Función cuadratica

Todas las funciones cuadraticas estan elevadas a exponente de grado 2:

- Formas de expresion: polinomica, normal o canonica, factorizada.

- **Expresion polinomica**: esta definida por una expresión con polinomios, si el grado de la funcion es n, la formula de la formula es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Siendo n un numero no negativo y $a_n, a_{n-1}, \dots a_0$ números reales.

- Una función cuadratica es una función polinomica de grado 2. Entonces, una función cuadratica es una función de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

$$f(x) = 2 \cdot x^2 + 12x + 23$$

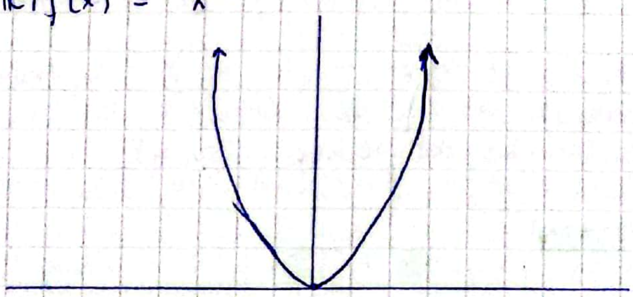
- Definiremos a la función cuadratica, con dominio en el conjunto de los numeros reales, como sigue:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = ax^2 + bx + c \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 & \text{"coeficiente cuadratico"} \\ b \in \mathbb{R} & \text{"Coeficiente lineal"} \\ c \in \mathbb{R} & \text{"termino independiente"} \end{cases}$$

La curva que representa a esta función es continua y se llama 'PARABOLA'.

La funcion cuadratica más sencilla:
- si los coeficientes b y c = 0 y a = 1

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2$$



- Armando una tabla de valores y graficando en un sistema cartesiano.

- Analisis de una función cuadratica basica:

sea: $f(x) = x^2$

En ella podemos distinguir =

→ Un eje de simetria, en este caso es el eje de ordenadas y su ecuación es $x = 0$

→ Valores simetricos: dos valores del dominio a y b son simetricos si tienen la misma imagen (valores y) → por eje $x = -1$, $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$. A los puntos (a y c) y (b y c) se los denomina simetricos respecto a Es.

→ Valor mínimo de la función es 0; el punto donde se localiza se llama vértice de una parabola. Las coordenadas del vértice en este caso son $(0,0)$

→ Su conjunto imagen (ci) es $[0, \infty)$

→ Intervalo de crecimiento $(0, \infty)$ y decrece $(-\infty, 0)$

→ Es positiva en $\mathbb{R} - \{0\}$

→ Intervalo de negatividad : –

→ Intersección con el eje x $(0,0)$

→ Intersección con el eje Y : $(0,0)$

→ El signo de a, en $f(x) = ax^2$ con $b = c = 0$ indica hacia donde se dirigen las ramas de la parabola:

Si $a > 0$ la parabola se abre hacia arriba, posee un minimo → concava hacia arriba.

Si $a < 0$, las ramas de la parabola se abre hacia abajo, posee un maximo → concava hacia abajo.

→ El valor absoluto de a modifica la abertura de la parabola respecto de la grafica de $f(x) = x^2$

Si $0 < |a| < 1$, la parabola es más abierta

Si $|a| > 1$ la parabola es más cerrada.

→ Sea $f(x) = ax^2 + K$, con $b = 0$ y $c = K$ entonces:

La gráfica de $f(x) = ax^2 + K$ es una parabola que se encuentra desplazada $|K|$ unidades:
hacia arriba si $K > 0$ o hacia abajo si $K < 0$, respecto de la grafica de $f(x) = ax^2$ → ecuación del eje de simetria $x = 0$
→ coordenadas del vértice : $(0; K)$.

* **Expresión canonica o normal.**

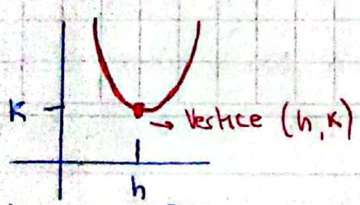
Una función cuadratica $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la forma canonica:

$$f(x) = a(x - h)^2 + K$$

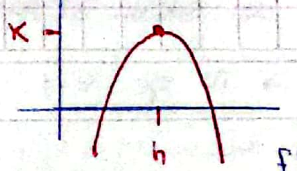
K = toma valores del eje y
h = toma valores del eje h.

→ Analisis de la función expresion canonica

La gráfica de f es una parabola con vertice (h, K); la parabola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x-h)^2 + K$ $a > 0$



$f(x) = a(x+h)^2$, $a < 0$

ejemplo 1 :

$$\frac{b^2}{4 \cdot a^2} = \frac{(-12)^2}{4 \cdot 2^2} = \frac{144}{16} = 9$$

a) Expresion normal → $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

$= 2(x^2 - 6x)^2 + 23$

$2(x^2 - 6x + 9)^2 + 23 - 2 \cdot 9$

$2(x-3)^2 + 23 - 18$

$2(x-3)^2 + 5$

forma canonica.

• Factorice 2 terminos en x
• Complete el cuadrado : Sume 9 dentro del parentesis, reste $2 \cdot 9$ o 18 fuera y resuelva.

→ La grafica de $f(x) = a(x-h)^2$ es una parabola que se encuentra desplazada $|h|$ unidades:

• hacia la derecha, si $h > 0$
• hacia la izquierda, si $h < 0$

respecto de la grafica de $f(x) = ax^2$

√ Ecuación del eje de simetria $x = h$
√ Coordena del vertice $(h; 0)$

→ La expresión $y = a(x-h)^2 + k$ se denomina expresión canonica de la F(x) cuadratica.
Su grafica es la de $y = ax^2$ desplazada en $|h|$ unidades horizontalmente y $|k|$ unidades verticalmente.

√ Ecuación del eje de simetría = $(x = h)$
√ Coordenadas del vertice = $(h; k)$

b)- grafica $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

• La forma canonica nos dice que obtenemos la grafica de f al tomar la parabola $y = x^2$, desplazandola 3 unidades a la derecha, alargandola en un factor de 2, y moviendola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parabola esta en (3, 5), y la parabola abre hacia arriba. Alargamos la grafica, observando que el punto de intersección es 23.

Expresión inicial = $2x^2 - 12 + 23$ → Punto de intersección y.

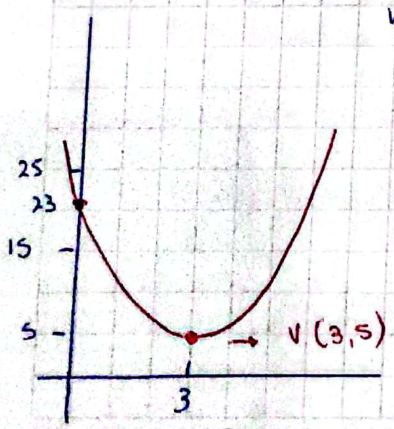
Expresión canonica = $2(x - 6x)^2 + 23$ → ya factorizado

" " final = $2(x-3)^2 + 5$ → 5 unidades hacia arriba

+ abre hacia arriba.

unidades a la derecha

Vertice (3, 5)



→ Intersecciones con los eje:

Con eje y = Para hallar la ordenada al origen reemplazamos x por cero y obtenemos el valor correspondiente de y.

- Si se tiene la forma polinomica, la ordenada al origen es igual a c.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = a0^2 + b0 + c$$

$$f(0) = c$$

- En este caso, la intersección de la función con el eje y es $(0;c)$. En general $(0;f(0))$.

Con el eje x: . el punto o los puntos, donde la funcion intersecta al eje de las abscisas, el valor de la ordenada = cero.

. Para hallar las raices reemplazamos y por cero o $f(x) \rightarrow f(0)$ y luego despejamos → resolver ecuación segundo grado.

$$f(x) = f(0) = a.0^2 + b0. + c.$$

- Si se tiene la forma canonica

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$0 = a(x-h)^2 + k \rightarrow \text{despejamos } x$$

Siendo $x = x_1$ y $x = x_2$ las raices de la función son:

$$(x;0) \text{ y } (x;0)$$

→ Si el coeficiente ... es igual a cero $(b=0)$, la ecuación nos queda:

$$ax^2 + c = \quad \text{con } a \neq 0$$

$$\text{Para hallar } x \rightarrow x_1 x_2 = \pm\sqrt{\frac{-c}{a} \cdot 4}$$

→ Si el término independiente es igual a cero $c=0$, la ecuación nos queda:

$$ax^2 + bx = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

Usamos prop. reciproca $ax\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0$

→ Luego si un producto es igual a cero, uno o todos los factores son iguales a cero:

$$ax = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad \text{o} \quad x + \frac{b}{a} = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

→ Si la ecuación es: $ax^2 + bx + c = 0$

aplicamos resolvente ↓

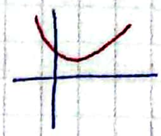
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}$$

* Analisis del discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$

✓ Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene 2 raices → la parabola corta al eje x en 2 puntos

✓ Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene 2 raices reales iguales → La parabola toca al eje x en un punto

✓ Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene raices reales → La parabola no corta al eje x



* Expresión factorizada de la función cuadratica

→ Conociendo las raices (x_1 y x_2) podemos escribir la expresión factorizada de la función cuadratica

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ siendo $a \neq 0$ el coeficiente cuadrático.

Si aplicamos distributiva obtenemos la ecuación polinomica.

→ Vertices: si tenemos la expresión polinómica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Verifica completando cuadrados

$h = \dfrac{-b}{2a}$ → Esta formula nos da la abscisa del vertice; para encontrar la ordenada hay que reemplazar el valor de h encontrando en la función.

$$V = \left(\frac{-b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$$

Si tenemos la expresión factorizada:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

El vertice esta posicionado en el eje de simetria, por tanto la abscisa del mismo tiene que estar en el punto medio de las 2 raices, dado que estas son valores simetricos de la parábola. De igual modo, hallamos el valor k, reemplazando el valor de h en la función dada.

NOTA

• Si tenemos la expresión canónica ⟶ $V = (h ; k)$

→ Propiedades de las raíces:

Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ y siendo x_1 y x_2 sus raíces, se cumple que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

→ MAXIMOS Y MINIMOS DE LA FUNCIÓN:

• El valor maximo de una función se presenta en

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

- Si $a > 0$, entonces el valor minimo es $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$
- Si $a < 0$, entonces el valor maximo es $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

* Conclusión:

→ Todas las graficas de funciones cuadraticas se obtienen por transformar o por tablas de valores.
→ Dada una ecuación particular de la función cuadratica se puede transformar en cualquiera de las otras.
→ El conjunto imagen de una función se extrae a partir de su grafica.
→ El eje de simetria es siempre $x = h$.

* MODELANDO CON FUNCIONES CUADRATICAS.