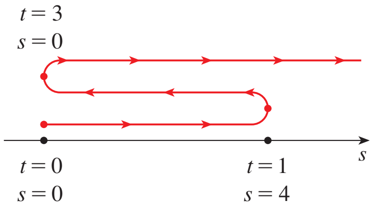


FIGURA 2

(f) En virtud de los incisos (d) y (e), necesita calcular las distancias recorridas durante los periodos [0, 1], [1, 3] y [3, 5], por separado.

La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$, la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$, la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28$ m. □

(g) La aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$
$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

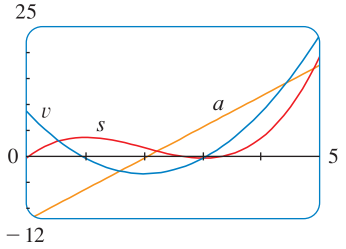


FIGURA 3

(h) La figura 3 escribe las gráficas de s, v y a.
(i) El incremento de la rapidez de la partícula cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son negativas). En otras palabras, el aumento en la rapidez cuando la velocidad y la aceleración tiene el mismo signo. (La partícula es empujada en la misma dirección en que se está moviendo.) De la figura 3 se ve que ésta sucede cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$. La partícula disminuye su rapidez cuando v y a tienen signos opuestos, es decir, cuando $0 \leqslant t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La figura 4 resume el movimiento de la partícula

TEC En Module 3.7 puede ver una animación de la figura 4 con una expresión para s que selecione.

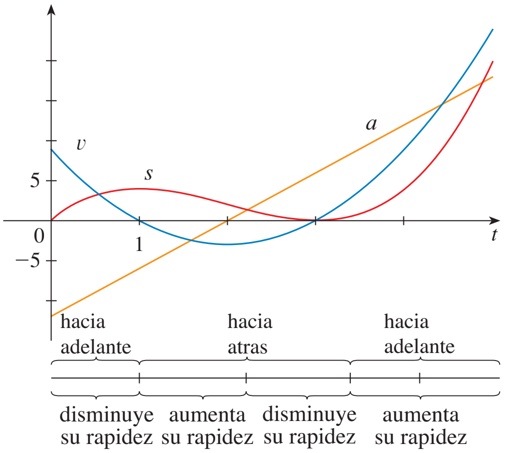


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Si una varilla o un trozo de alambre son homogéneos, entonces su densidad lineal es uniforme y se define como la masa por unidad de longitud ($\rho = m/l$) y se mide en kilogramos por cada metro. Pero suponga que la varilla no es homogénea sino que su masa medida desde su extremo izquierdo hasta un punto x es $m = f(x)$, como se muestra en la figura 5.

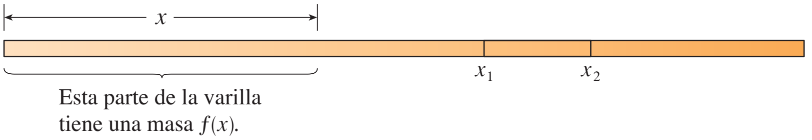


FIGURA 5

La masa de la parte de la varilla que se encuentra entre $x = x_1$ y $x = x_2$ se expresa con $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, de modo que la densidad promedio de esa sección es

$$\text{densidad promedio} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si ahora hace que $\Delta x \to 0$ (es decir $x_2 \to x_1$), calcule la densidad promedio sobre un intervalo cada vez más pequeño. La **densidad lineal** ρ en x_1 es el límite de estas densidades promedio cuando $\Delta x \to 0$; es decir, la densidad lineal es la razón de cambio de la masa con respecto a la longitud. En forma simbólica,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

De este modo, la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa con respecto a la longitud.

Por ejemplo, si $m = f(x) = \sqrt{x}$, en donde x se mide en metros y m en kilogramos, entonces la densidad promedio de la parte de la varilla dada por $1 \leqslant x \leqslant 1.2$ es

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \approx 0.48 \text{ kg/m}$$

en tanto que la densidad en $x = 1$ es

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.50 \text{ kg/m}$$ □

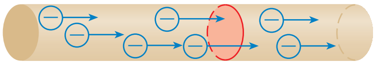


FIGURA 6

V EJEMPLO 3 Hay corriente siempre que las cargas eléctricas se mueven. En la figura 6 se muestra parte de un alambre con electrones que cruzan una superficie plana sombreada. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un periodo Δt, entonces la corriente promedio durante este intervalo se define como

$$\text{corriente promedio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Si toma el límite de esta corriente promedio sobre lapsos más y más pequeños, obtiene lo que se llama **corriente** I en un instante dado t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Por esto, la corriente es la rapidez con que la carga fluye por una superficie. Se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (a menudo coulombs por segundo, llamados amperes). □

La velocidad, la densidad y la corriente no son las únicas razones de cambio de importancia para la física. Otras incluyen la potencia (la rapidez a la cual se consume trabajo), la relación de flujo de calor, el gradiente de temperatura (la razón de cambio de la temperatura con respecto a la posición) y la razón de decaimiento de una sustancia radiactiva en la física nuclear.

QUÍMICA

EJEMPLO 4 El resultado de una reacción química en la formación de una o más sustancias (llamadas *productos*) a partir de uno o más materiales (*reactivos*). Por ejemplo, la "ecuación"

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno forman dos moléculas de agua. Considere la reacción

$$A + B \rightarrow C$$

donde A y B son los reactivos y C es el producto. La **concentración** de un reactivo A es el número de moles ($1 \text{ mol} = 6.022 \times 10^{23}$ moléculas) por litro y se denota con [A]. La concentración varía durante una reacción, de modo que [A], [B] y [C] son funciones del tiempo (t). La velocidad de reacción promedio del producto C en un intervalo de tiempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{[\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Pero los químicos tienen más interés en la **velocidad instantánea de reacción**, la cual se obtiene tomando el límite de la velocidad promedio de reacción conforme el intervalo Δt tiende a 0:

$$\text{velocidad de reacción} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}$$

Como la concentración del producto aumenta a medida que la reacción avanza, la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$ será positiva, y así la velocidad de reacción de C es positiva. Sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción; por eso, para que las velocidades de reacción de A y B sean números positivos, ponga signos negativos delante de las derivadas $d[\mathrm{A}]/dt$ y $d[\mathrm{B}]/dt$. Dado que $[\mathrm{A}]$ y $[\mathrm{B}]$ disminuyen con la misma rapidez que $[\mathrm{C}]$ crece, tiene

$$\text{velocidad de reacción} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

De modo más general, resulta que para una reacción de la forma

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \to c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$$

tiene

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}$$

La velocidad de reacción se puede determinar a partir de datos y con métodos gráficos. En algunos casos existen fórmulas explícitas para las concentraciones como funciones del tiempo, que permiten calcular la velocidad de reacción (véase el ejercicio 22). □

EJEMPLO 5 Una de las cantidades de interés en termodinámica es la compresibilidad. Si una sustancia dada se mantiene a una temperatura constante, en tal caso su volumen V depende de su presión P. Puede considerar la razón de cambio del volumen con respecto a la presión: a saber, la derivada dV/dP. Cuando P crece, V decrece, de modo que $dV/dP < 0$. La **compresibilidad** se define al introducir un signo menos y dividir esta derivada entre el volumen V:

$$\text{compresibilidad isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

En estos términos, β mide cuán rápido, por unidad de volumen, decrece el volumen de una sustancia a medida que la presión aumenta, a temperatura constante.

Por ejemplo, se encontró que la siguiente ecuación relaciona el volumen V (en metros cúbicos) de una muestra de aire a 25°C se encontró que está relacionada con la presión P (en kilopascales) mediante la ecuación.

$$V = \frac{5.3}{P}$$

La razón de cambio de V con respecto a P, cuando $P = 50$ kPa, es

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} &= -\left.\frac{5.3}{P^2}\right|_{P=50} \\ &= -\frac{5.3}{2500} = -0.00212 \text{ m}^3/\text{kPa}\end{aligned}$$

La compresibilidad a esa presión es

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0.00212}{\frac{5.3}{50}} = 0.02 \text{ (m}^3/\text{kPa)/m}^3 \qquad \square$$

BIOLOGÍA

EJEMPLO 6 Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población de animales o plantas en el tiempo t. El cambio del tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, de modo que la rapidez de crecimiento promedio durante el periodo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\text{rapidez de crecimiento promedio} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **rapidez instantánea de crecimiento** se obtiene a partir de esta rapidez promedio al hacer que el periodo Δt tienda a 0:

$$\text{razón de crecimiento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

En términos estrictos, esto no es muy exacto porque la gráfica real de una función de población $n = f(t)$ sería una función escalón que es discontinua siempre que ocurre un nacimiento o una muerte y, por lo tanto, no es derivable. Sin embargo, para una población grande de animales o plantas, es posible reemplazar la gráfica con una curva de aproximación uniforme como en la figura 7.

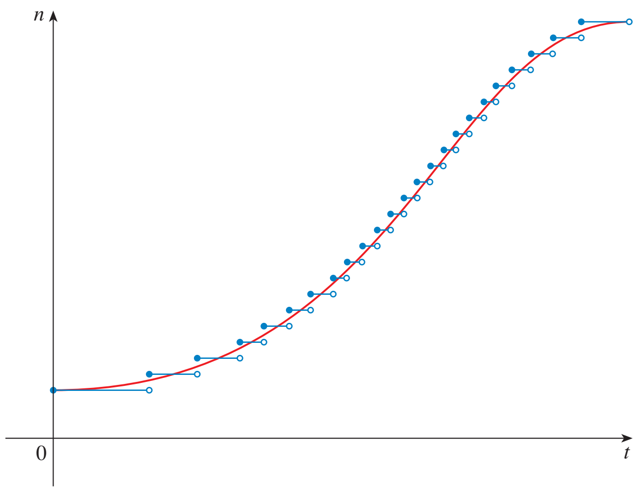


FIGURA 7
Una curva uniforme que se hace con una aproximación a una función de crecimiento

Para ser más específicos, considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, por medio de la toma de muestras de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas, entonces

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

y, en general,

$$f(t) = 2^t n_0$$

La función de población es $n = n_0 2^t$.

En la sección 3.4 se demostró que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Por eso, la rapidez de crecimiento de la población de bacterias, en el tiempo t, es

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por ejemplo, suponga que inicia con una población inicial de $n_0 = 100$ bacterias. En consecuencia, la rapidez de crecimiento después de 4 horas es

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1600 \ln 2 \approx 1109$$

Esto significa que, después de 4 horas, la población de bacterias crece en una cantidad de casi 1 109 bacterias por hora. □

EJEMPLO 7 Cuando considera el flujo de la sangre por un vaso sanguíneo, como una vena o una arteria, puede tomar la forma de este vaso como el de un tubo cilíndrico con radio R y longitud l, como se ilustra en la figura 6.

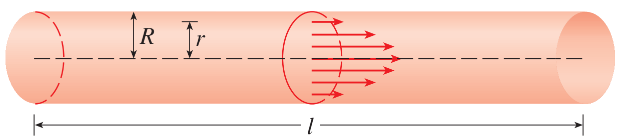


FIGURA 8
Flujo de sangre dentro de una arteria

Debido a la fricción en las paredes del tubo, la velocidad v de la sangre es máxima a lo largo del eje central del propio tubo y decrece conforme aumenta la distancia r al eje, hasta que v se vuelve 0 en la pared. La relación entre v y r está dada por la **ley del flujo laminar** descubierta por el físico francés Jean-Louis-Marie Poiseuille en 1840. En ésta se afirma que

■ Para información más detalladas, véase W. Nichols y M. O'Rourke (eds.), *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles*, 4th ed. (Nueva York: Oxford University Press, 1998).

$$\boxed{1} \qquad v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde η es la viscosidad de la sangre y P es la diferencia en la presión entre los extremos del tubo. Si P y l son constantes, entonces v es función de r, con dominio $[0, R]$.

La razón promedio de la velocidad, al moverse de $r = r_1$ hacia afuera, hasta $r = r_2$ es

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

y si hace que $\Delta r \to 0$, obtiene el **gradiente de velocidad**, es decir, la razón de cambio instantánea de la velocidad con respecto a r:

$$\text{gradiente de velocidad} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Al aplicar la ecuación (1) obtiene

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para una de las arterias humanas más pequeñas, puede tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm y $P = 4000$ dinas/cm^2, lo cual da

$$\begin{aligned} v &= \frac{4000}{4(0.027)2}(0.000064 - r^2) \\ &\approx 1.85 \times 10^4(6.4 \times 10^{-5} - r^2) \end{aligned}$$

En $r = 0.002$ cm la sangre fluye a una rapidez de

$$\begin{aligned} v(0.002) &\approx 1.85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}) \\ &= 1.11 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

y el gradiente de velocidad en ese punto es

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4000(0.002)}{2(0.027)2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}$$

Para tener una idea de lo que esto significa, cambie las unidades de centímetros a micrómetros (1 cm = 10 000 μm). Por lo tanto el radio de la arteria es de 80 μm. La velocidad en el eje central es de 11 850 μm/s, la cual disminuye hasta 11 110 μm/s a una distancia de $r = 20$ μm. El hecho de que $dv/dr = -74$ (μm/s)/μm significa que cuando $r = 20$ μm, la velocidad disminuye en una cantidad de casi 74 μm/s por cada micrómetro que se aleja del centro. □

ECONOMÍA

V EJEMPLO 8 Suponga que $C(x)$ es el costo total en que una compañía incurre al producir x unidades de cierto artículo. La función C se llama **función de costo**. Si el número de artículos producidos se incrementa de x_1 hasta x_2, el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ y la razón promedio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Los economistas llaman **costo marginal** al límite de esta cantidad, cuando $\Delta x \to 0$ es decir, la razón instantánea del cambio del costo con respecto al número de artículos producidos:

$$\text{costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Como x suele tomar sólo valores enteros, quizá no tenga sentido hacer que Δx tienda a 0, pero siempre podrá reemplazar $C(x)$ con una función suave de aproximación uniforme, como en el ejemplo 6.]

Si se toma $\Delta x = 1$ y n grande (de modo que Δx sea pequeño en comparación con n), tiene

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Así entonces, el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de elaborar una unidad más [la $(n + 1)$-ésima unidad].

A menudo, resulta apropiado representar una función de costo total con un polinomio

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa el costo de los gastos generales (renta, calefacción, mantenimiento) y los demás términos representan el costo de las materias primas, la mano de obra y demás. (El costo de las materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de la mano de obra podrían depender en parte de potencias mayores de x, debido a los costos del tiempo extra y de las faltas de eficiencia relacionadas con las operaciones a gran escala.)

Por ejemplo, suponga que una compañía ha estimado que el costo (en dólares) de producir x artículos es

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0.01x^2$$

Entonces la función de costo marginal es

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

El costo marginal en el nivel de producción de 500 artículos es

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = \$15/\text{artículo}$$

Esto da la cantidad a la cual se incrementan los costos con respecto al nivel de producción, cuando $x = 500$, y predice el costo del artículo 501.

El costo real de producir el artículo 501 es

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10\,000 + 5(501) + 0.01(501)^2] \\ &\qquad - [10\,000 + 5(500) + 0.01(500)^2] \\ &= \$15.01 \end{aligned}$$

Advierta que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$. □

Los economistas también estudian la demanda, el ingreso y la utilidad marginales, que son las derivadas de las funciones de demanda, ingreso y utilidad. Éstas se consideran en el capítulo 4, después de desarrollar las técnicas para hallar los valores máximos y mínimos de funciones.

OTRAS CIENCIAS

Las razones de cambio se presentan en todas las ciencias. Un geólogo se interesa en conocer la rapidez a la cual una masa incrustada de roca fundida se enfría por conducción del calor hacia las rocas que la rodean. Un ingeniero desea conocer la proporción a la cual el agua fluye hacia adentro o hacia afuera de un depósito. Un geógrafo urbano se interesa en la razón de cambio de la densidad de población en una ciudad, al aumentar la distancia al centro de la propia ciudad. Un meteorólogo siente interés por la razón de cambio de la presión atmosférica con respecto a la altura. (Véase el ejercicio 17, de la sección 3.8.)

En psicología, quienes se interesan en la teoría del aprendizaje estudian la curva del aprendizaje, la cual presenta en forma de gráfica el rendimiento $P(t)$ de alguien que aprende una habilidad, como función del tiempo de capacitación t. Tiene un interés particular la rapidez a la cual mejora el rendimiento a medida que pasa el tiempo; es decir, dP/dt.

En sociología, el cálculo diferencial se aplica al análisis del esparcimiento de rumores (o de innovaciones, novedades o modas). Si $p(t)$ denota la proporción de una población que conoce un rumor en el momento t, por lo tanto la derivada dp/dt denota la rapidez de esparcimiento de ese rumor. (Véase el ejercicio 82 de la sección 3.4.)

UNA SOLA IDEA, VARIAS INTERPRETACIONES

La velocidad, la densidad, la corriente, la potencia y el gradiente de temperatura, en física; la velocidad de reacción y la compresibilidad, en química; la rapidez de crecimiento y el gradiente de velocidad de la sangre, en biología; el costo marginal y la utilidad marginal, en economía; la rapidez de flujo del calor, en geología; la rapidez de mejora del rendimiento, en psicología, y la rapidez de esparcimiento de un rumor, en sociología, son casos especiales de un concepto matemático: la derivada.

Ésta es una ilustración del hecho de que parte del poder de las matemáticas descansa en su abstracción. Un solo concepto matemático abstracto (como la derivada) puede tener interpretaciones diferentes en cada ciencia. Cuando desarrolle las propiedades del concepto matemático, de una vez y por todas, podrá dar la vuelta y aplicar estos resultados a todas las ciencias. Esto es mucho más eficiente que desarrollar propiedades de conceptos especiales en cada una por separado. El matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) lo expresó de manera sucinta: "Las matemáticas comparan los fenómenos más diversos y descubren las analogías secretas que los unen."

3.7 EJERCICIOS

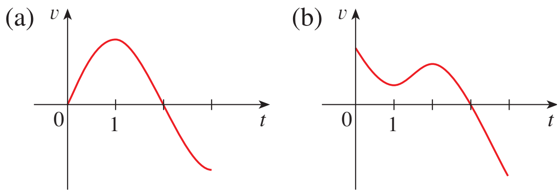
1–4 Una partícula se mueve según una ley del movimiento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, donde t se mide en segundos y s en pies.

(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 s?
(c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?
(d) ¿Cuándo se mueve hacia la dirección positiva?
(e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
(f) Dibuje un diagrama, como el de la figura 2, con el fin de ilustrar el movimiento de la partícula.
(g) Hallar la aclaración en el tiempo t y después de 3 s.
(h) Grafique las funciones de posición, velocidad, yaceleración para $0 \leqslant t \leqslant 8$.
(i) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿cuándo disminuye.

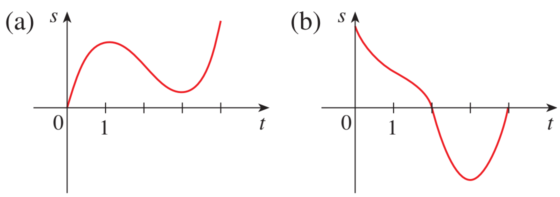
1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ **2.** $f(t) = 0.01t^4 - 0.04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4),\ t \leqslant 10$ **4.** $f(t) = te^{-t/2}$

5. Se exhiben las gráficas de los funciones *velocidad* de dos partículas, donde t se mide en segundos ¿Cuándo incrementa su rapidez cada partícula? Cuándo disminuyen su rapidez? Explique



6. Se exhiben las funciones de *posición* de dos partículas, donde t se mide en segundos ¿Cuándo incrementa su rapidez cada una de las partícula? ¿cuándo la disminuyen? Explique.



7. La función de posición de una partícula está dada por

$s = t^3 - 4.5t^2 - 7t,\ t \geqslant 0$

(a) ¿Cuándo alcanza la partícula una velocidad de 5 m/s?
(b) ¿Cuándo la aceleración es 0? ¿Cuál es el significado de este valor de t?

8. Si se empuja una pelota de modo que alcance una velocidad inicial de 5 m/s hacia abajo a lo largo de cierto plano inclinado, en tal caso la distancia que ha rodado después de t segundos es $s = 5t + 3t^2$.
(a) Encuentre la velocidad una vez que transcurren 2 s.
(b) ¿Cuánto tiempo tarda para que la velocidad alcance 35 m/s?

9. Si se lanza una piedra hacia arriba verticalmente desde la superficie de la Luna, con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos es $h = 10t - 0.83t^2$.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la piedra después que transcurren 3 s?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la piedra una vez que se ha elevado 25 m?

10. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 ft/s, en seguida su altura después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$.
(a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está 96 pies arriba de la superficie de la tierra en su trayectoria hacia arriba y luego hacia abajo?

11. (a) Una compañía fabrica *chips* para computadora a partir de placas cuadradas de silicio. Se desea conservar la longitud del lado de esas placas muy próxima a 15 mm y, asimismo, saber cómo cambia el área $A(x)$ de ellas cuando cambia la longitud x del lado. Encuentre $A'(15)$ y explique su significado en esta situación.
(b) Demuestre que la rapidez de cambio del área de uno de los cuadrados con respecto a la longitud de su lado es la mitad de su perímetro. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto, dibujando un cuadrado cuya longitud x del lado se incremente en una cantidad Δx. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA, si Δx es pequeño?

12. (a) Es fácil hacer crecer cristales de clorato de sodio en forma de cubos dejando que una solución de esta sal en agua se evapore con lentitud. Si V es el volumen de uno de esos cubos, con longitud x del lado, calcule dV/dx cuando $x = 3$ mm y explique su significado.
(b) Demuestre que la razón de cambio del volumen de un cubo con respecto a la longitud de su arista es igual a la mitad del área superficial de ese cubo. Explique geométricamente por qué este resultado es cierto; básese en el ejercicio 11 (b) para establecer una analogía.

13. (a) Encuentre la razón promedio del cambio del área de un círculo con respecto a su radio r, cuando éste cambia de
(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2.5 (iii) 2 a 2.1
(b) Encuentre la razón de cambio instantánea cuando $r = 2$.
(c) Demuestre que la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio (a cualquier r) es igual a la circunferencia del círculo. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto dibujando un círculo cuyo radio se incrementa en una cantidad Δr. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA, si Δr es pequeño?

14. Se deja caer una piedra en un lago que crea una onda circular que viaja hacia afuera con una rapidez de 60 cm/s. Encuentre la proporción a la cual aumenta el área dentro del círculo después de (a) 1 s, (b) 3 s y (c) 5 s. ¿Qué puede concluir?

15. Se está inflando un globo esférico. Encuentre la proporción de aumento del área superficial ($S = 4\pi r^2$) con respecto al radio r, cuando éste es de (a) 1 pie, (b) 2 pies y (c) 3 pies. ¿A qué conclusiones llega?

16. (a) El volumen de una célula esférica en crecimiento es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros ($1\ \mu\text{m} = 10^{-6}$ m). Encuentre la razón de cambio promedio de V con respecto a r, cuando éste cambia de
(i) 5 a 8 μm (ii) 5 a 6 μm (iii) 5 a 5.1 μm
(b) Halle la razón de cambio instantánea de V con respecto a r, cuando $r = 5$ μm.
(c) Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio es igual a su área superficial. Explique geométricamente por qué esto es cierto. Argumente por analogía con el ejercicio 13(c).

17. La masa de parte de una varilla metálica que se encuentra entre su extremo izquierdo y un punto x metros a la derecha es $3x^2$ kg. Encuentre la densidad lineal (véase el ejemplo 2) cuando x es (a) 1 m, (b) 2 m y (c) 3 m. ¿En dónde es más alta la densidad y dónde es más baja?

18. Si un tanque contiene 5 000 galones de agua, la cual se drena desde el fondo del tanque en 40 min, en tal caso la ley de Torricelli da el volumen V de agua que queda en el tanque después de t minutos como

$$V = 5\,000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encuentre la cantidad de drenado después de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min y (d) 40 min. ¿En qué momento fluye el agua más rápido hacia afuera? ¿Con mayor lentitud? Resuma sus hallazgos.

19. La cantidad de carga, Q, en coulombs (C) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando (a) $t = 0.5$ s y (b) $t = 1$ s. [Véase el ejemplo 3. La unidad de corriente es el ampere (1 A = 1 C/s).] ¿En qué momento la corriente es la más baja?

20. La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.
(a) Encuentre dF/dr y explique su significado. ¿Qué indica el signo menos?
(b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye en proporción de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esta fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

21. La ley de Boyle expresa que cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante: $PV = C$.
(a) Encuentre la razón de cambio del volumen en relación con la presión.

(b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.
(c) Pruebe que la compresibilidad isotérmica (véase el ejemplo 5) se expresa mediante $\beta = 1/P$.

22. Si en el ejemplo 4 se forma una molécula del producto C a partir de una molécula del reactivo A y una molécula del reactivo B y las concentraciones iniciales de A y B tienen un valor común $[A] = [B] = a$ moles/L, después

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

donde k es una constante.
(a) Halle la velocidad de reacción en el instante t.
(b) Demuestre que si $x = [C]$, en seguida

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) ¿Qué sucede con la concentración cuando $t \to \infty$?
(d) ¿Qué ocurre con la velocidad de reacción cuando $t \to \infty$?
(e) ¿Qué significan en términos prácticos los resultados de los incisos (c) y (d)?

23. En el ejemplo 6 consideró una población de bacterias que se duplican cada hora. Considere que otra población de bacterias se triplica cada hora y se inicia con 400 bacterias. Hallar una expresión para el número n de bacterias después de t horas y aplique para estimar la rapidez de crecimiento de la población después de 2.5 horas

24. El número de células de levadura en un cultivo de laboratorio se incrementa rapidamente al principio pero los niveles con el tiempo terminan. La población se modela por la función

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.7t}}$$

donde t se mide en horas. En el tiempo $t = 0$ la población es de 20 células y se incrementa en una proporción de 12 células/hora. Hallar los valores de a y b. De acuerdo a este modelo, ¿finalmente que sucede a la población de levadura?

25. La tabla proporciona la población del mundo en el siglo XX.

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

(a) Estime la rapidez de crecimiento de la población en 1920 y 1980 promediando las pendientes de dos rectas secantes.
(b) Use un dispositivo graficador o una computadora para encontrar una función cúbica (un polinomio de tercer grado) que modele los datos.
(c) Aplique su modelo del inciso (b) para encontrar un modelo para la rapidez de crecimiento de la población en el siglo XX.
(d) Use el inciso (c) para estimar las rapidez de crecimiento en 1920 y 1980. Compare sus estimados con los del inciso (a).
(e) Estime la rapidez de crecimiento en 1985.

26. La tabla muestra cómo varió la edad promedio en que las mujeres japonesas contraen matrimonio por primera vez a lo largo de la segunda mitad del siglo XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23.0	1980	25.2
1955	23.8	1985	25.5
1960	24.4	1990	25.9
1965	24.5	1995	26.3
1970	24.2	2000	27.0
1975	24.7		

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de cuarto grado.
(b) Recurra al inciso (a) para encontrar un modelo para $A'(t)$.
(c) Estime la razón de cambio de la edad en que contraen matrimonio las mujeres durante la década de 1990.
(d) Dibuje los puntos correspondientes a datos así como los modelos para A y A'.

27. Remítase a la ley de flujo laminar que se da en el ejemplo 7. Considere un vaso sanguíneo con radio 0.01 cm, longitud 3 cm, diferencia de presión 3 000 dinas/cm^2, y viscosidad $\eta = 0.027$.
(a) Halle la velocidad de la sangre a lo largo de la línea central $r = 0$, en el radio $r = 0.005$ cm, y en la pared $r = R = 0.01$ cm.
(b) Encuentre el gradiente de velocidad en $r = 0$, $r = 0.005$, y $r = 0.01$.
(c) ¿Adónde es máxima la velocidad? ¿Adónde cambia en mayor medida?

28. La frecuencia de las vibraciones de una cuerda vibrante de un violín se expresa por medio de

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

donde L es la longitud de la cuerda, T es su tensión y ρ es su densidad lineal. [Véase el capítulo 11 en D. E. Hall, *Musical Acoustics*, 3a. ed. (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2002).]
(a) Encuentre la rapidez de cambio de la frecuencia con respecto a
 (i) La longitud (cuando T y ρ son constantes).
 (ii) La tensión (cuando L y ρ son constantes).
 (iii) La densidad lineal (cuando L y T son constantes).
(b) El tono de una nota (qué tan alto o bajo suena) está determinado por la frecuencia f (entre más alta es la frecuencia más alto es el tono). Use los signos de las derivadas del inciso (a) para hallar qué sucede en el tono de una nota
 (i) cuando se disminuye la longitud efectiva de una cuerda colocando un dedo sobre ésta de modo que vibre una parte más corta de la misma,
 (ii) cuando se aumenta la tensión haciendo girar una de las clavijas,
 (iii) cuando se incrementa la densidad lineal al cambiar hacia otra cuerda,

29. El costo, en dolares, de producir x yardas de una cierta tela es

$$C(x) = 1200 + 12x - 0.1x^2 + 0.0005x^3$$

(a) Hallar la función costo marginal.
(b) Hallar $C'(200)$ y explique su significado. ¿Qué predice?
(c) Compare $C'(200)$ con el costo de fabricación de la yarda 201 de tela.

30. La función de costo para la producción de una mercancia es

$$C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$$

(a) Hallar e interpretar $C'(100)$.
(b) Comparar $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

31. Si $p(x)$ es el valor total de la producción cuando se tienen x trabajadores en una planta, por lo tanto la *productividad promedio* de la fuerza de trabajo en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Encuentre $A'(x)$. ¿Por qué la compañía desea contratar más trabajadores si $A'(x) > 0$?
(b) Demuestre que $A'(x) > 0$ si $p'(x)$ es mayor que la productividad promedio.

32. Si R denota la reacción del cuerpo ante cierto estímulo de intensidad x, la *sensibilidad* S se define como la razón de cambio de la reacción con respecto a x. Un ejemplo específico es cuando aumenta el brillo x de una fuente de luz, el ojo reacciona disminuyendo el área R de la pupila. La fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$$

se ha utilizado para modelar la dependencia de R con respecto a x cuando R se mide en milímetros cuadrados y x se mide en unidades de brillo adecuadas.
(a) Encuentre la sensibilidad.
(b) Ilustre el inciso (a) dibujando tanto R como S como función de x. Comente acerca de los valores de R y S en los niveles de brillo más bajos. ¿Es esto lo que esperaba?

33. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T (en kelvin), la presión P (en atmósferas) y el volumen V (en litros) es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante del gas. Suponga que, en cierto instante, $P = 8.0$ atm y aumenta en una de 0.10 atm/min y $V = 10$ L y disminuyen proporción de 0.15 L/min. Encuentre la razón de cambio de T con respecto al tiempo en ese instante si $n = 10$ mol.

34. En una granja piscícola se introduce una población de peces en un estanque y se cosechan con regularidad. Un modelo para la razón de cambio de la población se expresa con la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

donde r_0 es la rapidez de nacimientos, P_c es la población máxima que el estanque puede sostener (llamada *capacidad de contención*) y β es el porcentaje de la población que se cosecha.
(a) ¿Cuál valor de dP/dt corresponde a una población estable?
(b) Si el estanque puede sostener 10 000 peces, la rapidez de nacimiento es del 5% y la cantidad de cosecha es del 4%, encuentre el nivel estable de la población.
(c) ¿Qué sucede si β se eleva hasta el 5%?

35. En el estudio de los ecosistemas, a menudo se usan los modelos *depredador-presa* para estudiar la interacción entre las especies. Considere una población de lobos de la tundra, dada por $W(t)$, y de caribúes, dada por $C(t)$, en el norte de Canadá. La interacción se ha modelado mediante las ecuaciones

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) ¿Cuáles valores de dC/dt y dW/dt corresponden a poblaciones estables?
(b) ¿Cómo se representaría matemáticamente la afirmación "los caribúes van hacia la extinción"?
(c) Suponga que $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ y $d = 0.0001$. Encuentre todas las parejas de poblaciones (C, W) que conducen a poblaciones estables. De acuerdo con este modelo, ¿es posible que las especies vivan en armonía o una de ellas, o ambas, se extinguirán?

3.8 CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO EXPONENCIAL

En muchos fenómenos naturales, las cantidades crecen o decaen en una cantidad proporcional a su tamaño. Por ejemplo, si $y = f(t)$ es el número de individuos en una población de animales o bacterias en el tiempo t, entonces, parece razonable esperar que la rapidez de crecimiento $f'(t)$ es proporcional a la población $f(t)$; es decir, $f'(t) = kf(t)$ por alguna constante k. A propósito, bajo condiciones ideales (ambientes sin límite, nutrición adecuada, inmunidad a las enfermedades) el modelo matemático conocido por la ecuación $f'(t) = kf(t)$ sin duda predice lo que realmente sucede con precisión. Otro ejemplo sucede en física nuclear donde la masa de una sustancia radiactiva decae en una cantidad proporcional a su masa. En química la velocidad de una reacción de primer orden unimolecular es proporcional a la concentración de la sustancia. En finanzas, el valor de una cuenta

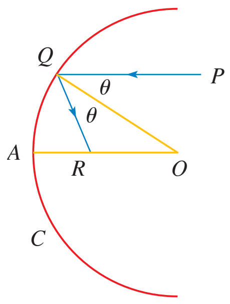


FIGURA PARA EL PROBLEMA 19

19. Suponga que reemplaza el espejo parabólico que aparece en el problema 18 con un espejo esférico. Aunque el espejo no tiene foco, puede demostrar la existencia de un foco *aproximado*. En la figura, C es un semicírculo con centro O. Un rayo de luz que llega hacia el espejo paralelo al eje a lo largo de la recta PQ, se reflejará hacia el punto R sobre el eje, de modo que $\angle PQO = \angle OQR$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión). ¿Qué sucede con el punto R a medida que P se lleva cada vez más cerca al eje?

20. Si f y g son funciones derivables donde $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$, demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

21. Evalúe $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(a + 2x) - 2\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen} a}{x^2}$.

CAS **22.** (a) La función cúbica $f(x) = x(x - 2)(x - 6)$ tiene tres ceros distintos: 0, 2 y 6. Dibuje f y su rectas tangentes en el *promedio* de cada par de ceros. ¿Qué advierte?

(b) Suponga que la función cúbica $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ tiene tres ceros diferentes: a, b y c. Compruebe, con ayuda de un sistema algebraico para computadora, que una recta tangente dibujada en el promedio de los ceros a y b interseca la gráfica de f en el tercer cero.

23. ¿Para qué valor de k la ecuación $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tiene exactamente una solución?

24. ¿Para qué números positivos a se cumple que $a^x \geqslant 1 + x$ para toda x?

25. Si

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

demuestre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

26. Dada una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $a \neq b$, encuentre la ecuación de todo el conjunto de puntos a partir de los cuales hay dos tangentes a la curva cuyas pendientes son (a) recíprocos y (b) recíprocos negativos.

27. Encuentre los dos puntos sobre la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que tienen una recta tangente en común.

28. Suponga que tres puntos sobre la parábola $y = x^2$ tienen la propiedad de que sus rectas normales se cruzan en un punto común. Demuestre que la suma de sus coordenadas x es cero.

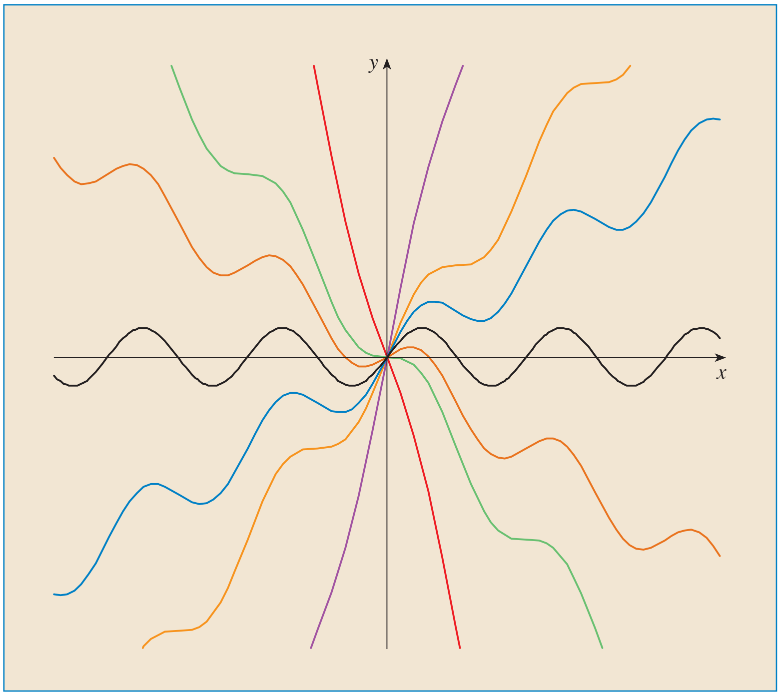
29. Un *punto de reticulado* sobre el plano es un punto con coordenadas enteras. Suponga que se dibujan círculos con radio r usando todos los puntos reticulados como centros. Encuentre el valor más pequeño de r tal que cualquier recta con pendiente $\frac{2}{5}$ cruce alguno de estos círculos.

30. Un cono de radio r centímetros y altura h centímetros se introduce por la punta con una rapidez de 1 cm/s en un cilindro alto de radio R centímetros que contiene una parte de agua. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua en el instante en que el cono está totalmente sumergido?

31. Un recipiente en forma de un cono invertido tiene una altura de 16 cm y su radio mide 5 cm en la parte superior. Está lleno en parte con un líquido que escurre por los lados con una rapidez proporcional al área del recipiente que está en contacto con el líquido. [El área superficial de un cono es πrl, donde r es el radio y l es la altura inclinada.] Si vierte líquido en el recipiente a razón de 2 cm^3/min, entonces la altura del líquido disminuye a razón de 0.3 cm/min cuando la altura es de 10 cm. Si el objetivo es mantener el líquido a una altura constante de 10 cm, ¿en que proporción debe verter líquido al recipiente?

4

APLICACIONES DE LA DERIVACIÓN



El cálculo revela todos los aspectos importantes de las gráficas de las funciones. Se examinan grupos de la familia de funciones $f(x) = cx + \text{sen } x$

Ya ha investigado algunas de las aplicaciones de las derivadas, pero ahora que conoce las reglas de derivación se encuentra en mejor posición para continuar con las aplicaciones de la derivación, con mayor profundidad. Aquí aprendera cómo las derivadas afectan la forma de una gráfica de una función y, particularmente, cómo ayudan a localizar valores máximos y mínimos de funciones. En la práctica muchos problemas exigen minimizar un costo o maximizar un área o bien encontrar el mejor resultado posible para una situación. En particular, será capaz de investigar la forma óptima de una lata y explicar la ubicación de los arcoíris en el cielo.

4.1 VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los cuales se pide la manera óptima (la mejor) de hacer algo. En seguida se listan ejemplos de esos problemas, los cuales se resuelven en este capítulo.

- ¿Cuál es la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?
- ¿Cuál es la aceleración máxima de un trasbordador espacial? (Ésta es una cuestión importante para los astronautas que tienen que soportar los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?
- ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

Estos problemas se pueden reducir a encontrar los valores máximo o mínimo de una función. En seguida se define con exactitud lo que son valores máximo y mínimo.

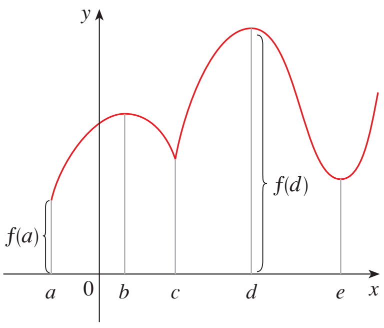


FIGURA 1
Valor mínimo $f(a)$, valor máximo $f(d)$

1 DEFINICIÓN Una función f tiene un **máximo absoluto** (o **máximo global**) en c si $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x en D, donde D es el dominio de f. El número $f(c)$ se llama **valor máximo** de f en D. De manera análoga, f tiene un **mínimo absoluto** en c si $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x en D; el número $f(c)$ se denomina **valor mínimo** de f en D. Los valores máximo y mínimo de f se conocen como **valores extremos** de f.

En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f con máximo absoluto en d y mínimo absoluto en a. Observe que $(d, f(d))$ es el punto más alto de la gráfica y $(a, f(a))$ es el más bajo. Si sólo considera valores de x cercanos a b en la figura 1 [por ejemplo, si restringe su atención al intervalo (a, c)], entonces $f(b)$ es el más grande de esos valores de $f(x)$ y se conoce como *valor máximo local* de f. De modo semejante, $f(c)$ es el *valor mínimo local* de f porque $f(c) \leqslant f(x)$ para x cercano a c [por ejemplo en el intervalo (b, d)]. La función f también tiene un mínimo local en e. En general, se da la definición siguiente:

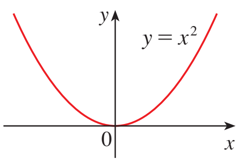


FIGURA 2
Valor mínimo 0, no hay valor máximo

2 DEFINICIÓN Una función f posee un **máximo local** (o **máximo relativo**) en c si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cercano a c. [Esto significa que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c.] De manera análoga, f tiene un **mínimo local** en c si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.

EJEMPLO 1 La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) de un número infinito de veces, ya que $\cos 2n\pi = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x. Del mismo modo, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ es su valor mínimo, donde n es cualquier entero. □

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geqslant f(0)$ porque $x^2 \geqslant 0$ para todo x. Por lo tanto, $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de f. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo sobre la parábola $y = x^2$. (Véase la figura 2.) Sin embargo, no existe el punto más alto sobre la parábola, por lo que esta función no tiene valor máximo. □

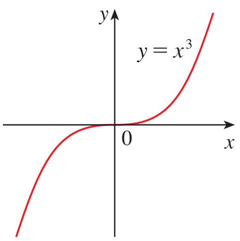


FIGURA 3
No hay mínimo ni máximo

EJEMPLO 3 En la gráfica de la función $f(x) = x^3$, que se muestra en la figura 3, esta función no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto. De hecho, tampoco posee valores extremos locales. □

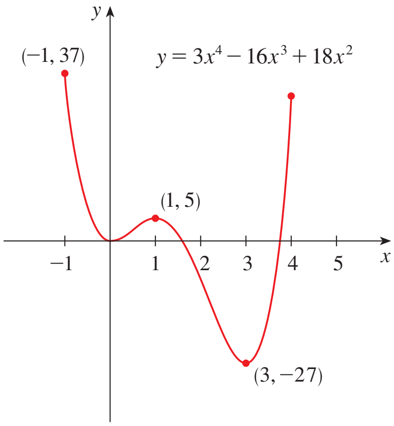


FIGURA 4

EJEMPLO 4 La gráfica de la función

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

se muestra en la figura 4. Puede ver que $f(1) = 5$ es un máximo local, en tanto que el máximo absoluto es $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto extremo.) Asimismo, $f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(3) = -27$ es un mínimo tanto local como absoluto. Advierta que f no tiene valor local ni máximo absoluto en $x = 4$. □

Ha visto que algunas funciones tienen valores extremos y otras no. En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función posea valores extremos.

3 TEOREMA DEL VALOR EXTREMO Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 5 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el Teorema del valor extremo es muy posible a nivel intuitivo, es difícil de probar y, por consiguiente, se omite la demostración.

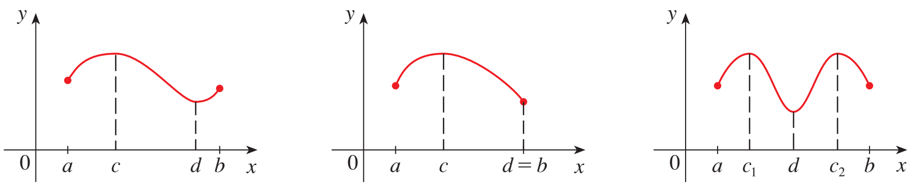


FIGURA 5

En las figuras 6 y 7 se hace ver que una función no tiene que poseer valores extremos si se omite cualquiera de las dos hipótesis (continuidad e intervalo cerrado) del teorema del valor extremo.

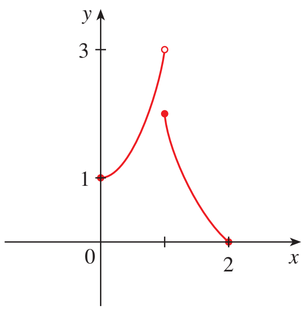


FIGURA 6
Esta función tiene valor mínimo $f(2) = 0$, pero no valor máximo

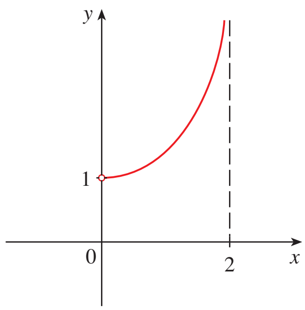


FIGURA 7
Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo

La función f, cuya gráfica se muestra en la figura 6, está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$ pero no tiene valor máximo. (Advierta que el intervalo de f es $[0, 3)$. La función toma valores arbitrariamente cercanos a 3, pero nunca alcanza el valor 3.) Esto no contradice el teorema del valor extremo porque f no es continua. [Sin embargo, una función discontinua pudiera tener valores máximo y mínimo. Véase el ejercicio 13(b).]

La función g que se muestra en la figura 7 es continua sobre el intervalo abierto $(0, 2)$, pero no tiene valor máximo ni mínimo. [El intervalo de g es $(1, \infty)$. La función toma valores arbitrariamente grandes.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque el intervalo $(0, 2)$ no es cerrado.

El teorema del valor extremo dice que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo, pero no indica cómo hallarlos. Empiece por buscar valores extremos locales.

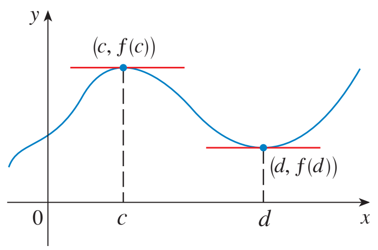


FIGURA 8

En la figura 8 se muestra la gráfica de una función f con un máximo local en c y un mínimo local en d. Parece que en los puntos máximo y mínimo la recta tangente es horizontal y, por consiguiente, tiene pendiente 0. Sabe que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que parece que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. En el teorema siguiente se afirma que esto siempre se cumple para las funciones derivables.

■ El teorema de Fermat lleva ese nombre en honor de Pierre Fermat (1601-1665), un abogado francés que tomó las matemáticas como un pasatiempo. A pesar de su condición de aficionado, Fermat fue uno de los dos inventores de la geometría analítica (Descartes fue el otro). Sus métodos para hallar tangentes a las curvas y valores máximos y mínimos (antes de la invención de los límites y de las derivadas) lo hicieron un precursor de Newton en la creación del cálculo diferencial.

4 TEOREMA DE FERMAT Si f tiene un máximo o un mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Por consideración de la definitividad, suponga que f tiene un máximo local en c. Entonces, según la definición 2, $f(c) \geqslant f(x)$ si x es suficientemente cercana a c. Esto ocasiona que si h está lo suficiente cerca de 0 y h es positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

y, por lo tanto,

5
$$f(c + h) - f(c) \leqslant 0$$

Puede dividir ambos miembros de una desigualdad entre un número positivo. Por consiguiente, si $h > 0$ y h es suficientemente pequeña, tiene

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Si calcula el límite derecho de ambos lados de esta desigualdad (aplicando el teorema 2.3.2), obtiene

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Pero como $f'(c)$ existe

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

y de este modo ha demostrado que $f'(c) \leqslant 0$.

Si $h < 0$, entonces la dirección de la desigualdad (5) se invierte al dividir entre h:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Así, al calcular el límite izquierdo obtiene

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Ya se demostró que $f'(c) \geqslant 0$ y también que $f'(c) \leqslant 0$. Puesto que ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Ya se demostró el teorema de Fermat para el caso de un máximo relativo. El caso de un mínimo local se puede demostrar de modo similar, o bien, puede usar el ejercicio 76 para deducirlo del caso que justamente ha demostrado (véase ejercicio 77). □

Los ejemplos siguientes advierten contra la interpretación excesiva del teorema de Fermat. No puede esperar localizar valores extremos simplemente haciendo $f'(x) = 0$ y resolviendo para x.

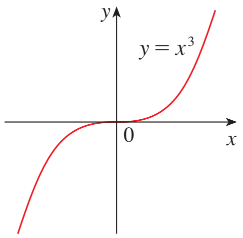


FIGURA 9
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$ pero f no tiene máximo o mínimo.

EJEMPLO 5 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo ni mínimo en 0, como puede ver en la gráfica de la figura 9. (O bien, observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$ pero $x^3 < 0$ para $x < 0$. El hecho de que $f'(0) = 0$ sólo significa que la curva $y = x^3$ tiene una tangente horizontal en $(0, 0)$. En lugar de tener un máximo o un mínimo en $(0, 0)$, la curva cruza allí su tangente horizontal. □

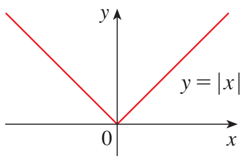


FIGURA 10
Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

EJEMPLO 6 La función $f(x) = |x|$ muestra un valor mínimo (local y absoluto), en 0, pero ese valor no se puede determinar haciendo $f'(x) = 0$ porque, como se demostró en el ejemplo 5 de la sección 2.8, $f'(0)$ no existe (véase figura 10). □

PRECAUCIÓN ▫ Los ejemplos 5 y 6 demuestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en c. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.) Además, podría haber un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista, (como en el ejemplo 6).

El teorema de Fermat en realidad sugiere que, por lo menos, debe empezar a buscar los valores extremos de f en los números c , donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

6 DEFINICIÓN Un **número crítico** de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

■ En la figura 11 se muestra una gráfica de la función f del ejemplo 7. Sirve de apoyo a la respuesta porque hay una tangente horizontal cuando $x = 1.5$ y una vertical cuando $x = 0$.

EJEMPLO 7 Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUCIÓN La regla del producto da

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[Pudo obtenerse el mismo resultado escribiendo primero $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si $12 - 8x = 0$, esto es, $x = \frac{3}{2}$, y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Por esto, los números críticos son $\frac{3}{2}$ y 0. □

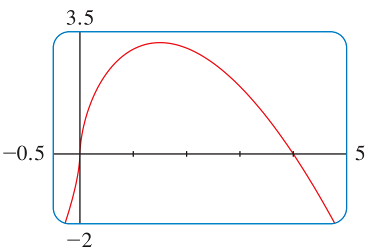


FIGURA 11

En términos de los números críticos, el teorema de Fermat se puede volver a redactar como sigue (compare la definición 6 con el teorema 4):

7 Si f tiene un máximo o minimo local en c, entonces c es un número crítico de f.

Para hallar un máximo o un mínimo absolutos de una función continua sobre un intervalo cerrado, observe que tiene un extremo local [en cuyo caso, por (7), se presenta en un número crítico] o se presenta en uno de los puntos extremos del intervalo. De este modo, el procedimiento siguiente de tres pasos siempre funciona.

MÉTODO DEL INTERVALO CERRADO Para hallar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 8 Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUCIÓN Puesto que f es continua en $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, puede aplicar el método del intervalo cerrado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

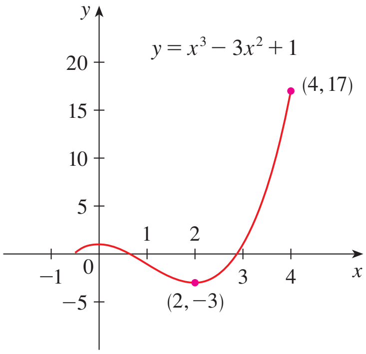


FIGURA 12

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos números críticos de f se presentan cuando $f'(x) = 0$, es decir, $x = 0$ o $x = 2$. Observe que cada uno de estos valores críticos queda en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Los valores de f en los extremos del intervalo son

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Al comparar los cuatro números resulta que el valor máximo absoluto es $f(4) = 17$ y que el valor mínimo absoluto es $f(2) = -3$.

Observe que en este ejemplo el máximo absoluto se presenta en un extremo, y el mínimo absoluto se presenta en un número crítico. La gráfica de f se ilustra en la figura 12. □

Si tiene una calculadora que grafique o una computadora con programas que le permitan graficar, es posible estimar con mucha facilidad los valores máximo y mínimo. Pero, como se puede ver en el ejemplo siguiente, el cálculo infinitesimal es necesario para determinar los valores *exactos*.

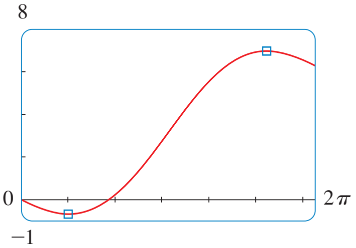


FIGURA 13

EJEMPLO 9

(a) Use un aparato graficador para estimar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(b) Aplique el cálculo para hallar los valores mínimo y máximo exactos.

SOLUCIÓN

(a) En la figura 13 se muestra una gráfica de f en la pantalla $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Al acercar el cursor al punto máximo, observe que las coordenadas y no cambian mucho en la vecindad del máximo. El valor máximo absoluto es alrededor de 6.97 y se presenta cuando $x \approx 5.2$. De manera análoga, al mover el cursor cerca del punto mínimo, el valor mínimo absoluto es alrededor de -0.68 y se presenta cuando $x \approx 1.0$. Es posible lograr estimaciones más exactas al hacer un acercamiento hacia los puntos máximo y mínimo pero, en lugar de ello, aplique el cálculo.

(b) La función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ es continua sobre $[0, 2\pi]$. Puesto que $f'(x) = 1 - 2\cos x$, tiene $f'(x) = 0$ cuando $\cos x = \frac{1}{2}$ esto ocurre cuando $x = \pi/3$ o $5\pi/3$. Los valores de f en estos puntos críticos son

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

y
$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Los valores de f en los puntos extremos son

$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Si se comparan estos cuatro números y se aplica el método del intervalo cerrado, el valor mínimo absoluto es $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ y el valor máximo absoluto es $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Los valores del inciso (a) sirven de comprobación. □


NASA

EJEMPLO 10 El telescopio espacial Hubble fue puesto en operación el 24 de abril de 1990 por el trasbordador espacial *Discovery*. Un modelo para la velocidad del trasbordador durante su misión desde el lanzamiento en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en el instante $t = 126$ s, está dado por

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pies por segundo). Usando este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la *aceleración* del trasbordador entre el lanzamiento y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

SOLUCIÓN Se pide hallar los valores extremos no de la función de velocidad dada sino de la función de aceleración. Por consiguiente, primero necesita derivar para encontrar la aceleración:

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083) \\ &= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61 \end{aligned}$$

Ahora aplique el método del intervalo cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Su derivada es

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

El único número crítico se presenta cuando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

Al evaluar a $a(t)$ en el número crítico y en los extremos, tiene

$$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) \approx 21.52 \qquad a(126) \approx 62.87$$

De modo que la aceleración máxima es alrededor de 62.87 pies/s^2 y la aceleración mínima es alrededor de 21.52 pies/s^2. □

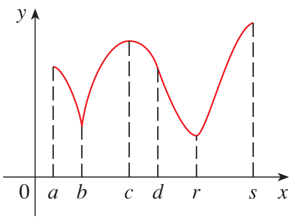
4.1 EJERCICIOS

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.

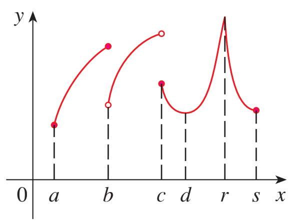
2. Suponga que f es una función continua definida sobre un intervalo $[a, b]$.
(a) ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y uno mínimo absoluto para f?
(b) ¿Qué pasos emprendería para hallar esos valores máximo y mínimo?

3–4 Para cada uno de los números a, b, c, d, r, y s, determine si la función cuya gráfica se ilustra tiene un máximo o un mínimo absolutos, un máximo o un mínimo locales o no tiene ni máximo ni mínimo.

3.

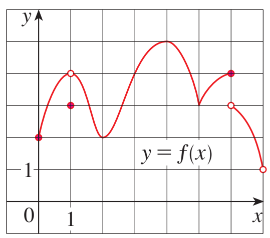


4.

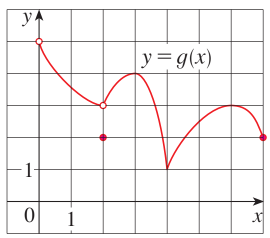


5–6 Use la gráfica para determinar los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

5.



6.



7–10 Dibuje la gráfica de una función f que sea continua sobre $[1, 5]$ y tenga las propiedades dadas.

7. Mínimo absoluto en 2, máximo absoluto en 3, mínimo local en 4.

8. Mínimo absoluto en 1, máximo absoluto en 5, mínimo local en 2, mínimo local en 4.

9. Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimo local en 2 y 4.

10. f no tiene máximo ni mínimo locales, pero 2 y 4 son números críticos.

11. (a) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y sea derivable en 2.
(b) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea derivable en 2.
(c) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea continua en 2.

12. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tenga un máximo absoluto pero no máximo local.
(b) Trace la gráfica de una función en $[-1, 2]$ que tiene un máximo local pero no un máximo absoluto.

13. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tenga un máximo absoluto pero no mínimo absoluto.
(b) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que sea discontinua pero que tenga tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto.

14. (a) Trace la gráfica de una función que tenga dos máximos locales, un mínimo local y no mínimo absoluto.
(b) Trace la gráfica de una función que tenga tres mínimos locales, dos máximos locales y siete números críticos.

15–28 Trace a mano la gráfica de f y use su boceto para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las gráficas así como las transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

15. $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geqslant 1$

16. $f(x) = 3 - 2x, \quad x \leqslant 5$

17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$

18. $f(x) = x^2, \quad 0 < x \leqslant 2$

19. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x < 2$

20. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

21. $f(x) = x^2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 2$

22. $f(x) = 1 + (x + 1)^2, \quad -2 \leqslant x < 5$

23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$

24. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

29–44 Encuentre los números críticos de la función.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

32. $f(x) = x^3 + x^2 + x$

33. $s(t) = 3t^4 + 4t^3 - 6t^2$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y + 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2x}\ln x$

45–46 Se proporciona una formula para la *derivada* de una función f. ¿Cuántos números críticos tiene f?.

45. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|}\operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{x^2 + 1}$

47–62 Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2, \quad [-1, 4]$

51. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, \quad [-2, 3]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

54. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad [-4, 4]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}\,(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(x) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

63. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

64. Use una gráfica para estimar los números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ correctos hasta un lugar decimal.

65–68
(a) Utilice una gráfica para estimar los valores máximo y mínimo de la función hasta dos lugares decimales.
(b) Use el cálculo para encontrar los valores máximo y mínimo exactos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

66. $f(x) = e^{x^3 - x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leqslant x \leqslant 0$

69. Entre 0°C y 30°C el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T se expresa aproximadamente mediante la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

70. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, por lo tanto la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante positiva denominada *coeficiente de fricción* y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Demuestre que F se minimiza cuando $\tan\theta = \mu$.

71. Se proporciona un modelo para el precio en Estados Unidos de una libra de azúcar blanca desde 1993 a 2003

$$S(t) = -0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.04458t + 0.4074$$

donde t se mide en años desde agosto de 1993. Estime las ocasiones en que el azúcar estuvo más barata y más cara durante el periodo de 1993 a 2007.

72. El 7 de mayo de 1992, el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla siguiente se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Hecho	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de maniobra de giro	10	185
Fin de maniobra de giro	15	319
Válvula de estrangulación al 89%	20	447
Válvula de estrangulación al 67%	32	742
Válvula de estrangulación al 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación de los cohetes auxiliares de combustible sólido	125	4151

(a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para hallar el polinomio cúbico que modele de la mejor manera la velocidad del transbordador para el lapso $t \in [0, 125]$. A continuación, dibuje este polinomio.
(b) Encuentre un modelo para su aceleración y úselo para estimar los valores máximo y mínimo de la aceleración durante los primeros 125 s.

73. Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba y causa un aumento de la presión en los pulmones. Esto viene acompañado por una contracción de la tráquea, con lo cual se produce un canal más angosto por el que debe fluir el aire expelido. Para que escape una cantidad dada de aire en un tiempo fijo, éste debe moverse con mayor rapidez por el canal más angosto que por el más amplio. Entre mayor sea la velocidad de la corriente de aire, mayor es la fuerza aplicada sobre el objeto extraño. Los rayos X muestran que el radio del tubo circular de la tráquea se contrae hasta alrededor de dos tercios de su radio normal durante un acceso de tos. De acuerdo con un modelo matemático de la tos, la velocidad n de la corriente de aire se relaciona con el radio r de la tráquea mediante la ecuación

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

donde k es una constante y r_0 es el radio normal de la tráquea. La restricción sobre r se debe al hecho de que la pared de la tráquea se pone rígida bajo la presión y se impide una contracción mayor que $\frac{1}{2}r_0$ (de lo contrario, la persona se sofocaría).

(a) Determine el valor de r en el intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ al cual v tiene un máximo absoluto. ¿Cómo se equipara esto con la evidencia experimental?

(b) ¿Cuál es el valor máximo absoluto de v sobre el intervalo?

(c) Dibuje v sobre el intervalo $[0, r_0]$.

74. Demuestre que 5 es un valor crítico de la función

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

pero g no tiene un valor extremo local en 5.

75. Demuestre que la función

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

no tiene ni máximo local ni mínimo local.

76. Si f tiene un valor mínimo en c, demuestre que la función $g(x) = -f(x)$ posee un valor máximo en c.

77. Demuestre el teorema de Fermat para el caso en el cual f posee un mínimo relativo en c.

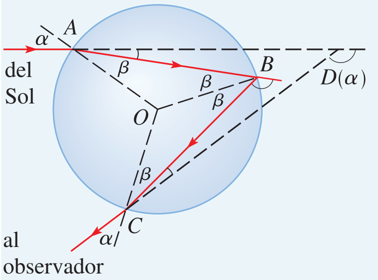
78. Una función cúbica es un polinomio de grado 3; esto es, tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$.

(a) Demuestre que una función cúbica puede tener dos números críticos, uno o ninguno. Dé ejemplos y trace gráficas para ilustrar las tres posibilidades.

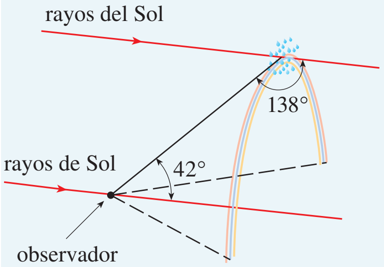
(b) ¿Cuántos valores extremos locales puede tener una función cúbica?

PROYECTO DE APLICACIÓN — EL CÁLCULO DE LOS ARCOÍRIS

Los arcoíris se forman cuando las gotas de lluvia dispersan la luz solar. Han fascinado a la humanidad desde los tiempos más remotos y han inspirado intentos de explicación científica desde la época de Aristóteles. En este proyecto se siguen las ideas de Descartes y de Newton para explicar la forma, la ubicación y los colores de los arcoíris.



Formación del arcoíris primario



1. En la figura se muestra un rayo de luz solar que entra en una gota de lluvia esférica en A. Algo de la luz se refleja, pero la recta AB muestra la trayectoria de la parte que entra a la gota. Advierta que la luz se refracta hacia la recta normal AO y, de hecho, la ley de Snell afirma que sen $\alpha = k$ sen β, donde α es el ángulo de incidencia, β es el ángulo de refracción y $k \approx \frac{4}{3}$ es el índice de refracción para el agua. En B algo de la luz pasa por la gota y se refracta hacia el aire, pero la recta BC muestra la parte que se refleja. (El ángulo de incidencia es igual al de reflexión.) Cuando el rayo llega a C, parte de él se refleja pero, por el momento, hay más interés en la parte que sale de la gota de lluvia en C. (Advierta que se refracta alejándose de la recta normal.) El *ángulo de desviación* $D(\alpha)$ es la magnitud de la rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj que ha descrito el rayo durante este proceso de tres etapas. Por lo tanto

$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Demuestre que el valor mínimo de la desviación es $D(\alpha) \approx 138°$ y ocurre cuando $\alpha \approx 59.4°$.

El significado de la desviación mínima es que, cuando $\alpha \approx 59.4°$ tiene $D'(\alpha) \approx 0$, de modo que $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Esto significa que muchos rayos con $\alpha \approx 59.4°$ resultan desviados en más o menos la misma cantidad. La *concentración* de los rayos que vienen de las cercanías de la desviación mínima crea la brillantez del arcoíris primario. En la figura se muestra que el ángulo de elevación desde el observador, hacia arriba hasta el punto más alto del arcoíris es $180° - 138° = 42°$. (Este ángulo se conoce como *ángulo del arcoíris*.)

2. En el problema 1 se explica la ubicación del arcoíris primario, ¿pero cómo explica los colores? La luz solar comprende una gama de longitudes de onda, desde el rojo, hasta el naranja,

13–14 Dibuje a mano la gráfica utilizando las asíntotas y las intersecciones, pero no las derivadas. Enseguida use su dibujo como guía para producir gráficas (con un aparato graficador) que exhiba las características importantes de la curva. Utilice estas gráficas para estimar los valores máximos y mínimos.

13. $f(x) = \dfrac{(x+4)(x-3)^2}{x^4(x-1)}$

14. $f(x) = \dfrac{(2x+3)^2(x-2)^5}{x^3(x-5)^2}$

CAS **15.** Si f es la función considerada en el ejemplo 3, use un sistema algebraico para computadora para calcular f' y dibújela para confirmar que todos los valores máximos y mínimos son como los que se dan en el ejemplo. Calcule f'' y úsela para estimar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

CAS **16.** Si f es la función del ejercicio 14 encuentre f' y f'' y use sus gráficas para estimar los intervalos de incremento y decremento y la concavidad de f.

CAS **17–22** Use un sistema algebraico para computadora para dibujar f y hallar f' y f''. Utilice las gráficas de estas derivadas para estimar los intervalos de incremento y decremento, los valores máximos, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de f.

17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}$

18. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1+x+x^4}$

19. $f(x) = \sqrt{x + 5 \operatorname{sen} x}, \quad x \leqslant 20$

20. $f(x) = (x^2 - 1)e^{\arctan x}$

21. $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\tan x}}$

CAS **23–24**

(a) Grafique la función.

(b) Explique la forma de la gráfica mediante el cálculo del límite cuando $x \to 0^+$ o cuando $x \to \infty$.

(c) Estime los valores máximo y mínimo, y luego, mediante cálculo, determine los valores exactos.

(d) Utilice una gráfica de f'' para estimar las coordenadas x de los puntos de inflexión.

23. $f(x) = x^{1/x}$

24. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

25. En el ejemplo 4 se consideró un miembro de la familia de funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$ que se presentan en la síntesis de frecuencia modulada (FM). En este ejercicio investigue la función para $c = 3$. Empiece por dibujar f en el rectángulo de visualización $[0, \pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ ¿Cuántos puntos máximos locales observa? La gráfica tiene más que son visibles a simple vista. Para descubrir los puntos máximos y mínimos ocultos necesitará analizar con mucho cuidado la gráfica de f'. De hecho, ayuda mirar al mismo tiempo la gráfica de f''. Encuentre todos los valores máximos y mínimos así como los puntos de inflexión. A continuación trace la gráfica de f en el rectángulo de visualización $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ y haga comentarios en cuanto a la simetría.

26–33 Describa cómo cambia la gráfica de f conforme varía c. Trace la gráfica de varios miembros de la familia para ilustrar las tendencias que descubra. En particular, deberá investigar cómo se mueven los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión cuando cambia c. Debe, asimismo, identificar cualesquiera valores de transición de c en los cuales cambie la forma básica de la curva.

26. $f(x) = x^3 + cx$

27. $f(x) = x^4 + cx^2$

28. $f(x) = x^2\sqrt{c^2 - x^2}$

29. $f(x) = e^{-c/x^2}$

30. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

31. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^2 + cx^2}$

33. $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

34. La familia de funciones $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y C son números positivos y $b > a$, se ha utilizado para modelar la concentración de un medicamento administrado por vía intravenosa en el instante $t = 0$. Trace la gráfica de varios miembros de esta familia. ¿Qué tienen en común? Para valores fijos de C y a, descubra en forma gráfica qué sucede a medida que b crece. Enseguida aplique el cálculo para probar lo que ha descubierto.

35. Investigue la familia de curvas dada por $f(x) = xe^{-cx}$, donde c es un número real. Empiece por calcular los límites de $x \to \pm\infty$. Identifique los valores de la transición de c donde cambia la forma básica. ¿Qué sucede con los puntos máximo y mínimo y los puntos de inflexión cuando se modifica c? Ilustre mediante gráficas de varios miembros de la familia.

36. Investigue la familia de curvas dadas por la ecuación $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Empiece por determinar el valor de transición de c en los cuales cambia el número de los puntos de inflexión. Luego trace la gráfica de varios miembros de la familia con el fin de observar cuáles formas son posibles. Existe otro valor de transición de c en el cual cambia la cantidad de números críticos. Trate de descubrirlo en forma gráfica. En seguida, demuestre lo que descubrió.

37. (a) Investigue la familia de polinomios dada por la ecuación $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. ¿Para qué valores de c tiene puntos mínimos la curva?

(b) Demuestre que los puntos mínimo y máximo de cada curva de la familia se encuentran sobre la parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre trazando la gráfica de esta parábola y de varios miembros de la familia.

38. (a) Investigue la familia de polinomios dada por la ecuación $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. ¿Para qué valores de c la curva tiene puntos máximos y mínimos?

(b) Demuestre que los puntos mínimo y máximo de cada curva de la familia se encuentran sobre la curva $y = x - x^3$. Ilustre dibujando esta curva y varios miembros de la familia.

4.7 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Los métodos para hallar valores extremos aprendidos en este capítulo tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas de la vida. Una persona de negocios quiere minimizar los costos y maximizar las utilidades. El principio de Fermat, en óptica, afirma que la luz sigue la trayectoria que le toma menos tiempo. En esta sección y en la siguiente resolverá problemas como los de maximizar áreas, volúmenes y utilidades, y minimizar distancias, tiempos y costos.

En la solución de esos problemas prácticos, el desafío más grande suele ser convertir el problema en palabras en un problema matemático de optimización, establecer la función que debe maximizarse o minimizarse. Recuerde los principios de solución de problemas que se analizaron en la página 76 y adaptelos a esta situación:

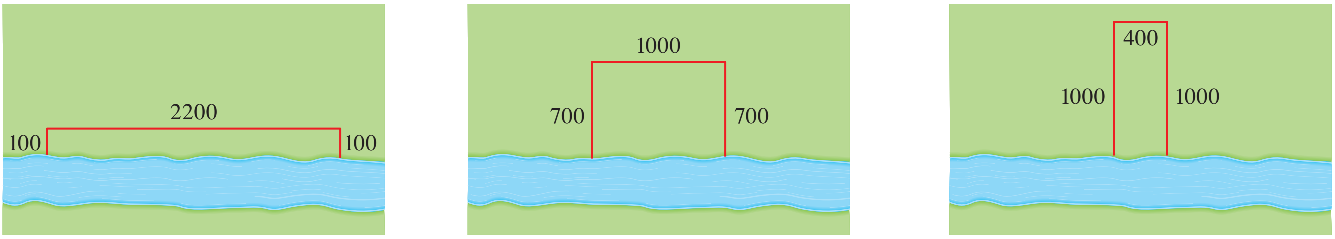
PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1. **Comprenda el problema** El primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Hágase las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayor parte de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y requeridas.
3. **Introduzca notación** Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llámela Q por ahora). Asimismo, seleccione símbolos $(a, b, c, \ldots, x, y)$ para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos sugerentes; por ejemplo, A para el área, h para altura y t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si en el paso 4 Q se ha expresado como función de más de una variable, utilice la información dada para hallar correspondencias (en la forma de ecuaciones) entre estas variables. Enseguida, use estas ecuaciones para eliminar todas las variables, excepto una, en la expresión para Q. De esta suerte, Q se expresará como función de *una* variable x, por ejemplo, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Aplique los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para hallar el valor máximo o el mínimo absolutos de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, después se puede utilizar el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.

EJEMPLO 1 Un granjero tiene 2400 pies de cerca y desea cercar un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

- Comprenda el problema
- Analogía. Intente casos especiales
- Dibuje diagramas

SOLUCIÓN Para tener idea de lo que ocurre en este problema, experimente con algunos casos especiales. En la figura 1 se muestran (no a escala) tres maneras posibles de emplear los 2400 pies de cerca.



Área = $100 \cdot 2200 = 220\,000$ pies^2 Área = $700 \cdot 1000 = 700\,000$ pies^2 Área = $1000 \cdot 400 = 400\,000$ pies^2

FIGURA 1

Cuando intenta cercar campos poco profundos y anchos, o profundos y anchos, obtiene áreas más o menos pequeñas. Parece que existe alguna configuración intermedia que produce al área más grande.

■ Introduzca notación

En la figura 2 se ilustra el caso general. Desea maximizar el área A del rectángulo. Sean x y y la profundidad y el ancho del campo (en pies). Enseguida exprese A en términos de x y y:

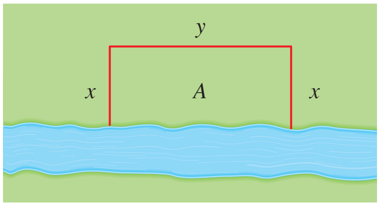


FIGURA 2

$$A = xy$$

Quiere expresar A como expresión sólo de una variable, de modo que elimina y al expresarla en términos de x. Para llevar a cabo esto, usa la información dada de que la longitud total de la cerca es 2 400 pies. Por esto.

$$2x + y = 2400$$

A partir de esta ecuación $y = 2400 - 2x$, lo cual da

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 1\,200$ (de lo contrario $A < 0$). De manera que la función que desea maximizar es

$$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1200$$

La derivada es $A'(x) = 2\,400 - 4x$, de suerte que para encontrar los números críticos resuelve la ecuación

$$2400 - 4x = 0$$

lo cual da $x = 600$. El valor máximo de A debe ocurrir en este número o en uno de los puntos extremos del intervalo. Como $A(0) = 0$, $A(600) = 720\,000$ y $A(1\,200) = 0$, el método del intervalo cerrado da el valor máximo como $A(600) = 720\,000$.

[De modo alternativo, podría ver que $A''(x) = -4 < 0$ para todo x, de modo que A siempre es cóncava hacia abajo y el máximo local en $x = 600$ debe ser un máximo absoluto.]

En estos términos, el campo rectangular debe tener 600 pies de profundidad y 1 200 pies de ancho. □

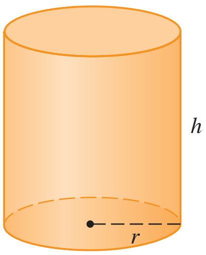


FIGURA 3

V EJEMPLO 2 Se va a fabricar una lata para que contenga 1 L de aceite. Halle las dimensiones que minimizarán el costo del metal para fabricar la lata.

SOLUCIÓN Dibuje el diagrama como el de la figura 3, donde r es el radio y h la altura (ambos en cm). Para minimizar el costo del metal, minimice el área superficial total del cilindro (tapa, fondo y lados). A partir de la figura 4, observe que los lados se fabrican de una lámina rectangular con dimensiones $2\pi r$, y h de manera que el área superficial es

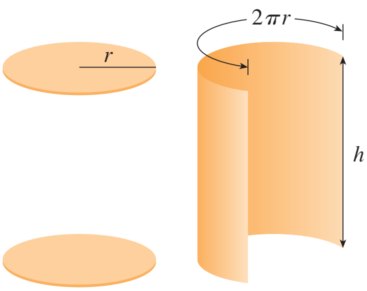
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Para eliminar h, aplique el hecho de que se da el volumen como de 1 L, lo cual tomamos como 1 000 cm^3. Por lo tanto

$$\pi r^2 h = 1000$$

lo cual da $h = 1\,000/(\pi r^2)$. Si se sustituye esto en la ecuación para A, se tiene

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$



Área $2(\pi r^2)$ Área $(2\pi r)h$

FIGURA 4

Por lo tanto, la función que desea minimizar es

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad r > 0$$

Para hallar los números críticos derive

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

■ En el proyecto de aplicación que se presenta en la página 333 se investiga la forma más económica para una lata tomando en cuenta otros costos de fabricación.

Entonces, $A'(r) = 0$ cuando $\pi r^3 = 500$, de modo que el único número crítico es $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Como el dominio de A es $(0, \infty)$, no puede aplicar el argumento del ejemplo 1 relativo a los puntos extremos; pero observe que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ y $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, por lo que A es decreciente para todo r a la izquierda del número crítico y creciente para todo r a la derecha. De este modo, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ debe dar lugar a un mínimo *absoluto*.

[Como otra posibilidad podría argumentar que $A(r) \to \infty$ cuando $r \to 0^+$ y $A(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$, de manera que debe haber un valor mínimo de $A(r)$, el cual tiene que ocurrir en el número crítico. Véase la figura 5.]

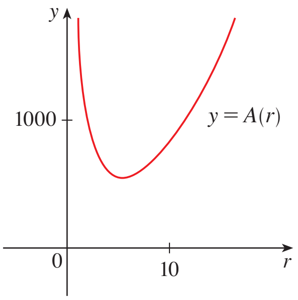


FIGURA 5

El valor de h correspondiente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

En estos términos, a fin de minimizar el costo de la lata, el radio debe ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm, y la altura debe ser igual al doble del radio; a saber, el diámetro. □

NOTA 1 El argumento que se usó en el ejemplo 2 para justificar el mínimo absoluto es una variante de la prueba de la primera derivada (la cual sólo se aplica a los valores máximos o mínimos *locales*) y se enuncia a continuación para referencia futura:

TEC En Module 4.7 podrá ver seis problemas de optimización adicionales, incluyendo animaciones de las situaciones físicas.

PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA PARA VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.

(a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.

(b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

NOTA 2 Otro método para resolver problemas de optimización consiste en usar la derivación implícita. Vea el ejemplo 2 una vez más para ilustrar el método. Trabaje con las mismas ecuaciones

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 100$$

Pero en vez de eliminar h, derive las dos ecuaciones implícitamente con respecto a r

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

El mínimo se presenta en un número crítico, de tal suerte que $A' = 0$, simplifique y llegue a las ecuaciones

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

y al restar, da $2r - h = 0$, o bien $h = 2r$.

V EJEMPLO 3 Encuentre el punto sobre la parábola $y^2 = 2x$ más cercano al punto $(1, 4)$.

SOLUCIÓN La distancia entre el punto $(1, 4)$ y el punto (x, y) es

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}$$

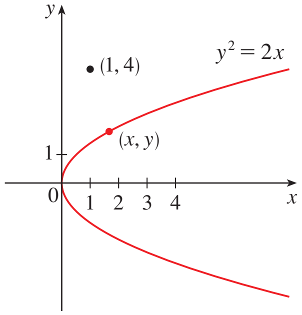


FIGURA 6

(Véase la figura 6.) Pero si (x, y) se encuentra sobre la parábola, entonces $x = \frac{1}{2}y^2$, de modo que la expresión para d se convierte en

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y - 4)^2}$$

(Como otra opción pudo sustituir $y = \sqrt{2x}$ para obtener d en términos de sólo x.) En lugar de minimizar d, minimice su cuadrado:

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y - 4)^2$$

(Convénzase por usted mismo que el mínimo de d se tiene en el mismo punto que el mínimo de d^2, pero es más fácil trabajar con este último.) Al derivar, obtiene

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

de modo que $f'(y) = 0$ cuando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ cuando $y < 2$ y $f'(y) > 0$ cuando $y > 2$, de suerte que por la prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos, se presenta el mínimo absoluto cuando $y = 2$. (O podría decir que, debido a la naturaleza geométrica del problema, es obvio que existe un punto lo más próximo, pero no un punto que esté lo más alejado.) El valor correspondiente de $x = \frac{1}{2}\,y^2 = 2$. Por esto, el punto de $y^2 = 2x$ más cercano a $(1, 4)$ es $(2, 2)$. □

EJEMPLO 4 Un hombre está en un punto A sobre una de las riberas de un río recto que tiene 3 km de ancho y desea llegar hasta el punto B, 8 km corriente abajo en la ribera opuesta, tan rápido como le sea posible (véase la figura 7). Podría remar en su bote, cruzar directamente el río hasta el punto C y correr hasta B, o podría remar hasta B o, en última instancia, remar hasta algún punto D, entre C y B, y luego correr hasta B. Si puede remar a 6 km/h y correr a 8 km/h, ¿dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible? (Suponga que la rapidez del agua es insignificante comparada con la rapidez a la que rema el hombre.)

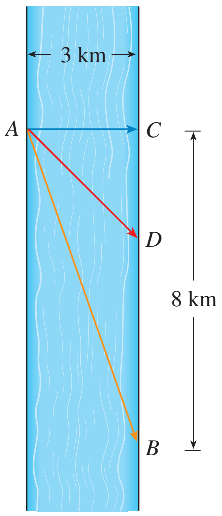


FIGURA 7

SOLUCIÓN Sea x la distancia de C hasta D, entonces la distancia por correr es $|DB| = 8 - x$; el teorema de Pitágoras da la distancia por remar como $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Utilice la ecuación

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Por lo tanto el tiempo que tiene que remar es $\sqrt{x^2 + 9}/6$ y el que debe correr es $(8 - x)/8$, de modo que el tiempo total T, como función de x, es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

El dominio de esta función t es $[0, 8]$. Advierta que si $x = 0$, el hombre rema hacia C y si $x = 8$ rema directamente hacia B. La derivada de T es

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

De este modo, si se aplica el hecho de que $x \geqslant 0$

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2+9}$$

$$\iff 16x^2 = 9(x^2+9) \iff 7x^2 = 81$$

$$\iff x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

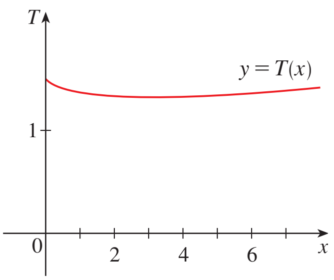


FIGURA 8

El único número crítico es $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver si el mínimo se presenta en este número crítico o en uno de los puntos extremos del dominio $[0, 8]$, evalúe T en los tres puntos:

$$T(0) = 1.5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

Dado que el valor menor de estos valores de T se tiene cuando $x = 9/\sqrt{7}$, el valor mínimo absoluto de T debe tenerse allí. En la figura 8 se ilustra este cálculo con la gráfica de T.

Por esto el hombre debe atracar en un punto $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$3.4 km) corriente abajo del punto de partida. □

EJEMPLO 5 Encuentre el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio r.

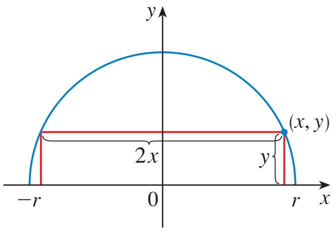


FIGURA 9

SOLUCIÓN 1 Tome la semicircunferencia como la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con centro en el origen. Entonces la palabra *inscrito* significa que el rectángulo tiene dos de sus vértices sobre la semicircunferencia y los otros dos sobre el eje x, como se muestra en la figura 9.

Sea (x, y) el vértice que se encuentra en el primer cuadrante. En tal caso el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y y, de manera que su área es

$$A = 2xy$$

Para eliminar y, aproveche que (x, y) se encuentra sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ por consiguiente $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. De esta forma

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

El dominio de esta función es $0 \leqslant x \leqslant r$. Su derivada es

$$A' = 2\sqrt{r^2-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{2(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

la cual es 0 cuando $2x^2 = r^2$; es decir $x = r/\sqrt{2}$ (ya que $x \geqslant 0$). Este valor de x da un valor máximo de A, porque $A(0) = 0$ y $A(r) = 0$. Por lo tanto, el área del rectángulo inscrito más grande es

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

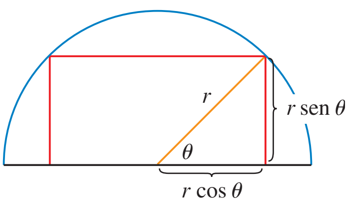


FIGURA 10

SOLUCIÓN 2 Es posible una solución más sencilla si usa un ángulo como variable. Sea θ el ángulo que se ilustra en la figura 10. Despues el área del rectángulo es

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta) = r^2(2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta) = r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

Sabe que sen 2θ tiene un valor máximo de 1 y se alcanza cuando $2\theta = \pi/2$. De modo que $A(\theta)$ tiene un valor máximo de r^2 y se presenta cuando $\theta = \pi/4$.

Advierta que esta solución trigonométrica no comprende la derivación. De hecho, no necesita aplicar el cálculo en absoluto. □

APLICACIONES A LOS NEGOCIOS Y LA ECONOMÍA

En la sección 3.7 se introdujo la idea de costo marginal. Recuerde que si $C(x)$, la **función de costo**, es el costo de producir x unidades de cierto producto, por lo tanto el **costo marginal** es la relación de cambio de C respecto de x. En otras palabras, la función de costo marginal es la derivada $C'(x)$ de la función de costo.

Considere ahora el mercadeo. Sea $p(x)$ el precio por unidad que la compañía carga si vende x unidades. Entonces p se llama **función de demanda** (o **función de precio**) y cabe esperar que sea una función decreciente de x. Si se venden x unidades y el precio por unidad es $p(x)$, en consecuencia el ingreso total es

$$R(x) = xp(x)$$

y R se llama **función de ingreso** (o **función de ventas**). La derivada R' de la función de ingreso se denomina **función de ingreso marginal** y es la relación de cambio del ingreso con respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, entonces la utilidad total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

y P es la **función de utilidad**. La **función de utilidad marginal** es P', la derivada de la función de utilidad. En los ejercicios 53-58 se le pide aplicar las funciones del costo marginal, el ingreso, y la de utilidad para minimizar costos y maximizar el ingreso y la utilidad.

V EJEMPLO 6 Una tienda ha vendido 200 quemadores de DVD a la semana, a \$350 cada uno. Una investigación de mercado indica que por cada \$10 de descuento que se ofrezca a los compradores, el número de aparatos vendidos se incrementará en 20 a la semana. Encuentre las funciones de demanda y de ingreso ¿Qué tan grande debe ser la rebaja para maximizar el ingreso?

SOLUCIÓN Si x denota los reproductores vendidos a la semana, entonces, el incremento semanal en las ventas es $x - 200$. Por cada incremento de 20 reproductores vendidos, el precio disminuye \$10. De manera que por cada reproductor adicional vendido, la disminución en el precio es $\frac{1}{20} \times 10$ y la función de demanda es

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

La función de ingreso es

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, $R'(x) = 0$ cuando $x = 450$. Por la prueba de la primera derivada (o sencillamente al observar que la gráfica de R es una parábola que se abre hacia abajo), este valor de x da un máximo absoluto. El precio correspondiente es

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

y el descuento es de $350 - 225 = 125$. Por consiguiente, para maximizar el ingreso la tienda debe ofrecer un descuento de \$125. □

4.7 EJERCICIOS

1. Considere el problema siguiente. Encuentre dos números cuya suma es 23 y cuyo producto es un máximo.
(a) Formule una tabla de valores, como la que aparece a continuación, de tal suerte que la suma de los números en las primeras dos columnas sea siempre 23. Con base en la evidencia de su tabla, estime la respuesta al problema

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

(b) Aplique el cálculo para resolver el problema y compárelo con su respuesta al inciso (a).

2. Encuentre dos números cuya diferencia sea 100 y cuyo producto sea un mínimo.

3. Encuentre dos números positivos cuyo producto sea 100 y cuya suma sea un mínimo.

4. Halle un número positivo tal que la suma del número y su recíproco sean lo más pequeños posible.

5. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 100 m cuya área sea lo más grande posible.

6. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un área de 1000 m^2 cuyo perímetro sea lo más pequeño posible.

7. Un modelo aplicado para el rendimiento Y de un cultivo agrícola como una función del nivel de nitrógeno N en el suelo (que se mide en unidades apropiadas) es

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

donde k es una constante positiva. ¿Qué nivel de nitrógeneo proporciona el mejor rendimiento?

8. La cantidad (en mg de carbón/m^3/h) en que se lleva a cabo la fotosíntesis de un especie de fitoplancton se diseña mediante la función

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

donde I es la intensidad de luz (que se mide en millares de bujía-pie). ¿Para qué intensidad de luz P es máxima?

9. Considere el problema siguiente: un granjero que dispone de 750 pies de cerca desea cercar un área rectangular y luego dividirla en cuatro corrales con un cercado paralelo a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área total más grande posible de los cuatro corrales?
(a) Dibuje varios diagramas que ilustren la situación, algunos con corrales poco profundos y anchos y algunos con corrales profundos y estrechos. Halle el área total de estas configuraciones. ¿Parece existir un área máxima? De ser así, estímela.
(b) Dibuje un diagrama que ilustre la situación en general. Introduzca notaciones e identifique el diagrama con sus símbolos.
(c) Escriba una expresión para el área total.
(d) Use la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
(e) Utilice el inciso (d) para escribir el área total como función de una variable.
(f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con la estimación que hizo en el inciso (a).

10. Considere el problema que se enuncia enseguida: se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene 3 pies de ancho, al recortar un cuadrado de cada una de las cuatro esquinas y doblar los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener una caja semejante.
(a) Dibuje varios diagramas para ilustrar la situación; algunas cajas cortas con bases grandes y otras con bases pequeñas. Encuentre el volumen de varias de esas cajas. ¿Parece que existe un volumen máximo? Si es así, estímelo.
(b) Dibuje un diagrama en que ilustre la situación general. Introduzca la notación y marque el diagrama con sus símbolos.
(c) Escriba una expresión para el volumen.
(d) Use la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
(e) Utilice el inciso (d) para escribir el volumen como función de una variable.
(f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con la estimación que hizo en el inciso (a).

11. Un granjero quiere cercar un área de 1.5 millones de pies cuadrados de un campo rectangular, y luego dividirla a la mitad mediante una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿De qué manera debe hacerlo para que los costos de la cerca sean mínimos?

12. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

13. Si se cuenta con 1 200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

14. Un recipiente rectangular de almacenaje con la parte superior abierta debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado. El material para los costados, \$6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales para tener el más barato de esos recipientes.

15. Resuelva el ejercicio 14 suponiendo que el recipiente tiene una tapa que se fabrica del mismo material que los lados.

16. (a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el perímetro menor es un cuadrado.
(b) Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene el área máxima es un cuadrado.

17. Encuentre el punto en la recta $y = 4x + 7$ que está más cerca al origen.

18. Determine el punto en la recta $6x + y = 9$ que está más cerca al punto $(-3, 1)$.

19. Halle los puntos sobre la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que se encuentran más lejos del punto $(1, 0)$.

20. Encuentre las coordenadas del punto sobre la curva $y = \tan x$ que esté más cerca al punto (1, 1) con una aproximación de 2 dígitos decimales.

21. Determine las dimensiones del rectángulo con el área más grande que se puede inscribir en un círculo de radio r.

22. Encuentre el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

23. Halle las dimensiones del rectángulo de área más grande que se pueda inscribir en un triángulo equilátero de lado L si un lado del rectángulo se encuentra en la base del triángulo.

24. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área más grande que tenga su base sobre el eje x y sus otros dos vértices por arriba del eje x sobre la parábola $y = 8 - x^2$.

25. Calcule las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que se puede inscribir en el círculo de radio r.

26. Calcule el área del rectángulo más grande que se puede inscribir en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 cm, si dos lados del rectángulo coinciden con los catetos.

27. Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio r. Encuentre el volumen más grande posible de ese cilindro.

28. Se inscribe un cilindro circular recto en un cono con una altura h y radio de la base r. Halle el volumen más grande posible de semejante cilindro.

29. Un cilindro circular recto está inscrito en una esfera de radio r. Determine el área superficial más grande posible de dicho cilindro.

30. Una ventana normanda tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo. (Por esto, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Véase el ejercicio 56 de la página 23.) Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que entre la cantidad más grande de luz.

31. Los márgenes superior e inferior de un *poster* miden 6 cm, y los márgenes laterales miden 4 cm. Si el área impresa del *poster* se fija en 384 cm^2, determine las dimensiones del *poster* cuya área sea la mínima.

32. El área de un *poster* tiene que ser de 180 pulg^2, y los márgenes laterales e inferior deben medir 1 pulg y el margen superior debe ser de 2 pulg. ¿Qué dimensiones darán el área impresa máxima?

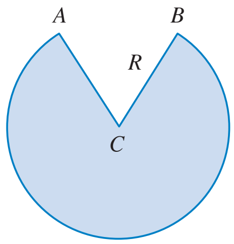
33. Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total encerrada sea (a) máxima, y (b) mínima.

34. Resuelva el ejercicio 33 si un trozo se dobla para formar un cuadrado y el otro forma un círculo.

35. Se fabrica una lata cilíndrica sin tapa de tal modo que contenga V cm^3 de líquido. Calcule las dimensiones que minimizarán el costo del metal para hacer la lata.

36. Una cerca de 8 pies de altura corre paralela a un edificio alto, a una distancia de 4 pies de este último. ¿Cuál es la longitud de la escalera más corta que llegará desde el suelo pasando por encima de la cerca, hasta la pared del edificio?

37. Se elabora un cono para beber a partir de un trozo circular de papel de radio R, al recortar un sector y unir los bordes CA y CB. Encuentre la capacidad máxima del cono.



38. Se va a fabricar un cono de papel para beber que debe contener 27 cm^3 de agua. Encuentre la altura y el radio del cono que usará la menor cantidad de papel.

39. Se inscribe un cono con altura h dentro de un cono más grande con altura H de modo que su vértice se encuentra en el centro de la base del cono más grande. Demuestre que el cono interno tiene un volumen máximo cuando $h = \frac{1}{3}H$.

40. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de una superficie horizontal mediante una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda unida al objeto. Si la cuerda hace un ángulo θ con un plano, en tal caso la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada el coeficiente de fricción. ¿Para que valor de θ, F es la más pequeña?

41. Si un resistor de R ohms se conecta a los bornes de una batería de E volts con resistencia interna r, en tal caso la potencia (en watts) en el resistor externo es

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$$

Si E y r son constantes pero R varía, ¿cuál es el valor máximo de la potencia?

42. Para un pez que nada con una rapidez v con relación al agua, el consumo de energía por unidad de tiempo es proporcional a v^3. Se cree que el pez migratorio trata de minimizar la energía total requerida para nadar una distancia fija. Si nada contra una corriente $u(u < v)$, el tiempo requerido para nadar una distancia L es $L/(v - u)$ y la energía total E necesaria para nadar la distancia se expresa por medio de

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

donde a es la constante de proporcionalidad.

(a) Determine el valor de v que minimice E.

(b) Dibuje la gráfica de E.

Nota: Este resultado se ha comprobado de manera experimental; el pez migratorio nada contra corriente con una rapidez 50% mayor que la rapidez de esa corriente.

43. En una colmena cada celda es un prisma hexagonal regular, abierto en uno de sus extremos y con un ángulo triedro en el otro como en la figura. Se cree que las abejas forman sus celdas de manera que se minimice el área superficial para un volumen dado, usando de esta forma la menor cantidad de cera en la construcción de las mismas. El examen de estas celdas ha hecho ver que la medida del ángulo θ es sorprendentemente coherente. Con base en la geometría de la celda, se puede demostrar que el área superficial S se expresa con

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \cot\theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right)\csc\theta$$

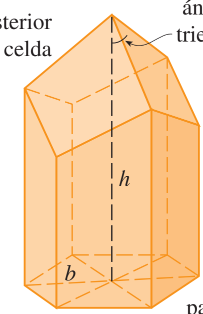
donde s, la longitud de los lados del hexágono, y h la altura, son constantes.

(a) Calcule $dS/d\theta$.

(b) ¿Cuál ángulo deben preferir las abejas?

(c) Determine el área superficial mínima de la celda (en términos de s y h).

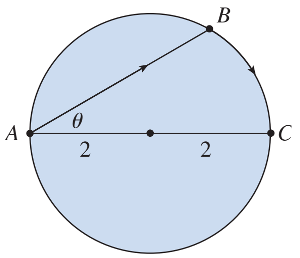
Nota: Se han hecho medidas reales del ángulo θ en las colmenas y las medidas de estos ángulos rara vez difieren del valor calculado más de 2°.



44. Un barco sale de un muelle a las 2:00 P.M. y viaja con rumbo al sur con una rapidez de 20 km/h. Otro buque ha estado navegando con rumbo al este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 3:00 P.M. ¿A qué hora estuvieron más cerca entre sí los dos navíos?

45. Resuelva el problema del ejemplo 4 si el río mide 5 km de anchura y el punto B está a sólo 5 km corriente abajo de A.

46. Una mujer que se encuentra en un punto A sobre la playa de un lago circular con radio de 2 mi desea llegar al punto C, opuesto al A sobre el otro lado del lago, en el tiempo más corto posible. Puede caminar a razón de 4 mi/h y remar en un bote a 2 mi/h. ¿En qué ángulo en relación con el diámetro debe remar?



47. Una refinería se localiza al norte de la orilla de un río recto que es de 2 km de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería hasta un tanque de almacenamiento que se localiza al sur de la orilla del río 6 km al este de la refinería. El costo de instalación de la tubería es 400 000 dólares/km en tierra hasta el punto P al norte de la orilla y 800 000 dólares/km bajo el río hasta el tanque. Con la finalidad de minimizar el costo de la tubería, ¿dónde se localiza P?

48. Considere que la refinería en el ejercicio 47 se localiza a 1 km al norte del río. ¿Dónde se localiza P?

49. La iluminación de un objeto por una fuente luminosa es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a esa fuente. Si se colocan dos fuentes luminosas, una tres veces más fuerte que la otra, separadas una distancia de 10 pies, ¿dónde debe colocarse un objeto sobre la recta entre las dos fuentes de modo que reciba la iluminación mínima?

50. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 5) que elimine el área mínima del primer cuadrante.

51. Sean a y b números positivos. Encuentre la longitud más corta del segmento rectilíneo que sea cortado por el primer cuadrante y pase por el punto (a, b).

52. ¿En qué puntos de la curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ la recta tangente tiene la pendiente más grande?

53. (a) Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de una mercancía, en tal caso el **costo promedio** por cada unidad es $c(x) = C(x)/x$. Demueste que si el costo promedio es un mínimo, en tal caso el costo marginal es igual al costo promedio.

(b) Si $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, en dólares, hallar (i) el costo, costo promedio, y costo marginal en un nivel de producción de 1 000 unidades; (ii) el nivel de producción que minimizará el costo promedio; y (iii) el costo promedio mínimo.

54. (a) Demuestre que si la utilidad $P(x)$ es un máximo, por lo tanto el ingreso marginal es igual al costo marginal.

(b) Si $C(x) = 16\,000 + 500x - 1.6\,x^2 + 0.004x^3$ es la función costo y $p(x) = 1700 - 7x$ es la función demanda, hallar el nivel de producción que maximice la utilidad.

55. Un equipo de béisbol juega en un estadio con una capacidad de 55 000 espectadores. Con precios de los boletos en \$10, la asistencia promedio fue de 27 000 espectadores. Cuando el precio bajó hasta \$8, la asistencia promedio subió hasta 33 000.

(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.

(b) ¿A qué precio deben fijarse los boletos para maximizar el ingreso?

56. Durante los meses de verano, Andrés hace y vende collares en la playa. El verano anterior los vendió a \$10 cada uno y sus ventas promediaron 20 unidades por día. Cuando aumentó el precio \$1, encontró que perdió dos ventas diarias.

(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.

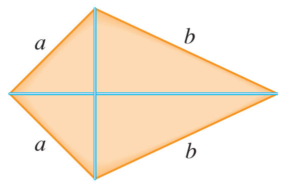
(b) Si el material para cada collar le cuesta \$6 a Andrés, ¿cuál debe ser el precio de venta para que maximice su utilidad?

57. Un fabricante ha vendido 100 aparatos de televisión por semana a \$450 cada uno. Una investigación de mercado indica que por cada \$10 de descuento que ofrezca, el número de aparatos se incrementará en 1 000 por semana.
(a) Encuentre la función de demanda.
(b) ¿Cuán grande debe ser el descuento que ofrezca la compañía para maximizar su ingreso?
(c) Si la función de costo semanal es $C(x) = 68\,000 + 150x$, ¿cuál tiene que ser la magnitud del descuento para maximizar la utilidad?

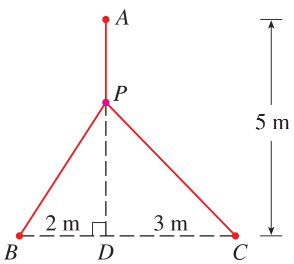
58. Por experiencia, el gerente de un complejo de apartamentos de 100 unidades sabe que se ocuparán todas si la renta es de \$800 al mes. Una investigación del mercado sugiere que, en promedio, quedará una unidad vacía por cada incremento de \$10 en la renta. ¿Cuánto debe cobrar el gerente por renta para maximizar el ingreso?

59. Demuestre que de todos los triángulos isósceles con un perímetro dado el que posee el área más grande es equilátero.

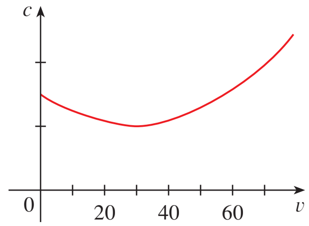
CAS **60.** Se va a construir el armazón de una cometa a partir de seis trozos de madera. Se han cortado los cuatro trozos exteriores con las longitudes que se indican en la figura. Para maximizar el área de la cometa, ¿qué longitud deben tener los trozos diagonales?



61. Un punto P necesita ser ubicado en algún lugar de la recta AD de modo que la longitud total L de cables que unen P con los puntos A, B y C sea mínima (véase figura). Exprese L en función de $x = |AP|$ y mediante las gráficas de L y dL/dx para estimar el valor mínimo.



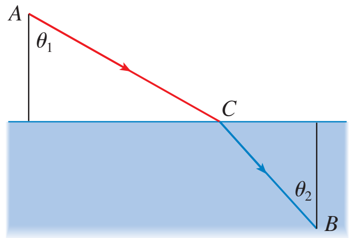
62. En la gráfica se muestra el consumo c de combustible de un automóvil (medido en galones por hora) como función de la rapidez v del mismo. Con rapidez muy bajas, el motor funciona de manera ineficiente; de modo que, inicialmente, c decrece a medida que la rapidez aumenta. Pero con rapidez, se incrementa el consumo de combustible. Usted puede ver que para este automóvil, $c(v)$ se minimiza cuando $v \approx 30$ mi/h. Sin embargo, para lograr la eficiencia respecto al combustible, lo que debe minimizarse no es el consumo de galones por hora sino de galones *por milla*. Denote este consumo con G. Use la gráfica para estimar la rapidez la cual G tiene el valor mínimo.



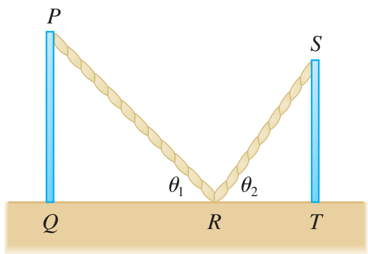
63. Sean v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua. Según el principio de Fermat, un rayo de luz viaja de un punto A en el aire a un punto B en el agua por una trayectoria ACB que minimiza el tiempo para hacer el recorrido. Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

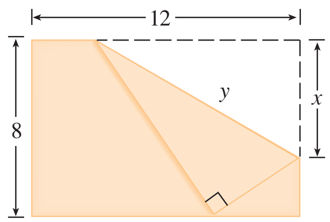
donde θ_1 (el ángulo de incidencia) y θ_2 (el ángulo de refracción) son como se muestra en la figura. Esta ecuación se conoce como ley de Snell.



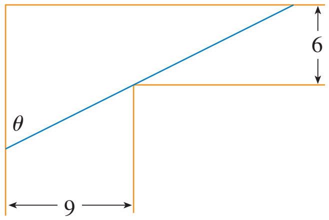
64. Dos postes verticales, PQ y ST, se aseguran por medio de un cable PRS extendido desde el extremo superior del primer poste hasta un punto R sobre el piso y, a continuación, hasta el extremo superior del segundo poste, como se ve en la figura. Demuestre que se tiene la longitud más corta de ese cable cuando $\theta_1 = \theta_2$



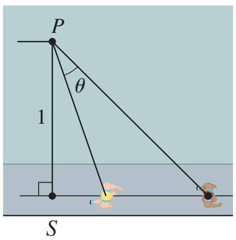
65. Se dobla la esquina superior izquierda de un trozo de papel de 8 pulgadas de ancho por 12 pulgadas de largo para llevarla hasta el borde de la derecha, como en la figura. ¿Cómo la doblaría de modo que se minimice la longitud del doblez? En otras palabras, ¿cómo elegiría x para minimizar y?



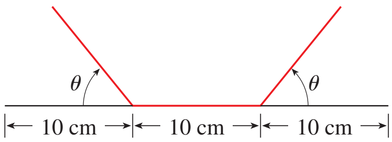
66. Se está transportando un tubo de acero por un pasillo de 9 pies de ancho. Al final de éste existe una vuelta a ángulo recto hacia otro pasillo más angosto de 6 pies de ancho. ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que se puede hacer pasar horizontalmente por la esquina?



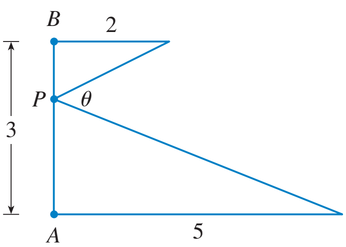
67. Un observador está de pie en el punto P, una unidad alejado de la pista. Dos corredores parten del punto S en la figura y corren a lo largo de la pista. Un corredor corre tres veces más rápido que el otro. Determine el valor máximo del ángulo de visión θ del observador entre los corredores. [*Sugerencia*: maximice tan θ.]



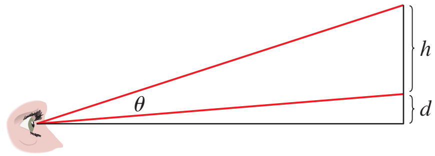
68. Se va a construir un canal para el agua de lluvia a partir de una lámina de metal de 30 cm de ancho doblando hacia arriba una tercera parte de la lámina en cada lado a través de un ángulo θ. ¿Cómo debe elegirse θ de manera que el canal conduzca la mayor cantidad de agua?



69. ¿Dónde debe elegirse el punto P sobre el segmento rectilíneo AB de modo que se maximice el ángulo θ?



70. En una galería de arte, una pintura tiene la altura h y está colgada de modo que su borde inferior queda a una distancia d arriba del ojo del observador (como se muestra en la figura). ¿Qué tan lejos de la pared debe pararse un observador para tener la mejor vista? (En otras palabras ¿dónde debe situarse el observador a fin de que se maximice el ángulo θ subtendido en su ojo por la pintura?

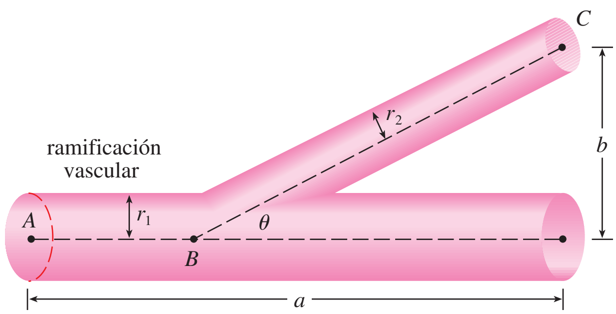


71. Halle el área máxima de un rectángulo que pueda circunscribirse con respecto a un rectángulo dado con longitud L y ancho W. [*Sugerencia:* Exprese el área como una función de un ángulo θ.]

72. El sistema vascular consta de vasos (arterias, arteriolas, capilares y venas) que llevan la sangre desde el corazón hasta los órganos y de regreso a aquél. Este sistema tiene que trabajar de manera que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre. En particular, esta energía se reduce cuando se baja la resistencia de la sangre. Una de las leyes de Poiseuille da la resistencia R de la sangre como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

donde L es la longitud del vaso sanguíneo, r es el radio y C es una constante positiva determinada por la viscosidad de la sangre. (Poiseuille estableció esta ley a nivel experimental, pero también se deduce a partir de la ecuación 2 de la sección 8.4.2.) En la figura se muestra un vaso sanguíneo principal con radio r_1, el cual se ramifica formando un ángulo θ hacia un vaso más pequeño, con radio r_2.



(a) Aplique la ley de Poiseuille para demostrar que la resistencia total de la sangre a lo largo de la trayectoria en ABC es

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

donde a y b son las distancias que se ven en la figura.

(b) Pruebe que esta resistencia se minimiza cuando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Encuentre el ángulo óptimo de ramificación (correcto hasta el grado más cercano) cuando el radio del vaso sanguíneo menor es dos tercios el radio del mayor.

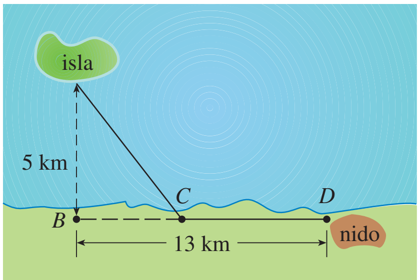
73. Los ornitólogos han determinado que algunas especies de pájaros tienden a evitar vuelos sobre grandes masas de agua durante las horas diurnas. Se cree que se requiere más energía para volar sobre al agua que sobre la tierra porque, en general, el aire se eleva sobre la tierra y cae sobre el agua durante el día. Se libera un pájaro con estas tendencias desde una isla que está a 5 km del punto más cercano B de una costa recta, vuela hasta un punto C de la costa y luego a lo largo de ésta hasta la zona D en que se encuentra su nido. Suponga que el pájaro busca de manera instintiva una trayectoria que minimice su consumo de energía. Los puntos B y D están separados 13 km.

(a) En general, si consume 1.4 veces más energía para volar sobre el agua que sobre la tierra, ¿hasta cuál punto C debe volar el pájaro para minimizar el consumo total de energía de regreso a la zona donde está su nido?

(b) Denote con W y L la energía (en joules) por kilómetro volado sobre el agua y sobre la tierra, respectivamente. ¿Qué significaría un valor grande de la proporción W/L en términos del vuelo del pájaro? ¿Qué significado tendría un valor pequeño? Determine la proporción W/L correspondiente al consumo mínimo de energía.

(c) ¿Cuál debe ser el valor de W/L para que el ave vuele directamente hasta la zona D donde está su nido? ¿Cuál tiene que ser el valor de W/L para que vuele hasta B y, a continuación, a lo largo de la costa hasta D?

(d) Si los ornitólogos observan que los pájaros de ciertas especies alcanzan la costa en un punto a 4 km de B, ¿cuántas veces más energía consume un ave para volar sobre el agua que sobre la tierra?



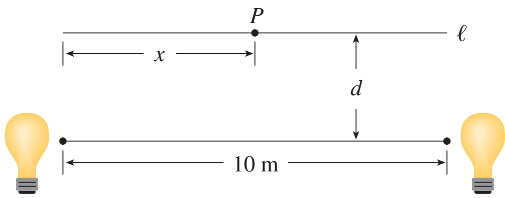
74. Se colocan dos fuentes luminosas de intensidad idéntica separadas 10 m. Un objeto está en un punto P, sobre una recta ℓ paralela a la recta que une las fuentes luminosas y a una distancia de d metros de esta línea (véase la figura). Desea localizar P sobre ℓ de manera que se minimice la intensidad de la iluminación. Necesita aplicar el hecho de que la intensidad de la iluminación de una sola fuente es directamente proporcional a la intensidad de ésta e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a ella.

(a) Encuentre una expresión para la intensidad $I(x)$ en el punto P.

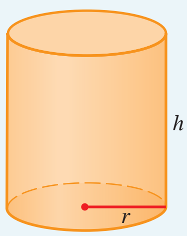
(b) Si $d = 5$ m, use las gráficas de $I(x)$ e $I'(x)$ para demostrar que la intensidad se minimiza cuando $x = 5$ m, es decir, cuando P está en el punto medio de ℓ.

(c) Si $d = 10$ m, demuestre que la intensidad (quizás de modo sorprendente) no se minimiza en el punto medio.

(d) En algún lugar entre $d = 5$ m y $d = 10$ m se tiene un valor de transición de d en el cual el punto de iluminación mínima cambia de manera abrupta. Estime este valor de d mediante métodos gráficos. Enseguida, encuentre el valor exacto de d.



PROYECTO DE APLICACIÓN LA FORMA DE UNA LATA

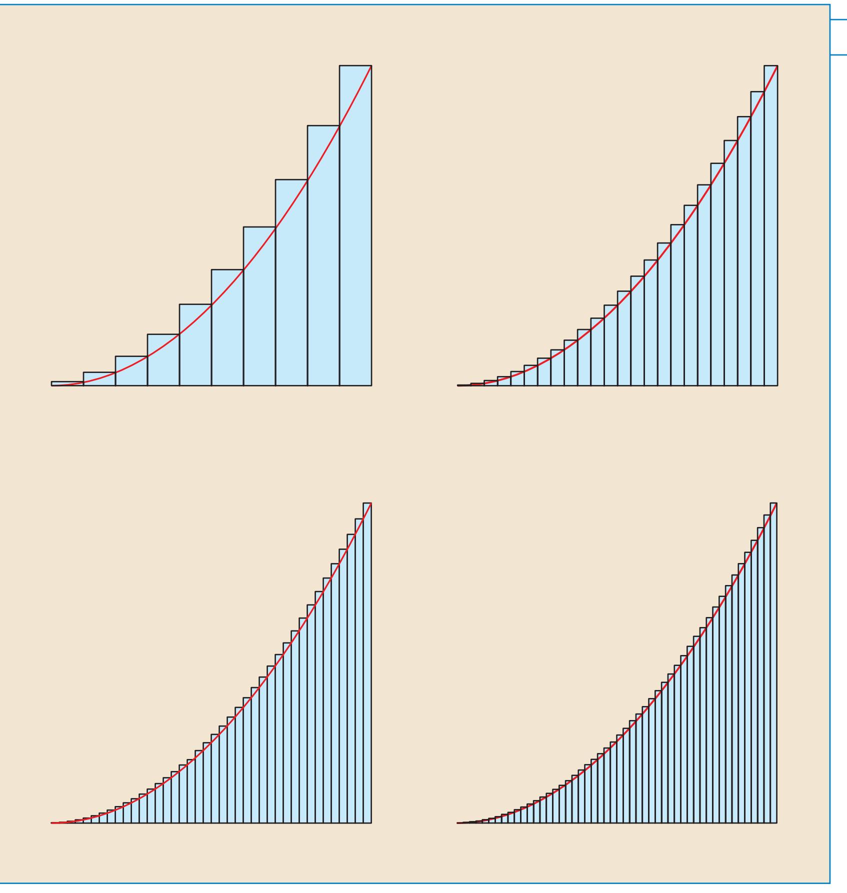


En este proyecto se investiga el modo más económico de formar una lata. En primer lugar, esto significa que se da el volumen V de una lata cilíndrica y necesita hallar la altura h y el radio r que minimice el costo del metal para fabricarla (véase la figura). Si hace caso omiso de cualquier desecho de metal en el proceso de fabricación, el problema es minimizar el área superficial del cilindro. En el ejemplo 2 de la sección 4.7, resolvió este problema y halló que $h = 2r$; es decir, la altura debe ser igual al diámetro. Pero si usted va a su alacena o al supermercado con una regla, descubrirá que la altura suele ser mayor que el diámetro y que la relación h/r varía desde 2 hasta alrededor de 3.8. Vea si puede explicar este fenómeno.

1. El material para las latas se corta de láminas metálicas. Los costados cilíndricos se forman al doblar rectángulos; estos rectángulos se cortan de la hoja con poco o ningún desperdicio. Pero

5

INTEGRALES



Para calcular un área aproxime una región mediante una gran cantidad de rectángulos. El área exacta es el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos.

En el capítulo 2 utilizó los problemas de la tangente y de la velocidad para introducir la derivada, la cual constituye la idea central del cálculo diferencial. De manera muy semejante, en este capítulo se empieza con los problemas del área y de la distancia y se utilizan para formular la idea de integral definida, la cual representa el concepto básico del cálculo integral. En los capítulos 6 y 8 verá cómo usar la integral para resolver problemas referentes a volúmenes, longitudes de curvas, predicciones sobre población, gasto cardiaco, fuerzas sobre la cortina de una presa, trabajo, superávit del consumidor y béisbol, entre muchos otros.

Existe una conexión entre el cálculo integral y el cálculo diferencial. El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral con la derivada y, en este capítulo, verá que simplifica en gran parte la solución de muchos problemas.

CAS **25.** Encuentre el área exacta debajo de la curva $y = \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = b$, en donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use un sistema algebraico para computadora para evaluar la suma y calcular el límite.) En particular, ¿cuál es el área si $b = \pi/2$?

26. (a) Sea A_n el área de un polígono con n lados iguales, inscrito en un círculo con radio r. Al dividir el polígono en n triángulos congruentes con ángulo central $2\pi/n$, demuestre que

$$A_n = \tfrac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. [*Sugerencia:* use la ecuación 2 de la sección 3.4.]

5.2 LA INTEGRAL DEFINIDA

En la sección 5.1 vio que surge un límite de la forma

$$\boxed{1} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

cuando se calcula un área. También vio que aparece cuando intenta hallar la distancia recorrida por un objeto. Resulta que este tipo de límite se presenta en una amplia variedad de situaciones, incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. En los capítulos 6 y 8 verá que también surgen límites de la forma (1) al hallar longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, centros de masa, la fuerza debida a la presión del agua y el trabajo, así como otras cantidades. De modo que tienen un nombre y una notación especiales.

$\boxed{2}$ **DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA** Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Haga que $x_0\,(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n\,(= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ como los **puntos muestras** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de *f*, desde *a* hasta *b*,** es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$.

El significado exacto del límite que define a las integrales es como sigue:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \right| < \varepsilon$$

para cualquier entero $n > N$ y para cualquier selección de x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$.

NOTA 1 Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama **signo de integral**. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ se llama **integrando**, y a y b se conocen como los **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. El símbolo dx no tiene significado en sí; la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$,vista como un todo, es un símbolo único. La dx indica simplemente que la variable independiente es x. El procedimiento para calcular una integral se llama **integración**.

NOTA 2 La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, es un número; que no depende de x. De hecho, podría utilizar cualquier letra en lugar de x, sin cambiar el valor de la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

NOTA 3 La suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que se presenta en la definición 2 se llama **suma de Riemann**, en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866). De tal manera que la definición 2 menciona que la integral definida de una función integrable pueda aproximarse dentro de cualquier grado de exactitud mediante la suma de Riemann.

Sabemos que si f es positiva, entonces la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos de aproximación (véase la figura 1). Al comparar la definición 2 con la definición de área de la sección 5.1, tiene que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede interpretar como el área bajo la curva $y = f(x)$, desde a hasta b (véase la figura 2).

RIEMANN

Bernhard Riemann recibió su doctorado en Filosofía bajo la dirección del legendario Gauss, en la Universidad de Göttingen, y permaneció allí para enseñar. Gauss, quien no tenía el hábito de elogiar a otros matemáticos, habló de "la mente creativa, activa, en verdad matemática y la gloriosamente fértil originalidad" de Riemann. La definición (2) de integral se debe a Riemann. También hizo colaboraciones importantes a la teoría de funciones de una variable compleja, a la fisicomatemática, a la teoría de números y a los fundamentos de la geometría. El amplio concepto de Riemann del espacio y de la geometría resultó ser, 50 años más tarde, el apoyo correcto para la teoría general de la relatividad de Einstein. La salud de Riemann fue mala durante toda su vida y murió de tuberculosis a los 39 años.

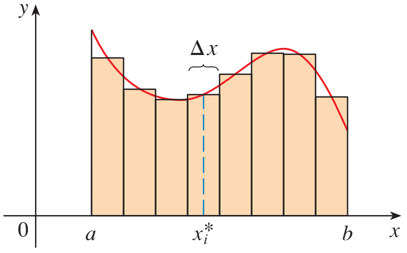


FIGURA 1
Si $f(x) \geqslant 0$, la suma de Riemann $\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos

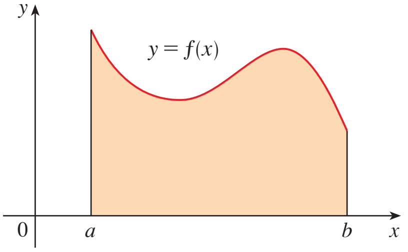


FIGURA 2
Si $f(x) \geqslant 0$, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b

Si f toma valores tanto positivos como negativos, como en la figura 3, entonces la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x y los *negativos* de las áreas de los rectángulos que están debajo del eje x (las áreas de los rectángulos en color oro *menos* las áreas de los rectángulos en color azul). Cuando toma el límite de esas sumas de Riemann, obtiene la situación que se ilustra en la figura 4. Una integral definida puede interpretarse como un área neta, es decir, una diferencia de áreas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

donde A_1 es el área de la región arriba del eje x y debajo de la gráfica de f y A_2 corresponde a la región debajo del eje x y arriba de la gráfica de f.

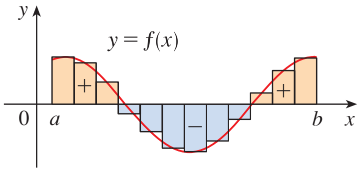


FIGURA 3
$\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ es una aproximación al área neta

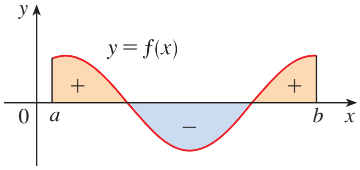


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ es el área neta

NOTA 4 Aunque ha definido $\int_a^b f(x)\,dx$ dividiendo $[a, b]$ en subintervalos del mismo ancho, hay situaciones en las que resulta ventajoso trabajar con intervalos de ancho desigual. Por ejemplo, en el ejercicio 14 de la sección 5.1, la NASA proporcionó datos de velocidad en tiempos que no estaban igualmente espaciados, pero aun así fue capaz de estimar la distancia recorrida. Y existen métodos para la integración numérica que aprovechan los subintervalos desiguales.

Si la longitud del intervalo es $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, debe asegurarse de que todas estas longitudes tiendan a 0 en el proceso de detreminación de límites. Esto sucede si la longitud más grande, máx Δx_i tiende a 0. De manera que en este caso la definición de una integral definida se convierte en

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

NOTA 5 Ha definido la integral definida para una función integrable, pero no todas las funciones son ntegrables (véase ejercicios 67-68). El teorema que sigue muestra que la mayor parte de las funciones que usualmente acontecen en realidad son integrables. Esto se comprueba en cursos más avanzados.

3 TEOREMA Si f es continua en $[a, b]$, o si f tiene únicamente un número finito de saltos discontinuos, entonces f es integrable en $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Si f es integrable en $[a, b]$, entonces el límite en la definición 2 existe y proporciona el mismo valor, no importa cómo seleccione el punto muestra x_i^*. Para simplificar los cálculos de la integral con frecuencia tomamos los puntos muestra los extremos de la derecha. Por lo tanto $x_i^* = x_i$ y la definición de una integral se simplifica como sigue.

4 TEOREMA Si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\,\Delta x$

EJEMPLO 1 Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x$$

como una integral en el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN Al comparar el límite dado con el límite en el teorema 4, será idéntico si elige $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. Puesto que $a = 0$ y $b = \pi$. Por consiguiente, mediante el teorema 4

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x)\,dx$$ □

Más adelante, cuando aplique la integral definida a situaciones físicas, será importante reconocer los límites de sumas como integrales, como en el ejemplo 1. Cuando Leibniz eligió la notación para una integral, escogió los ingredientes para recordar el proceso de tomar el límite. En general, cuando escribe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

reemplaza lím Σ con $\int$, x_i^* con x y Δx con dx.

EVALUACIÓN DE INTEGRALES

Cuando aplica la definición para evaluar una integral definida, necesita saber cómo trabajar con sumas. Las tres ecuaciones siguientes dan las fórmulas para las sumas de potencias de enteros positivos. Es posible que conozca la ecuación 5 desde un curso de álgebra. Las ecuaciones 6 y 7 se analizaron en la sección 5.1 y se prueban en el apéndice E.

5 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Las fórmulas restantes son reglas sencillas para trabajar con la notación sigma:

8 $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

9 $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

10 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

11 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

■ Las fórmulas 8 a 11 se prueban escribiendo cada uno de los miembros en forma desarrollada. El lado izquierdo de la ecuación 9 es

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

El lado derecho es

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Por la propiedad distributiva, éstas son iguales. Las otras fórmulas se analizan en el apéndice E.

EJEMPLO 2

(a) Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando los puntos muestras de los puntos extremos de la derecha y $a = 0$, $b = 3$ y $n = 6$.

(b) Evalúe $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 6$ el ancho del intervalo es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

y los puntos extremos de la derecha son $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2.5$ y $x_6 = 3.0$. De modo que la suma de Riemann es

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= f(0.5)\,\Delta x + f(1.0)\,\Delta x + f(1.5)\,\Delta x + f(2.0)\,\Delta x + f(2.5)\,\Delta x + f(3.0)\,\Delta x \\ &= \tfrac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) \\ &= -3.9375 \end{aligned}$$

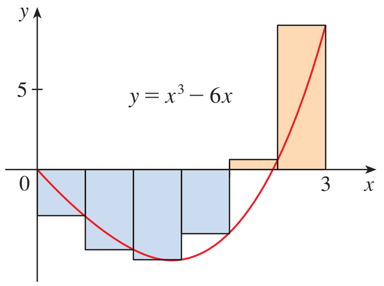


FIGURA 5

Advierta que f no es una función positiva, por lo que la suma de Riemann no representa una suma de áreas de rectángulos. Pero sí representa la suma de las áreas de los rectángulos de color oro (que están arriba del eje x) menos la suma de las áreas de los rectángulos de color azul (que están abajo del eje x) de la figura 5.

(b) Con n subintervalos, tiene

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Por consiguiente, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$, y, en general, $x_i = 3i/n$. Dado que usa los puntos extremos de la derecha, puede utilizar el teorema 4:

■ En la suma, n es una constante (diferente de i), por eso puede mover $3/n$ enfrente del signo Σ.

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(La ecuación 9 con } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right] \qquad \text{(Ecuaciones 11 y 9)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right\} \qquad \text{(Ecuaciones 7 y 5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75$$

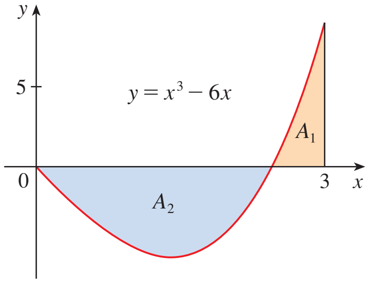


FIGURA 6
$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6.75$

Esta integral no se puede interpretar como un área porque f toma tanto valores positivos como negativos; pero puede interpretarse como la diferencia de áreas $A_1 - A_2$, donde A_1 y A_2 se muestran en la figura 6.

En la figura 7 se ilustra el cálculo al mostrar los términos positivos y negativos en la suma de Riemann R_n de la derecha, para $n = 40$. Los valores que aparecen en la tabla hacen ver que las sumas de Riemann tienden al valor exacto de la integral, -6.75, cuando $n \to \infty$.

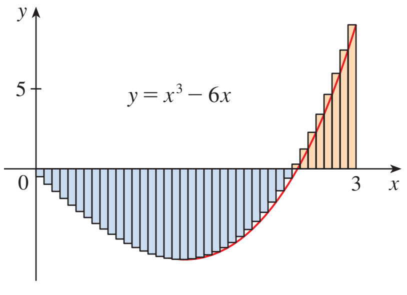


FIGURA 7
$R_{40} \approx -6.3998$

n	R_n
40	-6.3998
100	-6.6130
500	-6.7229
1000	-6.7365
5000	-6.7473

□

Ahora un método mucho más sencillo para evaluar la integral del ejemplo 2.

■ Como $f(x) = e^x$ es positiva, la integral del ejemplo 3 representa el área que se muestra en la figura 8.

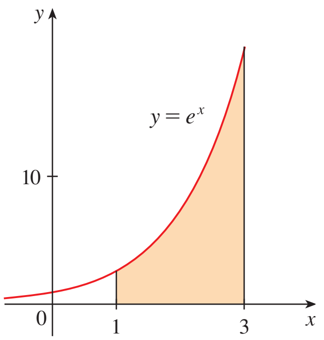


FIGURA 8

EJEMPLO 3

(a) Plantee una expresión para $\int_1^3 e^x\,dx$ como un límite de sumas.

(b) Use un sistema algebraico por computadora para evaluar la expresión.

SOLUCIÓN

(a) En este caso, tiene $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$, y

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

De modo que $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$, y

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

A partir del teorema 4, obtiene

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}\end{aligned}$$

(b) Si le pide a un sistema algebraico para computadora que evalúe la suma y simplifique, obtiene

■ Un sistema algebraico por computadora es capaz de hallar una expresión explícita para esta suma porque es una serie geométrica. El límite podría encontrarse usando la regla de l'Hospital.

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Ahora le pide al sistema algebraico por computadora que evalúe el límite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

En la siguiente sección se estudia un método más sencillo para la evolución de integrales. □

V EJEMPLO 4 Evalúe las integrales siguientes interpretando cada una en términos de áreas.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ (b) $\int_0^3 (x - 1)\,dx$

SOLUCIÓN

(a) Dado que $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, puede interpretar esta integral como el área debajo de la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ desde 0 hasta 1. Pero, como $y^2 = 1 - x^2$, obtiene $x^2 + y^2 = 1$, lo cual muestra que la gráfica de f es el cuarto de circunferencia, con radio de 1, que aparece en la figura 9. Por lo tanto,

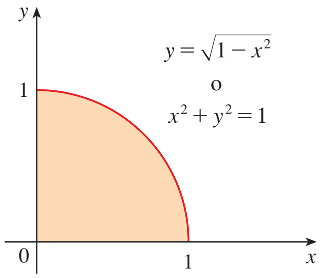


FIGURA 9

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(En la sección 7.3 usted será capaz de *demostrar* que el área de un círculo con radio r es πr^2.)

(b) La gráfica de $y = x - 1$ es la recta con pendiente 1 que se presenta en la figura 10. Calcule la integral como la diferencia de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x - 1)\,dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1.5$$

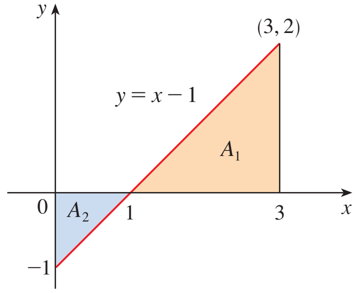


FIGURA 10

□

LA REGLA DEL PUNTO MEDIO

A menudo se elige el punto muestra x_i^* como el extremo de la derecha del i-ésimo intervalo como el punto muestra porque resulta conveniente para calcular el límite. Pero si la finalidad es hallar una *aproximación* para una integral, conviene escoger x_i^* como el punto medio del intervalo, el cual se denota con $\bar{x}_i$. Cualquier suma de Riemann es una aproximación a una integral, pero si usa los puntos medios, obtiene la aproximación siguiente:

TEC En Module 5.2/7.7 se muestra cómo la regla del punto medio mejora cuando n se incrementa.

REGLA DEL PUNTO MEDIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $\qquad \Delta x = \dfrac{b - a}{n}$

y $\qquad \bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$

V EJEMPLO 5 Use la regla del punto medio con $n = 5$ para hallar una aproximación de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Los puntos extremos de los cinco subintervalos son 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2.0. de modo que los puntos medios son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9. El ancho de los subintervalos es $\Delta x = (2 - 1)/5 = \frac{1}{5}$, de suerte que la regla del punto medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$

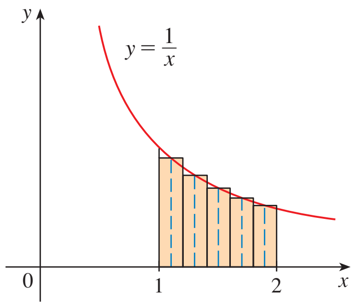


FIGURA 11

Puesto que $f(x) = 1/x > 0$, para $1 \leqslant x \leqslant 2$, la integral representa un área y la aproximación dada por la regla del punto medio es la suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura 11. □

Hasta el momento no sabe qué tan exacta es la aproximación del ejemplo 5; pero en la sección 7.7 aprenderá un método para estimar el error relacionado con el uso de la regla del punto medio. En ese momento, se exponen otros métodos para hallar aproximaciones de integrales definidas.

Si aplica la regla del punto medio a la integral del ejemplo 2, obtiene la imagen que aparece en la figura 12. La aproximación $M_{40} \approx -6.7563$ está mucho más cerca del valor verdadero de -6.75 que la aproximación con el punto extremo de la derecha, $R_{40} \approx -6.3998$, que se muestra en la figura 7.

TEC En Visual 5.2 puede comparar las aproximaciones, izquierda, derecha y del punto medio para la integral del ejemplo 2 para diferentes valores de n.

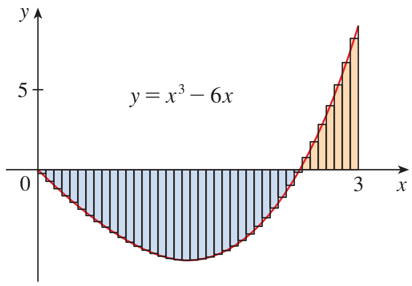


FIGURA 12
$M_{40} \approx -6.7563$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, de manera implícita se hizo la suposición de que $a < b$. Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aun cuando $a > b$. Advierta que si invierte a y b, en tal caso Δx cambia de $(b - a)/n$ a $(a - b)/n$. En consecuencia

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Si $a = b$, luego $\Delta x = 0$ y así

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

Ahora aparecen algunas propiedades básicas de las integrales que le ayudarán a evaluarlas con mayor facilidad. Suponga que f y g son funciones continuas.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, donde c es cualquier constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

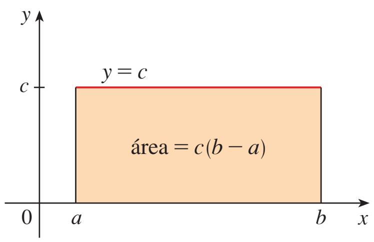


FIGURA 13
$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$

En la propiedad 1 se expresa que la integral de una función constante $f(x) = c$ es la constante multiplicada por la longitud del intervalo. Si $c > 0$ y $a < b$, esto es de esperarse porque $c(b - a)$ es el área del rectángulo de la figura 13.

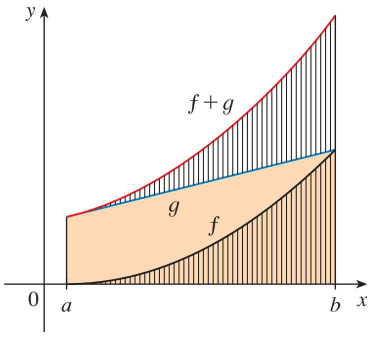


FIGURA 14

$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

En la propiedad 2 se afirma que la integral de una suma es la suma de las integrales. Para funciones positivas, esto quiere decir que el área debajo de $f + g$ es el área debajo de f más el área debajo de g. La figura 14 ayuda a comprender por qué esto es cierto: en vista de la manera en que funciona la adición gráfica, los segmentos rectilíneos verticales correspondientes tienen alturas iguales.

En general, la propiedad 2 se deduce del teorema 4 y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

■ La propiedad 3 parece intuitivamente razonable porque si se multiplica una función por un número positivo c, su gráfica se alarga o contrae en el sentido vertical un factor de c. De modo que alarga o contrae cada rectángulo de aproximación un factor de c y, por consecuencia, tiene el efecto de multiplicar el área por c.

La propiedad 3 se puede probar de manera semejante y en ella se expresa que la integral de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la integral de la función. En otras palabras, una constante (pero *sólo* una constante) se puede llevar hacia afuera de un signo de integral. La propiedad 4 se prueba al escribir $f - g = f + (-g)$ y aplicar las propiedades 2 y 3 con $c = -1$.

EJEMPLO 6 Use las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx$.

SOLUCIÓN Si se aplican las propiedades 2 y 3 de las integrales, se tiene

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

Por la propiedad 1, sabe que

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1 - 0) = 4$$

y, en el ejemplo 2 de la sección 5.1 encuentra que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. De igual manera,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx &= \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx \\ &= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 5\end{aligned}$$

□

En la propiedad que sigue se dice cómo combinar las integrales de la misma función sobre intervalos adyacentes:

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

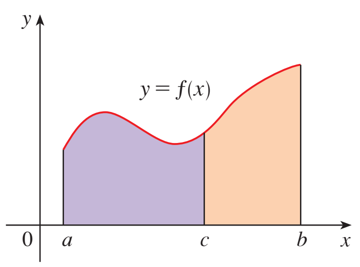


FIGURA 15

Esto no es fácil de probar en general pero, para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $a < c < b$, se puede ver la propiedad 5 a partir de la interpretación geométrica de la figura 15: el área debajo de $y = f(x)$, desde a hasta c, más el área desde c hasta b es igual al área total desde a hasta b.

EJEMPLO 7 Si se sabe que $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ y $\int_0^{8} f(x)\,dx = 12$, encuentre $\int_8^{10} f(x)\,dx$

SOLUCIÓN Por la propiedad 5

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

de modo que $\displaystyle\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$ □

Advierta que las propiedades 1 a 5 son verdaderas ya sea que $a < b$, $a = b$ o $a > b$. Las propiedades que se enuncian a continuación, en las que se comparan tamaños de funciones y tamaños de integrales, son verdaderas sólo si $a \leqslant b$.

PROPIEDADES DE COMPARACIÓN DE LA INTEGRAL

6. Si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Si $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

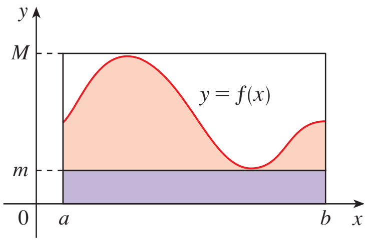


FIGURA 16

Si $f(x) \geqslant 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área debajo de la gráfica de f, de manera que la interpretación geométrica de la propiedad 6 es simplemente que las áreas son positivas. Pero se puede demostrar la propiedad a partir de la definición de una integral (ejercicio 64). La propiedad 7 expresa que una función más grande tiene una integral más grande. Se infiere de las propiedades 6 y 4 porque $f - g \geqslant 0$.

La propiedad 8 se ilustra mediante la figura 16 para el caso en que $f(x) \geqslant 0$. Si f es continua podría considerar m y M como los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre el intervalo $[a, b]$. En este caso, la propiedad 8 expresa que el área debajo de la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que el área del rectángulo con altura M.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 8 Puesto que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, la propiedad 7 plantea

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Si aplica la propiedad 1 para evaluar las integrales en el primero y el segundo miembros obtiene

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$ □

La propiedad 8 es útil si lo que quiere se reduce a una estimación general del tamaño de una integral sin las dificultades que representa el uso de la regla del punto medio.

EJEMPLO 8 Use la propiedad 8 para estimar $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Debido a que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función decreciente sobre $[0, 1]$, su valor máximo absoluto es $M = f(0) = 1$ y su valor mínimo absoluto es $m = f(1) = e^{-1}$.

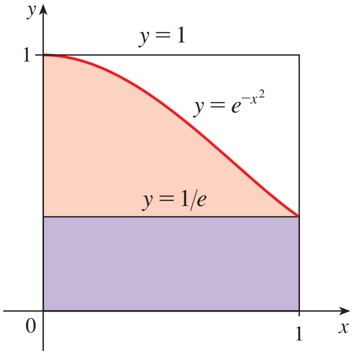


FIGURA 17

De esta manera, por la propiedad 8,

$$e^{-1}(1-0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1-0)$$

o

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Como $e^{-1} \approx 0.3679$, puede escribir

$$0.367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$ □

El resultado del ejemplo 8 se ilustra en la figura 17. La integral es mayor que el área del rectángulo inferior y menor que el área del cuadrado.

5.2 EJERCICIOS

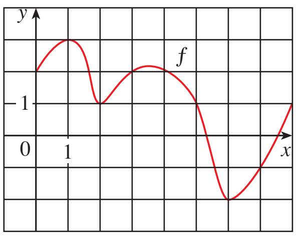
1. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $z \leqslant x \leqslant 4$, con seis subintervalos; tome los puntos extremos de la izquierda como los puntos muestra. Con ayuda de un diagrama explique, qué representa la suma de Riemann.

2. Si $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, valore la suma de Riemann con $n = 6$ tome los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra, dé su respuesta correcta hasta seis cifras decimales. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.

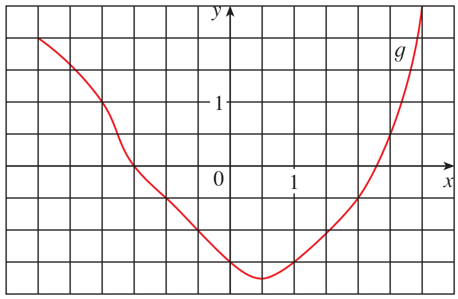
3. Si $f(x) = e^x - 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, encuentre la suma de Riemann con $n = 4$ correcta hasta seis cifras decimales, considerando los puntos medios como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

4. (a) Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, con seis términos, considerando los puntos muestra como los puntos extremos de la derecha (Dé su respuesta correcta hasta seis cifras decimales.) Explique, con ayuda de un diagrama, qué representa la suma de Riemann.
(b) Repita el inciso (a) con los puntos medios como los puntos muestra.

5. Se da la gráfica de una función. Estime $\int_0^8 f(x)\,dx$ usando cuatro subintervalos con (a) los puntos extremos de la derecha, (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios.



6. Se muestra la gráfica de g. Estime $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$ con seis subintervalos usando (a) los puntos extremos de la derecha, (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios.



7. Se muestra una tabla de valores de una función creciente f. Utilícela para hallar estimaciones inferiores y superiores para $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	-42	-37	-25	-6	15	36

8. En la tabla se dan los valores de una función obtenida a partir de un experimento. Con ellos estime $\int_0^6 f(x)\,dx$ usando tres subintervalos iguales con (a) los puntos extremos de la derecha, (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios. Si se sabe que la función es decreciente, ¿puede decir si sus estimaciones son menores o mayores que el valor exacto de la integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	-3.4	-2.1	-0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

9–12 Use la regla del punto medio, con el valor dado de n, para hallar una aproximación de cada integral. Redondee cada respuesta hasta cuatro cifras decimales.

9. $\int_2^{10} \sqrt{x^3 + 1}\, dx, \quad n = 4$

10. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx, \quad n = 4$

11. $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx, \quad n = 5$

12. $\int_1^5 x^2 e^{-x}\, dx, \quad n = 4$

CAS **13.** Si tiene un CAS que evalúe las aproximaciones con los puntos medios y trace los rectángulos correspondientes (en Maple, use los comandos de `middlesum` y `middlebox`), compruebe la respuesta para el ejercicio 11 e ilustre con una gráfica. Enseguida, repita con $n = 10$ y $n = 20$.

14. Con una calculadora programable o una computadora (vea las instrucciones para el ejercicio 7 de la sección 5.1), calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha para la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ sobre el intervalo $[0, 1]$, con $n = 100$. Explique por qué estas estimaciones demuestran que

$$0.306 < \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx < 0.315$$

Deduzca que la aproximación con el uso de la regla del punto medio, con $n = 5$, del ejercicio 11 es exacta hasta dos cifras decimales.

15. Use una calculadora o una computadora para hacer una tabla de valores de sumas de la derecha de Riemann R_n para la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$ con $n = 5$, 10, 50 y 100. ¿A qué valor parecen tender estos números?

16. Use una calculadora o una sumadora para hacer una tabla de valores de las sumas de la izquierda y de la derecha de Riemann L_n y R_n, para la integral $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ con $n = 5$, 10, 50 y 100. ¿Entre qué valores tiene que encontrarse el valor de la integral? ¿Puede hacer un enunciado similar para la integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2} dx$? Explique su respuesta.

17–20 Expese el límite como una integral definida sobre el intervalo dado.

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\,\Delta x, \quad [2, 6]$

18. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\cos x_1}{x_1}\,\Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2}\,\Delta x, \quad [1, 8]$

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5]\,\Delta x, \quad [0, 2]$

21–25 Use la forma de la definición de integral que se dio en el teorema 4 para evaluar la integral.

21. $\int_{-1}^5 (1 + 3x)\, dx$

22. $\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\, dx$

23. $\int_0^2 (2 - x^2)\, dx$

24. $\int_0^5 (1 + 2x^3)\, dx$

25. $\int_1^2 x^3\, dx$

26. (a) Halle una aproximación a la integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$ usando una suma de la derecha de Riemann con puntos extremos de la derecha y $n = 8$.
(b) Dibuje un diagrama como el de la figura 3 para ilustrar la aproximación del inciso (a).
(c) Aplique el teorema 4 para evaluar $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$.
(d) Interprete la integral del inciso (c) como una diferencia de áreas e ilustre con un diagrama como el de la figura 4.

27. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

29–30 Exprese la integral como un límite de sumas de Riemann. No evalúe el límite.

29. $\displaystyle\int_2^6 \frac{x}{1 + x^5}\, dx$

30. $\int_1^{10} (x - 4\ln x)\, dx$

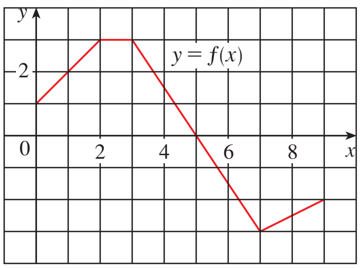
CAS **31–32** Exprese la integral como un límite de sumas. Enseguida evalúe utilizando un sistema algebraico para computadora para encontrar tanto la suma como el límite.

31. $\int_0^\pi \operatorname{sen} 5x\, dx$

32. $\int_2^{10} x^6\, dx$

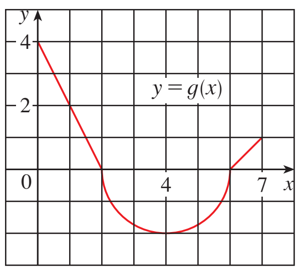
33. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

(a) $\int_0^2 f(x)\, dx$
(b) $\int_0^5 f(x)\, dx$
(c) $\int_5^7 f(x)\, dx$
(d) $\int_0^9 f(x)\, dx$



34. La gráfica de g consta de dos rectas y un semicírculo. Úsela para evaluar cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\, dx$
(b) $\int_2^6 g(x)\, dx$
(c) $\int_0^7 g(x)\, dx$



35–40 Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

35. $\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) dx$

36. $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

37. $\int_{-3}^0 \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$

38. $\int_{-1}^3 (3 - 2x)\, dx$

39. $\int_{-1}^2 |x|\, dx$

40. $\int_0^{10} |x - 5|\, dx$

41. Valorar $\int_\pi^\pi \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

42. Dado que $\int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 4}\, dx = 5\sqrt{5} - 8$, ¿cuánto es $\int_1^0 3u\sqrt{u^2 + 4}\, du$?

43. En el ejemplo 2 de la sección 5.1, demostró que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. Aplique este hecho y las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (5 - 6x^2)\, dx$.

44. Aplique las propiedades de las integrales y el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 (2e^x - 1)\, dx$.

45. Utilice el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 e^{x+2}\, dx$.

46. A partir de los resultados del ejercicio 27 y del hecho de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 1$ (según el ejercicio 25 de la sección 5.1), junto con las propiedades de las integrales, evalúe $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\, dx$.

47. Escriba como una sola integral en la forma $\int_a^b f(x)\, dx$:

$$\int_{-2}^2 f(x)\, dx + \int_2^5 f(x)\, dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx$$

48. Si $\int_1^5 f(x)\, dx = 12$ y $\int_4^5 f(x)\, dx = 3.6$, encuentre $\int_1^4 f(x)\, dx$.

49. Si $\int_0^9 f(x)\, dx = 37$ y $\int_0^9 g(x)\, dx = 16$, encuentre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\, dx$.

50. Halle $\int_0^5 f(x)\, dx$ si

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$$

51. Considere que f tiene el valor mínimo absoluto m y el valor máximo absoluto M. ¿Entre que valores se encuentra $\int_0^2 f(x)\, dx$? ¿Qué propiedad de las integrales le permite elaborar su conclusión?

52–54 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad sin evaluar las integrales.

52. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$

53. $2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$

54. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leq \dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}$

55–60 Aplique la propiedad 8 para estimar el valor de la integral.

55. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

56. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\, dx$

57. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x\, dx$

58. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\, dx$

59. $\int_0^2 xe^{-x}\, dx$

60. $\int_\pi^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\, dx$

61–62 Mediante las propiedades de las integrales, junto con los ejercicios 27 y 28, demuestre la desigualdad.

61. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\, dx \geq \dfrac{26}{3}$

62. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx \leq \dfrac{\pi^2}{8}$

63. Demuestre la propiedad 3 de las integrales.

64. Demuestre la propiedad 6 de las integrales.

65. Si f es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

[*Sugerencia:* $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.]

66. Utilice el resultado del ejercicio 65 para demostrar que

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x\, dx\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$$

67. Sea $f(x) = 0$ si x es cualquier número racional y $f(x) = 1$ si x es cualquier número irracional. Demuestre que f no es integrable en [0, 1].

68. Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = 1$ si $0 < x \leq 1$. Demuestre que f no es integrable en [0, 1]. [*Sugerencia*: demuestre que el primer término en la suma de Riemann, $f(x_i^*)\Delta x$ puede hacerse de manera arbitraria muy grande.]

69–70 Exprese el límite como una integral definida.

69. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \dfrac{i^4}{n^5}$ [*Sugerencia:* considere $f(x) = x^4$.]

70. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{1 + (i/n)^2}$

71. Determine $\int_1^2 x^{-2}\, dx$. *Sugerencia:* elija x_i^* como la media geométrica de x_{i-1} y x_i (es decir, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) y use la identidad

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

FUNCIONES DE ÁREA

1. (a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y aplique la geometría para hallar el área debajo de esta recta, arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.
(b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que se encuentra debajo de la recta $y = 2t + 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría con el fin de hallar una expresión para $A(x)$.
(c) Derive la función de área $A(x)$. ¿Qué advierte?

2. (a) Si $x \geqslant -1$, sea

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$

$A(x)$ representa el área de una región. Grafique la región.
(b) A partir de los resultados del ejercicio 28 de la sección 5.2 encuentre una expresión para $A(x)$.
(c) Determine $A'(x)$. ¿Qué se puede observar?
(d) Si $x \geqslant -1$ y h es un número positivo pequeño, por lo tanto $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y grafique la región.
(e) Dibuje un rectángulo que sea una aproximación de la región del inciso (d). Mediante la comparación de áreas de estas dos regiones demuestre que

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

(f) Mediante el inciso (e) ofrezca una explicación intuitiva del resultado del inciso (c).

3. (a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ el rentángulo de visualización $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.
(b) Si define una nueva función g por medio de

$$g(x) = \int_{0}^{x} \cos(t^2)\, dt$$

entonces $g(x)$ es el área debajo de la gráfica de f, desde 0 hasta x [hasta que $f(x)$ se vuelve negativa, en cuyo punto $g(x)$ se convierte en una diferencia de áreas]. Use el resultado del inciso (a) para determinar el valor de x en el cual $g(x)$ empieza a decrecer. [A diferencia de la integral del problema 2, es imposible evaluar la integral que define g para obtener una expresión explícita para $g(x)$.]
(c) Utilice el comando de integración de su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6)$, . . . , $g(1.8)$, $g(2)$. En seguida, con estos valores dibuje una gráfica de g.
(d) Use la gráfica de g del inciso (c) para dibujar la gráfica de g'; use la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. ¿Qué relación existe entre la gráfica de g' y la de f?

4. Suponga que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y se define una nueva función g por la ecuación

$$g(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

Tomando como base sus resultados en los problemas 1–3 deduzca una expresión para $g'(x)$.

5.3 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El primero surgió del problema de la tangente, el cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que estos dos problemas en realidad estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo da la correspondencia inversa inequívoca entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta correspondencia y la aplicaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático. En particular, ellos advirtieron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas como en las secciones 5.1 y 5.2.

La primera parte del teorema fundamental trata funciones definidas por una ecuación de la forma

$$\boxed{1} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

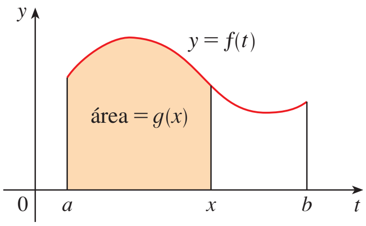


FIGURA 1

donde f es una función continua sobre $[a, b]$ y x varía entre a y b. Observe que g depende sólo de x, que aparece como el límite superior variable en la integral. Si x es un número fijo, entonces la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ es un número definido. Si después hace variar x, el número $\int_a^x f(t)\,dt$ también varía y define una función de x que se denota mediante $g(x)$.

Si f es una función positiva, entonces $g(x)$ puede interpretarse como el área debajo de la gráfica de f de a a x, donde x puede cambiar de a a b. (Considere a g como la función "el área hasta"; véase la figura 1.)

EJEMPLO 1 Si f es la función cuya gráfica se ilustra en la figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. Luego trace una gráfica aproximada de g.

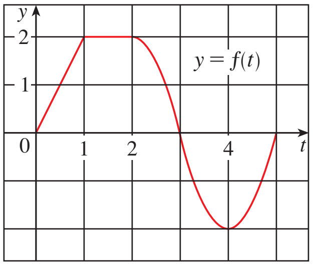


FIGURA 2

SOLUCIÓN En primer lugar observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. A partir de la figura 3 se ve que $g(1)$ es el área de un triángulo:

$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para hallar $g(2)$ le agrega a $g(1)$ el área de un rectángulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estime que el área debajo de f de 2 a 3 es alrededor de 1.3, de manera que

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1.3 = 4.3$$

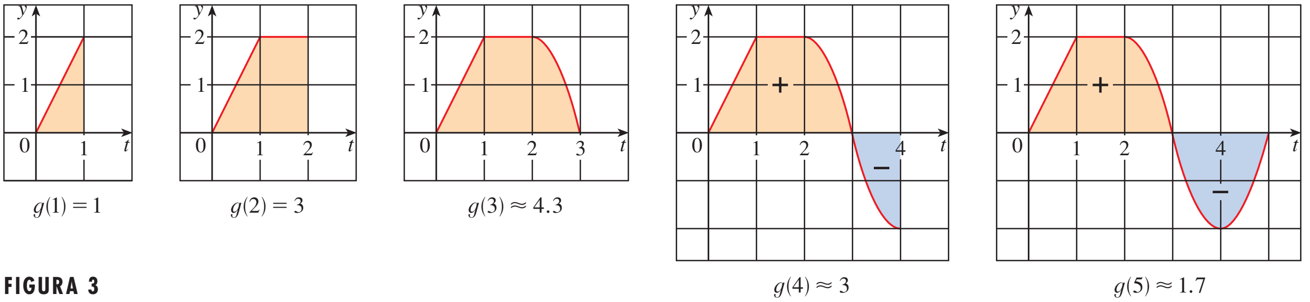


FIGURA 3

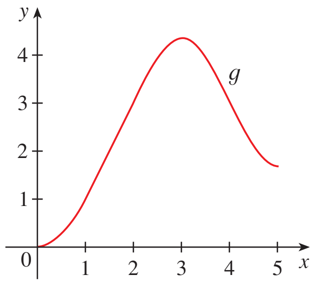


FIGURA 4
$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Para $t > 3$, $f(t)$ es negativa y por tanto empiece a restar áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

Use estos valores para trazar la gráfica de g en la figura 4. Advierta que, debido a que $f(t)$ es positiva para $t < 3$, se sigue sumando área para $t < 3$ y por lo tanto g es creciente hasta $x = 3$, donde alcanza un valor máximo. Para $x > 3$, g decrece porque $f(t)$ es negativa. □

Si hace $f(t) = t$ y $a = 0$, después, aprovechando el ejercicio 27 de la sección 5.2, tiene

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$, es decir, $g' = f$. En otras palabras, si g se define como la integral de f mediante la ecuación 1, entonces g resulta ser, cuando menos en este caso, una antiderivada de f. Y si traza la gráfica de la derivada de la función g que se ilustra en la figura 4 al estimar las pendientes de las tangentes, obtiene una gráfica como la de f en la figura 2. Por eso, sospeche que en el ejemplo 1 también $g' = f$.

Con objeto de observar por qué esto puede ser verdadero en general considere cualquier función continua f con $f(x) \geqslant 0$. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ puede interpretarse como el área debajo de la gráfica de f de a a x, como en la figura 1.

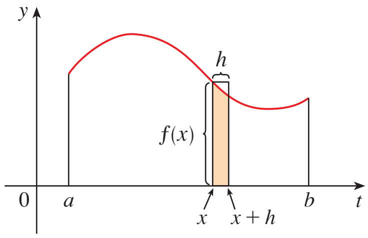


FIGURA 5

Con el fin de calcular $g'(x)$ a partir de la definición de derivada, en primer lugar observe que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ se obtiene restando áreas, por lo tanto es el área debajo de la gráfica de f de x a $x + h$ (el área sombreada de la figura 5). Para h pequeñas, a partir de la figura puede ver que esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h:

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

por eso
$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

En consecuencia, por intuición, espere que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

El hecho de que esto sea verdadero, aun cuando f no sea necesariamente positiva, es la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

■ El nombre de este teorema se abrevia como TFC1: expresa que la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior es el integrando evaluado sobre el límite superior.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 1. Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si x y $x + h$ están en (a, b), entonces

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{(por la propiedad 5)}$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

y de este modo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

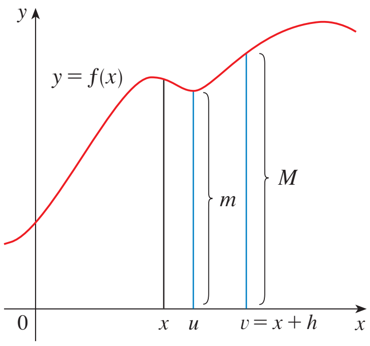


FIGURA 6

Por ahora suponga que $h > 0$. Puesto que f es continua en $[x, x + h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x + h]$ tal que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores máximo y mínimo absolutos de f en $[x, x + h]$. Véase figura 6.

De acuerdo con la propiedad 8 de las integrales, tiene

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant Mh$$

es decir,

$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)h$$

Como $h > 0$, puede dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Enseguida use la ecuación 2 para reemplazar la parte media de esta desigualdad:

$$\boxed{3} \qquad f(u) \leqslant \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

TEC En Module 5.3 se proporciona evidencia visual para TFC1.

Se puede demostrar la desigualdad 3 de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$. Véase ejercicio 67.

Ahora deje que $h \to 0$. Después $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$. Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x)$$

y

$$\lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. De acuerdo con (3) y el teorema de la compresión que

4 $$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a$ o b, entonces la ecuación 4 se puede interpretar como un límite unilateral. Entonces el teorema 2.8.4 (modificado para límites unilaterales), muestra que g es continua en $[a, b]$. □

De acuerdo con la notación de Leibniz para las derivadas, puede expresar al TFC1 como

5 $$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

cuando f es continua. En términos generales, la ecuación 5 establece que si primero integra f y luego obtiene la derivada del resultado, regresa a la función original f.

V EJEMPLO 2 Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ es continua, la parte 1 del teorema fundamental del cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$ □

EJEMPLO 3 Si bien una fórmula de la forma $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ puede parecer una forma extraña de definir una función, los libros de física, química y estadística están llenos de funciones semejantes. Por ejemplo, la **función de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$$

recibe ese nombre en honor del físico francés Augustin Fresnel (1788-1827), quien es famoso por su trabajo en la óptica. Esta función apareció por primera vez en la teoría de Fresnel de la difracción de la luz, pero a últimas fechas se ha aplicado al diseño de autopistas.

La parte 1 del teorema fundamental indica cómo derivar la función de Fresnel:

$$S'(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$$

Esto significa que puede aplicar todos los métodos del cálculo diferencial para analizar S (véase el ejercicio 61).

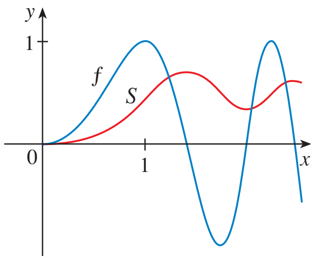


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

En la figura 7 se muestran las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$ y de la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Se usó una computadora para dibujar S por medio de calcular el valor de esta integral para muchos valores de x. Evidentemente parece que $S(x)$ es el área debajo de la gráfica de f de 0 hasta x [hasta que $x \approx 1.4$ cuando $S(x)$ se convierte en una diferencia de áreas]. La figura 8 muestra una gran parte más grande de la gráfica de S.

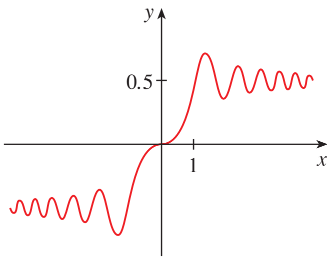


FIGURA 8
La función de Fresnel
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

Si ahora empieza por la gráfica de S de la figura 7 y piensa en qué aspecto debe tener su derivada, parece razonable que $S'(x) = f(x)$. [Por ejemplo, S es creciente cuando $f(x) > 0$ y decreciente cuando $f(x) < 0$.] De modo que esto da una confirmación visual de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo. □

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

SOLUCIÓN En este caso debe que ser cuidadoso al usar la regla de la cadena junto con FTC1. Sea $u = x^4$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\, dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\, dt \\ &= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\, dt\right]\frac{du}{dx} && \text{(por la regla de la cadena)} \\ &= \sec u\,\frac{du}{dx} && \text{(por TFC1)} \\ &= \sec(x^4)\cdot 4x^3\end{aligned}$$

□

En la sección 5.2 calculó integrales a partir de la definición como un límite de las sumas de Riemann, y vio que ese procedimiento es a veces largo y difícil. La segunda parte del teorema fundamental del cálculo, la cual se infiere con facilidad de la primera parte, representa un método mucho más simple para evaluar integrales.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$.

■ Se abrevia a este teorema mediante las siglas TFC2.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. De acuerdo con la parte 1, sabe que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f en $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$F(x) = g(x) + C \tag{6}$$

para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas en $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$, esto también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hace $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtiene

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, llega a

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) \\ &= \int_a^b f(t)\, dt\end{aligned}$$

□

La parte 2 del teorema fundamental establece que si conoce una antiderivada F de f, entonces puede evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los extremos del intervalo $[a, b]$. Sorprende mucho que $\int_a^b f(x)\,dx$, que fue definida mediante un procedimiento complicado que requiere todos los valores de $f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, se pueda determinar conociendo los valores de $F(x)$ en sólo dos puntos, a y b.

El teorema sorprende a primera vista, esto es posible cuando se le interpreta en términos físicos. Si $v(t)$ es la velocidad de un objeto y $s(t)$ es su posición en el tiempo t, entonces $v(t) = s'(t)$, y s es una antiderivada de v. En la sección 5.1 se estudia un objeto que siempre se mueve en la dirección positiva y plantea una conjetura de que el área bajo la curva de la velocidad es igual a la distancia recorrida. Si lo expresa mediante símbolos, es lo siguiente:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Eso es exactamente lo que el TFC2 establece en este contexto.

V EJEMPLO 5 Evalúe la integral $\displaystyle\int_1^3 e^x\,dx$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = e^x$ es continua en todas sus partes y sabe que una antiderivada es $F(x) = e^x$, de modo que la parte 2 del teorema fundamental da

■ Compare el cálculo en el ejemplo 5 con el mucho más difícil del ejemplo 3 de la sección 5.2.

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Observe que el TFC2 establece que puede utilizar *cualquier* antiderivada F de f. De este modo podría usar la más sencilla, a saber $F(x) = e^x$, en lugar de $e^x + 7$ o de $e^x + C$. □

A menudo se recurre a la notación

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

También la ecuación del TFC2 se puede expresar como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{donde} \qquad F' = f$$

Otras notaciones comunes son $F(x)\big|_a^b$ y $[F(x)]_a^b$.

V EJEMPLO 6 Determinar el área bajo la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta 1.

SOLUCIÓN Una antiderivada de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. El área requerida A se calcula aplicando la parte 2 del teorema fundamental:

■ Al aplicar el teorema fundamental se usa una antiderivada particular F de f. No es necesario usar la antiderivada más general.

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$ □

Si compara el cálculo del ejemplo 6 con el del ejemplo 2 de la sección 5.1, verá que el teorema fundamental proporciona un método *mucho* más corto.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUCIÓN La integral dada es una forma abreviada de

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$$

Una antiderivada de $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln|x|$ y, como $3 \leqslant x \leqslant 6$, puede escribir $F(x) = \ln x$. De tal manera,

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3$$

$$= \ln \frac{6}{3} = \ln 2$$

□

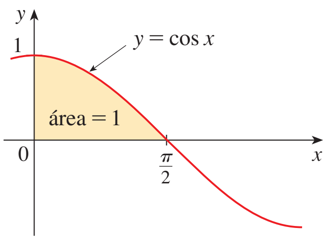


FIGURA 9

EJEMPLO 8 Calcule el área bajo la curva coseno desde 0 hasta b, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Puesto que una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$

$$A = \int_0^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

En particular, al hacer $b = \pi/2$, ha comprobado que el área bajo la curva coseno desde 0 hasta $\pi/2$ es $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Véase figura 9. □

Cuando el matemático francés Gilles de Roberval calculó por vez primera el área bajo las curvas seno y coseno en 1635, era una empresa que requería aplicar todo el ingenio del que fuera uno capaz. Si no tuviera la ventaja del teorema fundamental tendría que calcular un difícil límite de sumas mediante identidades trigonométricas rebuscadas (oscuras), o bien, un sistema algebraico computacional como en el ejercicio 25 de la sección 5.1. Fue mucho más difícil para Roberval puesto que el artificio de los límites no se había inventado aún en 1635. Pero ya después de los años de 1660 y 1670, cuando Barrow descubrió el teorema fundamental y Newton y Leibniz lo explotaron, este problema se volvió muy fácil, como lo puede ver por el ejemplo 8.

EJEMPLO 9 ¿Qué es lo erróneo en el cálculo siguiente?

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_{-1}^3 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN Para empezar, observe que este cálculo es erróneo porque la respuesta es negativa, pero $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ y la propiedad 6 de las integrales establecen que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ cuando $f \geqslant 0$. El teorema fundamental del cálculo se aplica en las funciones continuas. En este caso no se puede aplicar porque $f(x) = 1/x^2$ no es continua en $[-1, 3]$. En efecto, f tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, de modo que

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{no existe.}$$

□

LA DERIVACIÓN Y LA INTEGRACIÓN COMO PROCESOS INVERSOS

Esta sección finaliza conjuntando las dos partes del teorema fundamental.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Suponga que f es continua sobre $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$

La parte 1 se puede volver a escribir como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

en la cual se afirma que si integra f y, a continuación, deriva el resultado, regresa a la función original f. Como $F'(x) = f(x)$, la parte 2 puede reescribirse así

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

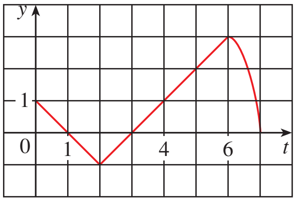
En esta versión se afirma que si toma una función F, la deriva y luego integra el resultado, vuelve a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el teorema más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio podía afrontar el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz desarrollaron como el teorema fundamental, en los próximos capítulos verá que estos estimulantes problemas son accesibles para todos.

5.3 EJERCICIOS

1. Explique con exactitud qué se quiere decir con la proposición de que "la derivación y la integración son procesos inversos".

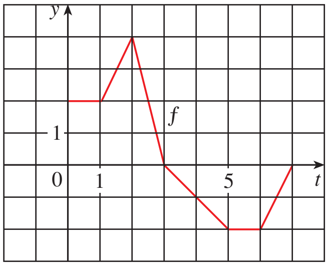
2. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.



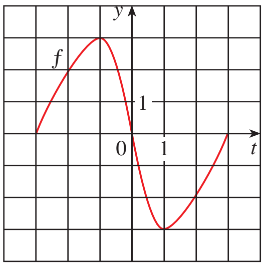
(a) Evalúe $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) ¿Dónde tiene un valor máximo g? ¿Dónde tiene un valor mínimo?
(d) Trace una gráfica aproximada de g.

3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ y $g(6)$.
(b) ¿En qué intervalo es creciente g?

(c) ¿Dónde tiene un valor máximo g?
(d) Trace una gráfica aproximada de g?



4. Sea $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(-3)$ y $g(3)$.
(b) Estime $g(-2)$, $g(-1)$ y $g(0)$.
(c) ¿En qué intervalo es creciente g?
(d) ¿Dónde tiene un valor máximo g?
(e) Trace una gráfica aproximada de g.
(f) Utilice la gráfica del inciso (e) para trazar la gráfica de $g'(x)$. Compárela con la gráfica de f.



5–6 Trace el área representada por $g(x)$. A continuación halle $g'(x)$ de dos maneras: (a) aplicando la parte 1 del teorema fundamental y (b) evaluando la integral utilizando la parte 2 y después derivar.

5. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

6. $g(x) = \int_0^x (1 + \sqrt{t})\,dt$

7–18 Use la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de la función.

7. $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\,dt$

8. $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\,dt$

9. $g(y) = \int_2^y t^2 \operatorname{sen} t\,dt$

10. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\,dx$

11. $F(x) = \int_x^{\pi} \sqrt{1 + \sec t}\,dt$

$$\left[\textit{Sugerencia: } \int_x^{\pi} \sqrt{1 + \sec t}\,dt = -\int_{\pi}^{x} \sqrt{1 + \sec t}\,dt\right]$$

12. $G(x) = \int_x^1 \cos \sqrt{t}\,dt$

13. $h(x) = \int_2^{1/x} \arctan t\,dt$

14. $h(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 + r^3}\,dr$

15. $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$

16. $y = \int_1^{\cos x} (1 + v^2)^{10}\,dv$

17. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1 + u^2}\,du$

18. $y = \int_e^0 \operatorname{sen}^3 t\,dt$

19–42 Evalúe la integral.

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\,dx$

20. $\int_{-2}^{5} 6\,dx$

21. $\int_1^4 (5 - 2t + 3t^2)\,dt$

22. $\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_0^1 x^{4/5}\,dx$

24. $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

25. $\int_1^2 \frac{3}{t^4}\,dt$

26. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$

27. $\int_0^2 x(2 + x^5)\,dx$

28. $\int_0^1 (3 + x\sqrt{x})\,dx$

29. $\int_1^9 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int_0^2 (y - 1)(2y + 1)\,dy$

31. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$

32. $\int_0^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\,d\theta$

33. $\int_1^2 (1 + 2y)^2\,dy$

34. $\int_0^1 \cosh t\,dt$

35. $\int_1^9 \frac{1}{2x}\,dx$

36. $\int_0^1 10^x\,dx$

37. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt$

38. $\int_0^1 \frac{4}{t^2 + 1}\,dt$

39. $\int_{-1}^{1} e^{u+1}\,du$

40. $\int_1^2 \frac{4 + u^2}{u^3}\,du$

41. $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leqslant x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

42. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

43–46 ¿Con la ecuación, qué es incorrecto?

43. $\int_{-2}^{1} x^{-4}\,dx = \left.\frac{x^{-3}}{3}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$

44. $\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3}\,dx = -\left.\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

45. $\int_{\pi/3}^{\pi} \sec\theta \tan\theta\,d\theta = \sec\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

46. $\int_0^{\pi} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi} = 0$

47–50 Mediante una gráfica dé una estimación del área de la región que se localiza abajo de la curva dada. Después calcule el área exacta

47. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 27$

48. $y = x^{-4}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

49. $y = \operatorname{sen} x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

50. $y = \sec^2 x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

51–52 Evalúe la integral e interprétela como una diferencia de áreas. Ilustre mediante un croquis.

51. $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$

52. $\int_{\pi/4}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

53–56 Determine la derivada de la función.

53. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\, du$

$\left[\textit{Sugerencia}: \int_{2x}^{3x} f(u)\, du = \int_{2x}^{0} f(u)\, du + \int_{0}^{3x} f(u)\, du \right]$

54. $g(x) = \int_{\tan x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2 + t^4}}\, dt$

55. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t} \operatorname{sen} t\, dt$

56. $y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)\, du$

57. Si $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$, donde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1 + u^4}}{u}\, du$, halle $F''(2)$.

58. Encuentre el intervalo sobre el cual la curva

$$y = \int_0^x \frac{1}{1 + t + t^2}\, dt$$

es cóncava hacia arriba.

59. Si $f(1) = 12$, f' es continua y $\int_1^4 f'(x)\, dx = 17$, ¿cuál es el valor de $f(4)$?

60. La **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

se usa en probabilidad, estadística e ingeniería.

(a) Demuestre que $\int_a^b e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

(b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

61. La función de Fresnel S se definió en el ejemplo 3 y en las figuras 7 y 8 se trazaron sus gráficas.

(a) ¿Sobre qué valores de x tiene valores máximos locales esta función?

(b) ¿Sobre qué valores esta función es cóncava hacia arriba?

CAS (c) Utilice una gráfica para resolver la ecuación siguiente correcta hasta dos cifras decimales.

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt = 0.2$$

CAS **62.** La **función integral sinusoidal**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

es importante en la ingeniería eléctrica. [El integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ no está definido cuando $t = 0$, pero sabe que su límite es 1 cuando $t \to 0$. De modo que defina $f(0) = 1$ y esto convierte a f en una función continua en todas partes.]

(a) Dibuje la gráfica de Si.

(b) ¿En qué valores de x tiene esta función valores máximos locales?

(c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.

(d) ¿Esta función tiene asíntotas horizontales?

(e) Resuelva la ecuación siguiente correcta hasta una cifra decimal.

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 1$$

63–64 Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

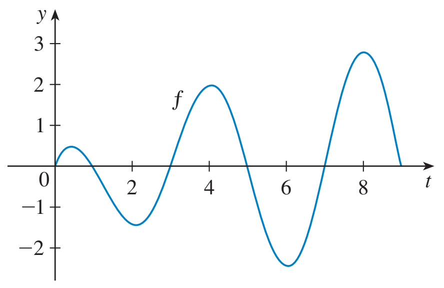
(a) ¿En qué valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g?

(b) ¿Dónde alcanza g su valor máximo absoluto?

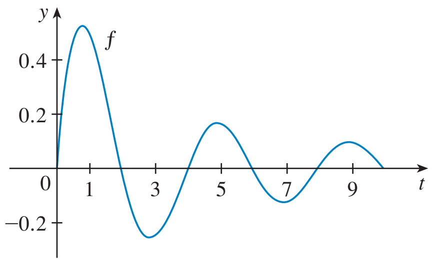
(c) ¿En qué intervalos g es cóncava hacia abajo?

(d) Trace la gráfica de g.

63.



64.



65–66 Evalúe el límite reconociendo primero la suma como una suma de Riemann para una función definida en $[0, 1]$.

61. $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

62. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$

67. Justifique (3) para el caso $h < 0$.

68. Si f es continua y g y h son funciones derivables, determine una fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

69. (a) Demuestre que $1 \leqslant \sqrt{1+x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

(b) Demuestre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 1.25$.

70. (a) Demuestre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) Deduce que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$.

71. Demostrar

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \leqslant 0.1$$

comparando el integrando a una función de lo más simple.

72. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y $$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(a) Encuentre una expresión para $g(x)$ similar a la correspondiente a $f(x)$.

(b) Trace las gráficas de f y g.

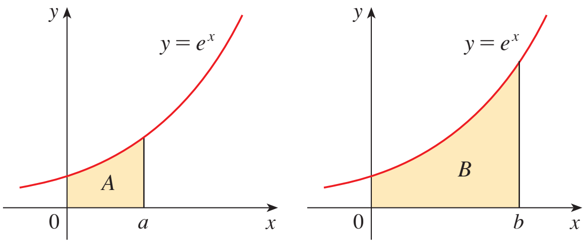
(c) ¿En dónde es derivable f? ¿Dónde es derivable g?

73. Halle una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

para toda $x > 0$.

74. El área B es tres veces el área A. Exprese b en términos de a.



75. Una empresa de fabricación tiene una pieza importante de un equipo que se deprecia a la tasa (continua) $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde que se le sometió a su más reciente reparación. Como cada vez que la máquina se somete a una reparación mayor se incurre en un costo fijo, la compañía desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre las reparaciones mayores.

(a) Explique por qué $\int_0^t f(s)\,ds$ representa la pérdida en valor de la máquina a lo largo del tiempo t a partir de la última reparación mayor.

(b) Haga que $C = C(t)$ esté dada por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

¿Qué representa C y por qué desearía la empresa minimizar C?

(c) Demuestre que C tiene un valor mínimo sobre los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

76. Una compañía de alta tecnología compra un sistema de cómputo nuevo cuyo valor inicial es V. El sistema se depreciará con una rapidez $f = f(t)$ y acumulará costos de mantenimiento en una proporción $g = g(t)$, donde t es el tiempo medido en meses. La compañía desea determinar el tiempo óptimo para reemplazar el sistema.

(a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Demuestre que los números críticos de C se presentan en los números t donde $C(t) = f(t) + g(t)$.

(b) Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

y $$g(t) = \frac{Vt^2}{12\,900} \qquad t > 0$$

Determine la duración del tiempo T para que la depreciación total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ equivalga al valor inicial V.

(c) Determine el valor mínimo absoluto de C sobre $(0, T]$.

(d) Trace las gráficas de C y $f + g$ en el mismo sistema de coordenadas y compruebe el resultado del inciso (a) en este caso.

5.4 INTEGRALES INDEFINIDAS Y EL TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL

Ya vio en la sección 5.3 que mediante la segunda parte del teorema fundamental del cálculo se obtiene un método muy eficaz para evaluar la integral definida de una función, si supone que puede encontrar una antiderivada de la función. En esta sección se presenta una notación para la antiderivada, se repasan las fórmulas de las antiderivadas y se usan para evaluar integrales definidas. Asimismo, replantea el TFC2, de una manera que facilita más aplicarlo a problemas relacionados con las ciencias y la ingeniería.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Ambas partes del teorema fundamental establecen relaciones entre antiderivadas e integrales definidas. La parte 1 establece que si f es continua, entonces $\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f. La parte 2 plantea que $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede determinar evaluando $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f.

Necesita una notación conveniente para las antiderivadas que facilite trabajar con ellas. Debido a la relación dada por el teorema fundamental entre las antiderivadas y las integrales, por tradición se usa la notación $\int f(x)\,dx$ para una antiderivada de f y se llama **integral indefinida**. Por esto,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)}$$

Por ejemplo, puede escribir

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

De este modo, considere una integral indefinida como la representante de una *familia* entera de funciones, (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

Distinga con cuidado entre las integrales definidas y las indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*, en tanto que una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* (o una familia de funciones). La relación entre ellas la proporciona la parte 2 del teorema fundamental. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\,\Big]_a^b$$

La eficacia del teorema fundamental depende de que se cuente con un suministro de antiderivadas de funciones. Por lo tanto, se presenta de nuevo la tabla de fórmulas de antiderivación de la sección 4.9, más otras cuantas, en la notación de las integrales indefinidas. Cualquiera de las fórmulas se puede comprobar al derivar la función del lado derecho y obtener el integrando. Por ejemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

1 TABLA DE INTEGRALES INDEFINIDAS

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

De acuerdo con el teorema 4.9.1, la antiderivada más general *en un intervalo dado* se obtiene por la adición de una constante a una antiderivada particular. **Adopte la convención de que cuando se proporciona una fórmula para una integral indefinida general es válida sólo en un intervalo.** Así, escriba

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

con el entendimiento de que es válida en el intervalo $(0, \infty)$ o en el intervalo $(-\infty, 0)$. Esto se cumple a pesar del hecho de que la antiderivada general de la función $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, es

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{si } x < 0 \\[2mm] -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

■ En la figura 1 se tiene la gráfica de la integral indefinida del ejemplo 1 para varios valores de C. El valor de C es la intersección con el eje y.

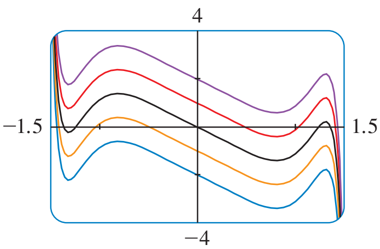


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Encuentre la integral indefinida general

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

SOLUCIÓN Si usa la convención y la tabla 1, tiene

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx = 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx$$

$$= 10\,\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C = 2x^5 - 2\tan x + C$$

Debe comprobar esta respuesta derivándola. □

V EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUCIÓN Esta integral indefinida no es evidente de inmediato en la tabla 1, por lo que se aplican las identidades trigonométricas para reescribir la función antes de integrar:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$
$$= \int \csc\theta\cot\theta\,d\theta = -\csc\theta + C$$ □

EJEMPLO 3 Calcule $\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN Al aplicar el TFC2 y la tabla 1, tiene

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2}\Bigg]_0^3$$
$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)$$
$$= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75$$

Compare este cálculo con el del ejemplo 2(b) de la sección 5.2. □

■ La figura 2 es la gráfica del integrando del ejemplo 4. Sabe por la sección 5.2 que el valor de la integral se puede interpretar como la suma de las áreas marcadas con un signo más menos el área marcada con un signo menos.

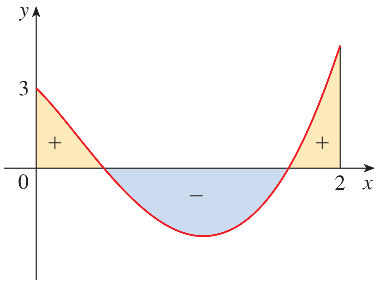


FIGURA 2

V EJEMPLO 4 Determine $\displaystyle\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ e interprete el resultado en función de áreas.

SOLUCIÓN El teorema fundamental da

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 2\,\frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x\Bigg]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0$$
$$= -4 + 3\tan^{-1}2$$

Éste es el valor exacto de la integral. Si desea una aproximación decimal, utilice una calculadora para obtener un valor aproximado de $\tan^{-1} 2$. Al hacerlo tiene

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0.67855$$ □

EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$.

SOLUCIÓN En primer lugar, necesita escribir el integrando en una forma más sencilla, al llevar a cabo la división:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$
$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Bigg]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Bigg]_1^9$$
$$= \left[2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}(9)^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right] - \left(2\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$
$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$

APLICACIONES

La parte 2 del teorema fundamental establece que si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f. Esto significa que $F' = f$, de forma que se puede volver a escribir la ecuación como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabe que $F'(x)$ representa la relación de cambio de $y = F(x)$ con respecto a x y $F(b) - F(a)$ es el cambio en y cuando x cambia de a hacia b. [Advierta que y podría, por ejemplo, incrementarse y luego decrecer de nuevo. Si bien y podría cambiar en ambas direcciones, $F(b) - F(a)$ representa el cambio *total* en y.] De manera que puede volver a plantear verbalmente FTC2 en los términos siguientes:

TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL La integral de una relación de cambio es el cambio total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Este principio se puede aplicar a todas las relaciones de cambio en las ciencias naturales y sociales que se analizaron en la sección 3.7. Enseguida se dan unos cuantos ejemplos de esta idea:

- Si $V(t)$ es el volumen de agua en un depósito, en el instante t, entonces su derivada $V'(t)$ es la proporción a la cual fluye el agua hacia el depósito en el instante t. Por eso,

  $$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

  es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.
- Si $[\mathrm{C}](t)$ es la concentración del producto de una reacción química en el instante t, entonces la velocidad de reacción es la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$. De tal manera,

  $$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\,dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

  es el cambio en la concentración de C, desde el instante t_1 hasta el t_2.
- Si la masa de una varilla, medida desde el extremo izquierdo hasta un punto x, es $m(x)$, entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. Por consiguiente,

  $$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

  es la masa del segmento de la varilla entre $x = a$ y $x = b$.
- Si la rapidez de crecimiento de una población es dn/dt, entonces

  $$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

  es el cambio total en la población durante el periodo desde t_1 hasta t_2. (La población aumenta cuando ocurren nacimientos y disminuye cuando se suscitan muertes. El cambio total toma en cuenta tanto nacimientos como decesos.)

- Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada $C'(x)$. De esa manera

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

es el incremento en el costo cuando la producción aumenta de x_1 unidades hasta x_2 unidades.

- Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con función de posición $s(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = s'(t)$, de modo que

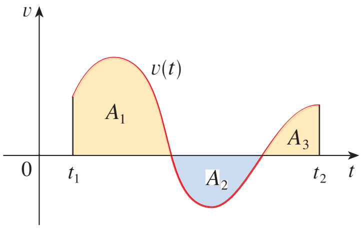
2 $$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

es el cambio de la posición, o *desplazamiento*, de la partícula durante el periodo desde t_1 hasta t_2. En la sección 5.1 se infirió que esto era verdadero para el caso en que el objeto se mueve en la dirección positiva, pero ahora ha probado que siempre es verdadero.

- Si quiere calcular la distancia recorrida durante el intervalo, tiene que considerar los intervalos cuando $v(t) \geqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la derecha) y también los intervalos cuando $v(t) \leqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la izquierda). En ambos casos la distancia se calcula al integrar $|v(t)|$, la magnitud de la rapidez. Por consiguiente

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |\,v(t)\,|\,dt = \text{distancia total recorrida}$$

En la figura 3 se muestra cómo interpretar el desplazamiento y la distancia recorrida en términos de las áreas debajo de una curva de velocidad.



desplazamiento $= \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$

distancia $= \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$

FIGURA 3

- La aceleración del objeto es $a(t) = v'(t)$, por eso

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

es el cambio en la velocidad, desde el instante t_1 hasta el t_2.

V EJEMPLO 6 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida en metros por segundo).
(a) Encuentre el desplazamiento de la partícula durante el periodo $1 \leqslant t \leqslant 4$.
(b) Halle la distancia recorrida durante este periodo.

SOLUCIÓN
(a) Por la ecuación 2, el desplazamiento es

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Esto significa que la partícula se desplaza 4.5 m hacia la izquierda.

(b) Advierta que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$ y, por eso, $v(t) \leqslant 0$ en el intervalo $[1, 3]$ y $v(t) \geqslant 0$ en $[3, 4]$. Por esto, a partir de la ecuación 3 la distancia recorrida es

■ Para integrar el valor absoluto de $v(t)$, use la propiedad 5 de las integrales de la sección 5.2 para dividir la integral en dos partes, una donde $v(t) \leqslant 0$ y otra donde $v(t) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 |v(t)|\,dt &= \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt \\ &= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 \\ &= \frac{61}{6} \approx 10.17 \text{ m}\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 7 En la figura 4 se muestra el consumo de energía eléctrica (potencia) en la ciudad de San Francisco un día del mes de septiembre (P se mide en megawatts y t en horas, a partir de la medianoche). Estime la energía que se utilizó ese día.

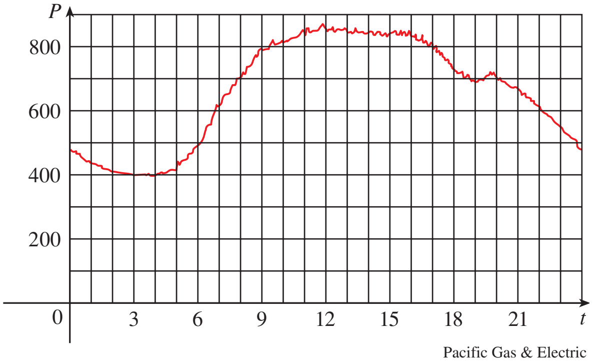


FIGURA 4

SOLUCIÓN La potencia es la relación de cambio de la energía: $P(t) = E'(t)$. De modo que, por el teorema del cambio neto,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

es la cantidad total de energía que se usó ese día. Haga una aproximación de la integral con la regla del punto de en Medio con 12 subintervalos y $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t \\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850 \\ &\qquad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2) \\ &= 15\,840\end{aligned}$$

La energía usada fue de unos 15 840 megawatt-horas. □

■ Una nota acerca de unidades.

¿Cómo sabe qué unidades usar para la energía en el ejemplo 7? La integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ se define como el límite de las sumas de términos de la forma $P(t_i^*)\,\Delta t$. Ahora bien, $P(t_i^*)$ se mide en megawatts y Δt en horas, de modo que su producto se mide en megawatt-horas. Lo mismo es verdadero para el límite. En general, la unidad de medida para $\int_a^b f(x)\,dx$ es el producto de la unidad para $f(x)$ y la unidad para x.

5.4 EJERCICIOS

1–4 Compruebe mediante derivación que la fórmula es correcta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx} + C$

5–18 Determine una integral indefinida general.

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})dx$

6. $\displaystyle\int (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2})\,dx$

7. $\displaystyle\int (x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x - 2)\,dx$

8. $\displaystyle\int (y^3 + 1.8y^2 - 2.4y)\,dy$

9. $\displaystyle\int (1-t)(2+t^2)\,dt$

10. $\displaystyle\int v(v^2+2)^2 dv$

11. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$

13. $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{senh} x)\,dx$

14. $\displaystyle\int (\csc^2 t - 2e^t)\,dt$

15. $\displaystyle\int (\theta - \csc\theta\cot\theta)\,d\theta$

16. $\displaystyle\int \sec t(\sec t + \tan t)\,dt$

17. $\displaystyle\int (1 + \tan^2\alpha)\,d\alpha$

18. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

19–20 Determine la integral indefinida general. Ilustre mediante una gráfica varios miembros de la familia en la misma pantalla.

19. $\displaystyle\int (\cos x + \tfrac{1}{2}x)\,dx$

20. $\displaystyle\int (e^x - 2x^2)\,dx$

21–44 Evalúe la integral.

21. $\displaystyle\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\,dx$

22. $\displaystyle\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x - e^x)\,dx$

24. $\displaystyle\int_{-2}^0 (u^5 - u^3 + u^2)\,du$

25. $\displaystyle\int_{-2}^2 (3u+1)^2\,du$

26. $\displaystyle\int_0^4 (2v+5)(3v-1)\,dv$

27. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)\,dt$

28. $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{2t}\,dt$

29. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(4y^3 + \frac{2}{y^3}\right)dy$

30. $\displaystyle\int_1^2 \frac{y + 5y^7}{y^3}\,dy$

31. $\displaystyle\int_0^1 x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^5 (2e^x + 4\cos x)\,dx$

33. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{5}{x}}\,dx$

34. $\displaystyle\int_1^9 \frac{3x-2}{\sqrt{x}}\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi} (4\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta)\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec\theta\tan\theta\,d\theta$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$

39. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\operatorname{senh} x + \cosh x}\,dx$

41. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{t^4-1}\,dt$

42. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{x^2}\,dx$

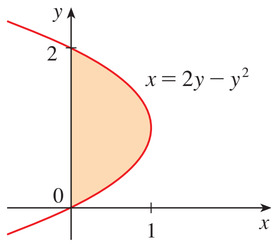
43. $\displaystyle\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\,dx$

44. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|\,dx$

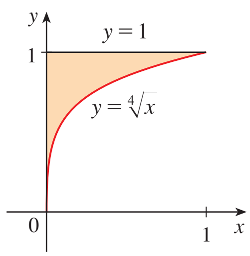
45. Use una gráfica para estimar las intersecciones con el eje x de la curva $y = x + x^2 - x^4$. Luego utilice esta información para estimar el área de la región que se encuentra debajo de la curva y arriba del eje x.

46. Repita el ejercicio 45 para la curva $y = 2x + 3x^4 - 2x^6$.

47. El área de la región que se encuentra a la derecha del eje y y a la izquierda de la parábola $x = 2y - y^2$ (el área sombreada de la figura) se expresa con la integral $\int_0^2 (2y - y^2)\,dy$. (Gire su cabeza en sentido de las manecillas del reloj y considere que la región se encuentra debajo de la curva $x = 2y - y^2$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$.) Encuentre el área de la región.



48. Las fronteras de la región sombreada son el eje y, la recta $y = 1$ y la curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encuentre el área de esta región al escribir x como función de y e integrar con respecto a esta última (como en el ejercicio 47).



49. Si $w'(t)$ es la rapidez de crecimiento de un niño en libras por año, ¿qué representa $\int_5^{10} w'(t)\,dt$?

50. La corriente en un alambre se define como la derivada de la carga: $I(t) = Q'(t)$. (Véase el ejemplo 3 de la sección 3.7.) ¿Qué representa $\int_a^b I(t)\,dt$?

51. Si se fuga aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ galones por minuto en el instante t, ¿qué representa $\int_0^{120} r(t)\,dt$?

52. Una población de abejas se inicia con 100 ejemplares y se incrementa en una proporción de $n'(t)$ especímenes por semana. ¿Qué representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

53. En la sección 4.7 se definió la función de ingreso marginal $R'(x)$ como la derivada de la función de ingreso $R(x)$, donde x es el número de unidades vendidas. ¿Qué representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

54. Si $f(x)$ es la pendiente de un sendero a una distancia de x millas del principio del mismo, ¿qué representa $\int_3^5 f(x)\,dx$?

55. ¿Si x se mide en metros y $f(x)$ en newtons, ¿cuáles son las unidades para $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

56. Si las unidades para x son pies y las unidades para $a(x)$ son libras por pie, ¿cuáles son las unidades para da/dx? ¿Qué unidades tiene $\int_2^8 a(x)\,dx$?

57–58 Se da la función de velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encuentre (a) el desplazamiento, y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo dado.

57. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

58. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

59–60 Se dan la función de aceleración (en m/s^2) y la velocidad inicial para una partícula que se desplaza a lo largo de una recta. Encuentre (a) la velocidad en el instante t y (b) la distancia recorrida durante el intervalo dado.

59. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

60. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

61. Se da la densidad lineal de una varilla de longitud 4 m mediante $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida en kilogramos por metro, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Encuentre la masa total de esta última.

62. Del fondo de un tanque de almacenamiento fluye agua en una cantidad de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, donde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encuentre la cantidad de agua que fluye del tanque durante los primeros 10 minutos.

63. La velocidad de un automóvil se leyó en su velocímetro a intervalos de diez segundos y se registró en una tabla. Use la regla del punto medio para estimar la distancia recorrida por el vehículo.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

64. Suponga que un volcán hace erupción y en la tabla se proporcionan las lecturas de la cantidad a la que se expelen materiales sólidos hacia la atmósfera. El tiempo t se mide en segundos y las unidades para $r(t)$ son toneladas métricas por segundo.

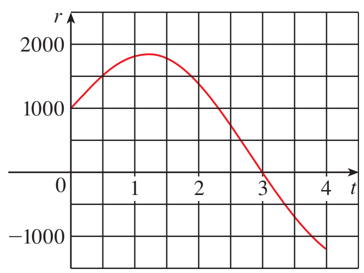
t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dé estimaciones superiores e inferiores para la cantidad $Q(6)$ de materiales expelidos una vez que transcurren 6 segundos.

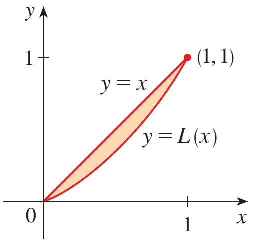
(b) Use la regla del punto medio para estimar $Q(6)$.

65. El costo marginal de fabricar x yardas de cierta tela es $C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$ (en dólares por yarda). Encuentre el incremento en el costo si el nivel de producción aumenta de 2 000 a 4 000 yardas.

66. Fluye agua hacia adentro y afuera de un tanque de almacenamiento. Se muestra una gráfica de la relación de cambio $r(t)$ del volumen de agua que hay en el tanque, en litros por día. Si la cantidad de agua que contiene el tanque en el instante $t = 0$ es 25 000 L, use la regla del punto medio para estimar la cantidad de agua cuatro días después.



67. Los economistas usan una distribución acumulada, llamada *curva de Lorenz*, para describir la distribución del ingreso entre las familias en un país dado. Típicamente, una curva de Lorenz se define en $[0, 1]$, con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ y es continua, creciente y cóncava hacia arriba. Los puntos de esta curva se determinan ordenando todas las familias según sus ingresos y calculando el porcentaje de ellas cuyos ingresos son menores que, o iguales a, un porcentaje dado del ingreso total del país. Por ejemplo, el punto $(a/100, b/100)$ está sobre la curva de Lorenz, si el a% inferior de las familias recibe menos del $b\%$ del ingreso total o un porcentaje igual a éste. Se tendría la *igualdad absoluta* de la distribución del ingreso si el $a\%$ inferior de las familias recibe el $a\%$ del ingreso, en cuyo caso la curva de Lorenz sería la recta $y = x$. El área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ mide en cuánto difiere la distribución del ingreso de la igualdad absoluta. El *coeficiente de desigualdad* es la relación del área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ al área debajo de $y = x$.



(a) Demuestre que el coeficiente de desigualdad es el doble del área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$; es decir, demuestre que

$$\text{coeficiente de desigualdad} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

(b) La distribución del ingreso para cierto país se representa mediante la curva de Lorenz definida por la ecuación

$$L(x) = \tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{7}{12}x$$

¿Cuál es el porcentaje del ingreso total recibido por el 50% inferior de las familias? Encuentre el coeficiente de desigualdad.

68. El 7 de mayo de 1992, el trasbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla se dan los datos de la velocidad del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Hecho	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	185
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	319
Estrangulación al 89%	20	447
Estrangulación al 67%	32	742
Estrangulación al 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	4151

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de tercer grado.
(b) Use el modelo del inciso (a) para estimar la altura alcanzada por el *Endeavour*, 125 segundos después del despegue.

REDACCIÓN DE PROYECTO

NEWTON, LEIBNIZ Y LA INVENCIÓN DEL CÁLCULO

Los inventores del cálculo fueron sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Pero las ideas básicas detrás de la integración fueron investigadas hace 2500 años por los antiguos griegos, como Eudoxo y Arquímedes, y que Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Barrow (1630-1677) y otros fueron los pioneros en hallar tangentes. Barrow, el profesor de Newton en Cambridge, fue el primero en comprender la relación inversa entre la derivación y la integración. Lo que Newton y Leibniz hicieron fue usar esta relación, en la forma del teorema fundamental del cálculo, para convertir este último en una disciplina matemática sistemática. En este sentido es que se da a Newton y Leibniz el crédito por la invención del cálculo.

Lea acerca de las colaboraciones de estos hombres en una o más de las referencias que se proporcionan en la bibliografía y escriba un informe sobre uno de los tres temas siguientes. Puede incluir detalles biográficos, pero el reporte debe concentrarse en una descripción, con cierto detalle, de los métodos y notaciones. En particular, consulte uno de los libros fuente, en los cuales se dan extractos de las publicaciones originales de Newton y Leibniz, traducidas del latín al inglés.

- El papel de Newton en el desarrollo del cálculo.
- El papel de Leibniz en el desarrollo del cálculo.
- La controversia entre los seguidores de Newton y los de Leibniz sobre la prioridad en la invención del cálculo.

Bibliografía

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics*, Nueva York: John Wiley, 1987, capítulo 19.

2. Carl Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Nueva York: Dover, 1959, capítulo V.
3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, capítulos 8 y 9.
4. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed., Nueva York: Saunders, 1990, Capítulo 11.
5. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, Nueva York: Scribner's, 1974. Véase el artículo sobre Leibniz escrito por Joseph Hofmann, en el volumen VIII, y el artículo sobre Newton escrito por I. B. Cohen, en el volumen X.
6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: Harper-Collins, 1993, capítulo 12.
7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nueva York: Oxford University Press, 1972, capítulo 17.

Libros fuente

1. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader*, Londres: MacMillan Press, 1987, capítulos 12 y 13.
2. D. E. Smith, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, Londres, MacMillan Press, 1987, capítulos 12 y 13.
3. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1969, capítulo V.

5.5 LA REGLA DE LA SUSTITUCIÓN

En virtud del teorema fundamental, es importante poder hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivación no indican cómo evaluar integrales como

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\,dx$$

Para hallar esta integral, aplique la estrategia para la solución de problemas de *introducir algo adicional*. En este caso, el "algo adicional" es una nueva variable; cambie de una variable x a una variable u. Suponga que hace que u sea la cantidad debajo del signo integral de (1), $u = 1 + x^2$. Entonces la diferencial de u es $du = 2x\,dx$. Advierta que si la dx en la notación para una integral se interpretara como una diferencial, entonces en (1) se tendría la diferencial $2x\,dx$ y, por consiguiente, desde un punto de vista formal y sin justificar este cálculo, podría escribir

■ En la sección 3.10 se definieron las diferenciales. Si $u = f(x)$, entonces

$$du = f'(x)\,dx$$

$$\boxed{2} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\,dx = \int \sqrt{1 + x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$
$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

Pero ahora podría comprobar que tiene la respuesta correcta aplicando la regla de la cadena para derivar la función final de la ecuación (2):

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

En general, este método funciona siempre que tiene una integral que pueda escribir en la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Observe que si $F' = f$, entonces

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

porque, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Si hace el "cambio de variable" o la "sustitución" $u = g(x)$, entonces, a partir de la ecuación (3) tiene

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

o bien, si se escribe $F' = f$ se obtiene

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Por lo tanto, ha probado la regla siguiente:

$\boxed{4}$ **REGLA DE SUSTITUCIÓN** Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo alcance es un intervalo I, y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Advierta que se probó la regla de sustitución para la integración aplicando la regla de la cadena para la derivación. Asimismo, observe que, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$, de modo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du de (4) como diferenciales.

Así pues, la regla de sustitución expresa: **es permitido operar con dx y du después de los signos de integral como si fueran diferenciales**.

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx$.

SOLUCIÓN Haga la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3\,dx$, la cual, aparte del factor constante 4, aparece en la integral. De este modo, con $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ y la regla de sustitución, tiene

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du\\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C\\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C\end{aligned}$$

■ Compruebe la respuesta al derivarla.

Advierta que en la etapa final tuvo que regresar a la variable original x. □

La idea detrás de la regla de sustitución es reemplazar una integral relativamente complicada por una más sencilla. Esto se lleva a cabo pasando de la variable original x a una nueva variable u que sea función de x. Así, en el ejemplo 1 reemplace la integral $\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx$ con la integral más sencilla $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

El reto principal en la aplicación de la regla de sustitución es pensar en una sustitución apropiada. Intente elegir u como alguna función en el integrando cuya diferencial también se presente (excepto para un factor constante). Este fue el caso en el ejemplo 1. Si no es posible, escoja u como alguna parte complicada del integrando (tal vez la función interna de una función compuesta). Encontrar la sustitución correcta conlleva algo de arte. No es raro que la conjetura sea errónea; si su primera suposición no funciona, intente con otra.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUCIÓN 1 Sea $u = 2x + 1$. Entonces $du = 2\,dx$, de modo que $dx = du/2$. De esta forma, la regla de sustitución da

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

SOLUCIÓN 2 Otra sustitución posible es $u = \sqrt{2x+1}$. Entonces

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad \text{de suerte que} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du$$

(O bien, observe que $u^2 = 2x + 1$, de suerte que $2u\,du = 2\,dx$.) En consecuencia,

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int u\cdot u\,du = \int u^2\,du$$
$$= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

□

V EJEMPLO 3 Encuentre $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1 - 4x^2$. Entonces $du = -8x\,dx$, de manera que $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du$$
$$= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

□

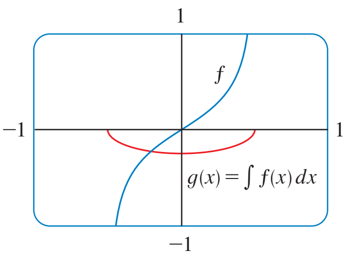


FIGURA 1

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

La respuesta para el problema 3 puede comprobarse por derivación pero, en lugar de ello, hágalo de manera visual con una gráfica. En la figura 1 se usa una computadora para trazar las gráficas del integrando $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ y de su integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (tome el caso $C = 0$). Advierta que $g(x)$ decrece cuando $f(x)$ es negativa, crece cuando $f(x)$ es positiva y tiene su valor mínimo cuando $f(x) = 0$. De modo que parece razonable, a partir de la evidencia gráfica, que g sea una antiderivada de f.

EJEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUCIÓN Si hace $u = 5x$, entonces $du = 5\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{5}\,du$. Por consiguiente

$$\int e^{5x}\,dx = \tfrac{1}{5}\int e^u\,du = \tfrac{1}{5}e^u + C = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$

□

EJEMPLO 5 Calcule $\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx$.

SOLUCIÓN Una sustitución aceptable es más obvia si factoriza x^5 como $x^4 \cdot x$. Sea $u = 1 + x^2$. Entonces $du = 2x\, dx$, de modo que $x\, dx = du/2$. También, $x^2 = u - 1$, de modo que $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx &= \int \sqrt{1 + x^2}\, x^4 \cdot x\, dx \\
&= \int \sqrt{u}\, (u - 1)^2 \frac{du}{2} = \tfrac{1}{2} \int \sqrt{u}\, (u^2 - 2u + 1)\, du \\
&= \tfrac{1}{2} \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\, du \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7}u^{7/2} - 2 \cdot \tfrac{2}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\right) + C \\
&= \tfrac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C \qquad \square
\end{aligned}$$

V EJEMPLO 6 Calcule $\int \tan x\, dx$.

SOLUCIÓN En primer lugar, escriba la tangente en términos de seno y coseno:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

Esto sugiere que debe sustituir $u = \cos x$, dado que entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y, como consecuencia, $\operatorname{sen} x\, dx = -du$:

$$\begin{aligned}
\int \tan x\, dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du \\
&= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C \qquad \square
\end{aligned}$$

Puesto que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, el resultado del ejemplo 6 también puede escribirse como

5 $$\boxed{\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C}$$

INTEGRALES DEFINIDAS

Cuando se evalúa una integral *definida* por sustitución, se pueden aplicar dos métodos. Uno consiste en evaluar primero la integral indefinida y, enseguida, aplicar el teorema fundamental. Por ejemplo, si se usa el resultado del ejemplo 2, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx &= \int \sqrt{2x + 1}\, dx \Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x + 1)^{3/2}\Big]_0^4 \\
&= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27 - 1) = \tfrac{26}{3}
\end{aligned}$$

El otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

■ En esta regla se afirma que cuando se usa una sustitución en una integral definida, debe poner todo en términos de la nueva variable u, no sólo x y dx, sino también los límites de integración. Los nuevos límites de integración son los valores de u que corresponden a $x = a$ y $x = b$.

6 REGLA DE SUSTITUCIÓN PARA INTEGRALES DEFINIDAS Si g' es continua en $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una antiderivada de f. Entonces, por (3), $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, de modo que de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero, si se aplica TFC2 una segunda vez, también resulta

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$ □

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\,dx$ usando (6).

SOLUCIÓN Si se aplica la sustitución a partir de la solución 1 del ejemplo 2, se tiene $u = 2x + 1$ y $dx = du/2$. Para encontrar los nuevos límites de integración, advierta que

$$\text{cuando } x = 0,\; u = 2(0) + 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \text{cuando } x = 4,\; u = 2(4) + 1 = 9$$

■ En la figura 2 se muestra la interpretación geométrica del ejemplo 7. La sustitución $u = 2x + 1$ alarga el intervalo $[0, 4]$ con un factor de 2 y lo traslada hacia la derecha una unidad. La Regla de Sustitución hace ver que las dos áreas son iguales.

Por lo tanto,
$$\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$
$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

Observe que al usar (6) *no* se regresa a la variable x después de integrar. Sencillamente evaluó la expresión en u entre los valores apropiados de u. □

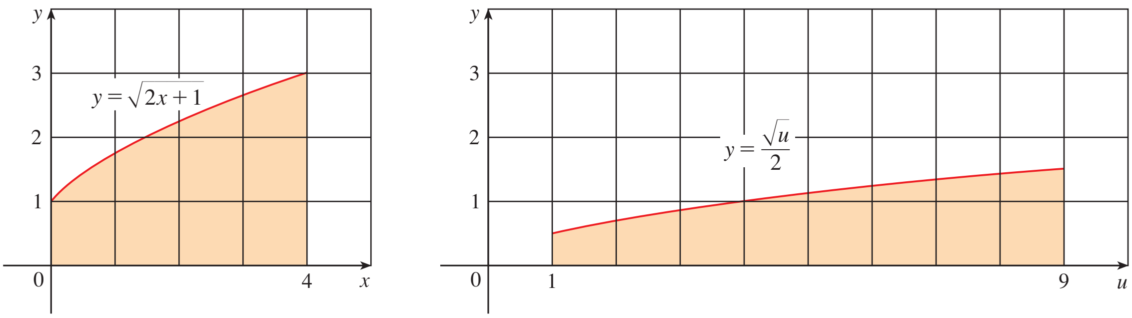


FIGURA 2

■ La integral dada en el ejemplo 8 es una abreviatura para
$$\int_1^2 \frac{1}{(3 - 5x)^2}\,dx$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3 - 5x)^2}$.

SOLUCIÓN Sea $u = 3 - 5x$. Entonces $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -du/5$.

Cuando $x = 1$, $u = -2$ y cuando $x = 2$, $u = -7$. Por esto

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3 - 5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\bigg]_{-2}^{-7}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

□

EJEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Haga $u = \ln x$ porque su diferencial $du = dx/x$ se presenta en la integral. Cuando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; cuando $x = e$, $u = \ln e = 1$. De modo que

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$

□

■ Como la función $f(x) = (\ln x)/x$ en el ejemplo 9 es positiva para $x > 1$, la integral representa el área de la región sombreada en la figura 3.

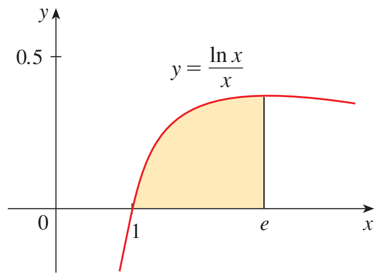


FIGURA 3

SIMETRÍA

En el teorema siguiente se usa la regla de sustitución para las integrales definidas, (6), con el fin de simplificar el cálculo de integrales de funciones que poseen propiedades de simetría.

7 INTEGRALES DE FUNCIONES SIMÉTRICAS Suponga que f es continua sobre $[-a, a]$.

(a) Si f es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

(b) Si f es impar $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN Separe la integral en dos:

8 $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

En la primera integral de la extrema derecha haga la sustitución $u = -x$. Entonces $du = -dx$ y, cuando $x = -a$, $u = a$. Por consiguiente,

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

con lo cual, la ecuación 8 se convierte en

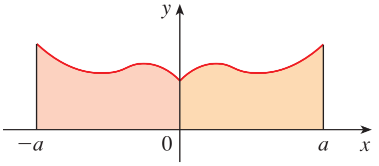
9 $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(a) Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$, de esa manera la ecuación 9 da

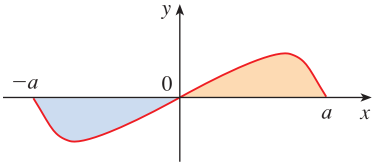
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(b) Si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$ y la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$ □



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



(b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 4

La figura 4 ilustra el teorema 7. Para el caso en que f es positiva y par, en el inciso (a) se hace ver que el área debajo de $y = f(x)$ desde $-a$ hasta a es el doble del área desde 0 hasta a, en virtud de la simetría. Recuerde que una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede expresar como el área arriba del eje x y debajo de $y = f(x)$ menos el área debajo del eje x y arriba de la curva. Por esto, en el inciso (b) se hace ver que el área es 0 porque las áreas se cancelan.

EJEMPLO 10 Dado que $f(x) = x^6 + 1$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par y, por consiguiente,

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$ □

EJEMPLO 11 Como $f(x) = (\tan x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisface $f(-x) = -f(x)$, es impar y, de este modo,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$ □

5.5 EJERCICIOS

1–6 Evalúe la integral efectuando la sustitución dada.

1. $\int e^{-x}\,dx,\ u = -x$

2. $\int x^3(2 + x^4)^5\,dx, \quad u = 2 + x^4$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \frac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta,\ u = \cos\theta$

6. $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx,\ u - 1/x$

7–46 Evalúe la integral indefinida.

7. $\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$

15. $\int \operatorname{sen}\pi t\,dt$

16. $\int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$

17. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

18. $\int \sec 2\theta \tan 2\theta\,d\theta$

19. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}\ (a \neq 0)$

21. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ \mathrm{sen}(1+x^{3/2})\,dx$

23. $\displaystyle\int \cos\theta\ \mathrm{sen}^6\theta\,d\theta$

24. $\displaystyle\int (1+\tan\theta)^5\sec^2\theta\,d\theta$

25. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

26. $\displaystyle\int e^{\cos t}\,\mathrm{sen}\,t\,dt$

27. $\displaystyle\int \frac{z^2}{\sqrt[3]{1+z^3}}\,dz$

28. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\mathrm{sin}^2 x}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

33. $\displaystyle\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \cot x\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\tan t}}$

39. $\displaystyle\int \sec^3 x\tan x\,dx$

40. $\displaystyle\int \mathrm{sen}\,t\sec^2(\cos t)\,dt$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{sen}^{-1}x}$

42. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

46. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

47–50 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, dibujando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

47. $\displaystyle\int x(x^2-1)^3\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

49. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^3 x\cos x\,dx$

50. $\displaystyle\int \tan^2\theta\sec^2\theta\,d\theta$

51–70 Evalúe la integral definida.

51. $\displaystyle\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx$

52. $\displaystyle\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\,dt$

56. $\displaystyle\int_{1/6}^{1/2} \csc\pi t\cot\pi t\,dt$

57. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \tan^3\theta\,d\theta$

58. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

59. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

60. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\,\mathrm{sen}\,x}{1+x^6}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

62. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\ \mathrm{sen}(\mathrm{sen}\,x)\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx\ \ (a>0)$

64. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

65. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

66. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

67. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

68. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$

70. $\displaystyle\int_0^{T/2} \mathrm{sen}(2\pi t/T-\alpha)\,dt$

71–72 Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra debajo de la curva dada. Enseguida encuentre el área exacta.

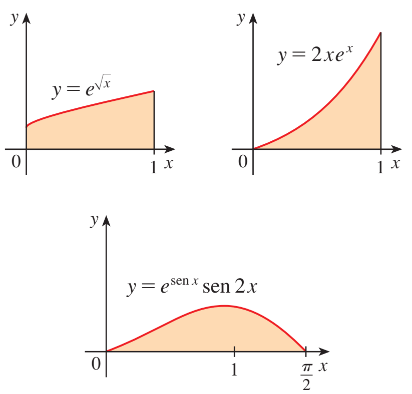
71. $y = \sqrt{2x+1},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

72. $y = 2\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,2x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

73. Evalúe $\int_{-2}^{2}(x+3)\sqrt{4-x^2}\,dx$ al escribirla como una suma de dos integrales e interpretar una de ellas en términos de un área.

74. Evalúe $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx$ al efectuar una sustitución e interpretar la integral resultante en términos de un área.

75. ¿Cuáles de las áreas siguientes son iguales? ¿Por qué?



76. Un modelo de rapidez de metabolismo fundamental, en kcal/h de un hombre joven es $R(t) = 85 - 0.18\cos(\pi t/12)$, donde t es el tiempo en horas a partir de las 5:00 AM. ¿Cuál es el metabolismo fundamenta total de este hombre, $\int_0^{24} R(t)dt$, en un periodo de 24 horas?

77. Un tanque de almacenamiento de petróleo se rompe en $t = 0$ y el petróleo se fuga del tanque en una proporción de $r(t) = 100^{e^{-0.01t}}$ litros por minuto. ¿Cuánto petróleo se escapa durante la primera hora?

78. Una población de bacterias se inicia con 400 ejemplares y crece con una rapidez de $r(t) = (450.268)e^{1.12567t}$ bacterias por hora. ¿Cuántos especímenes habrá después de tres horas?

79. La respiración es cíclica y un ciclo respiratorio completo —desde el principio de la inhalación hasta el final de la exhalación— requiere alrededor de 5 s. El gasto máximo de aire que entra en los pulmones es de más o menos 0.5 L/s. Esto explica en parte por qué a menudo se ha usado la función $f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi t/5)$ para modelar el gasto de aire hacia los pulmones. Úselo para hallar el volumen de aire inhalado en los pulmones en el tiempo t.

80. Alabama Instruments Company ha montado una línea de producción para fabricar una calculadora nueva. El índice de producción de estas calculadoras, después de t semanas es

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Advierta que la producción tiende a 5 000 por semana a medida que avanza el tiempo, pero que la producción inicial es más baja debido a que los trabajadores no están familiarizados con las técnicas nuevas.) Encuentre la cantidad de calculadoras producidas desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta.

81. Si f es continua y $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, encuentre $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

82. Si f es continua y $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, encuentre $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

83. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $0 < a < b$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

84. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

85. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

86. Si f es continua en $[0, \pi]$, utilice la sustitución $u = \pi - x$ para demostrar que

$$\int_0^\pi xf(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

87. Mediante el ejercicio 86 calcule la integral

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\,dx$$

88. (a) Si f es continua, comprobar que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

(b) Aplique el inciso (a) para valorar

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \text{ y } \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

5 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Escriba una expresión para una suma de Riemann de una función f. Explique el significado de la notación que use.
(b) Si $f(x) \geqslant 0$, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.
(c) Si $f(x)$ toma tanto valores positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.

2. (a) Escriba la definición de la integral definida de una función continua, desde a hasta b.
(b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x) \geqslant 0$?
(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos? Ilustre la respuesta con un diagrama.

3. Enuncie las dos partes del teorema fundamental del cálculo.

4. (a) Enuncie el teorema del cambio total.
(b) Si $r(t)$ es la proporción a la cual el agua fluye hacia un depósito, ¿qué representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponga que una partícula se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una recta con una velocidad $n(t)$, medida en pies por segundo, y una aceleración $a(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
(b) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
(c) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. (a) Explique el significado de la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
(b) ¿Cuál es la relación entre la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ y la integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique con exactitud qué significa la proposición de que “la derivación y la integración son procesos inversos”.

8. Enuncie la regla de sustitución. En la práctica, ¿cómo puede usarla?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

2. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\, dx = \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g(x)\, dx\right)$$

3. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b 5f(x)\, dx = 5\int_a^b f(x)\, dx$$

4. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b xf(x)\, dx = x\int_a^b f(x)\, dx$$

5. Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$ entonces

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\, dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\, dx}$$

6. Si f' es continua sobre $[1, 3]$, entonces $\int_1^3 f'(v)\, dv = f(3) - f(1)$.

7. Si f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$ entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

8. Si f y g son derivables y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, entonces $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^{5} (ax^2 + bx + c)\, dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\, dx$

11. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4}\, dx = -\frac{3}{8}$

12. La expresión $\int_0^2 (x - x^3)\, dx$ representa el área bajo la curva $y = x - x^3$ de 0 a 2.

13. Todas las funciones continuas tienen derivadas.

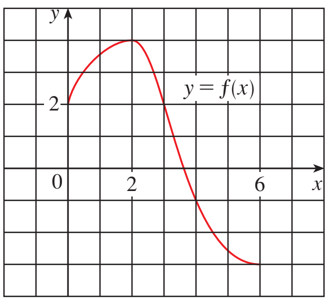
14. Todas las funciones continuas tienen antiderivadas.

15. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\, dx\right) = f(x)$$

EJERCICIOS

1. Use la gráfica dada de f para hallar la suma de Riemann con seis subintervalos. Tome los puntos muestra como (a) los puntos extremos de la izquierda y (b) los puntos medios. Luego, dibuje un diagrama y explique qué representa la suma de Riemann.



2. (a) Evalúe la suma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

con cuatro subintervalos; tome los puntos extremos de la derecha como puntos muestra. Con ayuda de un diagrama explique qué representa la suma de Riemann.

(b) Use la definición de integral definida (con los puntos extremos de la derecha) para calcular el valor de la integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\, dx$$

(c) Aplique el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso (b).

(d) Dibuje un diagrama para explicar el significado geométrico de la integral del inciso (b).

3. Evalúe

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

interpretándola en términos de áreas.

4. Exprese

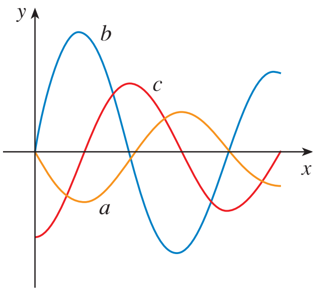
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i\, \Delta x$$

como una integral definida sobre el intervalo $[0, \pi]$ y, a continuación, evalúe la integral.

5. Si $\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encuentre $\int_4^6 f(x)\,dx$.

CAS **6.** (a) Escriba $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como un límite de sumas de Riemann, tomando los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. Utilice un sistema algebraico para computadora para evaluar la suma y calcular el límite.
(b) Aplique el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso (a).

7. En la figura se muestran las gráficas de f, f' y $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfica y explique sus selecciones



8. Evalúe:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}\right) dx$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}\,dx$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}\,dt$

9–38 Evalúe la integral cuando exista.

9. $\displaystyle\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$ **10.** $\displaystyle\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$ **14.** $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\displaystyle\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$ **16.** $\displaystyle\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$ **18.** $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\displaystyle\int_0^1 v^2\cos(v^3)\,dv$ **20.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4\tan t}{2 + \cos t}\,dt$ **22.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$ **24.** $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{\csc^2 x}{1 + \cot x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\pi t\,\cos\pi t\,dt$ **28.** $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,\cos(\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \tan x\,\ln(\cos x)\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta\,\tan\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$ **36.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 + \tan t)^3\sec^2 t\,dt$

37. $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$ **38.** $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39–40 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable trazando las gráficas de la función y de su antiderivada (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra debajo de la curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Enseguida, encuentre el área exacta.

42. Dibuje la función $f(x) = \cos^2 x\,\operatorname{sen}^3 x$ y use esa gráfica para inferir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. A continuación evalúe la integral para confirmar su conjetura.

43–48 Encuentre la derivada de la función.

43. $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1 + t^2}\,dt$ **44.** $\displaystyle F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \operatorname{sen} t}\,dt$

45. $\displaystyle g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\,dt$ **46.** $\displaystyle g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1 - t^2}{1 + t^4}\,dt$

47. $\displaystyle y = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t}\,dt$ **48.** $\displaystyle y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

49–50 Mediante la propiedad 8 de las integrales estime el valor de la integral.

49. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx$ **50.** $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x + 1}\,dx$

51–54 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad.

51. $\displaystyle\int_0^1 x^2\cos x\,dx \leqslant \frac{1}{3}$ **52.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\displaystyle\int_0^1 e^x\cos x\,dx \leqslant e - 1$ **54.** $\displaystyle\int_0^1 x\,\operatorname{sen}^{-1}x\,dx \leqslant \pi/4$

55. Use la regla del punto medio $n = 6$ para obtener un valor aproximado de $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)\,dx$.

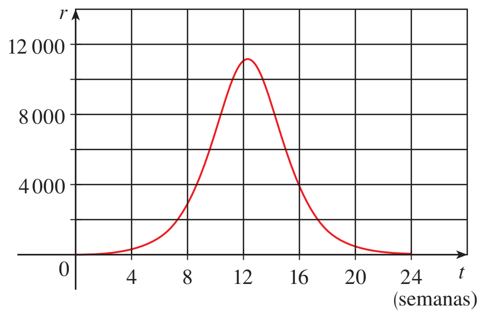
56. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con la función de velocidad $v(t) = t^2 - t$, donde v se mide en metros por segundo. Encuentre (a) el desplazamiento y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo $[0, 5]$.

57. Sea $r(t)$ la rapidez a la cual el petróleo del mundo es consumido, donde t se mide en años y empieza en $t = 0$ el primero de enero de 2000, y $r(t)$ se mide en barriles por año. ¿Qué representa $\int_0^8 r(t)\, dt$?

58. Se utiliza una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor en los tiempos que se listan en la tabla siguiente. Aplique la regla del punto medio para estimar la distancia del corredor cubierta durante esos 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

59. Una población de abejas aumentó en una proporción de $r(t)$ insectos por semana, donde la gráfica de r es como se ilustra. Use la regla del punto medio junto con seis subintervalos para estimar el aumento en la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



60. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Evalúe $\int_{-3}^{1} f(x)\, dx$ mediante la interpretación de la integral como una diferencia de áreas.

61. Si f es continua y $\int_0^2 f(x)\, dx = 6$, valore $\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta\, d\theta$.

62. En la sección 5.3 se introdujo la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$. En su teoría de la difracción de las ondas luminosas, Fresnel también usó la función

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2)\, dt$$

(a) ¿Sobre cuáles intervalos C es creciente?

(b) ¿Sobre cuáles intervalos C es cóncava hacia arriba?

CAS (c) Use una gráfica para resolver la ecuación siguiente, correcta hasta dos cifras decimales:

$$\int_0^x \cos(\pi t^2/2)\, dt = 0.7$$

CAS (d) Dibuje C y S en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

63. Estime el valor del número c tal que el área bajo la curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es igual a 1.

64. Suponga que en un inicio la temperatura en una varilla larga y delgada que se encuentra colocada a lo largo del eje x es $C/(2a)$, si $|x| \leq a$, y 0, si $|x| > a$. Se puede demostrar que si la difusividad calorífica de la varilla es k, por lo tanto la temperatura de esa varilla en el punto x, en el instante t, es

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du$$

Para hallar la distribución de temperaturas que se produce a partir de un punto caliente inicial concentrado en el origen, necesita calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use la regla de l'Hospital para hallar este límite.

65. Si f es una función continua tal que

$$\int_0^x f(t)\, dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para toda x, encuentre una fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponga que h es una función tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ y h'' dondequiera es continua. Evalúe $\int_1^2 h''(u)\, du$.

67. Si f' es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$2\int_a^b f(x) f'(x)\, dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Determine $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\, dt$.

69. Si f es continua en $[0, 1]$, demuestre que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

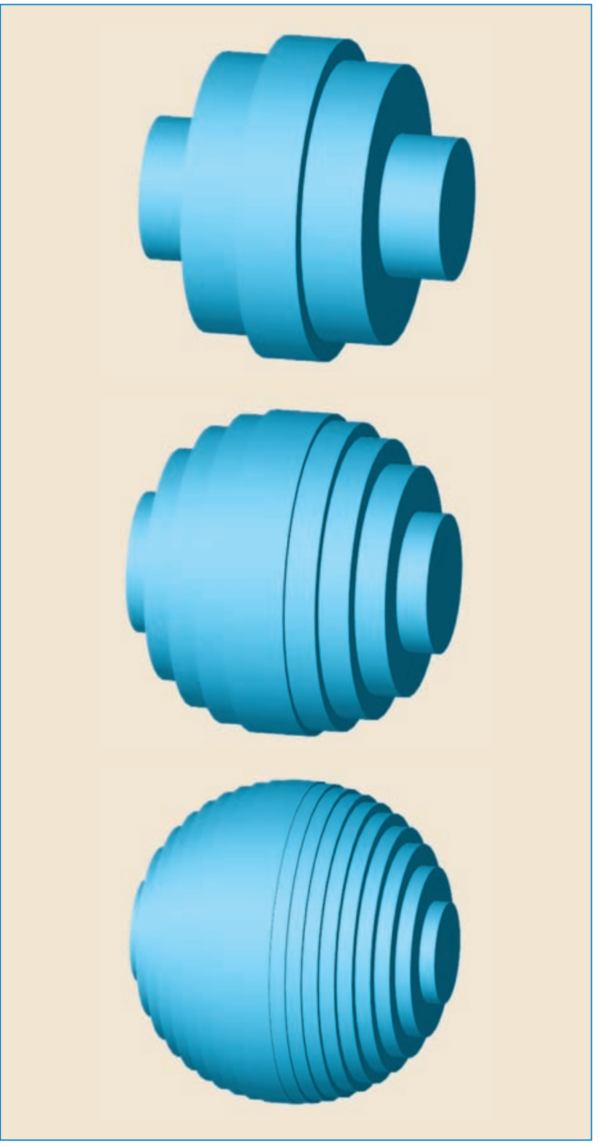
70. Evalúe

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9 \right]$$

71. Considere que f es continua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ y $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}$. Hallar el valor de la integral $\int_0^1 f^{-1}(y) dx$.

6

APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN



El volumen de una esfera es el límite de la suma de volúmenes de los cilindros que se aproximan a una esfera.

En este capítulo se exploran algunas de las aplicaciones de la integral definida como calcular áreas entre curvas, volúmenes de sólidos y el trabajo que efectúa una fuerza variable. El tema común es el método general siguiente, que es similar al usado para determinar áreas bajo curvas: divida una cantidad Q en un gran número de partes pequeñas. Luego obtenga el valor aproximado de cada parte pequeña mediante una cantidad de la forma $f(x_i^*)\,\Delta x$ y en seguida aproxime a Q mediante una suma de Riemann. Después obtenga el límite y exprese Q como una integral. Por último, evalúe la integral usando el teorema fundamental del cálculo o la regla del punto medio.

6.1 ÁREAS ENTRE CURVAS

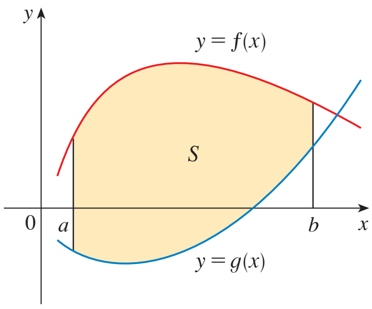


FIGURA 1

$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

En el capítulo 5 se define y se calculan áreas de regiones que están bajo las gráficas de funciones. En este caso se usan integrales para calcular las áreas de regiones que quedan entre las gráficas de dos funciones.

Considere la región S que se ubica entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$. (Véase figura 1.)

De la misma manera como se señala para áreas bajo curvas de la sección 5.1, divida S en n franjas con igual anchura, y luego calcule el valor aproximado de la i-ésima franja mediante un rectángulo con base Δx y altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Véase figura 2. Si lo desea, podría tomar todos los puntos de muestra como extremos derechos, en cuyo caso $x_i^* = x_i$.) Por lo tanto, la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

es una aproximación a lo que se intuyo que es el área de S.

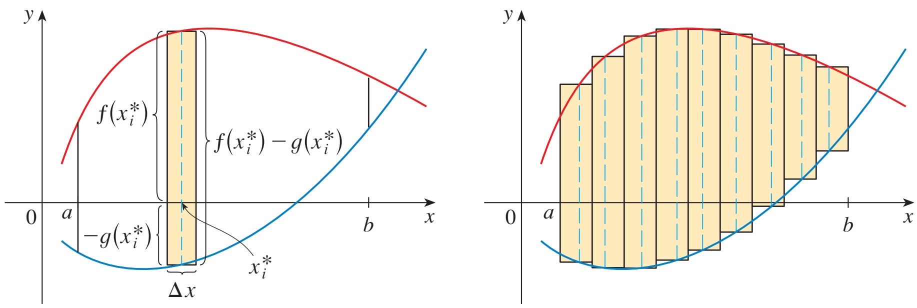


FIGURA 2

(a) Rectángulo representativo

(b) Rectángulo de aproximación

Al parecer, esta aproximación es mejor cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, defina **área** A de S como el valor límite de la suma de áreas de estos rectángulos de aproximación.

1

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

Identifique el límite en (1) como la integral definida de $f - g$. Por lo tanto, tiene la fórmula siguiente para el área.

2 El área A de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, donde f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Observe que en el caso especial donde $g(x) = 0$, S es la región bajo la gráfica de f y la definición general del área (1) se reduce a la definición anterior (definición 2 de la sección 5.1).

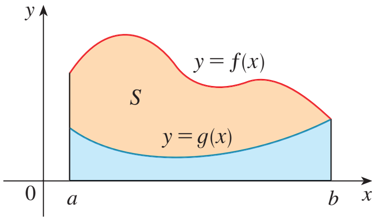


FIGURA 3

$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

En el caso donde tanto f y g son positivas, puede ver en la figura 3 por qué (2) es cierta:

$$A = [\text{área bajo } y = f(x)] - [\text{área bajo } y = g(x)]$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

EJEMPLO 1 Determine el área de la región acotada por arriba con $y = e^x$, por abajo mediante $y = x$ y a los lados por $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 4. La curva del límite superior es $y = e^x$ y la curva del límite inferior es $y = x$. De este modo use la fórmula del área (2) con $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ y $b = 1$:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$

□

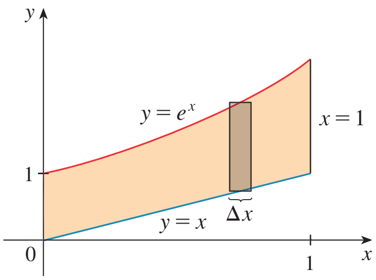


FIGURA 4

En la figura 4 se toma un rectángulo de aproximación representativo cuya anchura es Δx como recordatorio del procedimiento por medio del cual se define el área (1). En general, cuando plantee una integral para determinar un área, es útil elaborar un croquis de la región para identificar la curva superior y_T, la curva inferior y_B y el rectángulo de aproximación representativo como en la figura 5. Por consiguiente, el área de un rectángulo característico es $(y_T - y_B)\,\Delta x$ y la ecuación

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (y_T - y_B)\,\Delta x = \int_a^b (y_T - y_B)\,dx$$

resume el procedimiento al añadir, en el sentido limitante, las áreas de todos los rectángulos representativos.

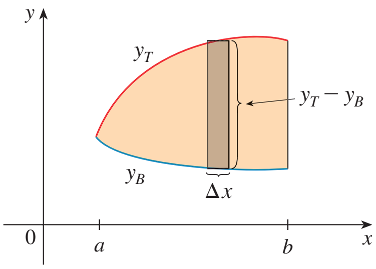


FIGURA 5

Observe que, en la figura 5, el límite o frontera izquierda se reduce a un punto, en tanto que en la figura 3, la frontera derecha se reduce a un punto. En el ejemplo siguiente, ambos límites se reducen a un punto, de modo que el primer paso es determinar a y b.

V EJEMPLO 2 Calcule el área de la región definida por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN Primero determine los puntos de intersección de las parábolas resolviendo en forma simultánea sus ecuaciones. El resultado es $x^2 = 2x - x^2$, o $2x^2 - 2x = 0$. Por eso, $2x(x - 1) = 0$, de modo que $x = 0$ o 1. Los puntos de corte son (0, 0) y (1, 1).

Según la figura 6, los límites superior e inferior son

$$y_T = 2x - x^2 \qquad \text{y} \qquad y_B = x^2$$

El área de un rectángulo representativo es

$$(y_T - y_B)\,\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\,\Delta x$$

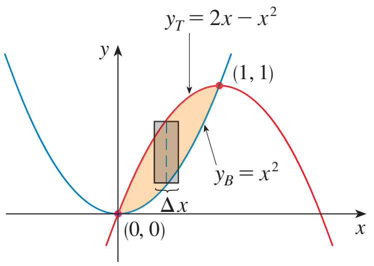


FIGURA 6

por lo que la región se sitúa entre $x = 0$ y $x = 1$. De modo que el área total es

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

□

Algunas veces es difícil, o hasta imposible, determinar los puntos donde se cortan exactamente las dos curvas. Como se muestra en el ejemplo siguiente, con la ayuda de una calculadora para graficar o de una computadora, puede encontrar valores aproximados de los puntos de intersección, y luego proceder como antes.

EJEMPLO 3 Calcular el área aproximada de la región acotada por las curvas $y = x/\sqrt{x^2+1}$ y $y = x^4 - x$.

SOLUCIÓN Si tratara de determinar los puntos de intersección exactos, habría de resolver la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^4 - x$$

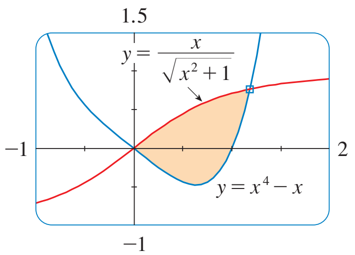


FIGURA 7

Esta ecuación luce muy difícil como para resolverla de manera exacta (de hecho, es imposible), de modo que recurra a una calculadora para graficar o a una computadora para trazar las gráficas de las dos curvas de la figura 7. Un punto de intersección es el origen. Haga un acercamiento en el otro punto de intersección y halle que $x \approx 1.18$. (Si se requiere mayor precisión, se podría aplicar el método de Newton o un buscador de raíces, si se cuenta con un instrumento para graficar.) En estos terminos, una aproximación al área entre las curvas es

$$A \approx \int_0^{1.18} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x^4 - x) \right] dx$$

Para integrar el primer término aplique la sustitución $u = x^2 + 1$. Entonces, $du = 2x\,dx$, y cuando $x = 1.18$, $u \approx 2.39$. Así,

$$\begin{aligned} A &\approx \tfrac{1}{2}\int_1^{2.39} \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1.18} (x^4 - x)\,dx \\ &= \sqrt{u}\Big]_1^{2.39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1.18} \\ &= \sqrt{2.39} - 1 - \frac{(1.18)^5}{5} + \frac{(1.18)^2}{2} \\ &\approx 0.785 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 4 En la figura 8 se ilustran las curvas de velocidad para dos automóviles, A y B, parten juntos y se desplazan a lo largo de la misma carretera. ¿Qué representa el área entre las curvas? Aplique la regla del punto medio para estimarla.

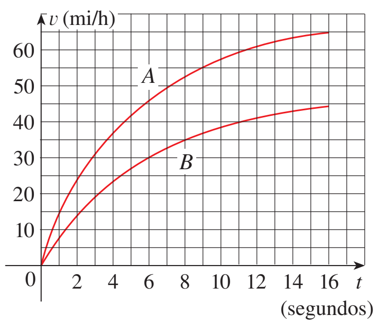


FIGURA 8

SOLUCIÓN De acuerdo con la sección 5.4, el área bajo la curva A de la velocidad representa la distancia que recorre el vehículo A durante los primeros 16 segundos. En forma similar, el área bajo la curva B es la distancia que recorre el automóvil B durante ese tiempo. De este modo, el área entre estas curvas, que es la diferencia de las áreas bajo las curvas, es la distancia entre los vehículos después de 16 segundos. Tome las velocidades de la gráfica y conviértalas en pies por segundo (1 mi/h $= \frac{5280}{3600}$ pies/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	34	54	67	76	84	89	92	95
v_B	0	21	34	44	51	56	60	63	65
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25	28	29	29	30

Aplique la regla del punto medio con $n = 4$ intervalos, de modo que $\Delta t = 4$. Los puntos medios de los intervalos son $\bar{t}_1 = 2$, $\bar{t}_2 = 6$, $\bar{t}_3 = 10$ y $\bar{t}_4 = 14$. Estime la distancia entre los automóviles después de 16 segundos, como se indica a continuación:

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\,dt \approx \Delta t\,[13 + 23 + 28 + 29]$$
$$= 4(93) = 372 \text{ pies}$$ □

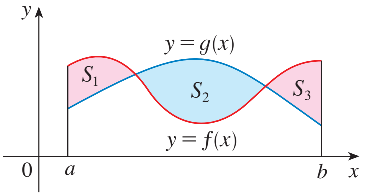


FIGURA 9

Si se pide determinar el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ donde $f(x) \geqslant g(x)$ para algunos valores de x pero $g(x) \geqslant f(x)$ para otros valores de x, entonces divida la región dada S en varias regiones $S_1, S_2, \ldots$ con áreas $A_1, A_2, \ldots$ como se ilustra en la figura 9. Después defina el área de la región S como la suma de las áreas de las regiones más pequeñas $S_1, S_2, \ldots$, es decir, $A = A_1 + A_2 + \cdots$. Puesto que

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{cuando } f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{cuando } g(x) \geqslant f(x) \end{cases}$$

tiene la expresión siguiente para A.

3 El área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Al evaluar la integral en (3), aún puede dividir en integrales que corresponderían a $A_1, A_2, \ldots$.

EJEMPLO 5 Calcular el área de la región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Los puntos de intersección se presentan cuando $\operatorname{sen} x = \cos x$, es decir, cuando $x = \pi/4$ (puesto que $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$). La región se ilustra en la figura 10. Observe que $\cos x \geqslant \operatorname{sen} x$ cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ pero $\operatorname{sen} x \geqslant \cos x$ cuando $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Por lo tanto, el área requerida es

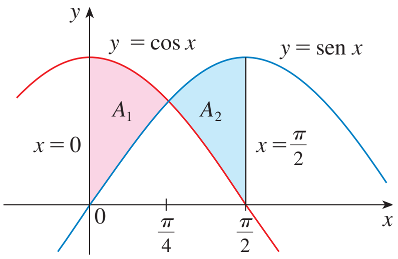


FIGURA 10

$$A = \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x|\,dx = A_1 + A_2$$
$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx$$
$$= [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\pi/4}^{\pi/2}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 2\sqrt{2} - 2$$

En este ejemplo en particular podría haber ahorrado algún trabajo observando que la región es simétrica con respecto a $x = \pi/4$ y así

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$$ □

Algunas regiones se manejan mejor si se considera a x en función de y. Si una región está limitada con curvas de ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$ (véase figura 11), entonces su área es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

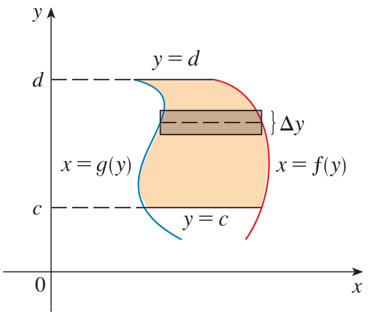


FIGURA 11

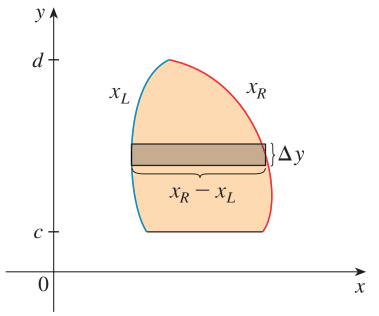


FIGURA 12

Si escribe x_R para el límite derecho y x_L para el límite izquierdo, entonces, según la figura 12, tiene

$$A = \int_c^d (x_R - x_L)\, dy$$

He aquí un rectángulo de aproximación característico con dimensiones $x_R - x_L$ y Δy.

V EJEMPLO 6 Calcular el área definida mediante la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN Al resolver las dos ecuaciones los puntos de intersección son $(-1, -2)$ y $(5, 4)$. Al resolver la ecuación de la parábola y determinan x; observa que, según la figura 13, las curvas de los límites a la izquierda y a la derecha son

$$x_L = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad\qquad x_R = y + 1$$

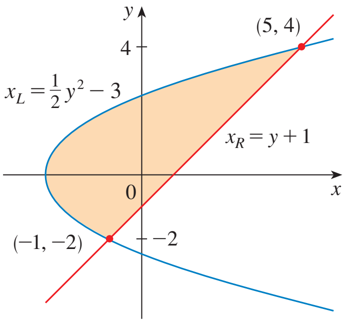


FIGURA 13

Es necesario integrar entre los valores de y adecuados, $y = -2$ y $y = 4$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\, dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\,\Bigg]_{-2}^{4} \\
&= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18
\end{aligned}$$

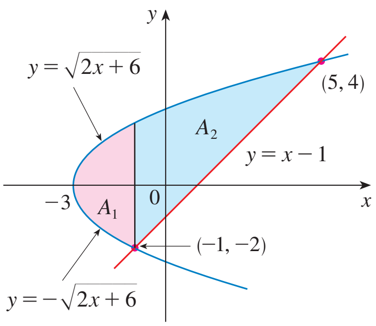


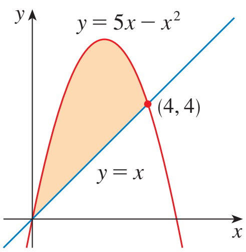
FIGURA 14

Pudo haber calculado el área del ejemplo 6 integrando con respecto a x en lugar de y, pero el cálculo es más complicado. Podría haber significado dividir la región en dos y determinar las áreas A_1 y A_2 de la figura 14. El método aplicado en el ejemplo 6 es mucho más fácil.

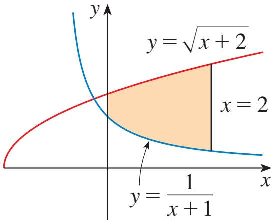
6.1 EJERCICIOS

1–4 Determinar el área de la región sombreada.

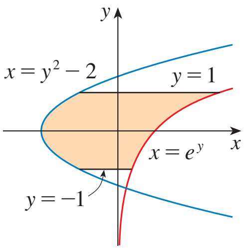
1.



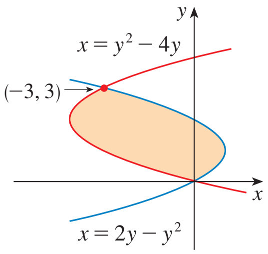
2.



3.



4.



5–28 Dibuje las regiones definidas por las curvas dadas. Decida si integra con respecto a x o y. Trace un rectángulo de aproximación representativo e indique su altura y su anchura. Luego determine el área de la región.

5. $y = x + 1, \quad y = 9 - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2$

6. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

7. $y = x, \quad y = x^2$

8. $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

9. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

10. $y = 1 + \sqrt{x}, \quad y = (3 + x)/3$

11. $y = x^2, \quad y^2 = x$

12. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

13. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

14. $y = \cos x, \quad y = 2 - \cos x, \; 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $y = \tan x, \quad y = 2 \operatorname{sen} x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

16. $y = x^3 - x, \quad y = 3x$

17. $y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x = 9$

18. $y = 8 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = -3, \quad x = 3$

19. $x = 2y^2, \quad x = 4 + y^2$

20. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

21. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

22. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2), \quad y = x$

23. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

24. $y = \cos x, \quad y = 1 - \cos x, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi$

25. $y = x^2, \quad y = 2/(x^2 + 1)$

26. $y = |x|, \quad y = x^2 - 2$

27. $y = 1/x, \quad y = x, \quad y = \frac{1}{4}x, \quad x > 0$

28. $y = 3x^2, \quad y = 8x^2, \quad 4x + y = 4, \quad x \geqslant 0$

29–30 Mediante el cálculo determine el área del triángulo con los vértices dados.

29. $(0, 0), \quad (2, 1), \quad (-1, 6)$

30. $(0, 5), \quad (2, -2), \quad (5, 1)$

31–32 Evalúe la integral e interprétela como el área de una región. Dibuje la región.

31. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos 2x| \, dx$

32. $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x + 2} - x| \, dx$

33–34 Aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para determinar un valor aproximado del área de la región limitada por las curvas dadas.

33. $y = \operatorname{sen}^2(\pi x/4), \quad y = \cos^2(\pi x/4), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

34. $y = \sqrt[3]{16 - x^3}, \quad y = x, \quad x = 0$

35–38 Por medio de una gráfica encuentre un valor aproximado de las coordenadas x de los puntos de corte entre las curvas dadas. Luego estime en (forma aproximada) el área de la región definida por las curvas.

35. $y = x \operatorname{sen}(x^2), \; y = x^4$

36. $y = e^x, \quad y = 2 - x^2$

37. $y = 3x^2 - 2x, \quad y = x^3 - 3x + 4$

38. $y = x \cos x, \quad y = x^{10}$

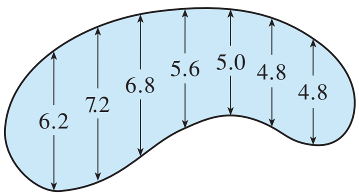
CAS **39.** Con ayuda de un sistema algebraico computacional, determine el área exacta definida por las curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ y $y = x$.

40. Trace la región en el plano xy definida por las desigualdades $x - 2y^2 \geqslant 0$, $1 - x - |y| \geqslant 0$ y determine su área.

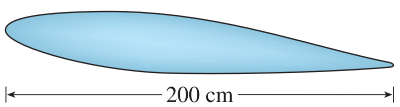
41. Los automóviles de carreras de Chris y Kelly están lado a lado al inicio de la carrera. En la tabla se proporcionan las velocidades de cada vehículo, (en millas por hora) durante los primeros 10 segundos de la competencia. Aplique la regla del punto medio para estimar cuánto se adelanta Kelly durante los 10 primeros segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	69	80
1	20	22	7	75	86
2	32	37	8	81	93
3	46	52	9	86	98
4	54	61	10	90	102
5	62	71			

42. Las anchuras, en metros, de una piscina en forma arriñonada se midieron a intervalos de 2 metros, como se indica en la figura. Mediante la regla del punto medio, estime el área de la piscina.



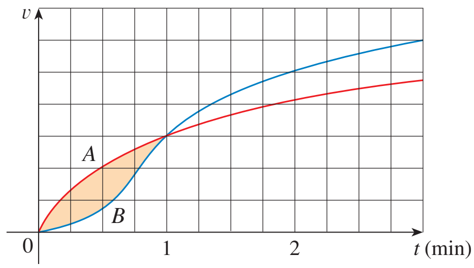
43. Se muestra la sección transversal de un ala de avión. Las mediciones de la altura del ala, en centímetros, en intervalos de 20 centímetros son 5.8, 20.3, 26.7, 29.0, 27.6, 27.6, 27.3, 23.8, 20.5, 15.1, 8.7, 7 y 2.8. Aplique la regla del punto medio para estimar el área de la sección transversal del área.



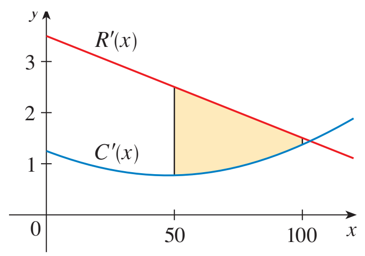
44. Si la proporción de nacimientos de una población es $b(t) = 2\,200e^{0.024t}$ personas por cada año y la de decesos es $d(t) = 1\,460e^{0.018t}$ personas por cada año. Hallar el área entre estas curvas para $0 \leq t \leq 10$. ¿Qué representa el área?

45. Dos automóviles, A y B, se encuentran lado a lado al inicio de la carrera, y aceleran desde el reposo. En la figura se muestran las gráficas de sus funciones de velocidad.

(a) ¿Cuál vehículo se adelanta después de un minuto? Explique.
(b) ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada?
(c) ¿Cuál es el automóvil que se adelanta después de dos minutos? Explique.
(d) Estime el tiempo al cual los vehículos van de nuevo lado a lado



46. En la figura se muestran las gráficas de la función del ingreso marginal R' y la función del costo marginal C' de un fabricante. [Refiérase a la sección 4.8 en la que $R(x)$ y $C(x)$ representan los ingresos y el costo cuando se fabrican x unidades. Suponga que R y C se miden en miles de dólares.] ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada? Estime el valor de esta cantidad mediante la regla del punto medio.



47. La curva cuya ecuación en $y^2 = x^2(x + 3)$ se denomina curva **cúbica de Tschirnhausen**. Si traza la gráfica de esta curva, podrá ver que una parte de la curva forma un bucle. Encuentre el área definida por este bucle.

48. Encuentre el área de la región definida por la parábola $y = x^2$, la tangente a esta parábola en $(1, 1)$ y el eje x.

49. Determine el número b tal que la recta $y = b$ divida a la región delimitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de igual área.

50. (a) Calcule el número a tal que la recta $x = a$ biseque el área bajo la curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.
(b) Determine el número b tal que la recta $y = b$ biseque el área del inciso (a).

51. Calcule los valores de c tal que el área de la región delimitada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ es 576.

52. Suponga que $0 < c < \pi/2$. ¿Para qué valor de c el área de la región que definen las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$, $x = 0$ es igual al área de la región delimitada por las curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ y $y = 0$?

53. ¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x/(x^2 + 1)$ definen una región? Calcule el área de la región.

SOLUCIÓN POR MEDIO DE LA FÓRMULA 2 Sea

■ Es útil usar el patrón:

$$\begin{array}{ll} u = \square & dv = \square \\ du = \square & v = \square \end{array}$$

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

Entonces $$du = dx \qquad v = -\cos x$$

y, por lo tanto,

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = \int \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{\operatorname{sen} x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\ \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

□

NOTA El objetivo de usar la integración por partes es obtener una integral más simple que aquella con la que se inició. Así, en el ejemplo 1 se inició con $\int x \operatorname{sen} x\,dx$ y se expresó en términos de la integral más simple $\int \cos x\,dx$. Si se hubiera elegido $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\,dx$, entonces $du = \cos x\,dx$ y $v = x^2/2$, así que la integración por partes da

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = (\operatorname{sen} x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

Aunque esto es cierto, $\int x^2 \cos x\,dx$ es una integral más difícil que la inicial. En general, al decidir sobre una elección para u y dv, a menudo se intenta elegir $u = f(x)$ como una función que se vuelve más simple cuando se deriva (o por lo menos no más complicada) siempre y cuando $dv = g'(x)\,dx$ se pueda integrar fácilmente para dar v.

V EJEMPLO 2 Evaluar $\int \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí no se tiene mucha elección para u y dv. Sea

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

entonces $$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Al integrar por partes, se obtiene

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x\,\frac{dx}{x}$$

■ Se acostumbra escribir $\int 1\,dx$ como $\int dx$.

$$= x\ln x - \int dx$$

■ Compruebe la respuesta mediante derivación.

$$= x \ln x - x + C$$

La integración por partes es efectiva en este ejemplo, porque la derivada de la función $f(x) = \ln x$ es más simple que f. □

V EJEMPLO 3 Determine $\int t^2 e^t\,dt$.

SOLUCIÓN Note que t^2 se vuelve más simple cuando se deriva (mientras que e^t no cambia cuando se deriva o integra), de modo que se elige

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\,dt$$

A continuación $\qquad du = 2t\,dt \qquad v = e^t$

La integración por partes da

$$\boxed{3} \qquad \int t^2 e^t\,dt = t^2 e^t - 2\int te^t\,dt$$

La integral que se obtuvo, $\int te^t\,dt$, es más simple que la integral original, pero aún no es obvio. Por lo tanto, se usa una segunda vez la integración por partes, esta vez con $u = t$ y $dv = e^t\,dt$. Entonces $du = dt$, $v = e^t$, y

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t + C$$

Al escribir esto en la ecuación 3, se obtiene

$$\begin{aligned}\int t^2 e^t\,dt &= t^2 e^t - 2\int te^t\,dt \\ &= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C) \\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{donde } C_1 = -2C\end{aligned}$$

□

■ Un método más fácil, con números complejos, se da en el ejercicio 50 en el apéndice H.

V EJEMPLO 4 Evalúe $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Ni e^x ni sen x se vuelven más simples cuando se derivan, pero de cualquier manera se prueba con $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$ y $v = -\cos x$, de modo que la integración por partes da

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

La integral que se ha obtenido, $\int e^x \cos x\,dx$, no es más simple que la original, pero por lo menos no es más difícil. Habiendo tenido éxito en el ejemplo precedente al integrar por partes dos veces, se persevera e integra de nuevo por partes. Esta vez se usa $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$, y

$$\boxed{5} \qquad \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

A primera vista, parece como si no se hubiera hecho nada porque se llegó a $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, que es donde se inició. Sin embargo, si coloca la expresión para $\int e^x \cos x\,dx$ de la ecuación 5 en la ecuación 4, se obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

■ En la figura 1 se ilustra el ejemplo 4 mostrando las gráficas de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ y $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como una comprobación visual del trabajo, observe que $f(x) = 0$ cuando F tinene un máximo o un mínimo.

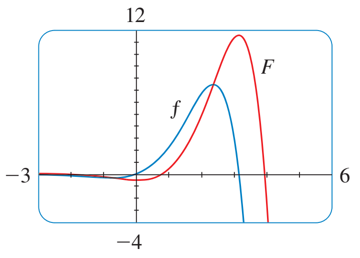


FIGURA 1

Esto se puede considerar como una ecuación que se resolverá para la integral desconocida. Al sumar $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ a ambos lados, se obtiene

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividiendo entre 2 y sumando la constante de la integración, obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$ □

Si se combina la fórmula para integración por partes con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo, se puede evaluar por partes integrales definidas. Al evaluar ambos lados de la fórmula 1 entre a y b, suponiendo que f' y g' son continuas, y usar el teorema fundamental, se obtiene

6 $$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx}$$

EJEMPLO 5 Calcule $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \tan^{-1}x \qquad dv = dx$$

Entonces $$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = x$$

Por consiguiente la fórmula 6 da

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx &= x\tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx\\ &= 1\cdot\tan^{-1}1 - 0\cdot\tan^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

■ Puesto que $\tan^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, la integral del ejemplo 5 se puede interpretar como el área de la región mostrada en la figura 2.

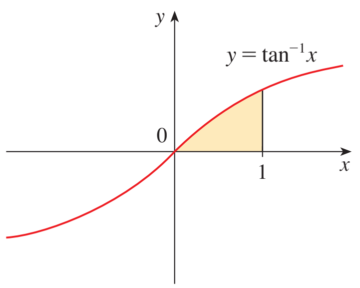


FIGURA 2

Para evaluar esta integral se usa la sustitución $t = 1 + x^2$ (puesto que u tiene otro significado en este ejemplo). Luego $dt = 2x\,dx$, de modo que $x dx = \frac{1}{2}\,dt$. Cuando $x = 0$, $t = 1$; cuando $x = 1$, $t = 2$; así que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2\\ &= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $$\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$ □

EJEMPLO 6 Demuestre la fórmula de reducción

■ La ecuación 7 se llama *fórmula de reducción* porque el exponente n ha sido *reducido* a $n-1$ y $n-2$.

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

SOLUCIÓN Sea $\quad u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$

Entonces $\quad du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$

así que la integración por partes da

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

Puesto que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Como en el ejemplo 4, se resuelve esta ecuación para la integral deseada, pasando el último término del lado derecho al lado izquierdo. Así, se tiene

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

o bien,
$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$ □

La fórmula de reducción (7) es útil porque al usarla de manera repetida se podría expresar finalmente $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x\,dx$ (si n es impar) o $\int (\operatorname{sen} x)^0\,dx = \int dx$ (si n es par).

7.1 EJERCICIOS

1–2 Evalúe la integral por medio de la integración por partes con las elecciones indicadas de u y dv.

1. $\int x^2 \ln x\,dx\,; \quad u = \ln x,\ dv = x^2\,dx$

2. $\int \theta\cos\theta\,d\theta; \quad u = \theta,\ dv = \cos\theta\,d\theta$

3–32 Evalúe la integral.

3. $\int x\cos 5x\,dx$

4. $\int xe^{-x}\,dx$

5. $\int re^{r/2}\,dr$

6. $\int t\operatorname{sen} 2t\,dt$

7. $\int x^2\operatorname{sen}\pi x\,dx$

8. $\int x^2\cos mx\,dx$

9. $\int \ln(2x+1)\,dx$

10. $\int \operatorname{sen}^{-1}x\,dx$

11. $\int \arctan 4t\,dt$

12. $\int p^5\ln p\,dp$

13. $\int t\sec^2 2t\,dt$

14. $\int s\,2^s\,ds$

15. $\int (\ln x)^2\,dx$

16. $\int t\operatorname{senh} mt\,dt$

17. $\int e^{2\theta}\operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$

18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\,d\theta$

19. $\int_0^{\pi} t\operatorname{sen} 3t\,dt$

20. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

21. $\int_0^1 t\cosh t\,dt$

22. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$

23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

24. $\int_0^{\pi} x^3\cos x\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy$

26. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\,dx$

28. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

29. $\displaystyle\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$

31. $\displaystyle\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t-s)\,ds$

33–38 Primero realice una sustitución y luego use la integración por partes para evaluar la integral.

33. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$

34. $\displaystyle\int t^3 e^{-t^2}\,dt$

35. $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3\cos(\theta^2)\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos t}\operatorname{sen} 2t\,dt$

37. $\displaystyle\int x\ln(1+x)\,dx$

38. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

39–42 Evalúe la integral indefinida. Ilustre, y compruebe que su respuesta es razonable, graficando tanto la función como su antiderivada (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int (2x+3)e^x\,dx$

40. $\displaystyle\int x^{3/2}\ln x\,dx$

41. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

42. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx$

43. (a) Use la fórmula de reducción del ejemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use el inciso (a) y la fórmula de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

44. (a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int \cos^2 x\,dx$.
(c) Use los incisos (a) y (b) para evaluar $\int \cos^4 x\,dx$.

45. (a) Use la fórmula de reducción del ejemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^5 x\,dx$.
(c) Emplee el inciso (a) para mostrar que, para potencias impares de seno,

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1}x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$

46. Demuestre que, para potencias pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n}x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

47–50 Use la integración por partes para demostrar la fórmula de reducción.

47. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}\,dx$

48. $\displaystyle\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

49. $\displaystyle\tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

50. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x\sec^{n-2}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}x\,dx \quad (n\neq 1)$

51. Use el ejercicio 47 para determinar $\int(\ln x)^3\,dx$.

52. Use el ejercicio 48 para encontrar $\int x^4 e^x\,dx$.

53–54 Determine el área de la región acotada por las curvas dadas.

53. $y = xe^{-0.4x}$, $y = 0$, $x = 5$

54. $y = 5\ln x$, $y = x\ln x$

55–56 Use una gráfica para hallar las coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego encuentre (de manera aproximada) el área de la región acotada por las curvas.

55. $y = x\operatorname{sen} x$, $y = (x-2)^2$

56. $y = \arctan 3x$, $y = \frac{1}{2}x$

57–60 Use el método de las envolventes cilíndricas para hallar el volumen generado al rotar la región acotada por las curvas dadas respecto al eje especificado.

57. $y = \cos(\pi x/2)$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; respecto al eje y

58. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$; respecto al eje y

59. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$; respecto a $x = 1$

60. $y = e^x$, $x = 0$, $y = \pi$; respecto al eje x

61. Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^2 \ln x$ en el intervalo $[1, 3]$.

62. Un cohete acelera al quemar su combustible de a bordo, de modo que su masa disminuye con el tiempo. Suponga que la masa inicial del cohete en el despegue (incluido su combustible) es m, el combustible se consume a una proporción r, y los gases de escape son expulsados con velocidad constante v_e (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t es el que se expresa mediante la ecuación

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande. Si $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m = 30\,000$ kg, $r = 160$ kg/s, y $v_e = 3\,000$ m/s, determine la altura del cohete un minuto después del despegue.

63. Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene velocidad $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo después de t segundos. ¿Qué tan lejos viajará durante los primeros t segundos?

64. Si $f(0) = g(0) = 0$ y f'' y g'' son continuas, muestre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx$$

65. Suponga que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$, y f'' es continua. Encuentre el valor de $\int_1^4 xf''(x)\,dx$.

66. (a) Use la integración por partes para mostrar que

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

(b) Si f y g son funciones inversas y f' es continua, demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[*Sugerencia:* use el inciso (a) y haga la sustitución $y = f(x)$.]

(c) En el caso donde f y g son funciones positivas y $b > a > 0$, dibuje un diagrama para dar una interprepretación geométrica del inciso (b).

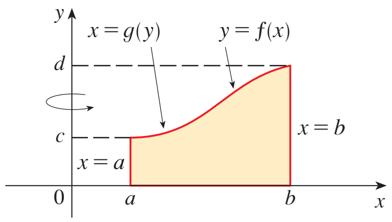
(d) Use el inciso (b) para evaluar $\int_1^e \ln x\,dx$.

67. Se llegó a la fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, por medio de envolventes cilíndricas, pero ahora se puede usar la integración por partes para demostrarla con el método de división de la sección 6.2, por lo menos para el caso donde f es uno a uno y, por lo tanto, tiene una función inversa g. Use la figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$

Realice la sustitución $y = f(x)$ y después use la integración por partes en la integral resultante para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx.$$



68. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

(a) Muestre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

(b) Use el ejercicio 46 para mostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Use los incisos (a) y (b) para mostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

y deducir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Emplee el inciso (c) y los ejercicios 45 y 46 para mostrar que

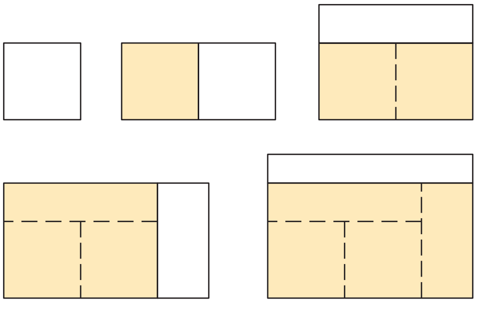
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Esta fórmula se escribe por lo general como un producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

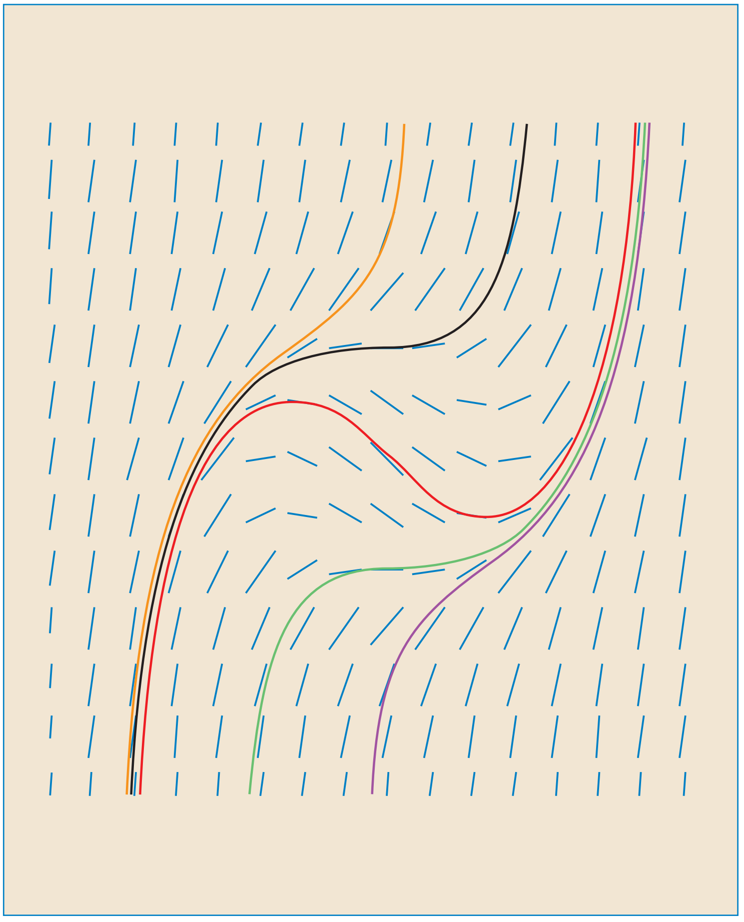
y se llama *producto de Wallis.*

(e) Se construyen rectángulos como sigue. Empiece con un cuadrado de área 1 y una los rectángulos de área 1 de manera alterna al lado o arriba del rectángulo previo (véase la figura). Encuentre el límite de las relaciones de amplitud a altura de estos rectángulos.



9

ECUACIONES DIFERENCIALES



Los campos de dirección nos permiten hacer un bosquejo de soluciones de una ecuación diferencial sin una fórmula explícita.

Quizá la más importante de todas las aplicaciones del cálculo es a las ecuaciones diferenciales. Cuando los científicos emplean el cálculo, muy a menudo es para analizar una ecuación diferencial que ha surgido en el proceso de modelar algún fenómeno que están estudiando. Aun cuando frecuentemente es imposible hallar una fórmula explícita para la solución de la ecuación diferencial, los planteamientos gráficos y numéricos proporcionan la información necesaria.

9.1 MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES

■ Ahora es un buen momento para leer (o volver a leer) la exposición de una representación matemático en la página 24.

Al describir el proceso de representación en la sección 1.2, se habló acerca de formular un modelo matemático de un problema del mundo real, ya sea por razonamiento intuitivo acerca del fenómeno o de una ley física en función de la evidencia de experimentos. El modelo matemático con frecuencia toma la forma de una *ecuación diferencial*, es decir, una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas. Esto no es sorprendente, porque en el problema del mundo real, es común observar que ocurran cambios y se desea predecir el comportamiento futuro con respecto a cómo cambian los valores actuales. Se comienza por examinar varios ejemplos de cómo surgen las ecuaciones diferenciales cuando se representan fenómenos físicos.

MODELOS DE CRECIMIENTO POBLACIONAL

Un modelo para el crecimiento de una población se basa en asumir de que la población crece en una cantidad proporcional al tamaño de la población. Ésa es una suposición razonable para una población de bacterias o animales en condiciones ideales (ambiente ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de predadores, inmunidad a enfermedad).

Se procede a identificar y nombrar las variables en este modelo:

$t =$ tiempo   (la variable independiente).

$P =$ número de individuos en la población   (la variable dependiente).

La rapidez de crecimiento de la población es la derivada dP/dt. Así que la suposición de que la rapidez de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población, se escribe como la ecuación

$$\boxed{1} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es la constante de proporcionalidad. La ecuación 1 es nuestro primer modelo para el crecimiento poblacional; es una ecuación diferencial porque contiene una función desconocida P y su derivada dP/dt.

Una vez formulado un modelo, se consideran sus consecuencias. Si se descarta una población de 0, por lo tanto $P(t) > 0$ para toda t. Así, si $k > 0$, entonces la ecuación 1 muestra que $P'(t) > 0$ para toda t. Esto significa que la población siempre está creciendo. De hecho, cuando crece $P(t)$ la ecuación 1 muestra que dP/dt se vuelve más grande. En otras palabras, la rapidez de crecimiento se incrementa cuando crece la población.

La ecuación 1 pide hallar una función cuya derivada sea un múltiplo constante de sí mismo. Se sabe del capítulo 3 que las funciones exponenciales tienen esa propiedad. De hecho, si se establece $P(t) = Ce^{kt}$, en tal caso

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

Así, cualquier función exponencial de la forma $P(t) = Ce^{kt}$ es una solución de la ecuación 1. Cuando se estudia esta ecuación en detalle en la sección 9.4, se verá que no hay otra solución.

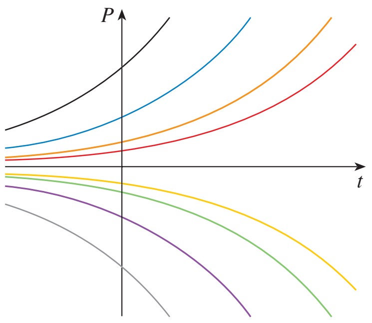


FIGURA 1
La familia de soluciones de $dP/dt = kP$

Si se permite que C varíe por todos los números reales, se obtiene la *familia* de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ cuyas gráficas se muestran en la figura 1. Pero las poblaciones tienen sólo valores positivos y, por lo tanto, se está interesado sólo en soluciones con $C > 0$. Y probablemente se tiene interés sólo en valores de t mayores que el tiempo inicial $t = 0$. En la figura 2 se muestran las soluciones con significado físico. Si se escribe

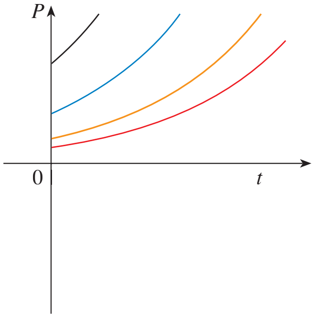


FIGURA 2
La familia de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ con $C > 0$ y $t \geqslant 0$

$t = 0$, se obtiene $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, de modo que la constante C resulta ser la población inicial, $P(0)$.

La ecuación 1 es apropiada para representar el crecimiento poblacional en condiciones ideales, pero se tiene que reconocer que un modelo más real debe reflejar el hecho de que un determinado ambiente tiene recursos limitados. Muchas poblaciones comienzan incrementándose de manera exponencial, pero la población se estabiliza cuando se aproxima a su *capacidad de soporte* K (o disminuye hacia K si alguna vez excede a K). Para que un modelo tome en cuenta ambas tendencias, se hacen dos suposiciones:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ si P es pequeña (al inicio, la rapidez de crecimiento es proporcional a P).
- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ si $P > K$ (P disminuye si nunca excede a K).

Una expresión simple que incorpora ambas suposiciones, es la siguiente ecuación

$$\boxed{2} \qquad \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Observe que si P es pequeña en comparación con K, entonces P/K se aproxima a 0 y, por lo tanto, $dP/dt \approx kP$. Si $P > K$, entonces $1 - P/K$ es negativa y, por lo tanto, $dP/dt < 0$.

La ecuación 2 se llama *ecuación diferencial logística,* y la propuso el biólogo matemático holandés Pierre-François Verhulst en la década de 1840 como un modelo para el crecimiento poblacional mundial. Se desarrollarán técnicas que permiten hallar soluciones explícitas de la ecuación logística en la sección 9.4, pero por ahora se pueden deducir características cualitativas de las soluciones directamente de la ecuación 2. Se observa primero que las funciones constantes $P(t) = 0$ y $P(t) = K$ son soluciones porque, en cualquier caso, uno de los factores del lado derecho de la ecuación 2 es cero. (Esto sin duda tiene sentido físico: si la población es alguna vez 0 o está a la capacidad de soporte, permanece así). Estas dos soluciones constantes se llaman *soluciones de equilibrio*.

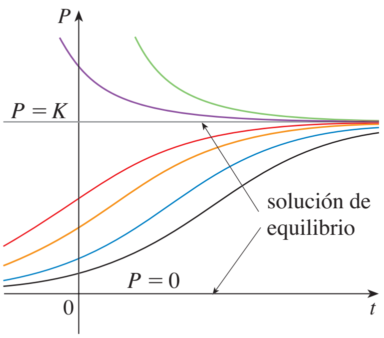


FIGURA 3
Soluciones de la ecuación logística

Si la población inicial $P(0)$ está entre 0 y K, entonces el lado derecho de la ecuación 2 es positivo, por lo tanto $dP/dt > 0$ y crece la población. Pero si la población rebasa la capacidad de soporte ($P > K$), entonces $1 - P/K$ es negativa, así que $dP/dt < 0$ y la población disminuye. Observe que, en cualquier caso, si la población tiende a la capacidad de soporte ($P \to K$), entonces $dP/dt \to 0$, lo que significa que la población se estabiliza. Así que se espera que las soluciones de la ecuación diferencial logística tengan gráficas que se parecen a algo como las de la figura 3. Observe que las gráficas se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = K$.

MODELO PARA EL MOVIMIENTO DE UN RESORTE

Ahora se examina un ejemplo de un modelo de las ciencias físicas. Se considera el movimiento de un objeto con masa m en el extremo de un resorte vertical (como en la figura 4). En la sección 6.4 se analizó la ley de Hooke, la cual establece que si un resorte se estira (o comprime) x unidades desde su longitud natural, entonces ejerce una fuerza que es proporcional a x:

$$\text{fuerza de restauración} = -kx$$

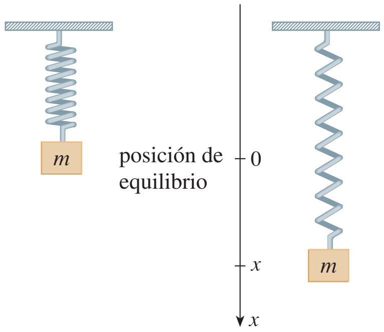


FIGURA 4

donde k es una constante positiva (llamada *constante del resorte*). Si se ignoran las fuerzas de resistencia externas (debidas a la resistencia del aire o la fricción) entonces, por la segunda ley de Newton (fuerza es igual a masa por aceleración), se tiene

$$\boxed{3} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Éste es un ejemplo de lo que se llama una *ecuación diferencial de segundo orden* porque tiene que ver con segundas derivadas. Se verá lo que se puede conjeturar acerca de la forma de la solución directamente de la ecuación. Se puede rescribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que dice que la segunda derivada de x es proporcional a x pero tiene signo opuesto. Se conocen dos funciones con esta propiedad, las funciones seno y coseno. De hecho, resulta que todas las soluciones de la ecuación 3 se pueden escribir como combinaciones de ciertas funciones seno y coseno (véase el ejercicio 4). Esto no es sorprendente; se espera que el resorte oscile respecto a su posición de equilibrio y, por lo tanto, es natural pensar que están involucradas las funciones trigonométricas.

ECUACIONES DIFERENCIALES GENERALES

En general, una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas. El **orden** de la ecuación diferencial en el orden de la mayor de las derivadas que ocurren en la ecuación. Así, las ecuaciones 1 y 2 son de primer orden, y la ecuación 3 es de segundo. En las tres ecuaciones, la variable independiente se llama t y representa el tiempo, pero en general la variable independiente no tiene que representar tiempo. Por ejemplo, cuando se considera la ecuación diferencial

$$\boxed{4} \qquad y' = xy$$

se entiende que y es una función desconocida de x.

Una función f se llama **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando $y = f(x)$ y sus derivadas se sustituyen en la ecuación. Así, f es una solución de la ecuación 4 si

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos los valores de x en algún intervalo.

Cuando se pide *resolver* una ecuación diferencial, se espera hallar las posibles soluciones de la ecuación. Ya se han resuelto algunas ecuaciones diferenciales particularmente simples, a saber, aquellas de la forma

$$y' = f(x)$$

Por ejemplo, se sabe que la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = x^3$$

está dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Pero, en general, resolver una ecuación diferencial no es un asunto fácil. No hay técnica sistemática que permita resolver todas las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en la sección 9.2 se verá cómo dibujar gráficas aproximadas de soluciones aun cuando no se tiene fórmula explícita. También se aprenderá cómo hallar aproximaciones numéricas a soluciones.

V EJEMPLO 1 Muestre que cualquier integrante de la familia de funciones

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

es una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUCIÓN Se usa la regla del cociente para derivar la expresión para y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

■ En la figura 5 se muestran las gráficas de siete integrantes de la familia del ejemplo 1. La ecuación diferencial muestra que si $y \approx \pm 1$, por lo tanto $y' \approx 0$. Esto se confirma por lo alisado de las gráficas cerca de $y = 1$ y $y = -1$.

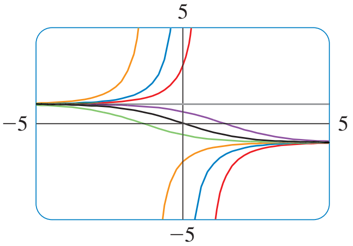


FIGURA 5

El lado derecho de la ecuación diferencial se convierte en

$$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Por lo tanto, para todo valor de c, la función dada es una solución de la ecuación diferencial. □

Al aplicar ecuaciones diferenciales, normalmente no se está tan interesado en hallar una familia de soluciones (la *solución general*) como en determinar una solución que satisfaga algún requerimiento adicional. En muchos problemas físicos se requiere hallar la solución particular que satisface una condición de la forma $y(t_0) = y_0$. Ésta se llama **condición inicial**, y el problema de hallar una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial se llama **problema con valores iniciales**.

Desde el punto de vista geométrico, cuando se impone una condición inicial, se considera la familia de curvas solución y se elige una que pasa por el punto (t_0, y_0). Físicamente esto corresponde a medir el estado de un sistema en el tiempo t_0 y usar la solución del problema de valor inicial para predecir el comportamiento futuro del sistema.

V EJEMPLO 2 Hallar una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN Al sustituir los valores $t = 0$ y $y = 2$ en la fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

del ejemplo 1, se obtiene

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Si esta ecuación se resuelve para c, se obtiene $2 - 2c = 1 + c$, que da $c = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$ □

9.1 EJERCICIOS

1. Muestre que $y = x - x^{-1}$ es una solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 2x$.

2. Compruebe que $y = \text{sen}\, x \cos x - \cos x$ es una solución del problema con valores iniciales

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x \qquad y(0) = -1$$

en el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

3. (a) ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $2y'' + y' - y = 0$?
(b) Si r_1 y r_2 son los valores de r que halló en el inciso (a), demuestre que cualquier integrante de la familia de funciones $y = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$ también es una solución.

4. (a) ¿Para qué valores de k la función $y = \cos kt$ satisface la ecuación diferencial $4y'' = -25y$?
(b) Para esos valores de k, verifique que cualquier integrante de la familia de las funciones $y = A \,\text{sen}\, kt + B \cos kt$ también es una solución.

5. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = \text{sen}\, x$?
(a) $y = \text{sen}\, x$ (b) $y = \cos x$
(c) $y = \frac{1}{2} x \,\text{sen}\, x$ (d) $y = -\frac{1}{2} x \cos x$

6. (a) Muestre que cualquier integrante de la familia de funciones $y = (\ln x + C)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2 y' + xy = 1$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando diferentes integrantes de la familia de soluciones en una pantalla común.
(c) Encuentre una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(1) = 2$.
(d) Determine una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(2) = 1$.

7. (a) ¿Qué puede decir acerca de una solución de la ecuación $y' = -y^2$ observando sólo la ecuación diferencial?
(b) Compruebe que los integrantes de la familia $y = 1/(x + C)$ son soluciones de la ecuación del inciso (a).
(c) ¿Puede pensar en una solución de la ecuación diferencial $y' = -y^2$ que no sea un miembro de la familia del inciso (b)?
(d) Encuentre una solución del problema con valores iniciales

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0.5$$

8. (a) ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una solución de la ecuación $y' = xy^3$ cuando x es cercana a 0? ¿Qué pasa si x es grande?
(b) Compruebe que los integrantes de la familia $y = (c - x^2)^{-1/2}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y' = xy^3$.
(c) Grafique diferentes integrantes de la familia de soluciones en una pantalla común. ¿Las gráficas confirman lo que predijo en el inciso (a)?
(d) Encuentre una solución del problema con valores iniciales.

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Una población se representa mediante una ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

(a) ¿Para qué valores de P la población es creciente?
(b) ¿Para qué valores de P la población es decreciente?
(c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

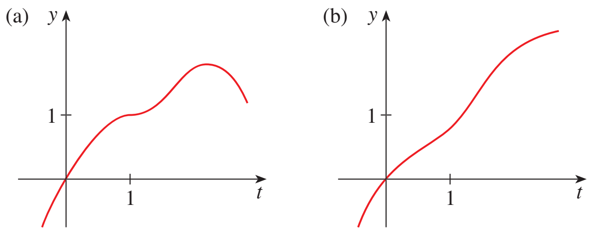
10. Una función $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

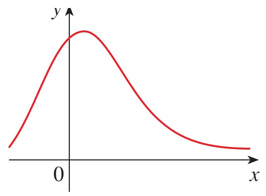
(a) ¿Cuáles son las soluciones constantes de la ecuación?
(b) ¿Para qué valores de y crece y?
(c) ¿Para qué valores de y decrece y?

11. Explique por qué las funciones con las gráficas dadas *no pueden* ser soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y - 1)^2$$



12. La función con la gráfica dada es una solución de una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Decida cuál es la ecuación correcta y justifique su respuesta.



A. $y' = 1 + xy$ **B.** $y' = -2xy$ **C.** $y' = 1 - 2xy$

13. Los psicólogos interesados en teoría de aprendizaje estudian **curvas de aprendizaje**. Una curva de aprendizaje es la gráfica de una función $P(t)$, el desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función del tiempo de capacitación t. La derivada dP/dt representa la rapidez a la que mejora el desempeño.
(a) ¿Cuándo considera que P se incrementa con más rapidez? ¿Qué sucede con dP/dt cuando t crece? Explique.
(b) Si M es el nivel máximo de desempeño del cual es capaz el alumno, explique por qué la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ es una constante positiva}$$

es un modelo razonable para aprender.

(c) Construya un bosquejo aproximado de una posible solución de esta ecuación diferencial.

14. Suponga que se sirve una taza de café recién preparado con temperatura de 95°C en una habitación donde la temperatura es de 20°C.

(a) ¿Cuándo considera que el café se enfría con más rapidez? ¿Qué sucede con la rapidez de enfriamiento a medida que pasa el tiempo? Explique.

(b) La ley de Newton del enfriamiento establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio ambiente, siempre que esta diferencia no sea muy grande. Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley de Newton del enfriamiento para esta situación particular. ¿Cuál es la condición inicial? En vista de su respuesta al inciso (a), ¿considera que esta ecuación diferencial es un modelo apropiado para el enfriamiento?

(c) Elabore un bosquejo aproximado de la gráfica de la solución del problema con valores iniciales del inciso (b).

9.2 CAMPOS DIRECCIONALES Y MÉTODO DE EULER

Desafortunadamente, es imposible resolver la mayoría de las ecuaciones diferenciales en el sentido de obtener una fórmula explícita para la solución. En esta sección se muestra que, a pesar de la ausencia de una solución explícita, se puede aprender aún mucho acerca de la solución por un método gráfico (campos direccionales) o método numérico (método de Euler).

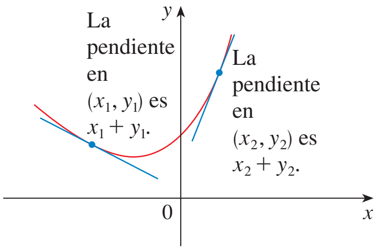


FIGURA 1
La solución de $y' = x + y$

CAMPOS DIRECCIONALES

Suponga que se pide bosquejar la gráfica de la solución del problema con valores iniciales

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

No se conoce una fórmula para la solución, así que ¿cómo puede bosquejar su gráfica? Considere lo que significa la ecuación diferencial. La ecuación $y' = x + y$ indica que la pendiente en cualquier punto (x, y) sobre la gráfica (llamada *curva solución*) es igual a la suma de las coordenadas x y y del punto (véase figura 1). En particular, debido a que la curva pasa por el punto $(0, 1)$, su pendiente ahí debe ser $0 + 1 = 1$. Así, una pequeña porción de la curva solución cerca del punto $(0, 1)$ tiene la apariencia de un segmento de recta corto que pasa por $(0, 1)$ con pendiente 1 (véase figura 2).

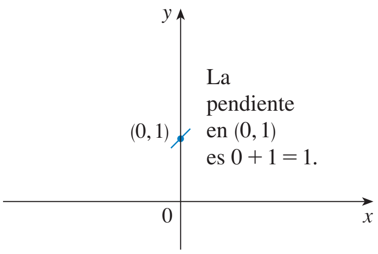


FIGURA 2
Comienzo de la curva solución que pasa por $(0, 1)$

Como guía para bosquejar el resto de la curva, se dibujan segmentos de recta cortos en varios puntos (x, y) con pendiente $x + y$. El resultado se llama *campo direccional* y se muestra en la figura 3. Por ejemplo, el segmento en el punto $(1, 2)$ tiene pendiente $1 + 2 = 3$. El campo direccional permite ver la forma general de las curvas solución indicando la dirección en la que proceden las curvas en cada punto.

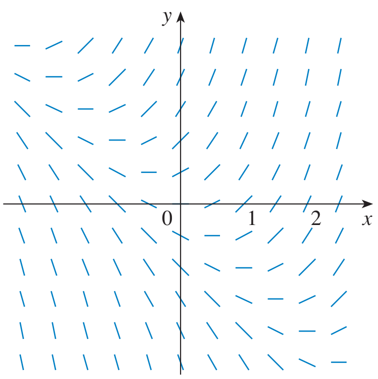


FIGURA 3
Campo direccional para $y' = x + y$

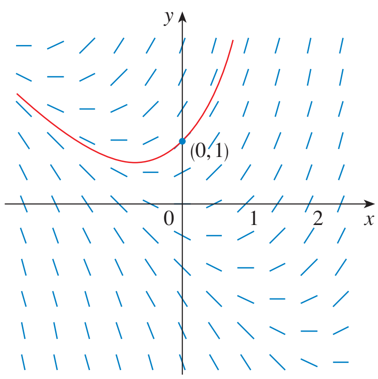


FIGURA 4
Curva solución a través de $(0, 1)$

(c) ¿Hay una solución de equilibrio?

(d) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, use el campo direccional para bosquejar la curva solución.

(e) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, emplee el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar la carga después de medio segundo.

28. En el ejercicio 14 en la sección 9.1 se consideró una tasa de café a 95°C en una habitación a 20°C. Suponga que se sabe que la taza de café se enfría con una proporción de 1°C por minuto cuando su temperatura es 70°C.

(a) ¿En este caso en qué se convierte la ecuación diferencial?

(b) Bosqueje un campo direccional y utilícelo para bosquejar la curva solución para el problema con valores iniciales. ¿Cuál es el valor límite de la temperatura?

(c) Use el método de Euler con tamaño de paso $h = 2$ minutos para estimar la temperatura del café después de 10 minutos.

9.3 ECUACIONES SEPARABLES

Se han considerado ecuaciones diferenciales de primer orden desde un punto de vista geométrico (campos direccionales) y desde un punto de vista numérico (método de Euler). ¿Qué hay acerca del punto de vista simbólico? Sería bueno tener una fórmula explícita para una solución de una ecuación diferencial. Infortunadamente, eso no siempre es posible. Pero en esta sección se examina cierto tipo de ecuación diferencial que se *puede* resolver de manera explícita.

Una **ecuación separable** es una ecuación diferencial de primer orden en la que la expresión para dy/dx se puede factorizar como una función de x y una función de y. En otras palabras, se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

El nombre *separable* viene del hecho de que la expresión del lado derecho se puede "separar" en una función de x y una función de y. de manera equivalente, si $f(y) \neq 0$, se podría escribir

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

donde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver esta ecuación se reescribe en la forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

■ La técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables fue utilizada primero por James Bernoulli (en 1690) para resolver un problema acerca de péndulos y por Leibniz (en una carta a Huygens en 1691). John Bernoulli explicó el método general en un documento publicado en 1694.

de modo que las y estén de un lado de la ecuación y las x estén del otro lado. Después se integran ambos lados de la ecuación:

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

La ecuación 2 define a y implícitamente como una función de x. En algunos casos se podría resolver para y en términos de x.

Se emplea la regla de la cadena para justificar este procedimiento: si h y g satisfacen (2), entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

por lo tanto,
$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

y
$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Así, se satisface la ecuación 1.

EJEMPLO 1

(a) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

(b) Encuentre la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN

(a) Se escribe la ecuación en términos de diferenciales y se integran ambos lados:

$$y^2\,dy = x^2\,dx$$

$$\int y^2\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

■ La figura 1 muestra las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 1. La solución del problema de valor inicial del inciso (b) se muestra en rojo.

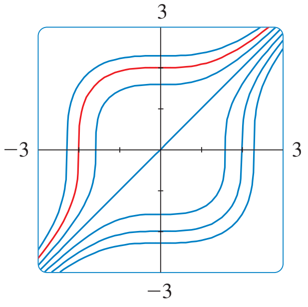


FIGURA 1

donde C es una constante arbitraria. (Se podría haber usado una constante C_1 del lado izquierdo y otra constante C_2 del lado derecho. Pero luego se combinan estas dos constantes al escribir $C = C_2 - C_1$.)

Al despejar y, se obtiene

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Se podría dejar la solución de esta manera o se podría escribir en la forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

donde $K = 3C$. (Puesto que C es una constante arbitraria, K también lo es.)

(b) Si se escribe $x = 0$ en la solución general del inciso (a), se obtiene $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 2$, se debe tener $\sqrt[3]{K} = 2$ y, por lo tanto, $K = 8$.

Así, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$ □

■ Algunos sistemas algebraicos computacionales grafican curvas definidas por ecuaciones implícitas. En la figura 2 se muestran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 2. Como se ve en las curvas de izquierda a derecha, los valores de C son 3, 2, 1, 0, -1, -2 y -3.

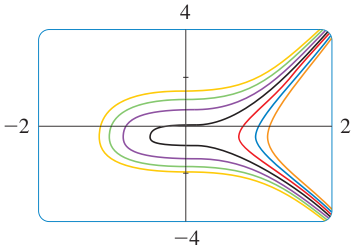


FIGURA 2

V EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en forma diferencial e integrar ambos lados, se tiene

$$(2y + \cos y)\,dy = 6x^2\,dx$$

$$\int (2y + \cos y)\,dy = \int 6x^2\,dx$$

$$\boxed{3} \qquad y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + C$$

donde C es una constante. La ecuación 3 da la solución general en forma implícita. En este caso, es imposible resolver la ecuación para expresar y de forma explícita como una función de x. □

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $y' = x^2y$.

SOLUCIÓN Se reescribe primero la ecuación por medio de la notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2y$$

■ Si una solución y es una función que satisface $y(x) \neq 0$ para alguna x, se deduce del teorema de unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales que $y(x) \neq 0$ para toda x.

Si $y \neq 0$, puede reescribirla en forma diferencial e integrar:

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Esta ecuación define a y de manera implícita como una función de x. Pero en este caso se puede resolver de forma explícita para y como sigue:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

por lo tanto, $$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Se comprueba fácilmente que la función $y = 0$ es también una solución de la ecuación diferencial dada. Así, se puede escribir la solución general en la forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

donde A es una constante arbitraria ($A = e^C$, o $A = -e^C$, o $A = 0$). □

■ En la figura 3, se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial del ejemplo 3. Compárelo con la figura 4, en la que se usa la ecuación $y = Ae^{x^3/3}$ para graficar soluciones de varios valores de A. Si emplea el campo direccional para bosquejar curvas solución con intersecciones 5, 2, 1, -1, y -2, se asemejarán a las curvas de la figura 4.

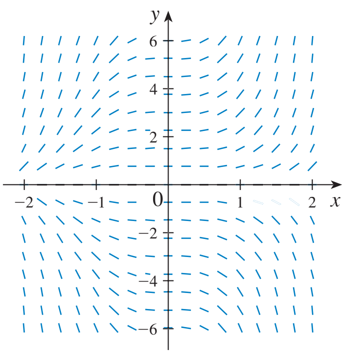


FIGURA 3

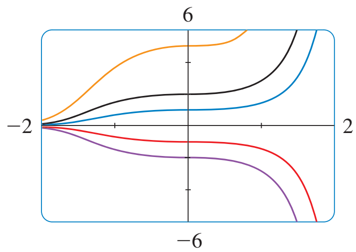


FIGURA 4

EJEMPLO 4 En la sección 9.2 se representó la corriente $I(t)$ en el circuito eléctrico mostrado en la figura 5 mediante la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

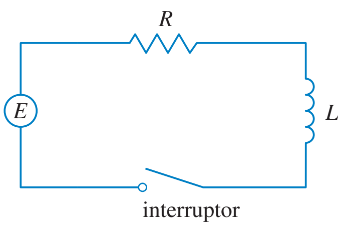


FIGURA 5

Encuentre una expresión para la corriente en un circuito donde la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H, una batería da un voltaje constante de 60 V y el interruptor cierra el circuito en $t = 0$. ¿Cuál es el valor límite de la corriente?

SOLUCIÓN Con $L = 4$, $R = 12$, y $E(t) = 60$, la ecuación se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

y el problema de valor inicial es

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Se reconoce esta ecuación como separable, y se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\tfrac{1}{3} \ln |15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C} e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3} A e^{-3t}$$

Puesto que $I(0) = 0$, se tiene $5 - \frac{1}{3}A = 0$, de modo que $A = 15$ y la solución es

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

La corriente límite, en amperes, es

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} (5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t \to \infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5 \qquad \square$$

■ En la figura 6 se muestra cómo la solución del ejemplo 4 (la corriente) se aproxima a su valor límite. La comparación con la figura 11 de la sección 9.2 muestra que se pudo dibujar una curva solución bastante exacta a partir del campo direccional.

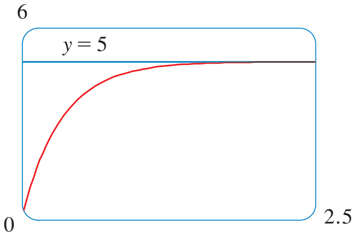


FIGURA 6

TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas, es una curva que corta de forma ortogonal cada curva de la familia, es decir, en ángulos rectos (véase figura 7). Por ejemplo, cada miembro de la familia $y = mx$ de rectas que pasan por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia $x^2 + y^2 = r^2$ de circunferencias concéntricas con centro en el origen (véase figura 8). Se dice que las dos familias son trayectorias ortogonales entre sí.

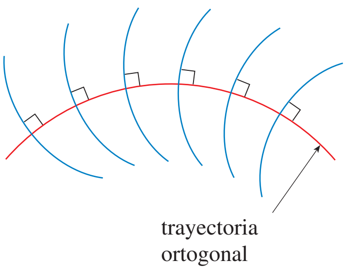


FIGURA 7

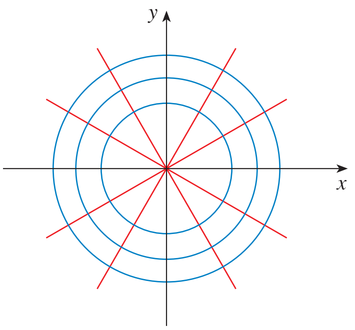


FIGURA 8

V EJEMPLO 5 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x = ky^2$, donde k es una constante arbitraria.

SOLUCIÓN Las curvas $x = ky^2$ forman una familia de parábolas cuyo eje de simetría es el eje x. El primer paso es hallar una sola ecuación diferencial que sea satisfactoria para todos los integrantes de la familia. Si se deriva $x = ky^2$, se obtiene

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Esta ecuación diferencial depende de k, pero se necesita una ecuación que sea válida para los valores de k de manera simultánea. Para eliminar k se nota que, de la ecuación general de la parábola que se proporciona $x = ky^2$, se tiene $k = x/y^2$ y, por lo tanto, la ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\frac{x}{y^2}y}$$

o bien
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Esto significa que la pendiente de la línea tangente en cualquier punto (x, y) sobre una de las parábolas es $y' = y/(2x)$. En una trayectoria ortogonal la pendiente de la recta tangente debe ser el recíproco negativo de esta pendiente. Por lo tanto, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

Esta ecuación diferencial es separable, y se resuelve como sigue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

4 $$x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

donde C es una constante positiva arbitraria. Así, las trayectorias ortogonales son la familia de elipses dada por la ecuación 4 y bosquejada en la figura 9. □

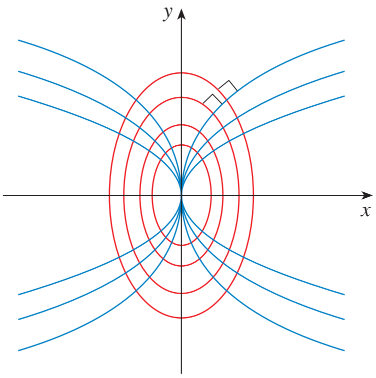


FIGURA 9

Las trayectorias ortogonales aparecen en varias ramas de la física. Por ejemplo, en un campo electrostático, las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante. También, las líneas de corriente en aerodinámica son trayectorias ortogonales de las curvas equipotenciales de velocidad.

PROBLEMAS DE MEZCLA

Un problema de mezcla característico incluye un recipiente de capacidad fija lleno con una solución mezclada en todos sus partes de alguna sustancia, como una sal. Una solución de una determinada concentración entra al recipiente en una proporción fija, y la mezcla, totalmente agitada, sale con una proporción fija, que puede diferir de la relación entrante. Si $y(t)$ denota la cantidad de sustancia en el recipiente en el tiempo t, después $y'(t)$ es la proporción a la que la sustancia está siendo añadida, menos la proporción a la cual está siendo removida. La descripción matemática de esta situación suele llevar a una ecuación diferencial separable de primer orden. Se puede usar el mismo tipo de razonamiento para representar diversos fenómenos: reacciones químicas, descarga de contaminantes en un lago, inyección de un fármaco en el torrente sanguíneo.

EJEMPLO 6 Un recipiente contiene 20 kg de sal disuelta en 5 000 L de agua. Salmuera que contiene 0.03 kg de sal por litro de agua entra al recipiente con una relación de 25 L/min. La solución se mantiene mezclada por completo y sale del recipiente con la misma proporción. ¿Cuánta sal queda en el recipiente después de media hora?

SOLUCIÓN Sea $y(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos. Se tiene como dato que $y(0) = 20$ y se quiere determinar $y(30)$. Esto se hace al hallar una ecuación diferencial que satisface $y(t)$. Note que dy/dt es la rapidez de cambio de la cantidad de sal, por eso

$$\boxed{5} \qquad \frac{dy}{dt} = (\text{proporción de entrada}) - (\text{proporción de salida})$$

donde (proporción de entrada) es la relación a la que la sal entra al recipiente y (proporción de salida) es la relación a la que la sal sale del recipiente. Se tiene

$$\text{proporción de entrada} = \left(0.03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0.75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

El recipiente contiene siempre 5 000 L de líquido, así que la concentración en el tiempo t es $y(t)/5\,000$ (medida en kilogramos por litro). Puesto que la salmuera sale a una proporción de 25 L/min, se tiene

$$\text{proporción de salida} = \left(\frac{y(t)}{5000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Así, de la ecuación 5 se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = 0.75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Al resolver esta ecuación diferencial separable, se obtiene

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

■ En la figura 10 se muestra la gráfica de la función $y(t)$ del ejemplo 6. Observe que, conforme pasa el tiempo, la cantidad de sal se aproxima a 150 kg.

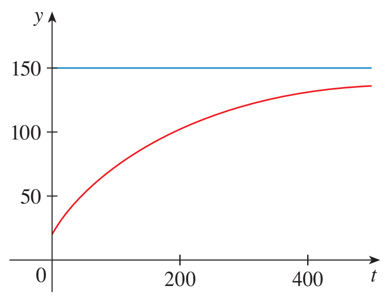


FIGURA 10

Puesto que $y(0) = 20$, se tiene $-\ln 130 = C$, así

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Por lo tanto, $$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Puesto que $y(t)$ es continua y $y(0) = 20$ y el lado derecho nunca es 0, se deduce que $150 - y(t)$ es siempre positiva. Así, $|150 - y| = 150 - y$ también

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

La cantidad de sal después de 30 minutos es

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38.1 \text{ kg}$$ □

9.3 EJERCICIOS

1–10 Resuelva la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x}}{e^y}$

3. $(x^2 + 1)y' = xy$

4. $y' = y^2 \operatorname{sen} x$

5. $(1 + \tan y)y' = x^2 + 1$

6. $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{1 + \sqrt{r}}{1 + \sqrt{u}}$

7. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{te^t}{y\sqrt{1 + y^2}}$

8. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{e^y \operatorname{sen}^2\theta}{y \sec \theta}$

9. $\dfrac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu$

10. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

11–18 Encuentre la solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial que se indica.

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$, $y(0) = -3$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \cos x}{1 + y^2}$, $y(0) = 1$

13. $x \cos x = (2y + e^{3y})y'$, $y(0) = 0$

14. $\dfrac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}$, $P(1) = 2$

15. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}$, $u(0) = -5$

16. $xy' + y = y^2$, $y(1) = -1$

17. $y' \tan x = a + y$, $y(\pi/3) = a$, $0 < x < \pi/2$

18. $\dfrac{dL}{dt} = kL^2 \ln t$, $L(1) = -1$

19. Encuentre una ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 1)$ y cuya pendiente en (x, y) es xy.

20. Hallar la función f de tal manera que

$f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

21. Resolver la ecuación diferencial $y' = x + y$ haciendo el cambio de variable $u = x + y$.

22. Resolver la ecuación diferencial $xy' = y + xe^{y/x}$ haciendo el cambio de variable $v = y/x$.

23. (a) Resuelva la ecuación diferencial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$.
(b) Resuelva el problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$, y grafique la solución.
(c) ¿El problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 2$, tiene solución? Explique.

24. Resuelva la ecuación $e^{-y}y' + \cos x = 0$ y grafique diferentes integrantes de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía la constante C?

CAS **25.** Resuelva el problema de valor inicial $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$, $y(0) = \pi/2$, y grafique la solución (si su CAS hace gráficas implícitas).

CAS **26.** Resuelva la ecuación $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ y grafique diferentes integrantes de la familia de soluciones (si su CAS hace gráficas implícitas). ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía la constante C?

CAS **27–28**
(a) Use un sistema algebraico computacional para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial. Imprímalo y utilícelo para bosquejar algunas curvas solución sin resolver la ecuación diferencial.
(b) Resuelva la ecuación diferencial.
(c) Emplee un CAS para trazar diferentes integrantes de la familia de soluciones obtenida en el inciso (b). Compare con las curvas del inciso (a).

27. $y' = 1/y$

28. $y' = x^2/y$

29–32 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Use un dispositivo de graficación para trazar diferentes integrantes de cada familia en una pantalla común.

29. $x^2 + 2y^2 = k^2$

30. $y^2 = kx^3$

31. $y = \dfrac{k}{x}$

32. $y = \dfrac{x}{1 + kx}$

33. Resuelva el problema de valor inicial del ejercicio 27 en la sección 9.2 a fin de hallar una expresión para la carga en el tiempo t. Encuentre el valor límite de la carga.

34. En el ejercicio 28 de la sección 9.2, se examinó una ecuación diferencial que describe la temperatura de una tasa de café a 95°C en una habitación a 20°C. Resuelva la ecuación diferencial, a fin de hallar una expresión para la temperatura del café en el tiempo t.

35. En el ejercicio 13 de la sección 9.1 se formuló un modelo para el aprendizaje en la forma de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

donde $P(t)$ mide el desempeño de alguien que aprende una habilidad después de un tiempo de entrenamiento t, M es el nivel máximo de desempeño y k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $P(t)$. ¿Cuál es el límite de esta expresión?

36. En una reacción química elemental, las moléculas simples de dos reactivos A y B forman una molécula del producto C: $A + B \longrightarrow C$. La ley de acción de masas establece que la velocidad de reacción es proporcional al producto de las concentraciones de A y B:

$$\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$$

(Véase el ejemplo 4 en la sección 3.7.) De este modo, si las concentraciones iniciales son $[\mathrm{A}] = a$ moles/L y $[\mathrm{B}] = b$ moles/L y se escribe $x = [\mathrm{C}]$, después se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

CAS (a) Suponiendo que $a \neq b$, determine x como una función de t. Use el hecho de que la concentración inicial de C es 0.

(b) Determine $x(t)$ suponiendo que $a = b$. ¿Cómo se simplifica esta expresión para $x(t)$ si se sabe que $[\mathrm{C}] = \frac{1}{2}a$ después de 20 segundos?

37. En contraste con la situación del ejercicio 36, los experimentos muestran que la reacción $H_2 + Br_2 \longrightarrow 2HBr$ satisface la ley de velocidad

$$\frac{d[\mathrm{HBr}]}{dt} = k[\mathrm{H}_2][\mathrm{Br}_2]^{1/2}$$

y, de este modo, para esta reacción la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

donde $x = [\mathrm{HBr}]$ y a y b son las concentraciones iniciales de hidrógeno y bromo.

(a) Determinar x como una función de t en el caso donde $a = b$. Use el hecho de que $x(0) = 0$.

(b) Si $a > b$, encuentre t como una función de x. [*Sugerencia*: al llevar a cabo la integración, haga la sustitución $u = \sqrt{b - x}$.]

38. Una esfera con radio 1 m tiene temperatura 15°C. Está dentro de una esfera concéntrica con radio 2 m y temperatura 25°C. La temperatura $T(r)$ a una distancia r desde el centro común de las esferas satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Si se permite que $S = dT/dr$, por lo tanto S satisface una ecuación diferencial de primer orden. Resuélvala a fin de hallar una expresión para la temperatura $T(r)$ entre las esferas.

39. Se administra una solución de glucosa por vía intravenosa en el torrente sanguíneo en una proporción constante r. A medida que se añade la glucosa, se convierte en otras sustancias y se elimina del torrente sanguíneo con una rapidez que es proporcional a la concentración en ese momento. De esta manera, un modelo para la concentración $C = C(t)$ de la solución de glucosa en el torrente sanguíneo es

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

donde k es una constante positiva.

(a) Suponga que la concentración en el tiempo $t = 0$ es C_0. Determine la concentración en cualquier tiempo t resolviendo la ecuación diferencial.

(b) Suponiendo que $C_0 < r/k$, encuentre $\lim_{t\to\infty} C(t)$ interprete su respuesta.

40. Cierto país pequeño tiene 10 000 millones de dólares en papel moneda en circulación, y cada día entran a los bancos del país 50 millones. El gobierno decide introducir una nueva moneda y pide a los bancos que reemplacen los billetes viejos por los nuevos, siempre que la moneda antigua llegue a los bancos. Sea $x = x(t)$ denota la cantidad de la nueva moneda en circulación en el tiempo t, con $x(0) = 0$.

(a) Formule un modelo matemático en la forma de un problema de valor inicial que representa el "flujo" de la nueva moneda en circulación.

(b) Resuelva el problema de valor inicial hallado en el inciso (a).

(c) ¿En cuánto tiempo los nuevos billetes representan 90% de la moneda en circulación?

41. Un tanque contiene 1 000 L de salmuera con 15 kg de sal disuelta. El agua pura entra al tanque a una relación de 10 L/min. La solución se mantiene completamente mezclada y sale con la misma relación. ¿Cuánta sal está en el tanque (a) después de t minutos y (b) después de 20 minutos?

42. El aire en una habitación con 180 m^3 de volumen contiene inicialmente 0.15% de dióxido de carbono. Aire nuevo con únicamente 0.05% de dióxido de carbono circula hacia adentro de la habitación en una cantidad de 2 m^3/min y el aire mezclado circula hacia fuera en la misma proporción. Hallar el porcentaje de dióxido de carbono en la habitación como una función del tiempo. ¿Qué sucede en periodos prolongados.

43. Un tanque con 500 galones de cerveza que contiene 4% de alcohol (en volumen). Se bombea cerveza con 6% de alcohol hacia adentro del tanque en una proporción de 5 gal/min y la mezcla se bombea hacia afuera en la misma proporción. Cuál es el porcentaje de alcohol después de una hora?

44. Un tanque contiene 1 000 L de agua pura. La salmuera que contiene 0.05 kg de sal por litro de agua entra al tanque en una proporción de 5 L/min. Salmuera que contiene 0.04 kg de sal por litro de agua entra al tanque en una proporción de 10 L/min. La solución se mantiene totalmente mezclada y sale del tanque con una proporción de 15 L/min. ¿Cuánta sal está en el tanque (a) después de t minutos y (b) después de una hora?

45. Cuando cae una gota de lluvia, aumenta de tamaño y, por eso, su masa en tiempo t es una función de t, $m(t)$. La rapidez de crecimiento de la masa es $km(t)$ para alguna constante positiva k. Cuando se aplica la ley de Newton del movimiento a la gota de lluvia, se obtiene $(mv)' = gm$, donde v es la velocidad de la gota (con dirección hacia abajo) y g es la aceleración debida a la gravedad. La *velocidad terminal* de la gota de lluvia es $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Encuentre una expresión para la velocidad terminal de g y k.

46. Un objeto de masa m se mueve horizontalmente a través de un medio que resiste el movimiento con una fuerza que es una función de la velocidad; es decir,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

donde $v = v(t)$ y $s = s(t)$ representan la velocidad y la posición del objeto en el tiempo t, respectivamente. Por ejemplo, considere un bote que se mueve en el agua.

(a) Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad, es decir, $f(v) = -kv$, k es una constante positiva. (Este modelo es apropiado para valores pequeños de v.) Sean $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$ los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que recorre el objeto desde el tiempo $t = 0$?

(b) Para valores más grandes de v un mejor modelo se obtiene suponiendo que la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. (Newton fue el primero en proponer este modelo). Sean v_0 y s_0 los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que viaja el objeto en este caso?

47. Sea $A(t)$ el área de un cria de tejido deseda en el tiempo t y sea M el área final del tejido cuando se completa el crecimiento. La mayor parte de las divisiones celulares ocurren en la periferia del tejido y el número de celdas de la periferia es proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Así, un modelo razonable para el crecimiento del tejido se obtiene suponiendo que la rapidez de crecimiento del área es proporcional a $\sqrt{A(t)}$ y $M - A(t)$.

(a) Formule una ecuación diferencial y empléela para mostrar que el tejido crece lo más rápido posible cuando $A(t) = \frac{1}{3}M$.

CAS (b) Resuelva la ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $A(t)$. Use un sistema algebraico computacional para llevar a cabo la integración.

48. De acuerdo con la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m que ha sido proyectado verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre es

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

donde $x = x(t)$ es la distancia del objeto arriba de la superficie en el tiempo t, R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debida a la gravedad. Asimismo, por la segunda ley de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$ y, por lo tanto,

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

(a) Suponga que un cohete es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Sea h la altura máxima sobre la superficie alcanzada por el objeto. Muestre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$$

[*Sugerencia*: por la regla de la cadena, $m(dv/dt) = mv(dv/dx)$.]

(b) Calcule $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$. Este límite se llama *velocidad de escape* para la Tierra.

(c) Use $R = 3\,960$ millas y $g = 32$ pies/s^2 para calcular v_e en pies por segundo y en millas por segundo.

PROYECTO DE APLICACIÓN

¿QUÉ TAN RÁPIDO DRENA UN TANQUE?

Si el agua (u otro líquido) drena de un tanque, se espera que el flujo sea mayor al principio (cuando la profundidad del agua es máxima) y disminuya poco a poco a medida que disminuye el nivel del agua. Pero se necesita una descripción matemática más precisa de cómo disminuye el flujo, a fin de contestar el tipo de preguntas que hacen los ingenieros: ¿en cuánto tiempo se drena por completo un tanque? ¿Cuánta agua debe contener un tanque a fin de garantizar cierta presión de agua mínima para un sistema de aspersión?

Sea $h(t)$ y $V(t)$ la altura y el volumen de agua en el tanque en el tiempo t. Si el agua sale por un orificio con área a en el fondo del tanque, entonces la ley de Torricelli dice que

$$\boxed{1} \qquad \frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Así, la cantidad a la cual fluye el agua desde el tanque es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del agua.

1. (a) Suponga que el tanque es cilíndrico con altura 6 pies y radio 2 pies, y el orificio es circular con radio 1 pulgada. Si se toma $g = 32$ pies/s^2, muestre que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{h}$$

(b) Resuelva esta ecuación para hallar la altura del agua en el tiempo t, bajo el supuesto de que el tanque está lleno en el tiempo $t = 0$.

(c) ¿Cuánto tarda en drenar por completo el agua?

2. Como resultado de la rotación y viscosidad del líquido, el modelo teórico dado por la ecuación 1 no es bastante exacto. En cambio, el modelo

$$\boxed{2} \qquad \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}$$

se emplea con más frecuencia y la constante k (que depende de las propiedades físicas del líquido) se determina de los datos relacionados con el drenado del tanque.

(a) Suponga que hace un orificio en el costado de una botella cilíndrica y la altura h del agua (arriba del orificio) disminuye de 10 cm a 3 cm en 68 segundos. Use la ecuación 2 a fin de hallar una expresión para $h(t)$. Evalúe $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$.

(b) Haga un orificio de 4 mm cerca del fondo de la parte cilíndrica de una botella de plástico de bebida carbonatada de dos litros. Adhiera una tira de cinta adhesiva marcada en centímetros de 0 a 10, con 0 que corresponde a la parte superior del orificio. Con un dedo sobre el orificio, llene la botella con agua hasta la marca de 10 cm. Luego quite su dedo del orificio y registre los valores de $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ segundos. (Es probable que encuentre que transcurren 68 segundos para que el nivel disminuya a $h = 3$ cm.) Compare sus datos con los valores de $h(t)$ del inciso (a). ¿Qué tan bien predice el modelo los valores reales?

■ Esta parte del proyecto se realiza mejor como una demostración de salón de clases o como un proyecto de grupo con tres alumnos en cada grupo: un cronometrador que indique los segundos, una persona a cargo de la botella para estimar la altura cada 10 segundos y alguien que registre estos valores.

3. En muchas partes del mundo, el agua para los sistemas de aspersión en grandes hoteles y hospitales se suministra por gravedad desde tanques cilíndricos en o cerca de los techos de los edificios. Suponga que un tanque de este tipo tiene radio de 10 ft y que el diámetro de la salida es de 2.5 pulgadas. Un ingeniero tiene que garantizar que la presión del agua será por lo menos 2 160 lb/ft^2 para un periodo de 10 minutos. (Cuando se presenta un incendio, el sistema eléctrico podría fallar y podría tomar hasta 10 minutos la activación del generador de emergencia y la bomba de agua.) ¿Qué altura debe especificar el ingeniero para el tanque, a fin de garantizar la presión? (Use el hecho de que la presión del agua a una profundidad de d pies es $P = 62.5d$. Véase la sección 8.3.)

4. No todos los tanques de agua tienen forma cilíndrica. Suponga que un tanque tiene área de sección transversal $A(h)$ a la altura h. Por lo tanto el volumen del agua hasta la altura h es $V = \int_0^h A(u)\, du$ y, por lo tanto, el teorema fundamental del cálculo da $dV/dh = A(h)$. Se deduce que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = A(h)\frac{dh}{dt}$$

y, por consiguiente, la ley de Torricelli se convierte en

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

(a) Suponga que el tanque tiene la forma de una esfera con radio 2 m y al principio está lleno con agua hasta la mitad. Si el radio del orificio circular es 1 cm y se toma $g = 10$ m/s^2, muestre que h satisface la ecuación diferencial

$$(4h - h^2)\frac{dh}{dt} = -0.0001\sqrt{20h}$$

(b) ¿Cuánto tarda en drenar por completo el agua?

PROYECTO DE APLICACIÓN

¿QUÉ ES MÁS RÁPIDO, SUBIR O BAJAR?

Suponga que lanza una bola al aire. ¿Considera que tarda más en alcanzar su altura máxima o en regresar al suelo desde su altura máxima? En este proyecto se resolverá este problema pero, antes de empezar, piense en esa situación y haga una conjetura con base en su intuición física.

■ Al modelar la fuerza debida a la resistencia del aire, se han empleado varias funciones, dependiendo de las características físicas y la rapidez de la bola. Aquí se usa un modelo lineal, $-pv$, pero un modelo cuadrático ($-pv^2$ en el camino ascendente y pv^2 en el camino descendente) es otra posibilidad para magnitudes de velocidades más altas (véase el ejercicio 46 en la sección 9.3). Para una pelota de golf, los experimentos han mostrado que un buen modelo es $-pv^{1.3}$ hacia arriba y $p|v|^{1.3}$ hacia abajo. Pero no importa qué función de fuerza $-f(v)$ se emplee [donde $f(v) > 0$ para $v > 0$ y $f(v) < 0$ para $v < 0$], la respuesta a la pregunta es la misma. Véase F. Brauer, "What Goes Up Must Come Down, Eventually," *Amer. Math. Monthly* 108 (2001), pp. 437-440.

1. Una bola con masa m se proyecta hacia arriba verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial positiva v_0. Se supone que las fuerzas que actúan sobre la bola son la fuerza de gravedad y una fuerza retardadora de la resistencia del aire con dirección opuesta a la dirección del movimiento y con magnitud $p|v(t)|$, donde p es una constante positiva y $v(t)$ es la velocidad de la bola en el tiempo t. Tanto en el ascenso como en el descenso, la fuerza total que actúa sobre la bola es $-pv - mg$. [Durante el ascenso, $v(t)$ es positiva y la resistencia actúa hacia abajo; durante el descenso, $v(t)$ es negativa y la resistencia actúa hacia arriba]. Así, por la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$mv' = -pv - mg$$

Resuelva esta ecuación diferencial para mostrar que la velocidad es

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

2. Muestre que la altura de la bola, hasta que choca con el suelo, es

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}(1 - e^{-pt/m}) - \frac{mgt}{p}$$

3. Sea t_1 el tiempo que tarda la bola en alcanzar su altura máxima. Muestre que

$$t_1 = \frac{m}{p}\ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Determine este tiempo para una bola con masa 1 kg y velocidad inicial 20 m/s. Suponga que la resistencia del aire es $\frac{1}{10}$ de la rapidez.

4. Sea t_2 el tiempo en el que la bola cae de regreso a la Tierra. Para la bola particular del problema 3, estime t_2 por medio de una gráfica de la función de altura $y(t)$. ¿Qué es más rápido, subir o bajar?

5. En general, no es fácil determinar t_2 porque es imposible resolver la ecuación $y(t) = 0$ en forma explícita. Sin embargo, se puede usar un método directo para determinar si el ascenso o el descenso es más rápido; se determina si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. Muestre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right)$$

donde $x = e^{pt_1/m}$. Después muestre que $x > 1$ y la función

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

es creciente para $x > 1$. Use este resultado para decidir si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. ¿Qué se puede concluir? ¿Es más rápido el ascenso o el descenso?

medio segundo. ¿A qué distancia de la base de bateo se debe colocar el parador en corto a fin de reducir el tiempo total para que la bola llegue a su destino? ¿El entrenador debe promover un lanzamiento directo o uno de relevo? ¿Qué pasa si el parador en corto puede lanzar a 115 pies/s?

(c) ¿Para qué velocidad de lanzamiento del parador en corto un lanzamiento de relevo toma el mismo tiempo que un lanzamiento directo?

9.5 ECUACIONES LINEALES

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es una que se puede escribir en la forma

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas en un determinado intervalo. Este tipo de ecuación se presenta con frecuencia en varias ciencias, como se verá.

Un ejemplo de una ecuación lineal es $xy' + y = 2x$ porque, para $x \neq 0$, se puede escribir en la forma

$$\boxed{2} \qquad y' + \frac{1}{x}y = 2$$

Observe que esta ecuación diferencial no es separable porque es imposible factorizar la expresión para y' como una función de x por una función de y. Pero aún se puede resolver la ecuación si se nota, por la regla del producto, que

$$xy' + y = (xy)'$$

y, por lo tanto, la ecuación se puede reescribir como

$$(xy)' = 2x$$

Si ahora se integran ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$xy = x^2 + C \qquad \text{o} \qquad y = x + \frac{C}{x}$$

Si se hubiera tenido la ecuación diferencial en la forma de la ecuación 2, se habría tenido que tomar el paso preliminar de multiplicar cada lado de la ecuación por x.

Resulta que toda ecuación diferencial lineal de primer orden se puede resolver de un modo similar al multiplicar ambos lados de la ecuación 1 por una función adecuada $I(x)$ llamada *factor de integración.* Se intenta hallar I de modo que el lado izquierdo de la ecuación 1, cuando se multiplique por $I(x)$, se convierta en la derivada del producto $I(x)y$:

$$\boxed{3} \qquad I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)'$$

Si se puede hallar tal función I, en tal caso la ecuación 1 se convierte en

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Al integrar ambos lados, se debe tener

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)\,dx + C$$

de modo que la solución sería

4 $$y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx + C\right]$$

Para hallar tal I, se desarrolla la ecuación 3 y se cancelan términos:

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$
$$I(x)P(x) = I'(x)$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para I, que se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$
$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$
$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

donde $A = \pm e^C$. Se busca un factor de integración particular, no el más general, así que se toma $A = 1$ y se usa

5 $$I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

Así, una fórmula para la solución general de la ecuación 1 la da la ecuación 4, donde I se determina mediante la ecuación 5. Sin embargo, en lugar de memorizar esta fórmula, sólo se recuerda la forma del factor de integración.

> Para resolver la ecuación diferencial lineal $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique ambos lados por el **factor de integración** $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre ambos lados.

V EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

SOLUCIÓN La ecuación dada es lineal, puesto que tiene la forma de la ecuación 1 con $P(x) = 3x^2$ y $Q(x) = 6x^2$. Un factor de integración es

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por e^{x^3}, se obtiene

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

o bien,
$$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$$

■ En la figura 1 se muestran las gráficas de varios integrantes de la familia de soluciones del ejemplo 1. Observe que se aproximan a 2 cuando $x \to \infty$.

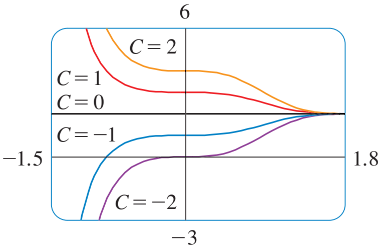


FIGURA 1

La integración de ambos lados produce

$$e^{x^3}y = \int 6x^2 e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$ □

EJEMPLO 2 Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

SOLUCIÓN Se deben dividir primero ambos lados entre el coeficiente de y' para escribir la ecuación diferencial en la forma estándar:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0 \tag{6}$$

El factor de integración es

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

Al multiplicar la ecuación 6 por x, se obtiene

$$xy' + y = \frac{1}{x} \qquad \text{o} \qquad (xy)' = \frac{1}{x}$$

Entonces $$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

■ La solución del problema de valor inicial del ejemplo 2 se muestra en la figura 2.

y, por eso, $$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

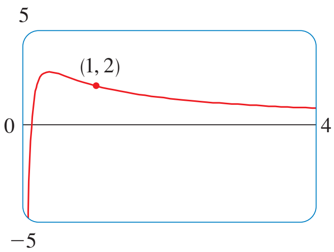


FIGURA 2

Puesto que $y(1) = 2$, se tiene

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

En consecuencia, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$ □

EJEMPLO 3 Resuelva $y' + 2xy = 1$.

SOLUCIÓN La ecuación dada está en la forma estándar para una ecuación lineal. Al multiplicar por el factor de integración

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

se obtiene $$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

o bien, $$\left(e^{x^2}y\right)' = e^{x^2}$$

Por lo tanto, $$e^{x^2}y = \int e^{x^2}\,dx + C$$

■ Aun cuando las soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 3 se pueden expresar en términos de una integral, se pueden graficar todavía mediante un sistema algebraico computacional (figura 3).

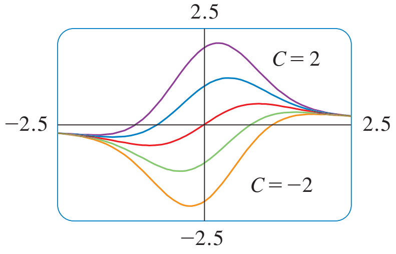


FIGURA 3

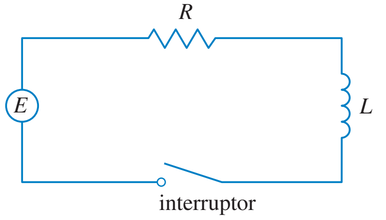


FIGURA 4

■ La ecuación diferencial del ejemplo 4 es lineal y separable, así que un método alternativo es resolverla como una ecuación separable (ejemplo 4 de la sección 9.3). Sin embargo, si se reemplaza la batería por un generador, se obtiene una ecuación que es lineal pero no es separable (ejemplo 5).

Recuerde de la sección 7.5 que $\int e^{x^2}\,dx$ no se puede expresar en términos de funciones elementales. Sin embargo, es una función perfectamente buena y se puede dejar la respuesta como

$$y = e^{-x^2}\int e^{x^2}\,dx + Ce^{-x^2}$$

Otra forma de escribir la solución es

$$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^{-x^2}$$

(Se puede elegir cualquier número para el límite de integración inferior.) □

APLICACIÓN A CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En la sección 9.2 se consideró el circuito eléctrico simple mostrado en la figura 4: una fuerza electromotriz (por lo común, una batería o generador) produce un voltaje de $E(t)$ volts (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms (Ω) y un inductor con una inductancia de L henries (H).

La ley de Ohm da la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje debida al inductor es $L(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff dice que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado $E(t)$. Así, se tiene

$$\boxed{7} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución da la corriente I en el tiempo t.

V EJEMPLO 4 Suponga que en el circuito simple de la figura 4 la resistencia es 12 Ω y la inductancia es 4 H. Si una batería da un voltaje constante de 60 V y el interruptor se cierra cuando $t = 0$ de modo que la corriente empieza con $I(0) = 0$, encuentre (a) $I(t)$, (b) la corriente después de 1 s y (c) el valor límite de la corriente.

SOLUCIÓN

(a) Si se escribe $L = 4$, $R = 12$, y $E(t) = 60$ en la ecuación 7, se obtiene el problema con valores iniciales

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

o bien,
$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

Al multiplicar por el factor de integración $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$, se obtiene

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

■ En la figura 5 se muestra cómo la corriente del ejemplo 4 se aproxima a su valor límite.

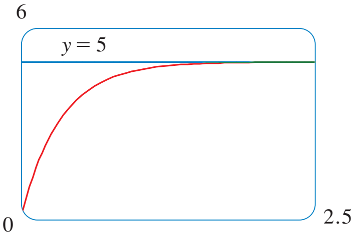


FIGURA 5

Puesto que $I(0) = 0$, se tiene $5 + C = 0$, por lo tanto, $C = -5e$

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

(b) Después de un segundo, la corriente es

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.75 \text{ A}$$

(c) El valor d la corriente en el límite está dado por

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$ □

EJEMPLO 5 Suponga que la resistencia y la inductancia permanecen como en el ejemplo 4 pero, en lugar de la batería, se usa un generador que produce un voltaje variable de $E(t) = 60 \operatorname{sen} 30t$ volts. Encuentre $I(t)$.

SOLUCIÓN Esta vez la ecuación diferencial se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \operatorname{sen} 30t \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15 \operatorname{sen} 30t$$

El mismo factor de integración e^{3t} da

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t$$

■ En la figura 6 se muestra la gráfica de la corriente cuando se reemplaza la batería por un generador.

Por medio de la fórmula 98 de la tabla de integrales, se tiene

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t\, dt = 15\frac{e^{3t}}{909}(3 \operatorname{sen} 30t - 30 \cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + Ce^{-3t}$$

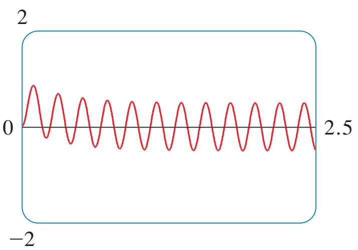


FIGURA 6

Puesto que $I(0) = 0$, se obtiene

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

por lo tanto, $$I(t) = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + \tfrac{50}{101}e^{-3t}$$ □

9.5 EJERCICIOS

1–4 Determine si la ecuación diferencial es lineal.

1. $y' + \cos x = y$

2. $y' + \cos y = \tan x$

3. $yy' + xy = x^2$

4. $xy + \sqrt{x} = e^x y'$

5–14 Resuelva la ecuación diferencial.

5. $y' + 2y = 2e^x$

6. $y' = x + 5y$

7. $xy' - 2y = x^2$

8. $x^2y' + 2xy = \cos^2 x$

9. $xy' + y = \sqrt{x}$

10. $y' + y = \operatorname{sen}(e^x)$

11. $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \operatorname{sen}(x^2)$

12. $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$

13. $(1 + t)\dfrac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$

14. $t \ln t \dfrac{dr}{dt} + r = te^t$

15–20 Resuelva el problema con valores iniciales.

15. $y' = x + y, \quad y(0) = 2$

16. $t \dfrac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0, \quad y(1) = 0$

17. $\dfrac{dv}{dt} - 2tv = 3t^2 e^{t^2}, \quad v(0) = 5$

18. $2xy' + y = 6x, \quad x > 0, \quad y(4) = 20$

19. $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 0$

20. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2$

21–22 Resuelva la ecuación diferencial y use una calculadora o computadora para graficar varios miembros de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía C?

21. $xy' + 2y = e^x$

22. $y' + (\cos x)y = \cos x$

---

23. Una **ecuación diferencial de Bernoulli** (en honor a James Bernoulli) es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, si $n = 0$ o 1, la ecuación de Bernoulli es lineal. Para otros valores de n, muestre que la sustitución $u = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

24–25 Use el método del ejercicio 23 para resolver la ecuación diferencial.

24. $xy' + y = -xy^2$

25. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$

---

26. Resolver la ecuación de segundo orden $xy'' + 2y' = 12x^2$ haciendo la sustitución $u = y'$

27. En el circuito mostrado en la figura 4, un generador suministra un voltaje de 40 V, la inductancia es 2 H, la resistencia es 10 Ω, e $I(0) = 0$.
(a) Encuentre $I(t)$.
(b) Determine la corriente después de 0.1 s.

28. En el circuito mostrado en la figura 4, un generador suministra un voltaje de $E(t) = 40 \operatorname{sen} 60t$ volts, la inductancia es 1 H, la resistencia es 20 Ω, e $I(0) = 1$ A.
(a) Encuentre $I(t)$.
(b) Determine la corriente después de 0.1 s.
(c) Use un dispositivo de graficación para dibujar la gráfica de la función de corriente.

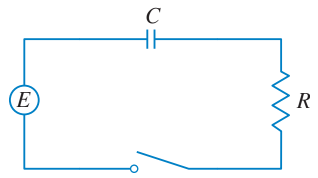
29. En la figura se muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz, un capacitor con capacitancia C farads (F), y un resistor con una resistencia de R ohms (Ω). La caída de voltaje en el capacitor es Q/C, donde Q es la carga (en coulombs), así que en este caso la ley de Kirchhoff da

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Pero $I = dQ/dt$ (véase el ejemplo 3 en la sección 3.7), de este modo se tiene

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponga que la resistencia es 5 Ω, la capacitancia es 0.05 F, una batería da un voltaje constante de 60 V, y la carga inicial es $Q(0) = 0$ C. Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.



30. En el circuito del ejercicio 29, $R = 2$ Ω, $C = 0.01$ F, $Q(0) = 0$, y $E(t) = 10 \operatorname{sen} 60t$. Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.

31. Sea $P(t)$ el nivel de desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función de tiempo de capacitación t. La gráfica de P se llama *curva de aprendizaje*. En el ejercicio 13 de la sección 9.1 se propuso la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)]$$

como un modelo razonable para el aprendizaje, donde k es una constante positiva. Resuélvala como una ecuación diferencial lineal y use su solución para graficar la curva de aprendizaje

32. Se contrató a dos nuevos trabajadores para una línea de ensamble. Jaime procesó 25 unidades durante la primera hora y 45 unidades durante la segunda hora. Marco procesó 35 unidades durante la primera hora y 50 unidades durante la segunda hora. Por medio del modelo del ejercicio 31, y suponiendo que $P(0) = 0$, estime el número máximo de unidades por hora que cada trabajador es capaz de procesar.

33. En la sección 9.3 se examinaron problemas de mezcla en los que el volumen de líquido permaneció constante y se vio que tales problemas dan lugar a ecuaciones separables. (Véase el ejemplo 6 de esa sección). Si las relaciones de flujo hacia dentro y hacia fuera del sistema son diferentes, entonces el volumen no es constante y la ecuación diferencial resultante es lineal pero no separable.

Un tanque contiene 100 L de agua. Una solución con una concentración de sal de 0.4 kg/L se agrega en una proporción de 5 L/min. La solución se mantiene mezclada y se drena del tanque a una rapidez de 3 L/min. Si $y(t)$ es la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos, muestre que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

Resuelva esta ecuación y determine la concentración después de 20 minutos.

34. Un recipiente con una capacidad de 400 L se llena con una mezcla de agua y cloro con una concentración de 0.05 g de cloro por litro. A fin de reducir la concentración de cloro, se bombea agua nueva hacia el recipiente a una proporción de 4 L/s. La mezcla se mantiene agitada y se bombea hacia afuera con una proporción de 10 L/s. Encuentre la cantidad de cloro en el recipiente como una función del tiempo.

35. Se deja caer desde el reposo un objeto con masa m y se supone que la resistencia del aire es proporcional a la rapidez del objeto. Si $s(t)$ es la distancia recorrida después de t segundos, después la rapidez es $v = s'(t)$ y la aceleración es $a = v'(t)$. Si g es la aceleración debida a la gravedad, luego la fuerza hacia abajo sobre el objeto es $mg - cv$, donde c es una constante positiva, y la segunda ley de Newton da

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

(a) Resuélvala como una ecuación lineal para mostrar que

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

(b) ¿Cuál es la velocidad límite?

(c) Encuentre la distancia que ha recorrido el objeto después de t segundos.

36. Si se ignora la resistencia del aire, se puede concluir que los objetos más pesados no caen más rápido que los objetos ligeros. Pero si se toma en cuenta la resistencia del aire, la conclusión cambia. Use la expresión para la velocidad de un objeto que cae en el ejercicio 35(a) para hallar dv/dm y muestre que los objetos más pesados *caen* más rápido que los más ligeros.

9.6 SISTEMAS DEPREDADOR-PRESA

Se ha observado una variedad de modelos para el crecimiento de una sola especie que vive sola en un ambiente. En esta sección se consideran modelos más reales que toman en cuenta la interacción de dos especies en el mismo hábitat. Se verá que estos modelos toman la forma de un par de ecuaciones diferenciales enlazadas.

Se considera primero la situación en la que una especie, llamada *presa,* tiene un suministro amplio de alimento y la segunda especie, llamada *depredador,* se alimenta de la presa. Ejemplos de presas y depredadores incluyen conejos y lobos en un bosque aislado, peces y tiburones, pulgones y mariquitas, y bacterias y amebas. El modelo tendrá dos variables dependientes, y ambas son funciones del tiempo. Sea $R(t)$ el número de presas (con R que representa conejos) y $W(t)$ el número de depredadores (con W para lobos) en el tiempo t.

En ausencia de depredadores, el suministro amplio de alimento soportaría el crecimiento exponencial de la presa, es decir,

$$\frac{dR}{dt} = kR \qquad \text{donde } k \text{ es una constante positiva}$$

En ausencia de presa, se supone que la población de depredadores disminuiría con una rapidez proporcional a sí misma, es decir,

$$\frac{dW}{dt} = -rW \qquad \text{donde } r \text{ es una constante positiva}$$

Sin embargo, con ambas especies presentes, se supone que la causa principal de muerte entre la presa que está siendo comida por un depredador, y los ritmos de natalidad y supervivencia de los depredadores depende de su suministro de alimento variable, a saber, la presa. Se supone también que las dos especies se encuentran entre sí a una frecuencia que es proporcional a ambas poblaciones y, por lo tanto, es proporcional al producto RW. (Mientras mayor sea la cantidad de cualquier población, es más probable que haya mayor número de encuentros). Un sistema de dos ecuaciones diferenciales que incorpora estas suposiciones, es como sigue:

W representa al depredador.
R representa a la presa.

$$\boxed{1} \qquad \frac{dR}{dt} = kR - aRW \qquad\qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

donde k, r, a y b son constantes positivas. Observe que el término $-aRW$ disminuye la rapidez de crecimiento natural de la presa y el término bRW incrementa la rapidez de crecimiento natural de los depredadores.

I RESPUESTAS A EJERCICIOS DE NÚMERO IMPAR

CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1 ■ PÁGINA 20

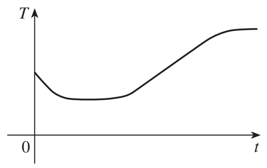
1. (a) -2 (b) 2.8 (c) $-3, 1$ (d) $-2.5, 0.3$
(e) $[-3, 3], [-2, 3]$ (f) $[-1, 3]$

3. $[-85, 115]$ **5.** No

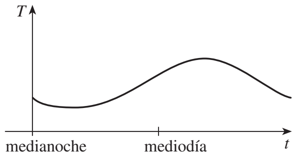
7. Sí, $[-3, 2], [-3, -2) \cup [-1, 3]$

9. Dieta, ejercicio o enfermedad

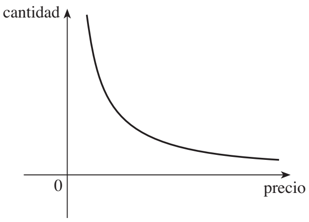
11.



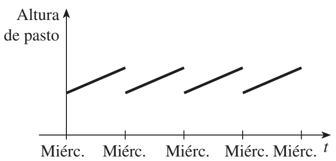
13.



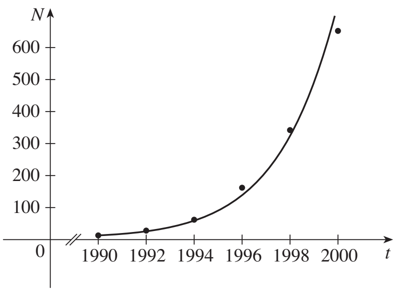
15.



17.



19. (a)



(b) En millones: 92; 485

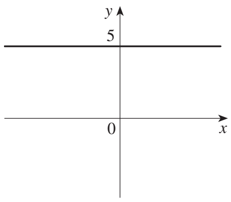
21. $12, 16, 3a^2 - a + 2, 3a^2 + a + 2, 3a^2 + 5a + 4,$
$6a^2 - 2a + 4, 12a^2 - 2a + 2, 3a^4 - a^2 + 2,$
$9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4, 3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$

23. $-3h - h,$ **25.** $-1/(ax),$

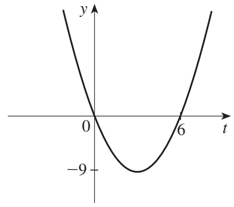
27. $\{x \mid x \neq \frac{1}{3}\} = (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

29. $[0, \infty)$ **31.** $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

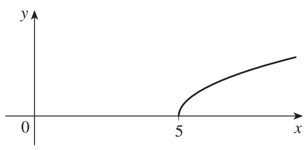
33. $(-\infty, \infty)$



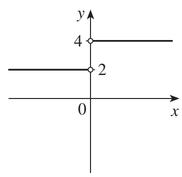
35. $(-\infty, \infty)$



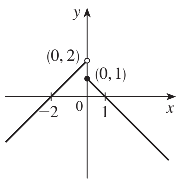
37. $[5, \infty)$



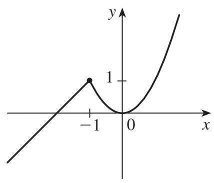
39. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



41. $(-\infty, \infty)$



43. $(-\infty, \infty)$



45. $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}, 1 \leqslant x \leqslant 5$ **47.** $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$

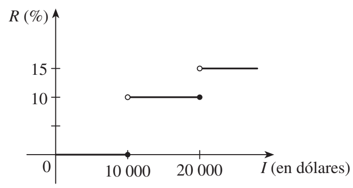
49. $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x - 6 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$

51. $A(L) = 10L - L^2, 0 < L < 10$

53. $A(x) = \sqrt{3}x^2/4, x > 0$ **55.** $S(x) = x^2 + (8/x), x > 0$

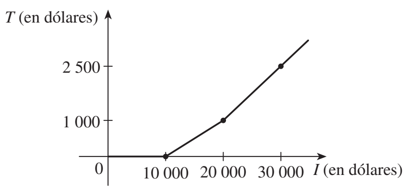
57. $V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x, 0 < x < 6$

59. (a)



(b) \$400, \$1 900

(c)



61. f es por, g es por

63. (a) $(-5, 3)$ (b) $(-5, -3)$

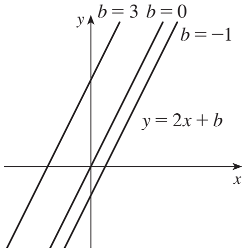
65. Par **67.** Ninguno **69.** Impar

EJERCICIOS 1.2 ■ PÁGINA 34

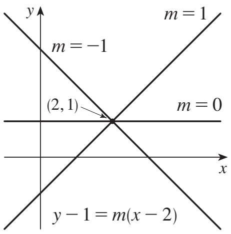
1. (a) Raíz (b) Algebraico (c) Polinomio (grado 9)
(d) Racional (e) Trigonométrico (f) Logarítmico

3. (a) h (b) f (c) g

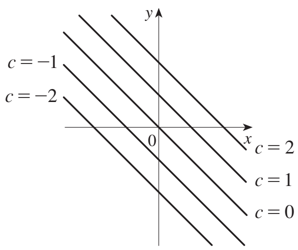
5. (a) $y = 2x + b$,
donde b es el cruce con y.



(b) $y = mx + 1 - 2m$,
donde m es la pendiente.
Véase gráfica a la derecha.
(c) $y = 2x - 3$



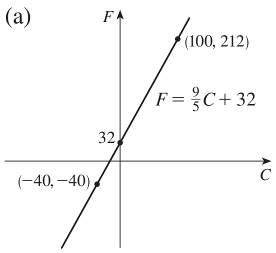
7. Sus gráficas tienen pendiente -1.



9. $f(x) = -3x(x+1)(x-2)$

11. (a) 8.34, cambio en mg por cada año de cambio
(b) 8.34 mg

13. (a)



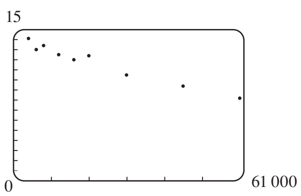
(b) $\frac{9}{5}$, cambio en °F por cada °C de cambio; 32, temperatura Fahrenheit correspondiente a 0°C

15. (a) $T = \frac{1}{6}N + \frac{307}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$, cambio en °F por chirrido por minuto de cambio (c) 76°F

17. (a) $P = 0.434d + 15$ (b) 196 pies

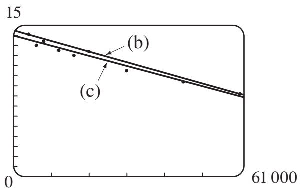
19. (a) Coseno (b) Lineal

21. (a)



El modelo lineal es apropiado

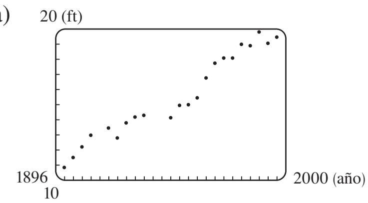
(b) $y = -0.000105x + 14.521$



(c) $y = -0.00009979x + 13.951$ [Véase gráfica en (b).]

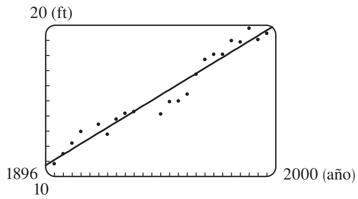
(d) Unos 11.5 por 100 de población (e) Alrededor de 6% (f) No

23. (a)



El modelo lineal es apropiado

(b) $y = 0.08912x - 158.24$ (c) 20 pies (d) No



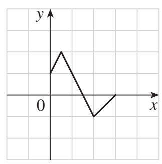
25. $y \approx 0.0012937x^3 - 7.06142x^2 + 12{,}823x - 7{,}743{,}770$; 1914 millón

EJERCICIOS 1.3 ■ PÁGINA 43

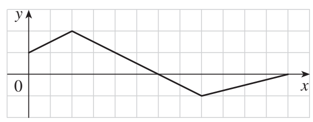
1. (a) $y = f(x) + 3$ (b) $y = f(x) - 3$ (c) $y = f(x - 3)$
(d) $y = f(x + 3)$ (e) $y = -f(x)$ (f) $y = f(-x)$
(g) $y = 3f(x)$ (h) $y = \frac{1}{3}f(x)$

3. (a) 3 (b) 1 (c) 4 (d) 5 (e) 2

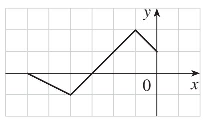
5. (a)



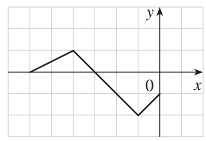
(b)



(c)

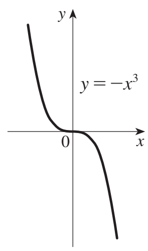


(d)

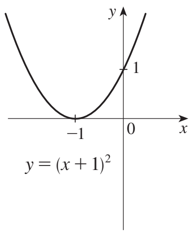


7. $y = -\sqrt{-x^2 - 5x - 4} - 1$

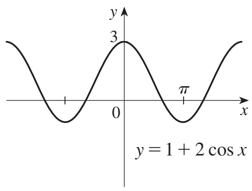
9.



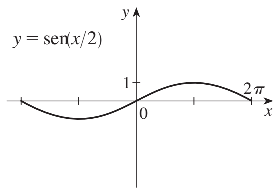
11.



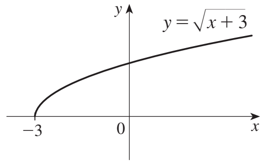
13.



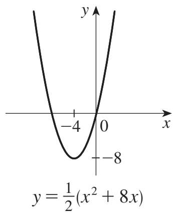
15.



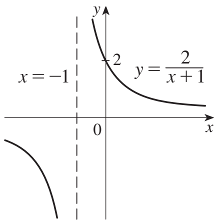
17.



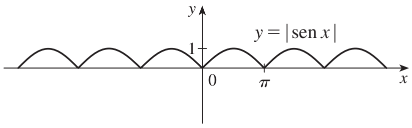
19.



21.



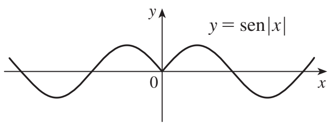
23.



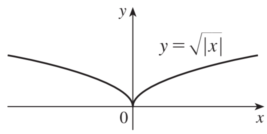
25. $L(t) = 12 + 2\,\text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$

27. (a) La parte de la gráfica $y = f(x)$ a la derecha del eje y se refleja alrededor del eje y.

(b)



(c)



29. $(f + g)(x) = x^3 + 5x^2 - 1,\ (-\infty, \infty)$
$(f - g)(x) = x^3 - x^2 + 1,\ (-\infty, \infty)$
$(fg)(x) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2,\ (-\infty, \infty)$
$(f/g)(x) = (x^3 + 2x^2)/(3x^2 - 1),\ \{x \mid x \neq \pm 1/\sqrt{3}\}$

31. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x,\ (-\infty, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1,\ (-\infty, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^2,\ (-\infty, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = 4x + 3,\ (-\infty, \infty)$

33. (a) $(f \circ g)(x) = 1 - 3\cos x,\ (-\infty, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = \cos(1 - 3),\ (-\infty, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = 9x - 2,\ (-\infty, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = \cos(\cos x),\ (-\infty, \infty)$

35. (a) $(f \circ g)(x) = (2x^2 + 6x + 5)/[(x + 2)(x + 1)]$, $\{x \mid x \neq -2, -1\}$
(b) $(g \circ f)(x) = (x^2 + x + 1)/(x + 1)^2,\ \{x \mid x \neq -1, 0\}$
(c) $(f \circ f)(x) = (x^4 + 3x^2 + 1)/[x(x^2 + 1)],\ \{x \mid x \neq 0\}$
(d) $(g \circ g)(x) = (2x + 3)/(3x + 5),\ \{x \mid x \neq -2, -\frac{5}{3}\}$

37. $(f \circ g \circ h)(x) = 2x - 1$

39. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x^6 + 4x^3 + 1}$

41. $g(x) = x^2 + 1, f(x) = x^{10}$

43. $g(x) = \sqrt[3]{x},\ f(x) = x/(1 + x)$

45. $g(t) = \cos t,\ f(t) = \sqrt{t}$

47. $h(x) = x^2,\ g(x) = 3^x,\ f(x) = 1 - x$

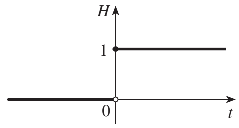
49. $h(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \sec x,\ f(x) = x^4$

51. (a) 4 (b) 3 (c) 0 (d) No existe; $f(6) = 6$ no está en el dominio de g. (e) 4 (f) -2

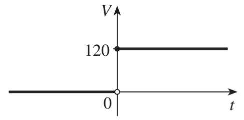
53. (a) $r(t) = 60t$ (b) $(A \circ r)(t) = 3\,600\pi t^2$; el área de la circunferencia es una función del tiempo

55. (a) $s = \sqrt{d^2 + 36}$ (b) $d = 30t$
(c) $s = \sqrt{900t^2 + 36}$; la distancia entre el faro y la nave es una función del tiempo transcurrido desde el mediodía

57. (a)

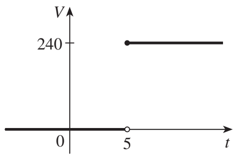


(b)



$V(t) = 120H(t)$

(c)



$V(t) = 240H(t - 5)$

59. Sí $m_1 m_2$

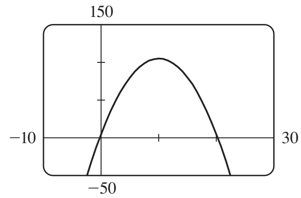
61. (a) $f(x) = x^2 + 6$ (b) $g(x) = x^2 + x - 1$

63. (a) Par; par (b) Impar; par

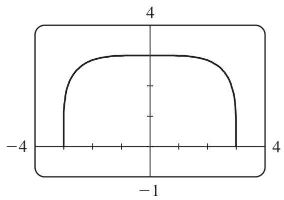
65. Sí

EJERCICIOS 1.4 ■ PÁGINA 51

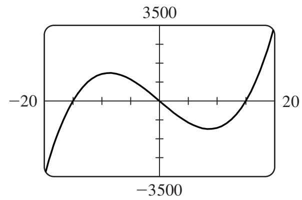
1. (c) **3.**



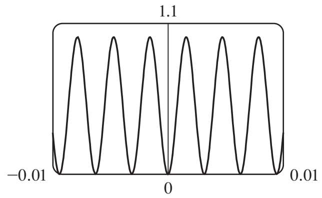
5.



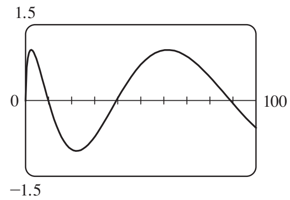
7.



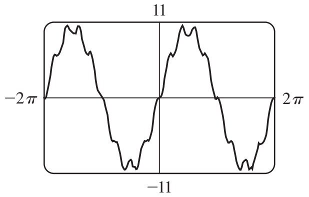
9.

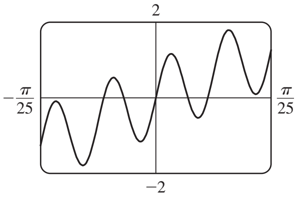


15.

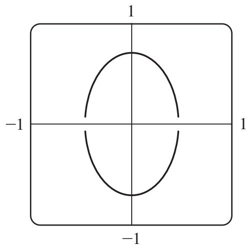


13.

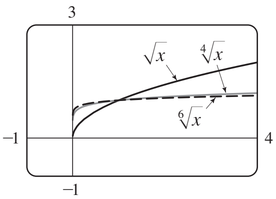




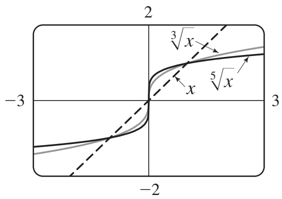
15.



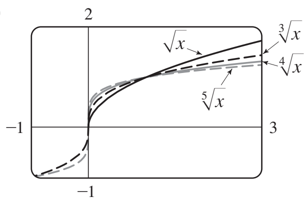
17. No **19.** 9.05 **21.** 0, 0.88 **23.** g
25. $-0.85 < x < 0.85$
27. (a)



(b)

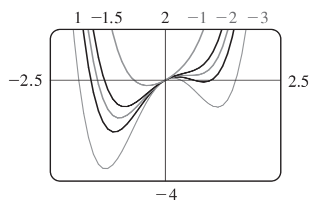


(c)



(d) Las gráficas de raíces pares son semejantes a $\sqrt{x}$, las gráficas de raíces impares son semejantes a $\sqrt[3]{x}$. Cuando n aumenta, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ se hace más inclinada cerca de 0 y más plana para $x > 1$.

29.

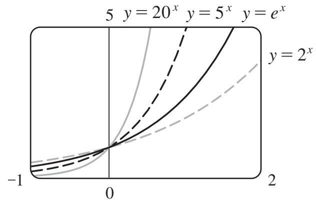


Si $c < -1.5$, la gráfica tiene tres crestas: dos puntos mínimos y uno máximo. Estas crestas se hacen más planas cuando c aumenta hasta que en $c = -1.5$ desaparecen dos de las crestas y sólo hay un punto mínimo. La cresta sola se mueve entonces a la derecha y se aproxima al origen cuando c aumenta.
31. La cresta se hace más grande y se mueve a la derecha.
33. Si $c < 0$, el lazo está a la derecha del origen; si $c > 0$, el lazo está a la izquierda. Cuanto más cerca está c de 0, más grande es el lazo.

EJERCICIOS 1.5 ■ PÁGINA 58

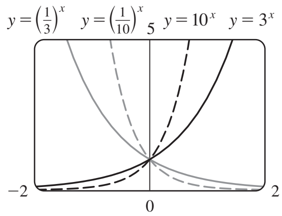
1. (a) $f(x) = a^x$, $a > 0$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $(0, \infty)$
(d) Véase figuras 4(c), 4(b) y 4(a), respectivamente.

3.



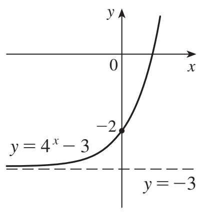
Todas se aproximan a 0 cuando $x \to -\infty$, todas pasan por (0, 1), y todas son crecientes. Cuanto mayor es la base, más rápido es el ritmo de aumento.

5.

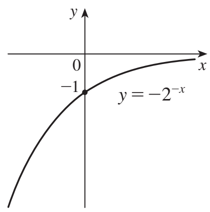


Las funciones con base mayor a 1 son crecientes; aquellas con base menor a 1 son decrecientes. Estas últimas son reflexiones de las primeras alrededor del eje y.

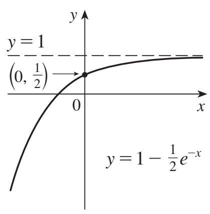
7.



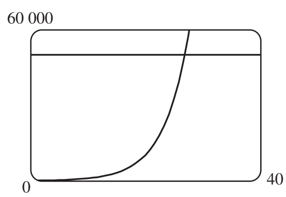
9.



11.



13. (a) $y = e^x - 2$ (b) $y = e^{x-2}$ (c) $y = -e^x$
(d) $y = e^{-x}$ (e) $y = -e^{-x}$
15. (a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
17. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **23.** A $x \approx 35.8$
25. (a) 3 200 (b) $100 \cdot 2^{t/3}$ (c) 10,159
(d) $t \approx 26.9$ h



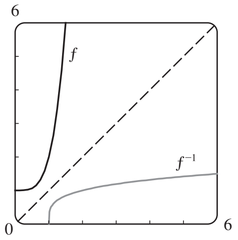
27. $y = ab^t$, donde $a \approx 3.154832569 \times 10^{-12}$ y $b \approx 1.017764706$; 5 498 millones; 7 417 millones

EJERCICIOS 1.6 ■ PÁGINA 70

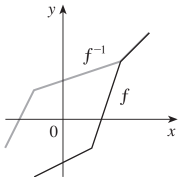
1. (a) Véase la definición 1.
(b) Debe pasar la prueba de la recta horizontal.
3. No **5.** Sí **7.** No **9.** No **11.** Sí
13. No **15.** 2 **17.** 0
19. $F = \frac{9}{5}C + 32$; la temperatura Fahrenheit como función de la temperatura Celsius; $[-273.15, \infty)$
21. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}$, $x \geqslant 0$ **23.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln x}$

25. $y = e^x - 3$

27. $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x - 1}$



29.

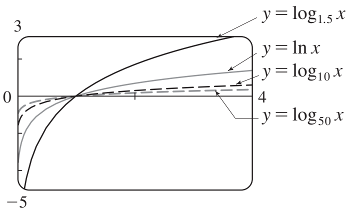


31. (a) Está definida como la inversa de la función exponencial con base a, es decir,, $\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x$.
(b) $(0, \infty)$ (c) $\mathbb{R}$ (d) Véase figura 11.

33. (a) 3 (b) -3 **35.** (a) 3 (b) 2 **37.** ln 1215

39. $\ln \dfrac{(1 + x^2)\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}$

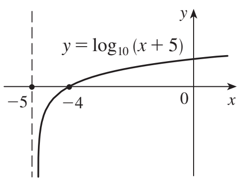
41.



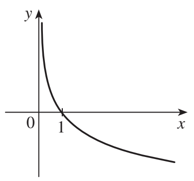
Todas las gráficas se aproximan a $-\infty$ cuando $x \to 0^+$, todas pasan por (1, 0), y todas son crecientes. Cuanto mayor es la base, más lento es el ritmo de aumento.

43. Unos 1,084,588 millones

45. (a)



(b)



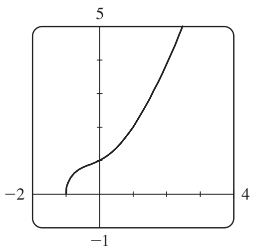
47. (a) $\sqrt{e}$ (b) $-\ln 5$

49. (a) $5 + \log_2 3$ o $5 + (\ln 3)/\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4e}\right)$

51. (a) $x < \ln 10$ (b) $x > 1/e$

53. (a) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\ln 3\right]$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(3 - x^2)$, $\left[0, \sqrt{3}\right)$

55.



La gráfica pasa la prueba de la recta horizontal.

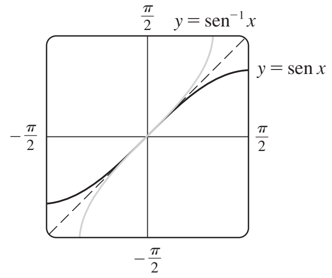
$f^{-1}(x) = -\left(\sqrt[3]{4}/6\right)\left(\sqrt[3]{D - 27x^2 + 20} - \sqrt[3]{D + 27x^2 - 20} + \sqrt[3]{2}\right)$, donde $D = 3\sqrt{3}\sqrt{27x^4 - 40x^2 + 16}$; dos de las expresiones son complejas.

57. (a) $f^{-1}(n) = (3/\ln 2)\ln(n/100)$; el tiempo transcurrido cuando hay n bacterias (b) Después de unas 26.9 horas

59. (a) $\pi/3$ (b) π **61.** (a) $\pi/4$ (b) $\pi/4$

63. (a) 10 (b) $\pi/3$ **67.** $x/\sqrt{1 + x^2}$

69.



La segunda gráfica es la reflexión de la primera gráfica alrededor de la recta $y = x$.

71. (a) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ (b) $[-\pi/2, \pi/2]$

73. (a) $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - c$ (b) $h^{-1}(x) = (1/c)f^{-1}(x)$

REPASO DEL CAPÍTULO I ■ PÁGINA 73

Preguntas de verdadero-falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Verdadero
11. Falso **13.** Falso

Ejercicios

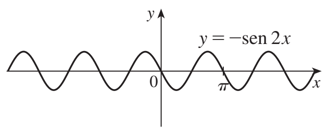
1. (a) 2.7 (b) 2.3, 5.6 (c) $[-6, 6]$ (d) $[-4, 4]$
(e) $[-4, 4]$ (f) No; no pasa la prueba de la recta horizontal.
(g) Impar; su gráfica es simétrica alrededor del origen.

3. $2a + h - 2$ **5.** $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

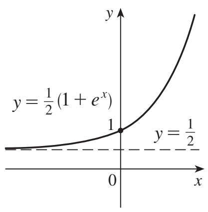
7. $(-6, \infty)$, $\mathbb{R}$

9. (a) Traslade la gráfica 8 unidades hacia arriba.
(b) Traslade la gráfica 8 unidades a la izquierda.
(c) Estire la gráfica verticalmente en un factor de 2, luego trasládela 1 unidad hacia arriba.
(d) Traslade la gráfica 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.
(e) Refleje la gráfica alrededor del eje x.
(f) Refleje la gráfica alrededor de la recta $y = x$ (suponiendo que f es biunívoca).

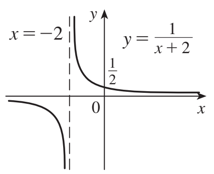
11.



13.



15.



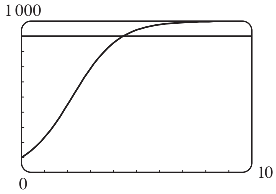
17. (a) Ninguna (b) Impar (c) Par (d) Ninguna

19. (a) $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9)$, $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 - 9$, $(0, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = \ln \ln x$, $(1, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = (x^2 - 9)^2 - 9$, $(-\infty, \infty)$

21. $y = 0.2493x - 423.4818$; unos 77.6 años

23. 1 **25.** (a) 9 (b) 2 (c) $1/\sqrt{3}$ (d) $\frac{3}{5}$

27. (a) ≈ 4.4 años



(b) $t = -ln\left(\dfrac{1\,000 - P}{9P}\right)$; el tiempo requerido para que la población alcance un número P.

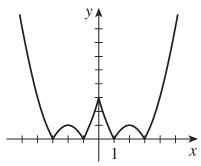
(c) $\ln 81 \approx 4.4$ años

PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 81

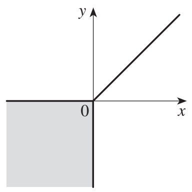
1. $a = 4\sqrt{h^2 - 16}/h$, donde a es la longitud de la altitud y h es la longitud de la hipotenusa

3. $-\frac{7}{3}, 9$

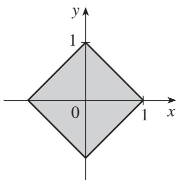
5.



7.



9.



11. 5 **13.** $x \in [-1, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3]$

15. 40 mi/h **19.** $f_n(x) = x^{2^{n+1}}$

CAPÍTULO 2

EJERCICIOS 2.1 ■ PÁGINA 87

1. (a) $-44.4, -38.8, -27.8, -22.2, -16.\overline{6}$
(b) -33.3 (c) $-33\frac{1}{3}$

3. (a) (i) 0.333333 (ii) 0.263158 (iii) 0.251256
(iv) 0.250125 (v) 0.2 (vi) 0.238095 (vii) 0.248756
(viii) 0.249875 (b) $\frac{1}{4}$ (c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

5. (a) (i) -32 pies/s (ii) -25.6 pies/s (iii) -24.8 pies/s
(iv) -24.16 pies/s (b) -24 pies/s

7. (a) (i) 4.65 m/s (ii) 5.6 m/s (iii) 7.55 m/s
(iv) 7 m/s (b) 6.3 m/s

9. (a) 0, 1.7321, -1.0847, -2.7433, 4.3301, -2.8173, 0, -2.1651, -2.6061, -5, 3.4202; no (c) -31.4

EJERCICIOS 2.2 ■ PÁGINA 96

1. Sí

3. (a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (tanto como se desee) al tomar x suficientemente cerca de -3 (pero no igual a -3).

(b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer negativos arbitrariamente grandes al tomar x suficientemente cerca de 4 hasta valores mayores a 4.

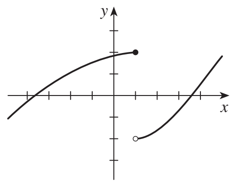
5. (a) 2 (b) 3 (c) No existe (d) 4
(e) No existe

7. (a) -1 (b) -2 (c) No existe (d) 2 (e) 0
(f) No existe (g) 1 (h) 3

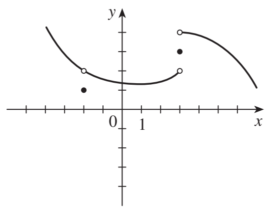
9. (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) ∞
(f) $x = -7, x = -3, x = 0, x = 6$

11. (a) 1 (b) 0 (c) No existe

13.



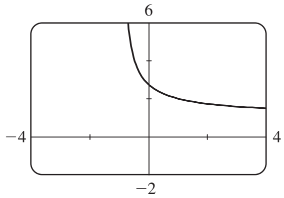
15.



17. $\frac{2}{3}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** $\frac{1}{4}$ **23.** $\frac{3}{5}$ **25.** ∞

27. ∞ **29.** $-\infty$ **31.** $-\infty$ **33.** $-\infty$; ∞

35. (a) 2.71828 (b)



37. (a) 0.998000, 0.638259, 0.358484, 0.158680, 0.038851, 0.008928, 0.001465; 0
(b) 0.000572, -0.000614, -0.000907, -0.000978, -0.000993, -0.001000; -0.001

39. No importa las veces que haga acercamientos hacia el origen, parece que la gráfica está formada por rectas casi verticales. Esto indica oscilaciones cada vez más frecuentes cuando $x \to 0$.

41. $x \approx \pm 0.90, \pm 2.24$; $x = \pm \text{sen}^{-1}(\pi/4), \pm(\pi - \text{sen}^{-1}(\pi/4))$

EJERCICIOS 2.3 ■ PÁGINA 106

1. (a) -6 (b) -8 (c) 2 (d) -6
(e) No existe (f) 0

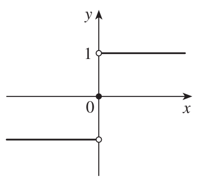
3. 59 **5.** 390 **7.** $\frac{1}{8}$ **9.** 0 **11.** 5

13. No existe **15.** $\frac{6}{5}$ **17.** 8 **19.** $\frac{1}{12}$ **21.** 6

23. $\frac{1}{6}$ **25.** $-\frac{1}{16}$ **27.** $\frac{1}{128}$ **29.** $-\frac{1}{2}$ **31.** (a), (b) $\frac{2}{3}$

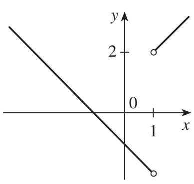
35. 7 **39.** 6 **41.** -4 **43.** No existe

45. (a)



(b) (i) 1
(ii) -1
(iii) No existe
(iv) 1

47. (a) (i) 2 (ii) -2 (b) No (c)



49. (a) (i) -2 (ii) No existe (iii) -3
(b) (i) $n-1$ (ii) n (c) a no es un entero
55. 8 **61.** 15; -1

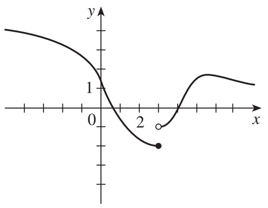
EJERCICIOS 2.4 ■ PÁGINA 117

1. $\frac{4}{7}$ (o cualquier número positivo más pequeño)
3. 1.44 (o cualquier número positivo más pequeño)
5. 0.0906 (o cualquier número positivo más pequeño)
7. 0.11, 0.012 (o cualquier número positivo más pequeño)
9. (a) 0.031 (b) 0.010
11. (a) $\sqrt{1\,000/\pi}$ cm (b) A no más de aproximadamente 0.0445 cm
(c) Radio; área; $\sqrt{1000/\pi}$; 1000; 5; ≈ 0.0445
13. (a) 0.025 (b) 0.0025
35. (a) 0.093 (b) $\delta = (B^{2/3} - 12)/(6B^{1/3}) - 1$, donde
$B = 216 + 108\varepsilon + 12\sqrt{336 + 324\varepsilon + 81\varepsilon^2}$
41. No más de 0.1

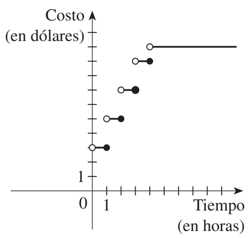
EJERCICIOS 2.5 ■ PÁGINA 128

1. $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$
3. (a) -4 (removible), -2 (salto), 2 (salto), 4 ((infinito)
(b) -4, ninguno; -2, izquierda; 2, derecha; 4, derecha

5.

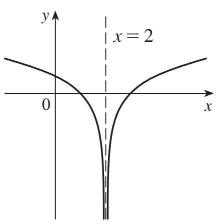


7. (a)

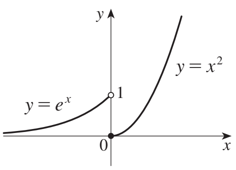


(b) Discontinua en $t = 1, 2, 3, 4$

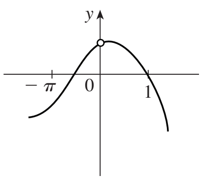
9. 6
15. $f(2)$ no está definida



17. $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe



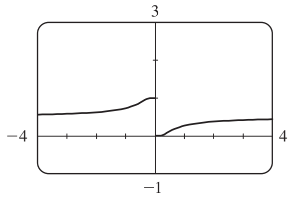
19. $\lim_{x\to -0} f(x) \neq f(0)$



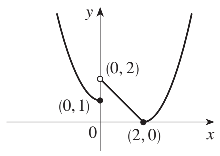
21. $\{x \mid x \neq -3, -2\}$

23. $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ **25.** $(-\infty, -\infty)$ **27.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

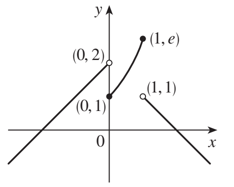
29. $x = 0$



31. $\frac{7}{3}$ **33.** 1
37. 0, izquierda



39. 0, derecha; 1, izquierda

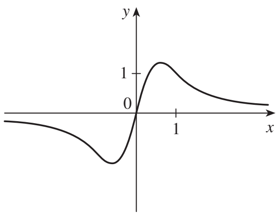


41. $\frac{2}{3}$ **43.** (a) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ (b) $g(x) = x^2 + x$
51. (b) (0.86, 0.87) **53.** (b) 70.347
59. Ninguna **61.** Sí

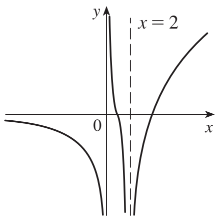
EJERCICIOS 2.6 ■ PÁGINA 140

1. (a) Cuando x crece, $f(x)$ se aproxima a 5.
(b) Cuando x se hace grande negativa, $f(x)$ se aproxima a 3.
3. (a) ∞ (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) 1 (e) 2
(f) $x = -1, x = 2, y = 1, y = 2$

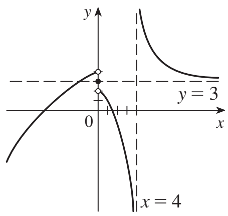
5.



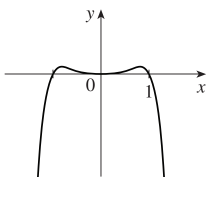
7.



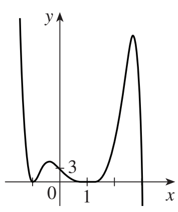
9.



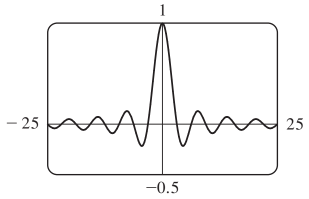
11. 0 **13.** $\frac{3}{2}$ **15.** 0 **17.** $-\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** 2
23. 3 **25.** $\frac{1}{6}$ **25.** $\frac{1}{2}(a-b)$ **29.** ∞ **31.** $-\infty$
31. $-\frac{1}{2}$ **35.** 0 **37.** (a), (b) $-\frac{1}{2}$ **39.** $y = 2$; $x = 2$
41. $y = 2, x = -2, x = 1$ **43.** $x = 5$ **45.** $x = 3$
47. $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2(x-3)}$
49. $-\infty, -\infty$



51. $-\infty, -\infty$

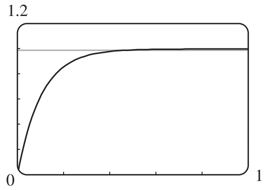


53. (a) 0 (b) Un número infinito de veces



55. (a) 0 (b) $\pm\infty$ **57.** 5

59. (a) v^* (b) ≈ 0.47 s

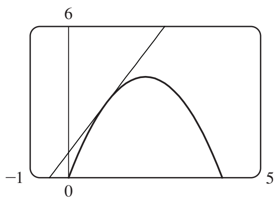


61. $N \geqslant 15$ **63.** $N \leqslant -6, N \leqslant -22$ **65.** (a) $x > 100$

EJERCICIOS 2.7 ■ PÁGINA 150

1. (a) $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

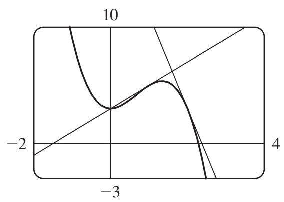
3. (a) 2 (b) $y = 2x + 1$ (c)



5. $y = -x + 5$ **7.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

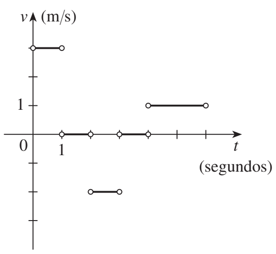
9. (a) $8a - 6a^2$ (b) $y = 2x + 3, y = -8x + 19$

(c)



11. (a) Derecha; $0 < t < 1$ y $4 < t < 6$; izquierda; $2 < t < 3$; sin moverse: $1 < t < 2$ y $3 < t < 4$

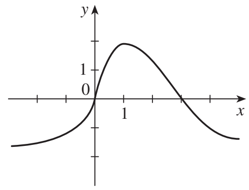
(b)



13. -24 pies/s **15.** $-2/a^3$ m/s; -2 m/s; $-\frac{1}{4}$ m/s; $-\frac{2}{27}$ m/s

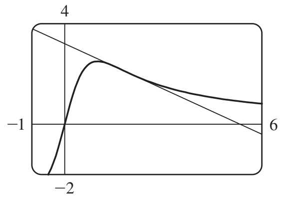
17. $g'(0), 0, g'(4), g'(2), g'(-2)$

19.



21. 7; $y = 7x - 12$

23. (a) $-\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$ (b)



25. $-2 + 8a$ **27.** $\dfrac{5}{(a + 3)^2}$ **29.** $\dfrac{-1}{2(a + 2)^{3/2}}$

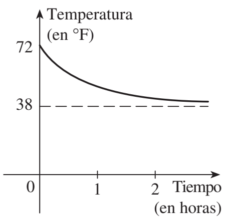
31. $f(x) = x^{10}$, $a = 1$ o $f(x) = (1 + x)^{10}$, $a = 0$

33. $f(x) = 2^x$, $a = 5$

35. $f(x) = \cos x$, $a = \pi$ o $f(x) = \cos(\pi + x)$, $a = 0$

37. 1 m/s; 1 m/s

39.



Mayor (en magnitud)

41. (a) (i) 11 por ciento/año (ii) 13 por ciento/año
(iii) 16 por ciento/año
(b) 14.5 por ciento/año (c) 15 por ciento/año

43. (a) (i) \$20.25/unidad (ii) \$20.05/unidad (b) \$20/unidad

45. (a) La rapidez a la que el costo está cambiando por onza de oro producido; dólares por onza
(b) Cuando se produce la 800 onza de oro, el costo de producción es \$17/onza.
(c) Disminuye en el corto plazo; aumenta a la larga

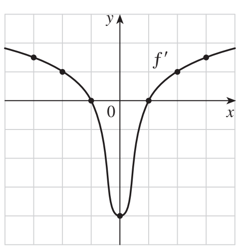
47. La rapidez a la que la temperatura está cambiando a las 10 A.M.; 4°F/h

49. (a) La rapidez a la que cambia la solubilidad del oxígeno con respecto a la temperatura del agua; (mg/L)/°C
(b) $S'(16) \approx -0.25$; cuando aumenta la temperatura a más de 16°C, la solubilidad del oxígeno está decreciendo a razón de 0.25 (mg/L)/°C.

51. (a) No existe

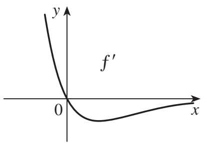
EJERCICIOS 2.8 ■ PÁGINA 162

1. (a) 1.5
(b) 1
(c) 0
(d) -4
(e) 0
(f) 1
(g) 1.5

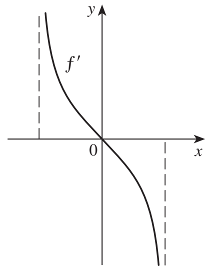


3. (a) II (b) IV (c) I (d) III

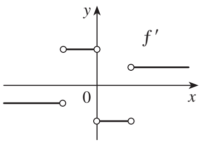
5.



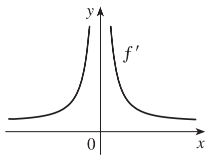
7.



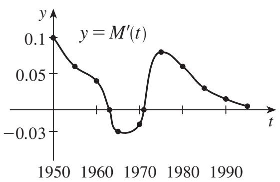
9.



11.

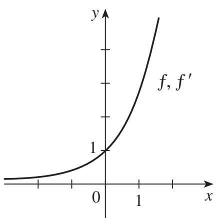


13.



1963 o 1971

15.



$f'(x) = e^x$

17. (a) 0, 1, 2, 4 (b) −1, −2, −4 (c) $f'(x) = 2x$

19. $f'(x) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **21.** $f'(t) = 5 - 18t$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

23. $f'(x) = 3x^2 - 3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

25. $g'(x) = 1/\sqrt{1 + 2x}$, $[-\frac{1}{2}, \infty)$, $(-\frac{1}{2}, \infty)$

27. $G'(t) = \dfrac{4}{(t + 1)^2}$, $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

29. $f'(x) = 4x^3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **31.** (a) $f'(x) = 4x^3 + 2$

33. (a) El ritmo al que está cambiando el porcentaje de desempleo, en porcentaje de desempleados por año

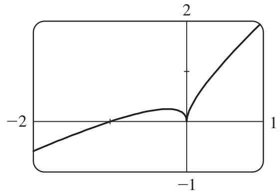
(b)

t	$U'(t)$	t	$U'(t)$
1993	−0.80	1998	−0.35
1994	−0.65	1999	−0.25
1995	−0.35	2000	0.25
1996	−0.35	2001	0.90
1997	−0.45	2002	1.10

35. −4 (esquina); 0 (discontinuidad)

37. −1 (tangente vertical); 4 (esquina)

39.

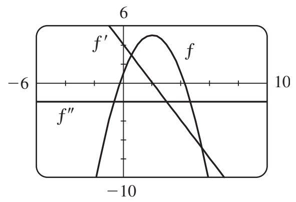


Derivable en −1; no derivable en 0

41. $a = f$, $b = f'$, $c = f''$

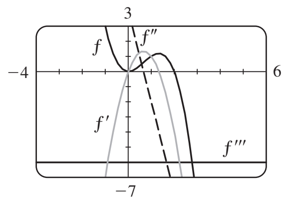
43. a = aceleración, b = velocidad, c = posición

45.



$f'(x) = 4 - 2x$,
$f''(x) = -2$

47.

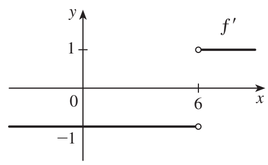


$f'(x) = 4x - 3x^2$,
$f''(x) = 4 - 6x$,
$f'''(x) = -6$,
$f^{(4)}(x) = 0$

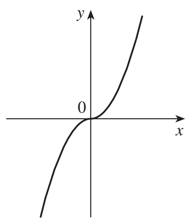
49. (a) $\frac{1}{3}a^{-2/3}$

51. $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

o $f'(x) = \dfrac{x - 6}{|x - 6|}$



53. (a)



(b) Toda x
(c) $f'(x) = 2|x|$

57. 63°

REPASO DE CAPÍTULO 2 ■ PÁGINA 166

Preguntas de verdadero-falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Verdadero **17.** Falso **19.** Falso

Ejercicios

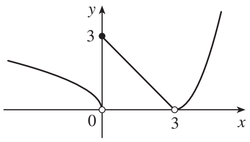
1. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) No existe (iv) 2
(v) ∞ (vi) $-\infty$ (vii) 4 (viii) −1
(b) $y = 4$, $y = -1$ (c) $x = 0$, $x = 2$ (d) −3, 0, 2, 4

3. 1 **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** 3 **9.** ∞ **11.** $\frac{4}{7}$ **13.** $\frac{1}{2}$

15. $-\infty$ **17.** 2 **19.** $\pi/2$ **21.** $x = 0$, $y = 0$ **23.** 1

29. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) No existe (iv) 0 (v) 0 (vi) 0

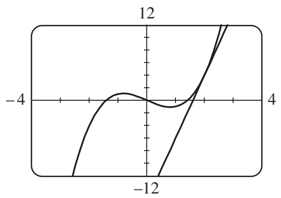
(b) En 0 y 3 (c)



31. $\mathbb{R}$ **37.** (a) -8 (b) $y = -8x + 17$

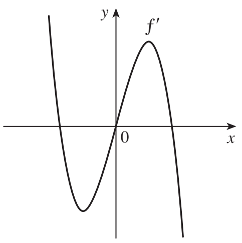
37. (a) (i) 3 m/s (ii) 2.75 m/s (iii) 2.625 m/s
(iv) 2.525 m/s (b) 2.5 m/s

39. (a) 10 (b) $y = 10x - 16$
(c)

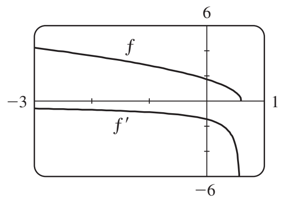


41. (a) La rapidez a la que cambia el costo con respecto a la tasa de interés; dólares/(porcentaje por año)
(b) Cuando la tasa de interés aumenta a más de 10%, el costo crece a un ritmo de $1 200/(porcentaje por año).
(c) Siempre positivo

43.



45. (a) $f'(x) = -\frac{5}{2}(3 - 5x)^{-1/2}$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right], \left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$
(c)



47. -4 (discontinuidad), -1(esquina), 2(discontinuidad), 5 (tangente vertical)

49. La tasa a la que está cambiando el valor total de la moneda de Estados Unidos en circulación, en miles de millones de dólares por año; $22.2 mil millones/año

51. 0

PROBLEMAS ESPECIALES ■ PÁGINA 170

1. $\frac{2}{3}$ **3.** -4 **5.** 1 **7.** $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

9. $\frac{3}{4}$ **11.** (b) Sí (c) Sí; no

13. (a) 0 (b) 1 (c) $f'(x) = x^2 + 1$

CAPÍTULO 3

EJERCICIOS 3.1 ■ PÁGINA 180

1. (a) Vea la definición del número e (página 179).
(b) 0.99, 1.03; $2.7 < e < 2.8$

3. $f'(x) = 0$ **5.** $f'(t) = -\frac{2}{3}$ **7.** $f'(x) = 3x^2 - 4$

9. $f'(t) = t^3$ **11.** $y' = -\frac{2}{5}x^{-7/5}$ **13.** $V'(r) = 4\pi r^2$

15. $A'(s) = 60/s^6$ **17.** $G'(x) = 1/(2\sqrt{x}) - 2e^x$

19. $F'(x) = \frac{5}{32}x^4$ **21.** $y' = 2ax + b$

23. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + (2/\sqrt{x}) - 3/(2x\sqrt{x})$

25. $y' = 0$ **27.** $H'(x) = 3x^2 + 3 - 3x^{-2} - 3x^{-4}$

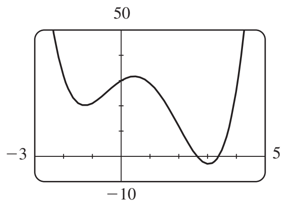
29. $u' = \frac{1}{5}t^{-4/5} + 10t^{3/2}$ **31.** $z' = -10A/y^{11} + Be^y$

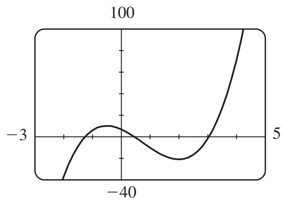
33. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

35. Tangente: $y = 2x + 2$; normal: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

37. $y = 3x - 1$ **39.** $e^x - 5$ **41.** $45x^{14} - 15x^2$

43. (a) (c) $4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$





45. $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 16, f''(x) = 12x^2 - 18x$

47. $f'(x) = 2 - \frac{15}{4}x^{-1/4}, f''(x) = \frac{15}{16}x^{-5/4}$

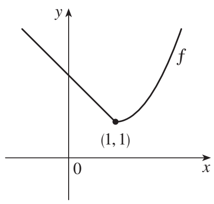
49. (a) $v(t) = 3t^2 = 3, a(t) = 6t$ (b) 12 m/s^2
(c) $a(1) = 6$ m/s^2 **51.** $(-2, 21), (1, -6)$

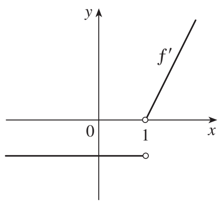
55. $y = 12x - 15, y = 12x + 17$ **57.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

59. $(\pm 2, 4)$ **63.** $P(x) = x^2 - x + 3$

65. $y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$

67. No

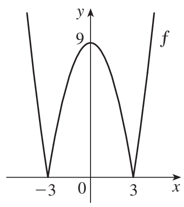


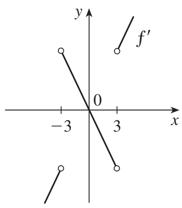


69. (a) No derivable en 3 o -3

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| > 3 \\ -2x & \text{si } |x| < 3 \end{cases}$$

(b)





71. $y = 2x^2 - x$ **73.** $a = -\frac{1}{2}, b = 2$ **75.** $m = 4, b = -4$

77. 1 000 **79.** 3; 1

EJERCICIOS 3.2 ■ PÁGINA 187

1. $y' = 5x^4 + 3x^2 + 2x$

3. $f'(x) = e^x(x^3 + 3x^2 + 2x + 2)$

5. $y' = (x - 2)e^x/x^3$ **7.** $g'(x) = 5/(2x + 1)^2$

9. $V'(x) = 14x^6 - 4x^3 - 6$

11. $F'(y) = 5 + 14/y^2 + 9/y^4$

13. $y' = \dfrac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$ **15.** $y' = \dfrac{2t(-t^4 - 4t^2 - 7)}{(t^4 - 3t^2 + 1)^2}$

17. $y' = (r^2 - 2)e^r$ **19.** $y' = 2v - 1/\sqrt{v}$

21. $f'(t) = \dfrac{4 + t^{1/2}}{(2 + \sqrt{t})^2}$ **23.** $f'(x) = -ACe^x/(B + Ce^x)^2$

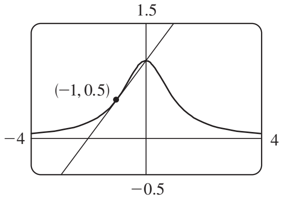
25. $f'(x) = 2cx/(x^2 + c)^2$

27. $(x^4 + 4x^3)e^x$; $(x^4 + 8x^3 + 12x^2)e^x$

29. $\dfrac{2x^2 + 2x}{(1 + 2x)^2}$; $\dfrac{2}{(1 + 2x)^3}$

31. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ **33.** $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$

35. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)



37. (a) $e^x(x - 3)/x^4$ **39.** xe^x, $(x + 1)e^x$

41. $\frac{1}{4}$ **43.** (a) -16 (b) $-\frac{20}{9}$ (c) 20

45. 7 **47.** (a) 0 (b) $-\frac{2}{3}$

49. (a) $y' = xg'(x) + g(x)$ (b) $y' = [g(x) - xg'(x)]/[g(x)]^2$
(c) $y' = [xg'(x) - g(x)]/x^2$

51. Dos, $\left(-2 \pm \sqrt{3}, \left(1 \mp \sqrt{3}\right)/2\right)$

53. \$1.627 miles de millones/año **55.** (c) $3e^{3x}$

57. $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$,
$f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $f^{(4)}(x) = (x^2 + 8x + 12)e^x$,
$f^{(5)}(x) = (x^2 + 10x + 20)e^x$; $f^{(n)}(x) = [x^2 + 2nx + n(n - 1)]e^x$

EJERCICIOS 3.3 ■ PÁGINA 195

1. $f'(x) = 6x + 2 \operatorname{sen} x$ **3.** $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\csc^2 x$

5. $g'(t) = 3t^2 \cos t - t^3 \operatorname{sen} t$

7. $h'(\theta) = -\csc\theta \cot\theta + e^\theta(\cot\theta - \csc^2\theta)$

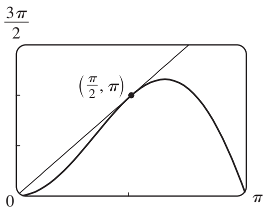
9. $y' = \dfrac{2 - \tan x + x\sec^2 x}{(2 - \tan x)^2}$ **11.** $f'(\theta) = \dfrac{\sec\theta \tan\theta}{(1 + \sec\theta)^2}$

13. $y' = (x\cos x - 2 \operatorname{sen} x)/x^3$

15. $f'(x) = e^x \csc x(-x\cot x + x + 1)$

21. $y = 2\sqrt{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi + 2$ **23.** $y = x + 1$

25. (a) $y = 2x$ (b)



27. (a) $\sec x \tan x - 1$

29. $\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$; $2\cos\theta - \theta \operatorname{sen}\theta$

31. (a) $f'(x) = (1 + \tan x)/\sec x$ (b) $f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

33. $(2n + 1)\pi \pm \frac{1}{3}\pi$, n un entero

35. (a) $v(t) = 8\cos t$, $a(t) = -8 \operatorname{sen} t$
(b) $4\sqrt{3}$, -4, $-4\sqrt{3}$; a la izquierda

37. 5 pies/rad **39.** 3 **41.** 3 **43.** sen 1

45. $\frac{1}{2}$ **47.** $-\sqrt{2}$

49. (a) $\sec^2 x = 1/\cos^2 x$ (b) $\sec x \tan x = (\operatorname{sen} x)/\cos^2 x$
(c) $\cos x - \operatorname{sen} x = (\cot x - 1)/\csc x$

51. 1

EJERCICIOS 3.5 ■ PÁGINA 203

1. $4\cos 4x$ **3.** $-20x(1 - x^2)^9$ **5.** $e^{\sqrt{x}}/\left(2\sqrt{x}\right)$

7. $F'(x) = 10x(x^4 + 3x^2 - 2)^4(2x^2 + 3)$

9. $F'(x) = \dfrac{2 + 3x^2}{4(1 + 2x + x^3)^{3/4}}$ **11.** $g'(t) = -\dfrac{12t^3}{(t^4 + 1)^4}$

13. $y' = -3x^2 \operatorname{sen}(a^3 + x^3)$ **15.** $y' = e^{-kx}(-kx + 1)$

17. $g'(x) = 4(1 + 4x)^4(3 + x - x^2)^7(17 + 9x - 21x^2)$

19. $y' = 8(2x - 5)^3(8x^2 - 5)^{-4}(-4x^2 + 30x - 5)$

21. $y' = \dfrac{-12x(x^2 + 1)^2}{(x^2 - 1)^4}$ **23.** $y' = (\cos x - x \operatorname{sen} x)e^{x\cos x}$

25. $F'(z) = 1/[(z - 1)^{1/2}(z + 1)^{3/2}]$

27. $y' = (r^2 + 1)^{-3/2}$ **29.** $y' = 2\cos(\tan 2x)\sec^2(2x)$

31. $y' = 2^{\operatorname{sen}\pi x}(\pi \ln 2)\cos\pi x$ **33.** $y' = 4\sec^2 x \tan x$

33. $y' = -12\cos x \operatorname{sen} x\,(1 + \cos^2 x)^5$

35. $y' = \dfrac{4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} \operatorname{sen} \dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$

37. $y' = -2\cos\theta \cot(\operatorname{sen}\theta)\csc^2(\operatorname{sen}\theta)$

39. $f'(t) = \sec^2(e^t)e^t + e^{\tan t}\sec^2 t$

41. $f'(t) = 4 \operatorname{sen}(e^{\operatorname{sen}^2 t})\, cos\,(e^{\operatorname{sen}^2 t})e^{\operatorname{sen}^2 t} \operatorname{sen} t \cos t$

43. $g'(x) = 2r^2 p(\ln a)(2ra^{rx} + n)^{p-1}a^{rx}$

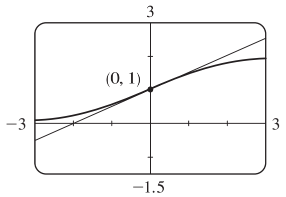
45. $y' = \dfrac{-\pi\cos(\tan\pi x)\sec^2(\pi x) \operatorname{sen}\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}}{2\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}}$

47. $h'(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}$, $h''(x) = 1/(x^2 + 1)^{3/2}$

49. $e^{\alpha x}(\beta\cos\beta x + \alpha \operatorname{sen}\beta x)$; $e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2)\operatorname{sen}\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x]$

51. $y = 20x + 1$ **53.** $y = -x + \pi$

55. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)



57. (a) $f'(x) = (2 - 2x^2)/\sqrt{2 - x^2}$

59. $((\pi/2) + 2n\pi, 3)$, $((3\pi/2) + 2n\pi, -1)$, n un entero

61. 24 **63.** (a) 30 (b) 36

65. (a) $\frac{3}{4}$ (b) No existe (c) -2

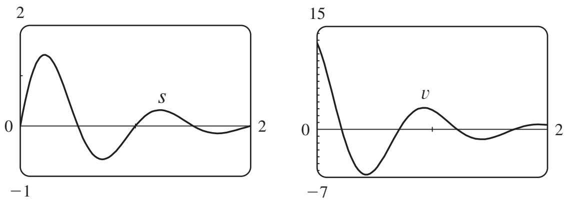
67. (a) $F'(x) = e^x f'(e^x)$ (b) $G'(x) = e^{f(x)}f'(x)$

69. 120 **71.** 96 **75.** $-2^{50}\cos 2x$

77. $v(t) = \frac{5}{2}\pi\cos(10\pi t)$ cm/s

79. (a) $\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{7\pi}{54}\cos\dfrac{2\pi t}{5.4}$ (b) 0.16

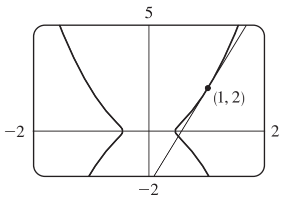
81. $v(t) = 2e^{-1.5t}(2\pi\cos 2\pi t - 1.5 \operatorname{sen} 2\pi t)$



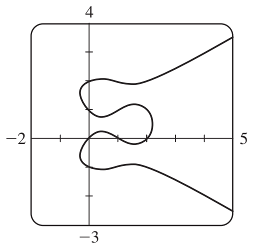
83. dv/dt es la rapidez de cambio de velocidad con respecto al tiempo; dv/ds es la rapidez de cambio de velocidad con respecto al desplazamiento
85. (a) $y = ab^t$ donde $a \approx 100.01244$ y $b \approx 0.000045146$
(b) $-670.63\ \mu\text{A}$
87. (b) La forma factorizada
91. (b) $-n \cos^{n-1}x \operatorname{sen}[(n + 1)x]$

EJERCICIOS 3.5 ■ PÁGINA 213

1. (a) $y' = -(y + 2 + 6x)/x$
(b) $y = (4/x) - 2 - 3x$, $y' = -(4/x^2) - 3$
3. (a) $y' = -y^2/x^2$ (b) $y = x/(x - 1)$, $y' = -1/(x - 1)^2$
5. $y' = -x^2/y^2$
7. $y' = \dfrac{2x + y}{2y - y}$ **9.** $y' = \dfrac{3y^2 - 5x^4 - 4x^3y}{x^4 + 3y^2 - 6xy}$
11. $y' = \dfrac{-2xy^2 - \operatorname{sen} y}{2x^2y + x\cos y}$ **13.** $y' = \tan x \tan y$
15. $y' = \dfrac{y(y - e^{x/y})}{y^2 - xe^{x/y}}$ **17.** $y' = \dfrac{4xy\sqrt{xy} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$
19. $y' = \dfrac{e^y \operatorname{sen} x + y\cos(xy)}{e^y\cos x - x\cos(xy)}$ **21.** $-\frac{16}{13}$
23. $x' = \dfrac{-2x^4y + x^3 - 6xy^2}{4x^3y^2 - 3x^2 + 2y^3}$ **25.** $y = -x + 2$
27. $y = x + \frac{1}{2}$ **29.** $y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$
31. (a) $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$ (b)

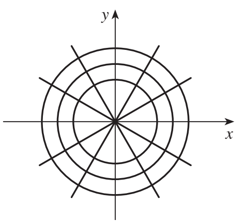


33. $-81/y^3$ **35.** $-2x/y^5$
33. (a)

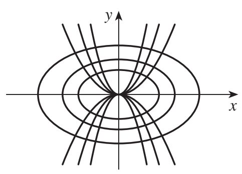


Ocho; $x \approx 0.42, 1.58$

(b) $y = -x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + 2$ (c) $1 \mp \sqrt{3}/3$
39. $\left(\pm\frac{5}{4}\sqrt{3}, \pm\frac{5}{4}\right)$ **41.** $(x_0x/a^2) - (y_0y/b^2) = 1$
41. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1 + x)}$ **47.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - x}}$
49. $G'(x) = -1 - \dfrac{x \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$ **51.** $h'(t) = 0$
53. $y' = -2e^{2x}/\sqrt{1 - e^{4x}}$ **55.** $1 - \dfrac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$
59.



61.



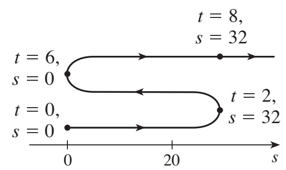
63. $\left(\pm\sqrt{3}, 0\right)$ **65.** $(-1, -1), (1, 1)$ **67.** (b) $\frac{3}{2}$ **69.** 2

EJERCICIOS 3.6 ■ PÁGINA 220

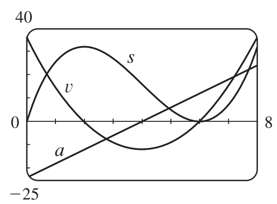
1. La fórmula de la derivación es la más sencilla.
3. $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ **5.** $f'(x) = \dfrac{3}{(3x - 1)\ln 2}$,
7. $f'(x) = \dfrac{1}{5x\sqrt[5]{(\ln x)^4}}$ **9.** $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \ln(5x)$,
11. $F'(t) = \dfrac{6}{2t + 1} - \dfrac{12}{3t - 1}$ **13.** $g'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$
15. $f'(u) = \dfrac{1 + \ln 2}{u[1 + \ln(2u)]^2}$ **17.** $y' = \dfrac{10x + 1}{5x^2 + x - 2}$
19. $y' = \dfrac{-x}{1 + x}$ **21.** $y' = \dfrac{1}{\ln 10} + \log_{10} x$
23. $y' = x + 2x\ln(2x)$; $y'' = 3 + 2\ln(2x)$
25. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $y'' = \dfrac{-x}{(1 + x^2)^{3/2}}$
27. $f'(x) = \dfrac{2x - 1 - (x - 1)\ln(x - 1)}{(x - 1)[1 - \ln(x - 1)]^2}$;
$(1, 1 + e) \cup (1 + e, \infty)$
29. $f'(x) = \dfrac{2(x - 1)}{x(x - 2)}$; $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$,
31. 1 **33.** $y = 3x - 2$ **35.** $\cos x + 1/x$
37. $y' = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6\left(\dfrac{10}{2x + 1} + \dfrac{24x^3}{x^4 - 3}\right)$
39. $y' = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \tan^4 x}{(x^2 + 1)^2}\left(2\cot x + \dfrac{4\sec^2 x}{\tan x} - \dfrac{4x}{x^2 + 1}\right)$
41. $y' = x^x(1 + \ln x)$
43. $y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \ln x\right)$
45. $y' = (\cos x)^x(-x\tan x + \ln\cos x)$
47. $y' = (\tan x)^{1/x}\left(\dfrac{\sec^2 x}{x\tan x} - \dfrac{\ln\tan x}{x^2}\right)$
49. $y' = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 2y}$ **51.** $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n - 1)!}{(x - 1)^n}$

EJERCICIOS 3.7 ■ PÁGINA 230

1. (a) $3t^2 - 24t + 36$ (b) -9 pies/s (c) $t = 2, 6$
(d) $0 \leqslant t < 2$, $t > 6$
(e) 96 pies
(f)

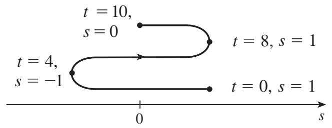


(g) $6t - 24$; $-6\ \text{m/s}^2$
(h)

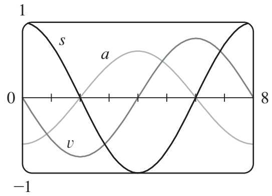


(c) Acelera cuando $2 < t < 4$ o $t > 6$; desacelera cuando $0 \leqslant t < 2$ o $4 < t < 6$

3. (a) $-\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ (b) $-\frac{1}{8}\pi\sqrt{2}$ pies/s (c) $t = 0, 4, 8$
(d) $4 < t < 8$ (e) 4 pies
(f)



(g) $-\frac{1}{16}\pi^2\cos(\pi t/4)$; $\frac{1}{2}\pi^2\sqrt{2}$ pies/s^2
(h)



(i) Acelera cuando $0 < t < 2$, $4 < t < 6$
desacelera cuando $2 < t < 4$, $6 < t < 8$

5. (a) Acelera cuando $0 < t < 1$ o $2 < t < 3$;
desacelera cuando $1 < t < 2$
(b) Acelera cuando $1 < t < 2$ o $3 < t < 4$;
desacelera cuando $0 < t < 1$ o $2 < t < 3$

7. $t = 4$ s
(b) $t = 1.5$ s; la velocidad tiene un mínimo absoluto

9. (a) 5.02 m/s (b) $\sqrt{17}$ m/s

11. (a) 30 mm^2/mm; la rapidez a la que el área crece con respecto a la longitud de un lado cuando x llega a 15 mm
(b) $\Delta A \approx 2x\,\Delta x$

13. (a) (1) 5π (ii) 4.5π (iii) 4.1π
(b) 4π (c) $\Delta A \approx 2\pi x\,\Delta x$

15. (a) 8π pies^2/pies (b) 16π pies^2/pies (c) 24π pies^2/pies
La rapidez aumenta cuando aumenta el radio.

17. (a) 6 kg/m (b) 12kg/m (c) 18kg/m
En el extremo derecho; en el extremo izquierdo

19. (a) 4.75 A (b) 5 A; $t = \frac{2}{3}$ s

21. (a) $dV/dP = -C/P^2$ (b) Al principio

23. $400(3^t)\ln 3$; $\approx 6\,850$ bacterias/h

25. (a) 16 millones/año; 78.5 millones/año
(a) $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, donde $a \approx 0.00129371$,
$b \approx -7.061422$, $c \approx 12\,822\,979$, $d \approx -7\,743\,770$
(c) $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
(d) 14.48 millones/año; 75.29 millones/año (menor)
(e) 81.62 millones/año

27. (a) 0.926 cm/s; 0.694 cm/s; 0
(b) 0; -92.6 (cm/s)/cm; -185.2 (cm/s)/cm
(c) En el centro; en el borde

29. (a) $C'(x) = 12 - 0.2x + 0.0015x^2$
(b) \$32/yarda; el costo de producir la 201ava yarda
(c) \$32.20

31. (a) $[xp'(x) - p(x)]/x^2$; el promedio de productividad aumenta cuando se suman nuevos trabajadores

33. -0.2436 K/min

35. (a) 0 y 0 (b) C = 0
(c) (0, 0), (500, 50); es posible para que coexistan las especies.

EJERCICIOS 3.8 ■ PÁGINA 239

1. Alrededor de 235

3. (a) $100(4.2)^t$ (b) $\approx 7\,409$ (c) $\approx 10{,}632$ bacterias/h
(d) $(\ln 100)/(\ln 4.2) \approx 3.2$ h

5. (a) 1 508 millones, 1 871 millones (b) 2 161 millones
(c) 3 972 millones; guerras en la primera mitad del siglo, mayor esperanza de vida en la segunda mitad

7. (a) $Ce^{-0.0005t}$ (b) $-2\,000\ln 0.9 \approx 211$ s

9. (a) $100 \times 2^{-t/30}$ mg (b) ≈ 9.92 mg (c) ≈ 199.3 años

11. $\approx 2\,500$ años **13.** (a) ≈ 137°F (b) ≈ 116 min

15. (a) $13.\overline{3}$°C (b) ≈ 67.74 min

17. (a) ≈ 64.5 kPa (b) ≈ 39.9 kPa

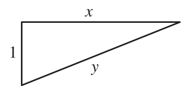
19. (a) (i) \$3 828.84 (ii) \$3 840.25 (iii) \$3 850.08
(iv) \$3 851.61 (v) \$3 852.01 (vi) \$3 852.08
(b) $dA/dt = 0.05A$, $A(0) = 3\,000$

EJERCICIOS 3.9 ■ PÁGINA 245

1. $dV/dt = 3x^2\,dx/dt$ **3.** 48 cm^2/s **5.** $3/(25\pi)$m/min

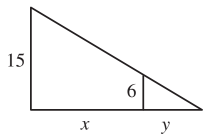
7. 70 **9.** $\pm\frac{46}{13}$

11. (a) La altitud del avión es 1 milla y su velocidad es 500 mi/h.
(b) La rapidez a la que está creciendo la distancia del avión a la estación cuando el avión está a 2 millas de la estación.
(c)



(d) $y^2 = x^2 + 1$
(e) $250\sqrt{3}$ mi/h

13. (a) La altura del poste (15 pies), la estatura del hombre (6 pies), y la rapidez del hombre (5 pies/s)
(b) La rapidez a la que se mueve la punta de la sombra del hombre cuando él está a 40 pies del poste
(c)



(d) $\frac{15}{6} = \frac{x + y}{y}$ (e) $\frac{25}{3}$ pies/s

15. 65 mi/h **17.** $837/\sqrt{8\,674} \approx 8.99$ pies/s

19. -1.6 cm/min **21.** $\frac{720}{13} \approx 55.4$ km/h

23. $(10{,}000 + 800{,}000\pi/9) \approx 2.89 \times 10^5$ cm^3/min

25. $\frac{10}{3}$ cm/min **27.** $6/(5\pi) \approx 0.38$ pies/min **29.** 0.3 m^2/s

31. 80 cm^3/min **33.** $\frac{107}{810} \approx 0.132$ Ω/s **35.** 0.396 m/min

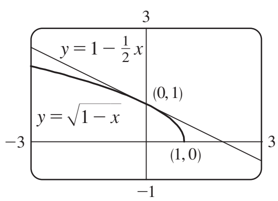
37. (a) 360 pies/s (b) 0.096 rad/s **39.** $\frac{10}{9}\pi$ km/min

41. $1\,650/\sqrt{31} \approx 296$ km/h **43.** $\frac{7}{4}\sqrt{5} \approx 6.78$ m/s

EJERCICIOS 3.10 ■ PÁGINA 252

1. $L(x) = -10x - 6$ **3.** $L(x) = -x + \pi/2$

5. $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$;
$\sqrt{0.9} \approx 0.95$,
$\sqrt{0.99} \approx 0.995$



7. $-1.204 < x < 0.706$ **9.** $-0.045 < x < 0.055$

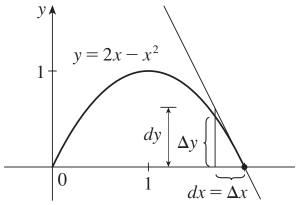
11. (a) $dy = 2x(x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)\,dx$ (b) $dy = \frac{t}{1 + t^2}\,dt$

13. (a) $dy = \dfrac{-2}{(u-1)^2}\,du$ (b) $dy = -\dfrac{6r^2}{(1+r^3)^3}\,dr$

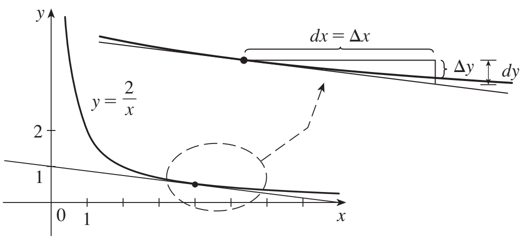
15. (a) $dy = \frac{1}{10}e^{x/10}\,dx$ (b) 0.01;0.0101

17. (a) $dy = \sec^2 x\,dx$ (b) -0.2

19. $\Delta y = 0.64$, $dy = 0.8$



21. $\Delta y = -0.1$, $dy = -0.125$



23. 32.08 **25.** 4.02 **27.** $1 - \pi/90 \approx 0.965$

33. (a) 270 cm^3, 0.01, 1% (b) 36 cm^2, $0.00\overline{6}$, $0.\overline{6}$%

35. (a) $84/\pi \approx 27$ cm^2; $\frac{1}{84} \approx 0.012$

(b) $1\,764/\pi^2 \approx 179$ cm^3; $\frac{1}{56} \approx 0.018$

37. (a) $2\pi rh\,\Delta r$ (b) $\pi(\Delta r)^2 h$

43. (a) 4.8, 5.2 (b) Todo largo

EJERCICIOS 3.11 ■ PÁGINA 259

1. (a) 0 (b) 1 **3.** (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) \approx 3.62686$

5. (a) 1 (b) 0

21. $\operatorname{sech} x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$, $\operatorname{csch} x = \frac{3}{4}$, $\tanh x = \frac{4}{5}$, $\cosh x = \frac{5}{3}$

23. (a) 1 (b) -1 (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) 0 (f) 1

(g) ∞ (h) $-\infty$ (i) 0

31. $f'(x) = x\cosh x$ **33.** $h'(x) = \tanh x$

35. $y' = 3e^{\cosh 3x}\operatorname{senh} 3x$ **37.** $f'(t) = -2e^t \operatorname{sech}^2(e^t)\tanh(e^t)$

39. $y' = \dfrac{\operatorname{sech}^2 x}{1 + \tanh^2 x}$ **41.** $G'(x) = \dfrac{-2\operatorname{senh} x}{(1+\cosh x)^2}$

43. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1-x)}$ **45.** $y' = \operatorname{senh}^{-1}(x/3)$

47. $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$

51. (a) 0.3572 (b) 70.34°

53. (b) $y = 2\operatorname{senh} 3x - 4\cosh 3x$

55. $\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right), \sqrt{2}\right)$

REPASO DEL CAPÍTULO 3 ■ PÁGINA 261

Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso **9.** Verdadero

11. Verdadero

Ejercicios

1. $6x(x^4 - 3x^2 + 5)^2(2x^2 - 3)$ **3.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^7}}$

5. $\dfrac{2(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$ **7.** $2\cos 2\theta\, e^{\operatorname{sen} 2\theta}$

9. $\dfrac{t^2+1}{(1-t^2)^2}$ **11.** $\dfrac{\cos\sqrt{x} - \sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

13. $-\dfrac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4}$ **15.** $\dfrac{1 - y^4 - 2xy}{4xy^3 + x^2 - 3}$

17. $\dfrac{2\sec 2\theta\,(\tan 2\theta - 1)}{(1+\tan 2\theta)^2}$ **19.** $(1+c^2)e^{cx}\operatorname{sen} x$

21. $3^{x\ln x}(\ln 3)(1 + \ln x)$ **23.** $-(x-1)^{-2}$

25. $\dfrac{2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy) + 1}$ **27.** $\dfrac{2}{[(1+2x)\ln 5]}$

29. $\cot x - \operatorname{sen} x\cos x$ **31.** $\dfrac{4x}{1+16x^2} + \tan^{-1}(4x)$

33. $5\sec 5x$ **35.** $-6x\csc^2(3x^2+5)$

37. $\cos\left(\tan\sqrt{1+x^3}\right)\left(\sec^2\sqrt{1+x^3}\right)\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$

39. $2\cos\theta\tan(\operatorname{sen}\theta)\sec^2(\operatorname{sen}\theta)$

41. $\dfrac{(x-2)^4(3x^2-55x-52)}{2\sqrt{x+1}\,(x+3)^8}$ **43.** $2x^2\cosh(x^2) + \operatorname{senh}(x^2)$

45. $3\tanh 3x$ **47.** $\dfrac{(\cosh x)}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 x - 1}}$

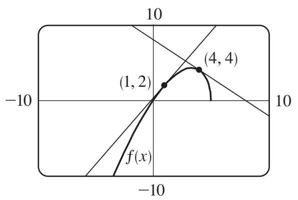
49. $\dfrac{-3\operatorname{sen}(e^{\sqrt{\tan 3x}})e^{\sqrt{\tan 3x}}\sec^2(3x)}{2\sqrt{\tan 3x}}$ **51.** $-\frac{4}{27}$ **53.** $-5x^4/y^{11}$

57. $y = 2\sqrt{3}x + 1 - \pi\sqrt{3}/3$ **59.** $y = 2x + 1$

61. $y = -x + 2$; $y = x + 2$

63. (a) $\dfrac{10-3x}{2\sqrt{5-x}}$ (b) $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$, $y = -x + 8$

(c)



65. $\left(\pi/4, \sqrt{2}\right), \left(5\pi/4, -\sqrt{2}\right)$ **69.** (a) 2 (b) 44

71. $2xg(x) + x^2g'(x)$ **73.** $2g(x)g'(x)$ **75.** $g'(e^x)e^x$

77. $g'(x)/g(x)$ **79.** $\dfrac{f'(x)[g(x)]^2 + g'(x)[f(x)]^2}{[f(x)+g(x)]^2}$

81. $f'(g(\operatorname{sen} 4x))g'(\operatorname{sen} 4x)(\cos 4x)(4)$ **83.** $(-3, 0)$

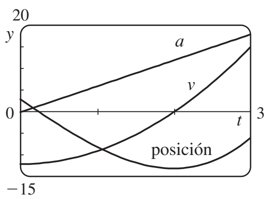
85. $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x$

87. $v(t) = -Ae^{-ct}[c\cos(\omega t + \delta) + \omega\operatorname{sen}(\omega t + \delta)]$,

$a(t) = Ae^{-ct}[(c^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \delta) + 2c\omega\operatorname{sen}(\omega t + \delta)]$

89. (a) $v(t) = 3t^2 - 12$, $a(t) = 6t$ (b) $t > 2$; $0 \leqslant t < 2$

(c) 23 (d)



(e) $t > 2$; $0 < t < 2$

91. 4 kg/m **93.** (a) $200(3.24)^t$ (b) $\approx 22{,}040$

(c) $\approx 25\,910$ bacterias/h (d) $(\ln 50)/(\ln 3.24) \approx 3.33$ h

95. (a) C_0e^{-kt} (b) ≈ 100 h **97.** $\frac{4}{3}$ cm^2/min

99. 13 pies/s **101.** 400 pies/h

103. (a) $L(x) = 1 + x$, $\sqrt[3]{1 + 3x} \approx 1 + x$, $\sqrt[3]{1.03} \approx 1.01$

(b) $-0.23 < x < 0.40$

105. $12 + \frac{3}{2}\pi \approx 16.7$ cm^2 **107.** $\frac{1}{32}$ **109.** $\frac{1}{4}$ **111.** $\frac{1}{8}x^2$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 266

1. $\left(\pm\sqrt{3}/2, \frac{1}{4}\right)$ **9.** $\left(0, \frac{5}{4}\right)$

11. (a) $4\pi\sqrt{3}/\sqrt{11}$ rad/s (b) $40\left(\cos\theta + \sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm

(c) $-480\pi \operatorname{sen}\theta\left(1 + \cos\theta/\sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm/s

15. $x_T \in (3, \infty)$, $y_T \in (2, \infty)$, $x_N \in \left(0, \frac{5}{3}\right)$, $y_N \in \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

17. (b) (i) 53° (o 127°) (ii) 63° (o 117°)

19. R se aproxima al punto medio del radio AO.

21. $-\operatorname{sen} a$ **23.** $2\sqrt{e}$ **27.** $(1, -2), (-1, 0)$

29. $\sqrt{29}/58$ **31.** 11.204 cm^3/min

CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1 ■ PÁGINA 277

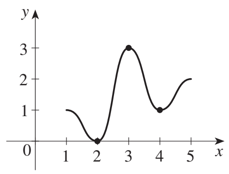
Abreviaturas: abs., absoluto; loc.; local; máx., máximo; mín., mínimo

1. Mínimo absoluto: valor más pequeño de una función en todo el dominio de la función; mínimo local en c: valor más pequeño de la función cuando x está cerca de c.

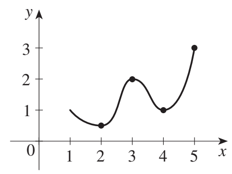
3. Máx. abs. en s, mín. abs. en r, máx. loc. en c, mín. loc. en b y r

5. Máx. abs. $f(4) = 6$, máx. loc. $f(4) = 5$ y $f(6) = 4$, mín. loc. $f(2) = 2$ y $f(5) = 3$

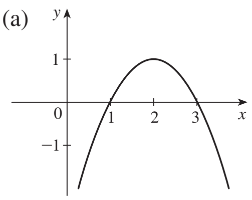
7.



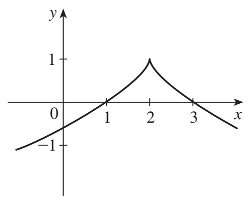
9.



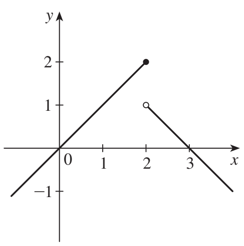
11. (a)



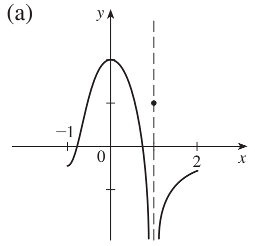
(b)



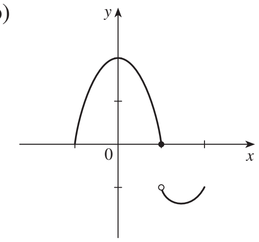
(c)



13. (a)



(b)



15. Máx. abs. $f(1) = 5$ **17.** Ninguno

19. Mín. abs. $f(0) = 0$

21. Máx. abs. $f(-3) = 9$; mín. abs. y loc $f(0) = 0$

23. Máx. abs. $f(2) = \ln 2$

25. Máx. abs. $f(0) = 1$ **27.** Máx. abs. $f(3) = 2$

29. $-\frac{2}{5}$ **31.** $-4, 2$ **33.** $0, \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$ **35.** 0, 2

37. $0, \frac{4}{9}$ **39.** $0, \frac{8}{7}, 4$ **41.** $n\pi$ (n un entero) **43.** $0, \frac{2}{3}$

45. 10 **47.** $f(0) = 5$, $f(2) = -7$

49. $f(-1) = 8$, $f(2) = -19$

51. $f(3) = 66$, $f(\pm 1) = 2$ **53.** $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(0) = 0$

55. $f\left(\sqrt{2}\right) = 2$, $f(-1) = -\sqrt{3}$

57. $f(\pi/6) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f(\pi/2) = 0$

59. $f(2) = 2/\sqrt{e}$, $f(-1) = -1/\sqrt[8]{e}$

61. $f(1) = \ln 3$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{4}$

63. $f\left(\dfrac{a}{a + b}\right) = \dfrac{a^a b^b}{(a + b)^{a+b}}$

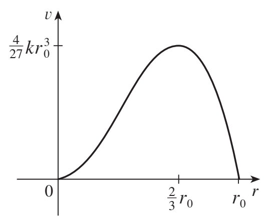
65. (a) 2.19, 1.81 (b) $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2$, $-\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2$

67. (a) 0.32, 0.00 (b) $\frac{3}{16}\sqrt{3}$, 0 **69.** ≈ 3.9665°C

71. El más barato, $t \approx 0.855$ (junio 1994); el más caro, $t \approx 4.618$ (marzo 1998)

73. (a) $r = \frac{2}{3}r_0$ (b) $v = \frac{4}{27}kr_0^3$

(c)

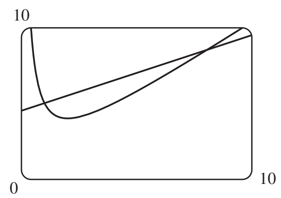


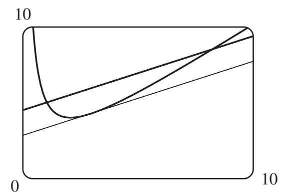
EJERCICIOS 4.2 ■ PÁGINA 285

1. 2 **3.** $\frac{9}{4}$ **7.** f no es derivable en $(-1, 1)$

7. 0.8, 3.2, 4.4, 6.1

9. (a), (b) (c) $2\sqrt{2}$





11. 0 **13.** $-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{6}\left(1 - e^{-6}\right)\right]$ **15.** f no es continua en 3

23. 16 **25.** No **31.** No

EJERCICIOS 4.3 ■ PÁGINA 295

Abreviaturas: cre., creciente; dec., decreciente; CAb, cóncava hacia abajo; CAr, cóncava hacia arriba; AH, asíntota horizontal; AV, asíntota vertical; PI, punto(s) de inflexión

1. (a) $(1, 3), (4, 6)$ (b) $(0, 1), (3, 4)$ (c) $(0, 2)$
(d) $(2, 4), (4, 6)$ (e) $(2, 3)$

3. (a) Prueba de cre/dec (b) Prueba de concavidad
(c) Encuentre puntos en los que cambia la concavidad

5. (a) Cre. en $(1, 5)$; dec. en $(0,1)$ y $(5, 6)$
(b) Máx. loc. en $x = 5$, mín. loc. en $x = 1$

7. $x = 1, 7$

9. (a) Cre. en $(-\infty, 3)$, $(2, \infty)$; dec. en $(-3, 2)$
(b) Max. loc. $f(-3) = 81$; min. loc. $f(2) = -44$
(c) CAr en $(-\frac{1}{2}, \infty)$; CAb $(-\infty, -\frac{1}{2})$; PI $(-\frac{1}{2}, \frac{37}{2})$

11. (a) Cre. en $(-1, 0)$, $(1, \infty)$; dec. en $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$
(b) Máx. loc. $f(0) = 3$; mín.loc. $f(\pm 1) = 2$
(c) CAr en $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$, $(\sqrt{3}/3, \infty)$;
CAb en $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$; PI $(\pm\sqrt{3}/3, \frac{22}{9})$

13. (a) Cre. en $(0, \pi/4)$, $(5\pi/4, 2\pi)$; dec. en $(\pi/4, 5\pi/4)$
(b) Máx. loc. $f(\pi/4) = \sqrt{2}$; mín. loc. $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$
(c) CAr en $(3\pi/4, 7\pi/4)$; CAb en $(0, 3\pi/4)$, $(7\pi/4, 2\pi)$;
PI $(3\pi/4, 0)$, $(7\pi/4, 0)$

15. (a) Cre. en $(-\frac{1}{2}\ln 2, \infty)$; dec. en $(-\infty, -\frac{1}{3}\ln 2)$
(b) Mín. loc. $f(-\frac{1}{3}\ln 2) = 2^{-2/3} + 2^{1/3}$ (c) CAr en $(-\infty, \infty)$;

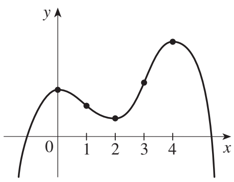
17. (a) Cre. en $(0, e^2)$; dec. en (e^2, ∞)
(b) Máx. loc. $f(e^2) = 2/e$
(c) CAr en $(e^{8/3}, \infty)$; Cab en $(0, e^{8/3})$; PI $(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3})$

19. Máx. loc. $f(-1) = 7$; mín. loc. $f(1) = -1$

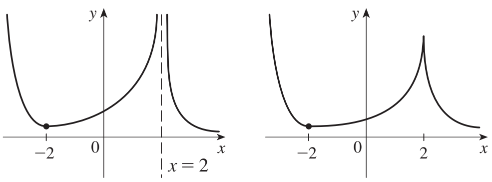
21. Máx. loc. $f(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$

23. (a) f tiene un máximo local en 2.
(b) f tiene una tangente horizontal en 6.

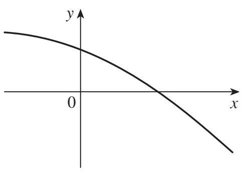
25.



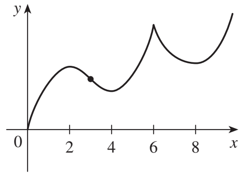
27.



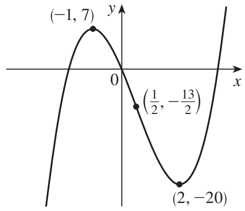
29.



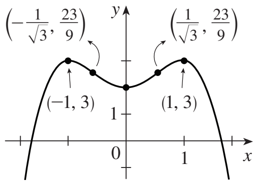
31. (a) Cre. en $(0, 2)$, $(4, 6)$, $(8, \infty)$;
dec. en $(2, 4)$, $(6, 8)$
(b) Máx. loc. en $x = 2, 6$;
mín. loc. en $x = 4, 8$
(c) CAr en $(3, 6)$, $(6, \infty)$;
CAb en $(0, 3)$
(d) 3 (e) Véase gráfica a la derecha.



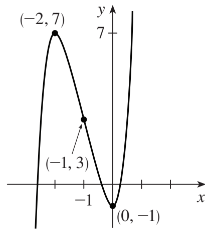
33. (a) Cre. en $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$;
dec. en $(-1, 2)$
(b) Máx. loc. $f(-1) = 7$;
mín. loc. $f(2) = -20$
(c) CAr en $(\frac{1}{2}, \infty)$; CAb en $(-\infty, \frac{1}{2})$;
PI $(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2})$
(d) Véase gráfica a la derecha.



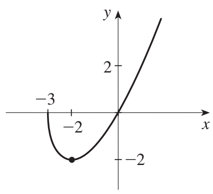
35. (a) Cre. en $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$;
dec. en $(-1, 0)$, $(1, \infty)$
(b) Máx. loc. $f(-1) = 3, f(1) = 3$;
mín. loc. $f(0) = 2$
(c) CAr en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$;
CAb en $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, \infty)$
PI $(\pm 1/\sqrt{3}, \frac{23}{9})$
(d) Véase gráfica a la derecha.



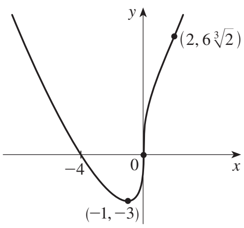
37. (a) Cre. en $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$;
dec. en $(-2, 0)$
(b) Máx. loc. $h(-2) = 7$;
mín. loc $h(0) = -1$
(c) CAb en $(-1, \infty)$;
CAb en $(-\infty, -1)$; PI $(-1, 3)$,
(d) Véase gráfica a la derecha.



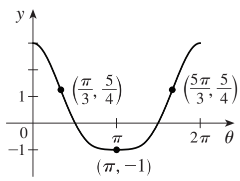
39. (a) Cre. en $(-2, \infty)$;
dec. en $(-3, -2)$
(b) Mín. loc. $A(-2) = -2$
(c) CAr en $(-3, \infty)$
(d) Véase gráfica a la derecha.



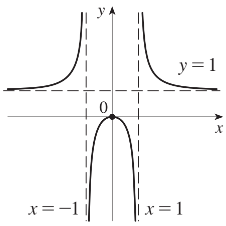
41. (a) Cre. en $(-1, \infty)$;
dec. en $(-\infty, -1)$
(b) Mín. loc. $C(-1) = -3$
(c) CAr en $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$;
CAb en $(0, 2)$;
PI $(0, 0)$, $(2, 6\sqrt[3]{2})$
(d) Véase gráfica a la derecha.



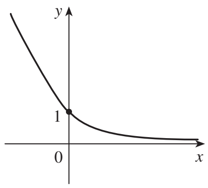
43. (a) Cre. en $(\pi, 2\pi)$;
dec. en $(0, \pi)$
(b) Mín. loc. $f(\pi) = -1$
(c) CAr en $(\pi/3, 5\pi/3)$
CAb en $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi)$;
PI $(\pi/3, \frac{5}{4})$, $(5\pi/3, \frac{5}{4})$.
(d) Véase gráfica a la derecha.



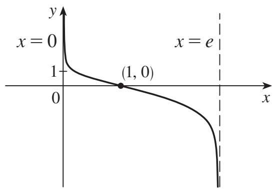
45. (a) AH $y = 1$, AV $x = -1$, $x = 1$
(b) Cre. en $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$;
dec. en $(0, 1)$, $(1, \infty)$
(c) Máx. loc. $f(0) = 0$
(d) CAr en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$;
CAb en $(-1, 1)$
(e) Véase gráfica a la derecha.



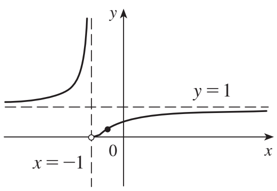
47. (a) AH $y = 0$
(b) Dec. en $(-\infty, \infty)$
(c) Ninguna
(d) CAr en $(-\infty, \infty)$
(e) Véase gráfica a la derecha.



49. (a) AV $x = 0$, $x = e$
(b) Dec. en $(0, e)$
(c) Ninguna
(d) CAr en $(0, 1)$; CAb en $(1, e)$;
PI $(1, 0)$
(e) Véase gráfica a la derecha.



51. (a) AH $y = 1$, AV $x = -1$
(b) Cre. en $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$
(c) Ninguno
(d) CAr en $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$;
CAb en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$; IP $\left(-\frac{1}{2}, 1/e^2\right)$
(e) Véase gráfica a la derecha.



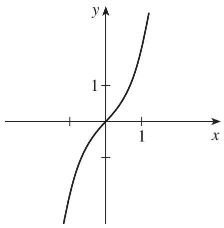
53. $(3, \infty)$
55. (a) Máx. loc. y abs $f(1) = \sqrt{2}$, no hay mín.
(b) $\frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{17}\right)$
57. (b) CAr en $(0.94, 2.57)$, $(3.71, 5.35)$;
CAb en $(0, 0.94)$, $(2.57, 3.71)$, $(5.35, 2\pi)$;
PI $(0.94, 0.44)$, $(2.57, -0.63)$, $(3.71, -0.63)$, $(5.35, 0.44)$
59. CAr en $(-\infty, -0.6)$, $(0.0, \infty)$; CAb en $(-0.6, 0.0)$
61. (a) La rapidez de aumento es inicialmente muy pequeña, aumenta a un máximo en $t \approx 8$ h, luego disminuye hacia 0.
(b) Cuando $t \approx 8$ (c) CAr en $(0, 8)$; CAb en $(8, 18)$; (d) $(8, 350)$
63. $K(3) - K(2)$; CD
65. 28.57 mín, cuando la rapidez de aumento del nivel de droga en el torrente sanguíneo es máxima; 85.71 mín, cuando la rapidez de decremento es máxima
67. $f(x) = \frac{1}{9}(2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)$

EJERCICIOS 4.4 ■ PÁGINA 304

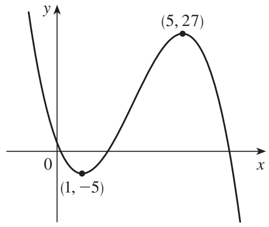
1. (a) Indeterminado (b) 0 (c) 0
(d) ∞, $-\infty$, o no existe (e) Indeterminado
3. (a) $-\infty$ (b) Indeterminado (c) ∞
5. 2 **7.** $\frac{9}{5}$ **9.** $-\infty$ **11.** ∞ **13.** p/q
15. 0 **17.** $-\infty$ **19.** ∞ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** 1
25. $\ln\frac{1}{2}$ **27.** 1 **29.** $\frac{1}{2}$ **31.** 0 **33.** $-1/\pi^2$
35. $\frac{1}{2}a(a - 1)$ **37.** $\frac{1}{24}$ **39.** π **41.** 3 **43.** 0
45. $-2/\pi$ **47.** $\frac{1}{2}$ **49.** $\frac{1}{2}$ **51.** ∞ **53.** 1
55. e^{-2} **57.** e^3 **59.** 1 **61.** e^4
63. $1/\sqrt{e}$ **65.** e^2 **67.** $\frac{1}{4}$ **71.** 1 **77.** $\frac{16}{9}a$ **79.** 56
83. (a) 0

EJERCICIOS 4.5 ■ PÁGINA 314

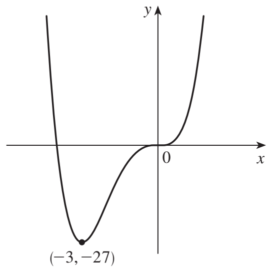
1. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0
C. Alrededor de $(0, 0)$ D. Ninguno
E. Inc. on $(-\infty, \infty)$ F. Ninguno
G. CAr en $(0, \infty)$; CAb en $(-\infty, 0)$;
PI $(0, 0)$
H. Véase gráfica a la derecha.



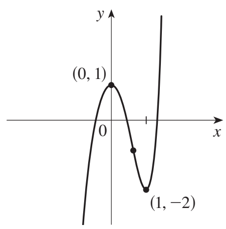
3. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 2; x-int. 2, $\frac{1}{2}\left(7 \pm 3\sqrt{5}\right)$
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre. en $(1, 5)$;
dec. en $(-\infty, 1)$, $(5, \infty)$
F. Mín. loc. $f(1) = -5$;
máx. loc. $f(5) = 27$
G. CAr en $(-\infty, 3)$;
CAb en $(3, \infty)$; PI $(3, 11)$
H. Véase gráfica a la derecha.



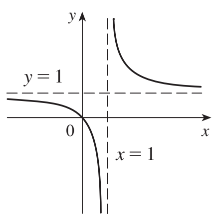
5. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. -4, 0
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre. en $(-3, \infty)$;
dec. en $(-\infty, -3)$
F. Mín. loc. $f(-3) = -27$
G. CAr en $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$;
CAb en $(-2, 0)$; PI $(0, 0)$, $(-2, -16)$
H. Véase gráfica a la derecha.



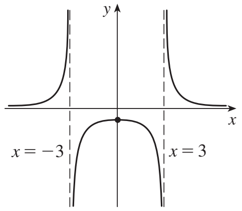
7. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 1
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre. en $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$;
dec. en $(0, 1)$
F. Máx. loc. $f(0) = 1$;
mín. loc. $f(1) = -2$
G. CAr en $\left(1/\sqrt[3]{4}, \infty\right)$;
CAb en $\left(-\infty, 1/\sqrt[3]{4}\right)$;
PI $\left(1/\sqrt[3]{4}, 1 - 9/\left(2\sqrt[3]{16}\right)\right)$
H. Véase gráfica a la derecha.



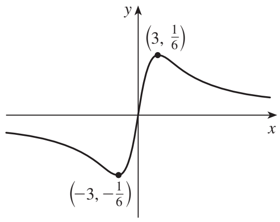
9. A. $\{x \mid x \neq 1\}$ B. y-int. 0; x-int. 0
C. Ninguno D. AV $x = 1$, AH $y = 1$
E. Dec. en $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$
F. Ninguno
G. CAr en $(1, \infty)$; CAb en $(-\infty, 1)$
H. Véase gráfica a la derecha.



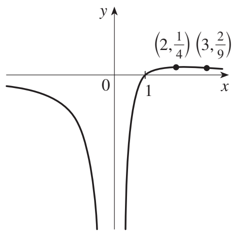
11. A. $\{x \mid x \neq \pm 3\}$ B. y-int. $-\frac{1}{9}$
C. Alrededor del eje y D. AV $x = \pm 3$, AH $y = 0$
E. Cre. en $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$;
dec en $(0, 3)$, $(3, \infty)$
F. Máx. loc. $f(0) = -\frac{1}{9}$
G. CAr en $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$;
CAb en $(-3, 3)$
H. Véase gráfica a la derecha.



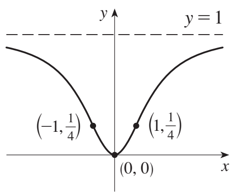
13. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0
C. Alrededor de (0, 0) D. AH $y = 0$
E. Cre. en $(-3, 3)$;
dec en $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$
F. Mín. loc. $f(-3) = -\frac{1}{6}$;
máx. loc. $f(3) = \frac{1}{6}$;
G. CAr en $\left(-3\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(3\sqrt{3}, \infty\right)$;
CAb en $\left(-\infty, -3\sqrt{3}\right)$, $\left(0, 3\sqrt{3}\right)$;
PI (0, 0), $\left(\pm 3\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/12\right)$
H. Véase gráfica a la derecha.



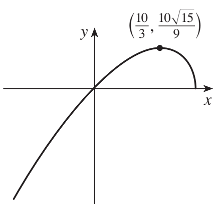
15. A. $(-\infty, 0) \cup (0,\infty)$ B. x-int. 1
C. Ninguno D. AH $y = 0$; AVA $x = 0$
E. Cre. en $(0, 2)$;
dec en $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$
F. Máx. loc. $f(2) = \frac{1}{4}$
G. CAr en $(3, \infty)$;
CAb en $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$; PI $\left(3, \frac{2}{9}\right)$
H. Véase gráfica a la derecha.



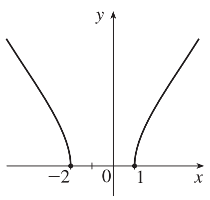
17. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0
C. Alrededor del eje y D. AH $y = 1$
E. Cre. en $(0, \infty)$; dec. en $(-\infty, 0)$
F. Mín. loc. $f(0) = 0$
G. CAr en $(-1, 1)$;
CAb en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; PI $\left(\pm 1, \frac{1}{4}\right)$
H. Véase gráfica a la derecha.



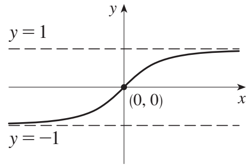
19. A. $(-\infty, 5]$ B. y-int. 0; x-int. 0, 5
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre. en $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$; dec. en $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$
F. Máx. loc. $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{9}\sqrt{15}$
G. CAb en $(-\infty, 5)$
H. Véase gráfica a la derecha.



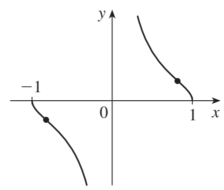
21. A. $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
B. x-int. -2, 1
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre. en $(1, \infty)$; dec. en $(-\infty, -2)$
F. Ninguno
G. CAb en $(-\infty, -2)$, $(1, \infty)$
H. Véase gráfica a la derecha.



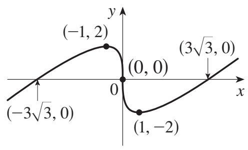
23. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0
C. Alrededor del origen
D. AH $y = \pm 1$
E. Cre. en $(-\infty, \infty)$
F. Ninguno G. CAr en $(-\infty, 0)$;
CAb en $(0, \infty)$; PI (0, 0)
H. Véase gráfica a la derecha.



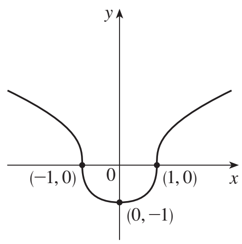
25. A. $\left\{x \,\middle|\, |x| \leqslant 1, x \neq 0\right\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$
B. x-int. ± 1
C. Alrededor de (0, 0) D. AV $x = 0$
E. Dec. en $(-1, 0)$, $(0, 1)$ F. Ninguno
G. CAr en $\left(-1, -\sqrt{2/3}\right)$, $\left(0, \sqrt{2/3}\right)$;
CAb en $\left(-\sqrt{2/3}, 0\right)$, $\left(\sqrt{2/3}, 1\right)$;
PI $\left(\pm\sqrt{2/3}, \pm 1/\sqrt{2}\right)$
H. Véase gráfica a la derecha.



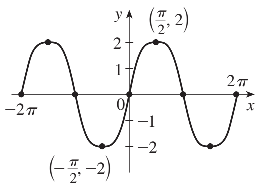
27. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. $\pm 3\sqrt{3}$ C. Alrededor del origen
D. Ninguno E. Cre. en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; dec. en $(-1, 1)$
F. Máx. loc. $f(-1) = 2$;
mín. loc. $f(1) = -2$
G. CAr en $(0, \infty)$; CAb en $(-\infty, 0)$;
PI (0, 0)
H. Véase gráfica a la derecha.



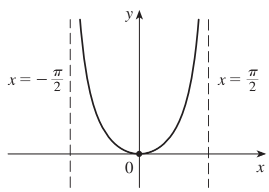
29. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. -1; x-int. ± 1
C. Alrededor del eje y D. Ninguno
E. Cre. en $(0, \infty)$; dec. en $(-\infty, 0)$
F. Mín. loc. $f(0) = -1$
G. CAr en $(-1, 1)$;
CAb en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$;
PI $(\pm 1, 0)$
H. Véase gráfica a la derecha.



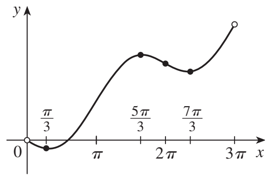
31. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. $n\pi$ (n un entero)
C. Alrededor del origen, periodo 2π D. Ninguno
E. Cre. en $(2n\pi - \pi/2, 2n\pi + \pi/2)$;
dec. en $(2n\pi + \pi/2, 2n\pi + 3\pi/2)$
F. Máx. loc. $f(2n\pi + \pi/2) = 2$;
mín. loc. $f(2n\pi + 3\pi/2) = -2$
G. CAr en $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$;
CAb en $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$; PI $(n\pi, 0)$
H. Véase gráfica a la derecha.



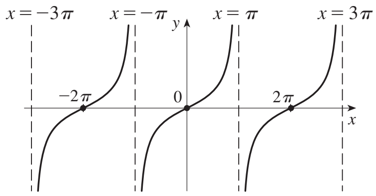
33. A. $(-\pi/2, \pi/2)$ B. y-int. 0; x-int. 0 C. Alrededor del eje y
D. AV $x = \pm\pi/2$
E. Cre. en $(0, \pi/2)$;
dec. en $(-\pi/2, 0)$
F. Mín. loc. $f(0) = 0$
G. CAr en $(-\pi/2, \pi/2)$
H. Véase gráfica a la derecha.



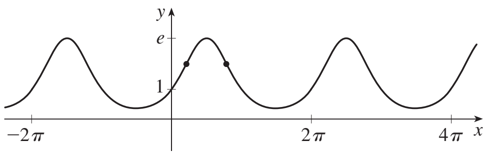
35. A. $(0, 3\pi)$ C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre. en $(\pi/3, 5\pi/3)$, $(7\pi/3, 3\pi)$;
dec. en $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 7\pi/3)$
F. Mín. loc. $f(\pi/3) = (\pi/6) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $f(7\pi/3) = (7\pi/6) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$;
máx. loc. $f(5\pi/3) = (5\pi/6) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
G. CAr en $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$;
CAb en $(\pi, 2\pi)$;
PI $(\pi, \pi/2)$, $(2\pi, \pi)$
H. Véase gráfica a la derecha.



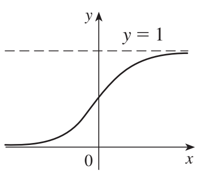
37. A. Todos los reales excepto $(2n + 1)\pi$ (n un entero)
B. y-int. 0; x-int. $2n\pi$
C. Alrededor del origen, periodo 2π
D. AV $x = (2n + 1)\pi$
E. CAr en $((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi)$ F. Ninguno
G. CAr en $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$; CAb en $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$;
PI $(2n\pi, 0)$
H.



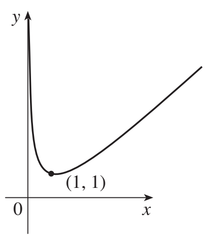
39. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 1 C. Periodo 2π D. Ninguno
Las respuestas para E–G son para el intervalo $[0, 2\pi]$.
E. Cre. en $(0, \pi/2)$; $(3\pi/2, 2\pi)$; dec. en $(\pi/2, 3\pi/2)$
F. Máx. loc. $f(\pi/2) = e$; mín. loc.. $f(3\pi/2) = e^{-1}$
G. CAr en $(0, \alpha)$, $(\beta, 2\pi)$, donde $\alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\right)$;
$\beta = \pi - \alpha$; CAb en (α, β); PI cuando $x = \alpha, \beta$
H.



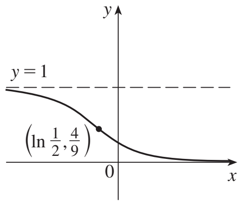
41. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. $\frac{1}{2}$ C. Ninguno
D. AH $y = 0$, $y = 1$
E. Cre. en $\mathbb{R}$ F. Ninguno
G. CAr en $(-\infty, 0)$; CAb en $(0, \infty)$;
PI $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ H. Véase gráfica a la derecha.



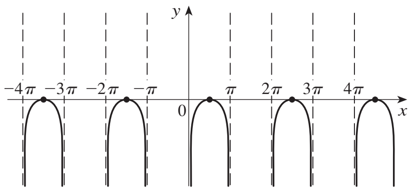
43. A. $(0, \infty)$ B. Ninguno
C. Ninguno D. AV $x = 0$
E. Cre. en $(1, \infty)$; dec. en $(0, 1)$
F. Mín. loc. $f(1) = -1$
G. CAr en $(0, \infty)$
H. Véase gráfica a la derecha.



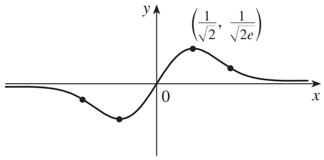
45. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. $\frac{1}{4}$ C. Ninguno
D. AH $y = 0$, $y = 1$
E. Dec. en $\mathbb{R}$ F. Ninguno
G. CAr en $(\ln\frac{1}{2}, \infty)$; CAb en $(-\infty, \ln\frac{1}{2})$;
PI $(\ln\frac{1}{2}, \frac{4}{9})$
H. Véase gráfica a la derecha.



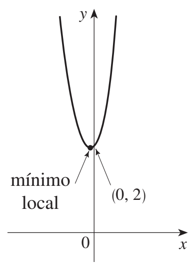
47. A. Toda x en $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$ (n un entero)
B. x-int. $\pi/2 + 2n\pi$ C. Periodo 2π D. AV $x = n\pi$
E. Cre. en $(2n\pi, \pi/2 + 2n\pi)$; dec. en $(\pi/2 + 2n\pi, (2n + 1)\pi)$
F. Máx. loc. $f(\pi/2 + 2n\pi) = 0$ G. CAb en $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$
H.



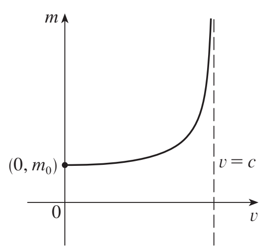
49. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0 C. Alrededor de $(0, 0)$ D. AH $y = 0$
E. Cre. en $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$; dec. en $\left(-\infty, -1/\sqrt{2}\right)$, $\left(1/\sqrt{2}, \infty\right)$
F. Mín. loc. $f\left(-1/\sqrt{2}\right) = -1/\sqrt{2e}$; máx. loc. $f\left(1/\sqrt{2}\right) = 1/\sqrt{2e}$
G. CAr en $\left(-\sqrt{3/2}, 0\right)$, $\left(\sqrt{3/2}, \infty\right)$; CAb en $\left(-\infty, -\sqrt{3/2}\right)$, $\left(0, \sqrt{3/2}\right)$;
PI $\left(\pm\sqrt{3/2}, \pm\sqrt{3/2}e^{-3/2}\right)$, $(0, 0)$
H.



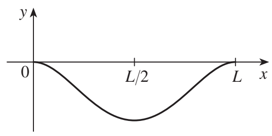
51. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 2
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre. en $\left(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}, \infty\right)$; dec. en $\left(-\infty, \frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}\right)$
F. Mín. loc. $f\left(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/5} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2/5}$
G. CAr en $(-\infty, \infty)$
H. Véase gráfica a la derecha.



53.

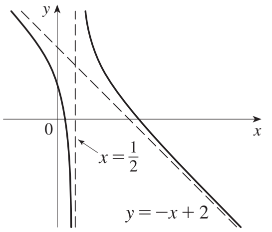


55.

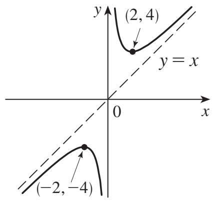


57. $y = x - 1$ **59.** $y = 2x - 2$

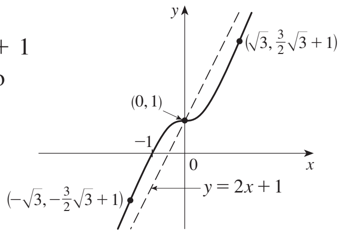
61. A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
B. y-int. 1; x-int. $\frac{1}{4}\left(5 \pm \sqrt{17}\right)$
C. Ninguno
D. AV $x = \frac{1}{2}$; ADiag $y = -x + 2$
E. Dec. en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
F. Ninguno
G. CAr en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; CAb en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$
H. Véase gráfica a la derecha.



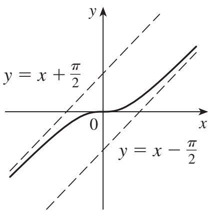
63. A. $\{x \mid x \neq 0\}$ B. Ninguno
C. Alrededor de (0, 0) D. AV $x = 0$;
ADiag $y = x$
E. Cre. en $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$;
dec. en $(-2, 0)$, $(0, 2)$
F. Máx. loc $f(-2) = -4$;
mín. loc. $f(2) = 4$
G. CAr en $(0, \infty)$; CAb en $(-\infty, 0)$
H. Véase gráfica a la derecha.



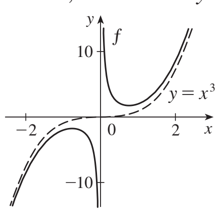
65. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 1; x-int. -1
C. Ninguno D. ADiag $y = 2x + 1$
E. Cre. en $(-\infty, \infty)$ F. Ninguno
G. CAr en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$,
$\left(0, \sqrt{3}\right)$;
CAb en $\left(-\sqrt{3}, 0\right), \left(\sqrt{3}, \infty\right)$;
PI $\left(\pm\sqrt{3}, 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, (0, 1)
H. Véase gráfica a la derecha.



67.

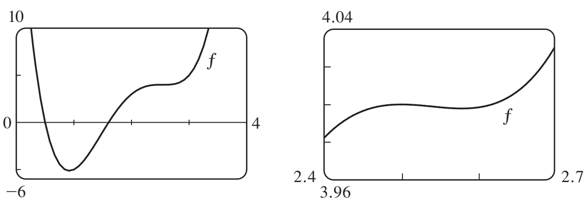


71. AV $x = 0$, asintótica a $y = x^3$

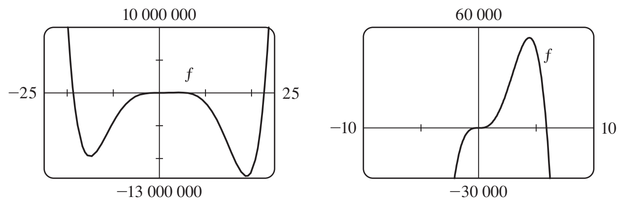


EJERCICIOS 4.6 ■ PÁGINA 320

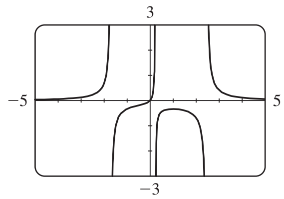
1. Cre. en (0.92, 2.5), (2.58, ∞); dec. en ($-\infty$, 0.92), (2.5, 2.58);
máx. loc. $f(2.5) \approx 4$; mín. loc. $f(0.92) \approx -5.12$, $f(2.58) \approx 3.998$;
CAr en ($-\infty$, 1.46), (2.54, ∞); CAb en (1.46, 2.54);
PI (1.46, -1.40), (2.54, 3.999)



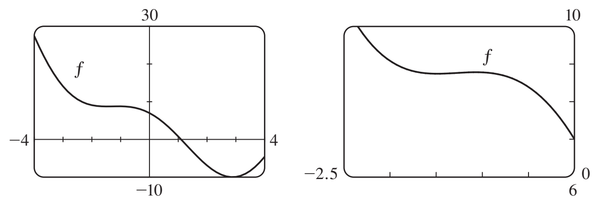
3. Cre. en (-15, 440), (18.93, ∞);
dec. en ($-\infty$, -15), (4.40, 18.93);
máx. loc. $f(4.40) \approx 53\,800$; mín. loc. $f(-15) \approx -9\,700\,000$,
$f(18.93) \approx -12\,700\,000$; CAr en ($-\infty$, -11.34), (0, 2.92);
(15.08, ∞); CAb en (-11.34, 0), (2.92, 15.08);
PI (0, 0), $\approx$ (-11.34, $-6\,250\,000$), (2.92, 31 800),
(15.08, $-8\,150\,000$)



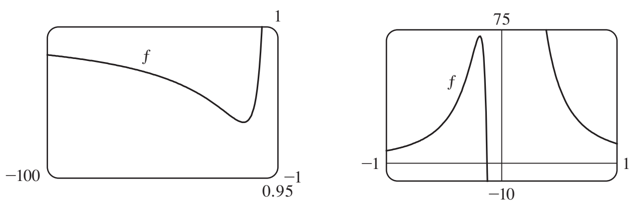
5. Cre. en($-\infty$, -1.7), (-1.7, 0.24), (0.24, 1);
dec. en (1, 2.46), (2.46, ∞); máx. loc. $f(1) = -\frac{1}{3}$;
CAr en ($-\infty$, -1.7), (-0.506, 0.24), (2.46, ∞);
CAb en (-1.7, -0.506), (0.24, 2.46); PI (-0.506, -0.192)



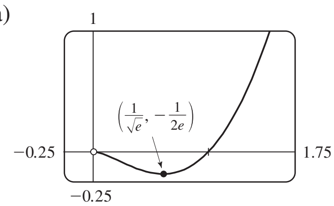
7. Cre. en (-1.49, -1.07), (2.89, 4); dec. en (-4, -1.49),
(-1.07, 2.89); máx. loc. $f(-1.07) \approx 8.79$; mín. loc.
$f(-1.49) \approx 8.75$, $f(2.89) \approx -9.99$; CAr en (-4, -1.28),
(1.28, 4); CAb en (-1.28, 1.28); PI (-1.28, 8.77), (1.28, -1.48)



9. Cre. en $\left(-8 - \sqrt{61}, -8 + \sqrt{61}\right)$; dec. en $\left(-\infty, -8 - \sqrt{61}\right)$,
$\left(-8 + \sqrt{61}, 0\right)$, $(0, \infty)$; CAr en $\left(-12 - \sqrt{138}, -12 + \sqrt{138}\right)$,
$(0, \infty)$; CAb en $\left(-\infty, -12 - \sqrt{138}\right)$, $\left(-12 + \sqrt{138}, 0\right)$

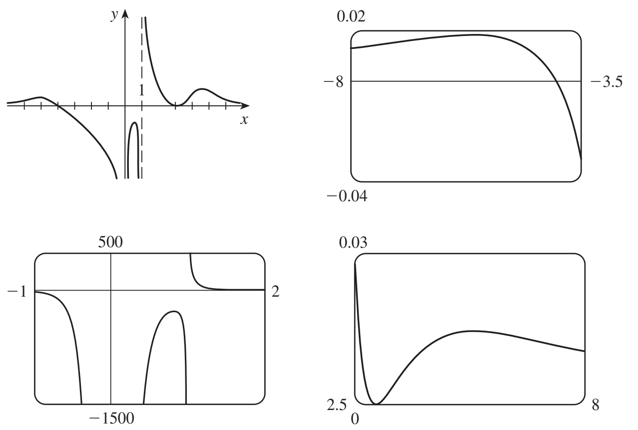


11. (a)



(b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$
(c) Mín. loc. $f\left(1/\sqrt{e}\right) = -1/(2e)$;
CAb en $(0, e^{-3/2})$; CAr en $(e^{-3/2}, \infty)$

13. Máx. loc. $f(-5.6) \approx 0.018$, $f(0.82) \approx -281.5$, $f(5.2) \approx 0.0145$; mín. loc. $f(3) = 0$



15. $f'(x) = -\dfrac{x(x+1)^2(x^3+18x^2-44x-16)}{(x-2)^3(x-4)^5}$

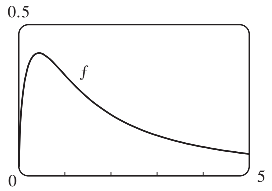
$f''(x) = 2\dfrac{(x+1)(x^6+36x^5+6x^4-628x^3+684x^2+672x+64)}{(x-2)^4(x-4)^6}$

CAr en $(-35.3, -5.0)$, $(-1, -0.5)$, $(-0.1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, \infty)$;

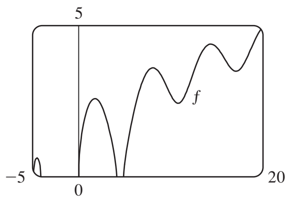
CAb en $(-\infty, -35.3)$, $(-5.0, -1)$ $(-0.5, -0.1)$;

PI $(-35.3, -0.015)$, $(-5.0, -0.005)$, $(-1, 0)$, $(-0.5, 0.00001)$, $(-0.1, 0.0000066)$

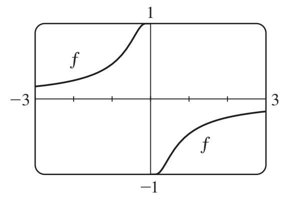
17. Cre. en $(0, 0.43)$; dec. en $(0.43, \infty)$; máx. loc. $f(0.43) \approx 0.41$; CAr en $(0.94, \infty)$; CAb en $(0, 0.94)$; PI $(0.94, 0.34)$



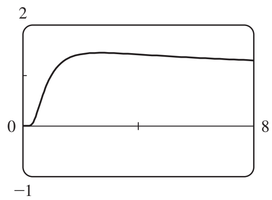
19. Cre. en $(-4.91, -4.51)$, $(0, 1.77)$, $(4.91, 8.06)$, $(10.79, 14.34)$ $(17.08, 20)$;
dec. en $(-4.51, -4.10)$, $(1.77, 4.10)$, $(8.06, 10.79)$, $(14.34, 17.08)$;
máx. loc. $f(-4.51) \approx 0.62$, $f(1.77) \approx 2.58$, $f(8.06) \approx 3.60$; $f(14.34) \approx 4.39$;
mín. loc. $f(10.79) \approx 2.43$, $f(17.08) \approx 3.49$; CAr en $(9.60, 12.25)$, $(15.81, 18.65)$;
CAb en $(-4.91, -4.10)$, $(0, 4.10)$, $(4.91, 9.60)$, $(12.25, 15.81)$, $(18.65, 20)$;
PI en $(9.60, 2.95)$, $(12.25, 3.27)$, $(15.81, 3.91)$, $(18.65, 4.20)$



21. Cre. en $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$;
CAr en $(-\infty, -0.4)$, $(0, 0.4)$;
CAb en $(-0.4, 0)$, $(0.4, \infty)$;
PI $(\mp 0.4, \pm 0.8)$

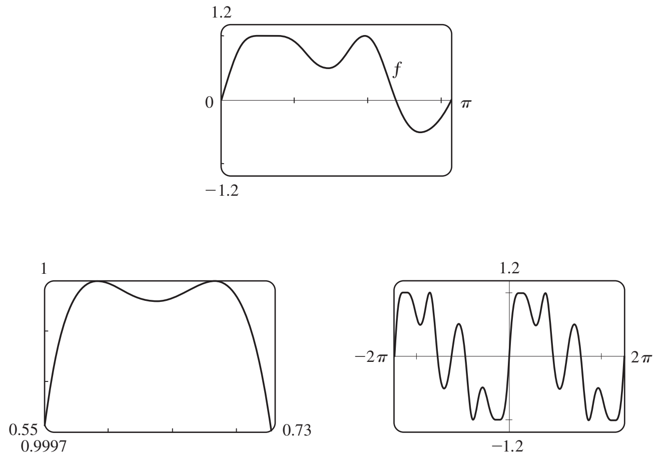


23. (a)

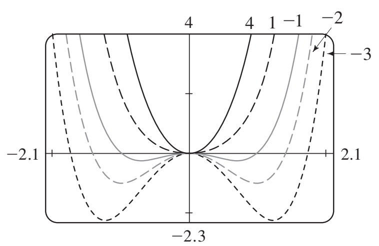


(b) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$
(c) Máx. loc. $f(e) = e^{1/e}$ (d) PI en $x \approx 0.58, 4.37$

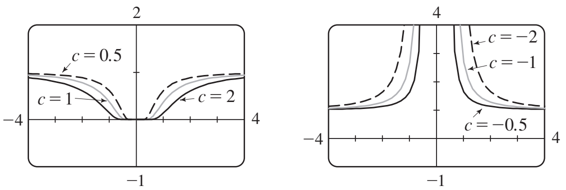
25. Máx. $f(0.59) \approx 1$, $f(0.68) \approx 1$, $f(1.96) \approx 1$;
mín. $f(0.64) \approx 0.99996$, $f(1.46) \approx 0.49$, $f(2.73) \approx -0.51$;
PI $(0.61, 0.99998)$, $(0.66, 0.99998)$, $(1.17, 0.72)$, $(1.75, 0.77)$, $(2.28, 0.34)$



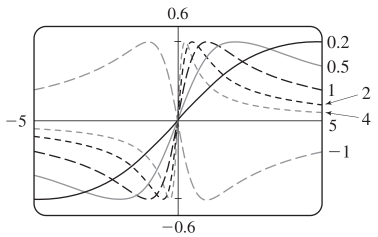
27. Para $c \geqslant 0$, no hay punto de inflexión y sólo un punto extremo, el origen. Para $c < 0$, hay un punto máximo en el origen, dos puntos mínimos, y dos puntos de inflexión, que se mueven hacia abajo y se alejan del origen cuando $c \to -\infty$.



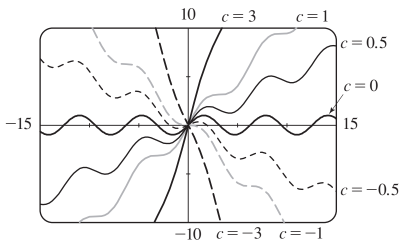
29. No hay máximo o mínimo, cualquiera que sea el valor de c. Para $c < 0$, hay una asíntota vertical en $x = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, y $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$.
$c = 0$ es un valor transicional en el que $f(x) = 1$ para $x \neq 0$.
Para $c > 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, y hay dos puntos de inflexión, que se alejan del eje y cuando $c \to \infty$.



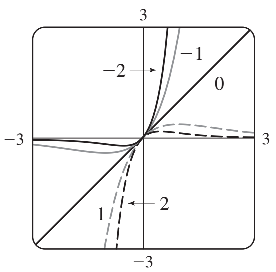
31. Para $c > 0$, los valores máximo y mínimo son siempre $\pm\frac{1}{2}$, pero los puntos extremos y puntos de inflexión se acercan al eje y cuando c aumenta, $c = 0$ es un valor transicional: cuando c se sustituye con $-c$, la curva se refleja en el eje x.



33. Para $|c| < 1$, la gráfica tiene valores locales máximo y mínimo; para $|c| \geqslant 1$ no lo tiene. La función se incrementa para $c \geq 1$ y disminuye para $c \leq -1$. Cuando c cambia, los puntos de inflexión se mueven vertical pero no horizontalmente.



35.

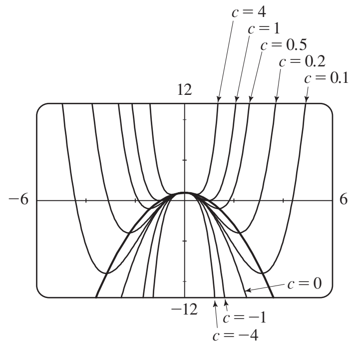


Para $c > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Para $c < 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

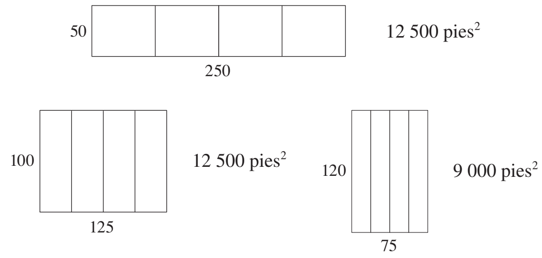
Cuando $|c|$ aumenta, los puntos máximo y mínimo y los puntos de inflexión se acercan al origen.

37. (a) Positivo (b)

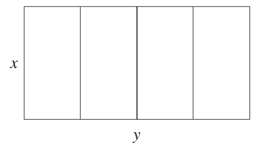


EJERCICIOS 4.7 ■ PÁGINA 328

1. (a) 11, 12 (b) 11.5, 11.5 **3.** 10, 10
5. 25 m por 25 m **7.** $N = 1$
9. (a)



(b)



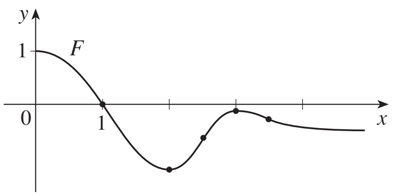
(c) $A = xy$ (d) $5x + 2y = 750$ (e) $A(x) = 375x - \frac{5}{2}x^2$
(f) 14 062.5 pies^2
11. 1 000 pies por 1 500 pies **13.** 4 000 cm^3 **15.** \$191.28
17. $\left(-\frac{28}{17}, \frac{7}{17}\right)$ **19.** $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ **21.** Cuadrado, lado $\sqrt{2}\,r$
23. $L/2$, $\sqrt{3}\,L/4$ **25.** Base $\sqrt{3}\,r$, altura $3r/2$
27. $4\pi r^3/(3\sqrt{3})$ **29.** $\pi r^2(1 + \sqrt{5})$ **31.** 24 cm, 36 cm
33. (a) Usar todo el alambre para el cuadrado
(b) $40\sqrt{3}/(9 + 4\sqrt{3})$ m para el cuadrado
35. Altura = radio = $\sqrt[3]{V/\pi}$ cm **37.** $V = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$
41. $E^2/(4r)$
43. (a) $\frac{3}{2}S^2 \csc\theta\,(\csc\theta - \sqrt{3}\cot\theta)$ (b) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$
(c) $6s[h + s/(2\sqrt{2})]$
45. Remar directamente a B **47.** $\approx$ 4.85 km al este de la refinería
49. $10\sqrt[3]{3}/(1 + \sqrt[3]{3})$ pies de la fuente más fuerte
51. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$
53. (a) (i) \$342 491; \$342/unidad; \$390/unidad; (ii) 400
(iii) \$320/unidad
55. (a) $p(x) = 19 - \frac{1}{3000}x$ (b) \$9.50
57. (a) $p(x) = 550 - \frac{1}{10}x$ (b) \$175 (c) \$100
61. 9.35 m **65.** $x = 6$ in. **57.** $\pi/6$
69. A una distancia $5 - 2\sqrt{5}$ de A **71.** $\frac{1}{2}(L + W)^2$
73. (a) Alrededor de 5.1 km de B (b) C está cerca de B; C está cerca de D; $W/L = \sqrt{25 + x^2}/x$, donde $x = |BC|$ (c) $\approx$1.07; no hay tal valor (d) $\sqrt{41}/4 \approx 1.6$

EJERCICIOS 4.8 ■ PÁGINA 338

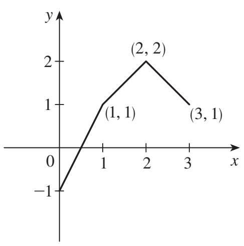
1. (a) $x_2 \approx 2.3, x_3 \approx 3$ (b) No **3.** $\frac{4}{5}$ **5.** 1.1797
7. 1.785 **9.** -1.25 **11.** 1.82056420 **13.** 1.217562
15. 0.876726 **17.** -0.724492, 1.220744
19. 1.412391, 3.057104 **21.** 0.641714
23. -1.93822883, -1.21997997, 1.13929375, 2.98984102
25. -1.97806681, -0.82646233
27. 0.21916368, 1.08422462 **29.** (b) 31.622777
35. (a) -1.293227, -0.441731, 0.507854 (b) -2.0212
37. (0.904557, 1.855277) **39.** (0.410245, 0.347810)
41. 0.76286%

EJERCICIOS 4.9 ■ PÁGINA 345

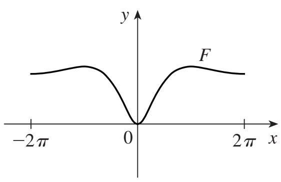
1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ **3.** $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^4 + C$
5. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ **7.** $F(x) = 4x^{5/4} - 4x^{7/4} + C$
9. $F(x) = 4x^{3/2} - \frac{6}{7}x^{7/6} + C$
11. $F(x) = \begin{cases} -5/(4x^8) + C_1 & \text{si } x < 0 \\ -5/(4x^8) + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
13. $F(u) = \frac{1}{3}u^3 - 6u^{-1/2} + C$
15. $G(\theta) = \operatorname{sen}\theta + 5\cos\theta + C$
17. $F(x) = 5e^x - 3\operatorname{senh} x + C$
19. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - 1/x^2 + C$
21. $F(x) = x^5 - \frac{1}{3}x^6 + 4$ **23.** $x^3 + x^4 + Cx + D$
25. $\frac{3}{20}x^{8/3} + Cx + D$ **27.** $e^t + \frac{1}{2}Ct^2 + Dt + E$
29. $x - 3x^2 + 8$ **31.** $4x^{3/2} + 2x^{5/2} + 4$
33. $2\operatorname{sen} t + \tan t + 4 - 2\sqrt{3}$
35. $\frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{1}{2}$ si $x > 0$; $\frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{5}{2}$ si $x < 0$
37. $2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 22x + \frac{59}{3}$
39. $-\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 5\theta + 4$ **41.** $x^2 - 2x^3 + 9x + 9$
43. $x^2 - \cos x - \frac{1}{2}\pi x$ **45.** $-\ln x + (\ln 2)x - \ln 2$
47. 10 **45.** b
51.



53.



55.



57. $s(t) = 1 - \cos t - \operatorname{sen} t$ **59.** $s(t) = \frac{1}{6}t^3 - t^2 + 3t + 1$
61. $s(t) = -10\operatorname{sen} t - 3\cos t + (6/\pi)t + 3$
63. (a) $s(t) = 450 - 4.9t^2$ (b) $\sqrt{450/4.9} \approx 9.58$ s
(c) $-9.8\sqrt{450/4.9} \approx -93.9$ m/s (d) Alrededor 9.09 s
67. 225 pies **69.** \$742.08 **71.** $\frac{130}{11} \approx 11.8$ s
73. $\frac{88}{15} \approx 5.87$ pies/s^2 **75.** 62 500 km/h^2 ≈ 4.82 m/s^2
77. (a) 22.9125 mi (b) 21.675 mi (c) 30 min 33 s
(d) 55.425 mi

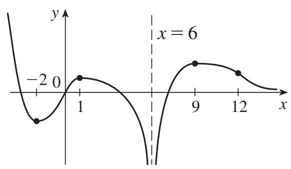
REPASO DEL CAPÍTULO 4 ■ PÁGINA 347

Preguntas de verdadero-falso

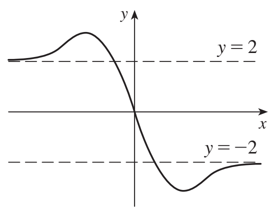
1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Verdadero
11. Verdadero **13.** Falso **15.** Verdadero **17.** Verdadero **19.** Falso

Ejercicios

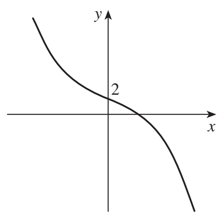
1. Máx. abs. $f(4) = 5$; mín. abs. y loc $f(3) = 1$;
mín. loc. $f(3) = 1$
3. Máx. abs. $f(2) = \frac{2}{5}$; mín. loc. y abs. $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{9}{2}$
5. Máx. abs $f(\pi) = \pi$; mín. abs. $f(0) = 0$; máx. loc.
$f(\pi/3) = (\pi/3) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$; mín. loc. $f(2\pi/3) = (2\pi/3) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
7. π **9.** 8 **11.** 0 **13.** $\frac{1}{2}$
15.



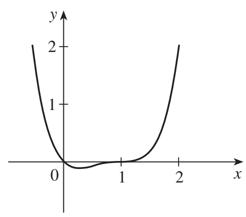
17.



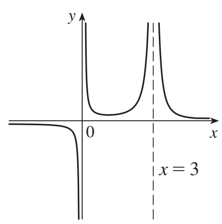
19. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 2
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre. en $(-\infty, \infty)$ F. Ninguno
G. CAr en $(-\infty, 0)$;
CAb en $(0, \infty)$; PI (0, 2)
H. Véase gráfica a la derecha.



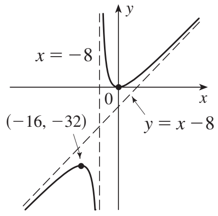
21. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0, 1
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre. en $(\frac{1}{4}, \infty)$, dec. en $(-\infty, \frac{1}{4})$
F. mín. loc. $f(\frac{1}{4}) = -\frac{27}{256}$
G. Cre. en $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(1, \infty)$;
dec. en $(\frac{1}{2}, 1)$; PI $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$, (1, 0)
H. Véase gráfica a la derecha.



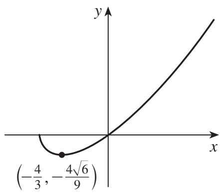
23. A. $\{x \mid x \neq 0, 3\}$
B. Ninguno C. Ninguno
D. AH $y = 0$; AV $x = 0$, $x = 3$
E. Cre. en $(-1, 3)$; dec. en $(-\infty, 0)$;
$(0, 1)$, $(3, \infty)$
F. mín. loc. $f(1) = \frac{1}{4}$
G. CAr en $(0, 3)$, $(3, \infty)$; CAb en $(-\infty, 0)$
H. Véase gráfica a la derecha.



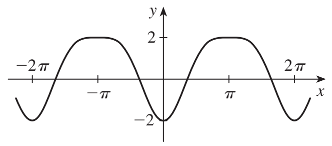
25. A. $\{x \mid x \neq -8\}$
B. y-int. 0, x-int. 0 C. Ninguno
D. AV $x = -8$; ADiag $y = x - 8$
E. Cre. en $(-\infty, -16)$, $(0, \infty)$;
dec. en $(-16, -8)$, $(-8, 0)$
F. Máx. loc. $f(-16) = -32$;
mín. loc. $f(0) = 0$
G. CAr en $(-8, \infty)$; CAb en $(-\infty, -8)$
H. Véase gráfica a la derecha.



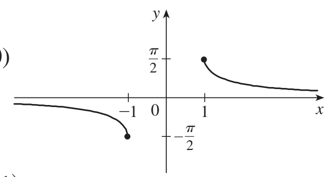
27. A. $[-2, \infty)$
B. y-int. 0; x-int. -2, 0
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre. en $\left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$, dec. en $\left(-2, -\frac{4}{3}\right)$
F. mín. loc. $f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{9}\sqrt{6}$
G. CAr en $(-2, \infty)$
H. Véase gráfica a la derecha.



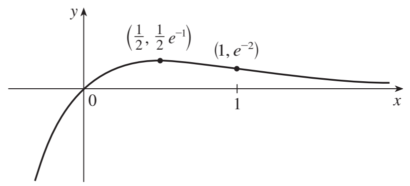
29. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. -2
C. Alrededor del eje y, periodo 2π D. Ninguno
E. Cre. en $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$, n un entero; dec. en $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$
F. Máx. loc. $f((2n + 1)\pi) = 2$; mín. loc. $f(2n\pi) = -2$
G. CAr en $(2n\pi - (\pi/3), 2n\pi + (\pi/3))$;
CAb en $(2n\pi + (\pi/3), 2n\pi + (5\pi/3))$; PI $\left(2n\pi \pm (\pi/3), -\frac{1}{4}\right)$
H.



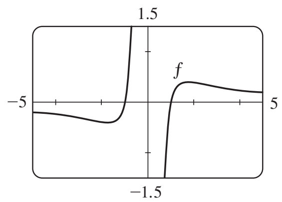
31. A. $\{x \mid |x| \geq 1\}$
B. Ninguno C. Alrededor de (0, 0)
D. AH $y = 0$
E. Dec. en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$
F. Ninguno
G. CAr en $(1, \infty)$; CAb en $(-\infty, -1)$
H. Véase gráfica a la derecha.



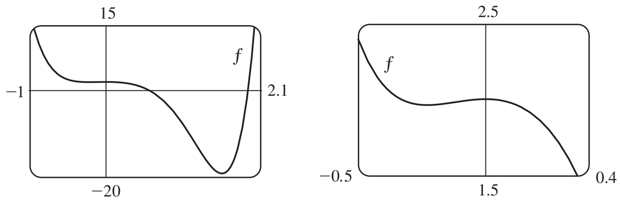
33. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0, x-int. 0 C. Ninguno D. AH $y = 0$
E. Cre. en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, dec. en $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ F. Máx. loc. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1/(2e)$
G. CAr en $(1, \infty)$, CAb en $(-\infty, 1)$; PI $(1, e^{-2})$
H.



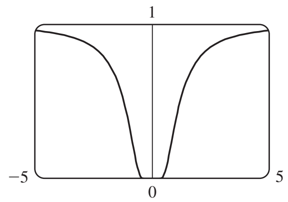
35. Cre. en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(0, \sqrt{3}\right)$;
dec. en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$;
máx. loc. $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$,
mín. loc. $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$;
CAr en $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$, $\left(\sqrt{6}, \infty\right)$;
CAb en $\left(-\infty, -\sqrt{6}\right)$, $\left(0, \sqrt{6}\right)$;
PI $\left(\sqrt{6}, \frac{5}{36}\sqrt{6}\right)$, $\left(-\sqrt{6}, -\frac{5}{36}\sqrt{6}\right)$



37. Cre. en $(-0.23, 0)$, $(1.62, \infty)$; dec. en $(-\infty, -0.23)$, $(0, 1.62)$;
máx. loc. $f(0) = 2$; mín. loc. $f(-0.23) \approx 1.96$, $f(1.62) \approx -19.2$;
CAr en $(-\infty, -0.12)$, $(1.24, \infty)$;
CAb en $(-0.12, 1.24)$; PI $(-0.12, 1.98)$, $(1.24, -12.1)$



39.



$(\pm 0.82, 0.22)$; $\left(\pm\sqrt{2/3}, e^{-3/2}\right)$

41. -2.96, -0.18, 3.01; -1.57, 1.57; -2.16, -0.75, 0.46, 2.21

43. Para $C > -1$, f es periódica con periodo 2π y tiene máximos locales en $2n\pi + \pi/2$, n un entero. Para $C \leq -1$, f no tiene gráfica. Para $-1 < C \leq 1$, f tiene asíntotas verticales. Para $C > 1$, f es continua en $\mathbb{R}$. A medida que C aumenta, f se mueve hacia arriba y sus oscilaciones se hacen menos pronunciadas.

49. (a) 0 (b) CAr en $\mathbb{R}$ **53.** $3\sqrt{3}r^2$

55. $4/\sqrt{3}$ cm de D **57.** $L = C$ **59.** \$11.50

61. 1.297383 **63.** 1.16718557

65. $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^{-1} x + C$

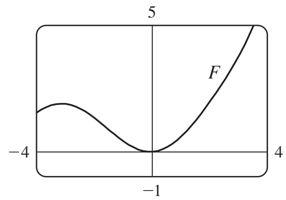
67. $f(x) = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{3}{5}x^{5/3} + C$

69. $f(t) = t^2 + 3\cos t + 2$

71. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 4x^4 + 2x + 1$

73. $s(t) = t^2 - \tan^{-1} t + 1$

75. (b) $0.1e^x - \cos x + 0.9$ (c)



77. No

79. (b) Unas 8.5 por 2 pulgadas. (c) $20/\sqrt{3}$ in. $20\sqrt{2/3}$ in.

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 352

3. 24 **7.** $(-2, 4)$, $(2, -4)$ **11.** $-3.5 < a < -2.5$

13. $(m/2, m^2/4)$ **15.** $a \leq e^{1/e}$

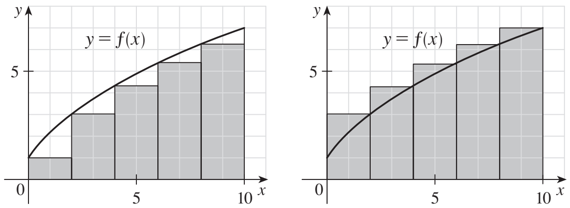
19. (a) $T_1 = D/c_1$, $T_2 = (2h\sec\theta)/c_1 + (D - 2h\tan\theta)/c_2$,
$T_3 = \sqrt{4h^2 + D^2}/c_1$
(c) $c_1 \approx 3.85$ km/s, $c_2 \approx 7.66$ km/s, $h \approx 0.42$ km

23. $3/\left(\sqrt[3]{2} - 1\right) \approx 11\frac{1}{2}$ h

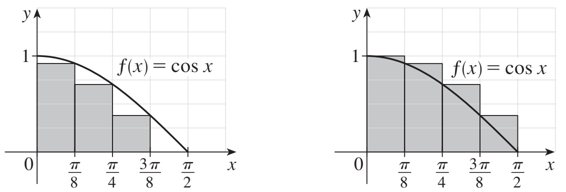
CAPÍTULO 5

EJERCICIOS 5.1 ■ PÁGINA 364

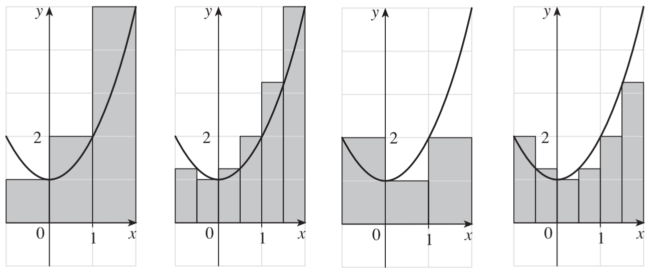
1. (a) 40, 52 (b) 43.2, 49.2



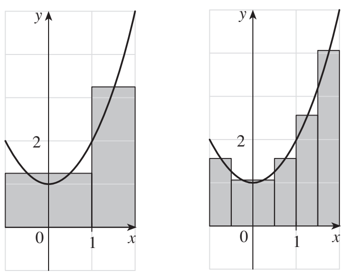
3. (a) 0.7908, subestimado (b) 1.1835, sobreestimado



5. (a) 8, 6.875 (b) 5, 5.375



(c) 5.75, 5.9375



(d) M_6

7. 0.2533, 0.2170, 0.2101, 0.2050; 0.2

9. (a) Izquierda: 0.8100, 0.7937, 0.7904;
Derecha: 0.7600, 0.7770, 0.7804

11. 34.7 pies, 44.8 pies **13.** 63.2 L, 70 L **15.** 155 pies

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt[4]{1 + 15i/n} \cdot (15/n)$ **19.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{i\pi}{2n} \cos \dfrac{i\pi}{2n}\right) \dfrac{\pi}{2n}$

21. La región bajo la gráfica de $y = \tan x$ de 0 a $\pi/4$

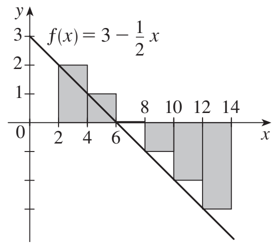
23. (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{64}{n^6} \sum_{i=1}^{n} i^5$ (b) $\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ (c) $\frac{32}{3}$

25. sen b, 1

EJERCICIOS 5.2 ■ PÁGINA 376

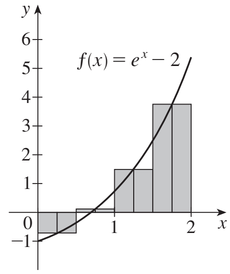
1. -6

La suma de Riemann representa la suma de las áreas de los dos rectángulos arriba del eje x menos la suma de las áreas de los tres rectángulos abajo del eje x, es decir, el área neta de los rectángulos con respecto al eje x..



3. 2.322986

La suma de Riemann representa la suma de las áreas de los tres rectángulos arriba del eje x menos el área de los rectángulos abajo del eje x.



5. (a) 4 (b) 6 (c) 10 **7.** $-475, -85$ **9.** 124.1644

11. 0.3084 **13.** 0.30843908, 0.30981629, 0.31015563

15.

n	R_n
5	1.933766
10	1.983524
50	1.999342
100	1.999836

Los valores de R_n parecen aproximarse a 2.

17. $\int_2^6 x \ln(1 + x^2)dx$ **19.** $\int_1^8 \sqrt{2x + x^2}\, dx$ **21.** 42

23. $\frac{4}{3}$ **25.** 3.75 **29.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{2 + 4i/n}{1 + (2 + 4i/n)^5} \cdot \dfrac{4}{n}$

31. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\text{sen}\, \dfrac{5\pi i}{n}\right) \dfrac{\pi}{n} = \dfrac{2}{5}$

33. (a) 4 (b) 10 (c) -3 (d) 2 **35.** $-\frac{3}{4}$

37. $3 + \frac{9}{4}\pi$ **39.** 2.5 **41.** 0 **43.** 3 **45.** $e^5 - e^3$

47. $\int_{-1}^{5} f(x)\, dx$ **49.** 122

55. $2m \leqslant \int_0^2 f(x)\, dx < 2M$ por la propiedad 8 de comparación

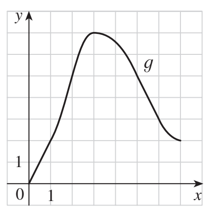
55. $3 \leqslant \int_1^4 \sqrt{x}\, dx \leqslant 6$ **57.** $\dfrac{\pi}{12} \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x\, dx \leqslant \dfrac{\pi}{12}\sqrt{3}$

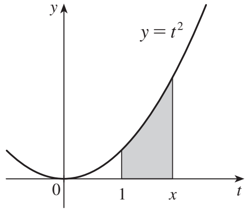
59. $0 \leqslant \int_0^2 xe^{-x}\, dx \leqslant 2/e$ **69.** $\int_0^1 x^4\, dx$ **71.** $\frac{1}{2}$

EJERCICIOS 5.3 ■ PÁGINA 387

1. Un proceso deshace lo que el otro hace. Vea el teorema fundamental de cálculo, página 387.

3. (a) 0, 2, 5, 7, 3
(b) (0, 3)
(c) $x = 3$
(d)



5. 

(a), (b) x^2

7. $g'(x) = 1/(x^3 + 1)$

9. $g'(y) = y^2 \text{ sen } y$ **11.** $F'(x) = -\sqrt{1 + \sec x}$

13. $h'(x) = -\dfrac{\arctan(1/x)}{x^2}$ **15.** $y' = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x}}\, \sec^2 x$

17. $y' = \dfrac{3(1 - 3x)^3}{1 + (1 - 3x)^2}$ **19.** $\frac{364}{3}$ **21.** 63

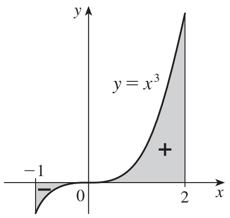
23. $\frac{5}{9}$ **25.** $\frac{7}{8}$ **27.** $\frac{156}{7}$ **29.** $\frac{40}{3}$ **31.** 1 **33.** $\frac{49}{3}$

35. ln 3 **37.** π **39.** $e^2 - 1$ **41.** 0

43. La función $f(x) = x^{-4}$ no es continua en el intervalo $[-2, 1]$, de modo que no se puede aplicar el teorema fundamental de cálculo 2 (FTC2).

45. La función $f(\theta) = \sec \theta \tan \theta$ no es continua en el intervalo $[\pi/3, \pi]$, de modo que no se puede aplicar el FTC2.

47. $\frac{243}{4}$ **49.** 2

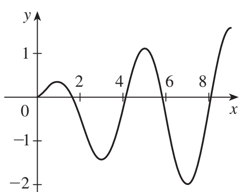
51. 3.75 

53. $g'(x) = \dfrac{-2(4x^2 - 1)}{4x^2 + 1} + \dfrac{3(9x^2 - 1)}{9x^2 + 1}$

55. $y' = 3x^{7/2} \text{ sen}(x^3) - \dfrac{\text{sen} \sqrt{x}}{2\sqrt[4]{x}}$ **53.** $\sqrt{257}$ **55.** 29

61. (a) $-2\sqrt{n}$, $\sqrt{4n - 2}$, n un entero > 0
(b) $(0, 1)$, $(-\sqrt{4n - 1}, -\sqrt{4n - 3})$, y $(\sqrt{4n - 1}, \sqrt{4n + 1})$, n un entero > 0 (c) 0.74

63. (a) Máx. loc. en 1 y 5; mín. loc. en 3 y 7
(b) $x = 9$
(c) $(\frac{1}{2}, 2)$, $(4, 6)$, $(8, 9)$
(d) Véase gráfica a la derecha.



65. $\frac{1}{4}$ **73.** $f(x) = x^{3/2}$, $a = 9$

75. (b) Promedie gasto sobre $[0, t]$; minimice gasto promedio

EJERCICIOS 5.4 ■ PÁGINA 397

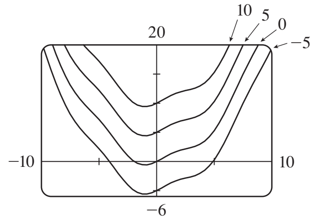
5. $\frac{1}{3}x^3 - (1/x) + C$ **7.** $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - 2x + C$

9. $2t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + C$ **11.** $\frac{1}{3}x^3 - 4\sqrt{x} + C$

9. $-\cos x + \cosh x + C$ **15.** $\frac{1}{2}\theta^2 + \csc \theta + C$

17. $\tan \alpha + C$

19. $\text{sen } x + \frac{1}{4}x^2 + C$



21. 18 **23.** $-2 + 1/e$ **25.** 52

27. $\frac{256}{15}$ **29.** $-\frac{63}{4}$ **31.** $\frac{55}{63}$ **33.** $2\sqrt{5}$ **35.** 8

37. $1 + \pi/4$ **39.** $\frac{256}{5}$ **41.** $\pi/6$ **43.** -3.5

45. 0, 1.32; 0.84 **47.** $\frac{4}{3}$

49. El aumento en el peso del niño (en libras) entre 5 y 10 años de edad

51. Número de galones de petróleo que se fugan en las primeras 2 horas

53. Aumento en ingreso cuando la producción se aumenta de 1 000 a 5 000 unidades

55. Newtons-metro (o joules) **57.** (a) $-\frac{3}{2}$ m (b) $\frac{41}{6}$ m

59. (a) $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 5$ m/s (b) $416\frac{2}{3}$ m

61. $46\frac{2}{3}$ kg **63.** 1.4 mi **65.** \$58 000

67. (b) A lo sumo 40%; $\frac{5}{36}$

EJERCICIOS 5.5 ■ PÁGINA 406

1. $-e^{-x} + C$ **3.** $\frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2} + C$ **5.** $-\frac{1}{4}\cos^4 \theta + C$

7. $-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$ **9.** $\frac{1}{63}(3x - 2)^{21} + C$

11. $\frac{1}{3}(2x - x^2)^{3/2} + C$ **13.** $-\frac{1}{3}\ln|5 - 3x| + C$

15. $-(1/\pi)\cos \pi t + C$ **17.** $\frac{2}{3}\sqrt{3ax + bx^3} + C$

19. $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ **21.** $2 \text{ sen } \sqrt{t} + C$ **23.** $\frac{1}{7}\text{sen}^7\theta + C$

25. $\frac{2}{3}(1 + e^x)^{3/2} + C$ **27.** $\frac{1}{2}(1 + z^3)^{2/3} + C$ **29.** $e^{\tan x} + C$

31. $-1/(\text{sen } x) + C$ **33.** $-\frac{2}{3}(\cot x)^{3/2} + C$

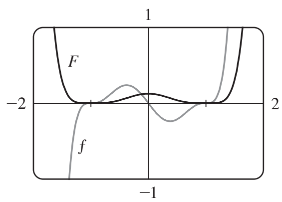
35. $-\ln(1 + \cos^2 x) + C$ **37.** $\ln|\text{sen } x| + C$

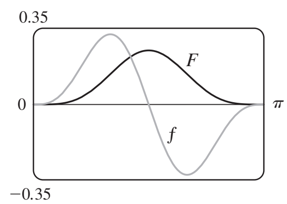
39. $\frac{1}{3}\sec^3 x + C$ **41.** $\ln|\text{sen}^{-1} x| + C$

43. $\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

45. $\frac{4}{7}(x + 2)^{7/4} - \frac{8}{3}(x + 2)^{3/4} + C$

47. $\frac{1}{8}(x^2 - 1)^4 + C$ **49.** $\frac{1}{4}\text{sen}^4 x + C$





51. 0 **53.** $\frac{182}{9}$ **53.** 4

57. 0 **59.** $e - \sqrt{e}$ **61.** 3 **63.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)a^3$

65. $\frac{16}{15}$ **67.** 2 **69.** $\ln(e + 1)$ **71.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$

73. 6π **75.** Las tres áreas son iguales. **77.** ≈ 4512 L

79. $\dfrac{5}{4\pi}\left(1 - \cos \dfrac{2\pi t}{5}\right)$ L **81.** 5 **87.** $\pi^2/4$

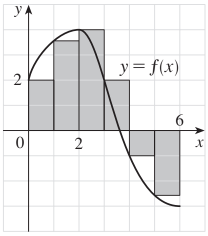
REPASO DEL CAPÍTULO 5 ■ PÁGINA 409

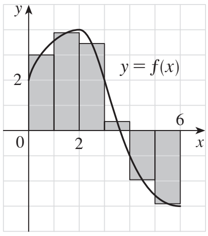
Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Verdadero
11. Falso **13.** Falso **15.** Falso

Ejercicios

1. (a) 8 (b) 5.7





3. $\frac{1}{2} + \pi/4$ **5.** 3 **7.** f es c, f' es b, $\int_0^x f(t)\,dt$ es a

9. 37 **11.** $\frac{9}{10}$ **13.** -76 **15.** $\frac{21}{4}$ **17.** No existe

19. $\frac{1}{3}$ sen 1 **21.** 0 **23.** $-(1/x) - 2\ln|x| + x + C$

25. $\sqrt{x^2 + 4x} + C$ **27.** $[1/(2\pi)]\,\text{sen}^2\pi t + C$

29. $2e^{\sqrt{x}} + C$ **31.** $-\frac{1}{2}[\ln(\cos x)]^2 + C$

33. $\frac{1}{4}\ln(1 + x^4) + C$ **35.** $\ln|1 + \sec\theta| + C$ **37.** $\frac{23}{3}$

39. $2\sqrt{1 + \text{sen}\,x} + C$ **41.** $\frac{64}{5}$ **43.** $F'(x) = \sqrt{1 + x^4}$

45. $g'(x) = 4x^3\cos(x^8)$ **47.** $y' = (2e^x - e^{\sqrt{x}})/(2x)$

49. $4 \leqslant \int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx \leqslant 4\sqrt{3}$ **55.** 0.280981

57. Número de barriles de petróleo consumidos del 1 de enero, 2000, al 1 de enero, 2008.

59. 72 400 **61.** 3 **63.** $c \approx 1.62$

65. $f(x) = e^{2x}(1 + 2x)/(1 - e^{-x})$ **71.** $\frac{2}{3}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 413

1. $\pi/2$ **3.** $f(x) = \frac{1}{2}x$ **5.** -1 **7.** e^{-2} **9.** $[-1, 2]$

11. (a) $\frac{1}{2}(n - 1)n$ (b) $\frac{1}{2}[\![b]\!](2b - [\![b]\!] - 1) - \frac{1}{2}[\![a]\!](2a - [\![a]\!] - 1)$

17. $2(\sqrt{2} - 1)$

CAPÍTULO 6

EJERCICIOS 6.1 ■ PÁGINA 420

1. $\frac{32}{3}$ **3.** $e - (1/e) + \frac{10}{3}$ **5.** 19.5 **7.** $\frac{1}{6}$ **9.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$

11. $\frac{1}{3}$ **13.** 72 **15.** $2 - 2\ln 2$ **17.** $\frac{59}{12}$ **19.** $\frac{32}{8}$

21. $\frac{8}{3}$ **23.** $\frac{1}{2}$ **25.** $\pi - \frac{2}{3}$ **27.** $\ln 2$ **29.** 6.5

31. $\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$ **33.** 0.6407 **35.** 0, 0.90; 0.04 **37.** 8.38

39. $12\sqrt{6} - 9$ **41.** $117\frac{1}{3}$ pies **43.** 4232 cm^2

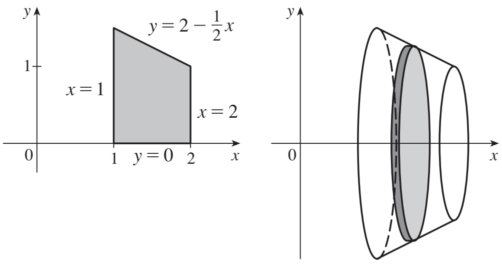
45. (a) Auto A (b) La distancia en la que A está delante de B después de 1 minuto (c) Auto A (d) $t \approx 2.2$ min

47. $\frac{24}{5}\sqrt{3}$ **49.** $4^{2/3}$ **51.** ± 6

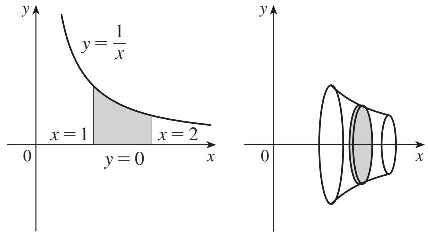
53. $0 < m < 1$; $m - \ln m - 1$

EJERCICIOS 6.2 ■ PÁGINA 430

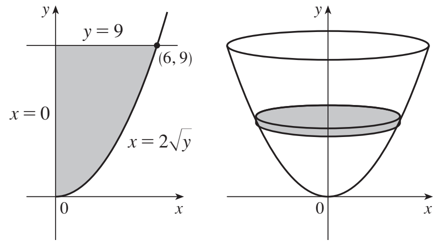
1. $19\pi/12$



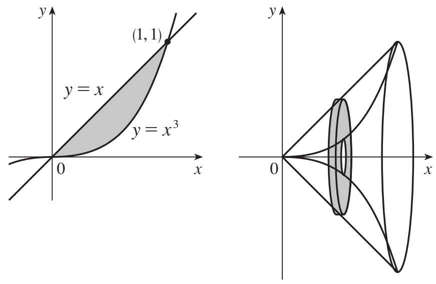
3. $\pi/2$



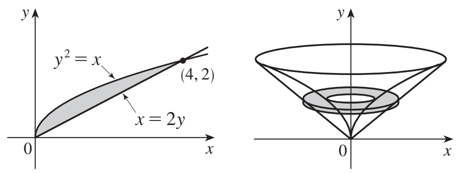
5. 162π



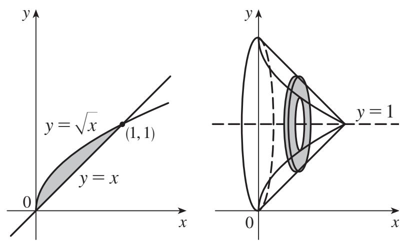
7. $4\pi/21$



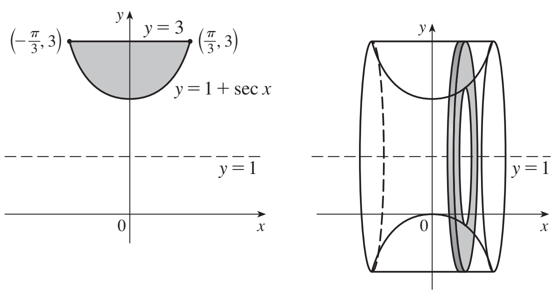
9. $64\pi/15$



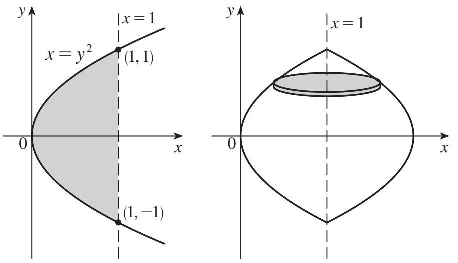
11. $\pi/6$



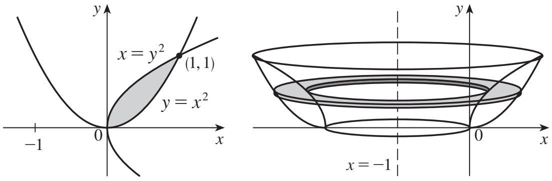
13. $2\pi\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$



15. $16\pi/15$



17. $29\pi/30$



19. $\pi/7$ **21.** $\pi/10$ **23.** $\pi/2$ **25.** $7\pi/15$

27. $5\pi/14$ **29.** $13\pi/30$ **31.** $\pi\int_0^{\pi/4}(1-\tan^3 x)^2\,dx$

33. $\pi\int_0^{\pi}[1^2-(1-\operatorname{sen} x)^2]\,dx$

35. $\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left[5^2-\left(\sqrt{1+y^2}+2\right)^2\right]dy$

37. -1.288, 0.884; 23.780 **39.** $\frac{11}{8}\pi^2$

41. Sólido obtenido al girar la región $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ alrededor del eje x

43. Sólido obtenido al girar la región arriba del eje x limitada por $x = y^2$ y $x = y^4$ alrededor del eje y

45. $1\,110\text{ cm}^3$ **47.** (a) 196 (b) 838 **49.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

51. $\pi h^2(r - \frac{1}{3}h)$ **53.** $\frac{2}{3}b^2 h$ **55.** 10 cm^3 **55.** 24

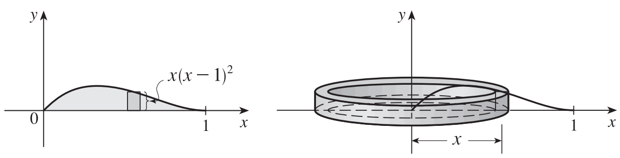
57. $\frac{1}{3}$ **61.** $\frac{8}{15}$

63. (a) $8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}\,dy$ (b) $2\pi^2 r^2 R$

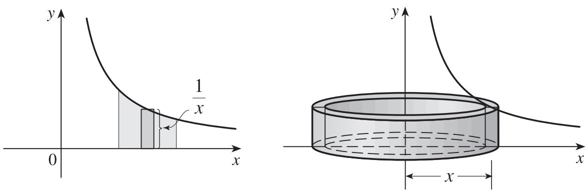
65. (b) $\pi r^2 h$ **67.** $\frac{5}{12}\pi r^3$ **69.** $8\int_0^r\sqrt{R^2-y^2}\sqrt{r^2-y^2}\,dy$

EJERCICIOS 6.3 ■ PÁGINA 436

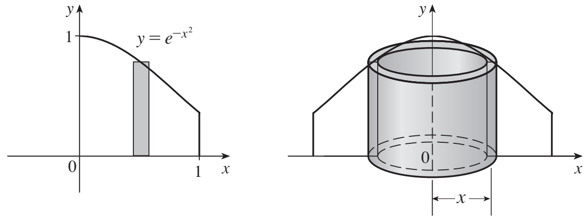
1. Circunferencia $= 2\pi x$, altura $= x(x-1)^2$; $\pi/15$



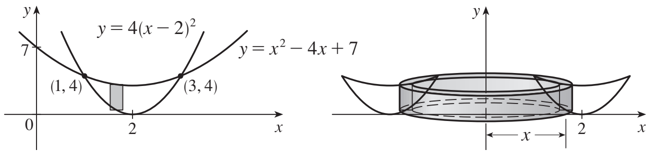
3. 2π



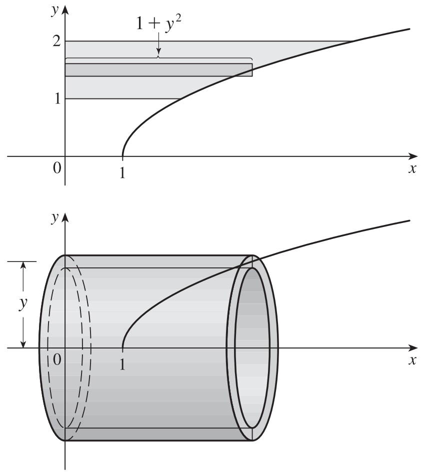
5. $\pi(1 - 1/e)$



7. 16π



9. $21\pi/2$



11. $768\pi/7$ **13.** $16\pi/3$ **15.** $7\pi/15$ **17.** $8\pi/3$

19. $5\pi/14$ **21.** $\int_1^2 2\pi x\ln x\,dx$

23. $\int_0^1 2\pi(x+1)[\operatorname{sen}(\pi x/2) - x^4]\,dx$

25. $\int_0^{\pi} 2\pi(4-y)\sqrt{\operatorname{sen} y}\,dy$ **27.** 3.68

29. Sólido obtenido al girar la región $0 \leqslant y \leqslant x^4$, $0 \leqslant x \leqslant 3$ alrededor del eje y

31. Sólido obtenido al girar la región limitada por (i) $x = 1 - y^2$, $x = 0$, y $y = 0$, o (ii) $x = y^2$, $x = 1$, y $y = 0$ alrededor de la recta $y = 3$

33. 0.13 **35.** $\frac{1}{32}\pi^3$ **37.** 8π **39.** $2\pi(12 - 4\ln 4)$

41. $\frac{4}{3}\pi$ **43.** $\frac{4}{3}\pi r^3$ **45.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

EJERCICIOS 6.4 ■ PÁGINA 441

1. 588 J **3.** 9 pies-lb **5.** 180 J **7.** $\frac{15}{4}$ pies-lb

9. (a) $\frac{25}{24} \approx 1.04$ J (b) 10.8 cm **11.** $W_2 = 3W_1$

13. (a) 625 pies-lb (b) $\frac{1\,875}{4}$ pies-lb **15.** 650 000 pies-lb

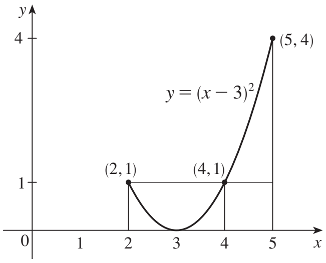
17. 3 857 J **19.** 2 450 J **21.** $\approx 1.06 \times 10^6$ J

23. $\approx 1.04 \times 10^3$ pies-lb **25.** 2.0 m **29.** $Gm_1m_2\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$

EJERCICIOS 6.5 ■ PÁGINA 445

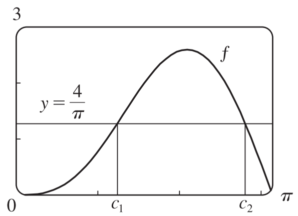
1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{45}{28}$ **5.** $\frac{1}{10}(1 - e^{-25})$ **7.** $2/(5\pi)$

9. (a) 1 (b) 2, 4 (c)



11. (a) $4/\pi$ (b) $\approx 1.24, 2.81$

(c)



15. $38\frac{1}{3}$ **17.** $(50 + 28/\pi)°\mathrm{F} \approx 59°\mathrm{F}$ **19.** 6 kg/m

21. $5/(4\pi) \approx 0.4$ L

REPASO DEL CAPÍTULO 6 ■ PÁGINA 446

Ejercicios

1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{7}{12}$ **5.** $\frac{4}{3} + 4/\pi$ **7.** $64\pi/15$

9. $1656\pi/5$

11. $\frac{4}{3}\pi(2ah + h^2)^{3/2}$ **13.** $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\pi(\pi/2 - x)(\cos^2 x - \frac{1}{4})\,dx$

15. (a) $2\pi/15$ (b) $\pi/6$ (c) $8\pi/15$

17. (a) 0.38 (b) 0.87

19. Sólido obtenido al girar la región $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ alrededor del eje y

21. Sólido obtenido al girar la región $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2 - \operatorname{sen} x$ alrededor del eje x

23. 36 **25.** $\frac{125}{3}\sqrt{3}\ \mathrm{m}^3$ **27.** 3.2 J

29. (a) $8\,000\pi/3 \approx 8\,378$ pies-lb (b) 2.1 pies **31.** $f(x)$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 448

1. (a) $f(t) = 3t^2$ (b) $f(x) = \sqrt{2x/\pi}$ **3.** $\frac{32}{27}$

5. (b) 0.2261 (c) 0.6736 m

(d) (i) $1/(105\pi) \approx 0.003$ pulg/s (ii) $370\pi/3$ s ≈ 6.5 min

9. $y = \frac{32}{9}x^2$

11. (a) $V = \int_0^h \pi[f(y)]^2\,dy$ (c) $f(y) = \sqrt{kA/(\pi C)}\,y^{1/4}$

Ventaja: las marcas del recipiente están igualmente espaciadas.

13. $b = 2a$ **15.** $B = 16A$

CAPÍTULO 7

EJERCICIOS 7.1 ■ PÁGINA 457

1. $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$ **3.** $\frac{1}{5}x \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$

5. $2(r - 2)e^{r/2} + C$

7. $-\dfrac{1}{\pi}x^2 \cos \pi x + \dfrac{2}{\pi^2}x \operatorname{sen} \pi x + \dfrac{2}{\pi^3}\cos \pi x + C$

9. $\frac{1}{2}(2x + 1)\ln(2x + 1) - x + C$

11. $t \arctan 4t - \frac{1}{8}\ln(1 + 16t^2) + C$

13. $\frac{1}{2}t \tan 2t - \frac{1}{4}\ln|\sec 2t| + C$

15. $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

17. $\frac{1}{13}e^{2\theta}(2 \operatorname{sen} 3\theta - 3\cos 3\theta) + C$

19. $\pi/3$ **21.** $1 - 1/e$ **23.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ **25.** $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$

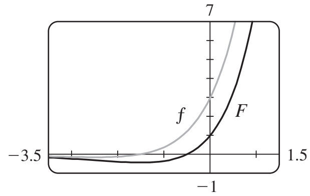
27. $\frac{1}{6}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$ **29.** $\operatorname{sen} x(\ln \operatorname{sen} x - 1) + C$

31. $\frac{32}{5}(\ln 2)^2 - \frac{64}{25}\ln 2 + \frac{62}{125}$

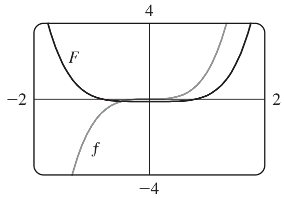
33. $2\sqrt{x} \operatorname{sen} \sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$ **35.** $-\frac{1}{2} - \pi/4$

37. $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(1 + x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C$

39. $(2x + 1)e^x + C$



41. $\frac{1}{3}x^2(1 + x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1 + x^2)^{5/2} + C$



43. (b) $-\frac{1}{4}\cos x \operatorname{sen}^3 x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\operatorname{sen} 2x + C$

45. (b) $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ **51.** $x[(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x - 6] + C$

53. $\frac{25}{4} - \frac{75}{4}e^{-2}$ **55.** 1.0475, 2.8731; 2.1828 **57.** $4 - 8/\pi$

59. $2\pi e$ **61.** $\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{13}{9}$ **63.** $2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$ m

65. 2

EJERCICIOS 7.2 ■ PÁGINA 465

1. $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **3.** $-\frac{11}{384}$

5. $\dfrac{1}{3\pi}\operatorname{sen}^3(\pi x) - \dfrac{2}{5\pi}\operatorname{sen}^5(\pi x) + \dfrac{1}{7\pi}\operatorname{sen}^7(\pi x) + C$

7. $\pi/4$ **9.** $3\pi/8$ **11.** $\frac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C$

13. $\pi/16$ **15.** $\frac{2}{45}\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}\,(45 - 18\operatorname{sen}^2\alpha + 15\operatorname{sen}^4\alpha) + C$

17. $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$ **19.** $\ln|\operatorname{sen} x| + 2\operatorname{sen} x + C$

21. $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ **23.** $\tan x - x + C$

25. $\frac{1}{5}\tan^5 t + \frac{2}{3}\tan^3 t + \tan t + C$ **27.** $\frac{117}{8}$

29. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$

31. $\frac{1}{4}\sec^4 x - \tan^2 x + \ln|\sec x| + C$

33. $\frac{1}{6}\tan^6\theta + \frac{1}{4}\tan^4\theta + C$

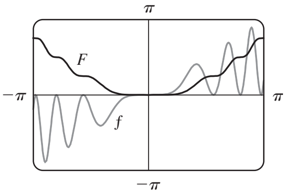
35. $x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$ **37.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$

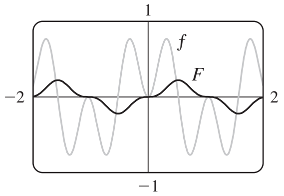
39. $\frac{1}{3}\csc^3\alpha - \frac{1}{5}\csc^5\alpha + C$ **41.** $\ln|\csc x - \cot x| + C$

43. $-\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{26}\cos 13x + C$ **43.** $\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6\theta + C$

47. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$ **49.** $\frac{1}{10}\tan^5(t^2) + C$

51. $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2) + C$ **53.** $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{18}\operatorname{sen} 9x + C$





55. 0 **57.** 1 **59.** 0 **61.** $\pi^2/4$ **63.** $\pi(2\sqrt{2} - \frac{5}{2})$
63. $s = (1 - \cos^3\omega t)/(3\omega)$

EJERCICIOS 7.3 ■ PÁGINA 472

1. $\sqrt{x^2 - 9}/(9x) + C$ **3.** $\frac{1}{3}(x^2 - 18)\sqrt{x^2 + 9} + C$
5. $\pi/24 + \sqrt{3}/8 - \frac{1}{4}$ **7.** $-\sqrt{25 - x^2}/(25x) + C$
9. $\ln\left(\sqrt{x^2 + 16} + x\right) + C$ **11.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(2x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - 4x^2} + C$
13. $\frac{1}{6}\sec^{-1}(x/3) - \sqrt{x^2 - 9}/(2x^2) + C$
15. $\frac{1}{16}\pi a^4$ **17.** $\sqrt{x^2 - 7} + C$
19. $\ln\left|\left(\sqrt{1 + x^2} - 1\right)/x\right| + \sqrt{1 + x^2} + C$ **21.** $\frac{9}{500}\pi$
23. $\frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}((x - 2)/3) + \frac{1}{2}(x - 2)\sqrt{5 + 4x - x^2} + C$
25. $\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}\right) + C$
27. $\frac{1}{2}(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x} - \frac{1}{2}\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}\right| + C$
29. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(x^2) + \frac{1}{4}x^2\sqrt{1 - x^4} + C$
33. $\frac{1}{6}\left(\sqrt{48} - \sec^{-1} 7\right)$ **37.** 0.81, 2; 2.10
41. $r\sqrt{R^2 - r^2} + \pi r^2/2 - R^2\operatorname{arcsen}(r/R)$ **43.** $2\pi^2 Rr^2$

EJERCICIOS 7.4 ■ PÁGINA 481

1. (a) $\dfrac{A}{x + 3} + \dfrac{B}{3x + 1}$ (b) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x + 1} + \dfrac{C}{(x + 1)^2}$
3. (a) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{Dx + E}{x^2 + 4}$
5. (a) $1 + \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x + 1} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + 1}$
(b) $\dfrac{At + B}{t^2 + 1} + \dfrac{Ct + D}{t^2 + 4} + \dfrac{Et + F}{(t^2 + 4)^2}$
7. $x + 6\ln|x - 6| + C$
9. $2\ln|x + 5| - \ln|x - 2| + C$ **11.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$
13. $a\ln|x - b| + C$ **15.** $\frac{7}{6} + \ln\frac{2}{3}$
17. $\frac{27}{5}\ln 2 - \frac{9}{5}\ln 3$ $\left(\text{o } \frac{9}{5}\ln\frac{8}{3}\right)$
19. $-\dfrac{1}{36}\ln|x + 5| + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{x + 5} + \dfrac{1}{36}\ln|x - 1| + C$
21. $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2 + 4) + 2\tan^{-1}(x/2) + C$
23. $2\ln|x| + (1/x) + 3\ln|x + 2| + C$
25. $\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3}\tan^{-1}(x/3) + C$
27. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \left(1/\sqrt{2}\right)\tan^{-1}\left(x/\sqrt{2}\right) + C$
29. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x + 1}{2}\right) + C$
31. $\frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$
33. $\frac{1}{4}\ln\frac{8}{3}$ **35.** $\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2 + 4) + \dfrac{1}{8(x^2 + 4)} + C$

37. $\frac{7}{8}\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x - 2}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{3x - 8}{4(x^2 - 4x + 6)} + C$
39. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt{x + 1} + 1}\right| + C$
41. $2 + \ln\frac{25}{9}$ **43.** $\frac{3}{10}(x^2 + 1)^{5/3} - \frac{3}{4}(x^2 + 1)^{2/3} + C$
45. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C$
47. $\ln\left[\dfrac{(e^x + 2)^2}{e^x + 1}\right] + C$
49. $\ln|\tan t + 1| - \ln|\tan t + 2| + C$
51. $\left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(x^2 - x + 2) - 2x + \sqrt{7}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x - 1}{\sqrt{7}}\right) + C$
53. $-\frac{1}{2}\ln 3 \approx -0.55$
55. $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x - 2}{x}\right| + C$ **59.** $\frac{1}{5}\ln\left|\dfrac{2\tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 2}\right| + C$
61. $4\ln\frac{1}{8} + 2$ **63.** $-1 + \frac{11}{3}\ln 2$
65. $t = -\ln P - \frac{1}{9}\ln(0.9P + 900) + C$, donde $C \approx 10.23$
67. (a) $\dfrac{24\,110}{4\,879}\dfrac{1}{5x + 2} - \dfrac{668}{323}\dfrac{1}{2x + 1} - \dfrac{9\,438}{80\,155}\dfrac{1}{3x - 7} + \dfrac{1}{260\,015}\dfrac{22\,098x + 48\,935}{x^2 + x + 5}$
(b) $\dfrac{4\,822}{4\,879}\ln|5x + 2| - \dfrac{334}{323}\ln|2x + 1| - \dfrac{3\,146}{80\,155}\ln|3x - 7| + \dfrac{11\,049}{260\,015}\ln(x^2 + x + 5) + \dfrac{75\,772}{260\,015\sqrt{19}}\tan^{-1}\dfrac{2x + 1}{\sqrt{19}} + C$

El sistema computarizado de álgebra omite los signos de valor obsoleto y la constante de integración.

EJERCICIOS 7.5 ■ PÁGINA 488

1. $\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$
3. $\operatorname{sen} x + \ln|\csc x - \cot x| + C$
5. $4 - \ln 9$ **7.** $e^{\pi/4} - e^{-\pi/4}$
9. $\frac{243}{5}\ln 3 - \frac{242}{25}$ **11.** $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + \tan^{-1}(x - 2) + C$
13. $\frac{1}{8}\cos^8\theta - \frac{1}{6}\cos^6\theta + C$ $\left(\text{o } \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4\theta - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^6\theta + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^8\theta + C\right)$
15. $x/\sqrt{1 - x^2} + C$
17. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x + C$
$\left(\text{o } \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C\right)$
19. $e^{e^x} + C$ **21.** $(x + 1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$
23. $\frac{4\,097}{45}$ **25.** $3x + \frac{23}{3}\ln|x - 4| - \frac{5}{3}\ln|x + 2| + C$
27. $x - \ln(1 + e^x) + C$ **29.** $15 + 7\ln\frac{2}{7}$
31. $\operatorname{sen}^{-1}x - \sqrt{1 - x^2} + C$
33. $2\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x + 1}{2}\right) + \dfrac{x + 1}{2}\sqrt{3 - 2x - x^2} + C$
35. 0 **37.** $\pi/8 - \frac{1}{4}$ **39.** $\ln|\sec\theta - 1| - \ln|\sec\theta| + C$
41. $\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \ln|\sec\theta| + C$ **43.** $\frac{2}{3}(1 + e^x)^{3/2} + C$
45. $-\frac{1}{3}(x^3 + 1)e^{-x^3} + C$
47. $\ln|x - 1| - 3(x - 1)^{-1} - \frac{3}{2}(x - 1)^{-2} - \frac{1}{3}(x - 1)^{-3} + C$
49. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x + 1} - 1}{\sqrt{4x + 1} + 1}\right| + C$ **51.** $-\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x^2 + 1} + 1}{2x}\right| + C$
53. $\dfrac{1}{m}x^2\cosh(mx) - \dfrac{2}{m^2}x\operatorname{senh}(mx) + \dfrac{2}{m^2}\cosh(mx) + C$

55. $2\ln\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$

57. $\frac{3}{7}(x+c)^{7/3} - \frac{3}{4}c(x+c)^{4/3} + C$

59. $\text{sen}(\text{sen}\, x) - \frac{1}{3}\,\text{sen}^3(\text{sen}\, x) + C$ **61.** $2(x - 2\sqrt{x} + 2)e^{\sqrt{x}} + C$

63. $-\tan^{-1}(\cos^2 x) + C$ **65.** $\frac{2}{3}[(x+1)^{3/2} - x^{3/2}] + C$

67. $\sqrt{2} - 2/\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(1+\sqrt{2})$

69. $e^x - \ln(1+e^x) + C$

71. $-\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(\text{arcsen}\, x)^2 + C$

73. $\frac{1}{8}\ln|x-2| - \frac{1}{16}\ln(x^2+4) - \frac{1}{8}\tan^{-1}(x/2) + C$

75. $2(x-2)\sqrt{1+e^x} + 2\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1} + C$

77. $\frac{2}{3}\tan^{-1}(x^{3/2}) + C$

79. $\frac{1}{3}x\,\text{sen}^3 x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{9}\cos^3 x + C$ **81.** $xe^{x^2} + C$

EJERCICIOS 7.6 ■ PÁGINA 493

1. $(-1/x)\sqrt{7-2x^2} - \sqrt{2}\,\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}x/\sqrt{7}) + C$

3. $\dfrac{1}{2\pi}\sec(\pi x)\tan(\pi x) + \dfrac{1}{2\pi}\ln|\sec(\pi x) + \tan(\pi x)| + C$

5. $\pi/4$ **7.** $\dfrac{1}{2\pi}\tan^2(\pi x) + \dfrac{1}{\pi}\ln|\cos(\pi x)| + C$

9. $-\sqrt{4x^2+9}/(9x) + C$ **11.** $e - 2$

13. $-\frac{1}{2}\tan^2(1/z) - \ln|\cos(1/z)| + C$

15. $\frac{1}{2}(e^{2x}+1)\arctan(e^x) - \frac{1}{2}e^x + C$

17. $\dfrac{2y-1}{8}\sqrt{6+4y-4y^2} + \frac{7}{8}\,\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{2y-1}{\sqrt{7}}\right)$
$- \frac{1}{12}(6+4y-4y^2)^{3/2} + C$

19. $\frac{1}{9}\,\text{sen}^3 x\,[3\ln(\text{sen}\, x) - 1] + C$

21. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{e^x+\sqrt{3}}{e^x-\sqrt{3}}\right| + C$

23. $\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x + \frac{3}{8}\tan x\sec x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

25. $\frac{1}{2}(\ln x)\sqrt{4+(\ln x)^2} + 2\ln\left[\ln x + \sqrt{4+(\ln x)^2}\right] + C$

27. $\sqrt{e^{2x}-1} - \cos^{-1}(e^{-x}) + C$

29. $\frac{1}{5}\ln|x^5 + \sqrt{x^{10}-2}| + C$ **31.** $2\pi^2$

35. $\frac{1}{3}x\tan x\sec^2 x + \frac{2}{3}\tan x + C$

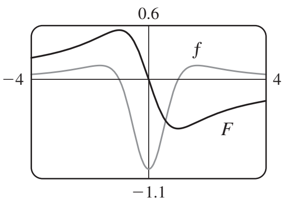
37. $\frac{1}{4}x(x^2+2)\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left(\sqrt{x^2+4} + x\right) + C$

39. $\frac{1}{10}(1+2x)^{5/2} - \frac{1}{6}(1+2x)^{3/2} + C$

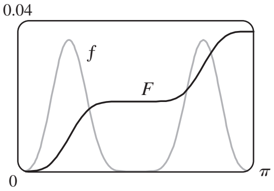
41. $-\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{4}\tan^4 x + C$

43. (a) $-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$;
ambos tienen dominio $(-1, 0) \cup (0, 1)$

45. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1)$;
máx. en -1, mín. en 1; PI en -1.7, 0, y 1.7



47. $F(x) = -\frac{1}{10}\,\text{sen}^3 x\cos^7 x - \frac{3}{80}\,\text{sen}\, x\cos^7 x + \frac{1}{160}\,\text{sen}\, x\cos^5 x$
$+ \frac{1}{128}\,\text{sen}\, x\cos^3 x + \frac{3}{256}\,\text{sen}\, x\cos x + \frac{3}{256}x$;
máx. en π, mín. en 0; PI en 0.7, $\pi/2$, y 2.5



EJERCICIOS 7.7 ■ PÁGINA 505

1. (a) $L_2 = 6$, $R_2 = 12$, $M_2 \approx 9.6$
(b) L_2 está subestimada, R_2 y M_2 están sobreestimadas.
(c) $T_2 = 9 < I$ (d) $L_n < T_n < I < M_n < R_n$

3. (a) $T_4 \approx 0.895759$ (subestimada)
(b) $M_4 \approx 0.908907$ (sobreestimada)
$T_4 < I < M_4$

5. (a) 5.932957, $E_M \approx -0.063353$
(b) 5.869247, $E_S \approx 0.000357$

7. (a) 2.413790 (b) 2.411453 (c) 2.412232

9. (a) 0.146879 (b) 0.147391 (c) 0.147219

11. (a) 0.451948 (b) 0.451991 (c) 0.451976

13. (a) 4.513618 (b) 4.748256 (c) 4.675111

15. (a) -0.495333 (b) -0.543321 (c) -0.526123

17. (a) 1.064275 (b) 1.067416 (c) 1.074915

19. (a) $T_8 \approx 0.902333$, $M_8 \approx 0.905620$
(b) $|E_T| \leqslant 0.0078$, $|E_M| \leqslant 0.0039$
(c) $n = 71$ para T_n, $n = 50$ para M_n

21. (a) $T_{10} \approx 1.983524$, $E_T \approx 0.016476$;
$M_{10} \approx 2.008248$, $E_M \approx -0.008248$
$S_{10} \approx 2.000110$, $E_S \approx -0.000110$
(b) $|E_T| \leqslant 0.025839$, $|E_M| \leqslant 0.012919$, $|E_S| \leqslant 0.000170$
(c) $n = 509$ para T_n, $n = 360$ para M_n, $n = 22$ para S_n

23. (a) 2.8 (b) 7.954926518 (c) 0.2894
(d) 7.954926521 (e) El error real es mucho más pequeño.
(f) 10.9 (g) 7.953789422 (h) 0.0593
(i) El error real es más pequeño. (j) $n \geqslant 50$

25.

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.742943	1.286599	1.014771	0.992621
10	0.867782	1.139610	1.003696	0.998152
20	0.932967	1.068881	1.000924	0.999538

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	0.257057	−0.286599	−0.014771	0.007379
10	0.132218	−0.139610	−0.003696	0.001848
20	0.067033	−0.068881	−0.000924	0.000462

Las observaciones son iguales que después del ejemplo 1.

27.

n	T_n	M_n	S_n
6	6.695473	6.252572	6.403292
12	6.474023	6.363008	6.400206

n	E_T	E_M	E_S
6	−0.295473	0.147428	−0.003292
12	−0.074023	0.036992	−0.000206

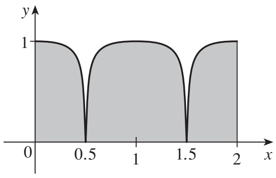
Las observaciones son iguales que después del ejemplo 1.

29. (a) 19.8 (b) 20.6 (c) $20.\overline{53}$

31. (a) 23.44 (b) $0.341\overline{3}$ **33.** $37.7\overline{3}$ pies/s

35. 10,177 megawatts-horas **37.** 828 **39.** 6.0 **41.** 59.4

43.



EJERCICIOS 7.8 ■ PÁGINA 515

Abreviaturas: C, convergente; D, divergente

1. (a) Intervalo infinito (b) Discontinuidad infinita
(c) Discontinuidad infinita (d) Intervalo infinito

3. $\frac{1}{2} - 1/(2t^2)$; 0.495, 0.49995, 0.4999995; 0.5

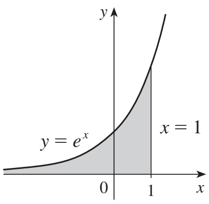
5. $\frac{1}{12}$ **7.** D **9.** $2e^{-2}$ **11.** D **13.** 0 **15.** D

17. D **19.** $\frac{1}{25}$ **21.** D **23.** $\pi/9$

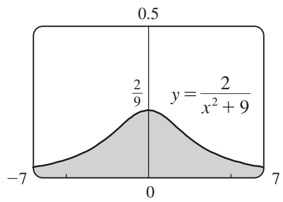
25. $\frac{1}{2}$ **27.** D **29.** $\frac{32}{3}$ **31.** D **33.** $\frac{75}{4}$

35. D **37.** $-2e$ **39.** $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$

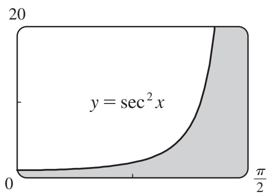
41. e



43. $2\pi/3$



45. Área infinita

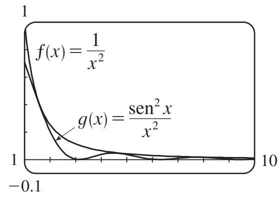


47. (a)

t	$\int_1^t [(\mathrm{sen}^2 x)/x^2]\,dx$
2	0.447453
5	0.577101
10	0.621306
100	0.668479
1 000	0.672957
10 000	0.673407

Parece que la integral es convergente

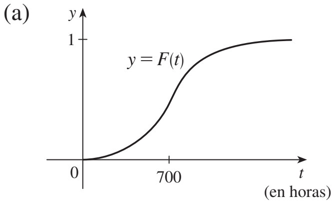
(c)



49. C **51.** D **53.** D **55.** π **57.** $p < 1$, $1/(1-p)$

59. $p > -1$, $-1/(p+1)^2$ **65.** $\sqrt{2GM/R}$

67. (a)



(b) La rapidez a la que aumenta la fracción $F(t)$ cuando t aumenta
(c) 1; todas las bombillas se queman finalmente

69. 1 000

71. (a) $F(s) = 1/s$, $s > 0$ (b) $F(s) = 1/(s-1)$, $s > 1$
(c) $F(s) = 1/s^2$, $s > 0$

77. $C = 1$; $\ln 2$ **79.** No

REPASO DEL CAPÍTULO 7 ■ PÁGINA 518

Preguntas de verdadero-falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso
9. (a) Verdadero (b) Falso **11.** Falso **13.** Falso

Ejercicios

1. $5 + 10\ln\frac{2}{3}$ **3.** $\ln 2$ **5.** $\frac{2}{15}$

7. $-\cos(\ln t) + C$ **9.** $\frac{64}{5}\ln 4 - \frac{124}{25}$

11. $\sqrt{3} - (\pi/3)$ **13.** $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C$

15. $-\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$

17. $x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$

19. $\frac{1}{18}\ln(9x^2 + 6x + 5) + \frac{1}{9}\tan^{-1}\left[\frac{1}{2}(3x+1)\right] + C$

21. $\ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x}\right| + C$

23. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}\right| + C$

25. $\frac{3}{2}\ln(x^2 + 1) - 3\tan^{-1}x + \sqrt{2}\tan^{-1}(x/\sqrt{2}) + C$

27. $\frac{2}{5}$ **29.** 0 **31.** $6 - \frac{3\pi}{2}$

33. $\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} - \mathrm{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$

35. $4\sqrt{1 + \sqrt{x}} + C$ **37.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C$

39. $\frac{1}{8}e - \frac{1}{4}$ **41.** $\frac{1}{36}$ **43.** D

45. $4\ln 4 - 8$ **47.** $-\frac{4}{3}$ **49.** $\pi/4$

51. $(x+1)\ln(x^2 + 2x + 2) + 2\arctan(x+1) - 2x + C$

53. 0

55. $\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{4x^2 - 4x - 3} -$
$\ln\left|2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}\right| + C$

57. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x}+2\ln(\operatorname{sen} x+\sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x})+C$
61. No
63. (a) 1.925444 (b) 1.920915 (c) 1.922470
65. (a) 0.01348, $n \geqslant 368$ (b) 0.00674, $n \geqslant 260$
67. 8.6 mi
69. (a) 3.8 (b) 1.7867, 0.000646 (c) $n \geqslant 30$
71. C **73.** 2 **75.** $\frac{3}{16}\pi^2$

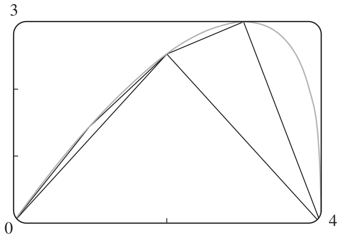
PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 521

1. Alrededor de 1.85 pulgadas del centro **3.** 0
5. $f(\pi)=-\pi/2$ **9.** $(b^b a^{-a})^{1/(b-a)}e^{-1}$
11. $2-\operatorname{sen}^{-1}(2/\sqrt{5})$

CAPÍTULO 8

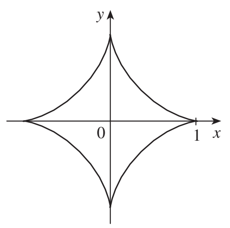
EJERCICIOS 8.1 ■ PÁGINA 530

1. $4\sqrt{5}$ **3.** $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ **5.** $\int_1^4\sqrt{9y^4+6y^2+2}\,dy$
7. $\frac{2}{243}(82\sqrt{82}-1)$ **9.** $\frac{1261}{240}$ **11.** $\frac{32}{3}$
13. $\ln(\sqrt{2}+1)$ **15.** $\ln 3-\frac{1}{2}$
17. $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln(\sqrt{1+e^2}-1)-1-\ln(\sqrt{2}-1)$
19. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$ **21.** $\frac{46}{3}$ **23.** 5.115840
25. 1.569619
27. (a), (b)



$L_1=4$,
$L_2\approx 6.43$,
$L_4\approx 7.50$

(c) $\int_0^4\sqrt{1+[4(3-x)/(3(4-x)^{2/3})]^2}\,dx$ (d) 7.7988
29. $\sqrt{5}-\ln(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))-\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$
31. 6



33. $s(x)=\frac{2}{27}[(1+9x)^{3/2}-10\sqrt{10}]$ **35.** $2\sqrt{2}\,(\sqrt{1+x}-1)$
37. 209.1 m **39.** 29.36 in. **41.** 12.4

EJERCICIOS 8.2 ■ PÁGINA 537

1. (a) $\int_0^1 2\pi x^4\sqrt{1+16x^6}\,dx$ (b) $\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+16x^6}\,dx$
3. (a) $\int_0^1 2\pi\tan^{-1}x\sqrt{1+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}}\,dx$
(b) $\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}}\,dx$
5. $\frac{1}{27}\pi\,(145\sqrt{145}-1)$ **7.** $\frac{98}{3}\pi$
9. $2\sqrt{1+\pi^2}+(2/\pi)\ln(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$ **11.** $\frac{21}{2}\pi$
13. $\frac{1}{27}\pi\,(145\sqrt{145}-10\sqrt{10})$ **15.** πa^2
17. 9.023754 **19.** 13.527296
21. $\frac{1}{4}\pi\left[4\ln(\sqrt{17}+4)-4\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{17}+4\sqrt{2}\right]$
23. $\frac{1}{6}\pi\left[\ln(\sqrt{10}+3)+3\sqrt{10}\right]$
27. (a) $\frac{1}{3}\pi a^2$ (b) $\frac{56}{45}\pi\sqrt{3}\,a^2$
29. (a) $2\pi\left[b^2+\dfrac{a^2 b\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{a^2-b^2}/a)}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]$
(b) $2\pi\left[a^2+\dfrac{ab^2\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{b^2-a^2}/b)}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$
31. $\int_a^b 2\pi[c-f(x)]\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ **33.** $4\pi^2r^2$

EJERCICIOS 8.3 ■ PÁGINA 547

1. (a) 187.5 lb/pies^2 (b) 1 875 lb (c) 562.5 lb
3. 6 000 lb **5.** 6.7×10^4 N **7.** 9.8×10^3 N
9. 1.2×10^4 lb **11.** $\frac{2}{3}\,\delta ah$ **13.** 5.27×10^5 N
15. (a) 314 N (b) 353 N
17. (a) 5.63×10^3 lb (b) 5.06×10^4 lb
(c) 4.88×10^4 lb (d) 3.03×10^5 lb
19. 2.5×10^5 N **21.** 230; $\frac{23}{7}$ **23.** 10; 1; $(\frac{1}{21},\frac{10}{21})$
25. (0, 1.6) **27.** $\left(\dfrac{1}{e-1},\dfrac{e+1}{4}\right)$ **29.** $(\frac{9}{20},\frac{9}{20})$
31. $\left(\dfrac{\pi\sqrt{2}-4}{4(\sqrt{2}-1)},\dfrac{1}{4(\sqrt{2}-1)}\right)$ **33.** (2, 0)
35. 60; 160; $(\frac{8}{3},1)$ **37.** (0.781, 1.330) **41.** $(0,\frac{1}{12})$
45. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

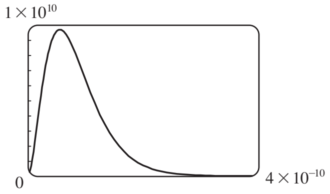
EJERCICIOS 8.4 ■ PÁGINA 553

1. \$38 000 **3.** \$43 866 933.33 **5.** \$407.25
7. \$12 000 **9.** 3 727; \$37 753
11. $\frac{2}{3}(16\sqrt{2}-8)\approx$ \$9.75 millones **13.** $\dfrac{(1-k)(b^{2-k}-a^{2-k})}{(2-k)(b^{1-k}-a^{1-k})}$
15. 1.19×10^{-4} cm^3/s
17. 6.60 L/min **15.** 5.77 L/min

EJERCICIOS 8.5 ■ PÁGINA 560

1. (a) La probabilidad de que una llanta escogida al azar tenga una vida útil de 30 000 y 40 000 millas
(b) La probabilidad de que una llanta escogida al azar tenga una vida útil de al menos 25 000 millas
3. (a) $f(x)\geqslant 0$ para toda x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$
(b) $1-\frac{3}{8}\sqrt{3}\approx 0.35$
5. (a) $1/\pi$ (b) $\frac{1}{2}$
7. (a) $f(x)\geqslant 0$ para toda x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$ (b) 5
11. (a) $e^{-4/2.5}\approx 0.20$ (b) $1-e^{-2/2.5}\approx 0.55$ (c) Si no lo atienden antes de 10 minutos, obtendrá una hamburguesa gratis.
13. $\approx$44%
15. (a) 0.0668 (b) $\approx$ 5.21%
17. $\approx$0.9545

19. (b) 0; a_0 (c)



(d) $1 - 41e^{-8} \approx 0.986$ (e) $\frac{3}{2}a_0$

REPASO DEL CAPÍTULO 8 ■ PÁGINA 562

Ejercicios

1. $\frac{15}{2}$ **3.** (a) $\frac{21}{16}$ (b) $\frac{41}{10}\pi$ **5.** 3.292287 **7.** $\frac{124}{5}$

9. ≈ 458 lb **11.** $\left(\frac{8}{5}, 1\right)$ **13.** $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ **15.** $2\pi^2$

17. \$7 166.67

19. (a) $f(x) \geqslant 0$ para toda x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
(b) ≈ 0.3455 (c) 5, sí

21. (a) $1 - e^{-3/8} \approx 0.31$ (b) $e^{-5/4} \approx 0.29$

(c) $8 \ln 2 \approx 5.55$ min

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 564

1. $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

3. (a) $2\pi r(r \pm d)$ (b) $\approx 3.36 \times 10^6$ mi^2
(d) $\approx 7.84 \times 10^7$ mi^2

5. (a) $P(z) = P_0 + g \int_0^z \rho(x)\,dx$

(b) $(P_0 - \rho_0 gH)(\pi r^2) + \rho_0 gHe^{L/H} \int_{-r}^{r} e^{x/H} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

7. Altura $\sqrt{2}\,b$, volumen $\left(\frac{28}{27}\sqrt{6} - 2\right)\pi b^3$ **9.** 0.14 m

11. $2/\pi$, $1/\pi$

CAPÍTULO 9

EJERCICIOS 9.1 ■ PÁGINA 571

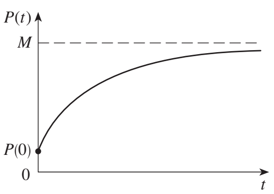
3. (a) $\frac{1}{2}, -1$ **5.** (d)

7. (a) Debe ser 0 o decreciente
(c) $y = 0$ (d) $y = 1/(x + 2)$

9. (a) $0 < P < 4\,200$ (b) $P > 4\,200$
(c) $P = 0$, $P = 4\,200$

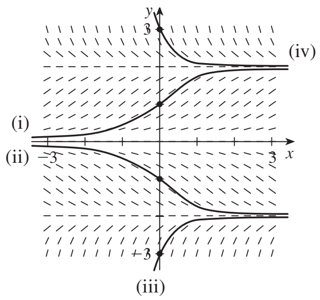
13. (a) Al principio; permanece positivo, pero decrece

(c)



EJERCICIOS 9.2 ■ PÁGINA 578

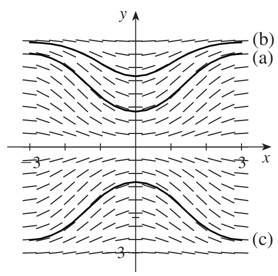
1. (a)



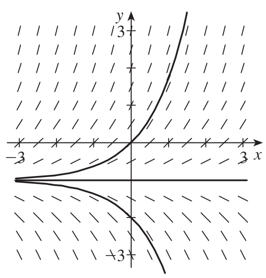
(b) $y = 0$,
$y = 2$
$y = -2$

3. III **5.** IV

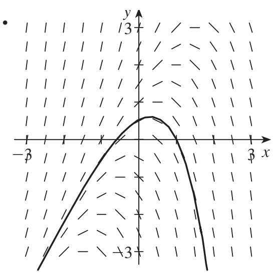
7.



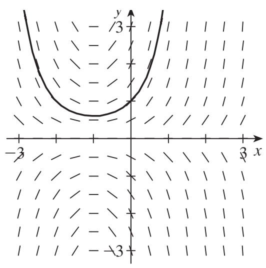
9.



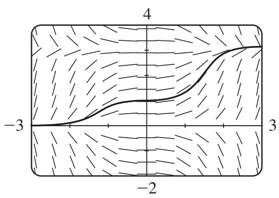
11.



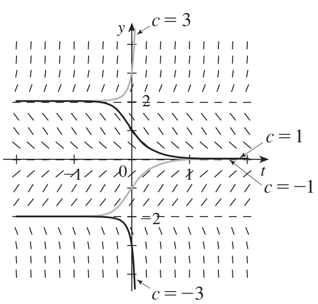
13.



15.



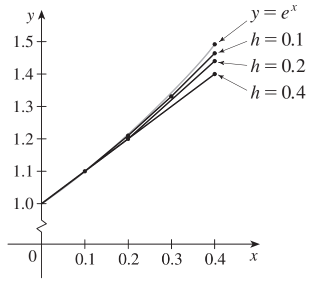
17.



$-2 \leqslant c \leqslant 2$; $-2, 0, 2$

19. (a) (i) 1.4 (ii) 1.44 (iii) 1.4641

(b)



Subestimaciones

(c) (i) 0.0918 (ii) 0.0518 (iii) 0.0277

Parece que el error también se divide en dos (aproximadamente).

21. $-1, -3, -6.5, -12.25$ **23.** 1.7616

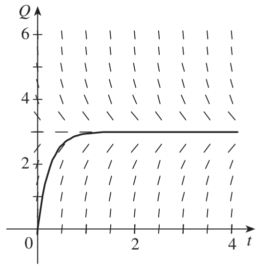
25. (a) (i) 3 (ii) 2.3928 (iii) 2.3701 (iv) 2.3681

(c) (i) -0.6321 (ii) -0.0249 (iii) -0.0022

(iv) -0.0002

Parece que el error también se divide entre 10 (aproximadamente).

27. (a), (d)



(b) 3

(c) Sí; $Q = 3$

(e) 2.77 C

EJERCICIOS 9.3 ■ PÁGINA 586

1. $y = Kx$ **3.** $y = K\sqrt{x^2 + 1}$

5. $y + \ln|\sec y| = \frac{1}{3}x^3 + x + C$

7. $y = \pm\sqrt{[3(te^t - e^t + C)]^{2/3} - 1}$ **9.** $u = Ae^{2t + t^2/2} - 1$

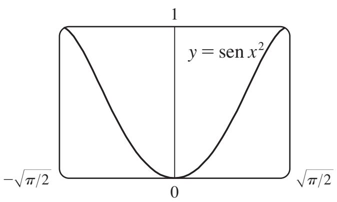
11. $y = -\sqrt{x^2 + 9}$ **13.** $\cos x + x \operatorname{sen} x = y^2 + \frac{1}{3}e^{3y} + \frac{2}{3}$

15. $u = -\sqrt{t^2 + \tan t + 25}$ **17.** $y = \dfrac{4a}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} x - a$

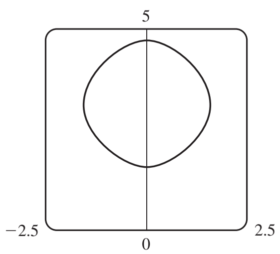
19. $y = e^{x^2/2}$ **21.** $y = Ke^x - x - 1$

23. (a) $\operatorname{sen}^{-1} y = x^2 + C$

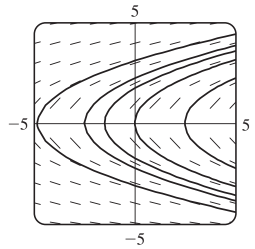
(b) $y = \operatorname{sen}(x^2)$, $-\sqrt{\pi/2} \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi/2}$ (c) No



25. $\cos y = \cos x - 1$

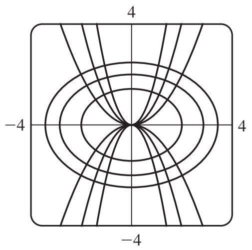


27. (a), (c)

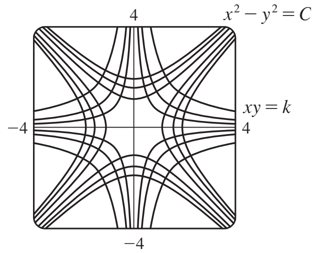


(b) $y = \pm\sqrt{2(x + C)}$

29. $y = Cx^2$



31. $x^2 - y^2 = C$



33. $Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$; 3 **35.** $P(t) = M - Me^{-kt}$; M

37. (a) $x = a - \dfrac{4}{(kt + 2/\sqrt{a})^2}$

(b) $t = \dfrac{2}{k\sqrt{a - b}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b}{a - b}} - \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b - x}{a - b}}\right)$

39. (a) $C(t) = (C_0 - r/k)e^{-kt} + r/k$

(b) r/k; la concentración se aproxima a r/k cualquiera que sea el valor de C_0

41. (a) $15e^{-t/100}$ kg (b) $15e^{-0.2} \approx 12.3$ kg

43. Alrededor de 4.9% **45.** g/k

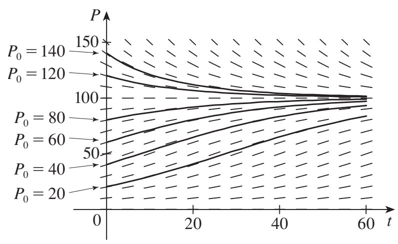
47. (a) $dA/dt = k\sqrt{A}\,(M - A)$ (b) $A(t) = M\left(\dfrac{Ce^{\sqrt{M}kt} - 1}{Ce^{\sqrt{M}kt} + 1}\right)^2$,

donde $C = \dfrac{\sqrt{M} + \sqrt{A_0}}{\sqrt{M} - \sqrt{A_0}}$ y $A_0 = A(0)$

EJERCICIOS 9.4 ■ PÁGINA 598

1. (a) 100; 0.05 (b) Donde P es cercano a 0 o a 100; en la recta $P = 50$; $0 < P_0 < 100$; $P_0 > 100$

(c)



Las soluciones se aproximan a 100; algunas aumentan y otras disminuyen, algunas tienen un punto de inflexión pero otras no lo tienen; las soluciones con $P_0 = 20$ y $P_0 = 40$ tienen puntos de inflexión en $P = 50$

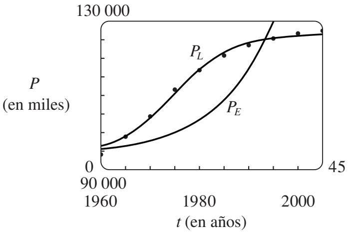
(d) $P = 0$, $P = 100$; otras soluciones se alejan de $P = 0$ y se dirigen a $P = 100$

3. (a) 3.23×10^7 kg (b) ≈ 1.55 años

5. (a) $dP/dt = \frac{1}{265}P(1 - P/100)$, P en miles de millones
(b) 5.49 millones (c) En miles de millones: 7.81, 27.72
(d) En miles de millones: 5.48, 7.61, 22.41

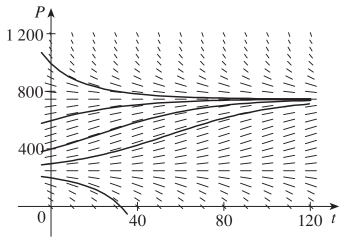
7. (a) $dy/dt = ky(1 - y)$ (b) $y = \dfrac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-kt}}$
(c) 3:36 P.M.

11. $P_E(t) = 1\,578.3(1.0933)^t + 94\,000$;
$P_L(t) = \dfrac{32\,658.5}{1 + 12.75e^{-0.1706t}} + 94\,000$



13. (a) $P(t) = \dfrac{m}{k} + \left(P_0 - \dfrac{m}{k}\right)e^{kt}$ (b) $m < kP_0$
(c) $m = kP_0$, $m > kP_0$ (d) A la baja

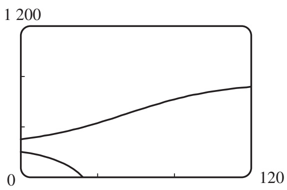
15. (a) Los peces se capturan a razón de 15 por semana.
(b) Vea parte (d) (c) $P = 250$, $P = 750$
(d)



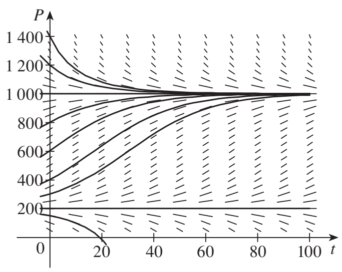
$0 < P_0 < 250$: $P \to 0$;
$P_0 = 250$: $P \to 250$;
$P_0 > 250$: $P \to 750$

(e) $P(t) = \dfrac{250 - 750ke^{t/25}}{1 - ke^{t/25}}$,

donde $k = \frac{1}{11}, -\frac{1}{9}$



13. (b)



$0 < P_0 < 200$: $P \to 0$;
$P_0 = 200$: $P \to 200$;
$P_0 > 200$: $P \to 1\,000$

(c) $P(t) = \dfrac{m(K - P_0) + K(P_0 - m)e^{(K-m)(k/K)t}}{K - P_0 + (P_0 - m)e^{(K-m)(k/K)t}}$

19. (a) $P(t) = P_0e^{(k/r)[\operatorname{sen}(rt - \phi) + \operatorname{sen}\phi]}$ (b) No existe

EJERCICIOS 9.6 ■ PÁGINA 606

1. Sí **3.** No **5.** $y = \frac{2}{3}e^x + Ce^{-2x}$

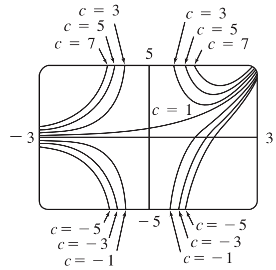
7. $y = x^2 \ln|x| + Cx^2$ **9.** $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} + C/x$

11. $y = \dfrac{\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx + C}{\operatorname{sen} x}$ **13.** $u = \dfrac{t^2 + 2t + 2C}{2(t + 1)}$

15. $y = -x - 1 + 3e^x$ **17.** $v = t^3e^{t^2} + 5e^{t^2}$

19. $y = -x\cos x - x$

21. $y = \dfrac{(x + 1)e^x + C}{x^2}$

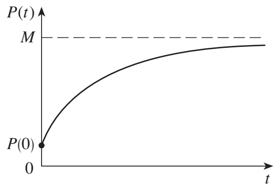


25. $y = \pm\left(Cx^4 + \dfrac{2}{5x}\right)^{-1/2}$

27. (a) $I(t) = 4 - 4e^{-5t}$ (b) $4 - 4e^{-1/2} \approx 1.57$ A

29. $Q(t) = 3(1 - e^{-4t})$, $I(t) = 12e^{-4t}$

31. $P(t) = M + Ce^{-kt}$



33. $y = \frac{2}{5}(100 + 2t) - 40\,000(100 + 2t)^{-3/2}$; 0.2275 kg/L

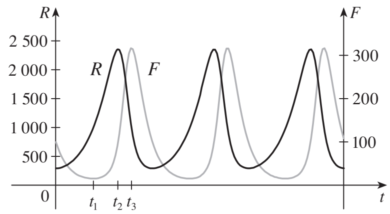
35. (b) mg/c (c) $(mg/c)[t + (m/c)e^{-ct/m}] - m^2g/c^2$

EJERCICIOS 9.7 ■ PÁGINA 612

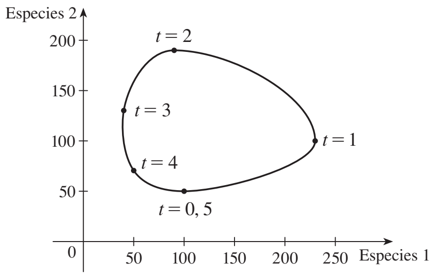
1. (a) x = predadores, y = presa; el crecimiento está restringido sólo por predadores, que se alimentan sólo de la presa.
(b) x = presa, y = predadores; el crecimiento está restringido por la capacidad de sostén y por predadores, que se alimentan sólo de la presa.

3. (a) La población de conejos empieza en unos 300, aumenta a 2 400, luego disminuye otra vez a 300. La población de zorros empieza en 100, disminuye a unos 20, aumenta a unos 315, disminuye a 100, y el ciclo se inicia de nuevo.

(b)



5.



9. (a) La población se estabiliza en 5 000.

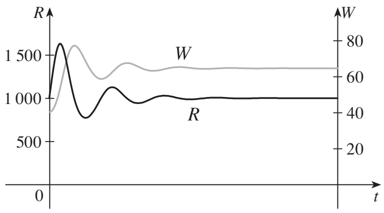
(b) (i) $W = 0$, $R = 0$: poblaciones cero

(ii) $W = 0$, $R = 5\,000$: En ausencia de lobos, la población de conejos es siempre de 5 000.

(iii) $W = 64$, $R = 1\,000$: ambas poblaciones son estables.

(c) Las poblaciones se estabilizan en 1 000 conejos y 64 lobos.

(d)



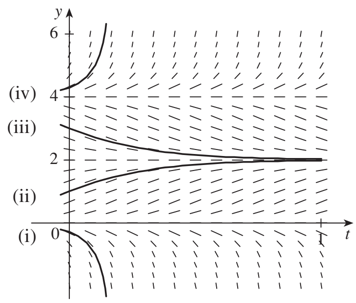
REPASO DEL CAPÍTULO 9 ■ PÁGINA 615

Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Verdadero

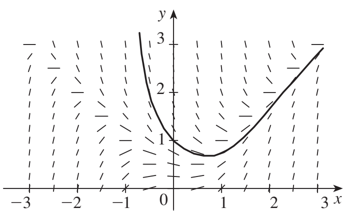
Ejercicios

1. (a)



(b) $0 \leqslant c \leqslant 4$;
$y = 0$, $y = 2$, $y = 4$

3. (a)



$y(0.3) \approx 0.8$

(b) 0.75676

(c) $y = x$ y $y = -x$; hay un máximo o mínimo local

5. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)e^{-\operatorname{sen} x}$ **7.** $y = \pm\sqrt{\ln(x^2 + 2x^{3/2} + C)}$

9. $r(t) = 5e^{t - t^2}$ **11.** $y = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 + 2x$ **13.** $x = C - \frac{1}{2}y^2$

15. (a) $P(t) = \dfrac{2\,000}{1 + 19e^{-0.1t}}$; ≈ 560 (b) $t = -10 \ln \frac{2}{57} \approx 33.5$

17. (a) $L(t) = L_\infty - [L_\infty - L(0)]e^{-kt}$ (b) $L(t) = 53 - 43e^{-0.2t}$

19. 15 días **21.** $k \ln h + h = (-R/V)t + C$

23. (a) Se estabiliza en 200 000

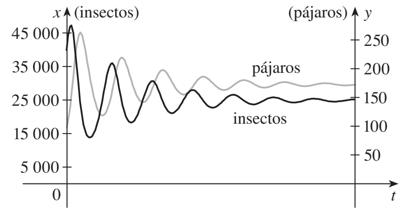
(b) (i) $x = 0$, $y = 0$: Poblaciones cero

(ii) $x = 200\,000$, $y = 0$: En ausencia de pájaros, la población de insectos es siempre de 200 000.

(iii) $x = 25\,000$, $y = 175$: Ambas poblaciones son estables.

(c) Las poblaciones se estabilizan en 25 000 insectos y 175 pájaros.

(d)



25. (a) $y = (1/k)\cosh kx + a - 1/k$ o
$y = (1/k)\cosh kx - (1/k)\cosh kb + h$ (b) $(2/k)\operatorname{senh} kb$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 618

1. $f(x) = \pm 10e^x$ **5.** $y = x^{1/n}$ **7.** 20°C

7. (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - L^2}{4L} - \frac{1}{2}L \ln\left(\dfrac{x}{L}\right)$ (c) No

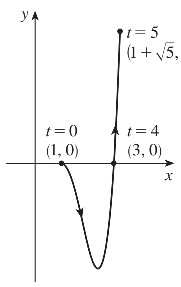
9. (a) 9.8 h (b) $31\,900\pi \approx 100\,000$ pies^2; 6 283 pies^2/h
(c) 5.1 h

11. $x^2 + (y - 6)^2 = 25$

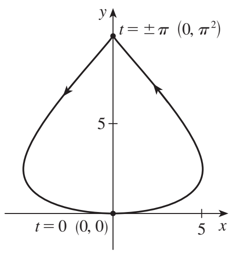
CAPÍTULO 10

EJERCICIOS 10.1 ■ PÁGINA 626

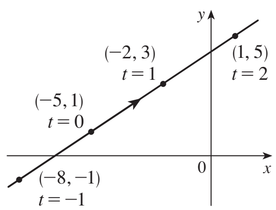
1.



3.



5. (a)



(b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

CAPÍTULO 14

EJERCICIOS 14.1 ■ PÁGINA 865

1. (a) -27; una temperatura de $-15°C$ con viento que sopla a 40 km/h se siente equivalente a unos $-27°C$ sin viento.
(b) Cuando la temperatura es $-20°C$, ¿qué velocidad del viento da un frío de $-30°C$? 20 km/h
(c) Con una velocidad del viento de 20 km/h, ¿qué temperatura da un frío de $-49°C$? $-35°C$
(d) Una función de la velocidad del viento que da valores de frío cuando la temperatura es $-5°C$
(e) Una función de temperatura que da valores de frío cuando la velocidad del viento es 50 km/h

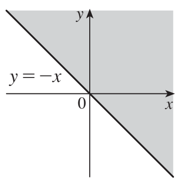
3. Sí

5. (a) 25; un viento de 40 nudos que soplan en mar abierto durante 15 horas creará olas de unos 25 ft de altura.
(b) $f(30, t)$ es una función de t que da las alturas de olas producidas por vientos de 30 nudos que soplan durante t horas.
(c) $f(v, 30)$ es una función de v que da las alturas de olas producidas por vientos de velocidad v que soplan durante 30 horas.

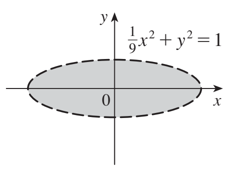
7. (a) 4 (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $[0, \infty)$

9. (a) e (b) $\{(x, y, z) \mid z \geqslant x^2 + y^2\}$ (c) $[1, \infty)$

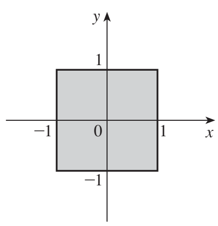
11. $\{(x, y) \mid y \geqslant -x\}$



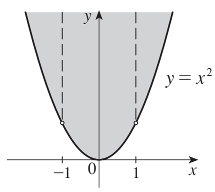
13. $\{(x, y) \mid \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$



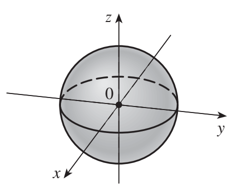
15. $\{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$



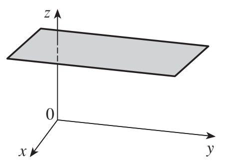
17. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2, x \neq \pm 1\}$



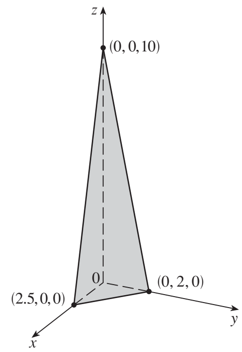
19. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$



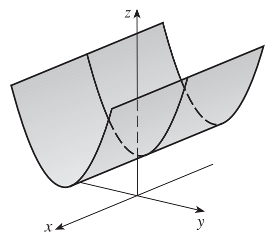
21. $z = 3$, plano horizontal



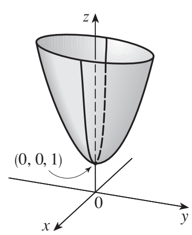
23. $4x + 5y + z = 10$, plano



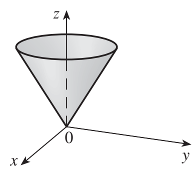
25. $z = y^2 + 1$, cilindro parabólico



27. $z = 4x^2 + y^2 + 1$
paraboloide elíptico



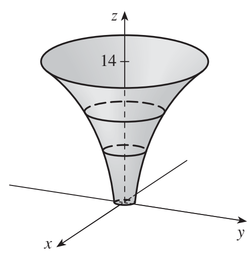
29. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,
mitad superior de cono



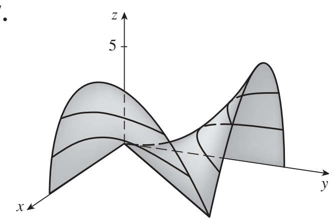
31. ≈ 56, ≈ 35

33. Pronunciada; casi plana

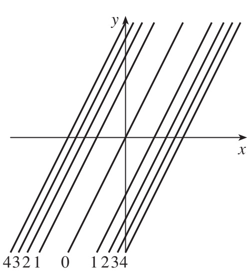
35.



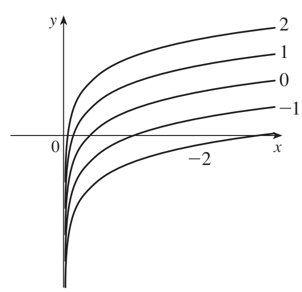
37.



39. $(y - 2x)^2 = k$



41. $y = \ln x + k$



APÉNDICES

EJERCICIOS H ■ PÁGINA A12

1. $8 - 4i$ **3.** $13 + 18i$ **5.** $12 - 7i$

7. $\frac{11}{13} + \frac{10}{13}i$ **9.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **11.** $-i$ **13.** $5i$

15. $12 + 5i$; 13 **17.** $4i$, 4 **19.** $\pm\frac{3}{2}i$

21. $-1 \pm 2i$ **23.** $-\frac{1}{2} \pm (\sqrt{7}/2)i$

25. $3\sqrt{2}\,[\cos(3\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(3\pi/4)]$

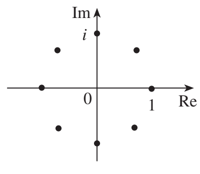
27. $5\{\cos[\tan^{-1}(\frac{4}{3})] + i\,\mathrm{sen}[\tan^{-1}(\frac{4}{3})]\}$

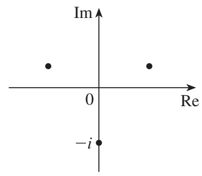
29. $4[\cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(\pi/2)]$, $\cos(-\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(-\pi/6)$, $\frac{1}{2}[\cos(-\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(-\pi/6)]$

31. $4\sqrt{2}\,[\cos(7\pi/12) + i\,\mathrm{sen}(7\pi/12)]$, $(2\sqrt{2})[\cos(13\pi/12) + i\,\mathrm{sen}(13\pi/12)]$, $\frac{1}{4}[\cos(\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(\pi/6)]$

33. -1024 **35.** $-512\sqrt{3} + 512i$

37. ± 1, $\pm i$, $(1/\sqrt{2})(\pm 1 \pm i)$ **39.** $\pm(\sqrt{3}/2) + \frac{1}{2}i$, $-i$

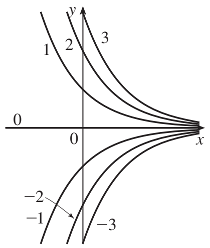




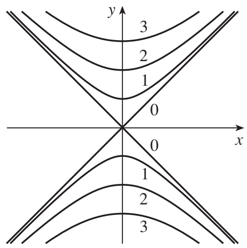
41. i **43.** $\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$ **45.** $-e^2$

47. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta$, $3\theta = 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\theta$

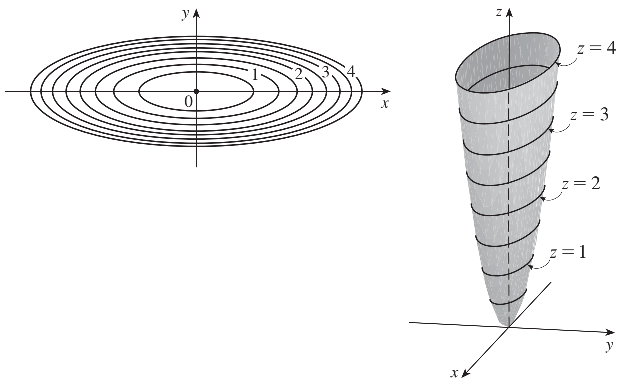
43. $y = ke^{-x}$



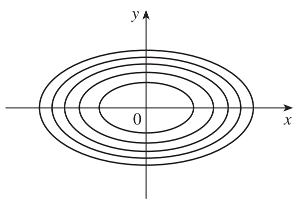
45. $y^2 - x^2 = k^2$



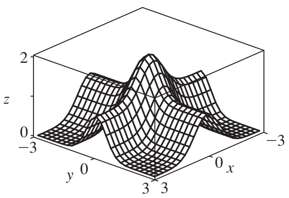
47. $x^2 + 9y^2 = k$



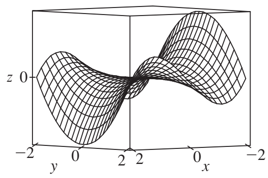
49.



51.



53.



55. (a) C (b) II **57.** (a) F (b) I

59. (a) B (b) VI

61. Familia de planos paralelos

63. Familia de hiperboloides de una o dos hojas con eje en el eje y

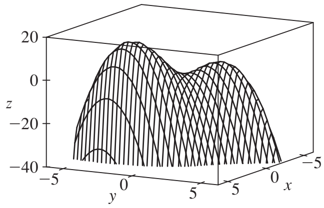
65. (a) Corra la gráfica de f dos unidades hacia arriba

(b) Prolongue la gráfica de f verticalmente un factor de 2

(c) Refleje la gráfica de f alrededor del plano xy

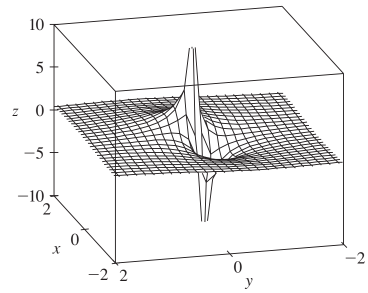
(d) Refleje la gráfica de f alrededor del plano xy y luego córrala hacia arriba dos unidades

67.



f parece tener un valor máximo de alrededor de 15. Hay dos puntos máximos locales pero ninguno mínimo local.

69.



Los valores de función se aproximan a 0 cuando x, y se hacen grandes; cuando (x, y) se aproxima al origen, f se aproxima a $\pm\infty$ o 0, dependiendo de la dirección de aproximación

71. Si $c = 0$, la gráfica es una superficie cilíndrica. Para $c > 0$, las curvas de nivel son elipses. La gráfica se curva hacia arriba cuando sale del origen, y la inclinación aumenta cuando c aumenta. Para $c < 0$, las curvas de nivel son hipérbolas. La gráfica se curva hacia arriba en la dirección y y hacia abajo, aproximándose al plano xy, en la dirección x dando una figura en forma de silla de montar cerca de $(0, 0, 1)$.

73. $c = -2, 0, 2$ **75.** (b) $y = 0.75x + 0.01$

EJERCICIOS 14.2 ■ PÁGINA 877

1. Nada; si f es continua, $f(3, 1) = 6$ **3.** $-\frac{5}{2}$

5. 1 7. $\frac{2}{7}$ **9.** No existe **11.** No existe

13. 0 **15.** No existe **17.** 2 **19.** 1

21. No existe

23. La gráfica muestra que la función se aproxima a diferentes números a lo largo de líneas diferentes.

25. $h(x, y) = (2x + 3y - 6)^2 + \sqrt{2x + 3y - 6}$; $\{(x, y) \mid 2x + 3y \geqslant 6\}$

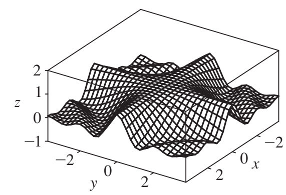
27. A lo largo de la recta $y = x$ **29.** $\{(x, y) \mid y \neq \pm e^{x/2}\}$

31. $\{(x, y) \mid y \geqslant 0\}$ **33.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

35. $\{(x, y, z) \mid y \geqslant 0, y \neq \sqrt{x^2 + z^2}\}$

37. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ **39.** 0 **41.** -1

43.



f es continua en $\mathbb{R}^2$

EJERCICIOS 14.3 ■ PÁGINA 888

1. (a) La rapidez de cambio de temperatura cuando varía la longitud, con latitud y tiempo fijos; la rapidez de cambio cuando sólo varía la latitud; la rapidez de cambio cuando varía sólo el tiempo.

(b) Positivo, negativo, positivo

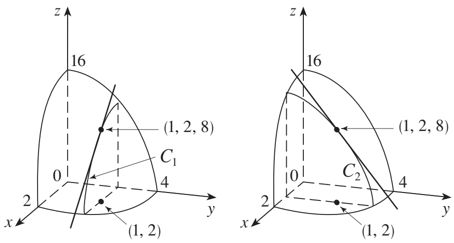
3. (a) $f_T(-15{,}30) \approx 1.3$; para una temperatura de -15°C y velocidad del viento de 30 km/h, el índice de frío sube 1.3°C por cada grado de aumento de temperatura. $f_v(-15, 30) \approx -0.15$; para una temperatura de -15°C y velocidad del viento de 30 km/h, el índice de frío disminuye 0.15°C por cada km/h que aumenta la velocidad del viento.
(b) Positivo, negativo (c) 0

5. (a) Positivo (b) Negativo

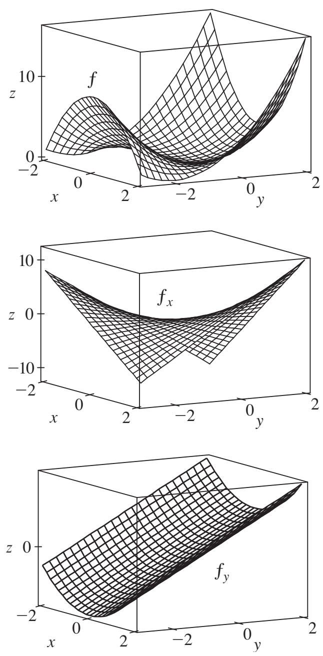
7. (a) Positivo (b) Negativo

9. $c = f,\ b = f_x,\ a = f_y$

11. $f_x(1, 2) = -8 =$ pendiente de C_1, $f_y(1, 2) = -4 =$ pendiente de C_2



13. $f_x = 2x + 2xy,\ f_y = 2y + x^2$



15. $f_x(x, y) = -3y,\ f_y(x, y) = 5y^4 - 3x$

17. $f_x(x, t) = -\pi e^{-t} \operatorname{sen} \pi x,\ f_t(x, t) = -e^{-t} \cos \pi x$

19. $\partial z/\partial x = 20(2x + 3y)^9,\ \partial z/\partial y = 30(2x + 3y)^9$

21. $f_x(x, y) = 2y/(x + y)^2,\ f_y(x, y) = -2y/(x + y)^2$

23. $\partial w/\partial \alpha = \cos \alpha \cos \beta,\ \partial w/\partial \beta = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

25. $f_r(r, s) = \dfrac{2r^2}{r^2 + s^2} + \ln(r^2 + s^2),\ f_s(r, s) = \dfrac{2rs}{r^2 + s^2}$

27. $\partial u/\partial t = e^{w/t}(1 - w/t),\ \partial u/\partial w = e^{w/t}$

29. $f_x = z - 10xy^3z^4,\ f_y = -15x^2y^2z^4,\ f_z = x - 20x^2y^3z^3$

31. $\partial w/\partial x = 1/(x + 2y + 3z),\ \partial w/\partial y = 2/(x + 2y + 3z),$
$\partial w/\partial z = 3/(x + 2y + 3z)$

33. $\partial u/\partial x = y \operatorname{sen}^{-1}(yz),\ \partial u/\partial y = x \operatorname{sen}^{-1}(yz) + xyz/\sqrt{1 - y^2z^2},$
$\partial u/\partial z = xy^2/\sqrt{1 - y^2z^2}$

35. $f_x = yz^2 \tan(yt),\ f_y = xyz^2t \sec^2(yt) + xz^2 \tan(yt),$
$f_z = 2xyz \tan(yt),\ f_t = xy^2z^2 \sec^2(yt)$

37. $\partial u/\partial x_i = x_i/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

39. $\frac{1}{5}$ **41.** $\frac{1}{4}$

43. $f_x(x, y) = y^2 - 3x^2y,\ f_y(x, y) = 2xy - x^3$

45. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3xz - 2x}{2z - 3xy},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$

47. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-z}{1 + y + y^2z^2}$

49. (a) $f'(x), g'(y)$ (b) $f'(x + y), f'(x + y)$

51. $f_{xx} = 6xy^5 + 24x^2y,\ f_{xy} = 15x^2y^4 + 8x^3 = f_{yx},\ f_{yy} = 20x^3y^3$

53. $w_{uu} = v^2/(u^2 + v^2)^{3/2},\ w_{uv} = -uv/(u^2 + v^2)^{3/2} = w_{vu},$
$w_{vv} = u^2/(u^2 + v^2)^{3/2}$

55. $z_{xx} = -2x/(1 + x^2)^2,\ z_{xy} = 0 = z_{yx},\ z_{yy} = -2y/(1 + y^2)^2$

61. $12xy,\ 72xy$

63. $24 \operatorname{sen}(4x + 3y + 2z),\ 12 \operatorname{sen}(4x + 3y + 2z)$

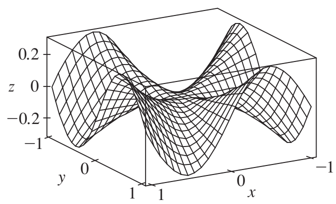
65. $\theta e^{r\theta}(2 \operatorname{sen} \theta + \theta \cos \theta + r\theta \operatorname{sen} \theta)$ **67.** $4/(y + 2z)^3, 0$

69. $\approx 12.2, \approx 16.8, \approx 23.25$ **81.** R^2/R_1^2

87. No **89.** $x = 1 + t,\ y = 2,\ z = 2 - 2t$

93. -2

95. (a)



(b) $f_x(x, y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2},\ f_y(x, y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$
(c) 0, 0 (e) No, porque f_{xy} y f_{yx} no son continuas.

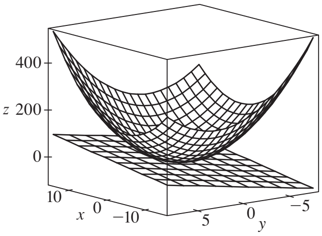
EJERCICIOS 14.4 ■ PÁGINA 899

1. $z = -8x - 2y$

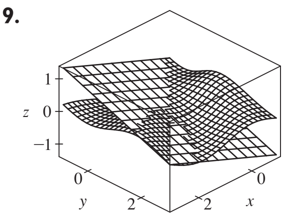
3. $x + y - 2z = 0$

5. $z = y$

7.



9.



11. $2x + \frac{1}{4}y - 1$ **13.** $\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{2}{3}$ **15.** $1 - \pi y$

19. $-\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{20}{3}$; 2.846 **21.** $\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z$; 6.9914

23. $4T + H - 329$; 129°F

25. $dz = 3x^2 \ln(y^2)dx + (2x^3/y)dy$

27. $dm = 5p^4q^3\, dp + 3p^5q^2\, dq$

29. $dR = \beta^2 \cos \gamma\, d\alpha + 2\alpha\beta \cos \gamma\, d\beta - \alpha\beta^2 \operatorname{sen} \gamma\, d\gamma$

31. $\Delta z = 0.9225,\ dz = 0.9$ **33.** 5.4 cm² **35.** 16 cm³

37. 150 **39.** $\frac{1}{17} \approx 0.059\ \Omega$ **41.** 2.3%

43. $\varepsilon_1 = \Delta x$, $\varepsilon_2 = \Delta y$

EJERCICIOS 14.5 ■ PÁGINA 907

1. $(2x + y)\cos t + (2y + x)e^t$

3. $[(x/t) - y \operatorname{sen} t]/\sqrt{1 + x^2 + y^2}$

5. $e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$

7. $\partial z/\partial s = 2xy^3 \cos t + 3x^2y^2 \operatorname{sen} t$
$\partial z/\partial t = -2sxy^3 \operatorname{sen} t + 3sx^2y^2 \cos t$

9. $\partial z/\partial s = t^2 \cos\theta \cos\phi - 2st \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$,
$\partial z/\partial t = 2st \cos\theta\cos\phi - s^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

11. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t\cos\theta - \dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\operatorname{sen}\theta\right)$,
$\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s\cos\theta - \dfrac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\operatorname{sen}\theta\right)$

13. 62 **15.** 7, 2

17. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$,
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}$

21. 85, 178, 54 **23.** $\frac{9}{7}, \frac{9}{7}$ **25.** 36, 24, 30

27. $\dfrac{4(xy)^{3/2} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$ **29.** $\dfrac{\operatorname{sen}(x - y) + e^y}{\operatorname{sen}(x - y) - xe^y}$

31. $\dfrac{3yz - 2x}{2z - 3xy}, \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$

33. $\dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}, \ -\dfrac{z}{1 + y + y^2z^2}$

35. 2°C/s **37.** ≈ -0.33 m/s por minuto

39. (a) 6 m^3/s (b) 10 m^2/s (c) 0 m/s

41. ≈ -0.27 L/s **43.** $-1/(12\sqrt{3})$ rad/s

45. (a) $\partial z/\partial r = (\partial z/\partial x)\cos\theta + (\partial z/\partial r)\operatorname{sen}\theta$,
$\partial z/\partial\theta = -(\partial z/\partial x) r \operatorname{sen}\theta + (\partial z/\partial y) r\cos\theta$

51. $4rs\, \partial^2 z/\partial x^2 + (4r^2 + 4s^2)\partial^2 z/\partial x\partial y + 4rs\, \partial^2 z/\partial y^2 + 2\, \partial z/\partial y$

EJERCICIOS 14.6 ■ PÁGINA 920

1. ≈ -0.08 mb/km **3.** ≈ 0.778 **5.** $2 + \sqrt{3}/2$

7. (a) $\nabla f(x, y) \neq \langle 2\cos(2x + 3y, \cos(2x + 3y)\rangle$
(b) $\langle 2, 3\rangle$ (c) $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

9. (a) $\langle e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz}\rangle$ (b) $\langle 1, 12, 0\rangle$ (c) $-\frac{22}{3}$

11. 23/10 **13.** $-8/\sqrt{30}$ **15.** $4/\sqrt{30}$ **17.** $9/(2\sqrt{5})$

19. 2/5 **21.** $4\sqrt{2}, \langle -1, 1\rangle$ **23.** $1, \langle 0, 1\rangle$

25. $1, \langle 3, 6, -2\rangle$ **27.** (b) $\langle -12, 92\rangle$

29. Todos los puntos sobre la recta $y = x + 1$ **31.** (a) $-40/(3\sqrt{3})$

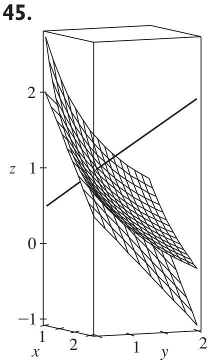
33. (a) $32/\sqrt{3}$ (b) $\langle 38, 6, 12\rangle$ (c) $2\sqrt{406}$ **35.** $\frac{327}{13}$

39. (a) $x + y + z = 11$ (b) $x - 3 = y - 3 = z - 5$

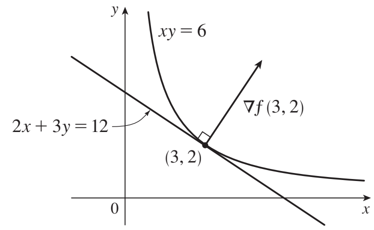
41. (a) $4x - 5y - z = 4$ (b) $\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y - 1}{-5} = \dfrac{z + 1}{-1}$

43. (a) $x + y - z = 1$ (b) $x - 1 = y = 2z$

45.



47. $\langle 2, 3\rangle$, $2x + 3y = 12$



53. No **59.** $x = -1 - 10t$, $y = 1 - 16t$, $z = 2 - 12t$

63. Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, entonces $af_x + bf_y$ y $cf_x + df_y$ se conocen, de modo que de las ecuaciones lineales despeje f_x y f_y.

EJERCICIOS 14.7 ■ PÁGINA 930

1. (a) f tiene un mínimo local en (1,1). (b) f tiene un punto de depresión en (1, 1).

3. Mínimo local en (1, 1), punto de depresión en (0, 0)

5. Máximo $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$

7. Mínimos $f(1, 1) = 0$, $f(-1, -1) = 0$ punto de depresión en (0, 0)

9. Puntos de depresión en $(1, -1)$,$(-1, 1)$

11. Mínimo $f(2, 1) = -8$, punto de depresión en (0, 0)

13. Ninguno **15.** Mínimo $f(0, 0) = 0$, puntos de depresión en $(\pm 1, 0)$

17. Mínimos $f(0,1) = f(\pi, -1) = f(2\pi, 1) = -1$, puntos de depresión en $(\pi/2, 0)$, $(3\pi/2, 0)$

21. Mínimos $f(1, \pm 1) = 3$, $f(-1, \pm 1) = 3$

23. Máximo $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$,
mínimo $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$, punto de depresión en (π, π)

25. Mínimos $f(-1.714, 0) \approx -9.200$, $f(1.402, 0) \approx 0.242$, punto de inflexión (0.312, 0), puntos más bajos $(-1.714, 0\ 0, -9.200)$

27. Máximos $f(-1.267, 0) \approx 1.310$, $f(1.629, \pm 1.063) \approx 8.105$, puntos de depresión $(-0.259, 0)$, $(1.526, 0)$
puntos más altos $(1.629, \pm 1.063, 8.105)$

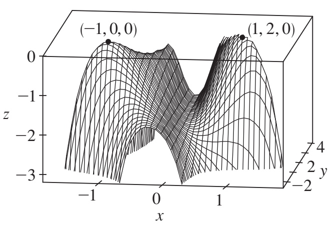
29. Máximo $f(2, 0) = 9$, mínimo $f(0, 3) = -14$

31. Máximo $f(\pm 1, 1) = 7$, mínimo $f(0, 0) = 4$

33. Máximo $f(3, 0) = 83$, mínimo $f(1, 1) = 0$

35. Máximo $f(1, 0) = 2$, mínimo $f(-1, 0) = -2$

37.



39. $\sqrt{3}$ **41.** $(2, 1, \sqrt{5})$, $(2, 1, -\sqrt{5})$ **43.** $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$

45. $8r^3/(3\sqrt{3})$

47. $\frac{4}{3}$ **49.** Cubo, longitud de arista $c/12$

51. Base cuadrada de lado 40 cm, altura 20 cm **53.** $L^3/(3\sqrt{3})$

EJERCICIOS 14.8 ■ PÁGINA 940

1. $\approx 59, 30$

3. No hay máximo, mínimos $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$

5. Máximos $f(\pm 2, 1) = 4$, mínimos $f(\pm 2, -1) = -4$

7. Máximo $f(1, 3, 5) = 70$, mínimo $f(-1, -3, -5) = -70$

9. Máximo $2/\sqrt{3}$, mínimo $-2/\sqrt{3}$

11. Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1

13. Máximo $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2$,
mínimo $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -2$

15. Máximo $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$,
mínimo $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$

17. Máximo $\frac{3}{2}$, mínimo $\frac{1}{2}$

19. Máximos $f(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/(2\sqrt{2})) = e^{1/4}$,
mínimos $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$

27-37 Vea ejercicios 39-49 en sección 14.7.

39. $L^3/(3\sqrt{3})$

41. Más cercano $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, más lejano $(-1, -1, 2)$

43. Máximo ≈ 9.7938, mínimo ≈ -5.3506

45. (a) c/n (b) Cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

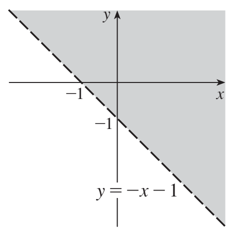
REPASO DEL CAPÍTULO 14 ■ PÁGINA 944

Preguntas de verdadero-falso

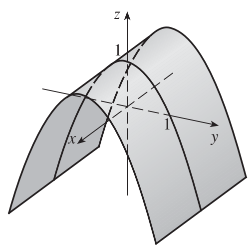
1. Verdadero **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Falso
11. Verdadero

Ejercicios

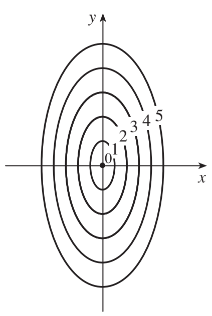
1. $\{(x, y) \mid y > -x - 1\}$



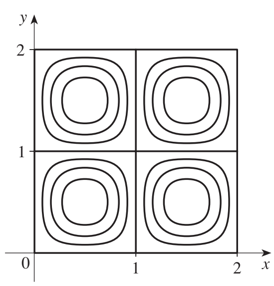
3.



5.



7.



9. $\frac{2}{3}$

11. (a) $\approx 3.5°C/m, -3.0°C/m$ (b) $\approx 0.35°C/m$
por la ecuación 14.6.9 (La definición 14.6.2 da $\approx 1.1°C/m$.)
(c) -0.25

13. $f_x = 1/\sqrt{2x + y^2}$, $f_y = y/\sqrt{2x + y^2}$

15. $g_u = \tan^{-1}v$, $g_v = u/(1 + v^2)$

17. $T_p = \ln(q + e^r)$, $T_q = p/(q + e^r)$, $T_r = pe^r/(q + e^r)$

19. $f_{xx} = 24x$, $f_{xy} = -2y = f_{yx}$, $f_{yy} = -2x$

21. $f_{xx} = k(k - 1)x^{k-2}y^l z^m$, $f_{xy} = klx^{k-1}y^{l-1}z^m = f_{yx}$,
$f_{xz} = kmx^{k-1}y^l z^{m-1} = f_{zx}$, $f_{yy} = l(l - 1)x^k y^{l-2}z^m$,
$f_{yz} = lmx^k y^{l-1}z^{m-1} = f_{zy}$, $f_{zz} = m(m - 1)x^k y^l z^{m-2}$

25. (a) $z = 8x + 4y + 1$ (b) $\dfrac{x - 1}{8} = \dfrac{y + 2}{4} = 1 - z$

27. (a) $2x - 2y - 3z = 3$ (b) $\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y + 1}{-4} = \dfrac{z - 1}{-6}$

29. (a) $4x - y - 2z = 6$
(b) $x = 3 + 8t$, $y = 4 - 2t$, $z = 1 - 4t$

31. $(2, \frac{1}{2}, -1)$, $(-2, -\frac{1}{2}, 1)$

33. $60x + \frac{24}{5}y + \frac{32}{5}z - 120$; 38.656

35. $2xy^3(1 + 6p) + 3x^2y^2(pe^p + e^p) + 4z^3(p \cos p + \operatorname{sen} p)$

37. $-47, 108$ **43.** $ze^{x\sqrt{y}}\langle z\sqrt{y}, xz/(2\sqrt{y}), 2\rangle$ **45.** $\frac{43}{5}$

47. $\sqrt{145}/2$, $\langle 4, \frac{9}{2}\rangle$ **49.** $\approx \frac{5}{8}$ nudo/milla

51. Mínimo $f(-4, 1) = -11$

53. Máximo $f(1, 1) = 1$; puntos de depresión $(0, 0), (0, 3), (3, 0)$

55. Máximo $f(1, 2) = 4$, mínimo $f(2, 4) = -64$

57. Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimo $f(1, \pm 1) = -3$, puntos de depresión $(-1, \pm 1)$, $(1, 0)$

59. Máximo $f(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$, mínimo
$f(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$

61. Máximo 1, mínimo -1

63. $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$, $(\pm 3^{-1/4}, -3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$

65. $P(2 - \sqrt{3})$, $P(3 - \sqrt{3})/6$, $P(2\sqrt{3} - 3)/3$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 948

1. L^2W^2, $\frac{1}{4}L^2W^2$ **3.** (a) $x = w/3$, base $= w/3$ (b) Sí

7. $\sqrt{6}/2$, $3\sqrt{2}/2$

CAPÍTULO 15

EJERCICIOS 15.1 ■ PÁGINA 958

1. (a) 288 (b) 144

3. (a) $\pi^2/2 \approx 4.935$ (b) 0

5. (a) -6 (b) -3.5

7. $U < V < L$

9. (a) ≈ 248 (b) 15.5

11. 60 **13.** 3

15. 1.141606, 1.143191, 1.143535, 1.143617, 1.143637, 1.143642

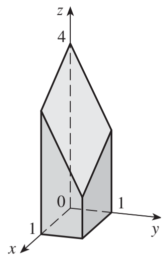
EJERCICIOS 15.2 ■ PÁGINA 964

1. $500y^3$, $3x^2$ **3.** 10 **5.** 2 **7.** 261 632/45 **9.** $\frac{21}{2}\ln 2$

11. 0 **13.** π **15.** $\frac{21}{2}$ **17.** $9 \ln 2$

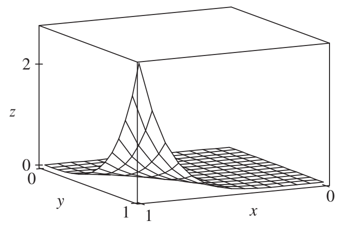
19. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{12}\pi$ **21.** $\frac{1}{2}(e^2 - 3)$

23.



25. 47.5 **27.** $\frac{166}{27}$ **29.** 2 **31.** $\frac{64}{3}$

33. $21e - 57$



35. $\frac{5}{6}$

37. No aplica el teorema de Fubini. El integrando tiene una discontinuidad infinita en el origen.

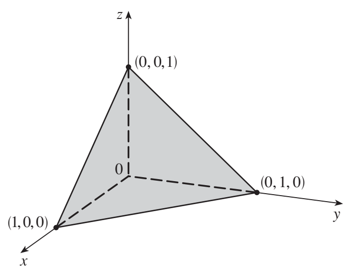
EJERCICIOS 15.3 ■ PÁGINA 972

1. 32 **3.** $\frac{3}{10}$ **5.** $e - 1$ **7.** $\frac{4}{3}$ **9.** π **11.** $\frac{1}{2}e^{16} - \frac{17}{2}$

13. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ **15.** $\frac{147}{20}$ **17.** 0 **19.** $\frac{7}{18}$ **21.** $\frac{31}{8}$

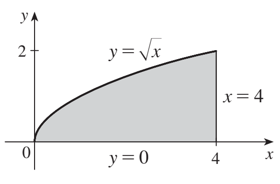
23. 6 **25.** $\frac{128}{15}$ **27.** $\frac{1}{3}$ **29.** 0, 1.213, 0.713 **31.** $\frac{64}{3}$

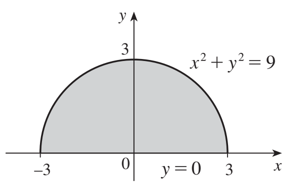
33.



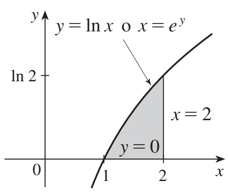
35. $13\,984\,735\,616/14\,549\,535$ **37.** $\pi/2$

39. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x, y)\,dx\,dy$ **41.** $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$





43. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 f(x, y)\,dx\,dy$



45. $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ 47. $\frac{1}{3}\ln 9$ **49.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ **51.** 1

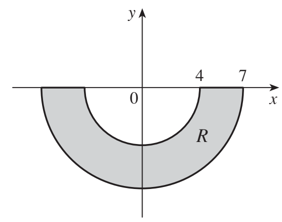
53. $(\pi/16)e^{-1/16} \leqslant \iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\,dA \leqslant \pi/16$ **55.** $\frac{3}{4}$

59. 8π **61.** $2\pi/3$

EJERCICIOS 15.4 ■ PÁGINA 978

1. $\int_0^{3\pi/2}\int_0^4 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta$ **3.** $\int_{-1}^1\int_0^{(x+1)/2} f(x, y)\,dy\,dx$

5. $33\pi/2$



7. 0 **9.** $\frac{1}{2}\pi\,\text{sen}\,9$ **11.** $(\pi/2)(1 - e^{-4})$ **13.** $\frac{3}{64}\pi^2$

15. $\pi/12$ **17.** $\frac{1}{8}(\pi - 2)$ **19.** $\frac{16}{3}\pi$ **21.** $\frac{4}{3}\pi$

23. $\frac{4}{3}\pi a^3$ **25.** $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})]$

27. $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$

29. $\frac{1}{2}\pi(1 - \cos 9)$ **31.** $2\sqrt{2}/3$

33. 1800π ft^3 **35.** $\frac{15}{16}$ **37.** (a) $\sqrt{\pi}/4$ (b) $\sqrt{\pi}/2$

EJERCICIOS 15.5 ■ PÁGINA 988

1. $\frac{64}{3}$ C **3.** $\frac{4}{3}, (\frac{4}{3}, 0)$ **5.** $6, (\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$

7. $\frac{1}{4}(e^2 - 1), \left(\dfrac{e^2 + 1}{2(e^2 - 1)}, \dfrac{4(e^3 - 1)}{9(e^2 - 1)}\right)$

9. $L/4, (L/2, 16/(9\pi))$ **11.** $(\frac{3}{8}, 3\pi/16)$ **13.** $(0.45/(14\pi))$

15. $(2a/5, 2a/5)$ si el vértice es (0, 0) y los lados están a lo largo de ejes positivos

17. $\frac{1}{16}(e^4 - 1), \frac{1}{8}(e^2 - 1), \frac{1}{16}(e^4 + 2e^2 - 3)$

19. $7ka^6/180, 7ka^6/180, 7ka^6/90$ si el vértice es (0, 0) y los lados están a lo largo de ejes positivos

21. $m = \pi^2/8, (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{1}{\pi}, \dfrac{16}{9\pi}\right), I_x = 3\pi^2/64,$
$I_y = \frac{1}{16}(\pi^4 - 3\pi^2), I_0 = \pi^4/16 - 9\pi^2/64$

23. $\rho bh^3/3, \rho b^3h/3; b/\sqrt{3}, h/\sqrt{3}$

25. $\rho a^4\pi/16, \rho a^4\pi/16; a/2, a/2$

27. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0.375 (c) $\frac{5}{48} \approx 0.1042$

29. (b) (i) $e^{-0.2} \approx 0.8187$
(ii) $1 + e^{-1.8} - e^{-0.8} - e^{-1} \approx 0.3481$ (c) 2, 5

31. (a) ≈ 0.500 (b) ≈ 0.632

33. (a) $\iint_D (k/20)[20 - \sqrt{(x - x_0)^2 +)y - y_0)^2}]\,dA$, donde D es el disco con radio 10 millas con centro en el centro de la ciudad
(b) $200\pi k/3 \approx 209k$, $200(\pi/2 - \frac{8}{9})k \approx 136k$, en el borde

EJERCICIOS 15.6 ■ PÁGINA 998

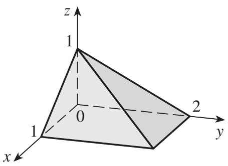
1. $\frac{27}{4}$ **3.** 1 **5.** $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$ **7.** $-\frac{1}{3}$ **9.** 4 **11.** $\frac{65}{28}$

13. $8/(3e)$ **15.** $\frac{1}{60}$ **17.** $16\pi/3$ **19.** $\frac{16}{3}$ **21.** 36π

23. (a) $\int_0^1\int_0^x\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\,dy\,dx$ (b) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}$

25. 60.533

27.



29. $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{4-4z^2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4x^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}/2}^{\sqrt{4-y}/2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-4z^2}}^{\sqrt{4-4z^2}}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

31. $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_{0}^{4}\int_{0}^{2-y/2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-x^2/2}\int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}}\int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

33. $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2}\int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{0}^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{0}^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

35. $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1}\int_{0}^{y} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{y}^{1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y}\int_{y}^{1} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{z}^{x} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx = \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{z}^{x} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

37. $\frac{79}{30}, \left(\frac{358}{553}, \frac{33}{79}, \frac{571}{553}\right)$ **39.** a^5, $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$

41. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} KL^5$ **43.** $\frac{1}{2}\pi kha^4$

45. (a) $m = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

(d) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$\bar{x} = (1/m) \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} x\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

$\bar{y} = (1/m)\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} y\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

$\bar{z} = (1/m)\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

(c) $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dz\, dy\, dx$

47. (a) $\frac{3}{32}\pi + \frac{11}{24}$

(b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\dfrac{28}{9\pi + 44}, \dfrac{30\pi + 128}{45\pi + 220}, \dfrac{45\pi + 208}{135\pi + 660}\right)$

(c) $\frac{1}{240}(68 + 15\pi)$

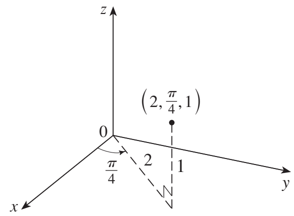
49. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$ (c) $\frac{1}{5760}$

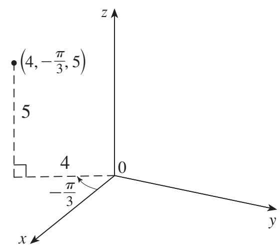
51. $L^3/8$

53. La región acotada por el elipsoide $x^2 + 2x^2 + 3z^2 = 1$

EJERCICIOS 15.7 ■ PÁGINA 1004

1. (a) (b)





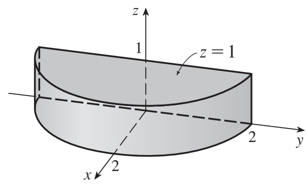
$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ $(2, -2\sqrt{3}, 5)$

3. (a) $(\sqrt{2}, 7\pi/4, 4)$ (b) $(2, 4\pi/3, 2)$

5. Semiplano vertical que pasa por el eje z **7.** Paraboloide circular

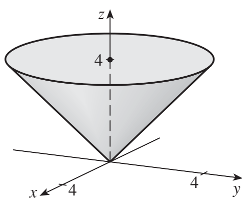
9. (a) $z = r^2$ (b) $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

11.



13. Coordenadas cilíndricas: $6 \leqslant r \leqslant 7$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 20$

15.



$64\pi/3$

17. 384π **19.** $\pi(e^6 - e - 5)$ **21.** $2\pi/5$

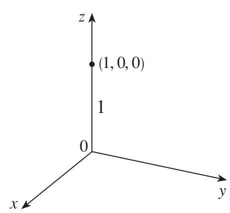
23. (a) 162π (b) $(0, 0, 15)$

25. $\pi K a^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$ **27.** 0

29. (a) $\iiint_C h(P)g(P)\, dv$, donde C es el cono
(b) $\approx 3.1 \times 10^{19}$ ft-lb

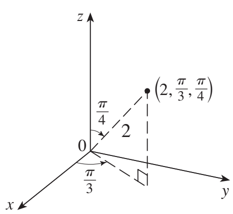
EJERCICIOS 15.8 ■ PÁGINA 1010

1. (a)



$(0, 0, 1)$

(b)



$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}, \sqrt{2}\right)$

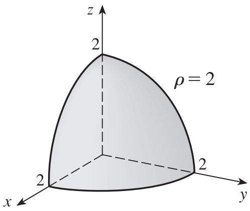
3. (a) $(4, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(\sqrt{2}, 3\pi/2, 3\pi/4)$

5. Medio cono

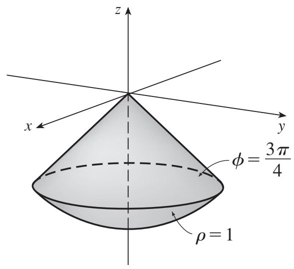
7. Esfera, radio $\frac{1}{2}$, centro $(0, \frac{1}{2}, 0)$

9. (a) $\cos^2 \phi = \operatorname{sen}^2 \phi$ (b) $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \cos^2 \theta + \cos^2\phi) = 9$

11.

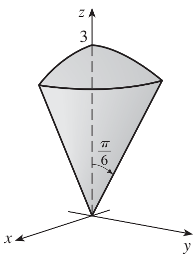


13.



15. $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos \phi$

17. $(9\pi/4)(2 - \sqrt{3})$



19. $\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$

21. $312\,500\pi/7$ **23.** $15\pi/16$ **25.** $1562\pi/15$

27. $(\sqrt{3} - 1)\pi a^3/3$ **29.** (a) 10π (b) $(0, 0, 2.1)$

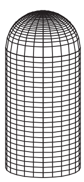
31. $(0, \frac{525}{296}, 0)$

33. (a) $(0, 0, \frac{3}{8}a)$ (b) $4K\pi a^5/15$

35. $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})]$, $(0, 0, 3/[8(2 - \sqrt{2})])$

37. $5\pi/6$ **39.** $(4\sqrt{2} - 5)/15$

41.



43. $136\pi/99$

EJERCICIOS 15.9 ■ PÁGINA 1020

1. 16 **3.** $\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2\theta$ **5.** 0

7. El paralelogramo con vértices $(0, 0)$, $(6, 3)$, $(12, 1)$, $(6, -2)$

9. La región limitada por la recta $y = 1$, el eje y, y $y = \sqrt{x}$

11. -3 **13.** 6π **15.** $2 \ln 3$

17. (a) $\frac{4}{3}\pi abc$ (b) 1.083×10^{12} km^3

19. $\frac{8}{5} \ln 8$ 21. $\frac{3}{2}$ sen 1 **23.** $e - e^{-1}$

REPASO DEL CAPÍTULO 15 ■ PÁGINA 1021

Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Falso

Ejercicios

1. ≈ 64.0 **3.** $4e^2 - 4e + 3$ **5.** $\frac{1}{2}$ sen 1 **7.** $\frac{2}{3}$

9. $\int_0^{\pi}\int_2^4 f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$

11. La región dentro del lazo de la rosa de cuatro hojas $r = \operatorname{sen} 2\theta$ en el primer cuadrante.

13. $\frac{1}{2}$ sen 1 **15.** $\frac{1}{2}e^6 - \frac{7}{2}$ **17.** $\frac{1}{4}\ln 2$ **19.** 8

21. $81\pi/5$ **23.** 40.5 **25.** $\pi/96$ **27.** $\frac{64}{15}$ **29.** 176

31. $\frac{2}{3}$ **33.** $2ma^3/9$

35. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $(\frac{1}{3}, \frac{8}{15})$
(c) $I_x = \frac{1}{12}$, $I_y = \frac{1}{24}$; $\bar{\bar{y}} = 1/\sqrt{3}$, $\bar{\bar{x}} = 1/\sqrt{6}$

37. $(0, 0, h/4)$

39. 97.2 **41.** 0.0512

43. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{45}$

45. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ **47.** $-\ln 2$ **49.** 0

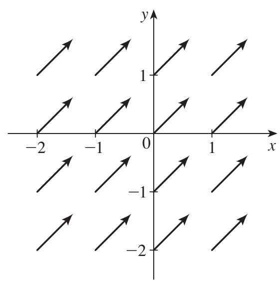
PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 1024

1. 30 **3.** $\frac{1}{2}$ sen 1 **7.** (b) 0.90

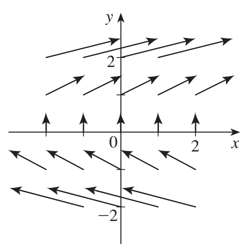
CAPÍTULO 16

EJERCICIOS 16.1 ■ PÁGINA 1032

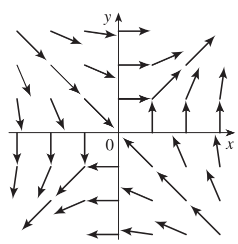
1.



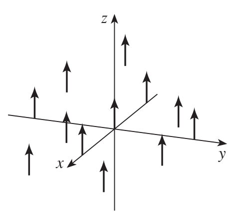
3.



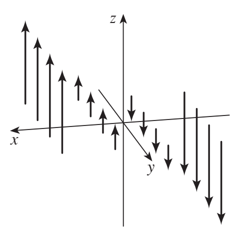
5.



7.

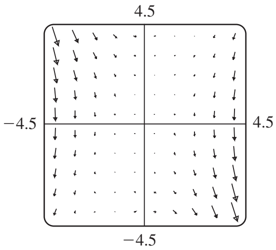


9.



11. II **13.** I **15.** IV **17.** III

19.

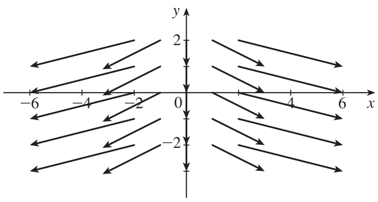


La recta $y = 2x$

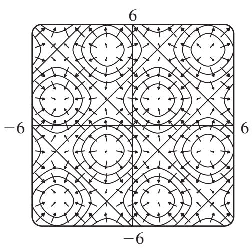
21. $\nabla f(x, y) = (xy + 1)e^{xy}\,\mathbf{i} + x^2e^{xy}\,\mathbf{j}$

23. $\nabla f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{k}$

25. $\nabla f(x, y) = 2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$

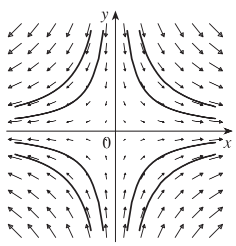


27.



29. III **31.** II **33.** (2.04, 1.03)

35. (a)



$y = C/x$

(b) $y = 1/x, x > 0$

EJERCICIOS 16.2 ▪ PÁGINA 1043

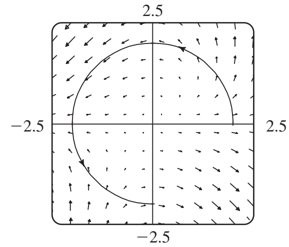
1. $\frac{1}{54}(145^{3/2} - 1)$ **3.** 1638.4 **5.** $\frac{243}{8}$ **7.** $\frac{17}{3}$ **9.** $\sqrt{5}\pi$

11. $\frac{1}{12}\sqrt{14}\,(e^6 - 1)$ **13.** $\frac{1}{5}$ **15.** $\frac{97}{3}$

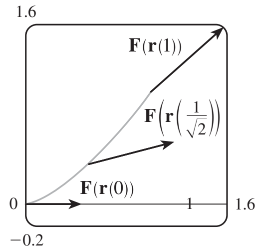
17. (a) Positivo (b) Negativo

19. 45 **21.** $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$ **23.** 1.9633 **25.** 15.0074

27. $3\pi + \frac{2}{3}$



29. (a) $\frac{11}{8} - 1/e$ (b)



31. $\frac{172{,}704}{5{,}632{,}05}\sqrt{2}\,(1 - e^{-14\pi})$ **33.** $2\pi k$, $(4/\pi, 0)$

35. (a) $\bar{x} = (1/m)\int_C x\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{y} = (1/m)\int_C y\rho(x, y, z)\,ds$
$\bar{z} = (1/m)\int_C z\rho(x, y, z)\,ds$, donde $m = \int_C \rho(x, y, z)\,ds$

(b) $(0, 0, 3\pi)$

37. $I_x = k(\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3})$, $I_y = k(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3})$

39. $2\pi^2$ **41.** 26 **43.** 1.67×10^4 ft-lb **45.** (b) Sí

47. ≈ 22 J

EJERCICIOS 16.3 ▪ PÁGINA 1053

1. 40 **3.** $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + K$

5. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + K$ **7.** $f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + K$

9. $f(x, y) = x \ln y + x^2y^3 + K$

11. (b) 16 **13.** (a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ (b) 2

15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77

17. (a) $f(x, y, z) = xy^2 \cos z$ (b) 0

19. 2 **21.** 30 **23.** No **25.** Conservativo

29. (a) Sí (b) Sí (c) Sí

31. (a) Sí (b) Sí (c) No

EJERCICIOS 16.4 ▪ PÁGINA 1060

1. 8π **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** 12 **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** -24π **11.** $\frac{4}{3} - 2\pi$

13. $\frac{625}{2}\pi$ **15.** $-8e + 48e^{-1}$ **17.** $-\frac{1}{12}$ **19.** 3π **21.** (c) $\frac{9}{2}$

23. $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$ si la región es la parte del disco $x^2 + y^2 = a^2$ en el primer cuadrante

EJERCICIOS 16.5 ▪ PÁGINA 1068

1. (a) $-x^2\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ (b) yz

3. (a) $(x - y)\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (b) $z - 1/(2\sqrt{z})$

5. (a) $\mathbf{0}$ (b) $2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7. (a) $\langle 1/y, -1/x, 1/x\rangle$ (b) $1/x + 1/y + 1/z$

9. (a) Negativo (b) rotacional $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

11. (a) Cero (b) rotacional $\mathbf{F}$ puntos en la dirección z negativa

13. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$ **15.** $f(x, y, z) = x^2y + y^2x + K$

17. No conservativo **19.** No