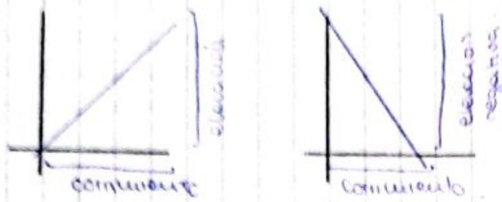
U. 1. 10

RECTAS =

• **PENDIENTE DE UNA RECTA** → permite a los matemáticos medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube o baja.

Pendiente = $\frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}}$ → en eje y hacia arriba o abajo dependiendo + o −
→ en eje x hacia la derecha



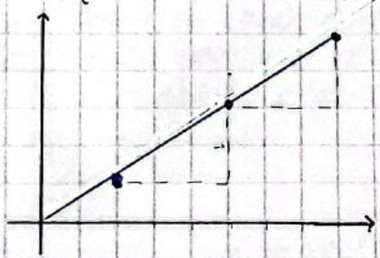
• La pendiente m de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$\boxed{m = \frac{\text{elevación}}{} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y}{x}}$$

La pendiente es independiente de cuáles dos puntos se escojan en la recta.

Ejemplo 1: Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos
↓
Encuentre la pendiente que pasa por los puntos $P(2,1)$ y $Q(8,5)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 \quad x_1} = \frac{5-1}{8-1} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} = \frac{2}{3} \begin{array}{l} \to \text{elevación.} \\ \to \text{corrimiento} \end{array}$$



Hacer ej 5

• **PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA:**

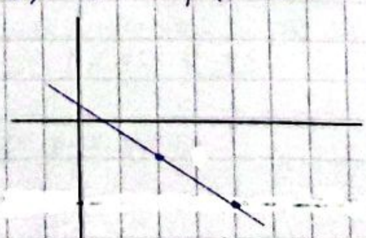
Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ejemplo 2: encuentra la ecuación que pasa por $(1-3)$ con pendiente $-1/2$. Trace la recta
↓
Eje 19

$m = -1/2$ punto $(1, -3)$ $x = 1$, $y = -3$

$$y = -1/2\ 1x - 3$$
$$y + 3 = -1/2\ (1)$$
$$2(y+3) = -x + 1$$
$$2y + 6 = -x$$
$$x + 2y + 5 = 0$$



Como la pendiente es $-1/2$ se corre 2 lugares a la derecha y 1 hacia abajo.

NOTA

↱ eje 23

Ejemplo 3: Hallar la ecuación de una recta que pase por 2 puntos determinados.

↓

Encuentre la ecuación de la recta que pase por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$

· Calcular pendiente $m = \frac{(-4 - 2)}{3 - 1} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

· Formula punto - pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -3/2\,(x + 1)$$

$$2y - 2 = -3x + 1$$

$$2y - 4 = -3x - 3$$

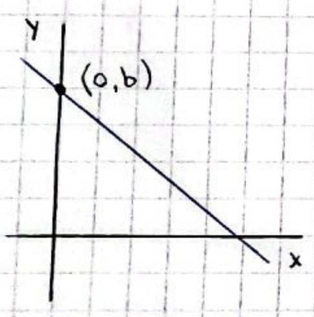
$$2y - 4 + 3 = -3x$$

$$3x + 2y - 1 = 0$$

• Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y, es:

$$\boxed{y = mx + b}$$



∘ Supongamos que una recta no vertical tiene pendiente m y b como punto de intersección con el eje y. Cruza el eje y en el punto $(0, b)$, de modo que la forma punto pendiente lo hace con $x = 0$ y $y = 0$ se convierte en $y - b = m(x - 0)$

↱ 25 y 27

Ejemplo 4: rectas en forma pendiente e intersección.

↓

• Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y de -2

$m = 3$ $b = -2$ → aplico formula
$$\left.\begin{aligned} y &= m \cdot x + b \\ y &= 3 \cdot x + (-2) \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}\right\} \text{ igualo a } y.$$

• Encuentre la pendiente e intersección y de la recta $3y - 2x = 1$ → despejo y.

$$3y - 2x = 1$$

$$3y = 2x + 1$$

$$y = 2/3\,x + 1/3$$

→ entonces $m = 2/3$
$b = 1/3$

NOTA

• Rectas verticales y horizontales.

Si una recta es horizontal, su pendiente $m = 0$, de modo que la ecuación es $y = b$, donde b es el punto de intersección con el eje y. Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x, pq la coordenada x de todo punto en la recta es a.

→ Una ecuación de la recta vertical que pasa por (a, b) es $x = a$.

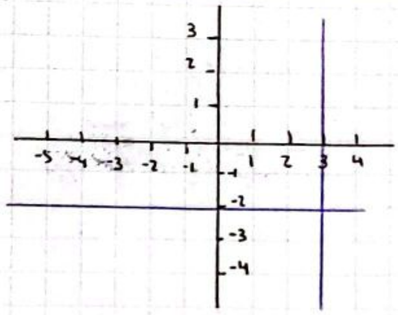
→ Una ecuación de la recta horizontal que pasa por (a, b) es $y = b$

p 29 y 33

Ejemplo 5:

$x = (3, 0)$

$y = (0, -2)$



• La pendiente de una recta horizontal es $m = 0$ y las rectas verticales no tienen pendiente.

• Ecuaciones de la recta:

una ecuación lineal es una ecuación de la forma

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

$\left.\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}\right\}$ son constantes

$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\}$ no son cero ambas.

• Una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$ donde $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$

• Una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o, $x - a = 0$, que es una ecuación lineal, donde $A = 1$, $B = 0$, y $C = -a$

A la inversa, la gráfica de una ecuación lineal es una recta

• Si $B \neq 0$, la ecuación se convierte en

$$\boxed{y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B} \rightarrow \text{dividida por } B}$$

y esta es la forma de pendiente - intersección de la ecuación de una recta con $m = -A/B$ y $b = -C/B$

$$m = \frac{-A}{B} \quad y \quad b = \frac{-C}{B}.$$

• Si $B = 0$, la ecuación se convierte en

$$\boxed{\begin{matrix} Ax + C = 0 \\ \downarrow \\ x = \frac{-C}{A} \end{matrix}}$$

53

• Ejemplo 6: Graficar una ecuación lineal.

Trace la gráfica de $2x - 3y - 12 = 0$

Despejar ecuación $2x - 3y - 12 = 0$

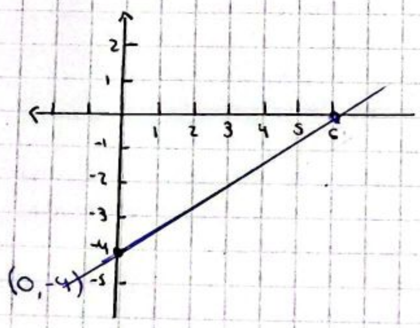
$3y = -2x + 12$

$y = -2x : (-3) + 12 : (-3)$

$y = \frac{2}{3}x - 4$

$2x - 3y - 12 = 0$

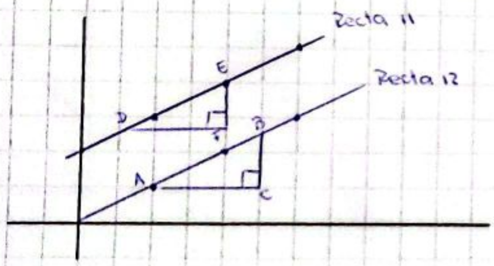
$m = -2/3$
$b = -4 \rightarrow y = (0, -4)$
$a = ? \rightarrow 6 \rightarrow x = (6, 0)$.



• Rectas paralelas y perpendiculares:

- Como la pendiente mide la inclinación de una recta, dos rectas paralelas tendrán la misma pendiente.

~~Dos rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente~~.



• Consideremos que las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2. Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectos ABC y DEF son semejantes por lo que:

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, F)} = m_2$$

• Si los triángulos son semejantes, las pendientes son iguales, y las rectas paralelas.

Ejemplo 7: Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada.

• Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela $4x + 6y + 5 = 0$

Escribimos la ecuación en forma pendiente-intersección

$4x + 6y + 5 = 0$

$6y = -4x - 5$

$y = -\frac{4}{6}x - \frac{5}{6}$

$\boxed{y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}}$

$m = -\frac{2}{3}x$

• Armamos la ecuación punto pendiente con $m = -2/3$ y el punto (5, 2)

$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 5)$

$3y - 2 = -2x + 10$

$3y - 6 = -2x + 10$

$\boxed{-2x + 3y - 16 = 0}$ → ecuación de la recta requerida.

Escaneado con CamScanner

↱ Consultar pq no entendí.

(2)- ex

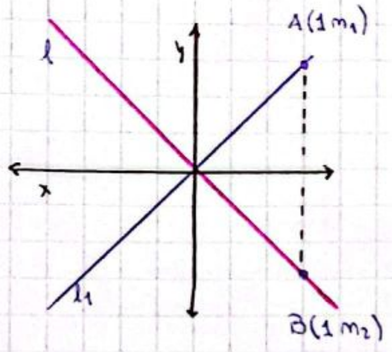
• **RECTAS PERPENDICULARES**

- Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y solo si $m_1 m_2 = -1$, es decir, sus pendientes son recíprocas negativas.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

- También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).

• Demostración:



Dos rectas se cruzan en el origen. (si las rectas se cruzan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cruzan en el origen, éstas rectas tienen las mismas pendientes que las originales.

Si las rectas l y l_1 tienen pendientes m_1 y m_2, entonces sus ecuaciones son $y = m_1 x$ y $y = m_2 x$.

Observe que $A(1 m_1)$ esta sobre l_1 y $B(1 m_2)$ esta sobre l. Por teorema pitagoras y su inverso tenemos $OA \perp OB$ si y solo si

$$[d(O,A)]^2 + [d(O,B)]^2 = [d(A,B)]^2$$

• Por la formula de la distancia esto se convierte en: ↱ Binomio

$$(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) = (1-1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$

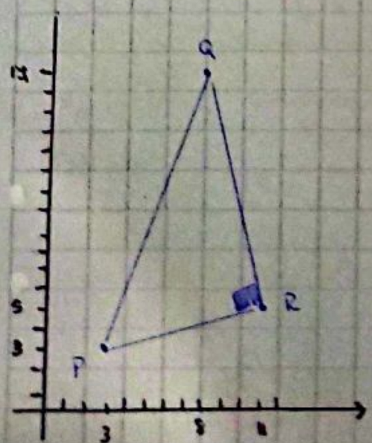
$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_2^2 - 2m_1 m_2 + m_1^2$$

$$2 = -2m_1 m_2$$

$$\boxed{m_1 m_2 = -1}$$

↱ 54, 33, 41

Ejemplo 8: rectas perpendiculares
↓
Demuestre que los puntos $P(3,3)$, $Q(8,17)$ y $R(11,5)$ son los vertices de un triangulo rectangulo.
↓



Las pendientes de las rectas PR y QR son, respectivamente.

$$m_1 = \frac{5-3}{11-3} = \frac{1}{4} \qquad m_2 = \frac{5-17}{11-8} = \frac{-12}{3}\ \frac{-4}{1} = -4$$

m_1 y m_2 son inversas, estas rectas son perpendiculares, de modo que PQR es un triangulo rectangulo.

NOTA

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones con las mismas incognitas, donde cada ecuación es lineal.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$$

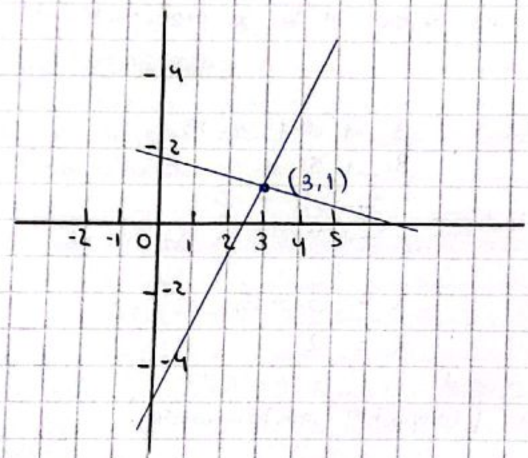
Podemos comprobar que $x = 3$ e $y = 1$ es una solución en el sistema.

$2 \cdot x - y = 5$ $\qquad$ $x + 4y = 7$

$2 \cdot 3 - 1 = 5$ $\qquad$ $3 + 4 \cdot 1 = 7$

- Nota: en una ecuación lineal todas las variables estan elevadas a 1 y tienen 2 incognitas.

- La solución tambien se puede escribir como un par ordenado $(3, 1)$
- Como la solución $(3, 1)$ satisface a cada ecuación, el punto $(3, 1)$ se encuentra en cada recta



. Dado que un sistema de ecuaciones tiene 2 incognitas, puede ocurrir

+ Que tenga una solución unica → (compatible determinado)

+ Tiene infinitas soluciones → (compatible indeterminado).

+ No tiene solución → compatible.

* RESOLUCION ANALITICA:

+ METODO DE IGUALACIÓN: consiste en despejar la misma incognita en ambas ecuaciones, y después igualar. De esta forma se obtiene una ecuación con una sola incognita.

* Eje: Igualación → (una unica solución).

$$\left.\begin{cases} 3x - 4y = -6 \longrightarrow & x = \dfrac{4y - 6}{3} \\ x + 5y = 13 \longrightarrow & x = 5y - 13 \end{cases}\right\}$$

1er paso despejamos la misma incognita, en este caso x.

NOTA

Paso 2: igualamos ambas expresiones

$$\frac{4y-6}{3} = 5y - 13$$

Paso 3: Resolvemos

$$4y - 6 = 3(5y - 13)$$

$$4y - 6 = 15y - 39$$

$$-6 + 39 = 15y - 4y$$

$$33 = 11y$$

$$33 : 11 = y$$

$$\boxed{3 = y}$$

Paso 4: Teniendo el valor de y, podemos obtener el de x reemplazando las ecuaciones originales

De preferencia siempre reemplazar la ecuación más simple.

Ec 2: $x + 5y = 13$

$$x = 5y - 13$$

$$x = 5 \cdot 3 - 13$$

$$x = 15 - 13$$

$$x = 2$$

$$CS = \{(2, 3)\}$$

* Ej igualación con infinitas soluciones (compatible indeterminado):

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 4x - 8y = 16 \end{cases}$$

① - Despejamos la misma incognita, en este caso x

$$x = \frac{-6y - 12}{3} \qquad x = \frac{-8y - 16}{4}$$

② - Igualamos ambas expresiones, y resolvemos.

Puedo simplificar.

$$\frac{-6y - 12}{3} = \frac{-8y - 16}{4}$$

$$4(-6y - 12) = 3(-8y - 16)$$

$$-24y - 48 = -24y - 48$$

$$-24y + 24y = -48 + 48$$

$$0y = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 0 : 0 \\ y = 0 \end{array}}$$

• Como $y = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones, y siempre se cumplen las igualdades sin importar que valor tome x.

NOTA

* Ej: igualación sin solución

$$\begin{cases} -4x + 2y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

①- Despejar ambas ecuaciones, en este caso y

la simplifico ← $y = \frac{6 + 4x}{2}$ $\qquad y = 2x + 5$

$$3 + \cancel{2x} = \cancel{2x} + 5$$

$3 = 5$ → Dado que esta igualdad es falsa, independientemente del valor de x, la ecuación no tiene solución.

*** METODO DE SUSTITUCIÓN:**

. Consiste en despejar solo una de sus incognitas de alguna de las ecuaciones, y sustituir lo obtenido en la restante.

* Ej: solución unica (COMPATIBLE DETERMINADO).

$$\begin{cases} 2x + 4y = -10 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$$ → despejo la más simple.

①- Despejo:

$$x = 2 + 5y$$

②- Ahora sustituimos esta expresión por x de la otra ecuación.

$$2.(2 + 5y) + 4y = -10$$

$$4 + 10y + 4y = -10$$

$$14y = -10 - 4$$

$$y = -14 : 14$$

$$\boxed{y = -1}$$

③- Ya tenemos el valor para y, por lo que reemplazo en la ecuación despejada.

$$x = 2 + 5(-1)$$

$$x = -3$$

CS $\{(-3, -1)\}$

NOTA

* Ej: infinitas soluciones (compatible indeterminado).

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = -2 \end{cases}$$

① - Despejo x en la primer ecuación

$$x = \frac{1 + 3y}{2}$$

② - Reemplazo el valor de x en la segunda ecuación:

$$-4\left(\frac{1+3y}{2}\right) + 6y = -2$$

$$\frac{\cancel{-4} - \cancel{12}y}{\cancel{2}} + 6y =$$

$$-2 - 6y + 6y = -2$$

$$-6y + 6y = -2 + 2 \longrightarrow$$ dado que en ambos lados es cero, tenemos $y = 0$.

$$\boxed{y = 0}$$

Entonces cualquier numero puede ser reemplazado por x.

* Ej: sustitucion sin solución (incompatible)

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

① - Despejo la primer ecuación:

$$y = 3 - x$$

② - Sustituimos esta expreción en y de la segunda ecuación:

$$2x + 2(3 - x) = 2$$

$$\cancel{2x} + 6 - \cancel{2x} = 2$$

$$6 = 2 \rightarrow$$ Dado que no se cumple esta igualdad podemos decir que es un sistema de ecuaciones incompatible.

* MÉTODO POR ELIMINACIÓN

Combinamos las ecuaciones usando sumas o restas, para eliminar una de las incógnitas.

Ej: cuando ya tengo 2 coeficientes opuestos

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

①- Como los coeficientes de los términos en y son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{array}{r} 3x + \cancel{2y} = 14 \\ x - \cancel{2y} = 2 \\ \hline 4x = 16 \end{array}$$

$4x = 16$
$x = 16 : 4$
$x = 4$

②- Sustituimos $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y despejamos y. (siempre elegir la más fácil).

$x - 2y = 2$

$4 - 2y = 2$
$-2y = 2 - 4$
$y = -2 : (-2)$
$y = 1$

CS $\{(4, 1)\}$

• Cuando en un ejercicio no tenemos coeficientes negativos entre sí:

1- Ajustar los coeficientes: multiplique una o más de las ecuaciones por números apropiados, de modo que el coeficiente de una incógnita de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.

2- Sumar las ecuaciones: sume las 2 ecuaciones para eliminar una incógnita y, a continuación, despeje la incógnita restante.

3- Sustituir a la inversa: en una de las ecuaciones originales, sustituya el valor hallado en el paso 2, y despeje la incógnita restante.

NOTA

c) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 5x + 2y = 22 \end{cases}$ → ①. La tomo y multiplico x 2.

$(3x - y) \cdot 2 = 6x - 2y.$

② - Sumo las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{array}{r} 6x - 2y = 0 \\ 5x + 2y = 22 \\ \hline 11x \quad = 22 \end{array}$$

$11x = 22$
$x = 22 : 11$
$x = 2$

③ - Reemplazo el valor de x en la ecuación original

$5(2) + 2y = 22$

$10 + 2y = 22 - 10$
$2y = 12$
$y = 12 : 2$
$y = 6$

CS $\{(2, 6)\}$

Ej. 9) - $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 3x + 4y = 10 \\ x - 4y = -2 \\ \hline 4x \quad = 8 \end{array}$$

$4x = 8$
$x = 8 : 4$
$x = 2.$

$2 - 4y = -2$
$-4y = -2 - 2$
$y = -4 : (-4)$
$y = 1$

CS $\{(2 ; 1)\}$

10) - $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x - y = 21 \end{cases}$

$(4x - y) \cdot 5 = 20x - 5y$

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 15 \\ 20x - 5y = 21 \\ \hline 22x \quad = 36 \end{array}$$

$22x = 36$
$x = 36 : 22$
$x = 1{,}636$

$2 \cdot (1{,}636) + 5y = 15$
$3{,}272 + 5y = 15$
$5y = 15 - 3{,}272$
$y = 11{,}728 : 5$
$y = 2{,}346$

CS $\{(1{,}636 \, , \, 2{,}346)\}$ → Consultar si esta bien.

NOTA

Escaneado con CamScanner

* METODO GRAFICO:

- Teniendo 2 ecuaciones siempre despejo y (es más facil)

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 5x + 2y = 22 \end{cases}$$

$3x - y = 0 \longrightarrow -y = -3x$

$y = -3x : -1$

$y = 3x \longrightarrow m: 3$

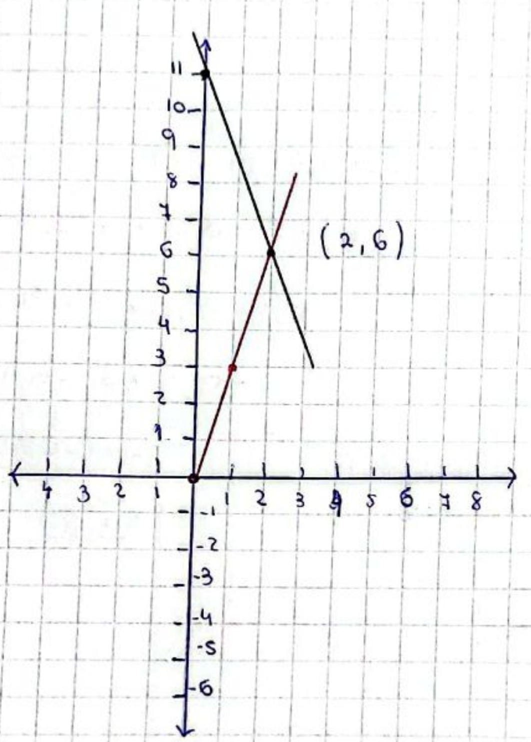
ordenada al origen cero

$5x + 2y = 22$

$2y = 22 - 5x$

$y = \frac{22 - 5x}{2} \longrightarrow m = -\frac{5}{2}$

$y = 11 - \frac{5}{2}x$ ordenada al origen 11



CS $\{(2, 6)\}$

- Cuando me piden conjunto de solución despejo y grafico y el punto de intersección será mi CS.

* MODELADO CON SISTEMA DE ECUACIONES:

① - Identificar variables: identifique las cantidades que el problema pide hallar. Llamelas x e y.

② - Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de las variables:

③ - Establezca un sistema de ecuaciones.

④ - Resuelva el sistema.

Ej 59) - Valor de monedas: un hombre tiene 14 monedas en su bolsillo, todas las cuales son de 10 y 25 centavos. Si el valor total de su cambio es \$2,75 ¿Cuántas monedas de 10 centavos tiene y cuántas de 25?

① - Defino variables:

x = cantidad de monedas 10 centavos.

NOTA y = " " " 25 "

②- exprese todas las cant. desconocidas

$x + y = 14$ → cantidad de monedas

$0,1 + 0,25 = 2,75$ → valor total de cambio

③- Escribo el sist. de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 0,1 + 0,25 = 2,75 \end{cases}$$

④- Resuelva: despejo y sustituyo

$$\begin{cases} x + y = 14 \longrightarrow y = 14 - x \\ 0,1x + 0,25y = 2,75 \end{cases}$$

$$0,1x + 0,25(14 - x) = 2,75$$

$$0,1x + 3,5 - 0,25x = 2,75$$

$$0,1x - 0,25x = 2,75 - 3,5$$

$$-0,15x = -0,75$$

$$x = -0,75 : (-0,15)$$

$$\boxed{x = 5}$$

. Reemplazo x en la ecuación ya despejada:

$y = 14 - 5$

$y = 9$

$CS \{(5, 9)\}$