UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SANTA FE

Facultad de Ciencias de la Salud

Carrera: Farmacia

Matemática: 1era Parte

Equipo docente: Lic. Dra. Karina Torres
Prof. María Eugenia Cammisi

<u>TEMAS:</u>

FUNCIONES VARIAS

TRIGONOMETRÍA

VECTORES

JAMES STEWART | LOTHAR REDLIN | SALEEM WATSON

PRECÁLCULO
MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

6e

2.1 ¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Funciones a nuestro alrededor ▶ Definición de función ▶ Evaluación de una función ▶ Dominio de una función ▶ Cuatro formas de representar una función

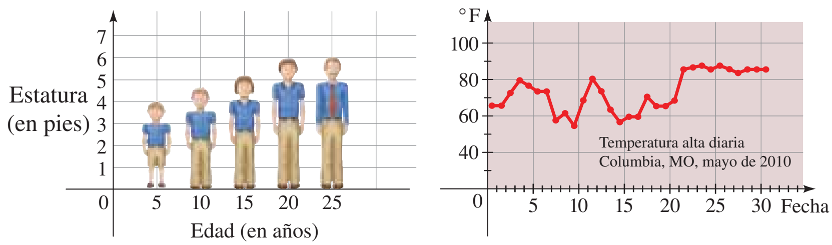
En esta sección exploramos la idea de una función y a continuación damos la definición de función.

▼ Funciones a nuestro alrededor

En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso (vea Figura 1). Usamos el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad con respecto a otra. Esto es, decimos lo siguiente:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

La Oficina de Correos de Estados Unidos utiliza una sencilla regla para determinar el costo de enviar por correo un paquete de primera clase con base en el peso del paquete. Pero no es tan fácil describir la regla que relaciona la estatura con la edad o la regla que relaciona temperatura y fecha.



w (onzas)	Porte (dólares)
$0 < w \le 1$	1.22
$1 < w \le 2$	1.39
$2 < w \le 3$	1.56
$3 < w \le 4$	1.73
$4 < w \le 5$	1.90
$5 < w \le 6$	2.07

FIGURA 1 La estatura es función de la edad. La temperatura es función de la fecha. El porte es función del peso.

¿Puede usted considerar otras funciones? Veamos a continuación algunos ejemplos:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.
- El peso de una astronauta es una función de su elevación.
- El precio de una mercancía es una función de la demanda de esa mercancía.

La regla que describe la forma en que el área A de un círculo depende de su radio r está dada por la fórmula $A = \pi r^2$. Aun cuando no exista una regla o fórmula precisa que describa una función, todavía podemos describir la función por medio de una gráfica. Por ejemplo, cuando abrimos la llave del agua caliente de una llave, la temperatura del agua depende de cuánto tiempo haya estado saliendo el agua. Por tanto, podemos decir:

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

La Figura 2 muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como función del tiempo t que haya transcurrido desde que se abrió la llave. La gráfica muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del tanque de agua caliente llega a la llave, la temperatura T del agua aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua del tanque. Cuando éste se descarga, T disminuye a la temperatura del agua fría de alimentación.

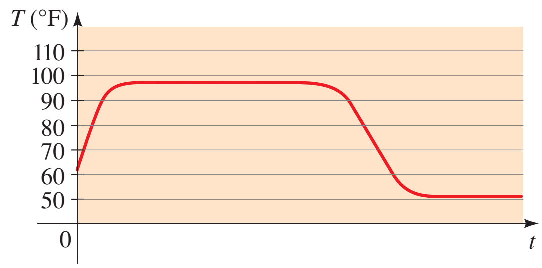


FIGURA 2 Gráfica de la temperatura T del agua como función del tiempo t

Definición de función

Ya antes hemos empleado letras para representar números. Aquí hacemos algo muy distinto: usamos letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar de una función, es necesario darle un nombre. Usaremos letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, podemos usar la letra f para representar una regla como sigue:

$$\text{“}f\text{”} \qquad \text{es la regla} \qquad \text{“elevar al cuadrado el número”}$$

Cuando escribimos $f(2)$ queremos decir "aplicar la regla f al número 2". La aplicación de la regla da $f(2) = 2^2 = 4$. Del mismo modo, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

La tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de una calculadora es un buen ejemplo de una función como máquina. Primero se ingresa x en la pantalla y, a continuación, se pulsa la tecla marcada como $\boxed{\sqrt{\ }}$. (En casi todas las calculadoras *graficadoras* se invierte el orden de estas operaciones.) Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; esto es, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparece una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla, correcta a cierto número de lugares decimales. (Entonces, la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculadora no es exactamente la misma que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.)

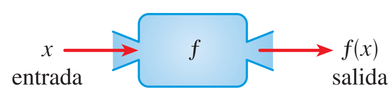
Por lo general consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x" y se denomina **valor de f en x**, o la **imagen de x bajo f**. El conjunto A recibe el nombre de **dominio** de la función. El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía en todo el dominio, es decir,

$$\text{Rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función f se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama **variable dependiente**. Por tanto, si escribimos $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Es útil considerar una función como una **máquina** (vea Figura 3). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando x entra a la máquina, es aceptada como **entrada** y la máquina produce una **salida** $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

FIGURA 3 Diagrama de máquina de f



Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flecha** como en la Figura 4. Cada flecha conecta un elemento de A con un elemento de B. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

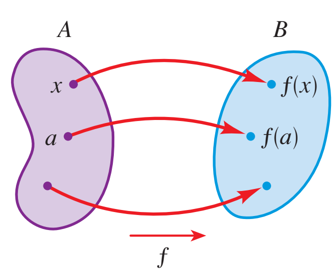


FIGURA 4 Diagrama de flecha de f

EJEMPLO 1 | Análisis de una función

Una función f está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 + 4$$

(a) Exprese verbalmente cómo actúa f sobre la entrada x para producir la salida $f(x)$.

(b) Evalúe $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.

(c) Encuentre el dominio y rango de f.

(d) Trace un diagrama de máquina para f.

SOLUCIÓN

(a) La fórmula nos dice que f primero eleva al cuadrado la entrada x y luego suma 4 al resultado. Por tanto, f es la función

"elevar al cuadrado, luego sumar 4"

(b) Los valores de f se encuentran al sustituir por x en la fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } 3$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } -2$$

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } \sqrt{5}$$

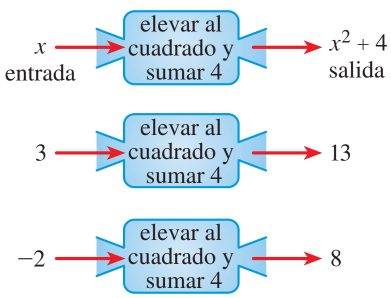


FIGURA 5 Diagrama de máquina

(c) El dominio de f está formado por todas las posibles entradas para x. Como podemos evaluar la fórmula $f(x) = x^2 + 4$ para cada número real x, el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

El rango de f está formado por todas las posibles salidas de f. Como $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, tenemos $x^2 + 4 \geq 4$, de modo que por cada salida de f tenemos $f(x) \geq 4$. Entonces, el rango de f es $\{y \mid y \geq 4\} = [4, \infty)$.

(d) Un diagrama de máquina para f se ilustra en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9, 13, 17** Y **43** ■

▼ Evaluación de una función

En la definición de una función, la variable independiente x desempeña el papel de un símbolo o dígito. Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

$$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$$

Para evaluar f en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

EJEMPLO 2 | Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

(a) $f(-2)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(4)$ **(d)** $f\left(\frac{1}{2}\right)$

SOLUCIÓN Para evaluar f en un número, sustituimos el número por x en la definición de f.

(a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

(b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

(c) $f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$

(d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19** ■

EJEMPLO 3 | Una función definida por tramos

Un plan de teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cobra \$0.20 por cada minuto adicional de uso. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \leq x \leq 400 \\ 39 + 0.20(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Encuentre $C(100)$, $C(400)$ y $C(480)$.

Una **función definida** por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. La función C del Ejemplo 3 está definida por tramos.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. He aquí cómo aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada x. Si $0 \leq x \leq 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otra parte, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.20((x - 400)$.

Como $100 \leq 400$, tenemos $C(100) = 39$.
Como $400 \leq 400$, tenemos $C(400) = 39$.
Como $480 > 400$, tenemos $C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$.

Por tanto, el plan cobra \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

EJEMPLO 4 | Evaluación de una función

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

(a) $f(a)$ **(b)** $f(-a)$

(c) $f(a + h)$ **(d)** $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$

Expresiones como la del inciso (d) del ejemplo 4 aparecen con frecuencia en cálculo y se les llama *cociente de diferencias* y representan el cambio promedio en el valor de f entre $x = a$ y $x = a + h$.

SOLUCIÓN

(a) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

(b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

(c)
$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1 \end{aligned}$$

(d) Usando los resultados de las partes (c) y (a), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 5 | El peso de una astronauta

Si una astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando esté a h millas sobre la Tierra está dado por la función

$$w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

(a) ¿Cuál es su peso cuando ella esté a 100 millas sobre la Tierra?

El peso de un cuerpo que esté sobre la Tierra, o muy cerca de ésta, es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ese cuerpo. Cuando se encuentre en órbita alrededor de la Tierra, una astronauta experimenta la sensación de "ingravidez" porque la fuerza centrípeta que la mantiene en órbita es exactamente igual que la atracción gravitacional de la Tierra.

(b) Construya una tabla de valores para la función w que da el peso de la astronauta a altitudes de 0 a 500 millas. ¿Qué se concluye a partir de la tabla?

SOLUCIÓN

(a) Buscamos el valor de la función w cuando $h = 100$; esto es, debemos calcular $w(100)$.

$$w(100) = 130\left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 \approx 123.67$$

Entonces, a una altitud de 100 millas, ella pesa unas 124 lb.

(b) La tabla da el peso de la astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla están calculados como en la parte (a).

h	$w(h)$
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107
500	102

La tabla indica que cuanto más alto se encuentre ella, menor es su peso.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real.* Por ejemplo, considere las funciones

Los dominios de expresiones algebraicas se estudian en la página 35.

$$f(x) = \frac{1}{x - 4} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, de modo que su dominio es $\{x \mid x \neq 4\}$. La función g no está definida para x negativa, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ge 0\}$.

EJEMPLO 6 | Hallar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ **(b)** $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **(c)** $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t + 1}}$

SOLUCIÓN

(a) Una expresión racional no está definida cuando el denominador es 0. Como

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

vemos que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio también se puede escribir en notación de intervalos como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

(b) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, de modo que debemos tener $9 - x^2 \geq 0$. Usando los métodos de la Sección 1.7, podemos resolver esta desigualdad para hallar que $-3 \leq x \leq 3$. Por lo tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

(c) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, y no podemos dividir entre 0, de modo que debemos tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por lo tanto, el dominio de h es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **51**

Cuatro formas de representar una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de máquina y de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (por descripción en palabras)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)
- visualmente (por una gráfica)
- numéricamente (por una tabla de valores)

Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros. Un ejemplo de una descripción verbal es la siguiente regla para convertir entre escalas de temperatura:

“Para hallar el equivalente Fahrenheit de una temperatura Celsius, multiplicar por $\frac{9}{5}$ la temperatura Celsius y luego sumar 32.”

En el Ejemplo 7 vemos cómo describir esta regla verbal algebraica, gráfica y numéricamente. Una representación útil del área de un círculo como función de su radio es la fórmula algebraica

$$A(r) = \pi r^2$$

La gráfica producida por un sismógrafo (vea la caja en la página siguiente) es una representación visual de la función de aceleración vertical $a(t)$ del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final, considere la función $C(w)$, que se describe verbalmente como “el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w”. La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente, es decir, usando una tabla de valores.

Estaremos usando las cuatro representaciones de funciones en todo este libro; las resumimos en el cuadro siguiente.

CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbal

Usando palabras:

"Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplicar la temperatura Celsius por $\frac{9}{5}$, luego sumar 32."

Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

Algebraica

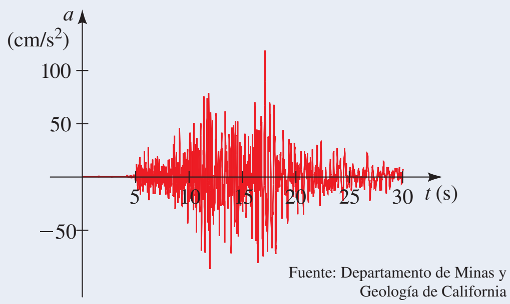
Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Usando una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Usando una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \le 1$	1.22
$1 < w \le 2$	1.39
$2 < w \le 3$	1.56
$3 < w \le 4$	1.73
$4 < w \le 5$	1.90
⋮	⋮

Costo de enviar por correo un paquete de primera clase

EJEMPLO 7 | Representar una función verbal, algebraica, numérica y gráficamente

Sea $F(C)$ la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius C. (Así, F es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro citado líneas antes da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

(a) Algebraicamente (usando una fórmula)

(b) Numéricamente (usando una tabla de valores)

(c) Visualmente (usando una gráfica)

SOLUCIÓN

(a) La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada C por $\frac{9}{5}$ y luego sumar 32 al resultado.

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

(b) Usamos la fórmula algebraica para F que encontramos en la parte (a) para construir una tabla de valores:

C (Celsius)	F (Fahrenheit)
−10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

(c) Usamos los puntos tabulados en la parte (b) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la Figura 6.

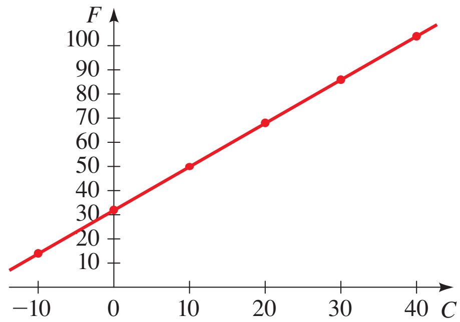


FIGURA 6 Celsius y Fahrenheit

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

2.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si una función f está dada por la fórmula $y = f(x)$, entonces $f(a)$ es la ______de f en $x = a$.
2. Para una función f, el conjunto de todas las posibles entradas se denomina _____de f, y el conjunto de todas las posibles salidas se denomina _______de f.
3. **(a)** ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen 5 en sus dominios?

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = \frac{x-5}{x} \qquad h(x) = \sqrt{x-10}$$

(b) Para las funciones de la parte (a) que *tienen* 5 en sus dominios, encuentre el valor de la función en 5.

4. Una función está dada algebraicamente por la fórmula $f(x) = (x-4)^2 + 3$. Complete estas otras formas de representar a f:

(a) *Verbal:* "Restar 4, luego _____ y _____.
(b) *Numérica:*

x	$f(x)$
0	19
2	
4	
6	

HABILIDADES

5-8 ■ Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "elevar al cuadrado, luego restar 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

5. Sumar 3, luego multiplicar por 2
6. Dividir entre 7, luego restar 4
7. Restar 5, luego elevar al cuadrado
8. Tomar la raíz cuadrada, sumar 8, luego multiplicar por $\frac{1}{3}$.

9-12 ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

9. $h(x) = x^2 + 2$
10. $k(x) = \sqrt{x+2}$
11. $f(x) = \dfrac{x-4}{3}$
12. $g(x) = \dfrac{x}{3} - 4$

13-14 ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

13. $f(x) = \sqrt{x-1}$
14. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

15-16 ■ Complete la tabla.

15. $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
−1	
0	
1	
2	
3	

16. $g(x) = |2x + 3|$

x	$g(x)$
−3	
−2	
0	
1	
3	

17-26 ■ Evalúe la función en los valores indicados.

17. $f(x) = x^2 - 6;\quad f(-3), f(3), f(0), f(\frac{1}{2}), f(10)$
18. $f(x) = x^3 + 2x;\quad f(-2), f(1), f(0), f(\frac{1}{3}), f(0.2)$
19. $f(x) = 2x + 1;$
$f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a+b)$
20. $f(x) = x^2 + 2x;$
$f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$
21. $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x};$
$g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a-1), g(-1)$

22. $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$;

$h(1), h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x), h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

23. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$;

$f(0), f(2), f(-2), f(\sqrt{2}), f(x+1), f(-x)$

24. $f(x) = x^3 - 4x^2$;

$f(0), f(1), f(-1), f(\frac{3}{2}), f\left(\dfrac{x}{2}\right), f(x^2)$

25. $f(x) = 2|x-1|$;

$f(-2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(2), f(x+1), f(x^2+2)$

26. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

$f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

27-30 ■ Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados.

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

28. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

29. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

30. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

31-34 ■ Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

31. $f(x) = x^2 + 1$; $f(x+2), f(x) + f(2)$

32. $f(x) = 3x - 1$; $f(2x), 2f(x)$

33. $f(x) = x + 4$; $f(x^2), (f(x))^2$

34. $f(x) = 6x - 18$; $f\left(\dfrac{x}{3}\right), \dfrac{f(x)}{3}$

35-42 ■ Encuentre $f(a)$, $f(a+h)$, y el cociente de diferencias $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$.

35. $f(x) = 3x + 2$

36. $f(x) = x^2 + 1$

37. $f(x) = 5$

38. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

39. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

40. $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

41. $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$

42. $f(x) = x^3$

43-64 ■ Encuentre el dominio de la función.

43. $f(x) = 2x$

44. $f(x) = x^2 + 1$

45. $f(x) = 2x, \quad -1 \leq x \leq 5$

46. $f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 5$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

48. $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$

49. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

50. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

51. $f(x) = \sqrt{x-5}$

52. $f(x) = \sqrt[4]{x+9}$

53. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

54. $g(x) = \sqrt{7-3x}$

55. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

56. $G(x) = \sqrt{x^2-9}$

57. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

58. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

59. $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

60. $g(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

61. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

62. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{6-x}}$

63. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

64. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

65-68 ■ Se da una descripción verbal de una función. Encuentre representaciones **(a)** algebraica, **(b)** numérica y **(c)** gráfica para la función.

65. Para evaluar $f(x)$, divida la entrada entre 3 y sume $\frac{2}{3}$ al resultado.

66. Para evaluar $g(x)$, reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por $\frac{3}{4}$.

67. Sea $T(x)$ la cantidad de impuesto de ventas cobrado en el condado de Lemon por la compra de x dólares. Para hallar el impuesto, tome 8% del precio de compra.

68. Sea $V(d)$ el volumen de una esfera de diámetro d. Para hallar el volumen, tome el cubo del diámetro, luego multiplique por π y divida entre 6.

APLICACIONES

69. Costo de producción El costo C en dólares por producir x yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

(a) Encuentre $C(10)$ y $C(100)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
(c) Encuentre $C(0)$. (Este número representa los *costos fijos*.)

70. Área de una esfera El área superficial S de una esfera es una función de su radio r dado por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

(a) Encuentre $S(2)$ y $S(3)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

71. Ley de Torricelli Un tanque contiene 50 galones de agua, que se descarga por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. El tanque se descarga con más rapidez cuando está casi lleno porque es mayor la presión sobre la fuga. La **Ley de Torricelli** da el volumen de agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 20$$

(a) Encuentre $V(0)$ y $V(20)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
(c) Haga una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0, 5, 10, 15, 20$.

72. ¿A qué distancia puede usted ver? Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia D máxima a que se puede ver desde la parte superior de un edificio alto o un avión a una altitud h está dada por la función

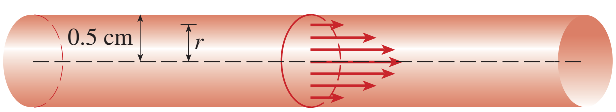
$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h se miden en millas.
(a) Encuentre $D(0.1)$ y $D(0.2)$.
(b) ¿A qué distancia puede usted ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, a 1135 pies del suelo?
(c) Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?

73. Circulación sanguínea Cuando la sangre circula por una vena o una arteria, su velocidad v es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que la distancia r desde el eje central aumenta (vea la figura). La fórmula que da v como función de r se llama **ley de flujo laminar**. Para una arteria con radio 0.5 cm, la relación entre v (en cm/s) y r (en cm) está dada por la función

$$v(r) = 18{,}500(0.25 - r^2) \qquad 0 \le r \le 0.5$$

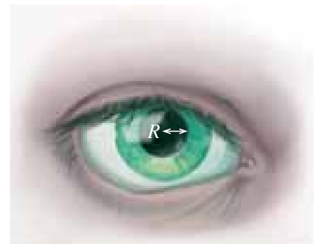
(a) Encuentre $v(0, 1)$ y $v(0, 4)$.
(b) ¿Qué le dicen sus respuestas a la parte (a) acerca de la circulación sanguínea en esta arteria?
(c) Haga una tabla de valores de $v(r) = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.



74. Tamaño de la pupila Cuando aumenta la brillantez x de una fuente de luz, el ojo reacciona al disminuir el radio R de la pupila. La dependencia de R en x está dada por la función

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

donde R se mide en milímetros y x se mide en unidades de brillantez apropiadas.
(a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.
(b) Haga una tabla de valores de $R(x)$.



75. Relatividad Según la Teoría de la Relatividad, la longitud L de un cuerpo es una función de su velocidad v con respecto a un observador. Para un cuerpo cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz (300,000 km/s).
(a) Encuentre $L(0.5c)$, $L(0.75c)$ y $L(0.9c)$.
(b) ¿Cómo cambia la longitud de un cuerpo cuando aumenta su velocidad?

76. Impuesto sobre la renta En cierto país, el impuesto sobre la renta T se valora de acuerdo con la siguiente función de ingreso x:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 10{,}000 \\ 0.08x & \text{si } 10{,}000 < x \le 20{,}000 \\ 1600 + 0.15x & \text{si } 20{,}000 < x \end{cases}$$

(a) Encuentre $T(5{,}000)$, $T(12{,}000)$, y $T(25{,}000)$.
(b) ¿Qué representan sus repuestas en el inciso (a)?

77. Compras por Internet Una librería de ventas por Internet cobra \$15 por envío de pedidos de menos de \$100 pero no cobra nada por pedidos de \$100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x del libro comprado, dado por

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{si } x < 100 \\ x & \text{si } x \ge 100 \end{cases}$$

(a) Encuentre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ y $C(105)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

78. Costo de una estancia en hotel Una cadena hotelera cobra \$75 por noche por las primeras dos noches y \$50 por cada noche adicional de estancia. El costo total T es una función del número de noches x que permanezca un huésped.

(a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por tramos.

$$T(x) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \boxed{} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(b) Encuentre $T(2)$, $T(3)$ y $T(5)$.
(c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

79. Boleta de infracción por rebasar límite de velocidad En cierto estado, la máxima velocidad permitida en autopistas es de 65 mi/h, y la mínima es 40 mi/h. La multa F por violar estos límites es de $15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

(a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por partes, donde x es la velocidad a la cual una persona está viajando.

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } 0 < x < 40 \\ \boxed{} & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ \boxed{} & \text{si } x > 65 \end{cases}$$

(b) Encuentre $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$.
(c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

80. Altura de césped El propietario de una casa poda el césped en la tarde de todos los miércoles. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo en el curso de un período de 4 semanas que empieza un domingo.

81. Cambio de temperatura Una persona coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. A continuación, saca el pastel y lo deja enfriar antes de consumirlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

82. Cambio diario de temperatura Las lecturas de temperatura T (en °F) fueron registradas cada 2 horas de la medianoche al mediodía en Atlanta, Georgia, el 18 de marzo de 1996. El tiempo t se midió en horas desde la medianoche. Trace una gráfica aproximada de T como función de t.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	58	57	53	50	51	57	61

83. Crecimiento poblacional La población P (en miles) de San José, California, de 1988 a 2000 se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mediados de año.) Trace una gráfica aproximada de P como función de t.

t	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
P	733	782	800	817	838	861	895

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

84. Ejemplos de funciones Al principio de esta sección estudiamos tres ejemplos de funciones ordinarias y frecuentes: la estatura es función de la edad, la temperatura es función de la fecha y el costo del porte es función del peso. Dé otros tres ejemplos de funciones de nuestra vida diaria.

85. Cuatro formas de representar una función En el cuadro de la página 148 representamos cuatro funciones diferentes verbal, algebraica, visual y numéricamente. Considere una función que pueda representarse en las cuatro formas y escriba las cuatro representaciones.

2.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

Graficar funciones por localización de puntos ▶ Graficar funciones con calculadora graficadora ▶ Graficar funciones definidas por tramos ▶ La prueba de la recta vertical ▶ Ecuaciones que definen funciones

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica. En esta sección investigamos con más detalle el concepto de graficar funciones.

▼ Graficar funciones por localización de puntos

Para graficar una función f, localizamos los puntos $(x, f(x))$ en un plano de coordenadas. En otras palabras, localizamos los puntos (x, y) cuya coordenada x es una entrada y cuya coordenada y es la correspondiente salida de la función.

1.10 RECTAS

Pendiente de una recta ▶ Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta ▶ Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta ▶ Rectas verticales y horizontales ▶ Ecuación general de una recta ▶ Rectas paralelas y perpendiculares ▶ Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

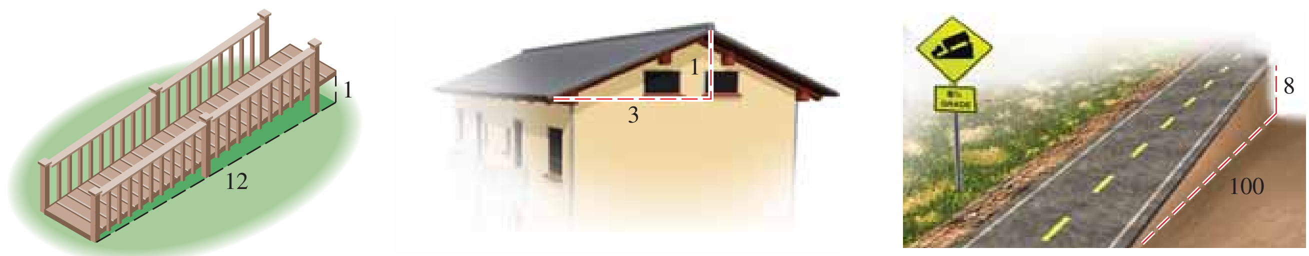
En esta sección encontramos ecuaciones para rectas que se encuentren en un plano de coordenadas. Las ecuaciones dependerán de cómo esté inclinada la recta, por lo que empezamos por estudiar el concepto de pendiente.

▼ Pendiente de una recta

Primero necesitamos una forma de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Definimos el *corrimiento* como la distancia que nos movemos a la derecha y la *elevación* como la distancia correspondiente que la recta sube (o baja). La *pendiente* de una recta es la relación entre la elevación y el corrimiento:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}}$$

La Figura 1 muestra situaciones en las que la pendiente es importante. Los carpinteros usan el término *inclinación* para la pendiente de un techo o una escalera; el término *pendiente* se usa para la pendiente de una carretera.



Pendiente de una rampa — Pendiente $= \frac{1}{12}$

Inclinación de un techo — Pendiente $= \frac{1}{3}$

Pendiente de una carretera — Pendiente $= \frac{8}{100}$

FIGURA 1

Si una recta está en un plano de coordenadas, entonces el **corrimiento** es el cambio en la coordenada x y la **elevación** es el cambio correspondiente en la coordenada y entre cualesquier dos puntos sobre la recta (vea Figura 2). Esto nos da la siguiente definición de pendiente.

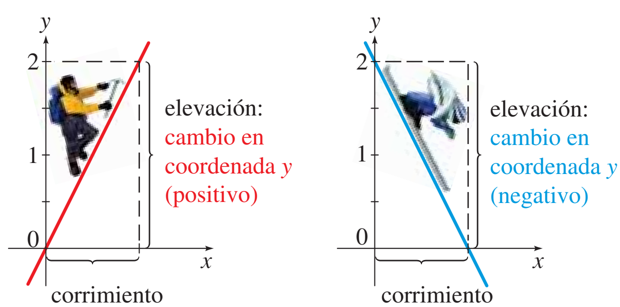


FIGURA 2

PENDIENTE DE UNA RECTA

La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

La pendiente es independiente de cuáles dos puntos se escojan sobre la recta. Podemos ver que esto es verdadero en los triángulos semejantes de la Figura 3:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

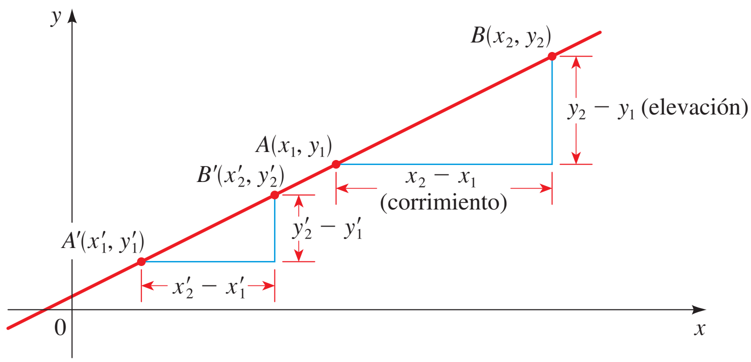


FIGURA 3

La Figura 4 muestra varias rectas marcadas con sus pendientes. Observe que las rectas con pendiente positiva se inclinan hacia arriba a la derecha, mientras que las rectas con pendiente negativa se inclinan hacia abajo a la derecha. Las rectas más inclinadas son aquellas para las que el valor absoluto de la pendiente es muy grande; una recta horizontal tiene pendiente cero.

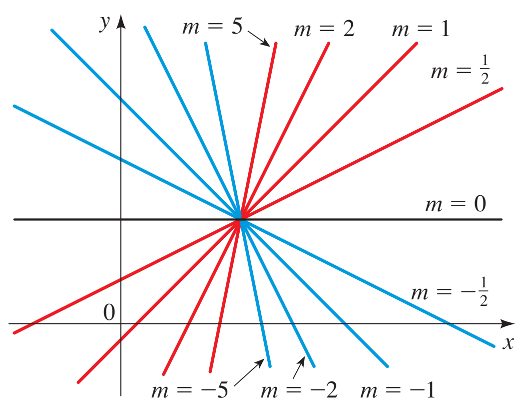


FIGURA 4 Rectas con varias pendientes

EJEMPLO 1 | Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

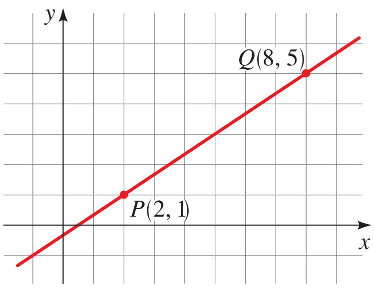


FIGURA 5

SOLUCIÓN Dado que cualesquier dos puntos determinan una recta, sólo una recta pasa por estos dos puntos. De la definición, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto nos dice que por cada 3 unidades que nos movemos a la derecha, la recta sube 2 unidades. La recta está trazada en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

Encontremos ahora la ecuación de la recta que pasa por un punto determinado $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m. Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ está sobre esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m (vea Figura 6), es decir,

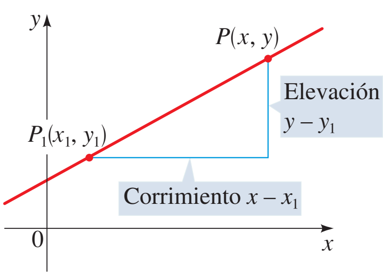


FIGURA 6

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$; nótese que la ecuación también se satisface cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por lo tanto, es una ecuación de la recta dada.

FORMA PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 2 | Hallar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados

(a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.

(b) Trace la recta.

SOLUCIÓN

(a) Usando la forma punto-pendiente con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos la ecuación de la recta como

$$y + 3 = -\tfrac{1}{2}(x - 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{1}{2}\text{, punto } (1, -3)$$

$$2y + 6 = -x + 1 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$x + 2y + 5 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

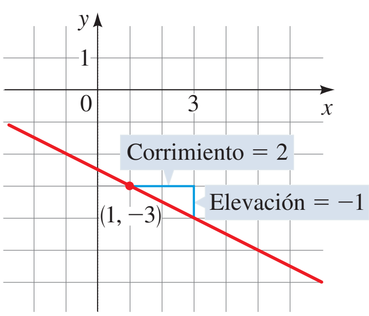


FIGURA 7

(b) El hecho de que la pendiente es $-\frac{1}{2}$ nos dice que cuando nos movemos 2 unidades a la derecha, la recta baja 1 unidad. Esto hace posible que tracemos la recta de la Figura 7.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

EJEMPLO 3 | Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos determinados

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Podemos usar *ya sea* el punto $(-1, 2)$ *o* el punto $(3, -4)$, en la ecuación punto-pendiente. Terminaremos con la misma respuesta final.

Usando la forma punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{3}{2}, \text{ punto } (-1, 2)$$
$$2y - 4 = -3x - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$
$$3x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

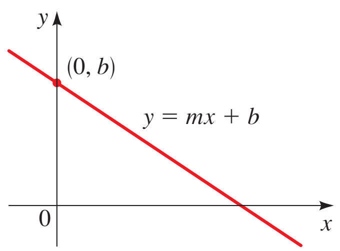


FIGURA 8

Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta

Suponga que una recta no vertical tiene pendiente m y a b como punto de intersección con el eje y (vea Figura 8). Esto significa que la recta cruza el eje y en el punto $(0, b)$, de modo que la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con $x = 0$ y $y = 0$, se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica a $y = mx + b$, que se denomina **forma pendiente-punto de intersección** de la ecuación de una recta.

FORMA PENDIENTE-PUNTO DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y es

$$y = mx + b$$

EJEMPLO 4 | Rectas en forma de pendiente e intersección

(a) Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y de -2.

(b) Encuentre la pendiente e intersección y de la recta $3y - 2x = 1$.

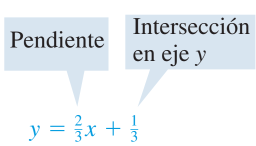
SOLUCIÓN

(a) Como $m = 3$ y $b = -2$, de la forma de pendiente-punto de intersección de la ecuación de una recta obtenemos

$$y = 3x - 2$$

(b) Primero escribimos la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$3y - 2x = 1$$
$$3y = 2x + 1 \qquad \text{Sume } 2x$$
$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$



De la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección en el eje y es $b = \frac{1}{3}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **47**

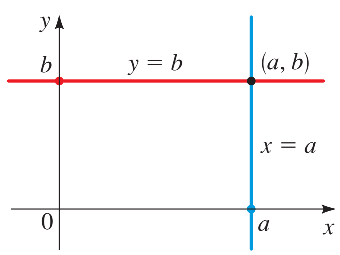


FIGURA 9

Rectas verticales y horizontales

Si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es el punto de intersección con el eje y (vea Figura 9). Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x, porque la coordenada x de todo punto en la recta es a.

RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

Una ecuación de la recta vertical que pasa por (a, b) es $x = a$.

Una ecuación de la recta horizontal que pasa por (a, b) es $y = b$.

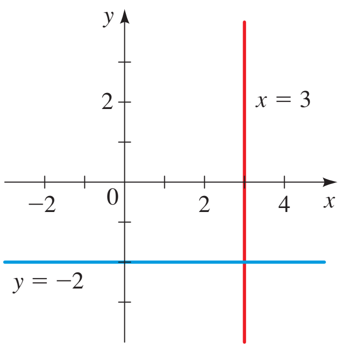


FIGURA 10

EJEMPLO 5 | Rectas verticales y horizontales

(a) Una ecuación para la recta vertical que pasa por (3, 5) es $x = 3$.

(b) La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección 3 en el eje x.

(c) Una ecuación para la recta horizontal que pasa por $(8, -2)$ es $y = -2$.

(d) La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una recta horizontal con intersección -2 en el eje y.

Las rectas están graficadas en la Figura 10.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **33**

Ecuación general de una recta

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes y A y B no son 0 ambas. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

- Una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$, que es una ecuación lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o $x - a = 0$, que es una ecuación lineal con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

  A la inversa, la gráfica de una ecuación lineal es una recta.

- Si $B \neq 0$, la ecuación se convierte en

  $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \text{Divida por } B$$

  y ésta es la forma de pendiente-intersección de la ecuación de una recta (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).

- Si $B = 0$, la ecuación se convierte en

  $$Ax + C = 0 \qquad \text{Haga } B = 0$$

  o $x = -C/A$, que representa una recta vertical.

Hemos demostrado lo siguiente.

EUCACIÓN GENERAL DE UNA RECTA

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A, B \text{ no son cero ambas})$$

es una recta. A la inversa, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

EJEMPLO 6 | Graficar una ecuación lineal

Trace la gráfica de la ecuación $2x - 3y - 12 = 0$.

SOLUCIÓN 1 Como la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para trazar la gráfica, es suficiente hallar dos puntos cualesquiera en la recta. Los puntos de intersección son los más fáciles de hallar.

Punto de intersección con x: Sustituya $y = 0$, para obtener $2x - 12 = 0$, por lo que $x = 6$

Punto de intersección con y: Sustituya $x = 0$, para obtener $-3y - 12 = 0$, por lo que $y = -4$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica de la Figura 11.

SOLUCIÓN 2 Escribimos la ecuación en forma pendiente-intersección:

$$
\begin{aligned}
2x - 3y - 12 &= 0 \\
2x - 3y &= 12 && \text{Sume 12} \\
-3y &= -2x + 12 && \text{Reste } 2x \\
y &= \tfrac{2}{3}x - 4 && \text{Divida entre } -3
\end{aligned}
$$

Esta ecuación está en la forma $y = mx + b$, por lo que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección y es $b = -4$. Para trazar la gráfica, localizamos el punto de intersección con el eje y y nos movemos 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba, como se muestra en la Figura 12.

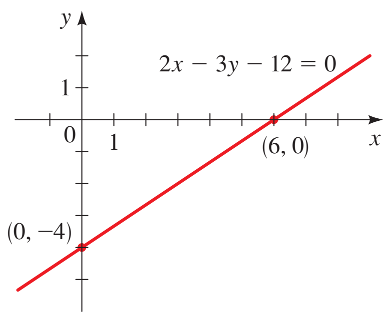


FIGURA 11

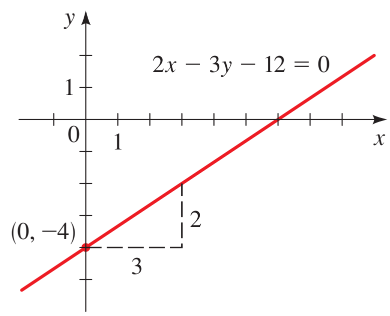


FIGURA 12

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53

Rectas paralelas y perpendiculares

Como la pendiente mide la inclinación de una recta, parece razonable que las rectas paralelas deban tener la misma pendiente. De hecho, podemos demostrar esto.

RECTAS PARALELAS

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

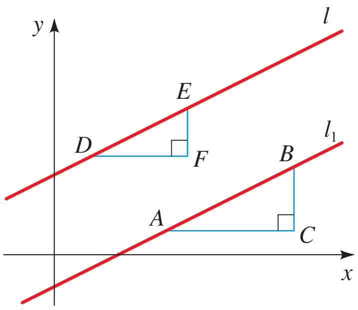


FIGURA 13

DEMOSTRACIÓN Consideremos que las rectas l1 y l2 de la Figura 13 tienen pendientes m_1 y m_2. Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectos ABC y DEF son semejantes, por lo que

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, F)} = m_2$$

A la inversa, si las pendientes son iguales, entonces los triángulos serán semejantes, por lo que $\angle BAC = \angle EDF$ y las rectas son paralelas.

EJEMPLO 7 | Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN Primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma de pendiente-intersección.

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 5 &= 0 \\ 6y &= -4x - 5 && \text{Reste } 4x + 5 \\ y &= -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6} && \text{Divida entre 6} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Como la recta requerida es paralela a la recta dada, también tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, obtenemos

$$\begin{aligned} y - 2 &= -\tfrac{2}{3}(x - 5) && \text{Pendiente } m = -\tfrac{2}{3}, \text{ punto } (5, 2) \\ 3y - 6 &= -2x + 10 && \text{Multiplique por 3} \\ 2x + 3y - 16 &= 0 && \text{Reacomode} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta requerida es $2x + 3y - 16 = 0$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como la de las rectas paralelas.

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$, es decir, sus pendientes son recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).

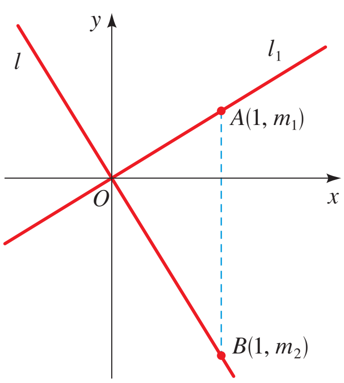


FIGURA 14

DEMOSTRACIÓN En la Figura 14 mostramos dos rectas que se cruzan en el origen. (Si las rectas se cruzan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cruzan en el origen. Estas rectas tienen las mismas pendientes que las rectas originales.

Si las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2, entonces sus ecuaciones son $y = m_1 x$ y $y = m_2 x$. Observe que $A(1, m_1)$ está sobre l_1 y $B(1, m_2)$ está sobre l_2. Por el Teorema de Pitágoras y su inverso (vea página 219) $OA \perp OB$ si y sólo si

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2$$

Por la Fórmula de la Distancia, esto se convierte en

$$\begin{aligned} (1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) &= (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2 \\ 2 + m_1^2 + m_2^2 &= m_2^2 - 2m_1 m_2 + m_1^2 \\ 2 &= -2m_1 m_2 \\ m_1 m_2 &= -1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 | Rectas perpendiculares

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

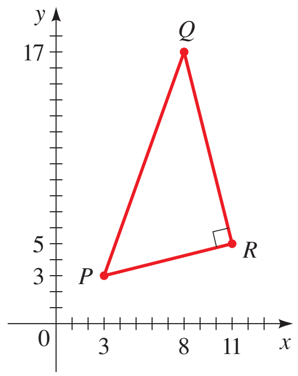


FIGURA 15

SOLUCIÓN Las pendientes de las rectas que contienen a PR y QR son, respectivamente,

$$m_1 = \frac{5-3}{11-3} = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{5-17}{11-8} = -4$$

Como $m_1 m_2 = -1$, estas rectas son perpendiculares, de modo que PQR es un triángulo rectángulo que aparece en la Figura 15.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57**

EJEMPLO 9 | Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen.

SOLUCIÓN En el Ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Entonces, la pendiente de una recta perpendicular es el recíproco negativo, es decir, $\frac{3}{2}$. Como la recta pedida pasa por (0, 0), la forma punto-pendiente da

$$y - 0 = \tfrac{3}{2}(x - 0) \qquad \text{Pendiente } m = \tfrac{3}{2}, \text{ punto } (0, 0)$$

$$y = \tfrac{3}{2}x \qquad \text{Simplifique}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 10 | Graficar una familia de rectas

Use una calculadora graficadora para graficar la familia de rectas

$$y = 0.5x + b$$

para $b = -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Qué propiedad comparten las rectas?

SOLUCIÓN Las rectas están graficadas en la Figura 16 en el rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-6, 6]$. Las rectas tienen todas ellas la misma pendiente, por lo que son paralelas.

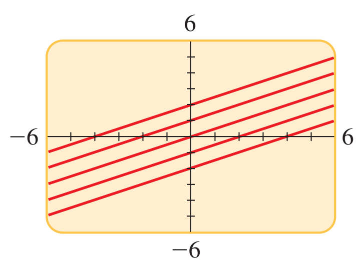


FIGURA 16 $y = 0.5x + b$

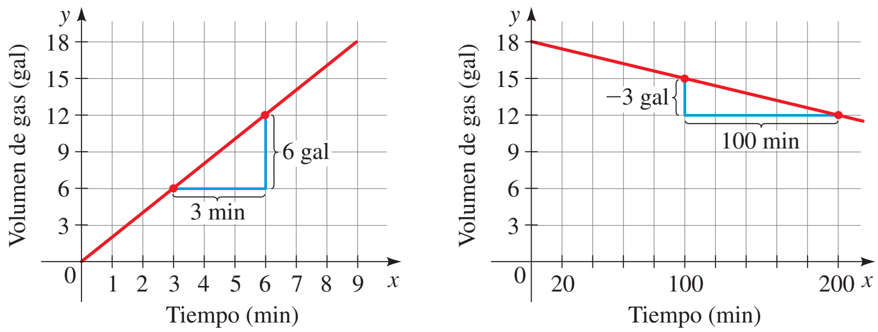
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

▼ Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

Cuando se usa una recta para modelar la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **rapidez de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 17(a) en la página siguiente da la cantidad de gas en un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$m = \frac{6 \text{ galones}}{3 \text{ minutos}} = 2 \text{ gal/min}$$

La pendiente es la *rapidez* a la que se está llenando el tanque, 2 galones por minuto. En la Figura 17(b) el tanque se está drenando con una *rapidez* de 0.03 galones por minuto y la pendiente es -0.03.



(a) Tanque llenado a 2 gal/min
La pendiente de la recta es 2

(b) Tanque drenado a 0.03 gal/min
La pendiente de la recta es -0.03

FIGURA 17

Los siguientes dos ejemplos dan otras situaciones en las que la pendiente de una recta es una rapidez de cambio.

EJEMPLO 11 | Pendiente como rapidez de cambio

Una presa se construye en un río para crear un estanque. El nivel de agua w del estanque está dado por la ecuación

$$w = 4.5t + 28$$

donde t es el número de años desde que se construyó la presa y w se mide en pies.

(a) Trace la gráfica de esta ecuación.

(b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección w de esta gráfica?

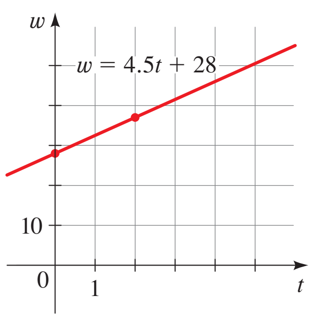


FIGURA 18

SOLUCIÓN

(a) Esta ecuación es lineal, por lo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, localizamos dos puntos que estén sobre la gráfica y trazamos una recta que pase por ellos.

Cuando $t = 0$, entonces $w = 4.5(0) + 28 = 28$, por lo que $(0, 28)$ está sobre la recta.

Cuando $t = 2$, entonces $w = 4.5(2) + 28 = 37$, por lo que $(2, 37)$ está sobre la recta.

La recta determinada por esos puntos se muestra en la figura 18.

(b) La pendiente es $m = 4.5$; representa la rapidez de cambio del nivel de agua con respecto al tiempo. Esto significa que el nivel de agua *aumenta* 4.5 pies por año. El punto de intersección w es 28 y se presenta cuando $t = 0$, por lo que representa el nivel de agua cuando la presa se construyó.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

EJEMPLO 12 | Relación lineal entre temperatura y elevación

(a) A medida que el aire seco sube, se dilata y se enfría. Si la temperatura al nivel del suelo es de 20°C y la temperatura a una altitud de 1 km es 10°C, exprese la temperatura T (en °C) en términos de la altitud h (en km). (Suponga que la relación entre T y H es lineal.)

(b) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa su pendiente?

(c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

SOLUCIÓN

(a) Como estamos suponiendo una relación lineal entre T y h, la ecuación debe ser de la forma

$$T = mh + b$$

donde m y b son constantes. Cuando $h = 0$, nos dicen que $T = 20$, de modo que

$$20 = m(0) + b$$
$$b = 20$$

Por lo tanto, tenemos

$$T = mh + 20$$

Cuando $h = 1$, tenemos $T = 10$ y entonces

$$10 = m(1) + 20$$
$$m = 10 - 20 = -10$$

La expresión requerida es

$$T = -10h + 20$$

(b) La gráfica está trazada en la Figura 19. La pendiente es $m = -10$ºC/km, y ésta representa la rapidez de cambio de temperatura con respecto a la distancia arriba del suelo. En consecuencia, la temperatura *disminuye* 10ºC por kilómetro de altitud.

(c) A una altitud de $h = 2.5$ km la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5\,°\text{C}$$

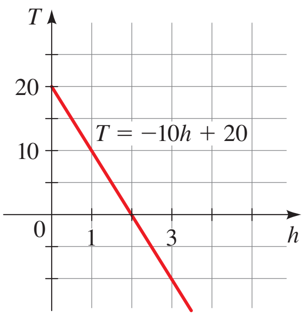


FIGURA 19

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **73**

1.10 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Encontramos la "inclinación", o pendiente, de una recta que pasa por dos puntos al dividir la diferencia en las coordenadas ____ de estos puntos entre la diferencia en las coordenadas ____. Entonces, la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (2, 5) tiene pendiente ________.

2. Una recta tiene la ecuación $y = 3x + 2$.
   (a) Esta recta tiene pendiente ______.
   (b) Cualquier recta paralela a esta recta tiene pendiente____.
   (c) Cualquier recta perpendicular a esta recta tiene pendiente ___.

3. La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (1, 2) es______.

4. **(a)** La pendiente de una recta horizontal es____. La ecuación de la recta horizontal que pasa por (2, 3) es______.
   (b) La pendiente de una recta vertical es_____. La ecuación de la recta vertical que pasa por (2, 3) es_____.

HABILIDADES

5-12 ■ Encuentre la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

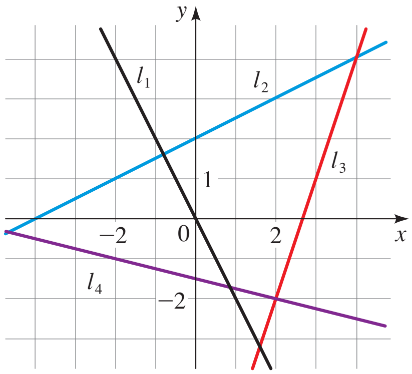
5. $P(0, 0)$, $Q(4, 2)$　**6.** $P(0, 0)$, $Q(2, -6)$

7. $P(2, 2)$, $Q(-10, 0)$　**8.** $P(1, 2)$, $Q(3, 3)$

9. $P(2, 4)$, $Q(4, 3)$　**10.** $P(2, -5)$, $Q(-4, 3)$

11. $P(1, -3)$, $Q(-1, 6)$　**12.** $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

13. Encuentre las pendientes de las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 en la figura siguiente.

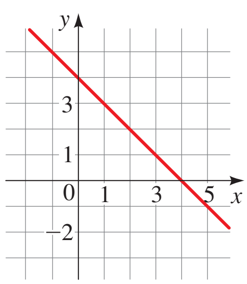


14. **(a)** Trace rectas que pasen por (0, 0) con pendientes 1, 0, $\frac{1}{2}$, 2 y -1.

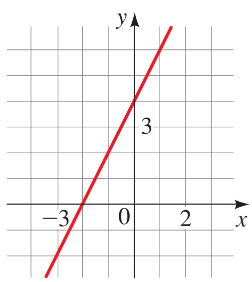
(b) Trace rectas que pasen por (0, 0) con pendientes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ y 3.

15-18 ■ Encuentre la ecuación para la recta cuya gráfica está trazada.

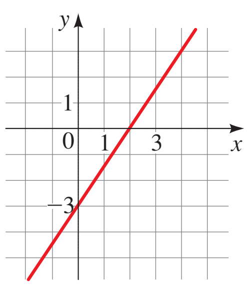
15.



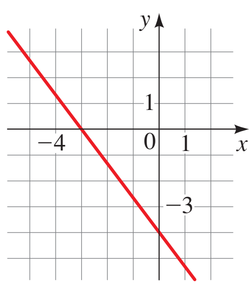
16.



17.



18.



19-38 ■ Encuentre la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

19. Pasa por (2, 3), pendiente 5

20. Pasa por $(-2, 4)$, pendiente -1

21. Pasa por (1, 7), pendiente $\frac{2}{3}$

22. Pasa por $(-3, -5)$, pendiente $-\frac{7}{2}$

23. Pasa por (2, 1) y (1, 6)

24. Pasa por $(-1, -2)$ y (4, 3)

25. Pendiente 3; intersección en y es -2

26. Pendiente $\frac{2}{5}$; intersección en y es 4

27. Intersección en x es 1; intersección en y es -3

28. Intersección en x es -8; intersección en y es 6

29. Pasa por (4, 5); paralela al eje x

30. Pasa por (4, 5); paralela al eje y

31. Pasa por $(1, -6)$; paralela a la recta $x + 2y = 6$

32. Intersección en y es 6; paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

33. Pasa por $(-1, 2)$; paralela a la recta $x = 5$

34. Pasa por (2, 6); perpendicular a la recta $y = 1$

35. Pasa por $(-1, -2)$; perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$

36. Pasa por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$; perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

37. Pasa por (1, 7); paralela a la recta que pasa por (2, 5) y $(-2, 1)$

38. Pasa por $(-2, -11)$; perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y $(5, -1)$

39. **(a)** Trace la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el punto $(-2, 1)$

(b) Encuentre la ecuación para esta recta.

40. **(a)** Trace la recta con pendiente -2 que pasa por el punto $(4, -1)$

(b) Encuentre la ecuación para esta recta.

41-44 ■ Use calculadora graficadora para graficar la familia de rectas dada en el mismo rectángulo de vista. ¿Qué tienen en común las rectas?

41. $y = -2x + b$ para $b = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6$

42. $y = mx - 3$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

43. $y = m(x - 3)$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

44. $y = 2 + m(x + 3)$ para $m = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm$

45-56 ■ Encuentre la pendiente y el punto de intersección y de la recta y trace su gráfica.

45. $x + y = 3$

46. $3x - 2y = 12$

47. $x + 3y = 0$

48. $2x - 5y = 0$

49. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$

50. $-3x - 5y + 30 = 0$

51. $y = 4$

52. $x = -5$

53. $3x - 4y = 12$

54. $4y + 8 = 0$

55. $3x + 4y - 1 = 0$

56. $4x + 5y = 10$

57. Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.

58. Use pendientes para demostrar que $A(-3, -1)$, $B(3, 3)$ y $C(-9, 8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

59. Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son vértices de un rectángulo.

60. Use pendientes para determinar si los puntos dados son colineales (están sobre una recta).

(a) (1, 1), (3, 9), (6, 21)
(b) $(-1, 3)$, (1, 7), (4, 15)

61. Encuentre una ecuación del bisector perpendicular del segmento de recta que une los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$

62. Encuentre el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta

$$2y + 3x - 6 = 0$$

63. **(a)** Demuestre que si los puntos de intersección x y y de una recta son números diferentes de cero a y b, entonces la ecuación de la recta se puede escribir en la forma

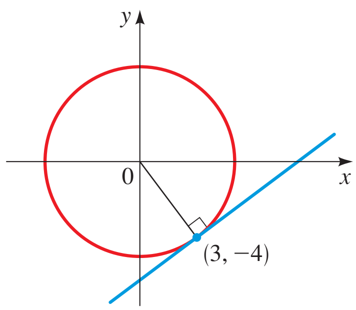
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ésta se llama **forma dos puntos de intersección** de la ecuación de una recta.

(b) Use la parte (a) para hallar la ecuación de la recta cuyo punto de intersección x es 6 y cuyo punto de intersección y es -8.

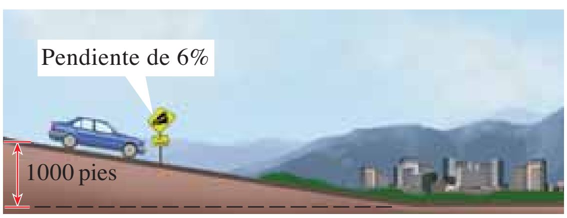
64. **(a)** Encuentre la ecuación para la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$. (Vea la figura.)

(b) ¿En qué otro punto sobre la circcunferencia es que una recta tangente será paralela a la recta tangente de la parte (a)?



APLICACIONES

65. **Pendiente de una carretera** Al poniente de Albuquerque, Nuevo México, la Ruta 40 que se dirige al oriente es recta y con un agudo descenso hacia la ciudad. La carretera tiene una pendiente del 6%, lo cual significa que su pendiente es $-\frac{6}{100}$. Manejando en esta carretera, observa por señales de elevación que usted ha descendido una distancia de 1000 pies. ¿Cuál es el cambio en su distancia horizontal?



66. **Calentamiento global** Algunos científicos piensan que el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra ha estado subiendo constantemente. El promedio de la temperatura de la superficie se puede modelar con

$$T = 0.02t + 15.0$$

donde T es la temperatura en ºC y t es años desde 1950.

(a) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección T?

(b) Use la ecuación para pronosticar el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra en 2050.

67. **Dosis de medicamentos** Si la dosis recomendada a un adulto para un medicamento es D (en mg), entonces, para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a, los farmacéuticos usan la ecuación

$$c = 0.0417D(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es 200 mg.

(a) Encuentre la pendiente. ¿Qué representa ésta?

(b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

68. **Mercado de segunda mano** La gerente de un mercado de segunda mano en fin de semana sabe, por experiencia del pasado, que si ella cobra x dólares por la renta de espacio en el mercado de segunda mano, entonces el número y de espacios que ella renta está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.

(a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal. (Recuerde que el cargo por renta de espacio, así como el número de espacios rentados, deben ser cantidades no negativas ambas.)

(b) ¿Qué representan la pendiente, el punto de intersección y y el punto de intersección x de la gráfica?

69. **Costo de producción** Un pequeño fabricante de enseres electrodomésticos encuentra que si produce x hornos tostadores por mes, su costo de producción está dado por la ecuación

$$y = 6x + 3000$$

(donde y se mide en dólares).

(a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

(b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?

70. **Escalas de temperatura** La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

(a) Complete la tabla para comparar las dos escalas a los valores dados.

(b) Encuentre la temperatura a la que las escalas son iguales. [*Sugerencia:* Suponga que a es la temperatura a la que las escalas son iguales. Haga $F = a$ y $C = a$ y a continuación despeje a.]

C	*F*
−30°	
−20°	
−10°	
0°	
	50°
	68°
	86°

71. **Grillos y temperatura** Los biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 120 chirridos por minuto a 70ºF y 168 chirridos por minuto a 80ºF.

(a) Encuentre la ecuación lineal que relacione la temperatura t y el número de chirridos por minuto n.

(b) Si los grillos están chirriando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

72. **Depreciación** Un pequeño negocio compra una computadora en $4000. Después de 4 años el valor de la computadora se espera que sea de $200. Para fines de contabilidad, el negocio usa *depreciación lineal* para evaluar el valor de la computadora en un tiempo determinado.

Esto significa que si V es el valor de la computadora en el tiempo t, entonces se usa una ecuación lineal para relacionar V y t.

(a) Encuentre una ecuación lineal que relacione V y t.

(b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

(c) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección V de la gráfica?

(d) Encuentre el valor depreciado de la computadora 3 años a partir de la fecha de compra.

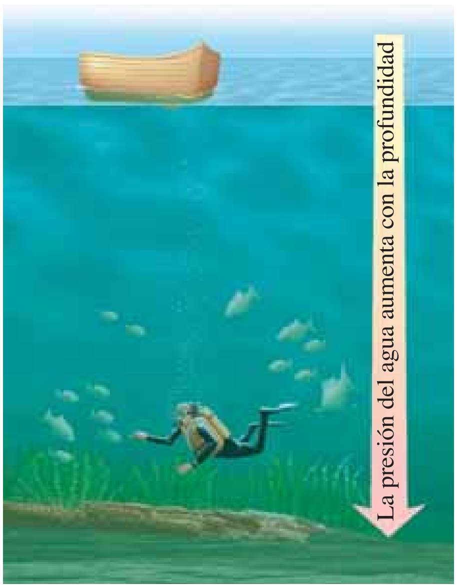
73. Presión y profundidad En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la del aire que está sobre el agua, 15 lb/pulg.^{2}. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 4.34 lb/pulg.^{2} por cada 10 pies de descenso.

(a) Encuentre una ecuación para la relación entre presión y profundidad debajo de la superficie del océano.

(b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

(c) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?

(d) ¿A qué profundidad es de 100 lb/pulg.^{2} la presión?



74. Distancia, rapidez y tiempo Jason y Debbie salen de Detroit a las 2:00 p.m. y manejan a una rapidez constante, viajando hacia al poniente en la carretera I−90. Pasan Ann Arbor, a 40 millas de Detroit, a las 2:50 p.m.

(a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.

(b) Trace la gráfica de la ecuación de la parte (a).

(c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

75. Costo de conducir un auto El costo mensual de conducir un auto depende del número de millas recorridas. Lynn encontró que en mayo su costo de conducción fue de \$380 por 480 millas y, en junio, su costo fue de \$460 por 800 millas. Suponga que hay una relación lineal entre el costo mensual C de conducir un auto y la distancia recorrida d.

(a) Encuentre una ecuación lineal que relacione C y d.

(b) Use la parte (a) para predecir el costo de conducir 1500 millas por mes.

(c) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente de la recta?

(d) ¿Qué representa el punto de intersección y de la gráfica?

(e) ¿Por qué una relación lineal es un modelo apropiado para esta situación?

76. Costo de manufactura El gerente de una fábrica de muebles encuentra que cuesta \$2200 manufacturar 100 sillas en un día y \$4800 producir 300 sillas en un día.

(a) Suponiendo que la relación entre el costo y el número de sillas producidas sea lineal, encuentre una ecuación que exprese esta relación. A continuación, grafique la ecuación.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la recta de la parte (a), y qué representa?

(c) ¿Cuál es el punto de intersección y de esta recta, y qué representa?

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

77. ¿Qué significa la pendiente? Suponga que la gráfica de la temperatura exterior en cierto tiempo es una recta. ¿Cómo está cambiando el clima si la pendiente de la recta es positiva? ¿Si es negativa? ¿Y si es cero?

78. Puntos colineales Suponga que nos dan las coordenadas de tres puntos en el plano y se desea ver si están en la misma recta. ¿Cómo se puede hacer esto usando pendientes? ¿Usando la Fórmula de la Distancia? ¿Puede usted considerar otro método?

1.11 MODELOS CON EL USO DE VARIACIONES

Variación directa ▶ Variación inversa ▶ Variación conjunta

Cuando los científicos hablan de un modelo matemático para un fenómeno real, con frecuencia se refieren a una ecuación que describe la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, el modelo podría describir la forma en que la población de una especie animal varía con el tiempo, o el modo en que la presión de un gas varía a medida que cambia la temperatura. En esta sección estudiamos una clase de modelado llamado *variación.*

10.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones ▶ Método de sustitución ▶ Método por eliminación ▶ Método gráfico ▶ El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas ▶ Modelado con sistemas lineales

▼ Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

La gráfica de una ecuación lineal es una recta (vea Sección 1.10).

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal. Una **solución** de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera *cada una* de las ecuaciones. **Resolver** un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema.

Veamos a continuación un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2(3) - 1 = 5$ ✔	$3 + 4(1) = 7$ ✔

La solución también se puede escribir como el par ordenado (3, 1).

Observe que las gráficas de las Ecuaciones 1 y 2 son rectas (vea Figura 1). Como la solución (3, 1) satisface cada una de las ecuaciones, el punto (3, 1) se encuentra en cada recta. Por lo tanto, es el punto de intersección de las dos rectas.

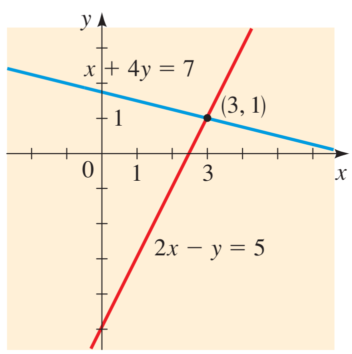


FIGURA 1

▼ Método de sustitución

En el **método de sustitución** empezamos con una ecuación en el sistema y despejamos una incógnita en términos de la otra incógnita. El recuadro siguiente describe el procedimiento.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1. **Despejar una incógnita.** Escoja una ecuación y despeje una incógnita en términos de la otra incógnita.
2. **Sustituir.** Sustituya la expresión hallada en el Paso 1 en la otra ecuación, para obtener una ecuación con una incógnita y, a continuación despeje esa incógnita.
3. **Sustituir a la inversa.** En la expresión hallada en el Paso 1, sustituya el valor hallado en el Paso 2 para despejar la incógnita restante.

EJEMPLO 1 | Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Despejar una incógnita. Despejamos y en la primera ecuación.

$$y = 1 - 2x \qquad \text{Despeje } y \text{ en la Ecuación 1}$$

Sustituir. A continuación sustituimos y en la segunda ecuación y despejamos x.

$$\begin{aligned} 3x + 4(1 - 2x) &= 14 && \text{Sustituya } y = 1 - 2x \text{ en la Ecuación 2} \\ 3x + 4 - 8x &= 14 && \text{Expanda} \\ -5x + 4 &= 14 && \text{Simplifique} \\ -5x &= 10 && \text{Reste 4} \\ x &= -2 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Sustitución. A continuación sustituimos $x = -2$ en la ecuación $y = 1 - 2x$.

$$y = 1 - 2(-2) = 5 \qquad \text{Sustitución}$$

Entonces, $x = -2$ y $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. La Figura 2 muestra que las gráficas de las dos ecuaciones se cruzan en el punto $(-2, 5)$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = -2, y = 5$:

$$\begin{cases} 2(-2) + 5 = 1 \\ 3(-2) + 4(5) = 14 \end{cases} \checkmark$$

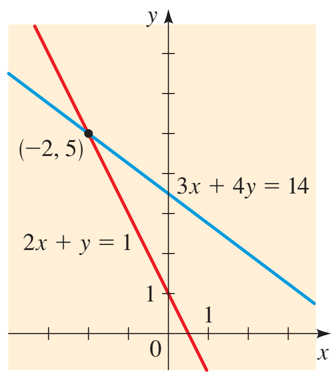


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

Método por eliminación

Para resolver un sistema usando el **método de eliminación**, tratamos de combinar las ecuaciones usando sumas o restas para eliminar una de las incógnitas.

MÉTODO POR ELIMINACIÓN

1. **Ajustar los coeficientes.** Multiplique una o más de las ecuaciones por números apropiados, de modo que el coeficiente de una incógnita de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.
2. **Sumar las ecuaciones.** Sume las dos ecuaciones para eliminar una incógnita y, a continuación, despeje la incógnita restante.
3. **Sustituir a la inversa.** En una de las ecuaciones originales, sustituya el valor hallado en el Paso 2 y despeje la incógnita restante.

EJEMPLO 2 | Método por eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Como los coeficientes de los términos en y son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{array}{rll} \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} & & \text{Sistema} \\ \hline 4x \qquad = 16 & & \text{Sume} \\ x = 4 & & \text{Despeje } x \end{array}$$

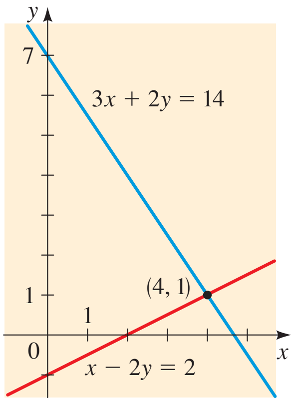


FIGURA 3

A continuación sustituimos $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y despejamos y. Escojamos la segunda ecuación porque se ve más sencilla.

$$\begin{array}{rll} x - 2y = 2 & & \text{Ecuación 2} \\ 4 - 2y = 2 & & \text{Sustituya } x = 4 \text{ en la Ecuación 2} \\ -2y = -2 & & \text{Reste 4} \\ y = 1 & & \text{Despeje } y \end{array}$$

La solución es (4, 1). La Figura 3 muestra que las gráficas de las ecuaciones del sistema se cruzan en el punto (4, 1).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

▼ Método gráfico

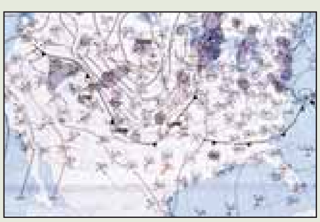
En el **método gráfico** usamos calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones.

MÉTODO GRÁFICO

1. **Graficar cada ecuación.** Exprese cada ecuación en una forma apropiada para la calculadora graficadora para despejar y como función de x. Grafique las ecuaciones en la misma pantalla.
2. **Hallar los puntos de intersección.** Las soluciones son las coordenadas x y y de los puntos de intersección.

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Predicción del clima



© Rachel Epstein/Photo Edit

Los meteorólogos modernos hacen mucho más que pronosticar el clima de mañana. Investigan modelos del clima a largo plazo, el agotamiento de la capa de ozono, el calentamiento global y otros efectos de la actividad humana en el clima. No obstante, el pronóstico diario del clima es todavía una parte importante de la meteorología; su valor es medido por las innumerables vidas humanas salvadas cada año por medio de un pronóstico preciso de huracanes, ventiscas y otros fenómenos catastróficos del clima. A principios del siglo XX unos matemáticos propusieron modelar el clima con ecuaciones que usaban los valores actuales de cientos de variables atmosféricas. Aun cuando este modelo funcionaba en principio, era imposible pronosticar modelos futuros con él por la dificultad para medir con precisión todas las variables y resolver todas las ecuaciones. Hoy en día, nuevos modelos matemáticos, combinados con simulaciones computarizadas de alta velocidad y mejores datos, han mejorado en gran medida el pronóstico del clima y con ello se han evitado numerosos desastres económicos y pérdidas de vida. Los matemáticos de la National Oceanographic and Atmospheric Administration (NOAA) están continuamente investigando mejores métodos para el pronóstico del clima.

EJEMPLO 3 | Método gráfico

Encuentre todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 1.35x - 2.13y = -2.36 \\ 2.16x + 0.32y = 1.06 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Despejando y en términos de x, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 0.63x + 1.11 \\ y = -6.75x + 3.31 \end{cases}$$

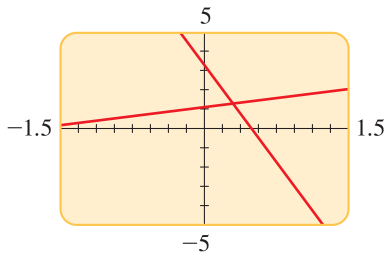


FIGURA 4

donde hemos redondeado los coeficientes a dos decimales. La Figura 4 muestra que las dos rectas se cruzan; en un acercamiento vemos que la solución es aproximadamente (0.30, 1.3).

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **13** Y **49**

El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas

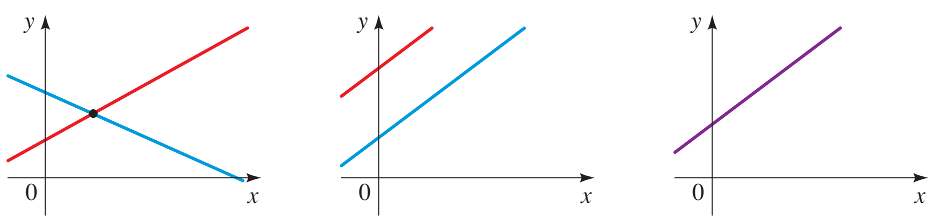
La gráfica de un sistema lineal con dos incógnitas es un par de rectas, de modo que, para resolver gráficamente el sistema, debemos hallar el (los) punto(s) de intersección de las rectas. Dos rectas pueden cruzarse en un solo punto, pueden ser paralelas o pueden coincidir, como se ve en la Figura 5. Por lo tanto, hay tres posibles resultados para resolver el sistema.

NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

Para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera. (Vea Figura 5.)

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene solución es **inconsistente**. Un sistema con un infinito de soluciones se llama **consistente indeterminado**.



(a) Las rectas se cruzan en un solo punto. El sistema tiene una solución.

(b) Las rectas son paralelas y no se cruzan. El sistema no tiene solución.

(c) Las rectas coinciden; las ecuaciones son para la misma recta. El sistema tiene un infinito de soluciones.

FIGURA 5

EJEMPLO 4 | Un sistema lineal con una solución

Resuelva el sistema y grafique las rectas.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & \text{Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

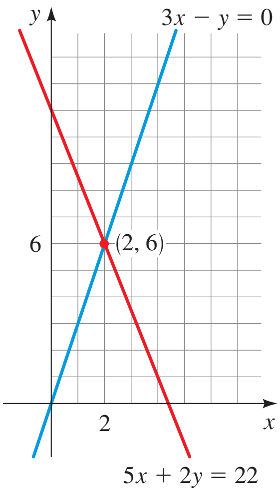


FIGURA 6

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 2, \quad y = 6$:

$$\begin{cases} 3(2) - (6) = 0 \\ 5(2) + 2(6) = 22 \end{cases} \checkmark$$

SOLUCIÓN Eliminamos y de las ecuaciones y despejamos x.

$$\begin{cases} 6x - 2y = 0 & \text{2 × Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 11x \quad &= 22 && \text{Sume} \\ x &= 2 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Ahora sustituimos de nuevo en la primera ecuación y despejamos y:

$$\begin{aligned} 6(2) - 2y &= 0 && \text{Sustituimos de nuevo } x = 2 \\ -2y &= -12 && \text{Restamos } 6 \times 2 = 12 \\ y &= 6 && \text{Despejamos } y \end{aligned}$$

La solución del sistema es el par ordenado (2, 6), es decir,

$$x = 2, \qquad y = 6$$

La gráfica de la Figura 6 muestra que las rectas del sistema se cruzan en el punto (2, 6).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

EJEMPLO 5 | Un sistema lineal sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ -12x + 3y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Esta vez tratamos de hallar una combinación apropiada de las dos ecuaciones para eliminar la variable y. La multiplicación de la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2 da

$$\begin{cases} 24x - 6y = 15 & \text{3 × Ecuación 1} \\ -24x + 6y = 14 & \text{2 × Ecuación 2} \end{cases}$$

$$0 = 29 \qquad \text{Sume}$$

La suma de las dos ecuaciones elimina *tanto x como y* en este caso, y terminamos con $0 = 29$, que es obviamente falso. No importa qué valores asignemos a x y a y, no podemos hacer que este enunciado sea verdadero, de manera que el sistema *no tiene solución*. La Figura 7 muestra que las rectas del sistema son paralelas y no se cruzan. El sistema es inconsistente.

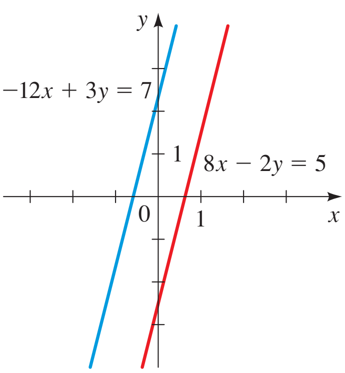


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 6 | Un sistema lineal con un infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 & \text{Ecuación 1} \\ 4x - 8y = 16 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones para eliminar x. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 & \text{4 × Ecuación 1} \\ 12x - 24y = 48 & \text{3 × Ecuación 2} \end{cases}$$

Vemos que las dos ecuaciones del sistema original son simplemente formas diferentes de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta dan

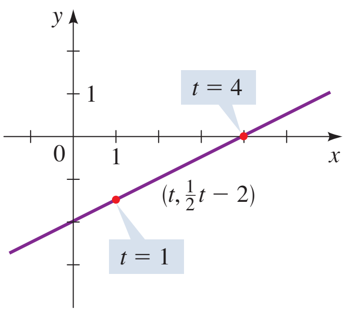


FIGURA 8

una solución del sistema. Escribiendo la ecuación en forma de pendiente e intersección, tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Por lo tanto, si con t representamos cualquier número real, podemos escribir la solución como

$$x = t$$
$$y = \tfrac{1}{2}t - 2$$

También podemos escribir la solución en forma de par ordenado como

$$\left(t, \tfrac{1}{2}t - 2\right)$$

donde t es cualquier número real. El sistema tiene un infinito de soluciones (vea Figura 8).

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **37**

En el Ejemplo 3, para obtener soluciones específicas tenemos que asignar valores a t. Por ejemplo, si $t = 1$, obtenemos la solución $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. si $t = 4$, obtenemos la solución $(4, 0)$. Para todo valor de t obtenemos una solución diferente. (Vea Figura 8.)

Modelado con sistemas lineales

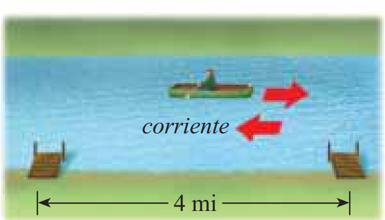
Con frecuencia, cuando usamos ecuaciones para resolver problemas en las ciencias o en otros campos de actividad, obtenemos sistemas como el que acabamos de considerar. Cuando modelamos con sistemas de ecuaciones, usamos las siguientes guías, que son semejantes a las de la Sección 1.6.

GUÍA PARA MODELAR CON SISTEMAS DE ECUACIONES

1. **Identificar las variables.** Identifique las cantidades que el problema pide hallar. Éstas en general se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca notación para las variables (llámelas x y y o con alguna otra letra).
2. **Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de las variables.** Lea otra vez el problema, y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de las variables que haya definido en el Paso 1.
3. **Establezca un sistema de ecuaciones.** Encuentre los datos cruciales del problema que den las relaciones entre las expresiones que haya encontrado en el Paso 2. Establezca un sistema de ecuaciones (o un modelo) que exprese estas relaciones.
4. **Resuelva el sistema e interprete los resultados.** Resuelva el sistema que haya encontrado en el Paso 3, verifique sus soluciones y dé su respuesta final como una frase que conteste la pregunta planteada en el problema.

Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo modelar con sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 7 | Un problema de distancia, rapidez y tiempo



Una mujer rema un bote aguas arriba desde un punto en un río, a otro punto a 4 millas de distancia, en $1\frac{1}{2}$ horas. El viaje de regreso, a favor de la corriente, le toma sólo 45 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que rema con respecto al agua, y con qué velocidad se mueve la corriente?

SOLUCIÓN Identificar las variables. Nos piden hallar la velocidad con la que rema la mujer y la velocidad de la corriente, de modo que hacemos

$$x = \text{velocidad de remar (mi/h)}$$
$$y = \text{velocidad de la corriente (mi/h)}$$

Expresar cantidades desconocidas en términos de la variable. La velocidad de la mujer cuando rema aguas arriba es su velocidad para remar menos la velocidad de la corriente; su velocidad aguas abajo es su velocidad para remar más la velocidad de la corriente. Ahora convertimos esta información al lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Velocidad de remo	x
Velocidad de la corriente	y
Velocidad aguas arriba	$x - y$
Velocidad aguas abajo	$x + y$

Establecer un sistema de ecuaciones. La distancia aguas arriba y aguas abajo es 4 millas, de modo que usando el hecho de que velocidad × tiempo = distancia para los dos tramos del viaje, tenemos

velocidad aguas arriba × tiempo aguas arriba = distancia recorrida

velocidad aguas abajo × tiempo aguas abajo = distancia recorrida

En notación algebraica esto se convierte en las ecuaciones siguientes:

$$(x - y)\tfrac{3}{2} = 4 \qquad \text{Ecuación 1}$$

$$(x + y)\tfrac{3}{4} = 4 \qquad \text{Ecuación 2}$$

(Los tiempos se han convertido a horas, porque estamos expresando la rapidez en millas por *hora*.)

Resolver el sistema. Multiplicamos las ecuaciones por 2 y 4, respectivamente, para despejar los denominadores.

$$\begin{cases} 3x - 3y = 8 & 2 \times \text{Ecuación 1} \\ 3x + 3y = 16 & 4 \times \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

$$6x = 24 \qquad \text{Sume}$$

$$x = 4 \qquad \text{Despeje } x$$

Sustituyendo este valor de x en la primera ecuación (también funciona la segunda) y despejando y, tendremos

$$3(4) - 3y = 8 \qquad \text{Sustituya } x = 4$$

$$-3y = 8 - 12 \qquad \text{Reste 12}$$

$$y = \tfrac{4}{3} \qquad \text{Despeje } y$$

La mujer rema a 4 mi/h, y la corriente se mueve a $1\tfrac{1}{3}$ mi/h.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Velocidad contra la corriente es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{1\frac{1}{2}\text{ h}} = 2\tfrac{2}{3}\text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo − flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} - \tfrac{4}{3}\text{ mi/h} = 2\tfrac{2}{3}\text{ mi/h}$$

Velocidad rio abajo es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{\frac{3}{4}\text{ h}} = 5\tfrac{1}{3}\text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo + flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} + \tfrac{4}{3}\text{ mi/h} = 5\tfrac{1}{3}\text{ mi/h} \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

EJEMPLO 8 | Un problema de mezclas

Un vinatero fortifica vino que contiene 10% de alcohol al agregarle una solución de alcohol al 70%. La mezcla resultante tiene un contenido alcohólico del 16% y llena 1000 botellas de un litro. ¿Cuántos litros (L) del vino y la solución de alcohol usa el vinatero?

SOLUCIÓN Identificar las variables. Como nos piden las cantidades de vino y alcohol, hacemos

$$x = \text{cantidad de vino utilizado (L)}$$

$$y = \text{cantidad de solución de alcohol utilizada (L)}$$

Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de la variable. Del hecho que el vino contiene 10% de alcohol y la solución contiene 70% de alcohol, obtenemos lo siguiente.

En palabras	En álgebra
Cantidad de vino utilizada (L)	x
Cantidad de solución de alcohol utilizada (L)	y
Cantidad de alcohol en vino (L)	$0.10x$
Cantidad de alcohol en solución (L)	$0.70y$

Establecer un sistema de ecuaciones. El volumen de la mezcla debe ser el total de los dos volúmenes que el vinatero mezcla, y

$$x + y = 1000$$

También, la cantidad de alcohol en la mezcla debe ser el total del alcohol aportado por el vino y por la solución de alcohol, es decir,

$$0.10x + 0.70y = (0.16)1000$$

$$0.10x + 0.70y = 160 \qquad \text{Simplifique}$$

$$x + 7y = 1600 \qquad \text{Multiplique por 10 para quitar decimales}$$

En consecuencia, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1000 & \text{Ecuación 1} \\ x + 7y = 1600 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Resolver el sistema. Restando la primera ecuación de la segunda se elimina la variable x y obtenemos

$$6y = 600 \qquad \text{Reste la Ecuación 1 de la Ecuación 2}$$

$$y = 100 \qquad \text{Despeje } y$$

Ahora sustituimos $y = 100$ en la primera ecuación y despejamos x.

$$x + 100 = 1000 \qquad \text{Sustituimos } y = 100$$

$$x = 900 \qquad \text{Despejamos } x$$

El vinatero utiliza 900 L de vino y 100 L de solución de alcohol.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65** ■

10.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

es un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas _________ y _________. Para determinar si $(5, -1)$ es una solución de este sistema, verificamos si $x = 5$ y $y = -1$ satisfacen cada _________ del sistema. ¿Cuáles de las siguientes son soluciones de este sistema?

$$(5, -1), \quad (-1, 3), \quad (2, 1)$$

2. Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puede ser resuelto por el método de _________, el método de _________ o el método _________.

3. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una solución, _________ solución o _________ _________ soluciones.

4. El siguiente es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

La gráfica de la primera ecuación es la misma que la gráfica de la segunda ecuación, de manera que el sistema tiene _________ _________ soluciones. Expresamos estas soluciones escribiendo

$$x = t$$
$$y = \underline{\qquad\quad}$$

donde t es cualquier número real. Algunas de las soluciones de este sistema son $(1, \_\_)$, $(-3, \_\_)$ y $(5, \_\_)$.

HABILIDADES

5-8 ■ Use el método de sustitución para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

5. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

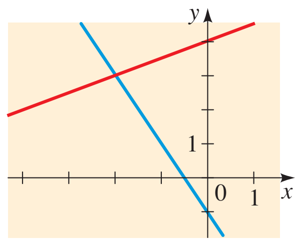
9-12 ■ Use el método de eliminación para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

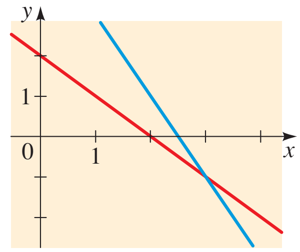
9. $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x + y = 21 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 8x + 4y = 12 \end{cases}$

13-14 ■ Nos dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el (los) punto(s) de intersección de las gráficas resolviendo el sistema.

13. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$





15-20 ■ Grafique cada uno de los sistemas lineales siguientes, ya sea manualmente o con calculadora graficadora. Use la gráfica para determinar si el sistema tiene una solución, no tiene solución o tiene un infinito de soluciones. Si hay exactamente una solución, use la gráfica para hallarla.

15. $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -x + \frac{3}{2}y = 4 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -3x - 9y = 18 \end{cases}$

19. $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -5 \\ 2x - \phantom{\frac{1}{2}}y = 10 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} 12x + 15y = -18 \\ 2x + \frac{5}{2}y = -3 \end{cases}$

21-48 ■ Resuelva el sistema, o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene un infinito de soluciones, expréselas en la forma de par ordenado dado en el Ejemplo 6.

21. $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 8 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} 4x - 3y = 28 \\ 9x - y = -6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} -4x + 12y = 0 \\ 12x + 4y = 160 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} 0.2x - 0.2y = -1.8 \\ -0.3x + 0.5y = 3.3 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 5y = 70 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 9x - 15y = 6 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 14x - 21y = 3 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 25x - 75y = 100 \\ -10x + 30y = -40 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 8s - 3t = -3 \\ 5s - 2t = -1 \end{cases}$

42. $\begin{cases} u - 30v = -5 \\ -3u + 80v = 5 \end{cases}$

43. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + 2y = 10 \end{cases}$

44. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

45. $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 14 \\ 12x - 5y = 10 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 26x - 10y = -4 \\ -0.6x + 1.2y = 3 \end{cases}$

47. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$

48. $\begin{cases} -\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 2x - 10y = -80 \end{cases}$

49-52 ■ Use calculadora graficadora para graficar ambas rectas en el mismo rectángulo de vista. (Observe que debe despejar y en términos de x antes de graficar si usa calculadora graficadora.) Resuelva el sistema redondeado a dos lugares decimales, ya sea con acercamiento y usando `TRACE` o usando la función `Intersect`.

49. $\begin{cases} 0.21x + 3.17y = 9.51 \\ 2.35x - 1.17y = 5.89 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 18.72x - 14.91y = 12.33 \\ 6.21x - 12.92y = 17.82 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2371x - 6552y = 13{,}591 \\ 9815x + 992y = 618{,}555 \end{cases}$

52. $\begin{cases} -435x + 912y = 0 \\ 132x + 455y = 994 \end{cases}$

53-56 ■ Encuentre x y y en términos de a y b.

53. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases} \quad (a \neq 1)$

54. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (a \neq b)$

55. $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases} \quad (a^2 - b^2 \neq 0)$

56. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0, a \neq b)$

APLICACIONES

57. Problema de números Encuentre dos números cuya suma es 34 y cuya diferencia es 10.

58. Problema de números La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más que el doble del más pequeño. Encuentre los números.

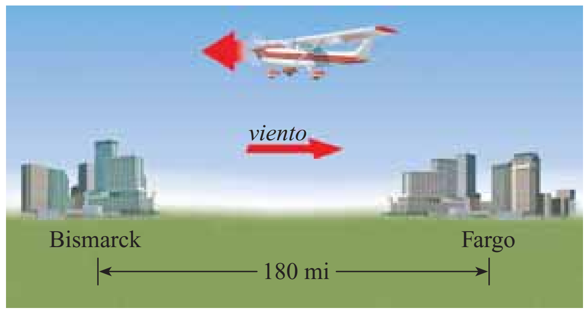
59. Valor de monedas Un hombre tiene 14 monedas en su bolsillo, todas las cuales son de 10 o de 25 centavos. Si el valor total de su cambio es $2.75, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tiene?

60. Precio de entrada El precio de entrada a un parque de diversiones es $1.50 para niños y $4.00 para adultos. En cierto día, 2200 personas entraron al parque, y los precios de entrada recolectados sumaron $5050. ¿Cuántos niños y cuántos adultos entraron?

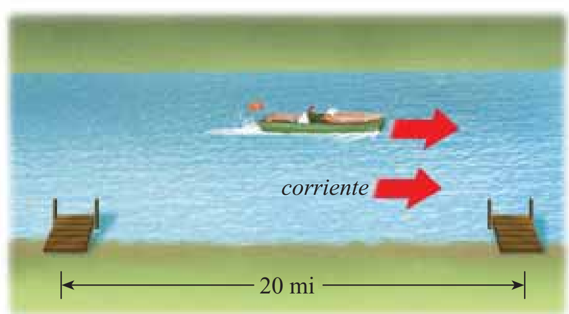
61. Gasolinera Una gasolinera vende gasolina regular en $2.20 el galón y gasolina Premium en $3.00 el galón. Al final del día se vendieron 280 galones de gasolina y los recibos totalizaron $680. ¿Cuántos galones de cada tipo se vendieron?

62. Puesto de frutas Un puesto de frutas vende dos variedades de fresas: estándar y de lujo. Una caja de fresas estándar se vende en $7 y una de lujo se vende en $10. En un día, el puesto vende 135 cajas de fresas en un total de $1100. ¿Cuántas cajas de cada tipo se vendieron?

63. Velocidad de un avión Un hombre vuela en un pequeño avión de Fargo a Bismarck, Dakota del Norte, una distancia de 180 millas. Debido a que hizo el vuelo con un viento de frente, el viaje le lleva 2 horas. En el viaje de regreso, el viento todavía está soplando con la misma velocidad, de modo que el viaje le lleva sólo 1 h 12 min. ¿Cuál es la velocidad del piloto con viento en calma, y con qué velocidad sopla el viento?



64. Velocidad de un bote Un bote en un río navega aguas abajo entre dos puntos, a 20 millas de distancia, en una hora. El viaje de regreso contra la corriente toma $2\frac{1}{2}$ horas. ¿Cuál es la velocidad del bote, y con qué velocidad se mueven las aguas del río?



65. Nutrición Una investigadora realiza un experimento para probar una hipótesis donde intervienen los nutrientes niacina y retinol. Ella alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta diaria de precisamente 32 unidades de niacina y 22,000 unidades de retinol. Ella usa dos tipos de alimentos comerciales en forma de pastillas. El alimento A contiene 0.12 unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo; el alimento B contiene 0.20 unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento les da ella al grupo de ratas diariamente?

66. Mezclas de café Un cliente en una cafetería compra una mezcla de dos clases de café: Kenia, que cuesta \$3.50 la libra, y Sri Lanka, que cuesta \$5.60 la libra. Él compra 3 libras de la mezcla, que le cuestan \$11.55. ¿Cuántas libras de cada clase entraron en la mezcla?

67. Problema de mezclas Un químico tiene dos grandes contenedores de solución de ácido sulfúrico, con diferentes concentraciones de ácido en cada contenedor. La mezcla de 300 mL de la primera solución y 600 mL de la segunda le da una mezcla que es 15% ácida, mientras que si mezcla 100 mL de la primera y 500 mL de la segunda le da una mezcla $12\frac{1}{2}$% ácida. ¿Cuáles son las concentraciones de ácido sulfúrico en los recipientes originales?

68. Problema de mezclas Una bióloga tiene dos soluciones de salmuera, una contiene 5% de sal y otra contiene 20% de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe ella mezclar para obtener 1 L de una solución que contenga 14% de sal?

69. Inversiones Una mujer invierte un total de \$20,000 en dos cuentas, una paga 5% y la otra paga 8% de interés simple al año. El interés anual que ella percibe es \$1180. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

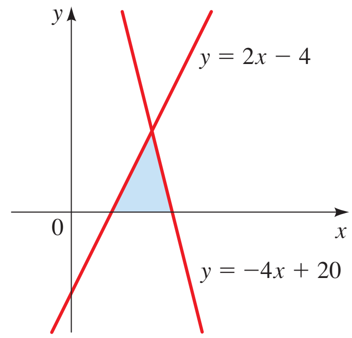
70. Inversiones Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas, una paga 6% y la otra paga 10% de interés simple al año. Él pone el doble en la cuenta que rinde menos porque es de menos riesgo. El interés que él percibe es \$3520. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

71. Distancia, velocidad y tiempo Juan y María salen de su casa al mismo tiempo y en auto se dirigen en direcciones opuestas. Juan maneja a 60 mi/h y viaja 35 millas más que María, quien maneja a 40 mi/h. El viaje de María toma 15 minutos más que a Juan. ¿Durante cuánto tiempo manejan ellos?

72. Ejercicio aeróbico Una mujer se mantiene en forma haciendo ejercicio en bicicleta y corriendo todos los días. El lunes ella pasa $1\frac{1}{2}$ horas en cada una de esas actividades, cubriendo un total de $12\frac{1}{2}$ millas. El martes corre durante 12 minutos y anda en bicicleta 45 minutos, cubriendo un total de 16 millas. Suponiendo que su velocidad para correr y andar en bicicleta no cambian de un día a otro, encuentre esas velocidades.

73. Problema de números La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 7. Cuando los dígitos se invierten, el número aumenta en 27. Encuentre el número.

74. Área de un triángulo Encuentre el área del triángulo que se encuentra en el primer cuadrante (con la base sobre el eje x) y que está limitado por las rectas $y = 2x - 4$ y $y = -4x + 20$.



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

75. La recta de mínimos cuadrados La recta de *mínimos cuadrados* o recta de *regresión* es la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos en el plano. Estudiamos esta recta en el *Enfoque sobre modelado* que sigue al Capítulo 1 (vea página 130.) Mediante cálculo, se puede demostrar que la recta que mejor se ajusta a los n puntos de datos (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . , (x_n, y_n) es la recta $y = ax + b$, donde los coeficientes a y b satisfacen el siguiente par de ecuaciones lineales. (La notación $\sum_{k=1}^{n} x_k$ representa la suma de todas las x. En la Sección 12.1 vea una descripción completa de la notación (Σ).)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)a + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Use estas ecuaciones para hallar la recta de mínimos cuadrados para los siguientes puntos de datos.

$$(1, 3),\quad (2, 5),\quad (3, 6),\quad (5, 6),\quad (7, 9)$$

Trace los puntos y su recta para confirmar que la recta se ajusta bien a estos puntos. Si su calculadora calcula regresión lineal, vea si le da la misma recta que las fórmulas.

10.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON VARIAS INCÓGNITAS

Solución de un sistema lineal ▶ El número de soluciones de un sistema lineal ▶ Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

Una **ecuación lineal con *n* incógnitas** es una ecuación que se puede poner en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y c son números reales, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas. Si sólo tenemos tres o cuatro incógnitas, en general usamos x, y, z y w en lugar de x_1, x_2, x_3, y x_4. Tales ecuaciones se llaman *lineales* porque si tenemos sólo dos incógnitas, la ecuación es $a_1x + a_2y = c$, que es la ecuación de una recta. A continuación veamos algunos ejemplos de ecuaciones con tres incógnitas que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

3.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal ▶ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas ▶ Modelado con funciones cuadráticas

Una función polinomial es una función que está definida por una expresión con polinomios. Entonces una **función polinomial de grado *n*** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Las expresiones de polinomios están definidas en la Sección 1.3.

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Éstas son funciones de la forma $P(x) = a_0$ y $P(x) = a_1 x + a_0$, respectivamente, cuyas gráficas son rectas. En esta sección estudiamos funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

Vemos en esta sección la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

▼ Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal

Para una definición geométrica de parábolas, vea la Sección 11.1.

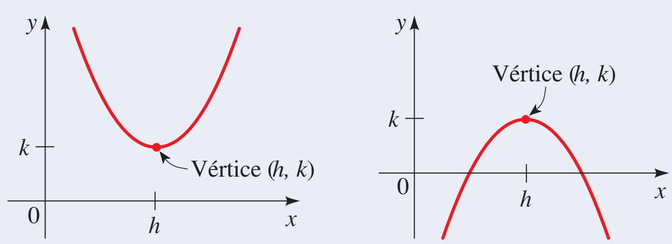
Si tomamos $a = 1$ y $b = c = 0$ en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos la función cuadrática $f(x) = x^2$, cuya gráfica es la parábola graficada en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; puede obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^2$ por las transformaciones dadas en la Sección 2.5.

FORMA NORMAL DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k); la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



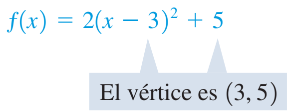
$f(x) = a(x - h)^2 + k, \; a > 0$ $\qquad$ $f(x) = a(x - h)^2 + k, \; a < 0$

EJEMPLO 1 | Forma normal de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

(a) Exprese f en forma normal. $\qquad$ **(b)** Trace la gráfica de f.

Completar el cuadrado se estudia en la Sección 1.5.



SOLUCIÓN

(a) Como el coeficiente de x^2 no es 1, debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen x antes de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 23 && \text{Factorice 2 de los términos en } x \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 2\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 2(x-3)^2 + 5 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

La forma normal es $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

(b) La forma normal nos dice que obtenemos la gráfica de f al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en (3, 5), y la parábola abre hacia arriba. Alargamos la gráfica de la Figura 1 observando que el punto de intersección en y es $f(0) = 23$.

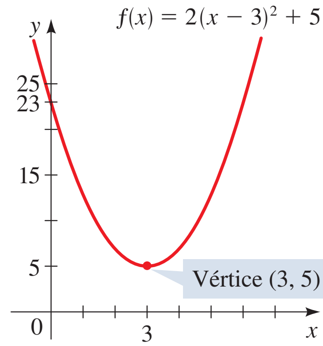


FIGURA 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

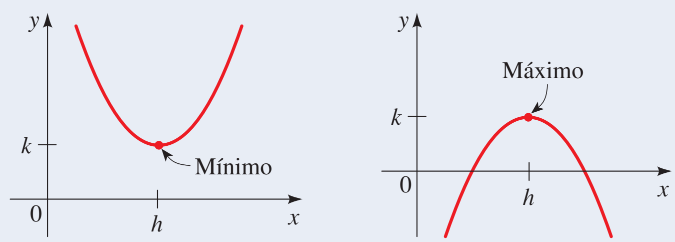
Si una función cuadrática tiene vértice (h, k), entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo. Por ejemplo, la función graficada en la Figura 1 tiene valor mínimo 5 cuando $x = 3$, porque el vértice (3, 5) es el punto más bajo en la gráfica.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x-h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el valor máximo de f es $f(h) = k$.



$f(x) = a(x-h)^2 + k,\ a > 0$ $\quad$ $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ a < 0$

EJEMPLO 2 | Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

(a) Exprese f en forma normal.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre el valor mínimo de f.

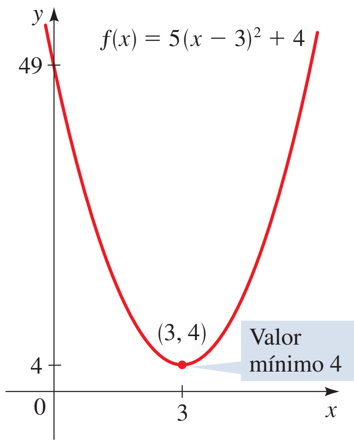


FIGURA 2

SOLUCIÓN

(a) Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de términos en } x \\ &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 5\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 5(x - 3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

(b) La gráfica es la parábola que tiene su vértice en (3, 4) y abre hacia arriba, como se ve en la Figura 2.

(c) Como el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$.

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **25**

EJEMPLO 3 | Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

(a) Exprese f en forma normal.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre el valor máximo de f.

SOLUCIÓN

(a) Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + x + 2 \\ &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice } -1 \text{ de los términos en } x \\ &= -\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) + 2 - (-1)\tfrac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: Sume } \tfrac{1}{4} \text{ dentro de paréntesis, reste } (-1)\tfrac{1}{4} \text{ fuera} \\ &= -\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

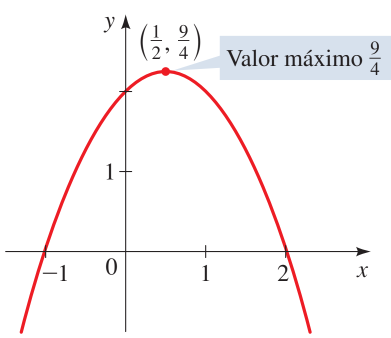


FIGURA 3 Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

(b) De la forma normal vemos que la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y tiene vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Como ayuda para trazar la gráfica, encontramos los puntos de intersección. El punto de intersección en y es $f(0) = 2$. Para hallar los puntos de intersección en x, hacemos $f(x) = 0$ y factorizamos la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 0 && \text{Haga } y = 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Multiplique por } -1 \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Así, los puntos de intersección en x son $x = 2$ y $x = -1$. La gráfica de f se traza en la Figura 3.

(c) Como el coeficiente de x^2 es negativo, f tiene un valor máximo, que es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

Expresar una función cuadrática en forma normal nos ayuda a trazar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si estamos interesados en hallar el valor máximo o mínimo, entonces existe una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorice } a \text{ de los términos en } x \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{Complete el cuadrado: sume } \frac{b^2}{4a^2} \text{ dentro de paréntesis, reste } a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \text{ fuera} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Esta ecuación está en forma normal con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Como el valor máximo o mínimo se presenta en $x = h$, tenemos el siguiente resultado.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

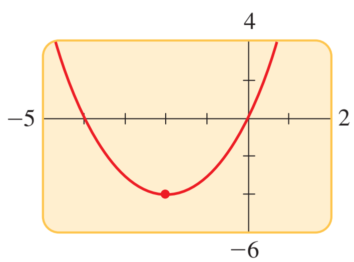
Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

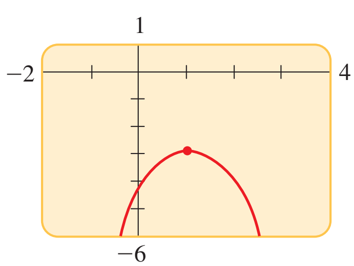
EJEMPLO 4 | Hallar valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Encuentre el valor máximo o mínimo de estas funciones cuadráticas.

(a) $f(x) = x^2 + 4x$ **(b)** $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$



El valor mínimo ocurre en $x = -2$.



El valor máximo ocurre en $x = 1$.

SOLUCIÓN

(a) Ésta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Como $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*.

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$

(b) Ésta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **35** ■

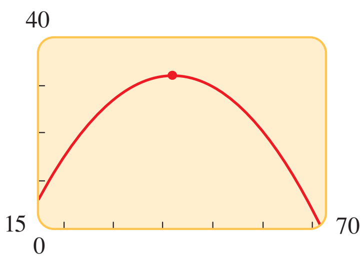
Modelado con funciones cuadráticas

Estudiamos algunos ejemplos de fenómenos reales que son modelados por funciones cuadráticas. Estos ejemplos y los ejercicios de *Aplicación* para esta sección presentan parte de la variedad de situaciones que de manera natural son modelados por funciones cuadráticas.

EJEMPLO 5 | Rendimiento máximo en kilometraje de un auto

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una velocidad relativamente baja. El rendimiento M para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31, \qquad 15 \le s \le 70$$



El rendimiento máximo ocurre a 42 mi/h.

donde s es la rapidez en mi/h y M se mide en mi/gal. ¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué velocidad se obtiene?

SOLUCIÓN La función M es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Entonces, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\left(-\frac{1}{28}\right)} = 42$$

El máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Por lo tanto, el mejor rendimiento del auto es de 32 mi/gal, cuando está corriendo a 42 mi/h.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67**

EJEMPLO 6 | Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15,000 espectadores. Con el precio del boleto a \$14, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos?

SOLUCIÓN

(a) Exprese verbalmente el modelo. El modelo que buscamos es una función que dé el ingreso para cualquier precio del boleto.

ingreso = precio del boleto × asistencias

Escoja la variable. Hay dos cantidades que varían: precio del boleto y asistencia. Como la función que buscamos depende del precio, hacemos

$$x = \text{precio del boleto}$$

A continuación, expresamos la asistencia en términos de x.

Verbalmente	En álgebra
Precio del boleto	x
Cantidad que baja precio del boleto	$14 - x$
Aumento en asistencia	$1000(14 - x)$
Asistencia	$9500 + 1000(14 - x)$

Establezca el modelo. El modelo que buscamos es la función R que da el ingreso para un determinado precio de boleto x.

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencias}$$

$$R(x) = x \times [9500 + 1000(14 - x)]$$
$$R(x) = x(23{,}500 - 1000x)$$
$$R(x) = 23{,}500x - 1000x^2$$

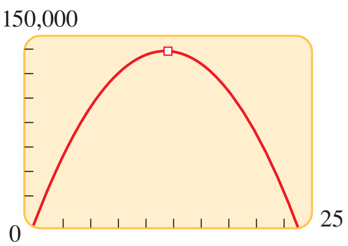
(b) Use el modelo. Como R es función cuadrática con $a = -1000$ y $b = 23{,}500$, el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23{,}500}{2(-1000)} = 11.75$$

Por lo tanto, el precio de boleto de \$11.75 da el máximo ingreso.

(c) Use el modelo. Deseamos hallar el precio del boleto por el que $R(x) = 0$.

$$23{,}500x - 1000x^2 = 0 \quad \text{Haga } R(x) = 0$$
$$23.5x - x^2 = 0 \quad \text{Divida entre 1000}$$
$$x(23.5 - x) = 0 \quad \text{Factorice}$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 23.5 \quad \text{Despeje } x$$



La asistencia máxima ocurre cuando el precio del boleto es \$11.75.

Por lo tanto, de acuerdo con este modelo, el precio del boleto de \$23.50 es simplemente demasiado alto; a ese precio, nadie va a ver jugar a su equipo. (Desde luego, el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

3.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para poner la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma normal, completamos el_________.

2. La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ está en forma normal.

(a) La gráfica de f es una parábola con vértice (___,___).

(b) Si $a > 0$, la gráfica de f abre hacia ______. En este caso $f(h) = k$ es el valor ______de f.

(c) Si $a < 0$, la gráfica de f abre hacia ______. En este caso $f(h) = k$ es el valor ______de f.

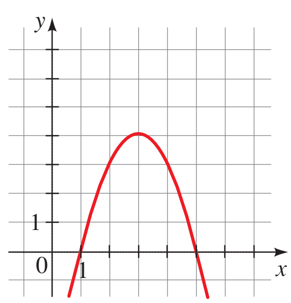
3. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (____,___), y $f(3) =$ ____es el valor (mínimo/máximo)____de f.

4. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (____,___), y $f(3) =$ ____ es el valor (mínimo/máximo)____ de f.

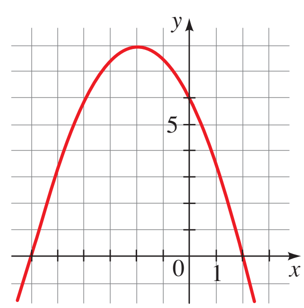
HABILIDADES

5-8 ■ Nos dan la gráfica de una función cuadrática f. **(a)** Encuentre las coordenadas del vértice. **(b)** Encuentre el valor máximo o mínimo de f. **(c)** Encuentre el dominio y rango de f.

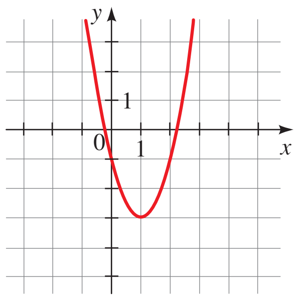
5. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



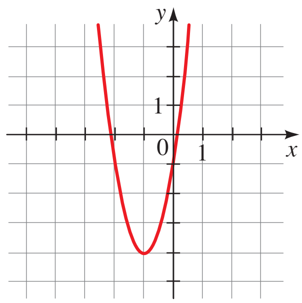
6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



8. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



9-22 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma normal. **(b)** Encuentre su vértice y su(s) punto(s) de intersección x y y. **(c)** Trace su gráfica.

9. $f(x) = x^2 - 6x$ **10.** $f(x) = x^2 + 8x$

11. $f(x) = 2x^2 + 6x$ **12.** $f(x) = -x^2 + 10x$

13. $f(x) = x^2 + 4x + 3$ **14.** $f(x) = x^2 - 2x + 2$

15. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$ **16.** $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

17. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ **18.** $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

19. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$ **20.** $f(x) = 2x^2 + x - 6$

21. $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$ **22.** $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

23-32 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma normal. **(b)** Trace su gráfica. **(c)** Encuentre su valor máximo o mínimo.

23. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ **24.** $f(x) = x^2 - 8x + 8$

25. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ **26.** $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

27. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$ **28.** $f(x) = 1 - 6x - x^2$

29. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$ **30.** $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

31. $h(x) = 1 - x - x^2$ **32.** $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

33-42 ■ Encuentre el valor máximo o mínimo de la función.

33. $f(x) = x^2 + x + 1$ **34.** $f(x) = 1 + 3x - x^2$

35. $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$ **36.** $f(t) = 10t^2 + 40t + 113$

37. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$ **38.** $g(x) = 100x^2 - 1500x$

39. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$ **40.** $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x + 7$

41. $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$ **42.** $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

43. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(4, 16)$.

44. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(3, 4)$ y que pasa por el punto $(1, -8)$.

45-48 ■ Encuentre el dominio y rango de la función.

45. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ **46.** $f(x) = x^2 - 2x - 3$

47. $f(x) = 2x^2 + 6x - 7$ **48.** $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

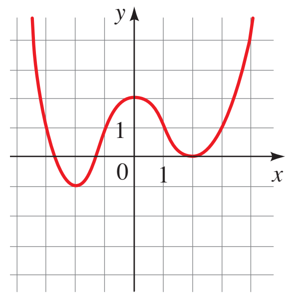
49-50 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Use una calculadora graficadora para hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática f, correcta a dos lugares decimales. **(b)** Encuentre el valor exacto máximo o mínimo de f, y compárelo con su respuesta de la parte (a).

49. $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

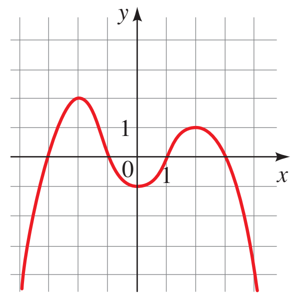
50. $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

51-54 ■ Encuentre todos los valores máximo y mínimo de la función cuya gráfica se muestra.

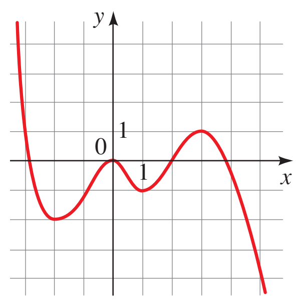
51.



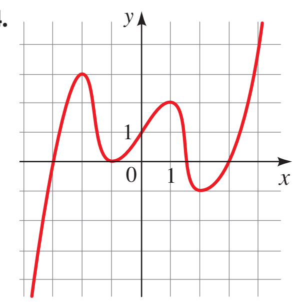
52.



53.



54.



55-62 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que se presenta cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

55. $f(x) = x^3 - x$

56. $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

57. $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

58. $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

59. $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

60. $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

61. $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$

62. $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

APLICACIONES

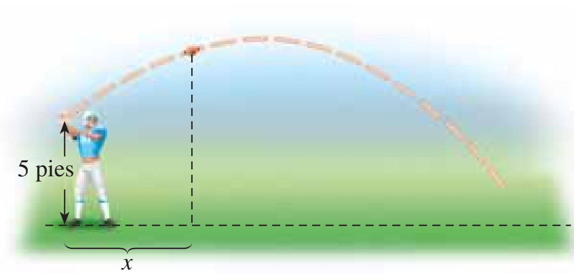
63. Altura de una pelota Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

64. Trayectoria de un balón Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 5 pies sobre el suelo, a un ángulo de 45º con la horizontal, a una velocidad de 20 pies/s. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -\frac{32}{(20)^2}x^2 + x + 5$$

donde x es la distancia en pies que el balón ha recorrido horizontalmente.

(a) Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.
(b) Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.



65. Ingresos Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierta mercancía está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

66. Ventas Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que si vende x latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

67. Publicidad La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$$E(n) = \tfrac{2}{3}n - \tfrac{1}{90}n^2$$

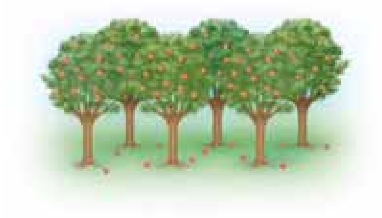
donde n es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

68. Productos farmacéuticos Cuando cierto medicamento se toma oralmente, la concentración de la droga en el torrente sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \le t \le 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de suero, y cuál es esa máxima concentración?

69. Agricultura El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con que estén plantados los árboles. Si n árboles se plantan en un acre de terreno, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Por lo tanto, el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles deben plantarse por acre para obtener la máxima producción de manzanas?



70. Agricultura En cierto viñedo se encuentra que cada una de las vides produce unas 10 libras de uvas en una temporada cuando unas 700 vides están plantadas por acre. Por cada vid individual que se planta, la producción de cada vid disminuye alrededor de 1 por ciento. Por lo tanto, el número de libras de uvas producidas por acre está modelado por

$$A(n) = (700 + n)(10 - 0.01n)$$

donde n es el número de vides adicionales. Encuentre el número de vides que deben plantarse para llevar al máximo la producción de uvas.

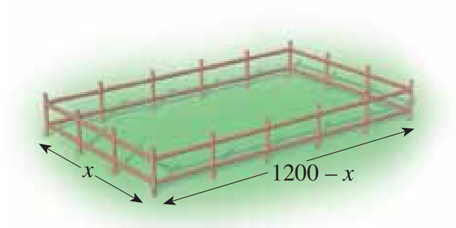
71-74 ■ Use las fórmulas de esta sección par dar una solución alternativa al problema indicado en *Enfoque en el modelado: Modelado con funciones* en las páginas 220-221.

71. Problema 21 **72.** Problema 22

73. Problema 25 **74.** Problema 24

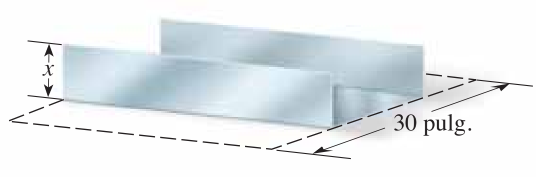
75. Cercar un corral para caballos Carol tiene 2400 pies de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

(a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho x del corral.
(b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.



76. Hacer un canal para agua de lluvia Un canal para agua llovediza se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 pulgadas de ancho, como se ve en la figura.

(a) Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de x.
(b) Encuentre el valor de x que lleve al máximo el área de sección transversal del canal.
(c) ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?



77. Ingresos en un estadio Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55,000 espectadores. Con el precio del boleto en \$10, el promedio de asistencia en partidos recientes ha sido de 27,000. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, la asistencia aumenta en 3000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo los ingresos por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto como para no generar ingresos?

78. Maximizar utilidades Una sociedad observadora de aves en cierta comunidad hace y vende alimentadores sencillos de aves, para recaudar dinero para sus actividades de conservación. Los materiales para cada alimentador cuestan \$6, y la sociedad vende un promedio de 20 por semana a un precio de \$10 cada uno. La sociedad ha estado considerando elevar el precio, de modo que lleva a cabo un estudio y encuentra que por cada dólar de aumento, pierde 2 ventas por semana.

(a) Encuentre una función que modele las utilidades semanales en términos del precio por alimentador.

(b) ¿Qué precio debe cobrar la sociedad por cada alimentador para maximizar las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades máximas semanales?

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

79. Vértice y puntos de intersección x Sabemos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = (x - m)(x - n)$ es una parábola. Trace una gráfica aproximada del aspecto que tendría esa parábola. ¿Cuáles son los puntos de intersección x de la gráfica de f? ¿Puede el lector saber de su gráfica cuál es la coordenada x del vértice en términos de m y n? (Use la simetría de la parábola.) Confirme su respuesta al expandir y usar las fórmulas de esta sección.

80. Máximo de una función polinomial de cuarto grado Encuentre el valor máximo de la función

$$f(x) = 3 + x^2 - x^4$$

[*Sugerencia:* Sea $t = x^2$.]

3.2 FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

Graficar funciones polinomiales básicas ▶ Comportamiento final y el término principal ▶ Uso de ceros para graficar funciones polinomiales ▶ Forma de la gráfica cerca de un cero ▶ Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

En esta sección estudiamos funciones polinomiales de cualquier grado. Pero antes de trabajar con funciones polinomiales, debemos estar de acuerdo con cierta terminología.

FUNCIONES POLINOMIALES

Una **función polinomial de grado n** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n, el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal**, y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Con frecuencia nos referimos a funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6.

Coeficiente principal 3

Grado 5

Término constante -6

$$3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 6$$

Término principal $3x^5$

Coeficientes 3, 6, -2, 1, 7 y -6

4.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

Funciones exponenciales ▶ Gráficas de funciones exponenciales ▶ Interés compuesto

En este capítulo estudiamos una nueva clase de funciones llamadas *funciones exponenciales*. Por ejemplo,

$$f(x) = 2^x$$

es una función exponencial (con base 2). Observe la rapidez con la que aumentan los valores de esta función:

$$\begin{aligned} f(3) &= 2^3 = 8 \\ f(10) &= 2^{10} = 1024 \\ f(30) &= 2^{30} = 1{,}073{,}741{,}824 \end{aligned}$$

Compare esto con la función $g(x) = x^2$, donde $g(30) = 30^2 = 900$. El punto es que cuando la variable está en el exponente, incluso un pequeño cambio en la variable puede causar un cambio muy grande en el valor de la función.

▼ Funciones exponenciales

Para estudiar funciones exponenciales, primero debemos definir lo que queremos decir por la expresión a^x cuando x es cualquier número. En la Sección 1.2 definimos a^x para $a > 0$ y x un número racional, pero todavía no hemos definido potencias irracionales. Por lo tanto, ¿qué significa $5^{\sqrt{3}}$ o 2^{π}? Para definir a^x cuando x es irracional, aproximamos x por medio de números racionales.

Por ejemplo, dado que

$$\sqrt{3} \approx 1.73205\ldots$$

es un número irracional, sucesivamente aproximamos $a^{\sqrt{3}}$ mediante las siguientes potencias racionales:

$$a^{1.7}, a^{1.73}, a^{1.732}, a^{1.7320}, a^{1.73205}, \ldots$$

Intuitivamente, podemos ver que estas potencias racionales de a se acercan más y más a $a^{\sqrt{3}}$. Se puede demostrar mediante matemáticas avanzadas que hay exactamente un número al que estas potencias se aproximan. Definimos que $a^{\sqrt{3}}$ es este número.

Por ejemplo, usando calculadora, encontramos

$$\begin{aligned} 5^{\sqrt{3}} &\approx 5^{1.732} \\ &\approx 16.2411\ldots \end{aligned}$$

Cuantos más lugares decimales de $\sqrt{3}$ usemos en nuestro cálculo, es mejor nuestra aproximación de $5^{\sqrt{3}}$.

Las Leyes de Exponentes se dan en la página 14.

Se puede demostrar que las *Leyes de Exponentes todavía son verdaderas cuando los exponentes son números reales.*

> **FUNCIONES EXPONENCIALES**
>
> La **función exponencial con base *a*** está definida para todos los números reales x por
>
> $$f(x) = a^x$$
>
> donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Suponemos que $a \neq 1$ porque la función $f(x) = 1^x = 1$ es precisamente una función constante. A continuación veamos algunos ejemplos de funciones exponenciales:

$$\underbrace{f(x) = 2^x}_{\text{Base 2}} \qquad \underbrace{g(x) = 3^x}_{\text{Base 3}} \qquad \underbrace{h(x) = 10^x}_{\text{Base 10}}$$

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones exponenciales

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

(a) $f(2)$ **(b)** $f(-\frac{2}{3})$

(c) $f(\pi)$ **(d)** $f(\sqrt{2})$

SOLUCIÓN Usamos calculadora para obtener los valores de f.

	Tecleo en calculadora	Salida
(a) $f(2) = 3^2 = 9$	3 ^ 2 ENTER	9
(b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	3 ^ ((−) 2 ÷ 3) ENTER	0.4807498
(c) $f(\pi) = 3^\pi \approx 31.544$	3 ^ π ENTER	31.5442807
(d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	3 ^ √ 2 ENTER	4.7288043

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

Gráficas de funciones exponenciales

Primero graficamos funciones exponenciales al localizar puntos. Veremos que las gráficas de esas funciones tienen una forma fácilmente reconocible.

EJEMPLO 2 | Graficado de funciones exponenciales al localizar puntos

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = 3^x$ **(b)** $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

SOLUCIÓN Calculamos valores de $f(x)$ y $g(x)$ y localizamos puntos para trazar las gráficas de la Figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

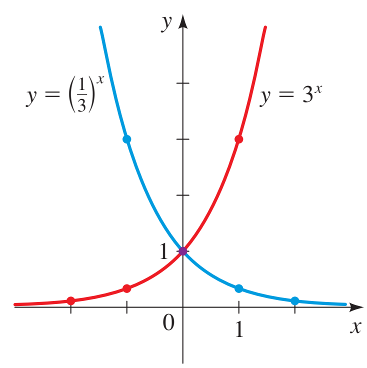


FIGURA 1

Observe que

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$$

de modo que hemos obtenido la gráfica de g a partir de la gráfica de f al reflejar en el eje y.

La reflexión de gráficas se explica en la Sección 2.5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

La Figura 2 muestra las gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ para varios valores de la base a. Todas estas gráficas pasan por el punto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ para toda $a \neq 0$. De la Figura 2 se puede ver que hay dos clases de funciones exponenciales: si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece rápidamente; si $a > 1$, la función aumenta rápidamente (vea nota al margen).

Para ver la rapidez con la que aumenta $f(x) = 2^x$, realicemos el siguiente experimento de pensamiento. Suponga que empezamos con un trozo de papel de un milésimo de pulgada de grueso, y lo doblamos a la mitad 50 veces. Cada vez que doblamos el papel, se duplica el grosor de la pila del papel, de modo que el grosor de la pila resultante sería $2^{50}/1000$ pulgadas. ¿De qué grosor piensa usted qué es? Resulta que es de más de 17 millones de millas.

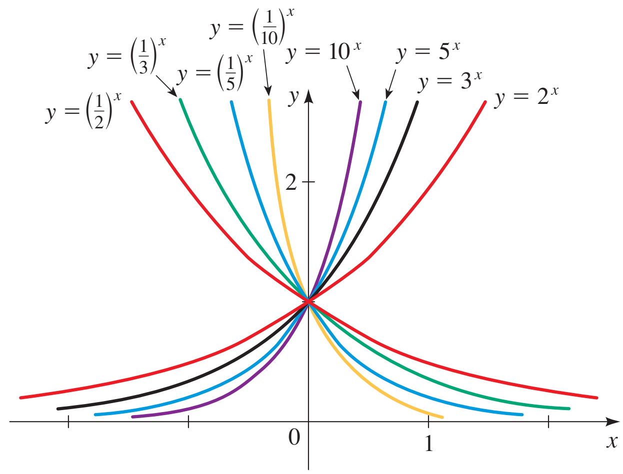


FIGURA 2 Una familia de funciones exponenciales

El eje x es una asíntota horizontal para la función exponencial $f(x) = a^x$. Esto es porque cuando $a > 1$, tenemos que $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y cuando $0 < a < 1$, tenemos $a^x \to 0$ cuando $x \to \infty$ (vea Figura 2). También $a^x > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, de modo que la función $f(x) = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Estas observaciones se resumen en el cuadro siguiente.

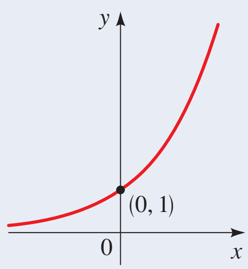
Vea la Sección 3.7, página 278, donde se explica la "notación de flechas" empleada aquí.

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

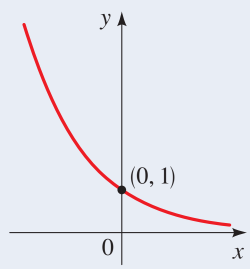
La función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las siguientes formas.



$f(x) = a^x$ para $a > 1$

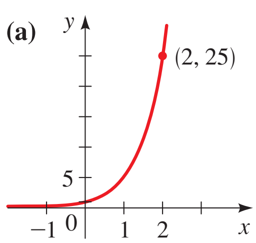


$f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

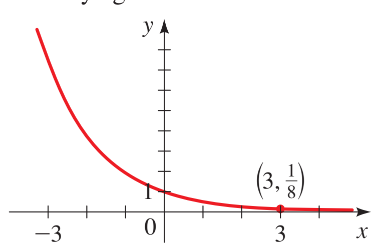
EJEMPLO 3 | Identificar gráficas de funciones exponenciales

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se da.

(a)



(b)



SOLUCIÓN

(a) Como $f(2) = a^2 = 25$, vemos que la base es $a = 5$. Entonces $f(x) = 5^x$.

(b) Como $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}$, vemos que la base es $a = \frac{1}{2}$. Entonces $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

En el siguiente ejemplo vemos cómo graficar ciertas funciones, no localizando puntos sino tomando las gráficas básicas de las funciones exponenciales de la Figura 2, y aplicando las transformaciones de desplazamiento y reflexión de la Sección 2.5.

EJEMPLO 4 | Transformaciones de funciones exponenciales

Use la gráfica de $f(x) = 2^x$ para trazar la gráfica de cada función.

(a) $g(x) = 1 + 2^x$ **(b)** $h(x) = -2^x$ **(c)** $k(x) = 2^{x-1}$

SOLUCIÓN

El desplazamiento y reflexión de gráficas se explica en la Sección 2.5.

(a) Para obtener la gráfica de $g(x) = 1 + 2^x$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos 1 unidad hacia arriba. Observe de la Figura 3(a) que la recta $y = 1$ es ahora una asíntota horizontal.

(b) De nuevo empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$, pero aquí reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $h(x) = -2^x$ que se ve en la Figura 3(b).

(c) Esta vez empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos a la derecha 1 unidad para obtener la gráfica de $k(x) = 2^{x-1}$ que se muestra en la Figura 3(c).

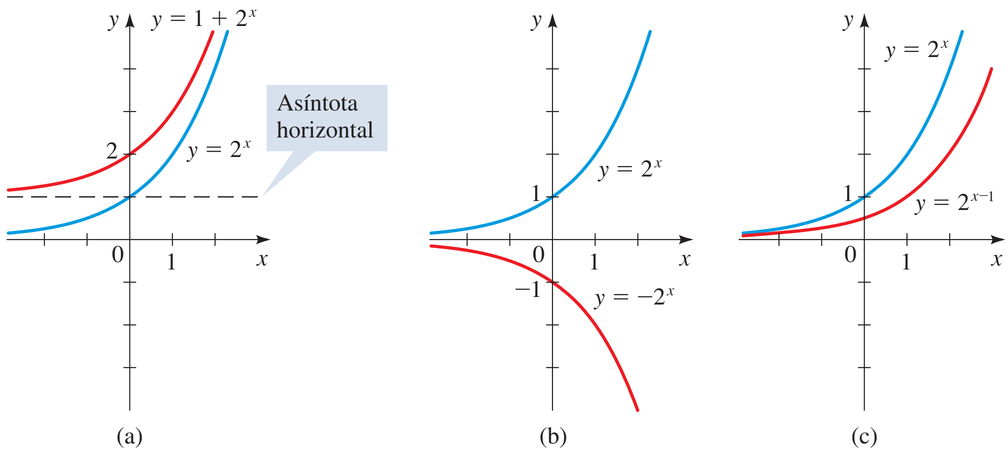


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25, 27** Y **31**

EJEMPLO 5 | Comparación de funciones exponenciales y potencia

Compare la rapidez de crecimiento de la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función de potencia $g(x) = x^2$ trazando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de vista.

(a) $[0, 3]$ por $[0, 8]$

(b) $[0, 6]$ por $[0, 25]$

(c) $[0, 20]$ por $[0, 1000]$

SOLUCIÓN

(a) La Figura 4(a) muestra que la gráfica de $g(x) = x^2$ alcanza, y hasta supera, a la gráfica de $f(x) = 2^x$ en $x = 2$.

(b) El rectángulo de vista más grande de la Figura 4(b) muestra que la gráfica de $f(x) = 2^x$ alcanza a la de $g(x) = x^2$ cuando $x = 4$.

(c) La Figura 4(c) da una vista más global y muestra que cuando x es grande, $f(x) = 2^x$ es mucho mayor que $g(x) = x^2$.

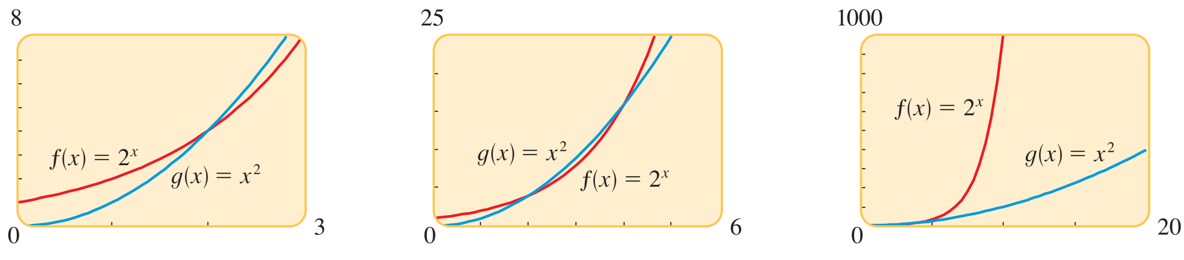


FIGURA 4 (a) (b) (c)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

Interés compuesto

Las funciones exponenciales se presentan al calcular interés compuesto. Si una cantidad de dinero P, llamada **principal**, se invierte a una tasa de interés i por período, entonces después de un período el interés es Pi, y la cantidad A de dinero es

$$A = P + Pi = P(1 + i)$$

Si el interés se reinvierte, entonces el nuevo principal es $P(1 + i)$, y la cantidad después de otro período es $A = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$. Análogamente, después de un tercer período la cantidad es $A = P(1 + i)^3$. En general, después de k períodos la cantidad es

$$A = P(1 + i)^k$$

Observe que ésta es una función exponencial con base $1 + i$.

Si la tasa de interés anual es r y si el interés se capitaliza n veces por año, entonces en cada período la tasa de interés es $i = r/n$, y hay nt períodos en t años. Esto lleva a la siguiente fórmula para la cantidad después de t años.

INTERÉS COMPUESTO

El **interés compuesto** se calcula con la fórmula

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde
$A(t)$ = cantidad después de t años
P = principal
r = tasa de interés por año
n = número de veces que el interés se capitaliza por año
t = número de años

r se conoce a veces como *tasa nominal de interés anual.*

EJEMPLO 6 | Cálculo de interés compuesto

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 12% al año. Encuentre las cantidades en la cuenta después de 3 años si el interés se capitaliza anual, semestral, trimestral, mensualmente y a diario.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula de interés compuesto con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$.

Capitalización	n	Cantidad después de 3 años
Anual	1	$1000\left(1 + \frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = \$1404.93$
Semestral	2	$1000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = \$1418.52$
Trimestral	4	$1000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = \$1425.76$
Mensual	12	$1000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = \$1430.77$
Diario	365	$1000\left(1 + \frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = \$1433.24$

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **51**

Si una inversión gana interés compuesto, entonces el **rendimiento en porcentaje anual** (APY) es la tasa de interés *simple* que rinde la misma cantidad al término de un año.

EJEMPLO 7 | Cálculo del rendimiento en porcentaje anual

Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana interés a una tasa de 6% por año, capitalizado a diario.

SOLUCIÓN Después de un año, un principal P crecerá a

$$A = P\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} = P(1.06183)$$

El interés simple se estudia en la Sección 1.6.

La fórmula para el interés simple es

$$A = P(1 + r)$$

Comparando, vemos que $1 + r = 1.06183$, entonces $r = 0.06183$. Por lo tanto, el rendimiento en porcentaje anual es \$6.183.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57**

4.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La función $f(x) = 5^x$ es una función exponencial con base ______; $f(-2) =$ ______, $f(0) =$ ______, $f(2) =$ ______ y $f(6) =$ ______.

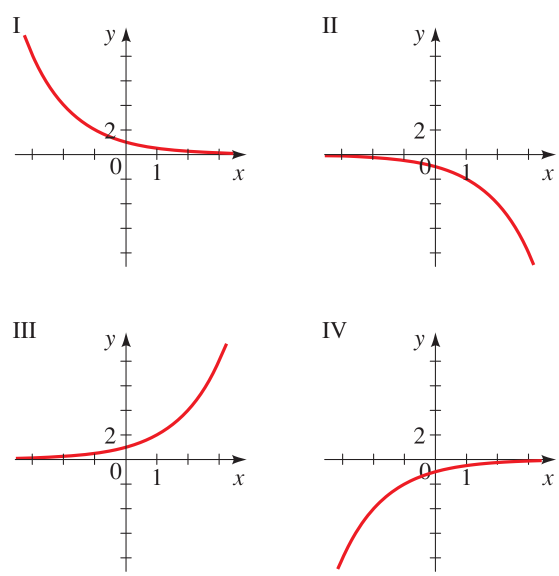
2. Relacione la función exponencial con su gráfica.

(a) $f(x) = 2^x$

(b) $f(x) = 2^{-x}$

(c) $f(x) = -2^x$

(d) $f(x) = -2^{-x}$



3. **(a)** Para obtener la gráfica de $g(x) = 2^x - 1$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos _______ (hacia arriba/abajo) 1 unidad.
   (b) Para obtener la gráfica de $h(x) = 2^{x-1}$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos _______ (a la izquierda/derecha) 1 unidad.

4. En la fórmula $A(t) = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ para interés compuesto las letras P, r, n y t representan _______, _______, _______ y _______, respectivamente, y $A(t)$ representa _______. Por lo tanto, si se invierten \$100 a una tasa de interés de 6% capitalizado trimestralmente, entonces la cantidad después de 2 años es _______.

HABILIDADES

5-10 ■ Use calculadora para evaluar la función en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

5. $f(x) = 4^x$; $f(0.5), f(\sqrt{2}), f(-\pi), f(\frac{1}{3})$
6. $f(x) = 3^{x+1}$; $f(-1.5), f(\sqrt{3}), f(e), f(-\frac{5}{4})$
7. $g(x) = (\frac{2}{3})^{x-1}$; $g(1.3), g(\sqrt{5}), g(2\pi), g(-\frac{1}{2})$
8. $g(x) = (\frac{3}{4})^{2x}$; $g(0.7), g(\sqrt{7}/2), g(1/\pi), g(\frac{2}{3})$

9-14 ■ Trace la gráfica de la función haciendo una tabla de valores. Use calculadora si es necesario.

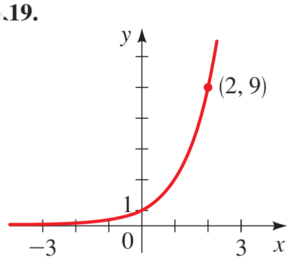
9. $f(x) = 2^x$
10. $g(x) = 8^x$
11. $f(x) = (\frac{1}{3})^x$
12. $h(x) = (1.1)^x$
13. $g(x) = 3(1.3)^x$
14. $h(x) = 2(\frac{1}{4})^x$

15-18 ■ Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes.

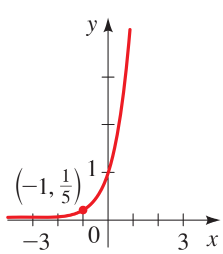
15. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$
16. $f(x) = 3^{-x}$ y $g(x) = (\frac{1}{3})^x$
17. $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 7^x$
18. $f(x) = (\frac{2}{3})^x$ y $g(x) = (\frac{4}{3})^x$

19-22 ■ Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica nos dan.

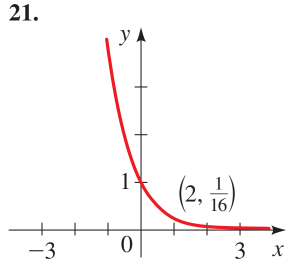
19.



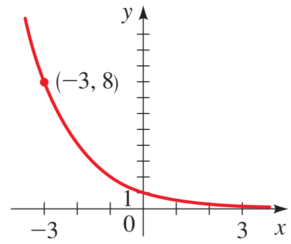
20.



21.



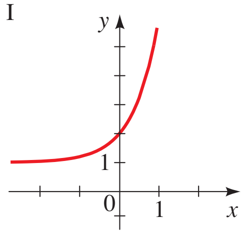
22.



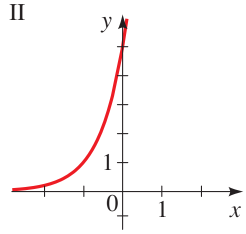
23-24 ■ Relacione la función exponencial con una de las gráficas marcadas I o II.

23. $f(x) = 5^{x+1}$
24. $f(x) = 5^x + 1$

I



II



25-36 ■ Grafique la función, no localizando puntos sino empezando desde las gráficas de la Figura 2. Exprese el dominio, rango y asíntota.

25. $f(x) = -3^x$
26. $f(x) = 10^{-x}$
27. $g(x) = 2^x - 3$
28. $g(x) = 2^{x-3}$
29. $h(x) = 4 + (\frac{1}{2})^x$
30. $h(x) = 6 - 3^x$
31. $f(x) = 10^{x+3}$
32. $f(x) = -(\frac{1}{5})^x$
33. $y = 5^{-x} + 1$
34. $g(x) = 1 - 3^{-x}$
35. $y = 3 - 10^{x-1}$
36. $h(x) = 2^{x-4} + 1$

37. **(a)** Trace las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3(2^x)$.
    (b) ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

38. **(a)** Trace las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$.
    (b) Use las Leyes de Exponentes para explicar la relación entre estas gráficas.

39. Compare las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ al evaluarlas ambas para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15$, y 20. A continuación trace las gráficas de f y g en el mismo conjunto de ejes.

40. Si $f(x) = 10^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 10^x\left(\frac{10^h - 1}{h}\right).$$

41. **(a)** Compare la rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^5$ al trazar las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de observación.
    (i) $[0, 5]$ por $[0, 20]$
    (ii) $[0, 25]$ por $[0, 10^7]$
    (iii) $[0, 50]$ por $[0, 10^8]$
    (b) Encuentre las soluciones de la ecuación $2^x = x^5$, redondeadas a un lugar decimal.

42. **(a)** Compare la rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = x^4$ trazando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de vista:

(i) $[-4, 4]$ por $[0, 20]$
(ii) $[0, 10]$ por $[0, 5000]$
(iii) $[0, 20]$ por $[0, 10^5]$

(b) Encuentre las soluciones de la ecuación $3^x = 4$, redondeada a dos lugares decimales.

43-44 ■ Trace dos gráficas de la familia de funciones dada para $c = 0.25, 0.5, 1, 2, 4$. ¿Cómo están relacionadas las gráficas?

43. $f(x) = c2^x$ **44.** $f(x) = 2^{cx}$

45-46 ■ Encuentre, redondeados a dos lugares decimales, **(a)** los intervalos en los que la función es creciente o decreciente y **(b)** el rango de la función.

45. $y = 10^{x-x^2}$ **46.** $y = x2^x$

APLICACIONES

47. Crecimiento de bacterias Un cultivo de bacterias contiene 1500 bacterias inicialmente y se duplica en cada hora.
(a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.
(b) Encuentre el número de bacterias después de 24 horas.

48. Población de ratones Cierta raza de ratones fue introducida en una pequeña isla, con una población inicial de 320 ratones, y los científicos estiman que la población de ratones se duplica cada año.
(a) Encuentre una función que modele el número de ratones después de t años.
(b) Estime la población de ratones después de 8 años.

49-50 ■ **Interés compuesto** Una inversión de \$5000 se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza mensualmente. Complete la tabla escribiendo las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos indicados o tasas de interés.

49. $r = 4\%$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

50. $t = 5$ años

Tasa por año	Cantidad
1%	
2%	
3%	
4%	
5%	
6%	

51. Interés compuesto Si se invierten \$10,000 a una tasa de interés del 3% al año, capitalizada semestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 5 años **(b)** 10 años **(c)** 15 años

52. Interés compuesto Si se invierten \$2500 a una tasa de interés del 2.5% por año, capitalizado a diario, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 2 años **(b)** 3 años **(c)** 6 años

53. Interés compuesto Si se invierten \$500 a una tasa de interés del 3.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 1 año **(b)** 2 años **(c)** 10 años

54. Interés compuesto Si se invierten \$4000 a una tasa de interés del 5.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre la cantidad adeudada al término del número dado de años.
(a) 4 años **(b)** 6 años **(c)** 8 años

55-56 ■ **Valor presente** El **valor presente** de una suma de dinero es la cantidad que debe ser invertida ahora, a una tasa de interés dada, para producir la suma deseada en una fecha posterior.

55. Encuentre el valor presente de \$10,000 si se paga interés a razón de 9% al año, capitalizado semestralmente, durante 3 años.

56. Encuentre el valor presente de \$10,000 si se paga interés a razón de 8% al año, capitalizado mensualmente, durante 5 años.

57. Rendimiento en porcentaje anual Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana 8% por año, capitalizado mensualmente.

58. Rendimiento en porcentaje anual Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana $5\frac{1}{2}\%$ por año, capitalizado trimestralmente.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

59. Crecimiento de una función exponencial Supongamos que al lector le ofrecen un trabajo que dura un mes, y que estará muy bien pagado. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago es más rentable para él?
(a) Un millón de dólares al final del mes.
(b) Dos centavos el primer día del mes, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercer día, y en general, 2^n centavos en el n día.

60. Altura de la gráfica de una función exponencial El profesor de matemáticas pide al lector que trace una gráfica de la función exponencial

$$f(x) = 2^x$$

para x entre 0 y 40, usando una escala de 10 unidades a 1 pulgada. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja de papel que necesitará para trazar esta gráfica?

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Explosión exponencial**

En este proyecto exploramos un ejemplo acerca de cómo monedas de a centavo que nos ayudan a ver cómo funciona el crecimiento exponencial. Se puede ver el proyecto en el sitio web del libro acompañante: **www.stewartmath.com**

4.2 La función exponencial natural

El número *e* ▶ La función exponencial natural ▶ Interés capitalizado continuamente

Cualquier número positivo se puede usar como base para una función exponencial. En esta sección estudiamos la base especial e, que es conveniente para aplicaciones donde interviene Cálculo.

▼ El número *e*

El número e se define como el valor al que se aproxima $(1 + 1/n)^n$ cuando n se hace grande. (En Cálculo, esta idea se hace más precisa por medio del concepto de un límite. Vea el Capítulo 13.) La tabla siguiente muestra los valores de la expresión $(1 + 1/n)^n$ para valores cada vez más grandes de n.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10,000	2.71815
100,000	2.71827
1,000,000	2.71828

Es evidente que, aproximado a cinco lugares decimales, $e \approx 2.71828$; de hecho, el valor aproximado a 20 lugares decimales es

$$e \approx 2.71828182845904523536$$

Se puede demostrar que e es un número irracional, de modo que no podemos escribir su valor exacto en forma decimal.

El **Gateway Arch** (Arco de Entrada) en St. Louis, Missouri, tiene la forma de la gráfica de una combinación de funciones exponenciales (*no* una parábola, como podría parecer al principio). Específicamente, es una **catenaria**, que es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = a(e^{bx} + e^{-bx})$$

(vea Ejercicio 17). Esta forma se escogió porque es óptima para distribuir las fuerzas estructurales internas del arco. Cadenas y cables suspendidos entre dos puntos (por ejemplo, los tramos de cable entre pares de postes telefónicos) cuelgan en forma de catenaria.

▼ La función exponencial natural

El número e es la base para la función exponencial natural. ¿Por qué usamos una base tan extraña para una función exponencial? Podría parecer que con una base como el 10 es más fácil trabajar. Veremos, no obstante, que en ciertas aplicaciones el número e es la mejor base posible. En esta sección estudiamos cómo se presenta el número e en la descripción de interés compuesto.

La notación fue escogida por Leonhard Euler (vea página 266), probablemente por es la primera letra de la palabra *exponencial*.

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La **función exponencial natural** es la función exponencial

$$f(x) = e^x$$

Con base e. Es frecuente llamarla *la* función exponencial.

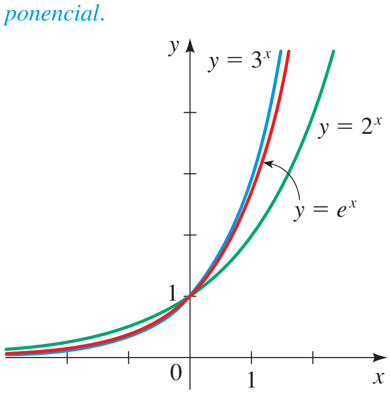


FIGURA 1 Gráfica de la función exponencial natural

Como $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se ve en la Figura 1.

Innumerables calculadoras científicas tienen una tecla especial para la función $f(x) = e^x$. Usamos esta tecla en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 | Evaluación de la función exponencial

Evalúe cada expresión redondeada a cinco lugares decimales.

(a) e^3 **(b)** $2e^{-0.53}$ **(c)** $e^{4.8}$

SOLUCIÓN Usamos la tecla $\boxed{e^x}$ de una calculadora para evaluar la función exponencial.

(a) $e^3 \approx 20.08554$ **(b)** $2e^{-0.53} \approx 1.17721$ **(c)** $e^{4.8} \approx 121.51042$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

EJEMPLO 2 | Transformaciones de la función exponencial

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = e^{-x}$ **(b)** $g(x) = 3e^{0.5x}$

SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de $y = e^x$ y reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ como en la Figura 2.

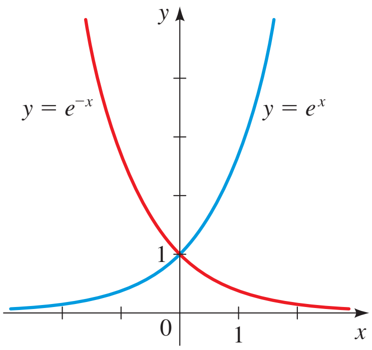


FIGURA 2

(b) Calculamos varios valores, localizamos los puntos resultantes y luego enlazamos los puntos con una curva sin irregularidades. La gráfica se ilustra en la Figura 3.

x	$f(x) = 3e^{0.5x}$
−3	0.67
−2	1.10
−1	1.82
0	3.00
1	4.95
2	8.15
3	13.45

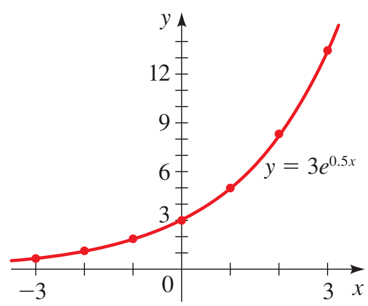


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **7**

EJEMPLO 3 | Un modelo exponencial para la propagación de un virus

Una enfermedad infecciosa empieza a propagarse en una ciudad pequeña de 10,000 habitantes. Después de t días, el número de personas que han sucumbido al virus está modelado por la función

$$v(t) = \frac{10,000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

(a) ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente (tiempo $t = 0$)?

(b) Encuentre el número de personas infectadas después de un día, dos días y cinco días.

(c) Grafique la función v y describa su comportamiento.

SOLUCIÓN

(a) Como $v(0) = 10,000/(5 + 1245e^0) = 10,000/1250 = 8$, concluimos que 8 personas inicialmente tienen la enfermedad.

(b) Usando calculadora, evaluamos $v(1)$, $v(2)$ y $v(5)$ y a continuación redondeamos para obtener los siguientes valores.

Días	Personas infectadas
1	21
2	54
5	678

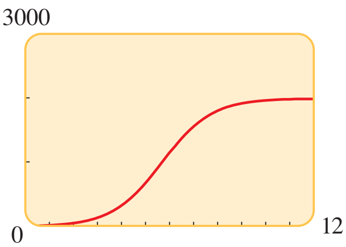


FIGURA 4

$$v(t) = \frac{10,000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

(c) De la gráfica de la Figura 4 vemos que el número de personas infectadas primero sube lentamente, luego sube con rapidez entre el día 3 y el día 8 y por último se nivela cuando alrededor de 2000 personas están infectadas.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

La gráfica de la Figura 4 recibe el nombre de *curva logística* o *modelo de crecimiento logístico*. Curvas como ésta se presentan con frecuencia en el estudio de crecimiento poblacional. (Vea Ejercicios 25-28.)

Interés capitalizado continuamente

En el Ejemplo 6 de la Sección 4.1 vimos que el interés pagado aumenta cuando aumenta el número n de períodos de capitalización. Veamos qué ocurre cuando n aumenta indefinidamente. Si hacemos $m = n/r$, entonces

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$$

Recuerde que cuando m se hace grande, la cantidad $(1 + 1/m)^m$ se aproxima al número e. Entonces, la cantidad se aproxima a $A = Pe^{rt}$. Esta expresión da la cantidad cuando el interés se capitaliza "a cada instante".

INTERÉS CAPITALIZADO CONTINUAMENTE

El **interés capitalizado continuamente** se calcula con la fórmula

$$A(t) = Pe^{rt}$$

Donde $A(t)$ = cantidad después de t años

P = principal

r = tasa de interés por año

t = número de años

EJEMPLO 4 | Calcular interés capitalizado continuamente

Encuentre la cantidad después de 3 años si se invierten \$1000 a una tasa de interés de 12% por año, capitalizado continuamente.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$ para obtener

$$A(3) = 1000e^{(0.12)3} = 1000e^{0.36} = \$1433.33$$

Compare esta cantidad con las cantidades del Ejemplo 6 de la Sección 4.1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

4.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La función $f(x) = e^x$ se llama función exponencial _____. El número e es aproximadamente igual a _____.

2. En la fórmula $A(t) = Pe^{rt}$ para interés capitalizado continuamente, las letras P, r y t representan _____, _____ y _____, respectivamente, y $A(t)$ representa _____. Por lo tanto, si se invierten \$100 a una tasa de interés del 6% capitalizado continuamente, entonces la cantidad después de 2 años es _____.

HABILIDADES

3-4 ■ Use calculadora para evaluar la función a los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres lugares decimales.

3. $h(x) = e^x$; $h(3), h(0.23), h(1), h(-2)$

4. $h(x) = e^{-2x}$; $h(1), h(\sqrt{2}), h(-3), h(\frac{1}{2})$

5-6 ■ Complete la tabla de valores, redondeados a dos lugares decimales, y trace una gráfica de la función.

5.

x	$f(x) = 3e^x$
-2	
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
2	

6.

x	$f(x) = 2e^{-0.5x}$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

7-14 ■ Grafique la función, no localizando los puntos sino empezando desde la gráfica de $y = e^x$. Exprese el dominio, rango y asíntota.

7. $f(x) = -e^x$

8. $y = 1 - e^x$

9. $y = e^{-x} - 1$

10. $f(x) = -e^{-x}$

11. $f(x) = e^{x-2}$

12. $y = e^{x-3} + 4$

13. $h(x) = e^{x+1} - 3$

14. $g(x) = -e^{x-1} - 2$

15. La *función coseno hiperbólico* está definida por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(a) Trace las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en los mismos ejes, y use adición gráfica (vea Sección 2.6) para trazar la gráfica de $y = \cosh(x)$.

(b) Use la definición para demostrar que $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

16. La *función seno hiperbólico* está definida por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(a) Trace la gráfica de esta función usando adición gráfica como en el Ejercicio 15.

(b) Use la definición para demostrar que $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$

17. (a) Trace las gráficas de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

para $a = 0.5$, 1, 1.5 y 2.

(b) ¿En qué forma un valor grande de a afecta a la gráfica?

18-19 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

18. $g(x) = x^x \quad (x > 0)$

19. $g(x) = e^x + e^{-3x}$

APLICACIONES

20. Drogas médicas Cuando cierta droga médica se administra a un paciente, el número de miligramos restante en el torrente sanguíneo del paciente después de t horas se modela con

$$D(t) = 50e^{-0.2t}$$

¿Cuántos miligramos de la droga quedan en el torrente sanguíneo del paciente después de 3 horas?

21. Desintegración radiactiva Una sustancia radiactiva se desintegra en forma tal que la cantidad de masa restante después de t días está dada por la función

$$m(t) = 13e^{-0.015t}$$

donde $m(t)$ se mide en kilogramos.

(a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

(b) ¿Cuánto de la masa resta después de 45 días?

22. Desintegración radiactiva Unos médicos usan yodo radiactivo como trazador en el diagnóstico de ciertas enfermedades de la glándula tiroides. Este tipo de yodo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días está dada por la función

$$m(t) = 6e^{-0.087t}$$

donde $m(t)$ se mide en gramos.

(a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

(b) ¿Cuánta masa resta después de 20 días?

23. Paracaidismo Una paracaidista salta desde una altura razonable sobre el suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a la velocidad de ella, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se puede demostrar que la velocidad hacia abajo de la paracaidista en el tiempo t está dada por

$$v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$$

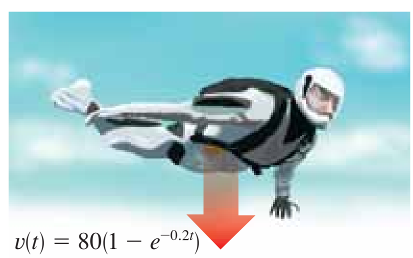
donde t se mide en segundos y $v(t)$ se mide en pies por segundo (pies/s).

(a) Encuentre la velocidad inicial de la paracaidista.

(b) Encuentre la velocidad después de 5 s y después de 10 s.

(c) Trace una gráfica de la función de velocidad $v(t)$.

(d) La velocidad máxima de un cuerpo en caída con resistencia del viento se denomina *velocidad terminal*. De la gráfica de la parte (c), encuentre la velocidad terminal de esta paracaidista.



24. Mezclas y concentraciones Un barril de 50 galones se llena por completo de agua pura y, a continuación, se le bombea agua salada con concentración de 0.3 lb/gal al barril, y la mezcla resultante se derrama con la misma rapidez. La cantidad de sal en el barril en el tiempo t está dada por

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

donde t se mide en minutos y $Q(t)$ se mide en libras.

(a) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 5 minutos?

(b) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 10 minutos?

(c) Trace una gráfica de la función $Q(t)$.

(d) Use la gráfica de la parte (c) para determinar el valor al que se aproxima la cantidad de sal del barril cuando t se hace grande. ¿Es esto lo que usted esperaba?

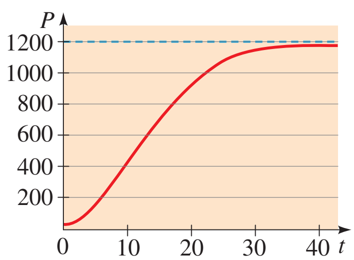
$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

25. Crecimiento logístico Las poblaciones de animales no son capaces de crecimiento no restringido debido a que el hábitat y la disponibilidad de alimentos son limitados. Bajo estas condiciones, la población sigue un *modelo de crecimiento logístico:*

$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces de un pequeño estanque, $d = 1200$, $k = 11$, $c = 0.2$ y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

(a) ¿Cuántos peces fueron introducidos originalmente en el estanque?
(b) Encuentre la población después de 10, 20 y 30 años.
(c) Evalúe $P(t)$ para valores grandes de t. ¿A qué valor se aproxima la población cuando $t \to \infty$? ¿La gráfica siguiente confirma los cálculos de usted?



26. Población de aves La población de cierta especie de aves está limitada por el tipo de hábitat requerido para anidar. La población se comporta de acuerdo con el modelo logístico de crecimiento siguiente

$$n(t) = \frac{5600}{0.5 + 27.5e^{-0.044t}}$$

donde t se mide en años.

(a) Encuentre la población inicial de aves.
(b) Trace una gráfica de la función $n(t)$.
(c) ¿A qué dimensiones se aproxima la población a medida que transcurre el tiempo?

27. Población mundial La tasa de crecimiento relativa de la población mundial ha estado disminuyendo continuamente en años recientes. Con base en esto, algunos modelos de población predicen que la población mundial se estabilizará por último en un nivel que el planeta pueda sostener. Uno de estos modelos logísticos es

$$P(t) = \frac{73.2}{6.1 + 5.9e^{-0.02t}}$$

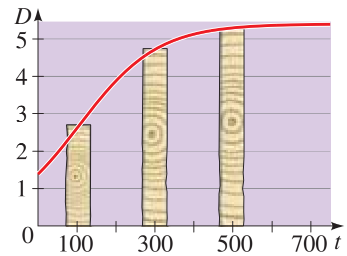
donde $t = 0$ es el año 2000 y la población se mide en miles de millones.

(a) ¿Qué población mundial predice este modelo para el año 2200? ¿Y para el año 2300?
(b) Trace una gráfica de la función P para los años 2000 a 2500.
(c) De acuerdo con este modelo, ¿a qué número parece aproximarse la población mundial a medida que pasa el tiempo?

28. Diámetro de un árbol Para cierto tipo de árboles, el diámetro D (en pies) depende de la edad t del árbol (en años) de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico siguiente:

$$D(t) = \frac{5.4}{1 + 2.9e^{-0.01t}}$$

Encuentre el diámetro de un árbol de 20 años de edad.



29-30 ■ Interés compuesto Una inversión de \$7000 se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza continuamente. Complete la tabla escribiendo las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos o tasas de interés indicados.

29. $r = 3\%$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

30. $t = 10$ años

Tasa por año	Cantidad
1%	
2%	
3%	
4%	
5%	
6%	

31. Interés compuesto Si se invierten \$2000 a una tasa de interés del 3.5% al año, capitalizado continuamente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 2 años **(b)** 4 años **(c)** 12 años

32. Interés compuesto Si se invierten \$3500 a una tasa del 6.25% al año, capitalizado continuamente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 3 años **(b)** 6 años **(c)** 9 años

33. Interés compuesto Si se invierten \$600 a una tasa del 2.5% al año, encuentre la cantidad de la inversión al término de 10 años para los siguientes métodos de capitalización.
(a) Anualmente **(b)** Semestralmente
(c) Trimestralmente **(d)** Continuamente

34. Interés compuesto Si se invierte \$8000 en una cuenta para la cual el interés se capitaliza continuamente, encuentre la cantidad de la inversión al término de 12 años para las siguientes tasas de interés.

(a) 2% **(b)** 3% **(c)** 4.5% **(d)** 7%

35. Interés compuesto ¿Cuál de las tasas dadas y períodos de capitalización darían la mejor inversión?

(a) $2\frac{1}{2}\%$ al año, capitalizado semestralmente
(b) $2\frac{1}{4}\%$ al año, capitalizado mensualmente
(c) 2% al año, capitalizado continuamente

36. Interés compuesto ¿Cuál de las tasas de interés dadas y períodos de capitalización darían la mejor inversión?

(a) $5\frac{1}{8}\%$ al año, capitalizado semestralmente
(b) 5% al año, capitalizado continuamente

37. Inversión Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 9% al año, capitalizado continuamente.
(a) Encuentre el valor $A(t)$ de la inversión después de t años.
(b) Trace una gráfica de $A(t)$.
(c) Use la gráfica de $A(t)$ para determinar cuándo esta inversión ascenderá a \$25,000.

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

38. La definición de *e* Ilustre la definición del número e al graficar la curva $y = (1 + 1/x)^x$ y la recta $y = e^x$ en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista $[0, 40]$ por $[0, 4]$.

4.3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Funciones logarítmicas ▶ Gráficas de funciones logarítmicas ▶ Logaritmos comunes ▶ Logaritmos naturales

En esta sección estudiamos las inversas de funciones exponenciales.

▼ Funciones logarítmicas

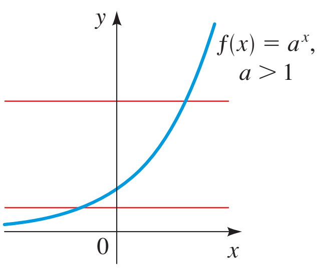


FIGURA 1 $f(x) = a^x$ es biunívoca.

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función biunívoca por la Prueba de la Recta Horizontal (vea Figura 1 para el caso $a > 1$) y por tanto tiene una función inversa. La función inversa f^{-1} se denomina *función logarítmica con base a* y se denota con $\log_a$. Recuerde de la Sección 2.6 que f^{-1} está definida por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Esto lleva a la siguiente definición de la función logarítmica.

Leemos $\log_a x = y$ como "el log base a de x es y".

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base *a***, denotada por $\mathbf{log}_a$, está definida por

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Por lo tanto, $\log_a x$ es el *exponente* al cual la base a debe ser elevado para obtener x.

Por tradición el nombre de la función logarítmica es $\log_a$, no sólo una letra. También, por lo general omitimos los paréntesis en la notación de función y escribimos

$$\log_a(x) = \log_a x$$

Cuando usamos la definición de logaritmos para pasar entre la **forma logarítmica** $\log_a x = y$ y la **forma exponencial** $a^y = x$, es útil observar que, en ambas formas, la base es la misma:

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
Exponente	Exponente
$\log_a x = y$	$a^y = x$
Base	Base

EJEMPLO 1 | Formas logarítmicas y exponenciales

Las formas logarítmicas y exponenciales son ecuaciones equivalentes: si una es verdadera, también lo es la otra. Por lo tanto, podemos pasar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{10} 100{,}000 = 5$	$10^5 = 100{,}000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

x	$\log_{10} x$
10^4	4
10^3	3
10^2	2
10	1
1	0
10^{-1}	-1
10^{-2}	-2
10^{-3}	-3
10^{-4}	-4

Es importante entender que $\log_a x$ es un *exponente*. Por ejemplo, los números de la columna derecha de la tabla del margen son los logaritmos (base 10) de los números de la columna izquierda. Éste es el caso para todas las bases, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Evaluación de logaritmos

(a) $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

(b) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

(c) $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

(d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7** Y **9**

Propiedad de la Función Inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Cuando aplicamos la Propiedad de la Función Inversa descrita en la página 201 a $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, obtenemos

$$\log_a(a^x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad x > 0$$

Hacemos una lista de éstas y otras propiedades de logaritmos que estudiamos en esta sección.

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Propiedad	Razón
1. $\log_a 1 = 0$	Debemos elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Debemos elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Debemos elevar a a la potencia x para obtener a^x.
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la que a debe elevarse para obtener x.

EJEMPLO 3 | Aplicar propiedades de logaritmos

Ilustramos las propiedades de logaritmos cuando la base es 5.

$\log_5 1 = 0$	Propiedad 1	$\log_5 5 = 1$	Propiedad 2
$\log_5 5^8 = 8$	Propiedad 3	$5^{\log_5 12} = 12$	Propiedad 4

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19** Y **25**

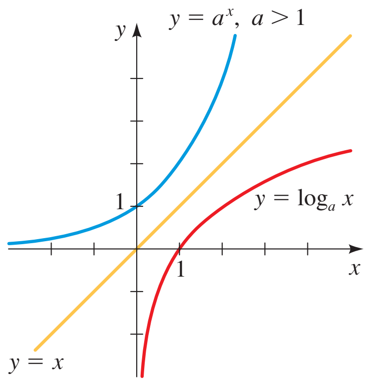


FIGURA 2 Gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$

Gráficas de funciones logarítmicas

Recuerde que si una función biunívoca f tiene dominio A y rango B, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A. Como la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$, concluimos que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$.

La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene al reflejar la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$. La Figura 2 muestra el caso $a > 1$. El hecho de que $y = a^x$ (para $a > 1$) sea una función muy rápidamente creciente para $x > 0$ implica que $y = \log_a x$ es una función muy rápidamente creciente para $x > 1$ (vea Ejercicio 92).

Como $\log_a 1 = 0$, el punto de intersección x de la función $y = \log_a x$ es 1. El eje y es una asíntota vertical de $y = \log_a x$ porque $\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.

EJEMPLO 4 | Graficar una función logarítmica localizando puntos

Trace la gráfica de $f(x) = \log_2 x$.

SOLUCIÓN Para hacer una tabla de valores, escogemos los valores x que sean potencias de 2 para que podamos fácilmente hallar sus logaritmos. Localizamos estos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 3.

x	$\log_2 x$
2^3	3
2^2	2
2	1
1	0
2^{-1}	−1
2^{-2}	−2
2^{-3}	−3
2^{-4}	−4

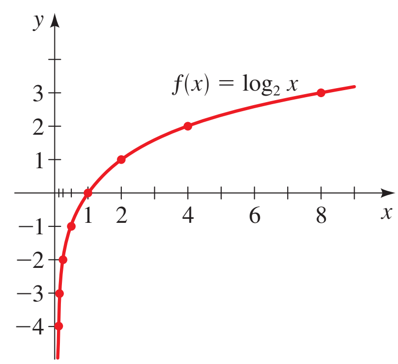


FIGURA 3

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **41**

La Figura 4 muestra las gráficas de la familia de funciones logarítmicas con bases 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se trazan al reflejar las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ (vea Figura 2 en la Sección 4.1) en la recta $y = x$. También podemos localizar puntos como ayuda para trazar estas gráficas, como se ilustra en el Ejemplo 4.

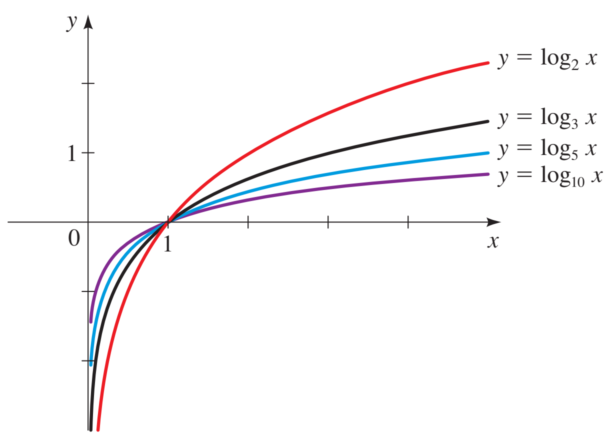


FIGURA 4 Familia de funciones logarítmicas

En los siguientes dos ejemplos graficamos funciones logarítmicas empezando con las gráficas básicas de la Figura 4 y usando las transformaciones de la Sección 2.5.

EJEMPLO 5 | Reflejar gráficas de funciones logarítmicas

Trace la gráfica de cada función.

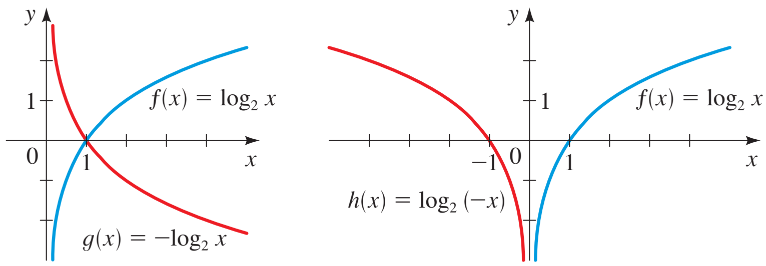
(a) $g(x) = -\log_2 x$

(b) $h(x) = \log_2(-x)$

SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $g(x) = -\log_2 x$ en la Figura 5(a).

(b) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $h(x) = \log_2(-x)$ en la Figura 5(b).



(a) (b)

FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

EJEMPLO 6 | Desplazar gráficas de funciones logarítmicas

Encuentre el dominio de cada función y trace la gráfica.

(a) $g(x) = 2 + \log_5 x$

(b) $h(x) = \log_{10}(x - 3)$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_5 x$ (Figura 4) al desplazar hacia arriba 2 unidades (vea Figura 6). El dominio de f es $(0, \infty)$.

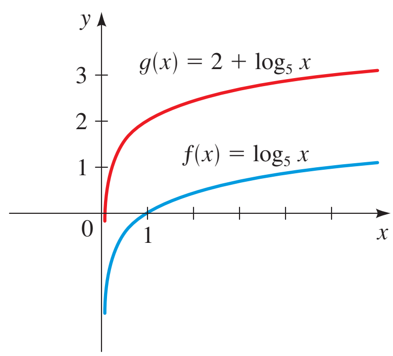


FIGURA 6

(b) La gráfica de h se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_{10} x$ (Figura 4) al desplazar a la derecha 3 unidades (vea Figura 7). La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Como $\log_{10} x$ está definido sólo cuando $x > 0$, el dominio de $h(x) = \log_{10}(x - 3)$ es

$$\{x \mid x - 3 > 0\} = \{x \mid x > 3\} = (3, \infty)$$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

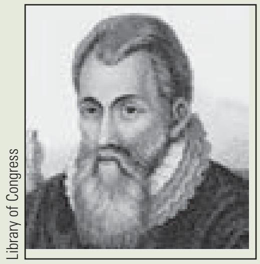
© Bettmann/CORBIS

© Hulton-Deutsch Collection/CORBIS

Aplicación de la ley

Las matemáticas ayudan a la aplicación de la ley en numerosas y sorprendentes formas, desde la reconstrucción de trayectorias de balas hasta determinar el tiempo de una muerte, para calcular la probabilidad de que una muestra de ADN sea de una persona en particular. Un uso interesante está en la búsqueda de personas desaparecidas. Una persona que haya estado desaparecida durante años podría verse muy diferente respecto de su más reciente fotografía disponible. Esto es particularmente cierto si la persona desaparecida es un niño. ¿Alguna vez se ha preguntado usted cómo se verá dentro de 5, 10 o 15 años?

Unos investigadores han hallado que diferentes partes del cuerpo crecen más rápido que otras. Por ejemplo, sin duda usted ha observado que la cabeza de un bebé es mucho más grande con respecto a su cuerpo que la cabeza de un adulto. Como otro ejemplo, la relación entre la longitud del brazo de una persona y la estatura de ésta es $\frac{1}{3}$ en un niño pero alrededor de $\frac{2}{5}$ en un adulto. Al recolectar datos y analizar gráficas, los investigadores pueden determinar las funciones que modelan el crecimiento. Al igual que en todos los fenómenos de crecimiento, las funciones exponenciales y logarítmicas desempeñan una función de importancia decisiva. Por ejemplo, la fórmula que relaciona la longitud l de un brazo con la estatura h es $l = ae^{kh}$ donde a y k son constantes. Estudiando varias características físicas de una persona, biólogos matemáticos modelan cada una de las características con una función que describe la forma en que cambian con el tiempo. Los modelos de características del rostro se pueden programar en una computadora para dar una imagen de cómo cambia con el tiempo la apariencia de una persona. Estas imágenes ayudan a departamentos de aplicación de la ley para localizar a personas extraviadas.



JOHN NAPIER (1550-1617) fue un terrateniente escocés para quien las matemáticas eran un pasatiempo favorito. Hoy lo conocemos por su invención clave: los logaritmos, que él publicó en 1614 bajo el título de *A description of the Marvelous Rule of Logarithms* (*Una descripción de la Maravillosa Regla de los Logaritmos*). En la época de Napier, los logaritmos eran utilizados exclusivamente para simplificar complicados cálculos. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes, los escribiríamos como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 4532 \times 57{,}783 &\approx 10^{3.65629} \times 10^{4.76180} \\ &= 10^{8.41809} \\ &\approx 261{,}872{,}564 \end{aligned}$$

La idea es que multiplicar potencias de 10 es fácil (sólo sumamos sus exponentes). Napier produjo extensas tablas que dan los logaritmos (o exponentes) de números. Desde el advenimiento de calculadoras y computadoras, los logaritmos ya no se usan para este propósito, pero las funciones logarítmicas han encontrado numerosas aplicaciones, algunas de las cuales se describen en este capítulo.

Napier escribió sobre innumerables temas. Una de sus obras más pintorescas es un libro titulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, en el que predijo que el mundo se acabaría en el año 1700.

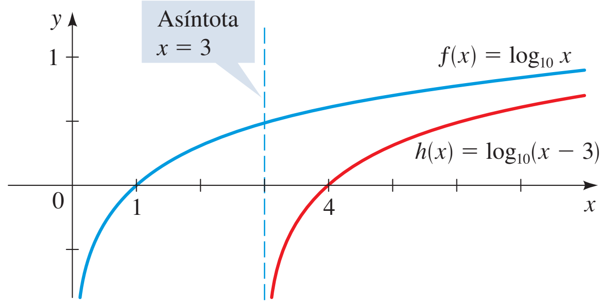


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **53** Y **57**

Logaritmos comunes

Ahora estudiamos logaritmos con base 10.

> **LOGARITMO COMÚN**
>
> El logaritmo común con base 10 se llama **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:
>
> $$\log x = \log_{10} x$$

De la definición de logaritmos podemos fácilmente hallar que

$$\log 10 = 1 \qquad \text{y} \qquad \log 100 = 2$$

Pero ¿cómo definimos log 50? Necesitamos hallar el exponente y tal que $10^y = 50$. Claramente, 1 es demasiado pequeño y 2 es demasiado grande. Por lo tanto

$$1 < \log 50 < 2$$

Para obtener una mejor aproximación, podemos experimentar para hallar una potencia de 10 más cercana a 50. Por fortuna, las calculadoras científicas están equipadas con una tecla LOG que directamente da valores de logaritmos comunes.

EJEMPLO 7 | Evaluar logaritmos comunes

Use calculadora para hallar valores apropiados de $f(x) = \log x$ y utilice los valores para trazar la gráfica.

SOLUCIÓN Hacemos una tabla de valores, usando una calculadora para evaluar la función en aquellos valores de x que no sean potencias de 10. Localizamos esos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 8.

x	$\log x$
0.01	−2
0.1	−1
0.5	−0.301
1	0
4	0.602
5	0.699
10	1

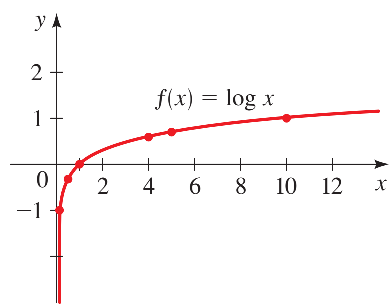


FIGURA 8

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

La respuesta humana al sonido e intensidad luminosa es logarítmica.

Los científicos modelan la respuesta humana a estímulos (sonido, luz o presión) usando funciones logarítmicas. Por ejemplo, la intensidad de un sonido debe ser aumentado muchas veces antes que "sintamos" que la intensidad simplemente se ha duplicado. El psicólogo Gustav Fechner formuló la ley como

$$S = k \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde S es la intensidad subjetiva del estímulo, I es la intensidad física del estímulo, I_0 representa el umbral de intensidad física y k es una constante que es diferente para cada estímulo sensorial.

EJEMPLO 8 | Logaritmos comunes y sonido

La percepción de la intensidad B (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física I (en W/m^2) está dada por

$$B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Estudiamos la escala de decibeles en más detalle en la Sección 4.6.

donde I_0 es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encuentre el nivel de decibeles (intensidad) de un sonido cuya intensidad física I es 100 veces la de I_0.

SOLUCIÓN Encontramos el nivel de decibeles B usando el hecho de que $I = 100I_0$.

$$\begin{aligned} B &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) && \text{Definición de } B \\ &= 10 \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) && I = 100I_0 \\ &= 10 \log 100 && \text{Cancele } I_0 \\ &= 10 \cdot 2 = 20 && \text{Definición de log} \end{aligned}$$

La intensidad del sonido es de 20 dB.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **87**

Logaritmos naturales

La notación ln es una abreviatura del nombre latino *logarithmus naturalis.*

De todas las posibles bases a para logaritmos, resulta que la opción más cómoda para los propósitos de cálculo es el número e, que definimos en la Sección 4.2.

LOGARITMO NATURAL

El logaritmo con base e se denomina **logaritmo natural** y se denota con **ln:**

$$\ln x = \log_e x$$

La función de logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial natural $y = e^x$. Ambas funciones están graficadas en la Figura 9. Por la definición de funciones inversas tenemos

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

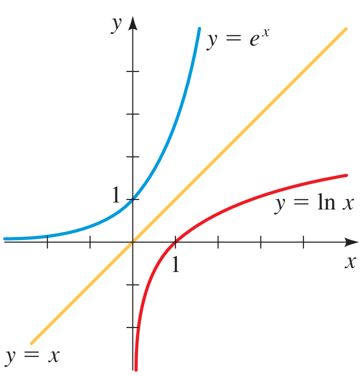


FIGURA 9 Gráfica de la función de logaritmo natural

Si sustituimos $a = e$ y escribimos "ln" por "$\log_e$" en las propiedades de logaritmos ya citadas antes, obtenemos las siguientes propiedades de logaritmos naturales.

PROPIEDADES DE LOGARITMOS NATURALES

Propiedad	Razón
1. $\ln 1 = 0$	Debemos elevar e a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\ln e = 1$	Debemos elevar e a la potencia 1 para obtener e.
3. $\ln e^x = x$	Debemos elevar e a la potencia x para obtener e^x.
4. $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ es la potencia a la que e debe elevarse para obtener x.

Las calculadoras están equipadas con una tecla LN que directamente presenta los valores de logaritmos naturales.

EJEMPLO 9 | Evaluar la función de logaritmo natural

(a) $\ln e^8 = 8$ — Definición de logaritmo natural

(b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$ — Definición de logaritmo natural

(c) $\ln 5 \approx 1.609$ — Use la tecla LN de su calculadora

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

EJEMPLO 10 | Hallar el dominio de una función logarítmica

Encuentre el dominio de la función $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

SOLUCIÓN Igual que con cualquier función logarítmica, $\ln x$ está definida cuando $x > 0$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\}$$
$$= \{x \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

EJEMPLO 11 | Trazar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de la función $y = x\ln(4 - x^2)$, y úsela para hallar las asíntotas y valores máximo y mínimo locales.

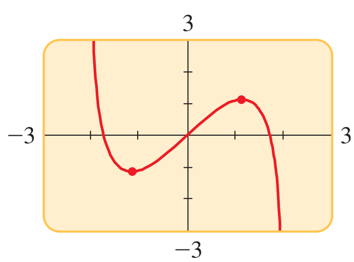


FIGURA 10
$y = x\ln(4 - x^2)$

SOLUCIÓN Como en el Ejemplo 10, el dominio de esta función es el intervalo $(-2, 2)$, de modo que escogemos el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$. La gráfica se muestra en la Figura 10, y de ella vemos que las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

La función tiene un punto máximo local a la derecha de $x = 1$ y un punto mínimo local a la izquierda de $x = -1$. Al hacer acercamiento (zoom) y trazar a lo largo de la gráfica con el cursor, encontramos que el valor máximo local es aproximadamente 1.13 y esto ocurre cuando $x \approx 1.15$. Del mismo modo (o al observar que la función es impar), encontramos que el valor mínimo local es alrededor de -1.13 y se presenta cuando $x \approx -1.15$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

4.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. $\log x$ es el exponente al cual la base 10 debe elevarse para obtener ________. Por lo tanto, podemos completar la tabla siguiente para $\log x$.

x	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	$10^{1/2}$
$\log x$								

2. La función $f(x) = \log_9 x$ es la función logarítmica con base ________. Por tanto, $f(9) =$ ________, $f(1) =$ ________, $f(\frac{1}{9}) =$ ________, y $f(3) =$ ________.

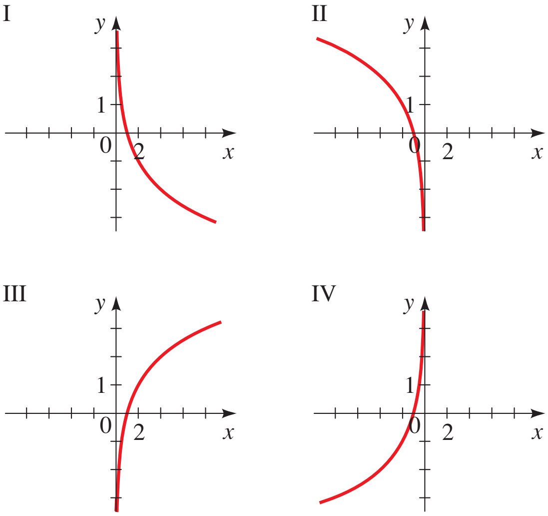
3. (a) $5^3 = 125$, entonces $\log_{\square} \square = \square$

(b) $\log_5 25 = 2$, entonces $\square^{\square} = \square$

4. Relacione la función logarítmica con su gráfica.

(a) $f(x) = \log_2 x$ **(b)** $f(x) = \log_2(-x)$

(c) $f(x) = -\log_2 x$ **(d)** $f(x) = -\log_2(-x)$



HABILIDADES

5-6 ■ Complete la tabla al hallar la forma logarítmica o exponencial apropiada de la ecuación, como en el Ejemplo 1.

5.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	
$\log_8 64 = 2$	
	$8^{2/3} = 4$
	$8^3 = 512$
$\log_8\left(\frac{1}{8}\right) = -1$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

6.

Forma logarítmica	Forma exponencial
	$4^3 = 64$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	
	$4^{3/2} = 8$
$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$	
$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	
	$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

7-12 ■ Exprese la ecuación en forma exponencial.

7. (a) $\log_5 25 = 2$ **(b)** $\log_5 1 = 0$

8. (a) $\log_{10} 0.1 = -1$ **(b)** $\log_8 512 = 3$

9. (a) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ **(b)** $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

10. (a) $\log_3 81 = 4$ **(b)** $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

11. (a) $\ln 5 = x$ **(b)** $\ln y = 5$

12. (a) $\ln(x + 1) = 2$ **(b)** $\ln(x - 1) = 4$

13-18 ■ Exprese la ecuación en forma logarítmica.

13. (a) $5^3 = 125$ **(b)** $10^{-4} = 0.0001$

14. (a) $10^3 = 1000$ **(b)** $81^{1/2} = 9$

15. (a) $8^{-1} = \frac{1}{8}$ **(b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$

16. (a) $4^{-3/2} = 0.125$ **(b)** $7^3 = 343$

17. (a) $e^x = 2$ **(b)** $e^3 = y$

18. (a) $e^{x+1} = 0.5$ **(b)** $e^{0.5x} = t$

19-28 ■ Evalúe la expresión.

19. (a) $\log_3 3$ **(b)** $\log_3 1$ **(c)** $\log_3 3^2$

20. (a) $\log_5 5^4$ **(b)** $\log_4 64$ **(c)** $\log_3 9$

21. (a) $\log_6 36$ **(b)** $\log_9 81$ **(c)** $\log_7 7^{10}$

22. (a) $\log_2 32$ **(b)** $\log_8 8^{17}$ **(c)** $\log_6 1$

23. (a) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$ **(b)** $\log_{10}\sqrt{10}$ **(c)** $\log_5 0.2$

24. (a) $\log_5 125$ **(b)** $\log_{49} 7$ **(c)** $\log_9 \sqrt{3}$

25. (a) $2^{\log_2 37}$ **(b)** $3^{\log_3 8}$ **(c)** $e^{\ln\sqrt{5}}$

26. (a) $e^{\ln \pi}$ **(b)** $10^{\log 5}$ **(c)** $10^{\log 87}$

27. (a) $\log_8 0.25$ **(b)** $\ln e^4$ **(c)** $\ln(1/e)$

28. (a) $\log_4 \sqrt{2}$ **(b)** $\log_4\left(\frac{1}{2}\right)$ **(c)** $\log_4 8$

29-36 ■ Use la definición de la función logarítmica para hallar x.

29. (a) $\log_2 x = 5$ **(b)** $\log_2 16 = x$

30. (a) $\log_5 x = 4$ **(b)** $\log_{10} 0.1 = x$

31. (a) $\log_3 243 = x$ **(b)** $\log_3 x = 3$

32. (a) $\log_4 2 = x$ **(b)** $\log_4 x = 2$

33. (a) $\log_{10} x = 2$ **(b)** $\log_5 x = 2$

34. **(a)** $\log_x 1000 = 3$ **(b)** $\log_x 25 = 2$

35. **(a)** $\log_x 16 = 4$ **(b)** $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

36. **(a)** $\log_x 6 = \frac{1}{2}$ **(b)** $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

37-40 ■ Use calculadora para evaluar la expresión, aproximada a cuatro lugares decimales.

37. **(a)** $\log 2$ **(b)** $\log 35.2$ **(c)** $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

38. **(a)** $\log 50$ **(b)** $\log \sqrt{2}$ **(c)** $\log(3\sqrt{2})$

39. **(a)** $\ln 5$ **(b)** $\ln 25.3$ **(c)** $\ln(1 + \sqrt{3})$

40. **(a)** $\ln 27$ **(b)** $\ln 7.39$ **(c)** $\ln 54.6$

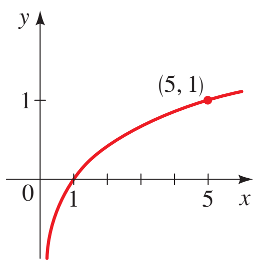
41-44 ■ Trace la gráfica de la función al localizar puntos.

41. $f(x) = \log_3 x$ **42.** $g(x) = \log_4 x$

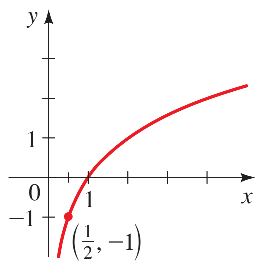
43. $f(x) = 2 \log x$ **44.** $g(x) = 1 + \log x$

45-48 ■ Encuentre la función de la forma $y = \log_a x$ cuya gráfica se da.

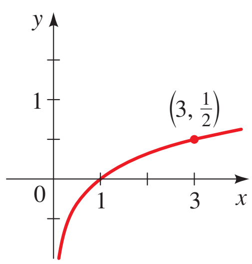
45.



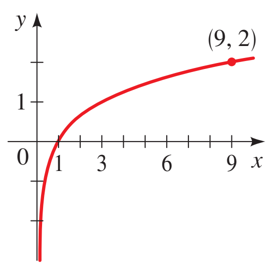
46.



47.



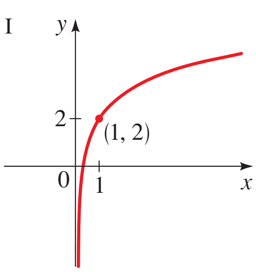
48.



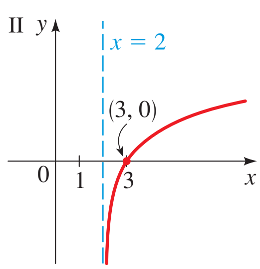
49-50 ■ Relacione la función logarítmica con una de las gráficas marcadas I o II.

49. $f(x) = 2 + \ln x$ **50.** $f(x) = \ln(x - 2)$

I



II



51. Trace la gráfica de $y = 4^x$ y, a continuación, úsela para trazar la gráfica de $y = \log_4 x$.

52. Trace la gráfica de $y = 3^x$ y, a continuación, úsela para trazar la gráfica de $y = \log_3 x$.

53-62 ■ Grafique la función, no al localizar puntos sino empezando de las gráficas de las Figuras 4 y 9. Exprese el dominio, rango y asíntota.

53. $f(x) = \log_2(x - 4)$ **54.** $f(x) = -\log_{10} x$

55. $g(x) = \log_5(-x)$ **56.** $g(x) = \ln(x + 2)$

57. $y = 2 + \log_3 x$ **58.** $y = \log_3(x - 1) - 2$

59. $y = 1 - \log_{10} x$ **60.** $y = 1 + \ln(-x)$

61. $y = |\ln x|$ **62.** $y = \ln |x|$

63-68 ■ Encuentre el dominio de la función.

63. $f(x) = \log_{10}(x + 3)$ **64.** $f(x) = \log_5(8 - 2x)$

65. $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$ **66.** $g(x) = \ln(x - x^2)$

67. $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

68. $h(x) = \sqrt{x - 2} - \log_5(10 - x)$

69-74 ■ Trace la gráfica de la función en un rectángulo de vista apropiado, y úsela para hallar el dominio, las asíntotas y los valores máximo y mínimo locales.

69. $y = \log_{10}(1 - x^2)$ **70.** $y = \ln(x^2 - x)$

71. $y = x + \ln x$ **72.** $y = x(\ln x)^2$

73. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **74.** $y = x \log_{10}(x + 10)$

75-78 ■ Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

75. $f(x) = 2^x$, $g(x) = x + 1$

76. $f(x) = 3^x$, $g(x) = x^2 + 1$

77. $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = x - 2$

78. $f(x) = \log x$, $g(x) = x^2$

79. Compare las rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ al trazar sus gráficas en una pantalla común usando el rectángulo de vista $[-1, 30]$ por $[-1, 6]$.

80. **(a)** Trazando las gráficas de las funciones

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x) \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

en un rectángulo de vista apropiado, demuestre que aun cuando una función logarítmica empieza más alta que una función de raíz, es finalmente superada por la función de raíz.

(b) Encuentre, aproximadas a dos lugares decimales, las soluciones de la ecuación $\sqrt{x} = 1 + \ln(1 + x)$.

81-82 ■ Nos dan una familia de funciones. **(a)** Trace gráficas de la familia para $c = 1, 2, 3$ y 4. **(b)** ¿Cómo están relacionadas las gráficas de la parte (a)?

81. $f(x) = \log(cx)$ **82.** $f(x) = c \log x$

83-84 ■ Nos dan una función $f(x)$. **(a)** Encuentre el dominio de la función f. **(b)** Encuentre la función inversa de f.

83. $f(x) = \log_2(\log_{10} x)$ **84.** $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

85. **(a)** Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$.

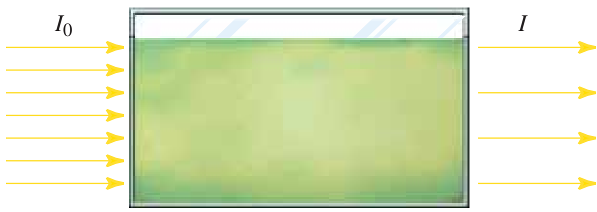
(b) ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

APLICACIONES

86. Absorción de luz Un espectrofotómetro mide la concentración de una muestra disuelta en agua al hacer brillar una luz a través de ella y registrar la cantidad de luz que emerge. En otras palabras, si sabemos la cantidad de luz que es absorbida, podemos calcular la concentración de la muestra. Para cierta sustancia, la concentración (en moles por litro) se encuentra usando la fórmula

$$C = -2500 \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad de la luz incidente e I es la intensidad de la luz que emerge. Encuentre la concentración de la sustancia si la intensidad I es 70% de I_0.



87. Determinación de la edad por carbono La edad de un artefacto antiguo puede ser determinada por la cantidad de carbono 14 radiactivo restante en una muestra. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del artefacto (en años) está dada por

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que queda en el objeto es 73% de la cantidad original D_0.

88. Colonia de bacterias Cierta cepa de bacterias se divide cada tres horas. Si una colonia se inicia con 50 bacterias, entonces el tiempo t (en horas) necesario para que la colonia crezca a N bacterias está dado por

$$t = 3\frac{\log(N/50)}{\log 2}$$

Encuentre el tiempo necesario para que la colonia crezca a un millón de bacterias.

89. Inversión El tiempo necesario para duplicar la cantidad de una inversión a una tasa de interés r capitalizado continuamente está dado por

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Encuentre el tiempo necesario para duplicar una inversión al 6%, 7% y 8%.

90. Carga de una batería La rapidez a la que se carga una batería es más lenta cuanto más cerca está la batería de su carga máxima C_0. El tiempo (en horas) necesario para cargar una batería completamente descargada a una carga C está dado por

$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde k es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería, $k = 0.25$. Si esta batería está completamente descargada, ¿cuánto tomará cargarla al 90% de su carga máxima C_0?

91. Dificultad de una tarea La dificultad en "alcanzar un objetivo" (por ejemplo usar el ratón para hacer clic en un icono en la pantalla de la computadora) depende de la distancia a la que está el objetivo y el tamaño de éste. De acuerdo con la Ley de Fitts, el índice de dificultad (ID) está dado por

$$\text{ID} = \frac{\log(2A/W)}{\log 2}$$

donde W es el ancho del objetivo y A es la distancia al centro del objetivo. Compare la dificultad de hacer clic en un icono de 5 mm de ancho con hacer clic en uno de 10 mm de ancho. En cada caso, suponga que el ratón está a 100 mm del icono.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

92. Altura de la gráfica de una función logarítmica Suponga que la gráfica de $y = 2^x$ está trazada en un plano de coordenadas donde la unidad de medición es 1 pulgada.

(a) Demuestre que, a una distancia de 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica es de unas 265 millas.

(b) Si la gráfica de $y = \log_2 x$ se traza en el mismo conjunto de ejes, ¿a qué distancia a la derecha del origen tenemos que ir antes que la altura de la curva llegue a 2 pies?

93. El Googolplex Un **googol** es 10^{100}, y un **googolplex** es 10^{googol}. Encuentre

$$\log(\log(\text{googol})) \qquad \text{y} \qquad \log(\log(\log(\text{googolplex})))$$

94. Comparación de logaritmos ¿Cuál es más grande, $\log_4 17$ o $\log_5 24$? Explique su razonamiento.

95. Número de dígitos de un entero Compare log 1000 con el número de dígitos de 1000. Haga lo mismo para 10,000. ¿Cuántos dígitos tiene cualquier número entre 1000 y 10,000? ¿Entre cuáles dos valores debe encontrarse el logaritmo común de tal número? Use sus observaciones para explicar por qué el número de dígitos de cualquier entero positivo x es $[\![\log x]\!] + 1$. (El símbolo $[\![n]\!]$ es la función entero mayor definida en la Sección 2.2.) ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{100}?

4.4 LEYES DE LOGARITMOS

Leyes de logaritmos ▶ Expansión y combinación de expresiones logarítmicas ▶ Fórmula para cambio de base

En esta sección estudiamos propiedades de logaritmos. Estas propiedades dan a las funciones logarítmicas una amplia variedad de aplicaciones, como veremos en la Sección 4.6.

▼ Leyes de logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, las Leyes de Exponentes dan lugar a las Leyes de Logaritmos.

LEYES DE LOGARITMOS

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean A, B y C cualesquier números reales con $A > 0$ y $B > 0$.

Ley	Descripción
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = C\log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

DEMOSTRACIÓN Hacemos uso de la propiedad $\log_a a^x = x$ de la Sección 4.3.

Ley 1 Sean $\log_a A = u$ y $\log_a B = v$. Cuando se escriben en forma exponencial, estas cantidades se convierten en

$$a^u = A \qquad \text{y} \qquad a^v = B$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \log_a(AB) &= \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v}) \\ &= u + v = \log_a A + \log_a B \end{aligned}$$

Ley 2 Usando la Ley 1, tenemos

$$\log_a A = \log_a\left[\left(\frac{A}{B}\right)B\right] = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) + \log_a B$$

Así

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

Ley 3 Sean $\log_a A = u$. Entonces $a^u = A$, por lo que

$$\log_a(A^C) = \log_a(a^u)^C = \log_a(a^{uC}) = uC = C\log_a A$$

■

EJEMPLO 1 | Uso de las leyes de logaritmos para evaluar expresiones

Evalúe las expresiones siguientes.

(a) $\log_4 2 + \log_4 32$

(b) $\log_2 80 - \log_2 5$

(c) $-\frac{1}{3}\log 8$

SOLUCIÓN

(a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32)$ — Ley 1

$= \log_4 64 = 3$ — Porque $64 = 4^3$

(b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right)$ — Ley 2

$= \log_2 16 = 4$ — Porque $16 = 2^4$

(c) $-\frac{1}{3}\log 8 = \log 8^{-1/3}$ — Ley 3

$= \log\left(\frac{1}{2}\right)$ — Propiedad de exponentes negativos

≈ -0.301 — Calculadora

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7, 9** Y **11** ■

Expansión y combinación de expresiones logarítmicas

Las Leyes de Logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de un producto o un cociente como la suma o diferencia de logaritmos. Este proceso, llamado *expansión* de una expresión logarítmica, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Expansión de expresiones logarítmicas

Use las Leyes de Logaritmos para expandir estas expresiones.

(a) $\log_2(6x)$ **(b)** $\log_5(x^3y^6)$ **(c)** $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

SOLUCIÓN

(a) $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$ — Ley 1

(b) $\log_5(x^3y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6$ — Ley 1

$= 3\log_5 x + 6\log_5 y$ — Ley 3

(c) $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln\sqrt[3]{c}$ — Ley 2

$= \ln a + \ln b - \ln c^{1/3}$ — Ley 1

$= \ln a + \ln b - \frac{1}{3}\ln c$ — Ley 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19, 21** Y **33** ■

Las Leyes de Logaritmos también nos permiten invertir el proceso de expansión que se hizo en el Ejemplo 2. Es decir, podemos escribir sumas y diferencias de logaritmos como un solo logaritmo. Este proceso, llamado *combinar* expresiones logarítmicas, está ilustrado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 | Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\log x + \frac{1}{2}\log(x + 1)$ en un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1) = \log x^3 + \log(x+1)^{1/2}$ — Ley 3

$= \log(x^3(x+1)^{1/2})$ — Ley 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47** ■

EJEMPLO 4 | Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2 + 1)$ en un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3\ln s + \tfrac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1) &= \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2+1)^4 && \text{Ley 3} \\ &= \ln(s^3 t^{1/2}) - \ln(t^2+1)^4 && \text{Ley 1} \\ &= \ln\left(\frac{s^3\sqrt{t}}{(t^2+1)^4}\right) && \text{Ley 2} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

Advertencia Aun cuando las Leyes de Logaritmos nos dicen cómo calcular el logaritmo de un producto o un cociente, *no hay regla correspondiente para el logaritmo de una suma o una diferencia.* Por ejemplo,

$$\log_a(x+y) \cancel{=} \log_a x + \log_a y$$

De hecho, sabemos que el lado derecho es igual a $\log_a(xy)$. Del mismo modo, no simplifique incorrectamente cocientes o potencias de logaritmos. Por ejemplo,

$$\frac{\log 6}{\log 2} \cancel{=} \log\left(\frac{6}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad (\log_2 x)^3 \cancel{=} 3\log_2 x$$

Se usan funciones logarítmicas para modelar diversas situaciones donde interviene el comportamiento humano. Uno de éstos es la rapidez con la que olvidamos cosas que hemos aprendido. Por ejemplo, si usted aprende álgebra a cierto nivel (por ejemplo 90% en un examen) y no usa álgebra durante un tiempo, ¿cuánto retendrá después de una semana, un mes o un año? Hermann Ebbinghaus (1850-1909) estudió este fenómeno y formuló la ley descrita en el ejemplo siguiente.

Olvidar lo que hemos aprendido depende de cuánto tiempo hace que lo aprendimos.

EJEMPLO 5 | La ley de olvido

Si una tarea se aprende a cierto nivel P_0, después de cierto tiempo t el nivel de recordatorio P satisface la ecuación

$$\log P = \log P_0 - c\log(t+1)$$

donde c es una constante que depende del tipo de tarea y t se mide en meses.

(a) Despeje P.

(b) Si su calificación en el examen de historia es 90, ¿qué calificación esperaría obtener en un examen similar después de dos meses? ¿Después de un año? (Suponga que $c = 0.2$.)

SOLUCIÓN

(a) Primero combinamos el lado derecho.

$$\begin{aligned} \log P &= \log P_0 - c\log(t+1) && \text{Ecuación dada} \\ \log P &= \log P_0 - \log(t+1)^c && \text{Ley 3} \\ \log P &= \log\frac{P_0}{(t+1)^c} && \text{Ley 2} \\ P &= \frac{P_0}{(t+1)^c} && \text{Porque log es biunívoco} \end{aligned}$$

(b) Aquí $P_0 = 90$, $c = 0.2$ y t se mide en meses.

En dos meses: $t = 2$ y $P = \dfrac{90}{(2+1)^{0.2}} \approx 72$

En un año: $t = 12$ y $P = \dfrac{90}{(12+1)^{0.2}} \approx 54$

Sus calificaciones esperadas después de dos meses y un año son 72 y 54, respectivamente.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

▼ Fórmula para cambio de base

Para algunos propósitos encontramos útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que nos dan $\log_a x$ y deseamos hallar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x$$

Escribimos esto en forma exponencial y tomamos el logaritmo, con base a, de cada lado.

$$\begin{aligned} b^y &= x && \text{Forma exponencial} \\ \log_a(b^y) &= \log_a x && \text{Tome } \log_a \text{ de cada lado} \\ y\log_a b &= \log_a x && \text{Ley 3} \\ y &= \frac{\log_a x}{\log_a b} && \text{Divida entre } \log_a b \end{aligned}$$

Esto demuestra la siguiente fórmula.

Podemos escribir la Fórmula para Cambio para Base como

$$\log_b x = \left(\frac{1}{\log_a b}\right)\log_a x$$

Entonces $\log_a x$ es sólo un múltiplo constante de $\log_a x$; la constante es $\dfrac{1}{\log_a b}$.

FÓRMULA PARA CAMBIO DE BASE

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

En particular, si ponemos $x = a$, entonces $\log_a a$, y esta fórmula se convierte en

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ahora podemos evaluar un logaritmo a *cualquier* base con el uso de la Fórmula para Cambio de Base, para expresar el logaritmo en términos de logaritmos comunes o logaritmos naturales y luego usar calculadora.

EJEMPLO 6 | Evaluar logaritmos con la Fórmula para Cambio de Base

Use la Fórmula para Cambio de Base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, aproximado a cinco lugares decimales.

(a) $\log_8 5$ **(b)** $\log_9 20$

SOLUCIÓN

(a) Usamos la Fórmula para Cambio de Base con $b = 8$ y $a = 10$:

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} \approx 0.77398$$

(b) Usamos la Fórmula para Cambio de Base con $b = 9$ y $a = e$:

$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **57** ■

EJEMPLO 7 | Usar la Fórmula para Cambio de Base para graficar una función logarítmica

Use calculadora graficadora para graficar $f(x) = \log_6 x$.

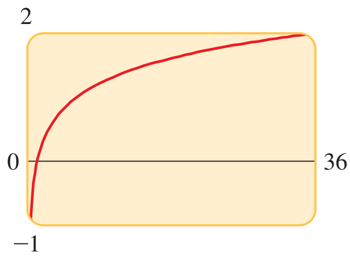


FIGURA 1 $f(x) = \log_6 x = \dfrac{\ln x}{\ln 6}$

SOLUCIÓN Las calculadoras no tienen tecla para $\log_6$, de modo que usamos la Fórmula para Cambio de Base para escribir

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

Como las calculadoras tienen una tecla LN, podemos ingresar esta nueva forma de la función y graficarla. La gráfica se muestra en la Figura 1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63** ■

4.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El logaritmo de un producto de dos números es igual que la___ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(25 \cdot 125) =$___+____.

2. El logaritmo de un cociente de dos números es igual que la ___ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(\frac{25}{125}) =$ ________ − ________..

3. El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual que la potencia _____ el logaritmo del número. Por tanto, $\log_5(25^{10}) =$_______.

4. (a) Podemos expandir $\left(\dfrac{x^2 y}{z}\right)$ para obtener _______.

(b) Podemos combinar $2 \log x + \log y - \log z$ para obtener _______.

5. La mayor parte de calculadoras pueden hallar logaritmos con base ____ y base ___. Para hallar logaritmos con bases diferentes, usamos la Fórmula _____. Para Hallar $\log_7 12$, escribimos

$$\log_7 12 = \frac{\log \square}{\log \square} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

6. *¿Verdadero o falso?* Obtenemos la misma respuesta si hacemos el cálculo del Ejercicio 5 usando ln en lugar de log.

HABILIDADES

7-18 ■ Evalúe la expresión.

7. $\log_3 \sqrt{27}$ **8.** $\log_2 160 - \log_2 5$

9. $\log 4 + \log 25$ **10.** $\log \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$

11. $\log_4 192 - \log_4 3$ **12.** $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$

13. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

14. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

15. $\log_4 16^{100}$ **16.** $\log_2 8^{33}$

17. $\log(\log 10^{10{,}000})$ **18.** $\ln(\ln e^{e^{200}})$

19-44 ■ Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión.

19. $\log_2(2x)$ **20.** $\log_3(5y)$

21. $\log_2(x(x-1))$ **22.** $\log_5 \dfrac{x}{2}$

23. $\log 6^{10}$ **24.** $\ln \sqrt{z}$

25. $\log_2(AB^2)$ **26.** $\log_6 \sqrt[4]{17}$

27. $\log_3(x\sqrt{y})$ **28.** $\log_2(xy)^{10}$

29. $\log_5 \sqrt[3]{x^2+1}$ **30.** $\log_a\left(\dfrac{x^2}{yz^3}\right)$

31. $\ln \sqrt{ab}$ **32.** $\ln \sqrt[3]{3r^2 s}$

33. $\log\left(\dfrac{x^3 y^4}{z^6}\right)$ **34.** $\log\left(\dfrac{a^2}{b^4 \sqrt{c}}\right)$

35. $\log_2\left(\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ **36.** $\log_5 \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

37. $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)$ **38.** $\ln \dfrac{3x^2}{(x+1)^{10}}$

39. $\log \sqrt[4]{x^2+y^2}$ **40.** $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\right)$

41. $\log \sqrt{\dfrac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$ **42.** $\log \sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$

43. $\ln\left(\dfrac{x^3\sqrt{x-1}}{3x+4}\right)$ **44.** $\log\left(\dfrac{10^x}{x(x^2+1)(x^4+2)}\right)$

45-54 ■ Use las Leyes de Logaritmos para combinar la expresión.

45. $\log_3 5 + 5 \log_3 2$

46. $\log 12 + \frac{1}{2} \log 7 - \log 2$

47. $\log_2 A + \log_2 B - 2 \log_2 C$

48. $\log_5(x^2 - 1) - \log_5(x - 1)$

49. $4 \log x - \frac{1}{3} \log(x^2+1) + 2 \log(x-1)$

50. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2 \ln c$

51. $\ln 5 + 2 \ln x + 3 \ln(x^2+5)$

52. $2(\log_5 x + 2 \log_5 y - 3 \log_5 z)$

53. $\frac{1}{3}\log(x+2)^3 + \frac{1}{2}[\log x^4 - \log(x^2 - x - 6)^2]$

54. $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$

55-62 ■ Use la Regla para Cambio de Base y una calculadora para evaluar el logaritmo, redondeado a seis lugares decimales. Use logaritmos naturales o comunes.

55. $\log_2 5$ **56.** $\log_5 2$

57. $\log_3 16$ **58.** $\log_6 92$

59. $\log_7 2.61$ **60.** $\log_6 532$

61. $\log_4 125$ **62.** $\log_{12} 2.5$

63. Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

A continuación use este dato para trazar la gráfica de la función $f(x) = \log_3 x$.

64. Trace gráficas de la familia de funciones $y = \log_a x$ para $a = 2$, e, 5 y 10 en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista $[0, 5]$ por $[-3, 3]$. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

65. Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que

$$\log e = \frac{1}{\ln 10}$$

66. Simplifique: $(\log_2 5)(\log_5 7)$

67. Demuestre que $-\ln(x - \sqrt{x^2-1}) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

APLICACIONES

68. Olvido Use la Ley de Olvido (Ejemplo 5) para estimar la calificación de un estudiante, en un examen de biología, dos años después que obtuvo una calificación de 80 en un examen sobre el mismo material. Suponga que $c = 0.3$ y t se mide en meses.

69. Distribución de riqueza Vilfredo Pareto (1848-1923) observó que la mayor parte de la riqueza de un país es propiedad de unos cuantos miembros de la población. El **Principio de Pareto** es

$$\log P = \log c - k\log W$$

donde W es el nivel de riqueza (cuánto dinero tiene una persona) y P es el número de personas de la población que tiene ese dinero.

(a) De esa ecuación, despeje P.

(b) Suponga que $k = 2.1$, $c = 8000$, y W se mide en millones de dólares. Use la parte (a) para hallar el número de personas que tienen \$2 millones de dólares o más. ¿Cuántas personas tienen \$10 millones de dólares o más?

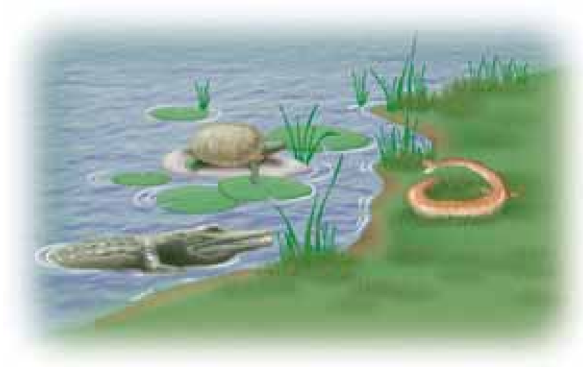
70. Diversidad Algunos biólogos modelan el número de especies S en un área fija A (por ejemplo una isla) con la relación especie-área

$$\log S = \log c + k\log A$$

donde c y k son constantes positivas que dependen del tipo de especie y hábitat.

(a) De la ecuación, despeje S.

(b) Use la parte (a) para demostrar que si $k = 3$, entonces duplicar el área aumenta ocho veces el número de especies.



71. Magnitud de estrellas La magnitud M de una estrella es una medida del brillo que una estrella parece tener a la vista del hombre. Está definida como

$$M = -2.5\log\left(\frac{B}{B_0}\right)$$

donde B es el brillo real de la estrella y B_0 es una constante.

(a) Expanda el lado derecho de la ecuación.

(b) Use la parte (a) para demostrar que cuanto más brillante sea una estrella, menor es su magnitud.

(c) Betelgeuse es unas 100 veces más brillante que Albiero. Use la parte (a) para demostrar que Betelgeuse es 5 magnitudes menos brillante que Albiero.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

72. ¿Verdadero o falso? Discuta cada una de las ecuaciones siguientes y determine si es verdadera para todos los valores posibles de las variables. (Ignore valores de las variables para las que cualquier término no esté definido.)

(a) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log x}{\log y}$

(b) $\log_2(x - y) = \log_2 x - \log_2 y$

(c) $\log_5\left(\frac{a}{b^2}\right) = \log_5 a - 2\log_5 b$

(d) $\log 2^z = z\log 2$

(e) $(\log P)(\log Q) = \log P + \log Q$

(f) $\frac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

(g) $(\log_2 7)^x = x\log_2 7$

(h) $\log_a a^a = a$

(i) $\log(x - y) = \frac{\log x}{\log y}$

(j) $-\ln\left(\frac{1}{A}\right) = \ln A$

73. Encuentre el error ¿Qué está mal en el siguiente argumento?

$$\begin{aligned} \log 0.1 &< 2 \log 0.1 \\ &= \log(0.1)^2 \\ &= \log 0.01 \\ \log 0.1 &< \log 0.01 \\ 0.1 &< 0.01 \end{aligned}$$

74. Desplazamiento, contracción y alargamiento de gráficas de funciones Sea $f(x) = x^2$. Demuestre que $f(2x) = 4f(x)$ y explique la forma en que esto demuestra que la contracción de la gráfica de f, horizontalmente, tiene el mismo efecto que alargarla verticalmente. A continuación use las identidades $e^{2+x} = e^2e^x$ y $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ para demostrar que para $g(x) = e^x$ un desplazamiento horizontal es igual que un alargamiento vertical y para $h(x) = \ln x$ una contracción horizontal es lo mismo que un desplazamiento vertical.

4.5 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuaciones exponenciales ▶ Ecuaciones logarítmicas ▶ Interés compuesto

En esta sección resolvemos ecuaciones que contienen funciones exponenciales o logarítmicas. Las técnicas que desarrollamos aquí se usarán en la siguiente sección para resolver problemas aplicados.

▼ Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en la que la variable aparece en el exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 7$$

La variable x presenta una dificultad porque está en el exponente. Para resolver esta dificultad, tomamos el logaritmo de cada lado y luego usamos las Leyes de Logaritmos para "bajar x" del exponente.

$$\begin{aligned} 2^x &= 7 && \text{Ecuación dada} \\ \ln 2^x &= \ln 7 && \text{Tome ln de cada lado} \\ x \ln 2 &= \ln 7 && \text{Ley 3 (bajar exponente)} \\ x &= \frac{\ln 7}{\ln 2} && \text{Despeje } x \\ &\approx 2.807 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

Recuerde que la Ley 3 de las Leyes de Logaritmos dice que $\log_a A^c = C \log_a A$.

El método que usamos para resolver $2^x = 7$ es típico de cómo resolvemos ecuaciones exponenciales en general.

GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES

1. Aísle la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado y a continuación use las Leyes de Logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 1 | Resolver una ecuación exponencial

Encuentre la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, redondeada a seis lugares decimales.

SOLUCIÓN Tomamos el logaritmo común de cada lado y usamos la Ley 3.

$$\begin{aligned} 3^{x+2} &= 7 && \text{Ecuación dada} \\ \log(3^{x+2}) &= \log 7 && \text{Tome log de cada lado} \\ (x+2)\log 3 &= \log 7 && \text{Ley 3 (bajar exponente)} \\ x + 2 &= \frac{\log 7}{\log 3} && \text{Divida entre log 3} \\ x &= \frac{\log 7}{\log 3} - 2 && \text{Reste 2} \\ &\approx -0.228756 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

Podríamos haber usado logaritmos naturales en lugar de logaritmos comunes. De hecho, usando los mismos pasos, obtenemos

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx -0.228756$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = -0.228756$ en la ecuación original y usando calculadora, obtenemos

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

EJEMPLO 2 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$.

SOLUCION Primero dividimos entre 8 para aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$$\begin{aligned} 8e^{2x} &= 20 && \text{Ecuación dada} \\ e^{2x} &= \tfrac{20}{8} && \text{Divida entre 8} \\ \ln e^{2x} &= \ln 2.5 && \text{Tome ln de cada lado} \\ 2x &= \ln 2.5 && \text{Propiedad de ln} \\ x &= \frac{\ln 2.5}{2} && \text{Divida entre 2} \\ &\approx 0.458 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = 0.458$ en la ecuación original y utilizando una calculadora, tenemos

$$8e^{2(0.458)} \approx 20 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

EJEMPLO 3 | Resolver una ecuación exponencial de forma algebraica y gráfica

Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$ de manera algebraica y gráfica.

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Como la base del término exponencial es e, usamos logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$$\begin{aligned} e^{3-2x} &= 4 && \text{Ecuación dada} \\ \ln(e^{3-2x}) &= \ln 4 && \text{Tome ln de cada lado} \\ 3 - 2x &= \ln 4 && \text{Propiedad de ln} \\ -2x &= -3 + \ln 4 && \text{Reste 3} \\ x &= \tfrac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807 && \text{Multiplique por } -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Es necesario verificar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

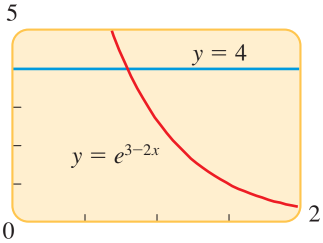


FIGURA 1

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Graficamos las ecuaciones $y = e^{3-2x}$ y $y = 4$ en el mismo rectángulo de vista como en la Figura 1. Las soluciones se presentan donde las gráficas se intersecan. Si hacemos acercamiento (zoom) en el punto de intersección de las dos gráficas, vemos que $x \approx 0.81$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

EJEMPLO 4 | Una ecuación exponencial de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Para aislar el término exponencial, factorizamos.

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ley de Exponentes}$$

$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0 \qquad \text{Factorice (un cuadrático en } e^x\text{)}$$

$$e^x - 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad e^x + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad del Producto Cero}$$

$$e^x = 3 \qquad\qquad e^x = -2$$

Si hacemos $w = e^x$, obtenemos la ecuación cuadrática

$$w^2 - w - 6 = 0$$

que se factoriza como

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

La ecuación $e^x = 3$ lleva a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Entonces, $x = \ln 3 \approx 1.0986$ es la única solución. Es necesario comprobar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

EJEMPLO 5 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $3xe^x + x^2e^x = 0$.

SOLUCIÓN Primero factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$3xe^x + x^2e^x = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x(3 + x)e^x = 0 \qquad \text{Factorizamos factores comunes}$$

$$x(3 + x) = 0 \qquad \text{Dividimos entre } e^x \text{ (porque } e^x \neq 0\text{)}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 3 + x = 0 \qquad \text{Propiedad del Producto Cero}$$

Entonces las soluciones son $x = 0$ y $x = -3$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 0$:

$3(0)e^0 + 0^2e^0 = 0$ ✔

$x = -3$:

$3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3}$

$= -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

La **determinación de la edad por radiocarbono** es un método que los arqueólogos usan para determinar la edad de objetos antiguos. El dióxido de carbono en la atmósfera siempre contiene una fracción fija de carbono radiactivo, carbono 14 (^{14}C), con una vida media de unos 5730 años. Las plantas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, que luego pasa a los animales a través de la cadena alimentaria. Entonces, todos los seres vivientes contienen las mismas proporciones fijas entre ^{14}C y ^{12}C no radiactivo como la atmósfera.

Después que un organismo muere, deja de asimilar ^{14}C y la cantidad de ^{14}C en su interior empieza a desintegrarse exponencialmente. Podemos entonces determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo si medimos la cantidad de ^{14}C que tenga.

Por ejemplo, si el hueso de un borrico que murió hace t años contiene 73% del ^{14}C que tenga uno vivo, entonces por la fórmula para desintegración radiactiva (Sección 4.6),

$$0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}$$

Resolvemos esta ecuación exponencial para hallar $t \approx 2600$, de modo que el hueso tiene unos 2600 años de antigüedad.

Ecuaciones logarítmicas

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que aparece un logaritmo de la variable. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar x, escribimos la ecuación en forma exponencial

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

Otra forma de ver el primer paso es elevar la base, 2, a cada lado de la ecuación.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5 \qquad \text{Eleve 2 a cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Propiedad de logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

El método empleado para resolver este sencillo problema es típico. Resumimos los pasos como sigue:

GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; es posible que primero sea necesario combinar los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o elevar la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación, despeje x.

(a) $\ln x = 8$ **(b)** $\log_2(25 - x) = 3$

SOLUCIÓN

(a)

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Forma exponencial}$$

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

También podemos resolver este problema en otra forma:

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$e^{\ln x} = e^8 \qquad \text{Eleve } e \text{ a cada lado}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

(b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$$\log_2(25 - x) = 3 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$25 - x = 2^3 \qquad \text{Forma exponencial (o eleve 2 a cada lado)}$$

$$25 - x = 8$$

$$x = 25 - 8 = 17$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 17$, tenemos

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$ ✔

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **37** Y **41** ■

EJEMPLO 7 | Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $4 + 3\log(2x) = 16$.

SOLUCIÓN Primero aislamos el término logarítmico. Esto nos permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$$\begin{aligned} 4 + 3\log(2x) &= 16 && \text{Ecuación dada} \\ 3\log(2x) &= 12 && \text{Reste 4} \\ \log(2x) &= 4 && \text{Divida entre 3} \\ 2x &= 10^4 && \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\ x &= 5000 && \text{Divida entre 2} \end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 5000$, obtenemos

$$\begin{aligned} 4 + 3\log 2(5000) &= 4 + 3\log 10{,}000 \\ &= 4 + 3(4) \\ &= 16 \quad ✔ \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

EJEMPLO 8 | Resolver algebraica y gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva algebraica y gráficamente la ecuación $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$.

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Primero combinamos los términos logarítmicos, usando las Leyes de Logaritmos.

$$\begin{aligned} \log[(x + 2)(x - 1)] &= 1 && \text{Ley 1} \\ (x + 2)(x - 1) &= 10 && \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\ x^2 + x - 2 &= 10 && \text{Expanda lado izquierdo} \\ x^2 + x - 12 &= 0 && \text{Reste 10} \\ (x + 4)(x - 3) &= 0 && \text{Factorice} \\ x = -4 \quad \text{o} \quad x &= 3 \end{aligned}$$

Verificamos estas potenciales soluciones en la ecuación original y encontramos que $x = -4$ no es una solución (porque los logaritmos de números negativos no están definidos), pero $x = 3$ es una solución. (Vea *Verifique sus respuestas.*)

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = -4$:

$$\begin{aligned} &\log(-4 + 2) + \log(-4 - 1) \\ &\quad = \log(-2) + \log(-5) \\ &\qquad\qquad \text{no definido} \quad ✗ \end{aligned}$$

$x = 3$:

$$\begin{aligned} &\log(3 + 2) + \log(3 - 1) \\ &\quad = \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) \\ &\quad = \log 10 = 1 \quad ✔ \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) - 1 = 0$$

A continuación graficamos

$$y = \log(x + 2) + \log(x - 1) - 1$$

como en la Figura 2. Las soluciones son los puntos de intersección x de la gráfica. Entonces, la única solución es $x \approx 3$.

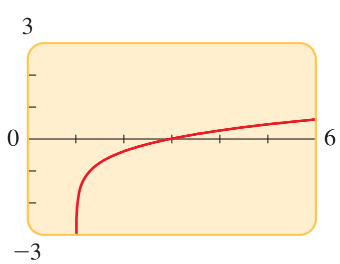


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

En el Ejemplo 9 no es posible aislar x algebraicamente, de modo que debemos resolver gráficamente la ecuación.

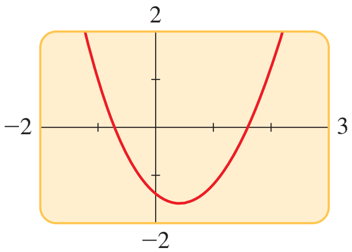


FIGURA 3

EJEMPLO 9 | Resolver gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $x^2 = 2\ln(x + 2)$.

SOLUCIÓN Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación.

$$x^2 - 2\ln(x + 2) = 0$$

Entonces graficamos

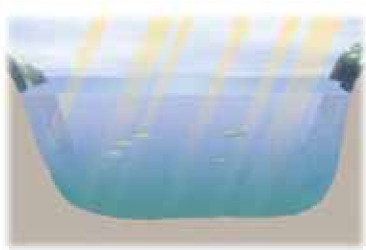
$$y = x^2 - 2\ln(x + 2)$$

como en la Figura 3. Las soluciones son los puntos de intersección x de la gráfica. Si hacemos zoom en los puntos de intersección x, vemos que hay dos soluciones

$$x \approx -0.71 \qquad \text{y} \qquad x \approx 1.60$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

Se usan ecuaciones logarítmicas para determinar la cantidad de luz que llega a diversas profundidades en un lago. (Esta información ayuda a biólogos a determinar los tipos de fauna que un lago puede soportar.) Cuando pasa luz por el agua (u otros materiales transparentes como vidrio o plástico), parte de la luz es absorbida. Es fácil ver que cuanto más turbia sea el agua, más luz se absorbe. La relación exacta entre absorción de luz y la distancia que viaja la luz en un material está descrita en el siguiente ejemplo.



La intensidad de la luz en un lago disminuye con la profundidad.

EJEMPLO 10 | Transparencia de un lago

Si I_0 e I denotan la intensidad de luz antes y después de pasar por un material y x es la distancia (en pies) que la luz se desplaza en el material, entonces, de acuerdo con la **Ley de Beer-Lambert**,

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

donde k es una constante que depende del tipo de material.

(a) Despeje I de la ecuación

(b) Para cierto lago, $k = 0.025$, y la intensidad de la luz es $I_0 = 14$ lumen (lm). Encuentre la intensidad de luz a una profundidad de 20 pies.

SOLUCIÓN

(a) Primero aislamos el término logarítmico.

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -kx \qquad \text{Multiplique por } -k$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-kx} \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$I = I_0e^{-kx} \qquad \text{Multiplique por } I_0$$

(b) Encontramos I usando la fórmula de la parte (a).

$$I = I_0e^{-kx} \qquad \text{De la parte (a)}$$

$$= 14e^{(-0.025)(20)} \qquad I_0 = 14,\ k = 0.025,\ x = 20$$

$$\approx 8.49 \qquad \text{Calculadora}$$

La intensidad de luz a una profundidad de 20 pies es alrededor de 8.5 lm.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **85**

Interés compuesto

Recuerde las fórmulas para interés que hallamos en la Sección 4.1. Si un principal P se invierte a una tasa de interés r durante un tiempo de t años, entonces la cantidad A de la inversión está dada por

$$A = P(1 + r) \qquad \text{Interés simple (para un año)}$$

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \text{Interés capitalizado } n \text{ veces por año}$$

$$A(t) = Pe^{rt} \qquad \text{Interés capitalizado continuamente}$$

Podemos usar logaritmos para determinar el tiempo que tarda el principal en aumentar a una cantidad dada.

EJEMPLO 11 | Hallar el tiempo para que una inversión se duplique

Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 5% al año. Encuentre el tiempo necesario para que el dinero se duplique si el interés se capitaliza de acuerdo con el siguiente método.

(a) Semestralmente **(b)** Continuamente

SOLUCIÓN

(a) Usamos la fórmula para interés compuesto con $P = \$5000$, $A(t) = \$10{,}000$, $r = 0.05$ y $n = 2$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$\begin{aligned}
5000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2t} &= 10{,}000 && P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A \\
(1.025)^{2t} &= 2 && \text{Divida entre 5000} \\
\log 1.025^{2t} &= \log 2 && \text{Tome log de cada lado} \\
2t \log 1.025 &= \log 2 && \text{Ley 3 (baje el exponente)} \\
t &= \frac{\log 2}{2 \log 1.025} && \text{Divida entre 2 log 1.025} \\
t &\approx 14.04 && \text{Calculadora}
\end{aligned}$$

El dinero se duplicará en 14.04 años.

(b) Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$5000$, $A(t) = \$10{,}000$ y $r = 0.05$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$\begin{aligned}
5000e^{0.05t} &= 10{,}000 && Pe^{rt} = A \\
e^{0.05t} &= 2 && \text{Divida entre 5000} \\
\ln e^{0.05t} &= \ln 2 && \text{Tome ln de cada lado} \\
0.05t &= \ln 2 && \text{Propiedad de ln} \\
t &= \frac{\ln 2}{0.05} && \text{Divida entre 0.05} \\
t &\approx 13.86 && \text{Calculadora}
\end{aligned}$$

El dinero se duplicará en 13.86 años.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **75**

EJEMPLO 12 | Tiempo necesario para crecer una inversión

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 4% al año. Encuentre el tiempo necesario para que la cantidad crezca a \$4000 si el interés se capitaliza continuamente.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$1000$, $A(t) = \$4000$ y $r = 0.04$ y de la ecuación exponencial resultante se despeja t.

$$\begin{aligned} 1000e^{0.04t} &= 4000 && Pe^{rt} = A \\ e^{0.04t} &= 4 && \text{Divida entre 1000} \\ 0.04t &= \ln 4 && \text{Tome ln de cada lado} \\ t &= \frac{\ln 4}{0.04} && \text{Divida entre 0.04} \\ t &\approx 34.66 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

La cantidad será $4000 en 34 años y 8 meses.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

4.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Resolvamos la ecuación exponencial $2e^x = 50$.

(a) Primero, aislamos e^x para obtener la ecuación equivalente___.

(b) A continuación, tomamos ln de cada lado para obtener la ecuación equivalente _____.

(c) Ahora usamos una calculadora para hallar $x =$ _____.

2. Resolvamos la ecuación logarítmica

$\log 3 + \log(x - 2) = \log x$.

(a) Primero, combinamos los logaritmos para obtener la ecuación equivalente_______.

(b) A continuación, escribimos cada lado en forma exponencial para obtener la ecuación equivalente______.

(c) Ahora encontramos $x =$ _______.

HABILIDADES

3-28 ■ Encuentre la solución de la ecuación exponencial, redondeada a cuatro lugares decimales.

3. $10^x = 25$ **4.** $10^{-x} = 4$

5. $e^{-2x} = 7$ **6.** $e^{3x} = 12$

7. $2^{1-x} = 3$ **8.** $3^{2x-1} = 5$

9. $3e^x = 10$ **10.** $2e^{12x} = 17$

11. $e^{1-4x} = 2$ **12.** $4(1 + 10^{5x}) = 9$

13. $4 + 3^{5x} = 8$ **14.** $2^{3x} = 34$

15. $8^{0.4x} = 5$ **16.** $3^{x/14} = 0.1$

17. $5^{-x/100} = 2$ **18.** $e^{3-5x} = 16$

19. $e^{2x+1} = 200$ **20.** $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$

21. $5^x = 4^{x+1}$ **22.** $10^{1-x} = 6^x$

23. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$ **24.** $7^{x/2} = 5^{1-x}$

25. $\dfrac{50}{1 + e^{-x}} = 4$ **26.** $\dfrac{10}{1 + e^{-x}} = 2$

27. $100(1.04)^{2t} = 300$ **28.** $(1.00625)^{12t} = 2$

29-36 ■ Resuelva la ecuación.

29. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ **30.** $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

31. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$ **32.** $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$

33. $x^2 2^x - 2^x = 0$ **34.** $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$

35. $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$ **36.** $x^2 e^x + xe^x - e^x = 0$

37-54 ■ De la ecuación logarítmica despeje x.

37. $\ln x = 10$ **38.** $\ln(2 + x) = 1$

39. $\log x = -2$ **40.** $\log(x - 4) = 3$

41. $\log(3x + 5) = 2$ **42.** $\log_3(2 - x) = 3$

43. $4 - \log(3 - x) = 3$ **44.** $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

45. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

46. $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$

47. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$

48. $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$

49. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$

50. $\log_3(x + 15) - \log_3(x - 1) = 2$

51. $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$

52. $\log x + \log(x - 3) = 1$

53. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$

54. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

55. ¿Para qué valor de x es verdadero lo siguiente?

$$\log(x + 3) = \log x + \log 3$$

56. ¿Para qué valor de x es verdadero que $(\log x)^3 = 3 \log x$?

57. Despeje x: $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{16}$

58. Despeje x: $\log_2(\log_3 x) = 4$

59-66 ■ Use calculadora graficadora para hallar todas las soluciones de la ecuación, redondeadas a dos lugares decimales.

59. $\ln x = 3 - x$ **60.** $\log x = x^2 - 2$

61. $x^3 - x = \log(x + 1)$ **62.** $x = \ln(4 - x^2)$

63. $e^x = -x$ **64.** $2^{-x} = x - 1$

65. $4^{-x} = \sqrt{x}$ **66.** $e^{x^2} - 2 = x^3 - x$

67-70 ■ Resuelva la desigualdad.

67. $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1$

68. $3 \le \log_2 x \le 4$

69. $2 < 10^x < 5$ **70.** $x^2 e^x - 2e^x < 0$

71-74 ■ Encuentre la función inversa de f.

71. $f(x) = 2^{2x}$ **72.** $f(x) = 3^{x+1}$

73. $f(x) = \log_2(x - 1)$ **74.** $f(x) = \log 3x$

APLICACIONES

75. Interés compuesto Un hombre invierte \$5000 en una cuenta que paga 8.5% de interés por año, capitalizado trimestralmente.
(a) Encuentre la cantidad después de 3 años.
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la inversión se duplique?

76. Interés compuesto Una mujer invierte \$6500 en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado continuamente.
(a) ¿Cuál es la cantidad después de 2 años?
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad sea \$8000?

77. Interés compuesto Encuentre el tiempo necesario para que una inversión de \$5000 crezca a \$8000 a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizado trimestralmente.

78. Interés compuesto Nancy desea invertir \$4000 en certificados de ahorro que pagan una tasa de interés de 9.75% por año, capitalizado semestralmente. ¿Cuánto tiempo debe ella escoger para ahorrar una cantidad de \$5000?

79. Duplicar una inversión ¿Cuánto tiempo tardará una inversión de \$1000 en duplicar su valor, si la tasa de interés es 8.5% por año, capitalizado continuamente?

80. Tasa de interés Una suma de \$1000 se invirtió durante 4 años, y el interés se capitalizó semestralmente. Si esta suma ascendió a \$1435.77 en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?

81. Desintegración radiactiva Una muestra de 15 g de yodo radiactivo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días está dada por $m(t) = 15e^{-0.087t}$, donde $m(t)$ se mide en gramos. ¿Después de cuántos días quedan sólo 5 gramos?

82. Paracaidismo La velocidad de un paracaidista t segundos después de saltar está dada por $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$. ¿Después de cuántos segundos será de 70 pies/s la velocidad?

83. Población de peces En un pequeño lago se introduce cierta especie de peces. La población de peces está modelada por la función

$$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0.8t}}$$

donde P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que el lago fue poblado por estos peces.
(a) Encuentre la población de peces después de 3 años.
(b) ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a 5000?

84. Transparencia de un lago Científicos ambientalistas miden la intensidad de luz a varias profundidades en un lago, para hallar la "transparencia" del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población macroscópica sumergida. En cierto lago, la intensidad de luz a una profundidad x está dada por

$$I = 10e^{-0.008x}$$

donde I se mide en lumen y x en pies.
(a) Encuentre la intensidad I a una profundidad de 30 pies.
(b) ¿A qué profundidad la intensidad de luz habrá bajado a $I = 5$?

85. Presión atmosférica La presión atmosférica P (en kilopascals, kPa) a una altitud h (en kilómetros, km) está regida por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

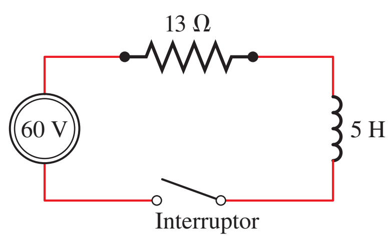
donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.
(a) De la ecuación, despeje P.
(b) Use la parte (a) para hallar la presión P a una altitud de 4 km.

86. Enfriamiento de un motor Supongamos que el lector está manejando su auto en un frío día de invierno (20ºF al exterior) y el motor se sobrecalienta (a unos 220ºF). Cuando se estaciona, el motor empieza a enfriarse. La temperatura T del motor t minutos después de estacionarlo satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$

(a) De la ecuación, despeje T.
(b) Use la parte (a) para hallar la temperatura del motor después de 20 minutos $(t = 20)$.

87. Circuitos eléctricos Un circuito eléctrico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Usando cálculo, se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) t segundos después de cerrar el interruptor es $I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$.
(a) Use la ecuación para expresar el tiempo t como función de la corriente I.
(b) ¿Después de cuántos segundos será la corriente de 2 A?



88. Curva de aprendizaje Una *curva de aprendizaje* es una gráfica de una función $P(t)$ que mide el rendimiento de alguien que aprende una disciplina como función del tiempo t de capacitación. Al principio, la rapidez de aprendizaje es alta. Entonces, a medida que el rendimiento aumenta y se aproxima a un valor máximo M, la rapidez de aprendizaje disminuye. Se ha encontrado que la función

$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$

donde k y C son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para aprendizaje.

(a) Exprese el tiempo de aprendizaje t como función del nivel de rendimiento P.

(b) Para un atleta de salto con pértiga en entrenamiento, la curva de aprendizaje está dada por

$$P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$$

donde $P(t)$ es la altura que él es capaz de saltar con pértiga después de t meses. ¿Después de cuántos meses de aprendizaje podrá saltar 12 pies?

(c) Trace una gráfica de la curva de aprendizaje de la parte (b).

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

89. Estimar una solución Sin resolver realmente la ecuación, encuentre dos números enteros entre los cuales debe estar la solución de $9^x = 20$. Haga lo mismo para $9^x = 100$. Explique cómo ha llegado a esa conclusión.

90. Una ecuación sorprendente Tome logaritmos para demostrar que la ecuación

$$x^{1/\log x} = 5$$

no tiene solución. ¿Para qué valores de k tiene solución la ecuación

$$x^{1/\log x} = k?$$

¿Qué nos dice esto acerca de la gráfica de la función $f(x) = x^{1/\log x}$? Confirme su respuesta usando una calculadora graficadora.

91. Ecuaciones disfrazadas Cada una de estas ecuaciones se puede transformar en una ecuación de tipo lineal o cuadrático si se aplica la sugerencia. Resuelva cada ecuación.

(a) $(x - 1)^{\log(x-1)} = 100(x - 1)$ [Tome log de cada lado.]

(b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ [Cambie todos los log a base 2.]

(c) $4^x - 2^{x+1} = 3$ [Escriba como cuadrática en 2^x.]

4.6 MODELADO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación) ▶ Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento relativa) ▶ Desintegración radiactiva ▶ Ley de Newton de Enfriamiento ▶ Escalas logarítmicas

Un gran número de procesos que se presentan en la naturaleza, por ejemplo el crecimiento poblacional, la desintegración radiactiva, la difusión de calor y otros muchos, se pueden modelar usando funciones exponenciales. Se usan funciones logarítmicas en modelos para la intensidad de sonidos, la intensidad de terremotos y otros numerosos fenómenos. En esta sección estudiamos modelos exponenciales y logarítmicos.

▼ Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación)

Supóngase que empezamos con una sola bacteria, que se divide cada hora. Después de una hora tenemos 2 bacterias, después de dos horas tenemos 2^2 o sea 4 bacterias, después de tres horas tenemos 2^3 o sea 8 bacterias, y así sucesivamente (vea Figura 1). Vemos que podemos modelar la población de bacterias después de t horas, por medio de $f(t) = 2^t$.

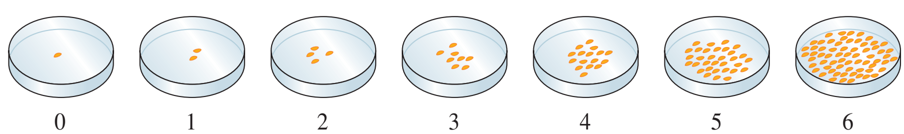


FIGURA 1 Población de bacterias

Si empezamos con 10 de estas bacterias, entonces la población está modelada por $f(t) = 10 \cdot 2^t$. Una especie de bacteria, de crecimiento más lento, se duplica cada 3 horas; en este caso la población está modelada por $f(t) = 10 \cdot 2^{t/3}$. En general, tenemos lo siguiente.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TIEMPO DE DUPLICACIÓN)

Si el tamaño inicial de una población es n_0 y el tiempo de duplicación es a, entonces el tamaño de la población en el tiempo t es

$$n(t) = n_0 2^{t/a}$$

donde a y t se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etcétera).

EJEMPLO 1 | Población de bacterias

Bajo condiciones ideales, cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Inicialmente hay 1000 en una colonia.

(a) Encuentre un modelo para la población de bacterias después de t horas.

(b) ¿Cuántas bacterias hay en la colonia después de 15 horas?

(c) ¿Cuándo llegará a 100,000 el número de bacterias?

SOLUCIÓN

(a) La población en el tiempo t está modelada por

$$n(t) = 1000 \cdot 2^{t/3}$$

donde t se mide en horas.

(b) Después de 15 horas el número de bacterias es

$$n(15) = 1000 \cdot 2^{15/3} = 32{,}000$$

(c) Hacemos $n(t) = 100{,}000$ en el modelo que encontramos en la parte (a) y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$\begin{aligned}
100{,}000 &= 1000 \cdot 2^{t/3} && n(t) = 1000 \cdot 2^{t/3} \\
100 &= 2^{t/3} && \text{Divida entre 1000} \\
\log 100 &= \log 2^{t/3} && \text{Tome log de cada lado} \\
2 &= \frac{t}{3} \log 2 && \text{Propiedades de log} \\
t &= \frac{6}{\log 2} \approx 19.93 && \text{Despeje } t
\end{aligned}$$

Busque guías para trabajar con cifras significativas, vea el Apéndice: *Calculations and Significant Figures* (Cálculos y Cifras Significativas).

El nivel de bacterias llega a 100,000 en unas 20 horas.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **1** ■

EJEMPLO 2 | Población de conejos

Cierta clase de conejos fue introducida en una pequeña isla hace 8 meses. La población actual de conejos en la isla se estima en 4100 y se duplica cada 3 meses.

(a) ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos?

(b) Estime la población a un año después que los conejos fueron introducidos en la isla.

(c) Trace una gráfica de la población de conejos.

SOLUCIÓN

(a) El tiempo de duplicación es $a = 3$, de modo que la población en el tiempo t es

$$n(t) = n_0 2^{t/3} \qquad \text{Modelo}$$

donde n_0 es la población inicial. Como la población es 4100 cuando t es 8 meses, tenemos

$$n(8) = n_0 2^{8/3} \qquad \text{Del modelo}$$

$$4100 = n_0 2^{8/3} \qquad \text{Porque } n(8) = 4100$$

$$n_0 = \frac{4100}{2^{8/3}} \qquad \text{Divida entre } 2^{8/3} \text{ e intercambie lados}$$

$$n_0 \approx 645 \qquad \text{Calcule}$$

Entonces estimamos que 645 conejos fueron introducidos en la isla.

(b) De la parte (a) sabemos que la población inicial es $n_0 = 645$, de modo que podemos modelar la población después de t meses por medio de

$$n(t) = 645 \cdot 2^{t/3} \qquad \text{Modelo}$$

Después de un año $t = 12$, y entonces

$$n(12) = 645 \cdot 2^{12/3} \approx 10{,}320$$

Por lo tanto, después de un año, habría unos 10,000 conejos.

(c) Primero observamos que el dominio es $t \geq 0$. La gráfica se muestra en la Figura 2.

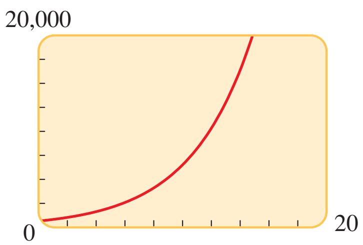


FIGURA 2 $n(t) = 645 \cdot 2^{t/3}$

Busque guías para trabajar con cifras significativas, vea el Apéndice: *Calculations and Significant Figures* (Cálculos y Cifras Significativas).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento relativa)

Hemos utilizado una función exponencial con base 2 para modelar el crecimiento poblacional (en términos del tiempo de duplicación). También modelaríamos la misma población con una función exponencial con base 3 (en términos del tiempo de triplicación). De hecho, podemos hallar un modelo exponencial con cualquier base. Si usamos la base e, obtenemos el siguiente modelo de una población en términos de la **tasa de crecimiento relativa** r: la tasa de crecimiento poblacional expresada como una proporción de la población en cualquier momento. Por ejemplo, si $r = 0.02$, entonces en cualquier tiempo t la tasa de crecimiento es 2% de la población en el tiempo t.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TASA DE CRECIMIENTO RELATIVA)

Una población que experimenta un crecimiento exponencial aumenta de acuerdo con el modelo

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t) =$ población en el tiempo t

$n_0 =$ tamaño inicial de la población

$r =$ tasa de crecimiento relativa (expresada como una proporción de la población)

$t =$ tiempo

Observe que la fórmula para el crecimiento poblacional es la misma que para interés capitalizado continuamente. De hecho, el mismo principio funciona en ambos casos: el crecimiento de una población (o una inversión) por período es proporcional al tamaño de la población (o la cantidad de la inversión). Una población de 1,000,000 aumentará más en un año que una población de 1000; en exactamente la misma forma, una inversión de \$1,000,000 aumentará más en un año que una inversión de \$1000.

En los siguientes ejemplos suponemos que las poblaciones crecen exponencialmente.

EJEMPLO 3 | Predicción del tamaño de una población

La cantidad inicial de bacterias en un cultivo es 500. Posteriormente, un biólogo hace un conteo de muestra de bacterias del cultivo y encuentra que la tasa de crecimiento relativa es 40% por hora.

(a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.

(b) ¿Cuál es la cantidad estimada después de 10 horas?

(c) ¿Cuándo llegará a 80,000 la cantidad de bacterias?

(d) Trace la gráfica de la función $n(t)$.

SOLUCIÓN

(a) Usamos el modelo de crecimiento exponencial con $n_0 = 500$ y $r = 0.4$ para obtener

$$n(t) = 500e^{0.4t}$$

donde t se mide en horas.

(b) Usando la función de la parte (a), encontramos que la cantidad de bacterias después de 10 horas es

$$n(10) = 500e^{0.4(10)} = 500e^4 \approx 27{,}300$$

(c) Hacemos $n(t) = 80{,}000$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t:

$$\begin{aligned} 80{,}000 &= 500 \cdot e^{0.4t} && n(t) = 500 \cdot e^{0.4t} \\ 160 &= e^{0.4t} && \text{Divida entre 500} \\ \ln 160 &= 0.4t && \text{Tome ln de cada lado} \\ t &= \frac{\ln 160}{0.4} \approx 12.68 && \text{Despeje } t \end{aligned}$$

El nivel de bacterias llega a 80,000 en unas 12.7 horas.

(d) La gráfica se muestra en la Figura 3.

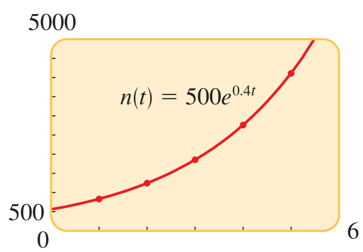


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

EJEMPLO 4 | Comparación de diferentes tasas de crecimiento poblacional

El crecimiento relativo de la población mundial ha estado bajando en las últimas décadas, de 2% en 1995 a 1.3% en 2006.

En el año 2000 la población mundial era de 6100 millones, y la tasa de crecimiento relativa era de 1.4% por año. Se dice que una tasa del 1.0% haría una diferencia importante en la población total en sólo unas pocas décadas. Pruebe esta frase estimando la población mundial del año 2050 usando una tasa de crecimiento relativa de (a) 1.4% al año y (b) 1.0% al año.

Grafique las funciones de población para los siguientes 100 años para las dos tasas de crecimiento relativas en el mismo rectángulo de observación.

SOLUCIÓN

(a) Con el modelo de crecimiento exponencial tenemos

$$n(t) = 6.1e^{0.014t}$$

donde $n(t)$ se mide en miles de millones y t se mide en años desde 2000. Como el año 2050 es 50 años después del 2000, encontramos que

$$n(50) = 6.1e^{0.014(50)} = 6.1e^{0.7} \approx 12.3$$

La población estimada en el año 2050 es 12,300 millones.

Únicamente de pie

La población mundial era aproximadamente de 6100 millones en 2000 y estaba creciendo 1.4% al año. Suponiendo que cada persona ocupe un promedio de 4 pies^2 de la superficie terrestre, el modelo exponencial para crecimiento poblacional proyecta que para el año 2801 habrá espacio únicamente para estar de pie. (El área total de superficie terrestre del mundo es alrededor de 1.8×10^{15} pies^2.)

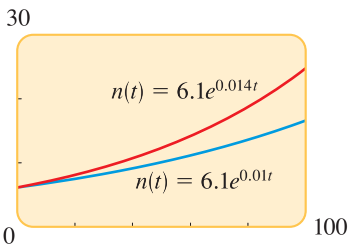


FIGURA 4

(b) Usamos la función

$$n(t) = 6.1e^{0.010t}$$

y encontramos

$$n(50) = 6.1e^{0.010(50)} = 6.1e^{0.50} \approx 10.1$$

La población estimada en el año 2050 es alrededor de 10,100 millones.

Las gráficas de la Figura 4 muestran que un pequeño cambio en la tasa de crecimiento relativa hará, con el tiempo, una gran diferencia en el tamaño de la población.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

EJEMPLO 5 | Expresar el modelo en términos de e

Un cultivo se inicia con 10,000 bacterias, y el número se duplica a cada 40 minutos.

(a) Encuentre una función $n(t) = n_0 2^{t/a}$ que modele el número de bacterias después de t minutos.

(b) Encuentre una función $n(t) = n_0 e^{rt}$ que modele el número de bacterias después de t minutos.

(c) Trace una gráfica del número de bacterias en el tiempo t.

SOLUCIÓN

(a) La población inicial es $n_0 = 10{,}000$. El tiempo de duplicación es $a = 40$ min $= 2/3$ h. Como $1/a = 3/2 = 1.5$, el modelo es

$$n(t) = 10{,}000 \cdot 2^{1.5t}$$

(b) La población inicial es $n_0 = 10{,}000$. Necesitamos hallar la tasa de crecimiento relativa r. Como hay 20,000 bacterias cuando $t = 2/3$ h, tenemos

$$\begin{aligned} 20{,}000 &= 10{,}000e^{r(2/3)} && n(t) = 10{,}000e^{rt} \\ 2 &= e^{r(2/3)} && \text{Divida entre 10,000} \\ \ln 2 &= \ln e^{r(2/3)} && \text{Tome ln de cada lado} \\ \ln 2 &= r(2/3) && \text{Propiedad de ln} \\ r &= \frac{3 \ln 2}{2} \approx 1.0397 && \text{Despeje } r \end{aligned}$$

Ahora que sabemos la tasa de crecimiento relativa r, podemos hallar el modelo:

$$n(t) = 10{,}000e^{1.0397t}$$

(c) Podemos graficar el modelo de la parte (a) o el de la parte (b). Las gráficas son idénticas. Vea la Figura 5.

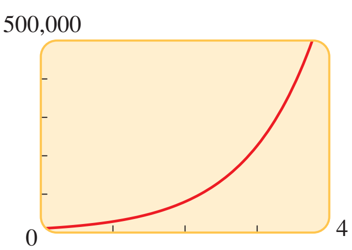


FIGURA 5 Gráficas de $y = 10{,}000 \cdot 2^{1.5t}$ y $y = 10{,}000e^{1.0397t}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

Desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran al emitir radiación espontáneamente. La rapidez de desintegración es proporcional a la masa de la sustancia. Esto es análogo al crecimiento poblacional excepto que la masa *decrece*. Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de **vida media**. Por ejemplo, la vida media del radio 226 es 1600 años, de modo que una muestra de 100 g se desintegra a 50 g (o $\frac{1}{2} \times 100$ g) en 1600 años, entonces 25 g (o $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100$ g) en 3200 años, y así sucesivamente. En general, para una

Las vidas medias de **elementos radiactivos varían** de muy largas a muy cortas. A continuación veamos unos ejemplos.

Elemento	**Vida media**
Torio-23	14.5 mil millones de años
Uranio-235	4.5 mil millones de años
Torio-230	80,000 años
Plutonio-239	24,360 años
Carbono-1	5,730 años
Radio-226	1,600 años
Cesio-137	30 años
Estroncio -90	28 años
Polonio-210	140 días
Torio-234	25 días
Yodo-135	8 días
Radón-222	3.8 días
Plomo-211	3.6 minutos
Criptón-91	10 segundos

sustancia radiactiva con masa m_0 y vida media h, la cantidad restante en el tiempo t está modelada por

$$\boxed{m(t) = m_0 2^{-t/h}}$$

donde h y t se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etcétera).

Para expresar este modelo en la forma $m(t) = m_0e^{rt}$, necesitamos hallar la tasa relativa de desintegración r. Como h es la vida media, tenemos

$$m(t) = m_0e^{-rt} \qquad \text{Modelo}$$

$$\frac{m_0}{2} = m_0e^{-rh} \qquad h \text{ es la vida media}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-rh} \qquad \text{Divida entre } m_0$$

$$\ln\frac{1}{2} = -rh \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$r = \frac{\ln 2}{h} \qquad \text{Despeje } r$$

Esta última ecuación nos permite hallar la tasa r a partir de la vida media h.

MODELO DE DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

Si m_0 es la masa inicial de una sustancia radiactiva con vida media h, entonces la masa restante en el tiempo t está modelada por la función

$$m(t) = m_0e^{-rt}$$

donde $r = \dfrac{\ln 2}{h}$.

EJEMPLO 6 | Desintegración radiactiva

El polonio 210 (^{210}Po) tiene una vida media de 140 días. Suponga que una muestra de esta sustancia tiene una masa de 300 mg.

(a) Encuentre una función $m(t)= m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa restante después de t días.

(b) Encuentre una función $m(t)= m_0e^{-rt}$ que modele la masa restante después de t días.

(c) Encuentre la masa restante después de un año.

(d) ¿Cuánto tiempo tomará la muestra en desintegrarse a una masa de 200 mg?

(e) Trace una gráfica de la masa de la muestra como función del tiempo.

SOLUCIÓN

(a) Tenemos $m_0 = 300$ y $h = 140$, de modo que la cantidad restante después de t días es

$$m(t) = 300 \cdot 2^{-t/140}$$

(b) Tenemos $m_0 = 300$ y $r = \ln 2/140 \approx -0.00495$, de modo que la cantidad restante después de t días es

$$m(t) = 300 \cdot e^{-0.00495t}$$

En las partes (c) y (d) también podemos usar el modelo encontrado en la parte (a). Compruebe que el resultado sea el mismo usando cualquiera de estos dos modelos.

(c) Usamos la función que encontramos en la parte (a) con $t = 365$ (un año)

$$m(365) = 300e^{-0.00495(365)} \approx 49.256$$

Entonces, aproximadamente 49 mg de ^{210}Po quedarán después de un año.

(d) Usamos la función que encontramos en la parte (a) con $m(t) = 200$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$
\begin{aligned}
300e^{-0.00495t} &= 200 && m(t) = m_0e^{-rt} \\
e^{-0.00495t} &= \tfrac{2}{3} && \text{Divida entre 300} \\
\ln e^{-0.00495t} &= \ln \tfrac{2}{3} && \text{Tome ln de cada lado} \\
-0.00495t &= \ln \tfrac{2}{3} && \text{Propiedad de ln} \\
t &= -\frac{\ln \frac{2}{3}}{0.00495} && \text{Despeje } t \\
t &\approx 81.9 && \text{Calculadora}
\end{aligned}
$$

El tiempo necesario para que la muestra se desintegre a 200 mg es de unos 82 días.

(e) Podemos graficar el modelo de la parte (a) o el de la parte (b). Las gráficas son idénticas. Vea Figura 6.

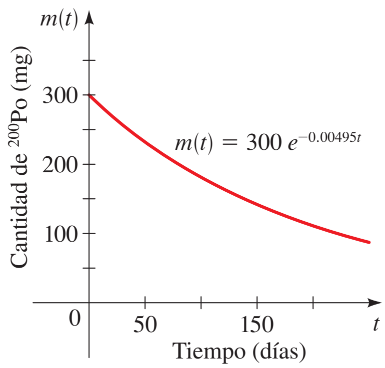


FIGURA 6

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

Ley de Newton de Enfriamiento

La Ley de Newton de Enfriamiento dice que la rapidez a la que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno, siempre que la diferencia de temperatura no sea demasiado grande. Mediante cálculo, el siguiente modelo puede ser deducido a partir de esta ley.

LEY DE NEWTON DE ENFRIAMIENTO

Si D_0 es la diferencia inicial de temperatura entre un cuerpo y su entorno, y si su entorno tiene temperatura T_s, entonces la temperatura del cuerpo en el tiempo t está modelada por la función

$$T(t) = T_s + D_0e^{-kt}$$

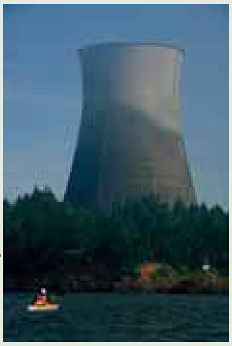
donde k es una constante positiva que depende del tipo de cuerpo.

EJEMPLO 7 | Ley de Newton de Enfriamiento

Una taza de café tiene una temperatura de 200ºF y se coloca en un cuarto que tiene una temperatura de 70ºF. Después de 10 minutos, la temperatura del café es 150ºF.

(a) Encuentre una función que modele la temperatura del café en el tiempo t.

(b) Encuentre la temperatura del café después de 15 minutos.



© Joel W. Rogers/CORBIS

Desechos radiactivos

Se producen peligrosos isótopos radiactivos siempre que ocurre una reacción nuclear, ya sea como resultado de una prueba de una bomba atómica, un accidente nuclear como el de Chernobyl en 1986, o la producción sin incidentes de electricidad en una planta generadora nuclear.

Un material que se produce en bombas atómicas es el isótopo estroncio 90 (^{90}Sr), con una vida media de 28 años. Éste se deposita como el calcio en el tejido óseo humano, donde puede causar leucemia y otros tipos de cáncer. No obstante, en las décadas transcurridas desde que dejaron de realizarse pruebas atmosféricas de armas nucleares, los niveles del ^{90}S en el ambiente han bajado a un nivel que ya no plantea una amenaza para la salud.

Las plantas nucleares para generación de energía eléctrica producen plutonio radiactivo 239 (^{239}Pu), que tiene una vida media de 24,360 años. Debido a su larga vida media, el ^{239}Pu podría representar una amenaza para el ambiente durante miles de años, por lo cual debe tenerse gran cuidado para eliminarlo en forma apropiada. La dificultad de garantizar la seguridad del desecho radiactivo eliminado es una razón por la que las plantas nucleares para generación de electricidad siguen siendo controvertidas.

(c) ¿Cuándo se habrá enfriado el café a 100ºF?

(d) Haga una gráfica de la función de temperatura.

SOLUCIÓN

(a) La temperatura del cuarto es $T_s = 70$ºF, y la diferencia inicial de temperatura es

$$D_0 = 200 - 70 = 130\text{ºF}$$

Entonces, por la Ley de Newton de Enfriamiento, la temperatura después de t minutos está modelada con la función

$$T(t) = 70 + 130e^{-kt}$$

Necesitamos hallar la constante k asociada con esta taza de café. Para hacer esto, usamos el hecho de que cuando $t = 10$, la temperatura $T(10) = 150$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
70 + 130e^{-10k} &= 150 && T_s + D_0e^{-kt} = T(t)\\
130e^{-10k} &= 80 && \text{Reste 70}\\
e^{-10k} &= \tfrac{8}{13} && \text{Divida entre 130}\\
-10k &= \ln\tfrac{8}{13} && \text{Tome ln de cada lado}\\
k &= -\tfrac{1}{10}\ln\tfrac{8}{13} && \text{Despeje } k\\
k &\approx 0.04855 && \text{Calculadora}
\end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de k en la expresión para $T(t)$, obtenemos

$$T(t) = 70 + 130e^{-0.04855t}$$

(b) Usamos la función que encontramos en la parte (a) con $t = 15$.

$$T(15) = 70 + 130e^{-0.04855(15)} \approx 133\text{°F}$$

(c) Usamos la función que hallamos en la parte (a) con $T(t) = 100$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$\begin{aligned}
70 + 130e^{-0.04855t} &= 100 && T_s + D_0e^{-kt} = T(t)\\
130e^{-0.04855t} &= 30 && \text{Reste 70}\\
e^{-0.04855t} &= \tfrac{3}{13} && \text{Divida entre 130}\\
-0.04855t &= \ln\tfrac{3}{13} && \text{Tome ln de cada lado}\\
t &= \frac{\ln\frac{3}{13}}{-0.04855} && \text{Despeje } t\\
t &\approx 30.2 && \text{Calculadora}
\end{aligned}$$

El café se habrá enfriado a 100ºF después de media hora.

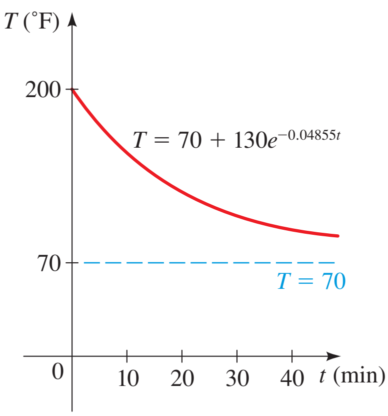


FIGURA 7 Temperatura del café después de 7 minutos

(d) La gráfica de la función de temperatura aparece en la Figura 7. Observe que la recta $t = 70$ es una asíntota horizontal. (¿Por qué?)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

Escalas logarítmicas

Cuando una cantidad física varía con un margen muy grande, a veces es conveniente tomar su logaritmo para tener un conjunto de números más manejable. Estudiamos tres de estas situa-

pH para algunas sustancias comunes

Sustancia	pH
Leche de magnesia	10.5
Agua de mar	8.0–8.4
Sangre humana	7.3–7.5
Galletas	7.0–8.5
Maíz molido	6.9–7.9
Leche de vaca	6.4–6.8
Espinacas	5.1–5.7
Tomates	4.1–4.4
Naranjas	3.0–4.0
Manzanas	2.9–3.3
Limones	1.3–2.0
Ácido de batería	1.0

ciones: la escala pH, que mide acidez; la escala Richter, que mide la intensidad de terremotos, y la escala de decibeles, que mide la intensidad de sonidos. Otras cantidades que se miden en escalas logarítmicas son la intensidad de luz, capacidad de información, y radiación.

La escala pH Los químicos medían la acidez de una solución dando su concentración de iones de hidrógeno hasta que Soren Peter Lauritz Sorensen, en 1909, propuso una medida más cómoda. Él definió

$$\boxed{\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]}$$

donde $[\mathrm{H}^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro (M). Hizo esto para evitar números muy pequeños y exponentes negativos. Por ejemplo,

$$\text{si} \qquad [\mathrm{H}^+] = 10^{-4}\,\mathrm{M}, \qquad \text{entonces} \qquad \mathrm{pH} = -\log_{10}(10^{-4}) = -(-4) = 4$$

Las soluciones con un pH de 7 se definen como *neutras*, aquellas con pH < 7 son *ácidas*, y las que tengan pH > 7 son *básicas*. Observe que cuando el pH aumenta en una unidad, el $[\mathrm{H}^+]$ disminuye en un factor de 10.

EJEMPLO 8 | Escala de pH y concentración de iones de hidrógeno

(a) La concentración de iones de hidrógeno de una muestra de sangre humana se midió y resultó ser $[\mathrm{H}^+] = 3.16 \times 10^{-18}$ M. Encuentre el pH y clasifique la sangre como ácida o básica.

(b) La lluvia más ácida jamás medida ocurrió en Escocia en 1974; su pH fue de 2.4. Encuentre la concentración de iones de hidrógeno.

SOLUCIÓN

(a) Una calculadora da

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+] = -\log(3.16 \times 10^{-8}) \approx 7.5$$

Como esto es mayor a 7, la sangre es básica.

(b) Para hallar la concentración de iones de hidrógeno, necesitamos despejar $[\mathrm{H}^+]$ de la ecuación logarítmica

$$\log[\mathrm{H}^+] = -\mathrm{pH}$$

Por lo tanto, la escribimos en forma exponencial.

$$[\mathrm{H}^+] = 10^{-\mathrm{pH}}$$

En este caso pH $= 2.4$, por lo cual

$$[\mathrm{H}^+] = 10^{-2.4} \approx 4.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{M}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

Terremotos más fuertes

Lugar	Fecha	Magnitud
Chile	1960	9.5
Alaska	1964	9.2
Sumatra	2004	9.1
Alaska	1957	9.1
Kamchatka	1952	9.0
Chile	2010	8.8
Ecuador	1906	8.8
Alaska	1965	8.7
Sumatra	2005	8.7
Tibet	1950	8.6
Kamchatka	1923	8.5
Indonesia	1938	8.5
Islas Kuriles	1963	8.5

La escala Richter En 1935, el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1984) definió la magnitud M de un terremoto como

$$\boxed{M = \log \frac{I}{S}}$$

donde I es la intensidad del terremoto, medida por la amplitud de la lectura de un sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto, y S es la intensidad de un terremoto “estándar” (cuya amplitud es 1 micrón $= 10^{-4}$ cm). La magnitud de un terremoto estándar es

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

Richter estudió numerosos terremotos que ocurrieron entre 1900 y 1950. El más grande tuvo una magnitud de 8.9 en la escala de Richter y, el más pequeño, tuvo magnitud 0. Esto corresponde a una relación de intensidades de 800,000,000, de modo que la escala de Richter da números más manejables para trabajar. Por ejemplo, un terremoto de magnitud 6 es diez veces más fuerte que uno de magnitud 5.

EJEMPLO 9 | Magnitud de terremotos

El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud estimada de 8.3 en la escala de Richter. En el mismo año ocurrió un poderoso terremoto en la frontera entre Colombia y Ecuador, que fue cuatro veces más intenso. ¿Cuál fue la magnitud del temblor entre Colombia y Ecuador en la escala de Richter?

SOLUCIÓN Si I es la intensidad del terremoto de San Francisco, entonces por la definición de magnitud tenemos

$$M = \log \frac{I}{S} = 8.3$$

La intensidad del terremoto entre Colombia y Ecuador fue $4I$, de modo que su magnitud fue

$$M = \log \frac{4I}{S} = \log 4 + \log \frac{I}{S} = \log 4 + 8.3 \approx 8.9$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

© Roger Ressmeyer/CORBIS

EJEMPLO 10 | Intensidad de terremotos

El terremoto de 1989 de Loma Prieta que sacudió San Francisco tuvo una magnitud de 7.1 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue el temblor de 1906 (vea Ejemplo 9) que el evento de 1989?

SOLUCIÓN Si I_1 e I_2 son las intensidades de los terremotos de 1906 y 1989, entonces nos piden hallar I_1/I_2. Para relacionar esto con la definición de magnitud, dividimos el numerador y el denominador entre S.

$$\begin{aligned} \log \frac{I_1}{I_2} &= \log \frac{I_1/S}{I_2/S} && \text{Divida numerador y denominador entre } S \\ &= \log \frac{I_1}{S} - \log \frac{I_2}{S} && \text{Ley 2 de logaritmos} \\ &= 8.3 - 7.1 = 1.2 && \text{Definición de magnitud de terremotos} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\log(I_1/I_2)} = 10^{1.2} \approx 16$$

El terremoto de 1906 fue unas 16 veces más intenso que el de 1989.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

Escala de decibeles Nuestro oído es sensible a una gama extremadamente grande de intensidades de sonido. Tomamos como referencia la intensidad $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 (watts por metro cuadrado) a una frecuencia de 1000 hertz, que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de escucha). La sensación psicológica de intensidad varía con el logaritmo de la intensidad (Ley de Weber-Fechner), de modo que el **nivel de intensidad** B, medido en decibeles, está definido como

$$\boxed{B = 10 \log \frac{I}{I_0}}$$

Los **niveles de intensidad de sonidos** que podemos oír varían de muy fuertes a muy débiles. A continuación veamos algunos ejemplos de niveles en decibeles de sonidos que se escuchan comúnmente.

Fuente de sonido	***B*** **(dB)**
Despegue de un jet	140
Martillo neumático	130
Concierto de rock	120
Tren subterráneo	100
Tránsito intenso	80
Tránsito ordinario	70
Conversación normal	50
Susurro	30
Hojas que caen	10–20
Umbral de escucha	0

El nivel de intensidad del sonido de referencia apenas audible es

$$B = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

EJEMPLO 11 | Intensidad de sonido del despegue de un avión jet

Encuentre el nivel de intensidad en decibeles de un motor de jet durante el despegue, si la intensidad se mide a 100 W/m^2.

SOLUCIÓN De la definición de nivel de intensidad vemos que

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}} = 10 \log 10^{14} = 140 \text{ dB}$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad es 140 dB.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41** ■

La tabla del margen es una lista de niveles de intensidad en decibeles para algunos sonidos comunes que van desde el umbral de escucha humana hasta el despegue de aviones jet del Ejemplo 11. El umbral del dolor es de unos 120 dB.

4.6 EJERCICIOS

APLICACIONES

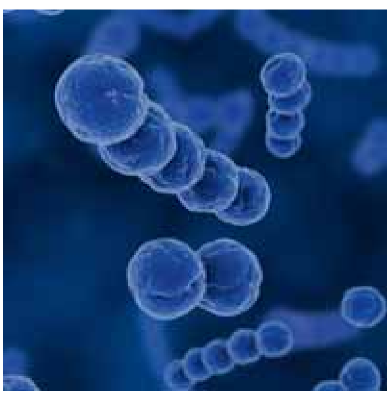
1-16 ■ Estos ejercicios usan el modelo de crecimiento poblacional.

1. Cultivo de bacterias Cierto cultivo de la bacteria *Streptococcus A* inicialmente tiene 10 bacterias y se observa que se duplica cada 1.5 horas.

(a) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para el número de bacterias en el cultivo después de t horas.

(b) Estime el número de bacterias después de 35 horas.

(c) ¿Cuándo llegará a 10,000 el número de bacterias?



Streptococcus A
(12,000 × aumentos)

2. Cultivo de bacterias Cierto cultivo de la bacteria *Rhodobacter sphaeroides* inicialmente tiene 25 bacterias y se observa que se duplica cada 5 horas.

(a) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para el número de bacterias del cultivo después de t horas.

(b) Estime el número de bacterias después de 18 horas.

(c) ¿Después de cuántas horas llegará el número de bacterias a un millón?

3. Población de ardillas Una población de arcillas grises fue introducida en cierto condado de la Gran Bretaña, hace 30 años. Unos biólogos observaron que la población se duplica cada 6 años, y ahora la población es de 100,000.

(a) ¿Cuál es el tamaño inicial de la población de ardillas?

(b) Estime la población de ardillas a 10 años a partir de ahora.

(c) Trace una gráfica de la población de ardillas.

4. Población de aves Cierta especie de aves fue introducida en un condado hace 25 años. Unos biólogos observan que la población se duplica cada 10 años, y ahora la población es de 13,000.

(a) ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de aves?

(b) Estime la población de aves a 5 años a partir de ahora.

(c) Trace una gráfica de la población de aves.

5. Población de zorros La población de zorros en cierta región tiene una tasa de crecimiento relativa de 8% por año. Se estima que la población en 2005 era de 18,000.

(a) Encuentre una función $n(t) = n_0 e^{rt}$ que modele la población en t años después de 2005.

(b) Use la función de la parte (a) para estimar la población de zorros en el año 2013.

(c) Trace una gráfica de la función de población de zorros para los años 2005-2013.

6. Población de peces La población de cierta especie de peces tiene una tasa de crecimiento relativa de 1.2% por año. Se estima que la población en 2000 era de 12 millones.

(a) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 e^{rt}$ para la población t años después de 2000.

(b) Estime la población de peces en el año 2005.

(c) Trace una gráfica de la población de peces.

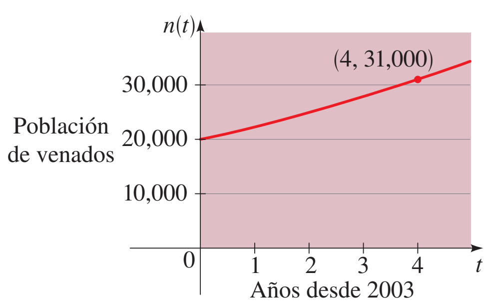
7. **Población de un condado** La población de un condado tiene una tasa de crecimiento relativa de 3% por año. El gobierno está tratando de reducir la tasa de crecimiento al 2%. La población en 1995 era de aproximadamente 110 millones. Encuentre la población proyectada para el año 2020 para las siguientes condiciones.
   (a) La tasa de crecimiento relativa permanece en 3% al año.
   (b) La tasa de crecimiento relativa se reduce a 2% al año.

8. **Cultivo de bacterias** Se observa que cierto cultivo de bacterias tiene una tasa de crecimiento relativa de 12% por hora pero, en presencia de un antibiótico, la tasa de crecimiento relativa se reduce a 5% por hora. El número inicial en el cultivo es 22. Encuentre la población proyectada después de 24 horas para las siguientes condiciones.
   (a) No hay antibiótico presente, por lo cual la tasa de crecimiento relativa es 12%.
   (b) Está presente un antibiótico en el cultivo, por lo cual la tasa de crecimiento relativa se reduce a 5%.

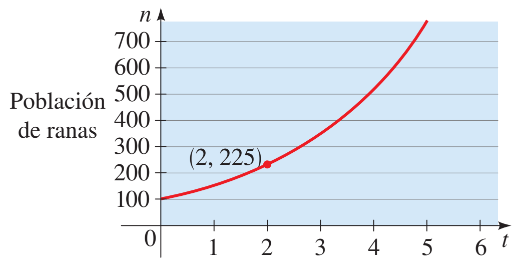
9. **Población de una ciudad** La población de cierta ciudad era de 12,000 en 2006; el tiempo de duplicación observado para la población es de 18 años.
   (a) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para la población, t años después de 2006.
   (b) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 e^{rt}$ para la población, t años después de 2006.
   (c) Trace una gráfica de la población en el tiempo t.
   (d) Estime cuándo llegará la población a 500,000.

10. **Población de murciélagos** La población de murciélagos en cierto condado del oeste medio era de 350,000 en 2009, y el tiempo de duplicación observado para la población es de 25 años.
   (a) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para la población, t años después de 2006.
   (b) Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 e^{rt}$ para la población, t años después de 2006.
   (c) Trace una gráfica de la población en el tiempo t.
   (d) Estime cuándo llegará la población a 2 millones.

11. **Población de venados** La gráfica muestra la población de venados en un condado de Pennsylvania entre 2003 y 2007. Suponga que la población crece exponencialmente.
   (a) ¿Cuál era la población de venados en 2003?
   (b) Encuentre una función que modele la población de venados t años después de 2003.
   (c) ¿Cuál es la población de venados proyectada en 2011?
   (d) ¿En qué año la población de venados llegará a 100,000?



12. **Población de ranas** Se introdujeron algunas ranas mugidoras en un pequeño estanque. La gráfica muestra la población de estas ranas para los siguientes pocos años. Suponga que la población crece exponencialmente.
   (a) ¿Cuál era la población inicial de ranas mugidoras?
   (b) Encuentre una función que modele la población de estas ranas t años desde que las ranas fueron puestas en el estanque.
   (c) ¿Cuál es la población proyectada de ranas mugidoras después de 15 años?
   (d) Estime cuánto tiempo tomará a la población llegar a 75,000.



13. **Cultivo de bacterias** Un cultivo empieza con 8600 bacterias. Después de una hora la cantidad es 10,000.
   (a) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.
   (b) Encuentre el número de bacterias después de 2 horas.
   (c) ¿Después de cuántas horas se duplicará el número de bacterias?

14. **Cultivo de bacterias** La cantidad en un cultivo de bacterias era de 400 después de 2 horas y de 25,600 después de 6 horas.
   (a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativa de la población de bacterias? Exprese su respuesta como porcentaje.
   (b) ¿Cuál era el tamaño inicial del cultivo?
   (c) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.
   (d) Encuentre el número de bacterias después de 4.5 horas.
   (e) ¿Cuándo será de 50,000 el número de bacterias?

15. **Población de California** La población de California era de 29.76 millones en 1990 y 33.87 en 2000. Suponga que la población crece exponencialmente.
   (a) Encuentre la función que modele la población t años después de 1990.
   (b) Encuentre el tiempo necesario para que la población se duplique
   (c) Use la función de la parte (a) para predecir la población de California en el año 2010. Busque en su biblioteca la población real de California en 2010 y compare.

16. **Población mundial** La población mundial era de 5700 millones en 1995, y la tasa de crecimiento observada relativa era de 2% al año.
   (a) ¿En qué año se habrá duplicado la población?
   (b) ¿En qué año se habrá triplicado la población?

17-24 ■ Estos ejercicios usan el modelo de desintegración radiactiva.

17. **Radio radiactivo** La vida media del radio 226 es de 1600 años. Suponga que tenemos una muestra de 22 mg.
   (a) Encuentre una función $m(t) = m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa restante después de t años.
   (b) Encuentre una función $m(t) = m_0 e^{-rt}$ que modele la masa restante después de t años.
   (c) ¿Cuánto de la muestra habrá después de 4000 años?
   (d) ¿Después de cuánto tiempo habrá sólo 18 mg de la muestra?

18. **Cesio radiactivo** La vida media del cesio 137 es de 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 10 gramos.
   (a) Encuentre una función $m(t) = m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa restante después de t años.

(b) Encuentre una función $m(t) = m_0 e^{-rt}$ que modele la masa restante después de t años.
(c) ¿Cuánto de la muestra habrá después de 80 años?
(d) ¿Después de cuánto tiempo habrá sólo 2 mg de la muestra?

19. Estroncio radiactivo La vida media del estroncio 90 es de 28 años. ¿Cuánto tiempo tardará una muestra de 50 mg en desintegrarse a una masa de 32 mg?

20. Radio radiactivo El radio 221 tiene una vida media de 30 s. ¿Cuánto tiempo tomará que el 95% de la muestra se desintegre?

21. Hallar vida media Si 250 mg de un elemento radiactivo se desintegran a 200 mg en 48 horas, encuentre la vida media del elemento.

22. Radón radiactivo Después de 3 días, una muestra de radón 222 se ha desintegrado a 58% de su cantidad original.
(a) ¿Cuál es la vida media del radón 222?
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la muestra se desintegre al 20% de su cantidad original?

23. Determinación de antigüedad por carbono 14 Un artefacto de madera de una tumba antigua contiene 65% del carbono 14 que está presente en árboles vivos. ¿Cuánto tiempo hace que se construyó el artefacto? (La vida media del carbono 14 es de 5370 años.)

24. Determinación de antigüedad por carbono 14 Se estima que la tela para el entierro de una momia egipcia contiene 59% del carbono 14 que contenía originalmente. ¿Cuánto tiempo hace que la momia fue enterrada? (La vida media del carbono 14 es de 5730 años.)

25-28 ■ Estos ejercicios usan la Ley de Newton de Enfriamiento.

25. Sopa que se enfría Un tazón de sopa caliente se sirve en una fiesta. Empieza a enfriarse de acuerdo con la Ley de Newton de Enfriamiento, de modo que la temperatura en el tiempo t está dada por

$$T(t) = 65 + 145e^{-0.05t}$$

donde t se mide en minutos y T se mide en ºF.
(a) ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?
(b) ¿Cuál es la temperatura después de 10 minutos?
(c) ¿Después de cuánto tiempo será de 100ºF la temperatura?

26. Tiempo de fallecimiento La Ley de Newton de Enfriamiento se utiliza en investigaciones de homicidios para determinar el tiempo de un fallecimiento. La temperatura normal del cuerpo es de 98.6ºF. Inmediatamente después de la muerte, el cuerpo empieza a enfriarse. Se ha determinado en forma experimental que la constante de la Ley de Newton de Enfriamiento es aproximadamente $k = 0.1947$, suponiendo que el tiempo se mida en horas. Suponga que la temperatura del entorno es de 60ºF.
(a) Encuentre la función $T(t)$ que modele la temperatura t horas después del fallecimiento.
(b) Si la temperatura del cuerpo es ahora de 72ºF, ¿cuánto tiempo transcurrió desde la muerte?

27. Enfriamiento de un pavo Un pavo rostizado se saca de un horno cuando su temperatura ha alcanzado 185ºF y se coloca en una mesa en un cuarto donde la temperatura es de 75ºF.
(a) Si la temperatura del pavo es 150ºF después de media hora, ¿cuál es su temperatura después de 45 minutos?
(b) ¿Cuándo se enfriará el pavo a 100ºF?

28. Ebullición del agua Una tetera llena de agua se pone a hervir en un cuarto con temperatura de 20ºC. Después de 15 minutos, la temperatura del agua ha bajado de 100ºC a 75ºC. Encuentre la temperatura después de otros 10 minutos. Ilustre con una gráfica de la función de temperatura.

29-43 ■ Estos ejercicios se refieren a escalas logarítmicas.

29. Hallar el pH Nos dan la concentración de un ion de hidrógeno de una muestra de cada sustancia. Calcule el pH de la sustancia.
(a) Jugo de limón: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-3}$ M
(b) Jugo de tomate: $[H^+] = 3.2 \times 10^{-4}$ M
(c) Agua de mar: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-9}$ M

30. Hallar el pH Una sustancia desconocida tiene una concentración de iones de hidrógeno de $[H^+] = 3.1 \times 10^{-8}$ M. Encuentre el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

31. Concentración de iones Nos dan la lectura de pH de una muestra de cada sustancia. Calcule la concentración de iones de hidrógeno de la sustancia.
(a) Vinagre: pH = 3.0
(b) Leche: pH = 6.5

32. Concentración de iones Nos dan la lectura de pH de un vaso de líquido. Encuentre la concentración de iones de hidrógeno del líquido.
(a) Cerveza: pH = 4.6
(b) Agua: pH = 7.3

33. Hallar el pH Las concentraciones de iones de hidrógeno en quesos van de 4.0×10^{-7} M a 1.6×10^{-5} M. Encuentre la variación correspondiente de lecturas de pH.

34. Concentración de iones en vino Las lecturas de pH para vinos varían de 2.8 a 3.8. Encuentre la variación correspondiente de concentraciones de iones de hidrógeno.

35. Magnitudes de terremotos Si un terremoto es 20 veces más intenso que otro, ¿cuánto más grande es su magnitud en la escala de Richter?

36. Magnitudes de terremotos El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud de 8.3 en la escala de Richter. Al mismo tiempo, en Japón, un terremoto con magnitud 4.9 causó sólo daños de menor importancia. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de San Francisco que el de Japón?

37. Magnitudes de terremotos El terremoto de Alaska de 1964 tuvo una magnitud de 8.6 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue esto que el terremoto de San Francisco? (Vea Ejercicio 36.)

38. Magnitudes de terremotos El terremoto de 1994 en Northridge, California, tuvo una magnitud de 6.8 en la escala de Richter. Un año después, un terremoto de magnitud 7.2 destruyó Kobe, Japón. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Kobe que el de Northridge?

39. Magnitudes de terremotos El terremoto de 1985 de la ciudad de México tuvo una magnitud de 8.1 en la escala de Richter. El terremoto de 1976 en Tangshan, China, fue 1.26 más intenso. ¿Cuál fue la magnitud del terremoto de Tangshan?

40. Ruido en el Metro La intensidad del sonido en un tren del Metro se midió en 98 dB. Encuentre la intensidad en W/m^2.

41. Ruido de tránsito La intensidad del sonido de tránsito en un crucero de mucho movimiento se midió en 2.0×10^{-5} W/m^2. Encuentre el nivel de intensidad en decibeles.

42. Comparación de niveles de decibeles El ruido de una podadora de motor se midió en 106 dB. El nivel de ruido en un concierto de *rock* se midió en 120 dB. Encuentre la relación entre la intensidad de la música de *rock* y la de la podadora de motor.

43. Ley del Cuadrado Inverso para Sonido Una ley de física dice que la intensidad del sonido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente: $I = k/d^2$.

(a) Use este modelo y la ecuación

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

(descrita en esta sección) para mostrar que los niveles B_1 y B_2 en decibeles, a distancias d_1 y d_2 desde la fuente, están relacionados por la ecuación

$$B_2 = B_1 + 20 \log \frac{d_1}{d_2}$$

(b) El nivel de intensidad en un concierto de *rock* es 120 dB a una distancia de 2 m de los altavoces. Encuentre el nivel de intensidad a una distancia de 10 metros.

CAPÍTULO 4 | REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base a.
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) ¿Cuál es el rango de esta función?
(d) Trace la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada caso.
(i) $a > 1$ (ii) $0 < a < 1$

2. Si x es grande, ¿cuál función crece más rápido, $y = 2^x$ o $y = x^2$?

3. (a) ¿Cómo está definido el número e?
(b) ¿Cuál es la función exponencial natural?

4. (a) ¿Cómo está definida la función logarítmica $y = \log_a x$?
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) ¿Cuál es el rango de esta función?
(d) Trace la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$ si $a > 1$.
(e) ¿Cuál es el logaritmo natural?
(f) ¿Cuál es el logaritmo común?

5. Exprese las tres Leyes de Logaritmos.

6. Exprese la Fórmula para Cambio de Base.

7. (a) ¿Cómo resuelve una ecuación exponencial?
(b) ¿Cómo resuelve una ecuación logarítmica?

8. Supoga que se invierte una cantidad P a una tasa r y que A es la cantidad después de t años.
(a) Escriba una expresión para A si el interés es compuesto n veces por año.
(b) Escriba una expresión para A si el interés es compuesto continuamente.

9. El tamaño inicial de una población es n_0 y la población crece exponencialmente.
(a) Escriba una expresión para la población en términos del tiempo de duplicación a.
(b) Escriba una expresión para la población en términos de la tasa de crecimiento relativo r.

10. (a) ¿Cuál es la vida media de una sustacia radiactiva?
(b) Si una sustancia tiene una vida media h y una masa inicial m_0 escriba una expresión para la masa restante en el tiempo t.

11. ¿Qué dice la Ley de Newton de enfriamiento?

12. ¿Qué tienen en común la escala de pH, la de Richter y la de decibeles? ¿Cómo se miden?

EJERCICIOS

1-4 ■ Use calculadora para hallar los valores indicados de la función exponencial, aproximada a tres lugares decimales.

1. $f(x) = 5^x$; $f(-1.5), f(\sqrt{2}), f(2.5)$

2. $f(x) = 3 \cdot 2^x$; $f(-2.2), f(\sqrt{7}), f(5.5)$

3. $g(x) = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$; $g(-0.7), g(e), g(\pi)$

4. $g(x) = \frac{7}{4}e^{x+1}$; $g(-2), g(\sqrt{3}), g(3.6)$

5-16 ■ Trace la gráfica de la función. Exprese el dominio, rango y asíntota.

5. $f(x) = 2^{-x+1}$

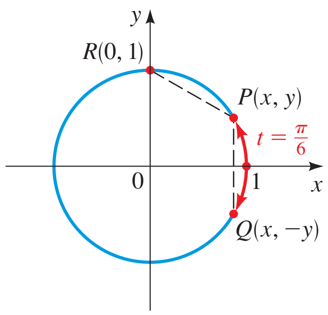
6. $f(x) = 3^{x-2}$

7. $g(x) = 3 + 2^x$

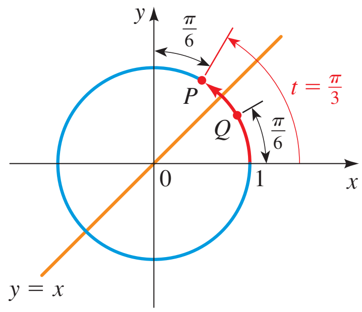
8. $g(x) = 5^{-x} - 5$

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

57. Hallar el punto terminal para $\pi/6$ Suponga que el punto terminal determinado por $t = \pi/6$ es $P(x, y)$ y los puntos Q y R son como se ve en la figura. ¿Por qué son iguales las distancias PQ y PR? Use este dato, junto con la Fórmula de la Distancia, para demostrar que las coordenadas de P satisfacen la ecuación $2y = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$. Simplifique esta ecuación usando el hecho de que $x^2 + y^2 = 1$. Resuelva la ecuación simplificada para hallar $P(x, y)$.



58. Hallar el punto terminal para $\pi/3$ Ahora que ya sabe usted el punto terminal determinado por $t = \pi/6$, use simetría para hallar el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ (vea la figura). Explique su razonamiento.



5.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Las funciones trigonométricas ▶ Valores de las funciones trigonométricas ▶ Identidades fundamentales

Una función es una regla que asigna a cada número real otro número real. En esta sección usamos propiedades de la circunferencia unitaria de la sección precedente para definir las funciones trigonométricas.

▼ Las funciones trigonométricas

Recuerde que para hallar el punto terminal $P(x, y)$ para un número real dado t, nos movemos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto $(1, 0)$. Nos movemos en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj si t es positiva y en la dirección de las manecillas si t es negativa (vea Figura 1). A continuación usamos las coordenadas x y y del punto $P(x, y)$ para definir varias funciones. Por ejemplo, definimos la función llamada *seno* al asignar a cada número real t la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ determinado por t. Las funciones *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente* también se definen si usamos las coordenadas de $P(x, y)$.

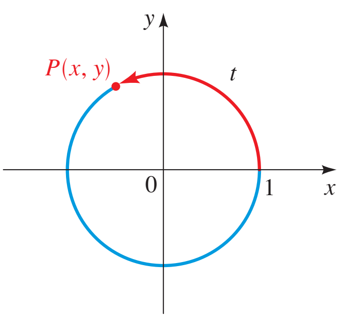


FIGURA 1

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea t cualquier número real y sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Debido a que las funciones trigonométricas se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, a veces reciben el nombre de **funciones circulares**.

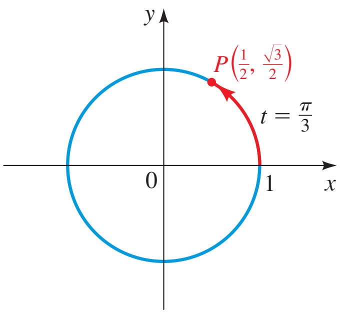


FIGURA 2

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

(a) $t = \dfrac{\pi}{3}$ **(b)** $t = \dfrac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN

(a) De la Tabla 1 de la página 372, vemos que el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ es $P(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$. (Vea Figura 2.) Como las coordenadas son $x = \frac{1}{2}$ y $y = \sqrt{3}/2$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

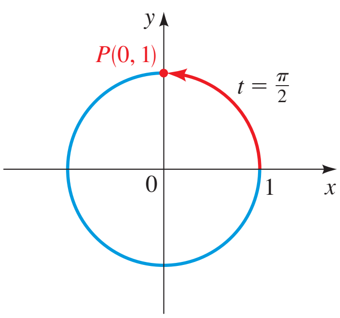


FIGURA 3

(b) El punto terminal determinado por $\pi/2$ es $P(0, 1)$. (Vea Figura 3.) Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Pero $\tan \pi/2$ y $\sec \pi/2$ no están definidos porque $x = 0$ aparece en el denominador en cada una de sus definiciones.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3 ■

Algunos valores especiales de las funciones trigonométricas se dan en la Tabla 1. Esta tabla se obtiene con facilidad de la Tabla 1 de la Sección 5.1, junto con las definiciones de las funciones trigonométricas.

TABLA 1
Valores especiales de las funciones trigonométricas

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0

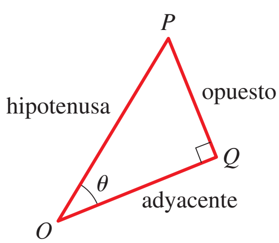
Podemos fácilmente recordar los senos y cosenos de los ángulos básicos si los escribimos en la forma $\sqrt{}/2$:

t	sen t	cos t
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$

El Ejemplo 1 muestra que algunas de las funciones trigonométricas no están definidas para ciertos números reales, por lo cual es necesario determinar sus dominios. Las funciones seno y coseno están definidas para todos los valores de t. Como las funciones cotangente y cosecante tienen y en el denominador de sus definiciones, no están definidas siempre que la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ determinado por t sea 0. Esto ocurre cuando $t = n\pi$ para cualquier entero n, de modo que sus dominios no incluyen estos puntos. Las funciones tangente y secante tienen x en el denominador en sus definiciones, de modo que no están definidas siempre que $x = 0$. Esto ocurre cuando $t = (\pi/2) + n\pi$ para cualquier entero n.

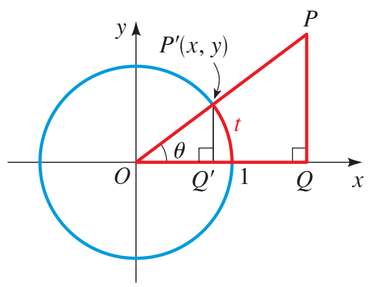
Relación con las funciones trigonométricas de ángulos

Si ya usted ha estudiado trigonometría de triángulos rectángulos (Capítulo 6), es probable se pregunte cómo el seno y coseno de un *ángulo* se relacionan con los de esta sección. Para ver cómo es esto, empecemos con un triángulo rectángulo, ΔOPQ.



Triángulo rectángulo *OPQ*

Ponga el triángulo en el plano de coordenadas como se muestra, con el ángulo θ en posición normal.



$P'(x, y)$ es el punto terminal determinado por t.

El punto $P'(x, y)$ de la figura es el punto terminal determinado por el arco t. Observe que el triángulo OPQ es semejante al triángulo pequeño $OP'Q'$ cuyos catetos tienen longitudes x y y.

A continuación, por la definición de las funciones trigonométricas del ángulo θ tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$$

$$= \frac{y}{1} = y$$

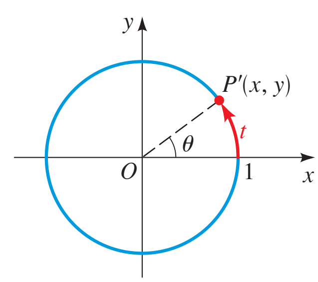
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$$

$$= \frac{x}{1} = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *número real* t, tenemos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x$$

A continuación, si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$ (vea la figura). Por lo tanto, las funciones trigonométricas del ángulo con medida en radianes θ son exactamente iguales que las funciones trigonométricas definidas en términos del punto terminal determinado por el número real t.



La medida en radianes del ángulo θ es t.

¿Por qué entonces estudiar trigonometría en dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de modo diferente. (Compare la Sección 5.6 con las Secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

DOMINIOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Función	Dominio
sen x, cos x	Todos los números reales
tan x, sec x	Todos los números reales que no sean $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n
cot x, csc x	Todos los números reales que no sean $n\pi$ para cualquier entero n

▼ Valores de las funciones trigonométricas

Para calcular otros valores de las funciones trigonométricas, primero determinamos sus signos. Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el que se encuentre el punto terminal de t. Por ejemplo, si el punto terminal $P(x, y)$ determinado por t está en el tercer cuadrante, entonces sus coordenadas son negativas ambas. En consecuencia, sen t, cos t, csc t y sec t son todas negativas, mientras que tan t y cos t son positivas. Se pueden comprobar las otras entradas del recuadro siguiente.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen x, csc x	cos x, sec x, tan x, cot x
III	tan x, cot x	sen x, csc x, cos x, sec x
IV	cos x, sec x	sen x, csc x, tan x, cot x

Por ejemplo, $\cos(2\pi/3) < 0$ porque el punto terminal de $t = 2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, mientras que $\tan 4 > 0$ porque el punto terminal de $t = 4$ está en el tercer cuadrante.

En la Sección 5.1 utilizamos el número de referencia para hallar el punto terminal determinado por un número real t. Como las funciones trigonométricas están definidas en términos de las coordenadas de puntos terminales, podemos usar el número de referencia para hallar valores de las funciones trigonométricas. Suponga que $\bar{t}$ es el número de referencia para t. Entonces el punto terminal de $\bar{t}$ tiene las mismas coordenadas, excepto posiblemente por el signo, como el punto terminal de t. Entonces, los valores de las funciones trigonométricas en t son iguales, excepto posiblemente por el signo, como sus valores en $\bar{t}$. Ilustramos este procedimiento en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre cada valor de lo siguiente.

(a) $\cos \dfrac{2\pi}{3}$ **(b)** $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen} \dfrac{19\pi}{4}$

SOLUCIÓN

(a) El número de referencia para $2\pi/3$ es $\pi/3$ (vea Figura 4(a)). Como el punto terminal de $2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, $\cos(2\pi/3)$ es negativo. Entonces,

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Signo

Número de referencia

De la Tabla 1

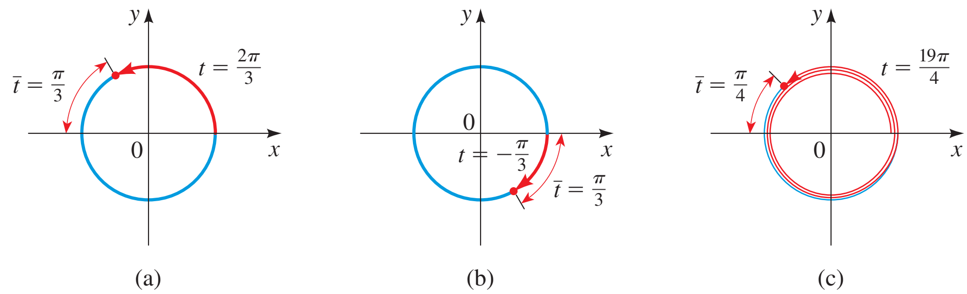


FIGURA 4

(b) El número de referencia para $-\pi/3$ es $\pi/3$ (vea Figura 4(b)). Como el punto terminal es $-\pi/3$ está en el cuarto cuadrante, $\tan(-\pi/3)$ es negativa. Por lo tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Signo | Número de referencia | De la Tabla 1

(c) Como $(19\pi/4) - 4\pi = 3\pi/4$, los puntos terminales determinados por $19\pi/4$ y $3\pi/4$ son los mismos. El número de referencia para $3\pi/4$ es $\pi/4$ (vea Figura 4(c)). Como el punto terminal de $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante, $\text{sen}(3\pi/4)$ es positivo. Entonces,

$$\text{sen}\,\frac{19\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = +\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reste 4π | Signo | Número de referencia | De la Tabla 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

Hasta este punto, hemos podido calcular los valores de las funciones trigonométricas sólo para ciertos valores de *t*. De hecho, podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas siempre que *t* sea múltiplo de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. ¿Cómo podemos calcular las funciones trigonométricas para otros valores de *t*? Por ejemplo, ¿cómo podemos hallar sen 1.5? Una forma es trazando cuidadosamente un diagrama y leer el valor (vea Ejercicios 39-46), pero este método no es muy preciso. Por fortuna, programados directamente en calculadoras científicas son procedimientos matemáticos (vea nota al margen en la página 400) que encuentran los valores de las funciones *seno*, *coseno* y *tangente* redondeados al número de dígitos en la pantalla. La calculadora debe ser puesta en el *modo de radianes* para evaluar estas funciones. Para hallar valores de las funciones cosecante, secante y cotangente usando una calculadora, necesitamos usar las siguientes *relaciones recíprocas:*

$$\csc t = \frac{1}{\text{sen}\,t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Estas identidades se siguen de las definiciones de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, como $\text{sen}\,t = y$ y $\csc t = 1/y$, tenemos $\csc t = 1/y = 1/(\text{sen}\,t)$. Los otros se obtienen de un modo semejante.

EJEMPLO 3 | Uso de calculadora para evaluar funciones trigonométricas

Asegurándonos que nuestra calculadora esté puesta en el modo de radianes y redondeando los resultados a seis lugares decimales, obtenemos:

(a) $\text{sen}\,2.2 \approx 0.808496$

(b) $\cos 1.1 \approx 0.453596$

(c) $\cot 28 = \dfrac{1}{\tan 28} \approx -3.553286$

(d) $\csc 0.98 = \dfrac{1}{\text{sen}\,0.98} \approx 1.204098$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **41** Y **43**

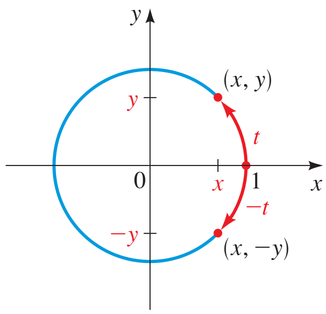


FIGURA 5

Consideremos la relación entre las funciones trigonométricas de t y las de $-t$. De la Figura 5 vemos que

$$\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(-t) = x = \cos t$$

$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t$$

Estas identidades muestran que las funciones seno y tangente son funciones impares, en tanto que la función coseno es una función par. Es fácil ver que la recíproca de una función par es par y la recíproca de una función impar es impar. Este dato, junto con las relaciones recíprocas, completa nuestro conocimiento de las propiedades par-impar para todas las funciones trigonométricas.

Las funciones pares e impares están definidas en la Sección 2.5.

PROPIEDADES PARES-IMPARES

Las funciones seno, cosecante, tangente y cotangente son funciones impares; las funciones coseno y secante son funciones pares.

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

EJEMPLO 4 | Funciones trigonométricas pares e impares

Use las propiedades pares-impares de las funciones trigonométricas para determinar cada valor.

(a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN Por las propiedades pares-impares y la Tabla 1 tenemos

(a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ Seno es impar

(b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Coseno es par

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Identidades fundamentales

Las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí por medio de expresiones llamadas **identidades trigonométricas**. Damos las más importantes en el recuadro siguiente.*

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

* Seguimos la convención acostumbrada de escribir $\operatorname{sen}^2 t$ por $(\operatorname{sen} t)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n t$ por $(\operatorname{sen} t)^n$ por todos los enteros n excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le asignará otro significado en la Sección 5.5. Por supuesto, la misma convención aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

DEMOSTRACIÓN Las identidades recíprocas se siguen inmediatamente de las definiciones de la página 377. A continuación demostramos las identidades de Pitágoras. Por definición, $\cos t = x$ y $\operatorname{sen} t = y$, donde x y y son las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria. Como $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, tenemos que $x^2 + y^2 = 1$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Dividiendo ambos lados entre $\cos^2 t$ (siempre que $\cos t \neq 0$), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

Hemos utilizado las identidades recíprocas $\operatorname{sen} t/\cos t = \tan t$ y $1/\cos t = \sec t$. Análogamente, dividiendo ambos lados de la primera identidad de Pitágoras entre $\operatorname{sen}^2 t$ (siempre que $\operatorname{sen} t \neq 0$) nos da $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$. ■

Como sus nombres lo indican, las identidades fundamentales desempeñan un papel esencial en trigonometría porque podemos usarlas para relacionar cualquier función trigonométrica con cualquiera otra. Por lo tanto, si conocemos el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas en t, entonces podemos hallar los valores de todas las otras en t.

EJEMPLO 5 | Hallar todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una de ellas

Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y t está en el cuarto cuadrante, encuentre los valores de todas las funciones trigonométricas en t.

SOLUCIÓN De las identidades de Pitágoras tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustituya } \cos t = \tfrac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25} \qquad \text{Despeje } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\tfrac{4}{5} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como este punto está en el cuarto cuadrante, $\operatorname{sen} t$ es negativo, de modo que $\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5}$. Ahora que conocemos $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, podemos hallar los valores de las otras funciones trigonométricas usando las identidades recíprocas:

$$\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = \frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = -\frac{5}{4} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

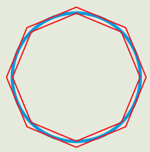
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65** ■

EJEMPLO 6 | Escribir una función trigonométrica en términos de otra

Escriba $\tan t$ en términos de $\cos t$, donde t está en el tercer cuadrante.

El valor de π

El número π es la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Desde la Antigüedad se ha sabido que esta relación es la misma para todos las circunferencias. El primer esfuerzo sistemático para hallar una aproximación numérica para π fue hecho por Arquímedes (hacia el año 240 a.C.), quien demostró que $\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$ al hallar los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos alrededor de la circunferencia.



Hacia el año 480 a.C., el físico chino Tsu Ch'ung-chih dio la aproximación

$$\pi \approx \tfrac{355}{113} = 3.141592\ldots$$

que es correcta a seis lugares decimales. Esta estimación siguió siendo la más precisa de π hasta que el matemático holandés Adrianus Romanus (1593) utilizó polígonos con más de mil millones de lados para calcular π correcto a 15 lugares decimales. En el siglo XVII, los matemáticos empezaron a usar series infinitas e identidades trigonométricas en busca de π. El inglés William Shanks se pasó 15 años (1858-1873) usando estos métodos para calcular π a 707 decimales, pero en 1946 se encontró que sus cifras estaban erróneas empezando con el decimal 528. En la actualidad, con ayuda de computadoras, de manera rutinaria los matemáticos determinan π correcto a millones de lugares decimales. El récord actual es que π ha sido calculado a 2,576,980,370,000 (más de dos billones, 10^{12}) de lugares decimales por T. Daesuke y su equipo.

SOLUCIÓN Como $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$, necesitamos escribir sen t en términos de cos t. Por las identidades de Pitágoras tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \qquad \text{Despeje } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\sqrt{1 - \cos^2 t} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como sen t es negativo en el tercer cuadrante, el signo negativo aplica aquí. Por lo tanto,

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

5.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

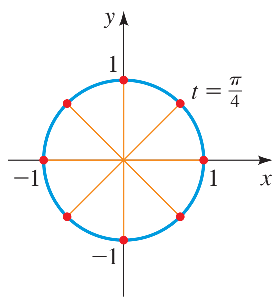
1. Sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Entonces sen t = ____, cos t = ____, y tan t = _____.

2. Si $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, entonces $x^2 + y^2 =$ _____. Entonces, para toda t tenemos $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t =$ ______.

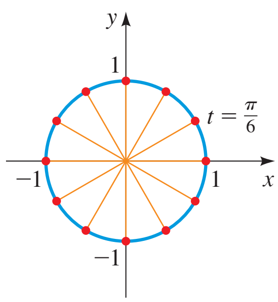
HABILIDADES

3–4 ■ Encuentre sen t y cos t para los valores de t cuyos puntos terminales se muestran en la circunferencia unitaria en la figura. En el ejercicio 3, t crece con incrementos de $\pi/4$; en el ejercicio 4, t aumenta con incrementos de $\pi/6$. (Vea los ejercicios 21 y 22 en la sección 5.1.)

3.



4.



5-24 ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado.

5. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **(b)** $\cos\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $\tan\frac{2\pi}{3}$

6. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$ **(b)** $\cos\frac{5\pi}{6}$ **(c)** $\tan\frac{5\pi}{6}$

7. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$ **(b)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$

8. **(a)** $\cos\frac{5\pi}{3}$ **(b)** $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ **(c)** $\cos\frac{7\pi}{3}$

9. **(a)** $\cos\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\cos\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\cos\frac{7\pi}{4}$

10. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$

11. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}$ **(b)** $\csc\frac{7\pi}{3}$ **(c)** $\cot\frac{7\pi}{3}$

12. **(a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

13. **(a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

14. **(a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

15. **(a)** $\sec\frac{11\pi}{3}$ **(b)** $\csc\frac{11\pi}{3}$ **(c)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

16. **(a)** $\cos\frac{7\pi}{6}$ **(b)** $\sec\frac{7\pi}{6}$ **(c)** $\csc\frac{7\pi}{6}$

17. **(a)** $\tan\frac{5\pi}{6}$ **(b)** $\tan\frac{7\pi}{6}$ **(c)** $\tan\frac{11\pi}{6}$

18. **(a)** $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $\cot\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $\cot\frac{5\pi}{3}$

19. **(a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

20. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ **(b)** $\sec\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\tan\frac{5\pi}{4}$

21. **(a)** $\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\csc\frac{\pi}{2}$ **(c)** $\csc\frac{3\pi}{2}$

22. **(a)** $\sec(-\pi)$ **(b)** $\sec \pi$ **(c)** $\sec 4\pi$

23. **(a)** $\operatorname{sen} 13\pi$ **(b)** $\cos 14\pi$ **(c)** $\tan 15\pi$

24. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{25\pi}{2}$ **(b)** $\cos\frac{25\pi}{2}$ **(c)** $\cot\frac{25\pi}{2}$

25-28 ■ Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas (si está definido) en el número real t dado. Use sus respuestas para completar la tabla.

25. $t = 0$ **26.** $t = \frac{\pi}{2}$ **27.** $t = \pi$ **28.** $t = \frac{3\pi}{2}$

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1		indefinido		
$\frac{\pi}{2}$						
π			0			indefinido
$\frac{3\pi}{2}$						

29-38 ■ Nos dan el punto terminal $P(x, y)$ determinado por un número real t. Encuentre sen t, cos t y tan t.

29. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **30.** $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

31. $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ **32.** $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

33. $\left(-\frac{6}{7}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$ **34.** $\left(\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$

35. $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ **36.** $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

37. $\left(-\frac{20}{29}, \frac{21}{29}\right)$ **38.** $\left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$

39-46 ■ Encuentre un valor aproximado de la función trigonométrica dada usando **(a)** la figura y **(b)** una calculadora. Compare los dos resultados.

39. sen 1

40. cos 0.8

41. sen 1.2

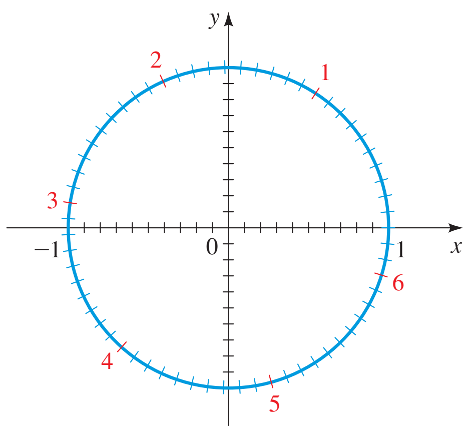
42. cos 5

43. tan 0.8

44. tan(−1.3)

45. cos 4.1

46. sen(−5.2)



47-50 ■ Encuentre el signo de la expresión si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

47. sen t cos t, Cuadrante II **48.** tan t sec t, Cuadrante IV

49. $\frac{\tan t \operatorname{sen} t}{\cot t}$, Cuadrante III **50.** cos t sec t, cualquier cuadrante

51-54 ■ De la información dada, encuentre el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por t.

51. sen $t > 0$ y cos $t < 0$ **52.** tan $t > 0$ y sen $t < 0$

53. csc $t > 0$ y sec $t < 0$ **54.** cos $t < 0$ y cot $t < 0$

55-64 ■ Escriba la primera expresión en términos de la segunda si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

55. sen t, cos t; Cuadrante II **56.** cos t, sen t; Cuadrante IV

57. tan t, sen t; Cuadrante IV **58.** tan t, cos t; Cuadrante III

59. sec t, tan t; Cuadrante II **60.** csc t, cot t; Cuadrante III

61. tan t, sec t; Cuadrante III **62.** sen t, sec t; Cuadrante IV

63. $\tan^2 t$, sen t; cualquier cuadrante

64. $\sec^2 t \operatorname{sen}^2 t$, cos t; cualquier cuadrante

65-72 ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de t a partir de la información dada.

65. sen $t = \frac{3}{5}$, el punto terminal de t está en el cuadrante II

66. cos $t = -\frac{4}{5}$, el punto terminal de t está en el cuadrante III

67. sec $t = 3$, el punto terminal de t está en el cuadrante IV

68. tan $t = \frac{1}{4}$, el punto terminal de t está en el cuadrante III

69. tan $t = -\frac{3}{4}$, cos $t > 0$

70. sec $t = 2$, sen $t < 0$

71. sen $t = -\frac{1}{4}$, sec $t < 0$

72. tan $t = -4$, csc $t > 0$

73-80 ■ Determine si la función es par, impar o ninguna de éstas.

73. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ **74.** $f(x) = x^2 \cos 2x$

75. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ **76.** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

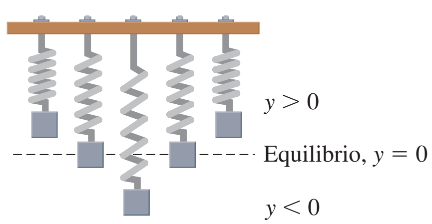
77. $f(x) = |x| \cos x$ **78.** $f(x) = x \operatorname{sen}^3 x$

79. $f(x) = x^3 + \cos x$ **80.** $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$

APLICACIONES

81. Movimiento armónico El desplazamiento a partir del equilibrio de una masa oscilante unida a un resorte está dado por $y(t) = 4 \cos 3\pi t$, donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Encuentre el desplazamiento en los tiempos indicados en la tabla.

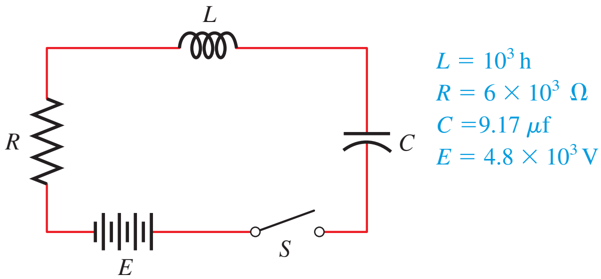
t	$y(t)$
0	
0.25	
0.50	
0.75	
1.00	
1.25	



82. Ritmos circadianos Nuestra presión sanguínea varía en el curso del día. En cierta persona, la presión diastólica en reposo en el tiempo t está dada por $B(t) = 80 + 7 \operatorname{sen}(\pi t/12)$, donde t se mide en horas desde la medianoche y $B(t)$ en mmHg (milímetros de mercurio). Encuentre la presión sanguínea de esta persona a las

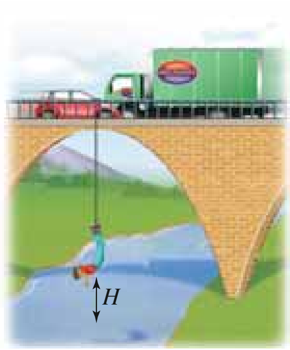
(a) 6:00 a.m. **(b)** 10:30 a.m. **(c)** Mediodía **(d)** 8:00 p.m.

83. Circuito eléctrico Después de cerrar el interruptor del circuito mostrado, la corriente t segundos más tarde es $I(t) = 0.8e^{-3t}$ sen $10t$. Encuentre la corriente en los tiempos **(a)** $t = 0.1$ s y **(b)** $t = 0.5$ s.



84. Salto en bungee Una saltadora de cuerda elástica (llamada *bungee*) se deja caer desde un elevado puente hasta el río y luego rebota una y otra vez. En el tiempo t segundos después de su salto, su altura H (en metros) sobre el río está dada por $H(t) = 100 + 75e^{-t/20}\cos(\frac{\pi}{4}t)$. Encuentre la altura en que se encuentre ella en los tiempos indicados en la tabla.

t	$H(t)$
0	
1	
2	
4	
6	
8	
12	

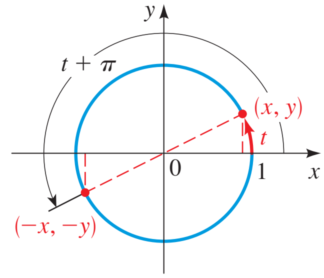


DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

85. Fórmulas de reducción Una *fórmula de reducción* es aquella que se puede usar para "reducir" el número de términos en la entrada para una función trigonométrica. Explique usted la forma en que la figura muestra que son válidas las fórmulas de reducción siguientes:

$$\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(t + \pi) = -\cos t$$

$$\tan(t + \pi) = \tan t$$

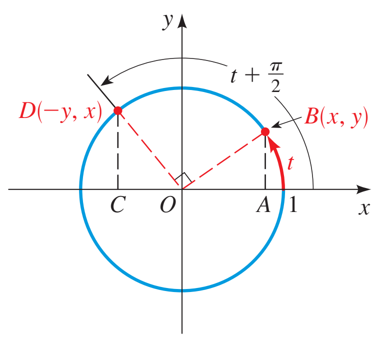


86. Más fórmulas de reducción: Por el teorema de "ángulo-lado-ángulo" de geometría elemental, los triángulos CDO y AOB de la figura siguiente son congruentes. Explique la forma en que esto demuestra que si B tiene coordenadas (x, y), entonces D tiene coordenadas $(-y, x)$. A continuación, explique cómo es que la figura muestra que las fórmulas de reducción siguientes son válidas:

$$\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$$

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t$$

$$\tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot t$$



5.3 GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

Gráficas de las funciones seno y coseno ▶ Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno ▶ Uso de calculadoras graficadoras para graficar funciones trigonométricas

La gráfica de una función nos da una mejor idea de su comportamiento. Entonces, en esta sección graficamos las funciones seno y coseno y ciertas transformaciones de estas funciones. Las otras funciones trigonométricas se grafican en la sección siguiente.

▼ Gráficas de las funciones seno y coseno

Para ayudarnos a graficar las funciones seno y coseno, primero observamos que estas funciones repiten sus valores en forma regular. Para ver exactamente cómo ocurre esto, recuerde que la circunferencia del círculo unitario es 2π. Se deduce que el punto terminal $P(x, y)$ determinado por el número real t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$. Como las funciones seno y coseno están en términos de las coordenadas de $P(x, y)$, se deduce que sus valores no cambian con la adición de cualquier múltiplo entero de 2π. En otras palabras,

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

Entonces, las funciones seno y coseno son *periódicas* de acuerdo con la siguiente definición: Una función f es **periódica** si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t. El mínimo de tal número positivo (si existe) es el **período** de f. Si f tiene período p, entonces la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p se denomina **período completo** de f.

PROPIEDADES PERIÓDICAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Las funciones seno y coseno tienen período 2π:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

TABLA 1

t	sen t	cos t
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$0 \to 1$	$1 \to 0$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$1 \to 0$	$0 \to -1$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$

Entonces las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π. Para trazar sus gráficas, primero graficamos un período. Para trazar las gráficas sobre el intervalo $0 \le t \le 2\pi$, podríamos tratar de hacer una tabla de valores y usar esos puntos para trazar la gráfica. Como no se puede completar dicha tabla, veamos más de cerca las definiciones de estas funciones.

Recuerde que sen t es la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el número real t. ¿Cómo varía la coordenada y de este punto cuando t aumenta? Es fácil ver que la coordenada y de $P(x, y)$ aumenta a 1, luego disminuye a -1 repetidamente cuando el punto $P(x, y)$ se mueve alrededor del círculo unitario. (Vea Figura 1.) De hecho, cuando t aumenta de 0 a $\pi/2$, $y = \operatorname{sen} t$ aumenta de 0 a 1. Cuando t aumenta de $\pi/2$ a π, el valor de $y = \operatorname{sen} t$ disminuye de 1 a 0. La Tabla 1 muestra la variación de las funciones seno y coseno para t entre 0 y 2π.

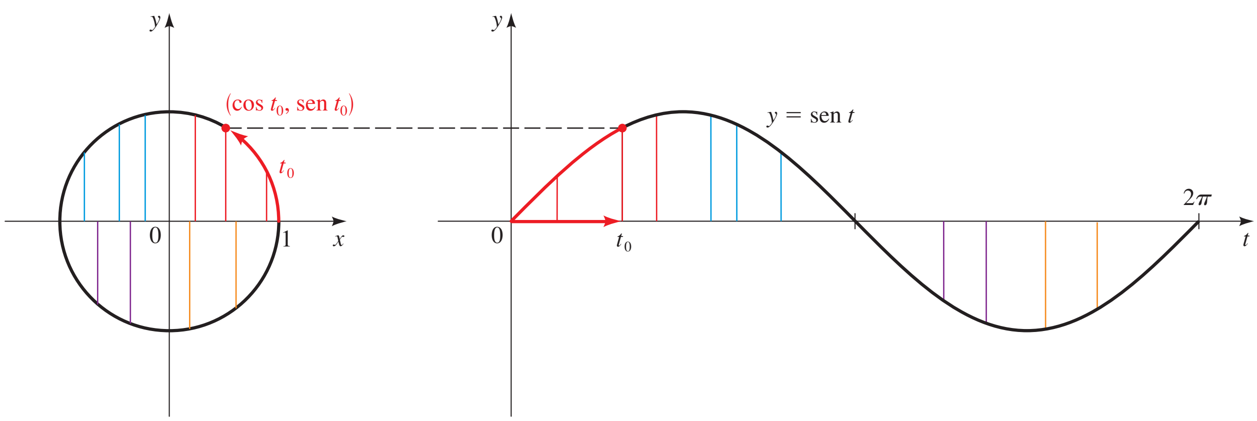


FIGURA 1

Para trazar las gráficas en forma más precisa, encontramos otros pocos valores de sen t y cos t en la Tabla 2. Podríamos también hallar otros valores con ayuda de una calculadora.

TABLA 2

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

A continuación usamos esta información para graficar las funciones sen t y cos t para t entre 0 y 2π en las Figuras 2 y 3. Éstas son las gráficas de un período. Usando el dato de que estas funciones son periódicas con período 2π, obtenemos sus gráficas completas al continuar la misma configuración a la izquierda y a la derecha en cada intervalo sucesivo de longitud 2π.

La gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen. Esto es como se esperaba, porque la función seno es una función impar. Como la función coseno es una función par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

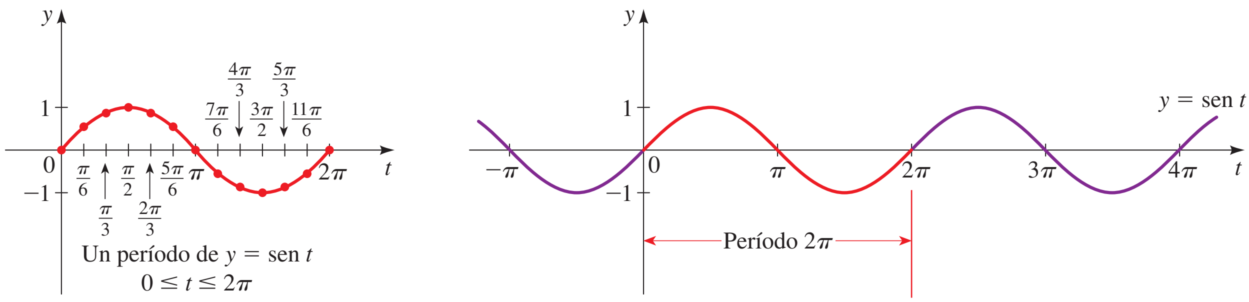


FIGURA 2 Gráfica de sen t

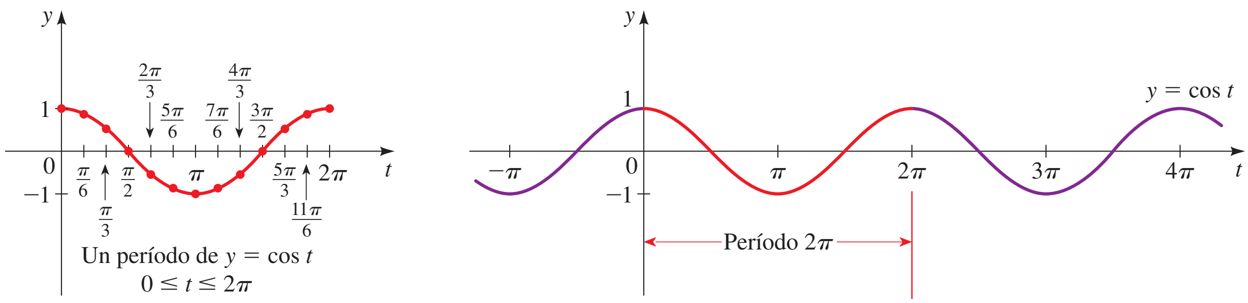


FIGURA 3 Gráfica de cos t

▼ Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno

A continuación consideramos gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Entonces, las técnicas para graficar de la Sección 2.5 son muy útiles aquí. Las gráficas que obtenemos son importantes para entender aplicaciones a situaciones físicas tales como movimiento armónico (vea Sección 5.6), pero algunas de ellas son gráficas de atractivo aspecto que son interesantes por sí solas.

Es tradicional usar la letra x para denotar la variable del dominio de una función. Por lo tanto, de aquí en adelante usamos la letra x y escribimos $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ y así sucesivamente para denotar estas funciones.

EJEMPLO 1 | Curvas de coseno

Trace la gráfica de cada función siguiente.

(a) $f(x) = 2 + \cos x$ **(b)** $g(x) = -\cos x$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$, pero desplazada 2 unidades (vea Figura 4(a)).

(b) La gráfica de $y = -\cos x$ en la Figura 4(b) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje x.

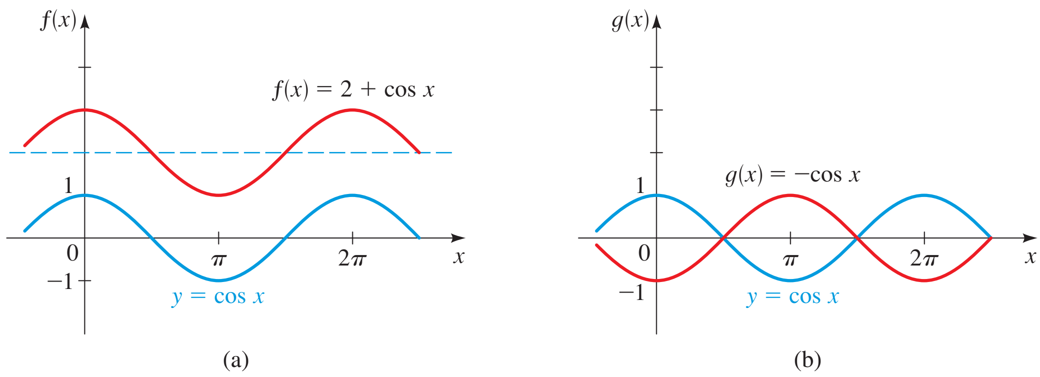


FIGURA 4

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **5**

Grafiquemos $y = 2 \text{ sen } x$. Empezamos con la gráfica de $y = \text{sen } x$ y multiplicamos por 2 la coordenada y de cada punto. Esto tiene el efecto de alargar verticalmente la gráfica en un factor de 2. Para graficar $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$, empezamos con la gráfica de $y = \text{sen } x$ y multiplicamos por $\frac{1}{2}$ la coordenada y de cada punto. Esto tiene el efecto de contraer verticalmente la gráfica en un factor de $\frac{1}{2}$ (vea Figura 5).

El alargamiento y contracción de gráficas se estudia en la Sección 2.5.

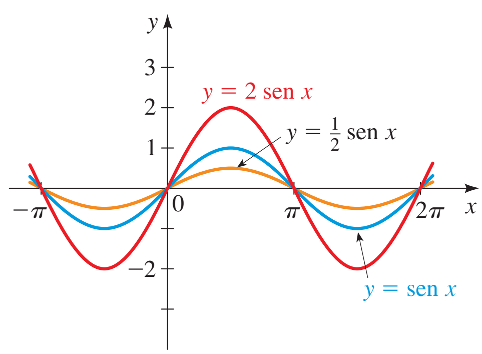


FIGURA 5

En general, para las funciones

$$y = a \text{ sen } x \qquad \text{y} \qquad y = a \cos x$$

el número $|a|$ se denomina **amplitud** y es el valor más grande que estas funciones alcanzan. En la Figura 6 se ilustran gráficas de $y = a \text{ sen } x$ para varios valores de a.

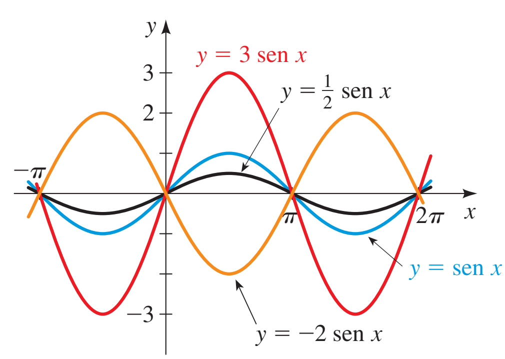


FIGURA 6

EJEMPLO 2 | Alargar una curva coseno

Encuentre la amplitud de $y = -3 \cos x$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN La amplitud es $|-3| = 3$, de modo que el valor más grande que la gráfica alcanza es 3 y el valor más pequeño es -3. Para trazar la gráfica, empezamos con la gráfica de $y = \cos x$, alargamos verticalmente la gráfica en un factor de 3 y reflejamos en el eje x, llegando a la gráfica de la Figura 7.

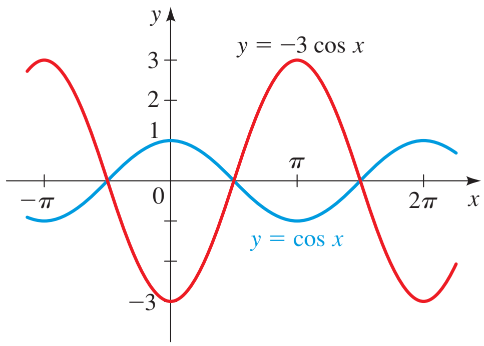


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9

Como las funciones seno y coseno tienen períodos 2π, las funciones

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

completan un período cuando kx varía de 0 a 2π, es decir, para $0 \le kx \le 2\pi$ o para $0 \le x \le 2\pi/k$. Entonces estas funciones completan un período cuando x varía entre 0 y $2\pi/k$ y por lo tanto tienen período $2\pi/k$. Las gráficas de estas funciones se denominan **curvas seno** y **curvas coseno**, respectivamente. (En forma colectiva, las curvas sinusoidales y las cosenoidales se conocen como curvas **sinusoidales**.

CURVAS SENO Y COSENO

Las curvas seno y coseno

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$ y **período** $2\pi/k$.

Un intervalo apropiado en el cual graficar un período completo es $[0, 2\pi/k]$.

Para ver cómo afecta el valor de k a la gráfica de $y = \operatorname{sen} kx$, grafiquemos la curva seno $y = \operatorname{sen} 2x$. Como el período es $2\pi/2 = \pi$, la gráfica completa un período en el intervalo $0 \le x \le \pi$ (vea Figura 8(a)). Para la curva seno $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$, el período es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$, de modo que la gráfica completa un período en el intervalo $0 \le x \le 4\pi$ (vea Figura 8(b)). Vemos que el efecto es *contraer* la gráfica horizontalmente si $k > 1$ o *alargar* la gráfica horizontalmente si $k < 1$.

El alargamiento y contracción de gráficas se estudia en la Sección 2.5.

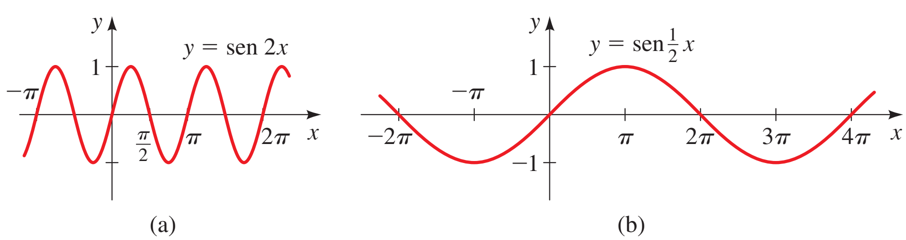


FIGURA 8 (a) (b)

Por comparación, en la Figura 9 mostramos las gráficas de un período de la curva seno $y = a \text{ sen } kx$ para varios valores de k.

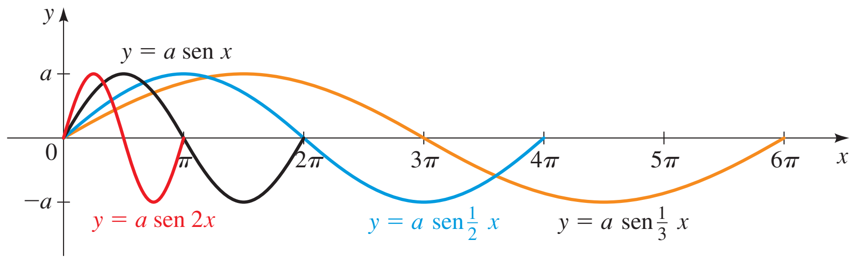


FIGURA 9

EJEMPLO 3 | Amplitud y período

Encuentre la amplitud y período de cada función y trace su gráfica.

(a) $y = 4 \cos 3x$ **(b)** $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

SOLUCIÓN

(a) Obtenemos la amplitud y período a partir de la forma de la función como sigue:

$$\text{amplitud} = |a| = 4$$

$$y = 4 \cos 3x$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$$

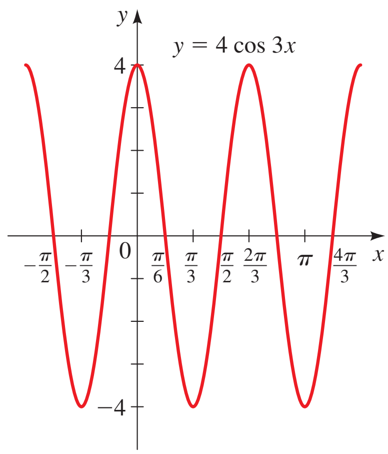


FIGURA 10

La amplitud es 4 y el período es $2\pi/3$. La gráfica se ilustra en la Figura 10.

(b) Para $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$,

$$\text{amplitud} = |a| = |-2| = 2$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

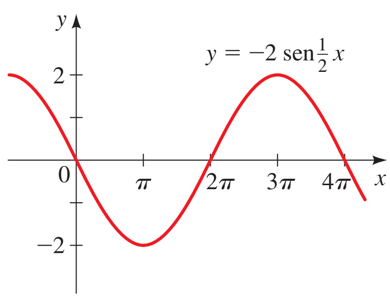


FIGURA 11

La gráfica está en la Figura 11.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19** Y **21**

Las gráficas de funciones de la forma $y = a \text{ sen } k(x - b)$ y $y = a \cos k(x - b)$ son simplemente curvas seno y coseno desplazadas horizontalmente en una cantidad $|b|$. Se desplazan a la derecha si $b > 0$ o a la izquierda si $b < 0$. El número b es el *desfase*. Resumimos las propiedades de estas funciones en el recuadro siguiente.

CURVAS SENO Y COSENO DESPLAZADAS

Las curvas sinusoidales y cosenoidales

$$y = a \text{ sen } k(x - b) \qquad \text{y} \qquad y = a \cos k(x - b) \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$, **período** $2\pi/k$, y **desfase** b.

Un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo es $[b, b + (2\pi/k)]$.

Las gráficas de $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ y $y = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ se muestran en la Figura 12.

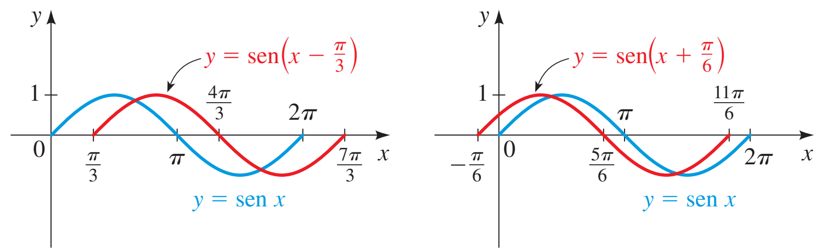


FIGURA 12

EJEMPLO 4 | Una curva seno desplazada

Encuentre la amplitud, período y desfase de $y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, y grafique un período completo.

SOLUCIÓN Obtenemos la amplitud, período y desfase de la forma de la función como sigue:

$$\text{amplitud} = |a| = 3, \quad \text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{desfase} = \frac{\pi}{4} \text{ (a la derecha)}$$

Veamos ahora otra forma de hallar un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo. Como el período de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π, la función $y = 3 \operatorname{sen} 2(x - \frac{\pi}{4})$ pasará por un período completo a medida que $2(x - \frac{\pi}{4})$ varíe de 0 a 2π.

Inicio de período	Fin de período:
$2(x - \frac{\pi}{4}) = 0$	$2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\pi$
$x - \frac{\pi}{4} = 0$	$x - \frac{\pi}{4} = \pi$
$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{5\pi}{4}$

Entonces, graficamos un período sobre el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$..

Como el desfase es $\pi/4$ y el período es π, un período completo ocurre sobre el intervalo

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Como ayuda para trazar la gráfica, dividimos este intervalo en cuatro partes iguales y a continuación graficamos una curva seno con amplitud 3, como en la Figura 13.

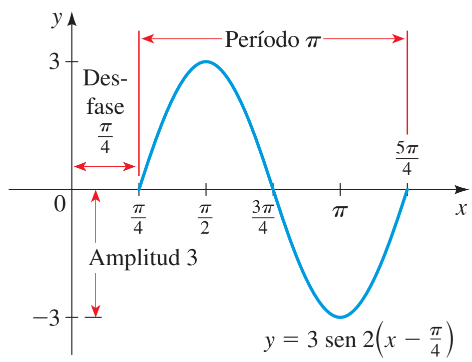


FIGURA 13

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33** ■

EJEMPLO 5 | Curva coseno desplazada

Encuentre la amplitud, período y desfase de

$$y = \frac{3}{4} \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

y grafique un período completo.

SOLUCIÓN Primero escribimos esta función en la forma $y = a \cos k(x - b)$. Para hacer esto, factorizamos 2 de la expresión $2x + \dfrac{2\pi}{3}$ para obtener

$$y = \frac{3}{4}\cos 2\left[x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Por lo tanto, tenemos

$$\text{amplitud} = |a| = \frac{3}{4}$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{desfase} = b = -\frac{\pi}{3} \qquad \text{Desfase } \frac{\pi}{3} \text{ a la } \textit{izquierda}$$

Podemos encontrar un período completo, como sigue:

Inicio del período:	Fin del período:
$2x + \frac{2\pi}{3} = 0$	$2x + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$
$2x = -\frac{2\pi}{3}$	$2x = \frac{4\pi}{3}$
$x = -\frac{\pi}{3}$	$x = \frac{2\pi}{3}$

De este modo podemos graficar un período sobre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

A partir de esta información tenemos que un período de esta curva coseno comienza y termina en $-\pi/3$. Para trazar la gráfica sobre el intervalo, éste lo dividimos en cuatro partes iguales y graficamos la curva coseno con amplitud como se muestra en la Figura 14.

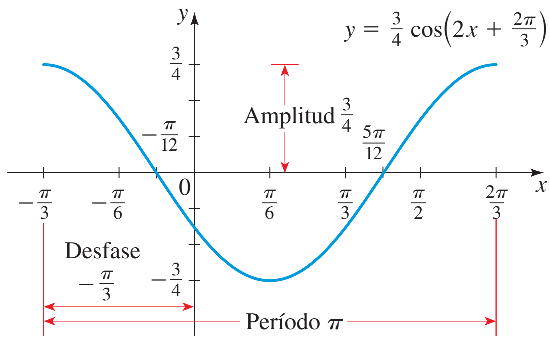


FIGURA 14

✎ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35** ■

▼ Uso de calculadoras graficadoras para graficar funciones trigonométricas

Vea en la Sección 1.9 las guías sobre cómo seleccionar un rectángulo de vista apropiado.

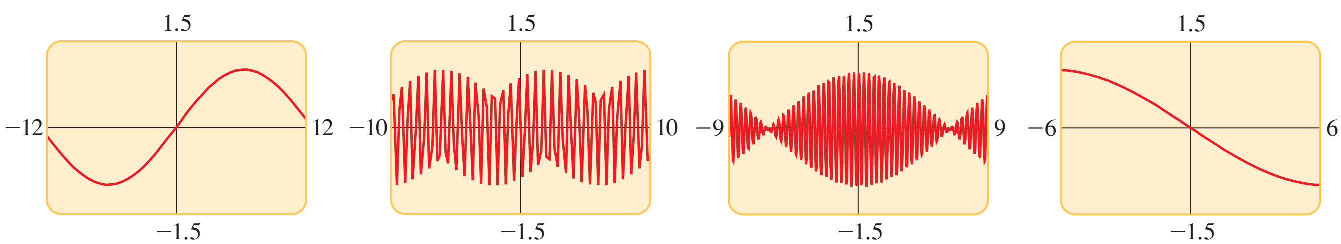
Cuando use una calculadora graficadora o computadora para graficar una función, es importante escoger cuidadosamente el rectángulo de vista para producir una gráfica razonable de la función. Esto es en especial verdadero para funciones trigonométricas; el siguiente ejemplo muestra que, si no se tiene cuidado, es fácil producir una gráfica engañosa de una función trigonométrica.

EJEMPLO 6 | Selección de un rectángulo de vista

Grafique la función $f(x) = \text{sen } 50x$ en un rectángulo de vista apropiado.

El aspecto de las gráficas de la Figura 15 depende de la máquina que se use. Las gráficas que el lector obtenga con su calculadora graficadora podrían no parecerse a estas figuras, pero también serán bastante imprecisas.

SOLUCIÓN La Figura 15(a) muestra la gráfica de f producida por una calculadora graficadora usando el rectángulo de vista $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista la gráfica parece ser razonable, pero si cambiamos el rectángulo de vista a los que aparecen en la Figura 15, las gráficas se verán muy diferentes. Algo extraño está pasando.



(a) (b) (c) (d)

FIGURA 15 Gráficas de $f(x) = \text{sen } 50x$ en diferentes rectángulos de vista.

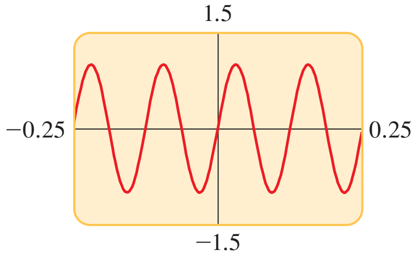


FIGURA 16 $f(x) = \text{sen } 50x$

Para explicar las grandes diferencias en el aspecto de estas gráficas y hallar un rectángulo de vista apropiado, necesitamos hallar el período de la función $y = \text{sen } 50x$:

$$\text{período} = \frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Esto sugiere que debemos trabajar con pequeños valores de x para mostrar sólo unas pocas oscilaciones de la gráfica. Si escogemos el rectángulo de vista $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, obtenemos la gráfica que se ilustra en la Figura 16.

Ahora vemos lo que estaba mal en la Figura 15. Las oscilaciones de $y = \text{sen } 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora localiza puntos y los enlaza, se pierden la mayor parte de los puntos máximo y mínimo y, por tanto, da una impresión engañosa de la gráfica.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

La función h del Ejemplo 7 es **periódica** con período 2π. En general, las funciones que son sumas de funciones de la siguiente lista son periódicas:

1, cos kx, cos $2kx$, cos $3kx$, . . .

sen kx, sen $2kx$, sen $3kx$, . . .

Aun cuando estas funciones parecen ser especiales (notables), son en realidad fundamentales para describir todas las funciones periódicas que surgen en la práctica. El matemático francés J. B. J. Fourier (vea página 501) descubrió que casi toda función periódica se puede escribir como una suma (por lo general una suma infinita) de estas funciones. Esto es notable porque significa que cualquier situación, en la que se presente una variación periódica, se puede describir matemáticamente usando las funciones seno y coseno. Una aplicación moderna del descubrimiento de Fourier es la codificación digital del sonido en discos compactos.

EJEMPLO 7 | Una suma de curvas seno y coseno

Grafique $f(x) = 2 \cos x$, $g(x) = \text{sen } 2x$, y $h(x) = 2 \cos x + \text{sen } 2x$ en una pantalla común para ilustrar el método de adición gráfica.

SOLUCIÓN Observe que $h = f + g$, de modo que su gráfica se obtiene sumando las coordenadas y correspondientes de las gráficas de f y g. Las gráficas de f, g y h se muestran en la Figura 17.

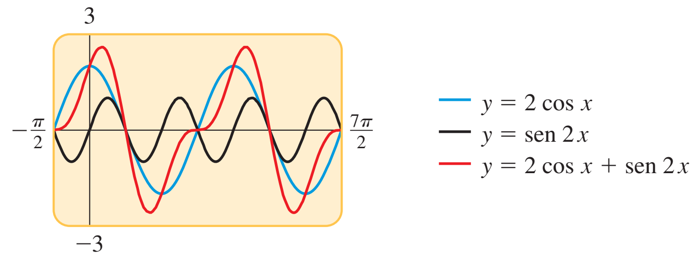


FIGURA 17

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

EJEMPLO 8 | Una curva coseno con amplitud variable

Grafique las funciones $y = x^2$, $y = -x^2$ y $y = x^2 \cos 6\pi x$ en una pantalla común. Comente y explique sobre la relación entre las gráficas.

SOLUCIÓN La Figura 18 muestra las tres gráficas en el rectángulo de vista $[-1.5, 1.5]$ por $[-2, 2]$. Parece que la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi$ se encuentra entre las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$.

Para entender esto, recuerde que los valores de cos $6x$ están entre -1 y 1, es decir,

$$-1 \leq \cos 6\pi x \leq 1$$

para todos los valores de x. Multiplicando las desigualdades por x^2 y observando que $x^2 \geq 0$, obtenemos

$$-x^2 \leq x^2 \cos 6\pi x \leq x^2$$

Esto explica por qué las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$ forman una frontera para la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$. (Observe que las gráficas se tocan cuando $6\pi x = \pm 1$.)

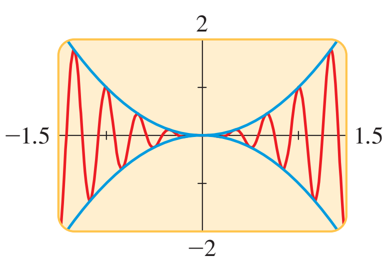
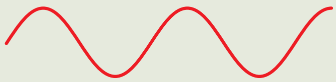


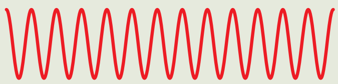
FIGURA 18 $y = x^2 \cos 6\pi x$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

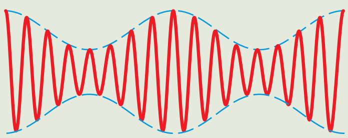
El Ejemplo 8 muestra que la función $y = x^2$ controla la amplitud de la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$. En general, si $f(x) = a(x) \cos kx$, la función a determina cómo varía la amplitud de f, y la gráfica de f está entre las gráficas de $y = -a(x)$ y $y = a(x)$. A continuación veamos otro ejemplo.

Radio AM y FM
Las transmisiones de radio están formadas por ondas de sonido sobrepuestas en una forma de onda electromagnética llamada **señal portadora**.

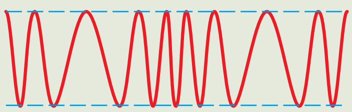

Onda de sonido


Señal portadora

Hay dos tipos de transmisión de radio, llamadas **amplitud modulada (AM)** y **frecuencia modulada (FM)**. En emisoras de AM, la onda de sonido cambia, o **modula**, la amplitud de la portadora, pero la frecuencia permanece sin cambio.


Señal de AM.

En emisoras de FM, la onda de sonido modula la frecuencia, pero la amplitud permanece igual.


Señal de FM.

EJEMPLO 9 | Curva coseno con amplitud variable

Grafique la función $f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$.

SOLUCIÓN La gráfica aparece en la Figura 19. Aun cuando está trazada por una computadora, podríamos haberla hecho manualmente trazando primero las curvas de frontera $y = \cos 2\pi x$ y $y = -\cos 2\pi x$. La gráfica de f es una curva coseno que está entre las gráficas de estas dos funciones.

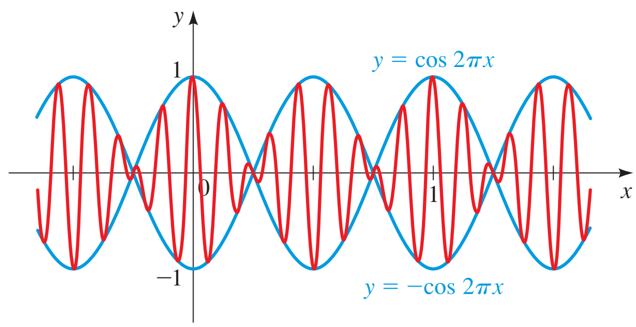


FIGURA 19 $f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

EJEMPLO 10 | Una curva seno con amplitud amortiguada

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es importante en cálculo. Grafique esta función y comente sobre su comportamiento cuando x es cercana a 0.

SOLUCIÓN El rectángulo de vista $[-15, 15]$ por $[-0.5, 1.5]$ que se ilustra en la Figura 20(a) da una buena vista general de la gráfica de f. El rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[-0.5, 1.5]$ de la Figura 20(b) se enfoca en el comportamiento de f cuando $x \approx 0$. Observe que aun cuando $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ (en otras palabras, 0 no está en el dominio de f), los valores de f parecen aproximarse a 1 cuando x se acerca a 0. Este dato es crucial en cálculo.

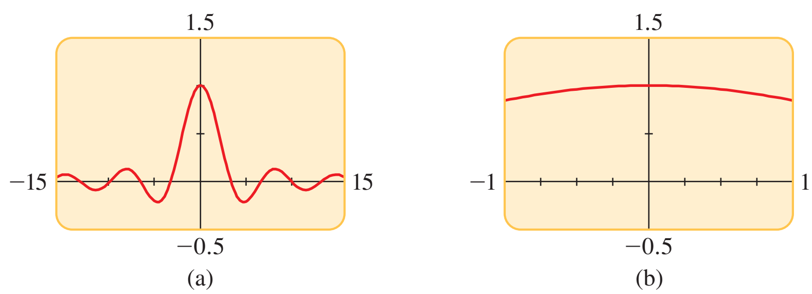


FIGURA 20 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **75**

La función del Ejemplo 10 se puede escribir como

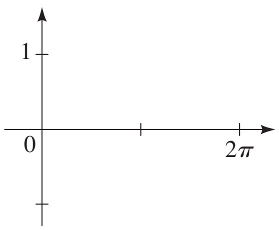
$$f(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen} x$$

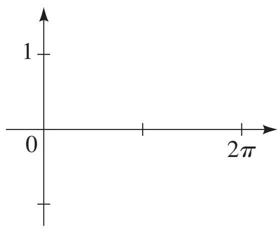
y puede entonces verse como una función seno cuya amplitud está controlada por la función $a(x) = 1/x$.

5.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Las funciones trigonométricas $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ tienen amplitud ____y período _____. Trace una gráfica de cada función en el intervalo $|2\pi|$.





2. La función trigonométrica $y = 3\,\text{sen}\, 2x$ tiene amplitud______ y período _______.

HABILIDADES

3-16 ■ Grafique la función.

3. $f(x) = 1 + \cos x$
4. $f(x) = 3 + \text{sen}\, x$
5. $f(x) = -\text{sen}\, x$
6. $f(x) = 2 - \cos x$
7. $f(x) = -2 + \text{sen}\, x$
8. $f(x) = -1 + \cos x$
9. $g(x) = 3\cos x$
10. $g(x) = 2\,\text{sen}\, x$
11. $g(x) = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\, x$
12. $g(x) = -\frac{2}{3}\cos x$
13. $g(x) = 3 + 3\cos x$
14. $g(x) = 4 - 2\,\text{sen}\, x$
15. $h(x) = |\cos x|$
16. $h(x) = |\text{sen}\, x|$

17-28 ■ Encuentre la amplitud y período de la función, y trace su gráfica.

17. $y = \cos 2x$
18. $y = -\text{sen}\, 2x$
19. $y = -3\,\text{sen}\, 3x$
20. $y = \frac{1}{2}\cos 4x$
21. $y = 10\,\text{sen}\, \frac{1}{2}x$
22. $y = 5\cos \frac{1}{4}x$
23. $y = -\frac{1}{3}\cos \frac{1}{3}x$
24. $y = 4\,\text{sen}(-2x)$
25. $y = -2\,\text{sen}\, 2\pi x$
26. $y = -3\,\text{sen}\, \pi x$
27. $y = 1 + \frac{1}{2}\cos \pi x$
28. $y = -2 + \cos 4\pi x$

29-42 ■ Encuentre la amplitud, período y desfase de la función, y grafique un período completo.

29. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
30. $y = 2\,\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
31. $y = -2\,\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
32. $y = 3\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
33. $y = -4\,\text{sen}\, 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
34. $y = \text{sen}\, \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
35. $y = 5\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
36. $y = 2\,\text{sen}\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
37. $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
38. $y = 1 + \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
39. $y = 3\cos \pi(x + \frac{1}{2})$
40. $y = 3 + 2\,\text{sen}\, 3(x + 1)$
41. $y = \text{sen}(\pi + 3x)$
42. $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

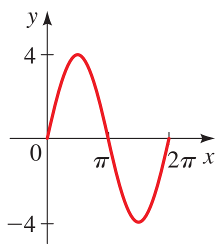
43-50 ■ Nos dan la gráfica de un período completo de una curva seno o coseno.

(a) Encuentre la amplitud, período y desfase.

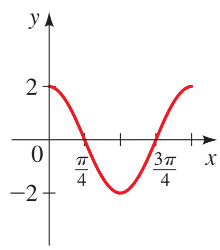
(b) Escriba una ecuación que represente la curva en la forma

$$y = a\,\text{sen}\, k(x - b) \qquad \text{o} \qquad y = a\cos k(x - b)$$

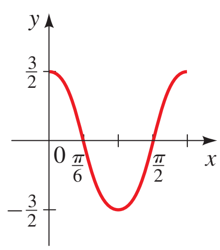
43.



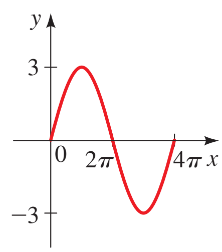
44.



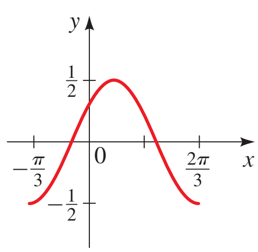
45.



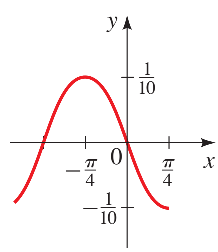
46.



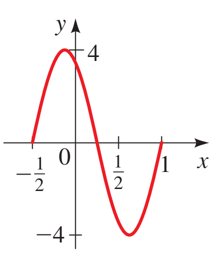
47.



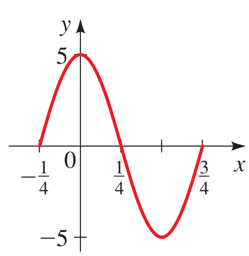
48.



49.



50.



51-58 ■ Determine un rectángulo de vista apropiado para cada función, y úselo para trazar la gráfica.

51. $f(x) = \cos 100x$
52. $f(x) = 3\,\text{sen}\, 120x$
53. $f(x) = \text{sen}(x/40)$
54. $f(x) = \cos(x/80)$
55. $y = \tan 25x$
56. $y = \csc 40x$
57. $y = \text{sen}^2 20x$
58. $y = \sqrt{\tan 10\pi x}$

59-60 ■ Grafique f, g y $f + g$ en una pantalla común para ilustrar la adición gráfica.

59. $f(x) = x, \quad g(x) = \text{sen } x$

60. $f(x) = \text{sen } x, \quad g(x) = \text{sen } 2x$

61-66 ■ Grafique las tres funciones en una pantalla común. ¿Cómo están relacionadas las gráficas?

61. $y = x^2, \quad y = -x^2, \quad y = x^2 \text{sen } x$

62. $y = x, \quad y = -x, \quad y = x \cos x$

63. $y = \sqrt{x}, \quad y = -\sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x} \text{ sen } 5\pi x$

64. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2\pi x}{1 + x^2}$

65. $y = \cos 3\pi x, \quad y = -\cos 3\pi x, \quad y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$

66. $y = \text{sen } 2\pi x, \quad y = -\text{sen } 2\pi x, \quad y = \text{sen } 2\pi x \text{ sen } 10\pi x$

67-70 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo de la función.

67. $y = \text{sen } x + \text{sen } 2x$

68. $y = x - 2 \text{ sen } x, 0 \le x \le 2\pi$

69. $y = 2 \text{ sen } x + \text{sen}^2 x$

70. $y = \dfrac{\cos x}{2 + \text{sen } x}$

71-74 ■ Encuentre todas las soluciones de la ecuación que estén sobre el intervalo $[0, \pi]$. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales.

71. $\cos x = 0.4$

72. $\tan x = 2$

73. $\csc x = 3$

74. $\cos x = x$

75-76 ■ Nos dan una función f.

(a) ¿f es par, impar o ninguna de éstas?

(b) Encuentre los puntos de intersección x de la gráfica de f.

(c) Grafique f en un rectángulo de vista apropiado.

(d) Describa el comportamiento de la función a medida que $x \to \pm\infty$.

(e) Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. ¿Qué ocurre cuando x se aproxima a 0?

75. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

76. $f(x) = \dfrac{\text{sen } 4x}{2x}$

APLICACIONES

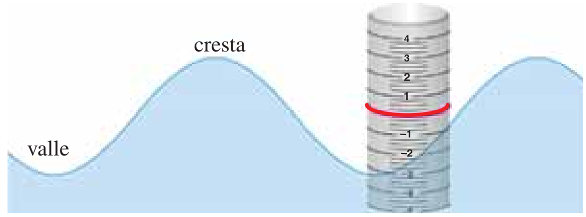
77. Altura de una ola Cuando pasa una ola por un rompeolas de pilotes, la altura del agua está modelada por la función

$$h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{10} t\right)$$

donde $h(t)$ es la altura en pies sobre el nivel medio del mar en el tiempo t segundos.

(a) Encuentre el período de la ola.

(b) Encuentre la altura de la ola, es decir, la distancia vertical entre el valle y la cresta de la ola.



78. Vibraciones de sonido Se pulsa un diapasón, produciendo un tono puro cuando vibran sus puntas. Las vibraciones son modeladas por la función

$$v(t) = 0.7 \text{ sen}(880\pi t)$$

donde $v(t)$ es el desplazamiento de las puntas en milímetros en el tiempo t segundos.

(a) Encuentre el período de la vibración.

(b) Encuentre la frecuencia de la vibración, es decir, el número de veces que la punta vibra por segundo.

(c) Grafique la función v.

79. Presión sanguínea Cada vez que pulsa nuestro corazón, la presión sanguínea primero aumenta y después disminuye a medida que el corazón descansa entre una pulsación y otra. Las presiones sanguíneas máxima y mínima reciben el nombre de presiones *sistólica* y *diastólica*, respectivamente. Las *lecturas de presión sanguínea* se escriben como sistólica/diastólica. Una lectura de 120/80 se considera normal.

La presión sanguínea de cierta persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25 \text{ sen}(160\pi t)$$

donde $p(t)$ es la presión en mmHg (milímetros de mercurio), en el tiempo t medida en minutos.

(a) Encuentre el período de p.

(b) Encuentre el número de pulsaciones por minuto.

(c) Grafique la función p.

(d) Encuentre la lectura de presión sanguínea. ¿Cómo se compara esto contra la presión sanguínea normal?

80. Estrellas variables Las estrellas variables son aquellas cuyo brillo varía periódicamente. Una de las más visibles es R Leonis; su brillo está modelada por la función

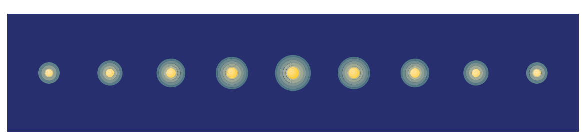
$$b(t) = 7.9 - 2.1 \cos\left(\frac{\pi}{156} t\right)$$

donde t se mide en días.

(a) Encuentre el período de R Leonis.

(b) Encuentre el brillo máximo y mínimo.

(c) Grafique la función b.



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

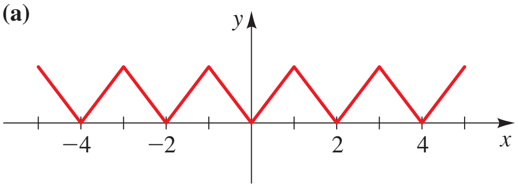
81. Composiciones que contienen funciones trigonométricas Este ejercicio explora el efecto de la función interior g en una función compuesta $y = f(g(x))$.

(a) Grafique la función $y = \operatorname{sen}\sqrt{x}$ usando el rectángulo de vista $[0, 400]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿En qué formas difiere esta gráfica de la gráfica de la función seno?

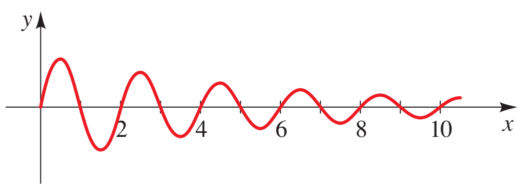
(b) Grafique la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ usando el rectángulo de vista $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿En qué formas difiere esta gráfica de la gráfica de la función seno?

82. Funciones periódicas I Recuerde que una función f es *periódica* si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t, y la más pequeña p (si existe) es el *período* de f. La gráfica de una función de período p se ve igual en cada intervalo de longitud p, de modo que podemos fácilmente determinar el período a partir de la gráfica. Determine si la función cuya gráfica se muestra es periódica; si es periódica, encuentre el período.

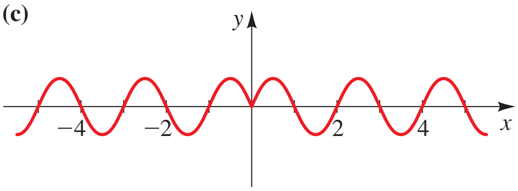
(a)



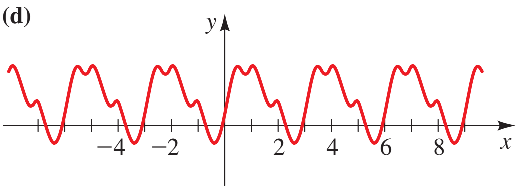
(b)



(c)



(d)



83. Funciones periódicas II Use calculadora graficadora para graficar las siguientes funciones. De la gráfica, determine si la función es periódica; si es periódica, encuentre el período. (Vea página 156 para la definición de $[\![x]\!]$.)

(a) $y = |\operatorname{sen} x|$

(b) $y = \operatorname{sen}|x|$

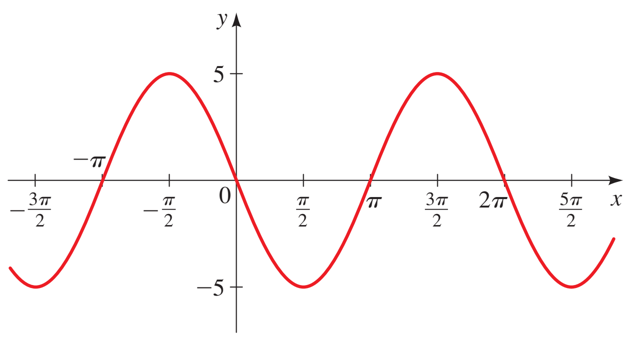
(c) $y = 2^{\cos x}$

(d) $y = x - [\![x]\!]$

(e) $y = \cos(\operatorname{sen} x)$

(f) $y = \cos(x^2)$

84. Curvas sinusoidales La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$ desplazada a la derecha $\pi/2$ unidades. Entonces, la curva seno $y = \operatorname{sen} x$ es también al mismo tiempo una curva coseno: $y = \cos(x - \pi/2)$. De hecho, cualquier curva seno es también una curva coseno con un desfase diferente, y cualquier curva coseno también es una curva seno. Las curvas seno y coseno se conocen en forma colectiva como *sinusoidales*. Para la curva cuya gráfica se muestra, encuentre todas las formas posibles de expresarla como curva seno $y = a \operatorname{sen}(x - b)$ o como curva coseno $y = a\cos(x - b)$. Explique por qué piensa usted que ha encontrado todas las opciones posibles para a y b en cada caso.



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Modelos depredador/presa**

En este proyecto exploramos el uso de funciones sinusoidales al modelar la población de un depredador y su presa. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

5.4 MÁS GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

Gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante ▶ Gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente ▶ Gráficas de transformaciones de las funciones cosecante y secante

En esta sección graficamos las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, y transformaciones de estas funciones.

▼ Gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

Empezamos por expresar las propiedades periódicas de estas funciones. Recuerde que las funciones seno y coseno tienen período 2π. Como las funciones cosecante y secante son las recíprocas de las funciones seno y coseno, respectivamente, también tienen período 2π (vea Ejercicio 55). Las funciones tangente y cotangente, sin embargo, tienen período π (vea Ejercicio 85 de la Sección 5.2).

PROPIEDADES PERIÓDICAS

Las funciones tangente y cotangente tienen período π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Las funciones cosecante y secante tienen período 2π:

$$\csc(x + 2\pi) = \csc x \qquad \sec(x + 2\pi) = \sec x$$

x	$\tan x$
0	0
$\pi/6$	0.58
$\pi/4$	1.00
$\pi/3$	1.73
1.4	5.80
1.5	14.10
1.55	48.08
1.57	1,255.77
1.5707	10,381.33

Primero trazamos la gráfica de la función tangente. Como tiene período π, necesitamos sólo trazar la gráfica sobre cualquier intervalo de longitud π y luego repetir la configuración a izquierda y derecha. Trazamos la gráfica sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Como $\tan(\pi/2)$ y $\tan(-\pi/2)$ no están definidas, es necesario tener cuidado trazar la gráfica en los puntos cercanos a $\pi/2$ y $-\pi/2$. A medida que x se acerca a $\pi/2$ por medio de valores menores a $\pi/2$, el valor de $\tan x$ se hace grande. Para ver esto, observe que cuando x se acerca a $\pi/2$, $\cos x$ se aproxima a 0 y $\operatorname{sen} x$ se aproxima a 1 y, por lo tanto, $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$ es grande. Al margen se muestra una tabla de valores de $\tan x$ para x cercana a $\pi/2$ (≈ 1.570796).

Entonces, al escoger x cercana lo suficiente a $\pi/2$ hasta valores menores a $\pi/2$, podemos hacer el valor de $\tan x$ mayor a cualquier número positivo dado. Expresamos esto escribiendo

$$\tan x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \frac{\pi}{2}^-$$

Esto se lee "$\tan x$ se aproxima al infinito cuando x se aproxima a $\pi/2$ por la izquierda".

Análogamente, al escoger x cercana a $-\pi/2$ hasta valores mayores a $-\pi/2$, podemos hacer $\tan x$ más pequeña que cualquier número negativo dado. Escribimos esto como

La notación de flecha se estudia en la Sección 3.7.

$$\tan x \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to -\frac{\pi}{2}^+$$

Esto se lee "$\tan x$ se aproxima al infinito negativo cuando x se aproxima a $-\pi/2$ por la derecha".

Las asíntotas se estudian en la Sección 3.7.

Entonces, la gráfica de $y = \tan x$ se aproxima a las rectas verticales $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$. Por lo tanto, estas rectas son **asíntotas verticales**. Con la información que tenemos hasta ahora, trazamos la gráfica de $y = \tan x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$ en la Figura 1. La gráfica completa de tangente (vea Figura 5(a) en la página siguiente) se obtiene ahora usando el dato de que la tangente es periódica con período π.

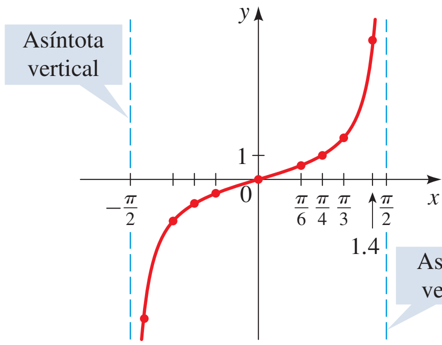


FIGURA 1
Un período de $y = \tan x$

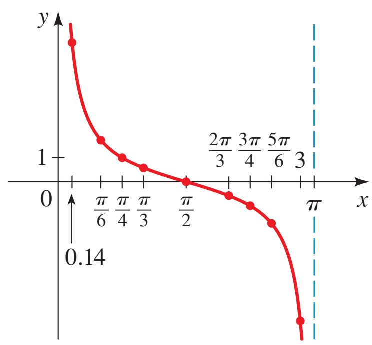


FIGURA 2
Un período de $y = \cot x$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Evaluación de funciones en una calculadora

¿En qué forma su calculadora evalúa sen t, cos t, e^t, ln t, $\sqrt{t}$ y otras funciones como éstas? Un método es aproximar estas funciones por medio de polinomiales, porque las polinomiales son fáciles de evaluar. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

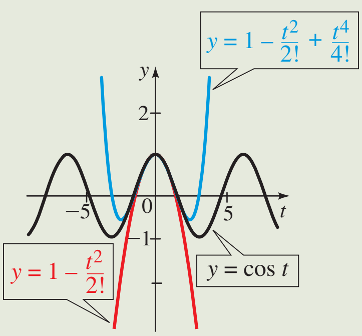
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Estas notables fórmulas fueron encontradas por el matemático inglés Brook Taylor (1685-1731). Por ejemplo, si usamos los primeros tres términos de la serie de Taylor para hallar cos(0.4), obtenemos

$$\cos 0.4 \approx 1 - \frac{(0.4)^2}{2!} + \frac{(0.4)^4}{4!}$$

$$\approx 0.92106667$$

(Compare esto con el valor que usted obtiene en su calculadora.) La gráfica muestra que cuantos más términos de la serie utilicemos, las polinomiales se aproximan más cercanamente a la función cos t.



La función $y = \cot x$ está graficada sobre el intervalo $(0, \pi)$ por un análisis similar (vea Figura 2). Como $\cot x$ no está definida para $x = n\pi$ con n un entero, su gráfica completa (en la Figura 5(b) en la página siguiente) tiene asíntotas verticales en estos valores.

Para graficar las funciones cosecante y secante, usamos las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Por lo tanto, para graficar $y = \csc x$, tomamos las recíprocas de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. (Vea Figura 3.) Análogamente, para graficar $y = \sec x$, tomamos las recíprocas de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \cos x$. (Vea Figura 4.)

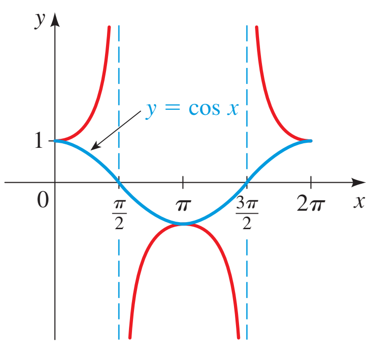


FIGURA 3
Un período de $y = \sec x$

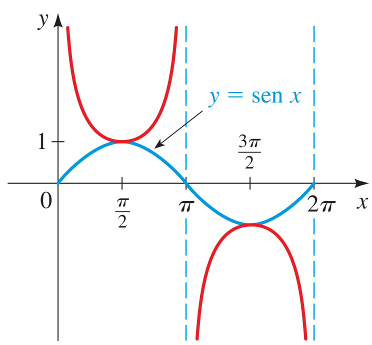


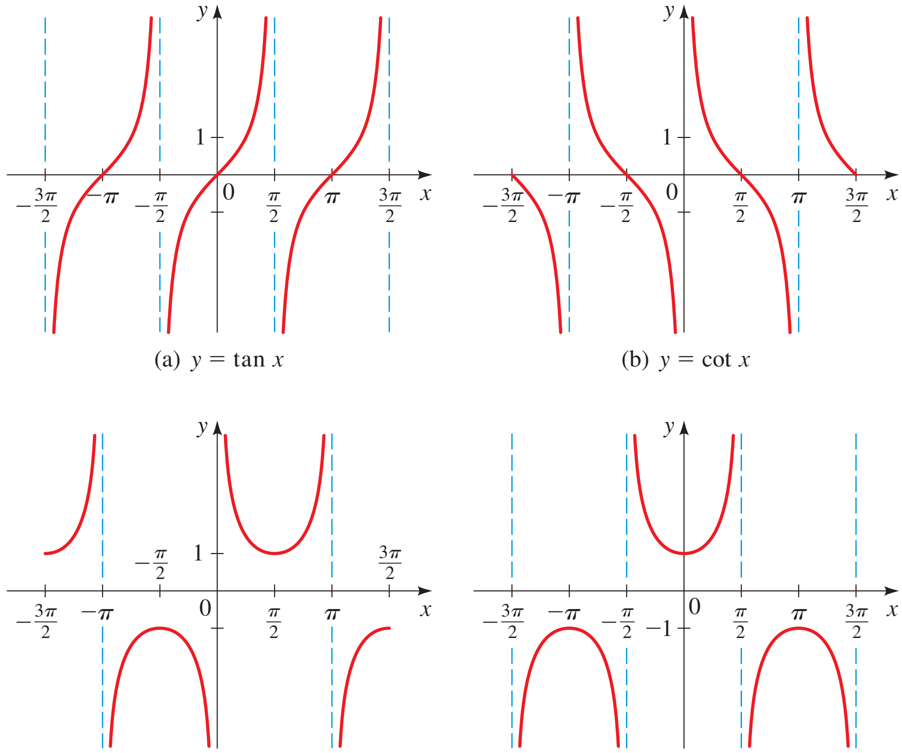
FIGURA 4
Un período de $y = \csc x$

Consideremos más cercanamente la gráfica de la función $y = \csc x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Necesitamos examinar los valores de la función cerca de 0 y π, porque en estos valores $\operatorname{sen} x = 0$ y $\csc x$ está así indefinido. Vemos que

$$\csc x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0^+$$

$$\csc x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pi^-$$

Por lo tanto, las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ son asíntotas verticales. Sobre el intervalo $\pi < x < 2\pi$ la gráfica se traza en la misma forma. Los valores de $\csc x$ sobre ese intervalo son los mismos que los del intervalo $0 < x < \pi$ excepto por el signo (vea Figura 3). La gráfica completa de la Figura 5(c) se obtiene ahora del hecho de que la función cosecante es periódica con período 2π. Observe que la gráfica tiene asíntotas verticales en los puntos donde sen $x = 0$, es decir, en $x = n\pi$, para n un entero.



(a) $y = \tan x$ (b) $y = \cot x$

(c) $y = \csc x$ (d) $y = \sec x$

FIGURA 5

La gráfica de $y = \sec x$ se traza de un modo semejante. Observe que el dominio de sec x es el conjunto de todos los números reales que no sean $x = (\pi/2) + n\pi$, para n un entero, de modo que la gráfica tiene asíntotas verticales en esos puntos. La gráfica completa se muestra en la Figura 5(d).

Es evidente que las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$, y $y = \csc x$ son simétricas respecto del origen, mientras que la de $y = \sec x$ es simétrica respecto del eje y. Esto es porque las funciones tangente, cotangente y cosecante son funciones impares, mientras que la función secante es una función par.

▼ Gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente

A continuación consideramos gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente.

EJEMPLO 1 | Graficar curvas tangentes

Grafique cada una de las funciones siguientes.

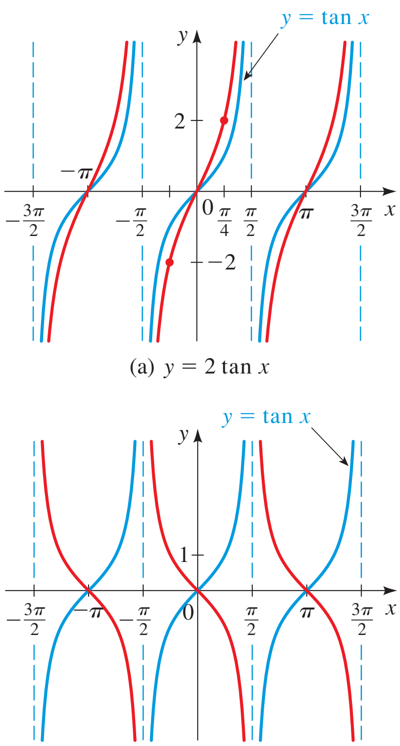
(a) $y = 2 \tan x$ **(b)** $y = -\tan x$

SOLUCIÓN Primero graficamos $y = \tan x$ y luego la transformamos según sea necesario.

(a) Para graficar $y = 2 \tan x$, multiplicamos la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \tan x$ por 2. La gráfica resultante se muestra en la Figura 6(a).

(b) La gráfica de $y = -\tan x$ en la Figura 6(b) se obtiene de la de $y = \tan x$ por reflexión en el eje x.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9** Y **11**



(a) $y = 2 \tan x$

(b) $y = -\tan x$

FIGURA 6

Como las funciones tangente y cotangente tienen período π, las funciones

$$y = a\tan kx \qquad \text{y} \qquad y = a\cot kx \qquad (k > 0)$$

completan un período cuando kx varía de 0 a π, es decir, para $0 \le kx \le \pi$. Resolviendo esta desigualdad, obtenemos $0 \le x \le \pi/k$. Por lo tanto, cada una de ellas tiene período π/k.

CURVAS TANGENTE Y COTANGENTE

Las funciones

$$y = a\tan kx \qquad \text{y} \qquad y = a\cot kx \qquad (k > 0)$$

tienen período π/k.

Por lo tanto, un período completo de las gráficas de estas funciones se presentan sobre cualquier intervalo de longitud π/k. Para trazar un período completo de estas gráficas, es conveniente seleccionar un intervalo entre asíntotas verticales:

Para graficar un período de $y = a\tan kx$, un intervalo apropiado es $\left(-\dfrac{\pi}{2k}, \dfrac{\pi}{2k}\right)$.

Para graficar un período de $y = a\cot kx$, un intervalo apropiado es $\left(0, \dfrac{\pi}{k}\right)$.

EJEMPLO 2 | Graficar curvas tangentes

Grafique cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = \tan 2x$ **(b)** $y = \tan 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN

(a) El período es $\pi/2$ y un intervalo apropiado es $(-\pi/4, \pi/4)$. Los puntos extremos $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$ son asíntotas verticales. De esta manera, graficamos un período completo de la función en $(-\pi/4, \pi/4)$. La gráfica tiene la misma forma que la de la función tangente, pero está contraída horizontalmente en un factor de $\frac{1}{2}$. A continuación repetimos esa porción de la gráfica a la izquierda y a la derecha. Vea Figura 7(a).

(b) La gráfica es la misma que la del inciso (a), pero está desplazada a la derecha $\pi/4$, como se ve en la Figura 7(b).

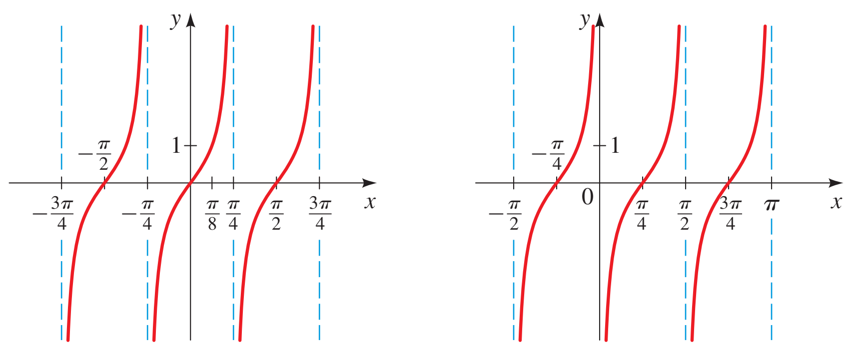
Como $y = \tan x$ completa un período entre $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$, la función $y = \tan 2(x - \frac{\pi}{4})$ completa un período cuando $2(x - \frac{\pi}{4})$ varía de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Inicio de período: Fin de período

Inicio de período: Fin de período

Inicio de período:	Fin de período
$2(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{2}$	$2(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$
$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$	$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$

Entonces graficamos un período sobre el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.



(a) $y = \tan 2x$ (b) $y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **27** Y **39**

EJEMPLO 3 | Un desplazamiento de una curva cotangente

Grafique $y = 2\cot\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

SOLUCIÓN Primero ponemos esto en la forma $y = a\cot k(x - b)$ al factorizar 3 de la expresión $3x - \dfrac{\pi}{2}$:

$$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cot 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Así, la gráfica es la misma que la de $y = 2\cot 3x$ pero está desplazada a la derecha $\pi/6$. El período de $y = 2\cot 3x$ es $\pi/3$, y un intervalo apropiado es $(0, \pi/3)$. Para obtener el intervalo correspondiente para la gráfica deseada, desplazamos este intervalo a la derecha $\pi/6$. Esto da

$$\left(0 + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Como $y = \cot x$ completa un período entre $x = 0$ y $x = \pi$, la función $y = 2\cot(3x - \frac{\pi}{2})$ completa un período cuando $3x - \frac{\pi}{2}$ varía de 0 a π.

Inicio de período:	Fin de período
$3x - \frac{\pi}{2} = 0$	$3x - \frac{\pi}{2} = \pi$
$3x = \frac{\pi}{2}$	$3x = \frac{3\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{2}$

Entonces graficamos un período sobre el intervalo $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.

Finalmente, graficamos un período en la forma de cotangente sobre el intervalo $(\pi/6, \pi/2)$ y repetimos la parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha. (Vea Figura 8.)

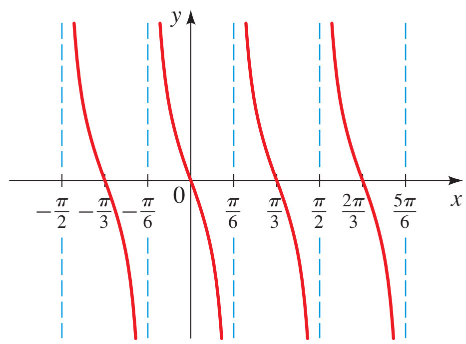


FIGURA 8
$y = 2\cot\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

Gráficas de transformaciones de las funciones cosecante y secante

Ya hemos observado que las funciones cosecante y secante son las recíprocas de las funciones seno y coseno. Entonces, el siguiente resultado es similar del resultado para curvas seno y coseno en la Sección 5.3.

CURVAS COSECANTE Y SECANTE

Las funciones

$$y = a\csc kx \qquad \text{y} \qquad y = a\sec kx \qquad (k > 0)$$

tienen período $2\pi/k$.

Un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo es $[0, 2\pi/k]$.

EJEMPLO 4 | Graficar curvas cosecantes

Grafique cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = \dfrac{1}{2}\csc 2x$ **(b)** $y = \dfrac{1}{2}\csc\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

SOLUCIÓN

(a) El período es $2\pi/2 = \pi$. Un intervalo apropiado es $[0, \pi]$ y las asíntotas se presentan sobre este intervalo siempre que sen $2\pi = 0$. Entonces las asíntotas sobre este intervalo son $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$. Con esta información trazamos sobre el intervalo $[0, \pi]$ una gráfica con la misma forma general que la de un período de la función cosecante. La gráfica completa de la Figura 9(a) se obtiene al repetir esta parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha.

Como $y = \csc x$ completa un período entre $x = 0$ y $x = 2\pi$, la función $y = \frac{1}{2}\csc(2x + \frac{\pi}{2})$ completa un período cuando $2x + \frac{\pi}{2}$ varía de 0 a 2π.

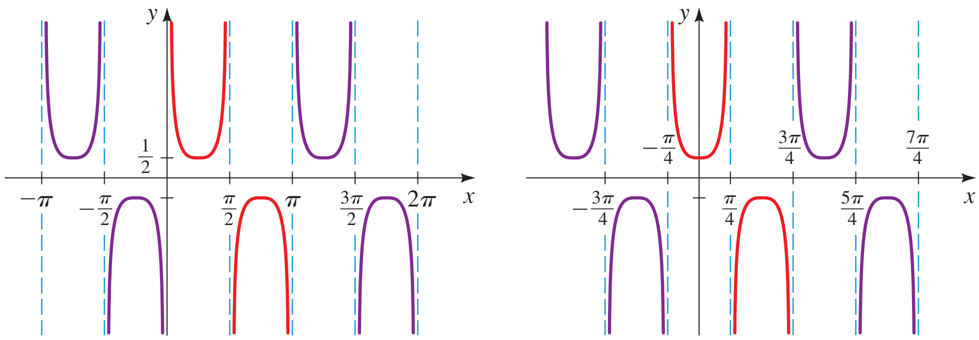
Inicio de período:	Fin de período:
$2x + \frac{\pi}{2} = 0$	$2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$
$2x = -\frac{\pi}{2}$	$2x = \frac{3\pi}{2}$
$x = -\frac{\pi}{4}$	$x = \frac{3\pi}{4}$

Entonces graficamos un período sobre el intervalo $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

(b) Primero escribimos

$$y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\csc 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

De esto vemos que la gráfica es la misma que la del inciso (a) pero desplazada a la izquierda $\pi/4$. La gráfica se ilustra en la figura 9(b).



(a) $y = \frac{1}{2}\csc 2x$ (b) $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

FIGURA 9

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **45**

EJEMPLO 5 | Graficar una curva secante

Grafique $y = 3\sec\frac{1}{2}x$.

SOLUCIÓN El período es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$. Un intervalo apropiado es $[0, 4\pi]$ y las asíntotas se presentan sobre este intervalo en donde $\cos\frac{1}{2}x = 0$. Entonces, las asíntotas sobre este intervalo son $x = \pi$, $x = 3\pi$. Con esta información trazamos sobre el intervalo $[0, 4\pi]$ una gráfica con la misma forma general que la de un período de la función secante. La gráfica completa de la Figura 10 se obtiene al repetir esta parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha.

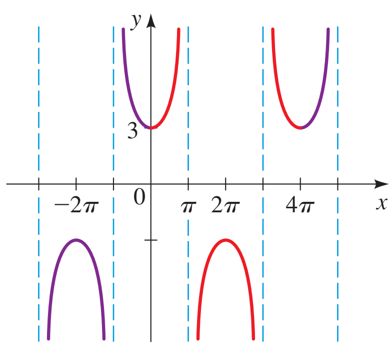


FIGURA 10
$y = 3\sec\frac{1}{2}x$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

5.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

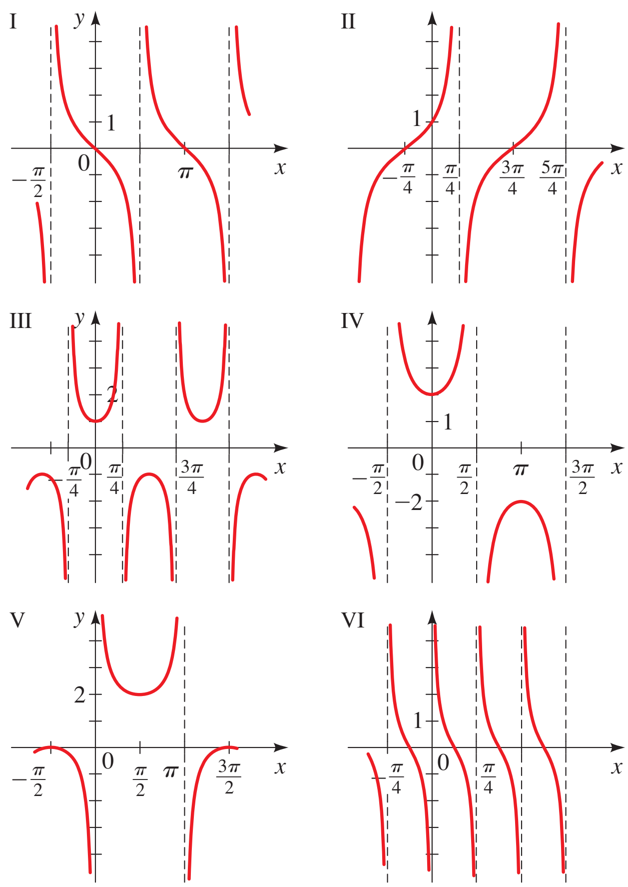
1. La función trigonométrica $y = \tan x$ tiene período ________ y asíntotas $x =$ ________. Trace una gráfica de esta función sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

2. La función trigonométrica $y = \csc x$ tiene período ________ y asíntotas $x =$ ____. Trace una gráfica de esta función sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$.

HABILIDADES

3-8 ■ Relacione la función trigonométrica con una de las gráficas I-VI.

3. $f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
4. $f(x) = \sec 2x$
5. $f(x) = \cot 2x$
6. $f(x) = -\tan x$
7. $f(x) = 2 \sec x$
8. $f(x) = 1 + \csc x$



9-54 ■ Encuentre el período y grafique la función.

9. $y = 4 \tan x$
10. $y = -4 \tan x$
11. $y = -\frac{1}{2} \tan x$
12. $y = \frac{1}{2} \tan x$
13. $y = -\cot x$
14. $y = 2 \cot x$
15. $y = 2 \csc x$
16. $y = \frac{1}{2} \csc x$
17. $y = 3 \sec x$
18. $y = -3 \sec x$
19. $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
20. $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
21. $y = \csc\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
22. $y = \sec\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
23. $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
24. $y = 2 \csc\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
25. $y = \dfrac{1}{2} \sec\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
26. $y = 3 \csc\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
27. $y = \tan 4x$
28. $y = \tan \frac{1}{2}x$
29. $y = \tan \dfrac{\pi}{4}x$
30. $y = \cot \dfrac{\pi}{2}x$
31. $y = \sec 2x$
32. $y = 5 \csc 3x$
33. $y = \csc 4x$
34. $y = \csc \frac{1}{2}x$
35. $y = 2 \tan 3\pi x$
36. $y = 2 \tan \dfrac{\pi}{2}x$
37. $y = 5 \csc \dfrac{3\pi}{2}x$
38. $y = 5 \sec 2\pi x$
39. $y = \tan 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
40. $y = \csc 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
41. $y = \tan 2(x - \pi)$
42. $y = \sec 2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
43. $y = \cot\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
44. $y = \frac{1}{2} \tan(\pi x - \pi)$
45. $y = 2 \csc\left(\pi x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
46. $y = 2 \sec\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
47. $y = 5 \sec\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
48. $y = \frac{1}{2} \sec(2\pi x - \pi)$
49. $y = \tan\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
50. $y = \tan \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
51. $y = 3 \sec \pi\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$
52. $y = \sec\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
53. $y = -2 \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
54. $y = 2 \csc(3x + 3)$

55. **(a)** Demuestre que si f es periódica con período p, entonces $1/f$ también es periódica con período p.
(b) Demuestre que las funciones cosecante y secante tienen cada una un período 2π.

56. Demuestre que si f y g son periódicas con período p, entonces f/g es también periódica, pero su período podría ser menor que p.

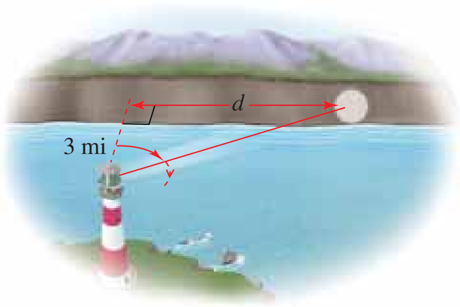
APLICACIONES

57. **Faro** El haz luminoso de un faro completa una rotación cada dos minutos. En el tiempo t, la distancia d mostrada en la figura de la página siguiente es

$$d(t) = 3 \tan \pi t$$

donde t se mide en minutos y d en millas.
(a) Encuentre $d(0.15)$, $d(0.25)$ y $d(0.45)$.

(b) Trace una gráfica de la función d para $0 \le t < \frac{1}{2}$.
(c) ¿Qué ocurre a la distancia d cuando t se aproxima a $\frac{1}{2}$?

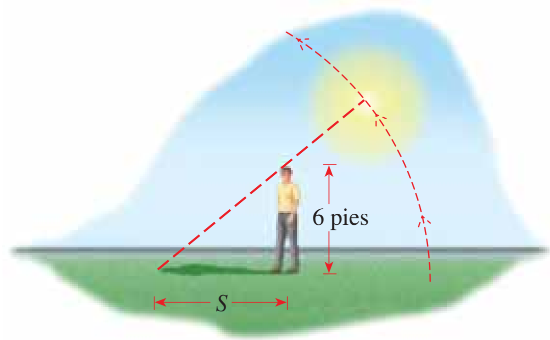


58. Longitud de una sombra En un día cuando el Sol pasa directamente encima al mediodía, un hombre de seis pies de estatura proyecta una sombra de longitud

$$S(t) = 6\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|$$

donde S se mide en pies y t es el número de horas desde las 6 a.m.

(a) Encuentre la longitud de la sombra a las 8:00 a.m., al mediodía, a las 2:00 p.m. y a las 5:45 p.m.
(b) Trace una gráfica de la función S para $0 < t < 12$.
(c) De la gráfica determine los valores de t en los que la longitud de la sombra es igual a la estatura del hombre. ¿A qué hora corresponden cada uno de estos valores?
(d) Explique lo que ocurre a la sombra a medida que el tiempo se aproxima a las 6 p.m. (es decir, cuando $t \to 12^-$).



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

59. Fórmulas de reducción Use las gráficas de la Figura 5 para explicar por qué son verdaderas las siguientes fórmulas.

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$$

$$\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \csc x$$

5.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y SUS GRÁFICAS

La función seno inverso ▶ La función coseno inverso ▶ La función tangente inversa ▶ Las funciones secante, cosecante y cotangente inversas

En las Secciones 6.4-6.6 estudiamos aplicaciones de funciones trigonométricas inversas a triángulos.

Recuerde de la Sección 2.7 que la inversa de una función f es una función f^{-1} que invierte la regla de f. Para que una función tenga una inversa, debe ser biunívoca. Como las funciones trigonométricas no son biunívocas, no tienen inversas pero es posible restringir los dominios de funciones trigonométricas en forma tal que las funciones resultantes sean biunívocas.

▼ La función seno inverso

Consideremos la función seno en primer término. Hay numerosas formas de restringir el dominio del seno de manera que la nueva función sea biunívoca. Una forma natural de hacer esto es restringir el dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. La razón para esta opción es que el seno es biunívoco sobre este intervalo y además alcanza cada uno de los valores en su rango sobre este intervalo. De la Figura 1 vemos que el seno es biunívoco sobre este dominio restringido (por la Prueba de la Recta Horizontal) y por lo tanto tiene una inversa.

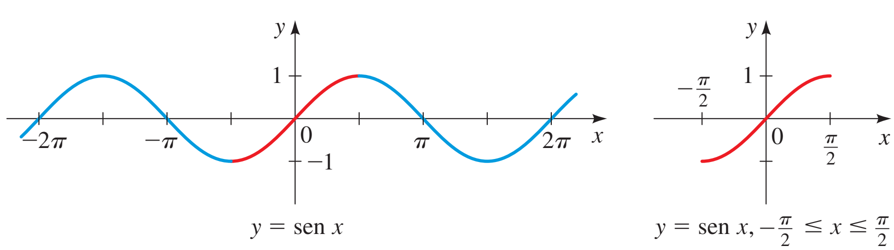
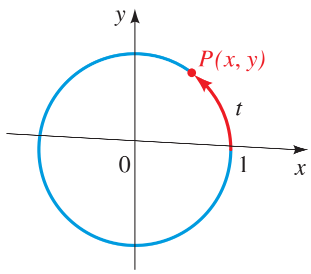


FIGURA 1 Gráficas de la función seno y la función seno restringida

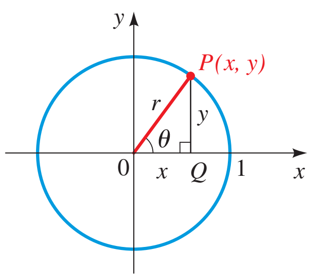
Relación con funciones trigonométricas de números reales

Quizá el lector ya haya estudiado funciones trigonométricas definidas usando la circunferencia unitaria (Capítulo 5). Para ver cómo se relacionan con las funciones trigonométricas de un *ángulo*, empecemos con la circunferencia unitaria del plano de coordenadas.



$P(x, y)$ es el punto terminal determinado por t.

Sea $P(x, y)$ el punto terminal determinado por un arco de longitud t sobre la circunferencia unitaria. Entonces t subtiende un ángulo θ en el centro de la circunferencia. Si trazamos una perpendicular de P al punto Q del eje x, entonces el triángulo OPQ es un triángulo rectángulo con catetos de longitud x y y, como se ve en la figura.



El triángulo OPQ es un triángulo recto

A continuación, por la definición de funciones trigonométricas del *número real t* tenemos

$$\operatorname{sen} t = y$$

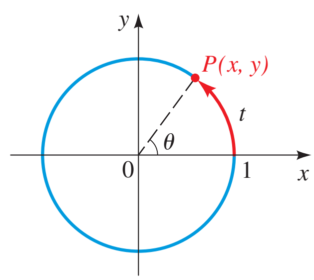
$$\cos t = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* θ tendremos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op a }\theta}{\text{hip}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady a }\theta}{\text{hip}} = \frac{x}{1} = x$$

Si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$. (Vea la figura siguiente.) Comparando las dos formas de definir las funciones trigonométricas, vemos que son idénticas. En otras palabras, como funciones, asignan valores idénticos a un número real determinado. (El número real es la medida de θ en radianes en un caso o la longitud t de un arco en el otro.)



La medida del ángulo θ en radianes es t.

¿Por qué, entonces, estudiamos trigonometría en dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de modo diferente. (Vea *Enfoque sobre modelado*, páginas 427, 489 y 533, y Secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

Funciones trigonométricas de ángulos

Sea POQ un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ como se ve en la Figura 1(a). Ponga θ en posición normal como se muestra en la Figura 1(b).

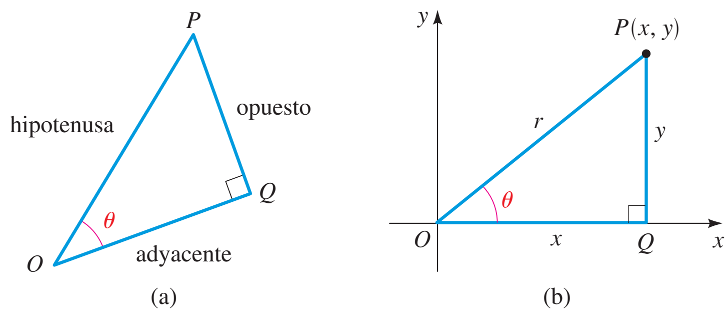


FIGURA 1

Entonces $P = P(x, y)$ es un punto en el lado terminal de θ. En el triángulo POQ, el lado opuesto tiene longitud y y el lado adyacente tiene longitud x. Usando el Teorema de Pitágoras, vemos que la hipotenusa tiene longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

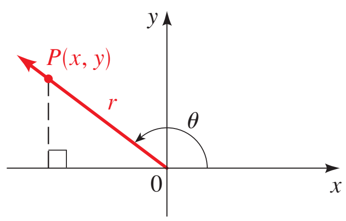


FIGURA 2

Las otras relaciones trigonométricas se pueden hallar en la misma forma.

Estas observaciones nos permiten extender las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo. Definimos las funciones trigonométricas de ángulos como sigue (vea Figura 2).

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea θ un ángulo en posición normal y sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

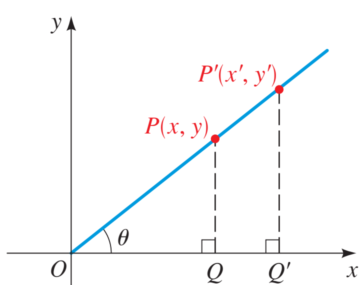


FIGURA 3

Como la división entre 0 no es una operación definida, ciertas funciones trigonométricas no están definidas para ciertos ángulos. Por ejemplo, $\tan 90° = y/x$ no está definida porque $x = 0$. Los ángulos para los cuales las funciones trigonométricas pueden no estar definidas son los ángulos para los cuales la coordenada x o la y de un punto en el lado terminal del ángulo es 0. Éstos son **ángulos cuadrantales**, es decir, ángulos que son coterminales con los ejes de coordenadas.

Es un dato de la mayor importancia que las funciones trigonométricas *no* dependen de la selección del punto $P(x, y)$. Esto es porque si $P'(x', y')$ es cualquier otro punto en el lado terminal, como en la figura 3, entonces los triángulos POQ y $P'OQ'$ son semejantes.

Evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo

De la definición vemos que los valores de las funciones trigonométricas son todos positivos si el ángulo θ tiene su lado terminal en el primer cuadrante. Esto es porque x y y son positivas en este cuadrante. [Por supuesto, r es siempre positiva porque es simplemente la distancia del origen al punto $P(x, y)$.] Si el lado terminal de θ está en el segundo cuadrante, sin embargo, entonces x es negativa y y positiva. Por lo tanto, en el segundo cuadrante las funciones sen θ y csc θ son positivas, y todas las otras funciones trigonométricas tienen valores negativos. Se pueden comprobar las otras entradas de la tabla siguiente.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

A continuación llevamos nuestra atención a hallar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos que no sean agudos.

EJEMPLO 1 | Hallar funciones trigonométricas de ángulos

Encuentre **(a)** cos 135° y **(b)** tan 390°.

SOLUCIÓN

(a) De la Figura 4 vemos que $\cos 135° = -x/r$. Pero $\cos 45° = x/r$, y como $\cos 45° = \sqrt{2}/2$ tenemos

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b) Los ángulos 390° y 30° son coterminales. De la Figura 5 es evidente que $\tan 390° = \tan 30°$ y, como $\tan 30° = \sqrt{3}/3$, tenemos

$$\tan 390° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

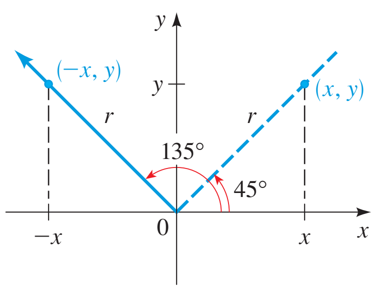


FIGURA 4

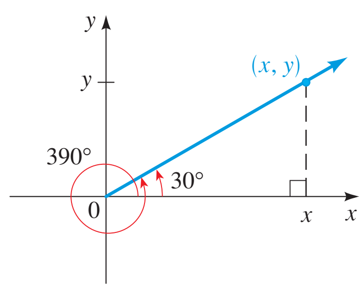


FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11** Y **13**

Del Ejemplo 1 vemos que las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos tienen el mismo valor, excepto posiblemente por el signo, como las correspondientes funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Ese ángulo agudo recibirá el nombre de *ángulo de referencia.*

ÁNGULO DE REFERENCIA

Sea θ un ángulo en posición normal. El **ángulo de referencia** $\bar{\theta}$ asociado con θ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

La Figura 6 muestra que para hallar un ángulo de referencia $\bar{\theta}$, es útil conocer el cuadrante en el que se encuentre el lado terminal del ángulo θ.

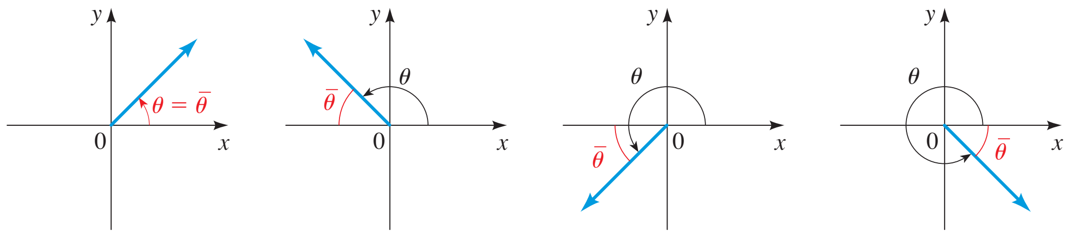


FIGURA 6 Ángulo de referencia $\bar{\theta}$ para un ángulo θ.

EJEMPLO 2 | Hallar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia para **(a)** $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ y **(b)** $\theta = 870°$.

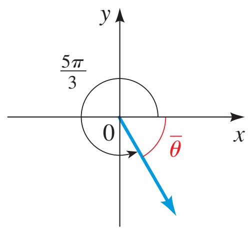


FIGURA 7

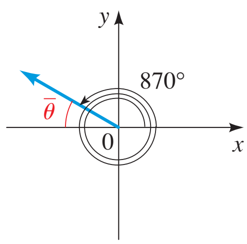


FIGURA 8

SOLUCIÓN

(a) El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal del ángulo $5\pi/3$ y el eje x (vea Figura 7). Como el lado terminal de este ángulo está en el cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

(b) Los ángulos 870° y 150° son coterminales [porque $870 - 2(360) = 150$]. Entonces, el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante (vea Figura 8). Por lo tanto, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 180° - 150° = 30°$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **7**

EVALUACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER ÁNGULO

Para hallar los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo θ, damos los siguientes pasos.

1. Hallar el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ asociado con el ángulo θ.
2. Determinar el signo de la función trigonométrica de θ observando el cuadrante en el que se encuentre θ.
3. El valor de la función trigonométrica de θ es el mismo, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{\theta}$.

EJEMPLO 3 | Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre **(a)** sen 240° y **(b)** cot 495°.

SOLUCIÓN

(a) Este ángulo tiene su lado terminal en el tercer cuadrante, como se muestra en la Figura 9. El ángulo de referencia es, por lo tanto, $240° - 180° = 60°$ y el valor de sen 240° es negativo. Entonces

$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Signo   Ángulo de referencia

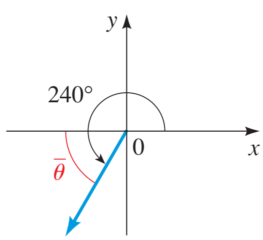


FIGURA 9
sen 240° es *negativo*.

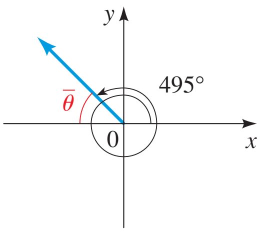


FIGURA 10

tan 495° *es negativa. por lo tanto*, cot 495º *es negativa*.

(b) El ángulo de 495° es coterminal con el ángulo de 135°, y el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante, como se muestra en la Figura 10. Por lo tanto, el ángulo de referencia es 180° − 135° = 45 y el valor de cot 495° es negativo. Tenemos

$$\cot 495° = \cot 135° = -\cot 45° = -1$$

Ángulos coterminales　Signo　Ángulo de referencia

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **17** Y **19**

EJEMPLO 4 | Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre **(a)** sen $\frac{16\pi}{3}$ y **(b)** sec$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN

(a) El ángulo $16\pi/3$ es coterminal con $4\pi/3$, y estos ángulos están en el tercer cuadrante (vea Figura 11). Entonces, el ángulo de referencia es $(4\pi/3) - \pi = \pi/3$. Como el valor del seno es negativo en el tercer cuadrante, tenemos

$$\text{sen}\,\frac{16\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ángulos coterminales　Signo　Ángulo de referencia

(b) El ángulo $-\pi/4$ está en el cuarto cuadrante, y su ángulo de referencia es $\pi/4$ (vea figura 12). Como la secante es positiva en este cuadrante, obtenemos

$$\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = +\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Signo　Ángulo de referencia

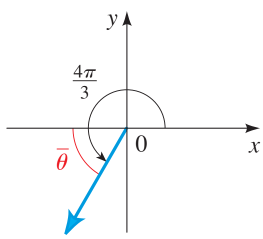


FIGURA 11

sen $\frac{16\pi}{3}$ *es negativo*.

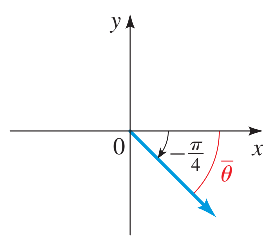


FIGURA 12

cos$(-\frac{\pi}{4})$ *es positivo por lo tanto*, sec$(-\frac{\pi}{4})$ *es positivo*

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **23** Y **25**

Identidades trigonométricas

Las funciones trigonométricas de ángulos están relacionadas entre sí por medio de varias e importantes ecuaciones llamadas **identidades trigonométricas**. Ya hemos encontrado las identidades recíprocas. Estas identidades continúan cumpliéndose para cualquier ángulo θ, siempre que ambos lados de la ecuación estén definidos. Las identidades de Pitágoras son una consecuencia del Teorema de Pitágoras.*

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

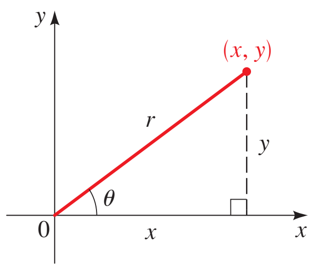


FIGURA 13

DEMOSTRACIÓN Demostremos la primera identidad de Pitágoras. Usando $x^2 + y^2 = r^2$ (el Teorema de Pitágoras) en la Figura 13, tenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. (Aun cuando la figura indica un ángulo agudo, se debe verificar que la prueba se cumpla para todo ángulo θ.) ■

Vea los Ejercicios 61 y 62 para las pruebas de las otras dos identidades de Pitágoras.

EJEMPLO 5 | Expresar una función trigonométrica en términos de otra

(a) Expresar $\operatorname{sen}\theta$ en términos de $\cos\theta$.

(b) Expresar $\tan\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$, donde θ está en el segundo cuadrante.

SOLUCIÓN

(a) De la primera identidad de Pitágoras obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

donde el signo depende del cuadrante. Si θ está en el primero o segundo cuadrante, entonces $\operatorname{sen}\theta$ es positivo, y por tanto

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

mientras que si θ está en el tercero o cuarto cuadrante, $\operatorname{sen}\theta$ es negativo, y por tanto

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

(b) Como $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$, necesitamos escribir $\cos\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$. Por la parte (a),

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

y como $\cos\theta$ es negativo en el segundo cuadrante, el signo negativo aplica aquí. Por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39** ■

* Continuamos con la convención acostumbrada de escribir $\operatorname{sen}^2\theta$ por $(\operatorname{sen}\theta)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n\theta$ por $(\operatorname{sen}\theta)^n$ para todos los enteros n excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se asignará otro significado en la Sección 6.4. Por supuesto, la misma convención aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

EJEMPLO 6 | Evaluación de una función trigonométrica

Si $\tan\theta = \frac{2}{3}$ y θ está en el tercer cuadrante, hallar $\cos\theta$.

SOLUCIÓN 1 Necesitamos escribir $\cos\theta$ en términos de $\tan\theta$. De la identidad $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ obtenemos $\sec\theta = \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$. En el tercer cuadrante, $\sec\theta$ es negativa, por lo cual

$$\sec\theta = -\sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

Entonces,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{13}{9}}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Si se desea racionalizar el denominador, se puede expresar $\cos\theta$ como

$$-\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{3}}{13}$$

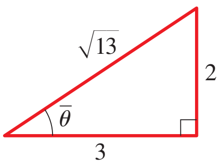


FIGURA 14

SOLUCIÓN 2 Este problema se puede resolver más fácilmente usando el método del Ejemplo 2 de la Sección 6.2. Recuerde que, excepto por el signo, los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo son iguales a las de un ángulo agudo (el ángulo de referencia). Por lo tanto, ignorando el signo por ahora, tracemos un triángulo rectángulo con un ángulo agudo $\bar{\theta}$ que satisfaga $\bar{\theta} = \frac{2}{3}$ (vea Figura 14). Por el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo tiene longitud $\sqrt{13}$. Del triángulo de la Figura 14 vemos de inmediato que $\cos\bar{\theta} = 3/\sqrt{13}$. Como θ está en el tercer cuadrante, $\cos\theta$ es negativo y por tanto

$$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

EJEMPLO 7 | Evaluación de funciones trigonométricas

Si $\sec\theta = 2$ y θ está en el cuarto cuadrante, encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN Trazamos un triángulo como en la Figura 15 para que $\sec\bar{\theta} = 2$. Tomando en cuenta el hecho de que θ está en el cuarto cuadrante, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\theta = 2 \qquad \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

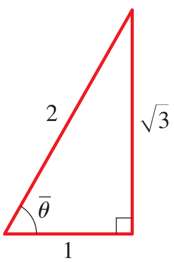


FIGURA 15

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

▼ Áreas de triángulos

Concluimos esta sección con una aplicación de las funciones trigonométricas que comprende ángulos que no son necesariamente agudos. Aplicaciones más extensas aparecen en las siguientes dos secciones.

El área de un triángulo es $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\times$ base $\times$ altura. Si conocemos dos lados y el ángulo entre ellos de un triángulo, entonces podemos hallar la altura usando las funciones trigonométricas, y a partir de esto podemos hallar el área.

Si θ no es ángulo agudo, entonces la altura del triángulo de la Figura 16(a) está dada por $h = b\operatorname{sen}\theta$. Entonces el área es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}\times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$$

Si el ángulo θ no es agudo, entonces de la Figura 16(b) vemos que la altura del triángulo es

$$h = b\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = b\operatorname{sen}\theta$$

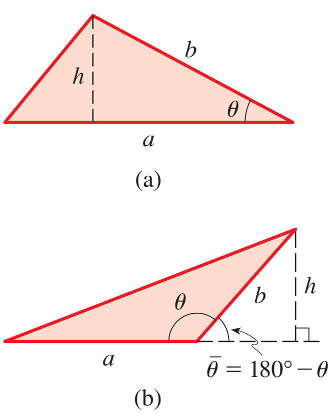


FIGURA 16

Esto es así porque el ángulo de referencia de θ es el ángulo $180° - \theta$. Así, también en este caso, el área del triángulo es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

El área $\mathcal{A}$ de un triángulo con lados de longitudes a y b y con ángulo θ incluido es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

EJEMPLO 8 | Hallar el área de un triángulo

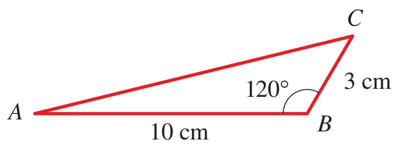


FIGURA 17

Encuentre el área del triángulo ABC que se ve en la Figura 17.

SOLUCIÓN El triángulo tiene lados de longitud 10 cm y 3 cm, con ángulo incluido de 120°. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta \\ &= \tfrac{1}{2}(10)(3) \operatorname{sen} 120° \\ &= 15 \operatorname{sen} 60° && \text{Ángulo de referencia} \\ &= 15\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55** ■

6.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si el ángulo θ está en posición normal, $P(x, y)$ es un punto sobre el lado terminal de θ y r es la distancia del origen a P, entonces

$\operatorname{sen} \theta = \frac{\square}{\square}$ $\cos \theta = \frac{\square}{\square}$ $\tan \theta = \frac{\square}{\square}$

2. El signo de una función trigonométrica de θ depende del

________ en el que se encuentre el lado terminal del ángulo θ.

En el segundo cuadrante, $\operatorname{sen} \theta$ es ________ (positivo/negativo).

En el tercer cuadrante, $\cos \theta$ es ________ (positivo/negativo).

En el cuarto cuadrante, $\operatorname{sen} \theta$ es ________ (positivo/negativo).

HABILIDADES

3-10 ■ Encuentre el ángulo de referencia para el ángulo dado.

3. (a) 150°	**(b)** 330°	**(c)** −30°
4. (a) 120°	**(b)** −210°	**(c)** 780°
5. (a) 225°	**(b)** 810°	**(c)** −105°
6. (a) 99°	**(b)** −199°	**(c)** 359°
7. (a) $\frac{11\pi}{4}$	**(b)** $-\frac{11\pi}{6}$	**(c)** $\frac{11\pi}{3}$
8. (a) $\frac{4\pi}{3}$	**(b)** $\frac{33\pi}{4}$	**(c)** $-\frac{23\pi}{6}$
9. (a) $\frac{5\pi}{7}$	**(b)** -1.4π	**(c)** 1.4
10. (a) 2.3π	**(b)** 2.3	**(c)** -10π

11-34 ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica.

11. sen 150°	**12.** sen 225°	**13.** cos 210°
14. cos(−60°)	**15.** tan(−60°)	**16.** sec 300°
17. csc(−630°)	**18.** cot 210°	**19.** cos 570°
20. sec 120°	**21.** tan 750°	**22.** cos 660°
23. $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$	**24.** $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}$	**25.** $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$
26. $\cos \frac{7\pi}{3}$	**27.** $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$	**28.** $\tan \frac{5\pi}{6}$
29. $\sec \frac{17\pi}{3}$	**30.** $\csc \frac{5\pi}{4}$	**31.** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
32. $\cos \frac{7\pi}{4}$	**33.** $\tan \frac{5\pi}{2}$	**34.** $\operatorname{sen} \frac{11\pi}{6}$

35-38 ■ Por la información dada, encuentre el cuadrante en el que se encuentra θ.

35. $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$

36. $\tan\theta < 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

37. $\sec\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$

38. $\csc\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$

39-44 ■ Escriba la primera función trigonométrica en términos de la segunda para θ en el cuadrante dado.

39. $\tan\theta$, $\cos\theta$; θ en el cuadrante III

40. $\cot\theta$, $\operatorname{sen}\theta$; θ en el cuadrante II

41. $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$; θ en el cuadrante IV

42. $\sec\theta$, $\operatorname{sen}\theta$; θ en el cuadrante I

43. $\sec\theta$, $\tan\theta$; θ en el cuadrante II

44. $\csc\theta$, $\cot\theta$; θ en el cuadrante III

45-52 ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ a partir de la información dada.

45. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, θ en el cuadrante II

46. $\cos\theta = -\frac{7}{12}$, θ en el cuadrante III

47. $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\cos\theta > 0$

48. $\sec\theta = 5$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

49. $\csc\theta = 2$, θ en el cuadrante I

50. $\cot\theta = \frac{1}{4}$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

51. $\cos\theta = -\frac{2}{7}$, $\tan\theta < 0$

52. $\tan\theta = -4$, $\operatorname{sen}\theta > 0$

53. Si $\theta = \pi/3$, encuentre el valor de cada expresión.
(a) $\operatorname{sen} 2\theta$, $2\operatorname{sen}\theta$ **(b)** $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$
(c) $\operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen}(\theta^2)$

54. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 7 y 9 y ángulo entre ellos de 72°.

55. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 10 y 12 y ángulo entre ellos de 10°.

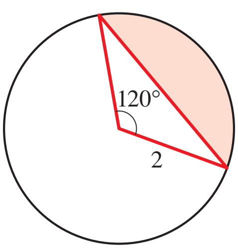
56. Encuentre el área de un triángulo equilátero con lados de longitud 10.

57. Un triángulo tiene un área de 16 pulg.^{2}, y dos de los lados del triángulo tienen longitudes de 5 pulg. y 7 pulg. Encuentre el ángulo entre ellos por estos dos lados.

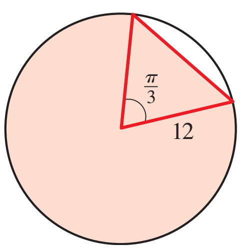
58. Un triángulo isósceles tiene un área de 24 cm^2, y el ángulo entre los dos lados iguales es $5\pi/6$. ¿Cuál es la longitud de los dos lados iguales?

59-60 ■ Encuentre el área de la región sombreada de la figura.

59.



60.



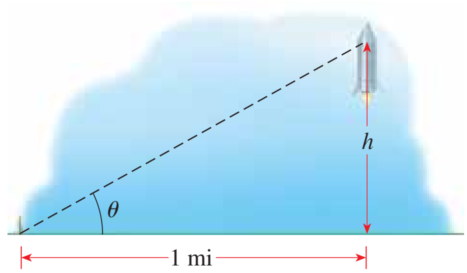
61. Use la primera identidad de Pitágoras para demostrar la segunda. [*Sugerencia:* Divida entre $\cos^2\theta$.]

62. Use la primera identidad de Pitágoras para demostrar la tercera.

APLICACIONES

63. Altura de un cohete Un cohete disparado en línea recta hacia arriba es rastreado por un observador que está en el suelo a una milla de distancia.
(a) Demuestre que cuando el ángulo de elevación es θ, la altura del cohete en pies es $h = 5280\tan\theta$.
(b) Complete la tabla para hallar la altura del cohete a los ángulos de elevación dados.

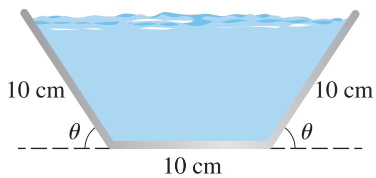
θ	20°	60°	80°	85°
h				



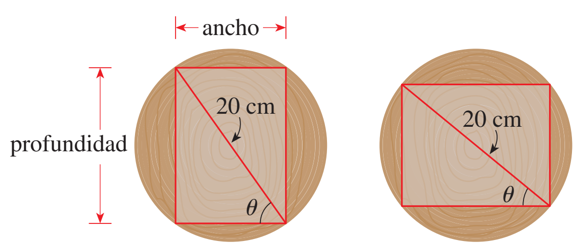
64. Canal para lluvias Un canal de aguas llovedizas se construye de lámina metálica de 30 cm de ancho, doblando un tercio de la lámina a ambos lados en un ángulo θ.
(a) Demuestre que el área transversal del canal está modelada por la función

$$A(\theta) = 100\operatorname{sen}\theta + 100\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

(b) Grafique la función A para $0 \le \theta \le \pi/2$.
(c) ¿Para qué ángulo θ se obtiene la máxima área de sección transversal?



65. Viga de madera Una viga rectangular ha de cortarse de un tronco cilíndrico de 20 cm de diámetro. Las figuras siguientes muestran diferentes formas en que se puede hacer esto.
(a) Exprese el área de sección transversal de la viga como función del ángulo θ de las figuras.
(b) Grafique la función que encontró en el inciso (a).
(c) Encuentre las dimensiones de la viga con máxima área de sección transversal.



66. Resistencia de una viga La resistencia de una viga es proporcional al ancho y al cuadrado de la profundidad. Se corta una viga de un tronco como en el Ejercicio 65. Exprese la resistencia de la viga como función del ángulo θ de las figuras.

67. Lanzamiento de bala El alcance R y altura H de un tiro de lanzamiento de bala, con una velocidad inicial de v_0 pies/s a un ángulo θ, están dados por

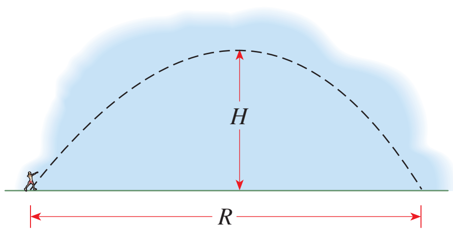
$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

En la Tierra, $g = 32$ pies/s^2 y, en la Luna, $g = 5.2$ pies/s^2. Encuentre el rango y altura de un lanzamiento de bala bajo las condiciones dadas.

(a) En la Tierra con $v_0 = 12$ pies/s y $\theta = \pi/6$

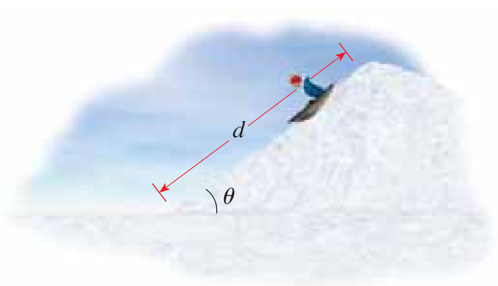
(b) En la Luna con $v_0 = 12$ pies/s y $\theta = \pi/6$



68. Trineo El tiempo en segundos que tarda un trineo en bajar deslizándose por un plano inclinado a un ángulo θ es

$$t = \sqrt{\frac{d}{16 \operatorname{sen}\theta}}$$

donde d es la longitud de la pendiente en pies. Encuentre el tiempo en deslizarse por una pendiente de 2000 pies inclinada a 30°.



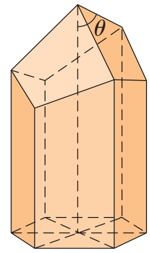
69. Colmenas En una colmena, cada celda es un prisma hexagonal regular, como se ve en la figura. La cantidad de cera W de la celda depende del ángulo θ en el vértice, y está dada por

$$W = 3.02 - 0.38 \cot\theta + 0.65 \csc\theta$$

Las abejas instintivamente escogen θ de modo que usan la cantidad mínima posible de cera.

(a) Use calculadora graficadora para graficar W como función de θ para $0 < \theta < \pi$.

(b) ¿Para qué valor de θ tiene W su valor mínimo? [*Nota:* Unos biólogos han descubierto que las abejas raras veces se desvían de este valor en más de un grado o dos.]



70. Dar vuelta en una esquina Un tubo de acero es transportado por un pasillo de 9 pies de ancho. Al final del salón hay una vuelta en ángulo recto a otro pasillo más angosto, de 6 pies de ancho.

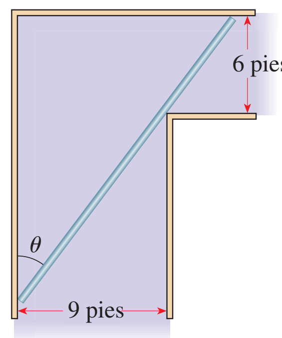
(a) Demuestre que la longitud del tubo en la figura está modelada por la función

$$L(\theta) = 9 \csc\theta + 6 \sec\theta$$

(b) Grafique la función L para $0 < \theta < \pi/2$.

(c) Encuentre el valor mínimo de la función L.

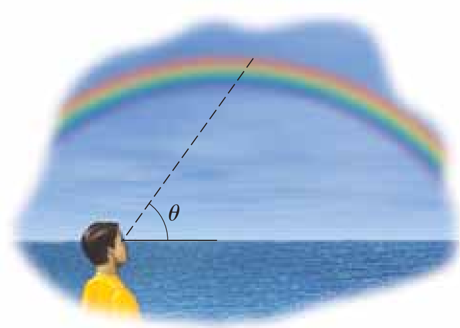
(d) Explique por qué el valor de L que encontró en el inciso (c) es la longitud del tubo más largo que puede pasarse por la esquina.



71. Arco iris Los arco iris se forman cuando luz solar de longitudes de onda diferentes (colores) se refracta y refleja en pequeñas gotas de lluvia. El ángulo de elevación θ de un arco iris es siempre el mismo. Se puede demostrar que $\theta = 4\beta - 2\alpha$, donde

$$\operatorname{sen}\alpha = k \operatorname{sen}\beta$$

y $\alpha = 59.4°$ y $k = 1.33$ es el índice de refracción del agua. Use la información dada para hallar el ángulo de elevación θ de un arco iris. (Para una explicación matemática del arco iris vea *Cálculos: Transcendentes Tempranas,* 7ª edición, de James Stewart, página 282.)



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

72. Uso de una calculadora Para resolver cierto problema usted necesita hallar el seno de 4 rad. Un compañero de grupo usa la calculadora de él y le dice que

$$\text{sen } 4 = 0.0697565737$$

En su calculadora, usted obtiene

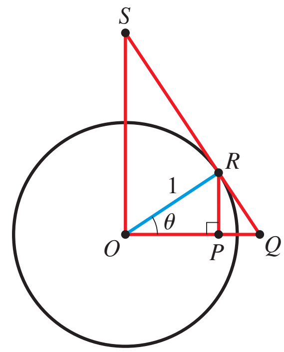
$$\text{sen } 4 = -0.7568024953$$

¿Qué es lo que está mal? ¿Qué error tuvo su compañero?

73. Diagrama trigonométrico de Viète En el siglo XVI el matemático francés François Viète (vea página 49) publicó el sorprendente diagrama que sigue. Cada una de las seis funciones trigonométricas de θ es igual a la longitud de un segmento de recta de la figura. Por ejemplo, sen $\theta = |PR|$, porque a partir de ΔOPR vemos que

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op } \theta}{\text{hip}} = \frac{|PR|}{|OR|}$$
$$= \frac{|PR|}{1} = |PR|$$

Para cada una de las otras cinco funciones trigonométricas, encuentre un segmento de recta en la figura cuya longitud sea igual al valor de la función en θ. (*Nota:* El radio de la circunferencia es 1, el centro es O, el segmento QS es tangente a la circunferencia en R y $\angle SOQ$ es un ángulo recto.)



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Semejanza**

En este proyecto exploramos la idea de semejanza y algunas de sus consecuencias para cualquier tipo de figura. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

6.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

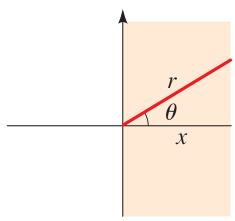
Funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa ▶ Solución para ángulos en triángulos rectángulos ▶ Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

Las gráficas de las funciones trigonométricas inversas se estudian en la Sección 5.5.

Recuerde que para que una función tenga una inversa, debe ser biunívoca. Como las funciones trigonométricas no son biunívocas, no tienen inversas. Por lo tanto, restringimos el dominio de cada una de las funciones trigonométricas a intervalos en los que alcanzan todos sus valores y en los que son biunívocas. Las funciones resultantes tienen el mismo rango que las funciones originales pero son biunívocas.

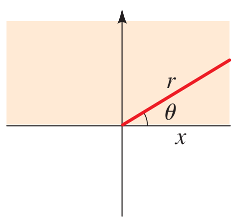
▼ Funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa

Consideremos primero la función seno. Restringimos el dominio de la función seno a ángulos θ con $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. De la Figura 1 vemos que en este dominio la función seno alcanza cada uno de los valores sobre el intervalo $[-1, 1]$ exactamente una vez y, por tanto, es biunívoca. Análogamente, restringimos los dominios de coseno y tangente como se ve en la Figura 1.



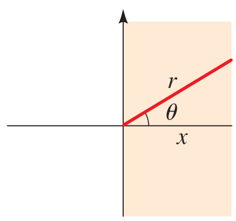
$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$



$\cos \theta = \frac{x}{r}$

$0 \le \theta \le \pi$



$\tan \theta = \frac{x}{y}$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

FIGURA 1 Dominios restringidos de las funciones seno, coseno y tangente.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

44. Funciones trigonométricas inversas en una calculadora La mayor parte de las calculadoras no tienen teclas para $\sec^{-1}$, $\csc^{-1}$ o $\cot^{-1}$. Demuestre las siguientes identidades y, a continuación, use estas identidades y una calculadora para hallar $\sec^{-1} 2$, $\csc^{-1} 3$ y $\cot^{-1} 4$.

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x > 0$$

6.5 LA LEY DE SENOS

La Ley de Senos ▶ El caso ambiguo

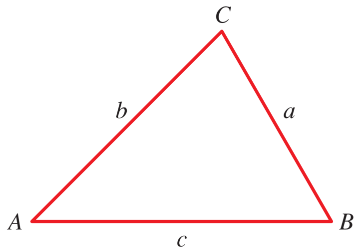


FIGURA 1

En la Sección 6.2 usamos las relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos. Las funciones trigonométricas también se pueden usar para resolver *triángulos oblicuángulos,* es decir, triángulos sin ángulos rectos. Para hacer esto, primero estudiamos la Ley de Senos aquí y a continuación la Ley de Cosenos en la siguiente sección. Para expresar estas leyes (o fórmulas) con más facilidad, seguimos la convención de marcar los ángulos de un triángulo como a, b, c, como en la Figura 1.

Para resolver un triángulo, necesitamos conocer cierta información acerca de sus lados y ángulos. Para determinar si tenemos suficiente información, con frecuencia es útil hacer un diagrama. Por ejemplo, si nos dan dos ángulos y el lado entre ellos, entonces es claro que se puede formar un triángulo y sólo uno (vea Figura 2(a)). Análogamente, si se conocen dos lados y el ángulo incluido, entonces se determina un triángulo único (Figura 2(c)). No obstante, si conocemos los tres ángulos pero ninguno de los lados, no podemos determinar de manera única el triángulo porque numerosos triángulos tienen los mismos tres ángulos. (Todos estos triángulos serían semejantes, desde luego.) Por lo tanto, no consideraremos este último caso.

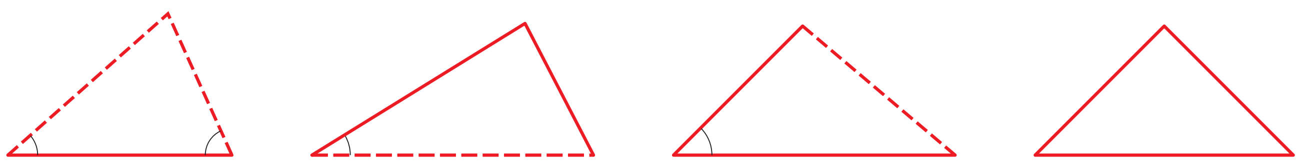


FIGURA 2

En general, un triángulo está determinado por tres de sus seis partes (ángulos y lados) mientras al menos una de estas tres partes sea un lado. Por lo tanto, las posibilidades ilustradas en la Figura 2 son como sigue.

Caso 1 Un lado y dos ángulos (ALA o LAA)
Caso 2 Dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados (LLA)
Caso 3 Dos lados y el ángulo entre ellos (LAL)
Caso 4 Tres lados (LLL)

Los casos 1 y 2 se resuelven usando la Ley de Senos; los Casos 3 y 4 requieren la Ley de Cosenos.

▼ La Ley de Senos

La **Ley de Senos** dice que en cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

LA LEY DE SENOS

En el triángulo ABC tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

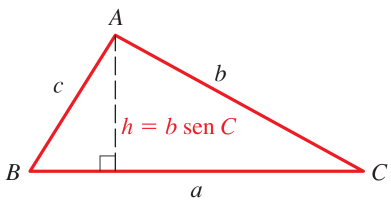


FIGURA 3

DEMOSTRACIÓN Para ver por qué la Ley de Senos es verdadera, consulte la Figura 3. Por la fórmula en la Sección 6.3, el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}ab$ sen C. Por la misma fórmula, el área de este triángulo también es $\frac{1}{2}ac$ sen B y $\frac{1}{2}bc$ sen A. Entonces,

$$\tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \tfrac{1}{2}ac \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$$

Multiplicando por $2/(abc)$ resulta la Ley de Senos. ■

EJEMPLO 1 | Rastreo de un satélite (ALA)

Un satélite que gira en órbita alrededor de la Tierra pasa directamente sobre estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, que están a 340 millas entre sí. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, se observa simultáneamente que su ángulo de elevación es 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿A qué distancia está el satélite de Los Ángeles?

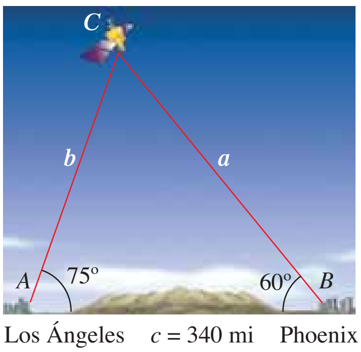


FIGURA 4

SOLUCIÓN Necesitamos hallar la distancia b en la Figura 4. Como la suma de los ángulos en cualquier triángulo es 180°, vemos que $\angle C = 180° - (75° + 60°) = 45°$ (vea Figura 4), de modo que tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 60°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{340} \qquad \text{Sustituya}$$

$$b = \frac{340 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 416 \qquad \text{Despeje } b$$

La distancia del satélite a Los Ángeles es aproximadamente 416 millas.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **33** ■

EJEMPLO 2 | Solución de un triángulo (LAA)

Resuelva el triángulo de la Figura 5.

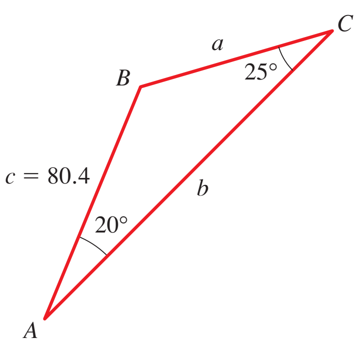


FIGURA 5

SOLUCIÓN Primero, $\angle B = 180° - (20° + 25°) = 135°$. Como se conoce el lado c, para hallar el lado a usamos la relación

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{80.4 \operatorname{sen} 20°}{\operatorname{sen} 25°} \approx 65.1 \qquad \text{Despeje } a$$

Análogamente, para hallar b, usamos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{80.4 \operatorname{sen} 135°}{\operatorname{sen} 25°} \approx 134.5 \qquad \text{Despeje } b$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13** ■

▼ El caso ambiguo

En los Ejemplos 1 y 2 se determinó un triángulo único por medio de la información dada. Esto siempre es cierto para el Caso 1 (ALA o LAA). Pero en el Caso 2 (LLA) puede haber dos triángulos, un triángulo o no haber triángulo con las propiedades dadas. Por esta razón, el Caso 2 a veces se denomina **caso ambiguo**. Para ver por qué esto es así, mostramos en la Figura 6 las posibilidades cuando nos dan el ángulo A y los lados a y b. En el inciso (a) no es posible una solución, porque el lado a es demasiado corto para completar el triángulo. En el inciso (b) la solución es un triángulo rectángulo. En el inciso (c) son posibles dos soluciones, y en el inciso (d) hay un triángulo único con las propiedades dadas. Ilustramos las posibilidades del Caso 2 en los ejemplos siguientes.

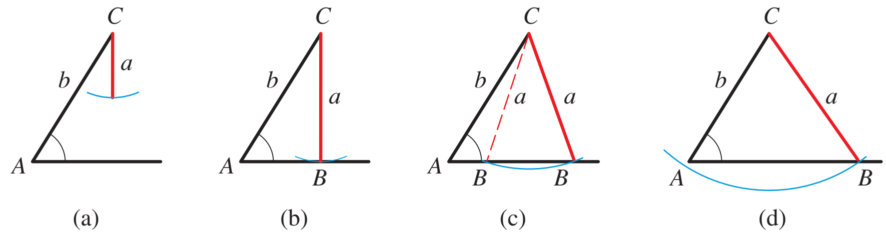


FIGURA 6 El caso ambiguo

EJEMPLO 3 | LLA, el caso de una solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 45°$, $a = 7\sqrt{2}$, y $b = 7$.

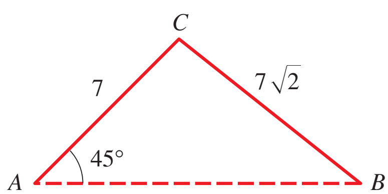


FIGURA 7

SOLUCIÓN Primero trazamos el triángulo con la información que tenemos (vea Figura 7). Nuestro dibujo es necesariamente tentativo porque todavía no conocemos los otros ángulos, pero podemos ver ahora las posibilidades.

Primero hallamos $\angle B$.

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{7}{7\sqrt{2}} \text{ sen } 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{Despeje sen } B$$

¿Cuáles ángulos B tienen sen $B = \frac{1}{2}$? De la sección precedente sabemos que hay dos de estos ángulos menores a 180° (son 30° y 150°). ¿Cuál de estos ángulos es compatible con lo que sabemos acerca del triángulo ABC? Como $\angle A = 45°$, no podemos tener $\angle B = 150°$ porque $45° + 150° > 180°$. Por lo tanto, $\angle B = 30°$ y el ángulo restante es $\angle C = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Consideramos sólo ángulos menores a 180°, porque no hay triángulo que pueda contener un ángulo de 180° o mayor.

Ahora podemos hallar el lado c.

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\text{sen } 30°} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\frac{1}{2}} \approx 13.5 \qquad \text{Despeje } c$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

En el Ejemplo 3 hay dos posibilidades para el ángulo B y una de éstas no era compatible con el resto de la información. En general, si sen $A < 1$, debemos comprobar el ángulo y su suplemento como posibilidades, porque cualquier ángulo menor a 180° puede estar en el triángulo. Para determinar si funciona cualquiera de las dos posibilidades, vemos si la suma resultante de los ángulos excede de 180°. Puede ocurrir, como en la Figura 6(c), que ambas posibilidades son compatibles con la información dada. En ese caso, dos triángulos diferentes son soluciones al problema.

El *suplemento* de un ángulo θ (donde $0 \leq \theta \leq 180°$) es el ángulo $180° - \theta$.

EJEMPLO 4 | LLA, el caso de dos soluciones

Resuelva el triángulo ABC si $\angle A = 43.1°$, $a = 186.2$ y $b = 248.6$.

SOLUCIÓN Con la información dada, trazamos el triángulo que se ve en la Figura 8. Observe que el lado a puede trazarse en dos posiciones posibles para completar el triángulo. De la Ley de Senos

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{248.6 \operatorname{sen} 43.1^\circ}{186.2} \approx 0.91225$$

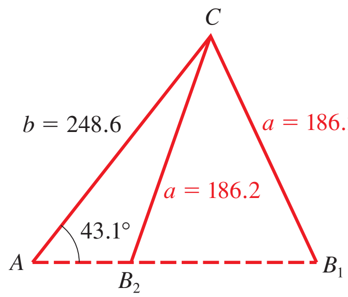


FIGURA 8

Hay dos posibles ángulos B entre 0° y 180° tales que $\operatorname{sen} B = 0.91225$. Usando una calculadora, encontramos que uno de los ángulos es $\operatorname{sen}^{-1}(0.91225) \approx 65.8^\circ$. El otro ángulo es aproximadamente $180^\circ - 65.8^\circ = 114.2^\circ$. Denotamos estos dos ángulos por B_1 y B_2 de modo que

$$\angle B_1 \approx 65.8^\circ \qquad \text{y} \qquad \angle B_2 \approx 114.2^\circ$$

Entonces dos triángulos satisfacen las condiciones dadas: el triángulo AB_1C_1 y el triángulo AB_2C_2.

Resuelva el triángulo AB_1C_1:

$$\angle C_1 \approx 180^\circ - (43.1^\circ + 65.8^\circ) = 71.1^\circ \qquad \text{Encuentre } \angle C_1$$

Así, $$c_1 = \frac{a_1 \operatorname{sen} C_1}{\operatorname{sen} A} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 71.1^\circ}{\operatorname{sen} 43.1^\circ} \approx 257.8 \qquad \text{Ley de Senos}$$

Resuelva el triángulo AB_2C_2:

$$\angle C_2 \approx 180^\circ - (43.1^\circ + 114.2^\circ) = 22.7^\circ \qquad \text{Encuentre } \angle C_2$$

Así, $$c_2 = \frac{a_2 \operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} A} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 22.7^\circ}{\operatorname{sen} 43.1^\circ} \approx 105.2 \qquad \text{Ley de Senos}$$

Los triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2 se ven en la Figura 9.

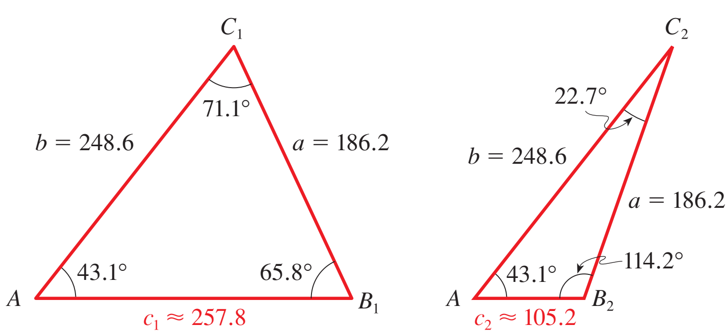
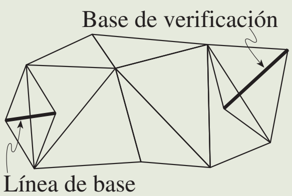


FIGURA 9

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

La **topografía** es un método de medir tierras, que se utiliza para hacer mapas. Los topógrafos usan un proceso llamado *triangulación* en el que se crea una red de miles de triángulos entrelazados en la región de la que se ha de hacer un mapa. El proceso se inicia al medir la longitud de una *línea de base* entre dos estaciones de topografía. A continuación, con el uso de un instrumento llamado *teodolito*, se miden los ángulos entre estas dos estaciones y una tercera estación. El siguiente paso es usar la Ley de Senos para calcular los otros dos lados del triángulo formado por las tres estaciones. Los lados calculados se usan como líneas de base, y el proceso se repite una y otra vez para crear una red de triángulos. En este método, la única distancia medida es la línea de base inicial; todas las otras distancias se calculan a partir de la Ley de Senos. Este método es práctico porque es mucho más fácil medir ángulos que distancias.



Uno de los esfuerzos más ambiciosos de todos los tiempos, para hacer mapas, fue el Gran Levantamiento Topográfico de la India (vea problema 8, página 492) que requirió de varias expediciones y tardó más de un siglo en completarse. La famosa expedición de 1823 dirigida por **Sir George Everest** duró 20 años. Pasando sobre terrenos engañosos y encontrando los temibles mosquitos portadores del paludismo, esta expedición llegó a la base de la cordillera del Himalaya. Una expedición posterior, usando triangulación, calculó que la altura del pico más alto de los Himalaya era de 29,002 pies; ese pico recibió el nombre de Everest en honor a Sir George Everest.

Hoy en día, con el uso de satélites, se estima que la altura del Monte Everest es de 29,028 pies. La muy cercana proximidad de estas dos estimaciones muestra la gran precisión del método trigonométrico.

El siguiente ejemplo presenta una situación para la cual no hay un triángulo compatible con la información dada.

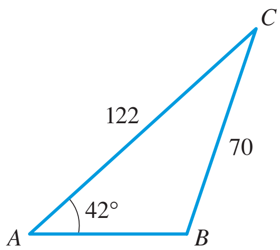


FIGURA 10

EJEMPLO 5 | LLA, el caso sin solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 42°$, $a = 70$ y $b = 122$.

SOLUCIÓN Para organizar la información dada, trazamos el diagrama de la Figura 10. Tratemos de hallar el $\angle B$. Tenemos

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{122 \text{ sen } 42°}{70} \approx 1.17 \qquad \text{Despeje sen } B$$

Como el seno de un ángulo nunca es mayor a 1, concluimos que no hay triángulo que satisfaga las condiciones dadas en este problema.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

6.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. En el triángulo ABC con lados a, b y c la Ley de Senos dice que

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

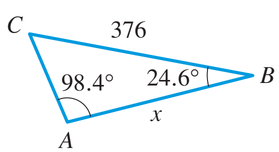
2. ¿En cuál de los siguientes casos podemos usar la Ley de Senos para resolver un triángulo?

ALA LLL LAL LLA

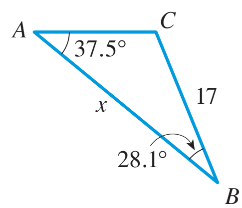
HABILIDADES

3-8 ■ Use la Ley de Senos para hallar el lado x o ángulo θ indicados.

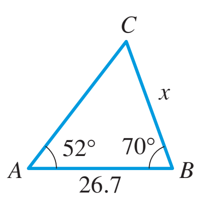
3.



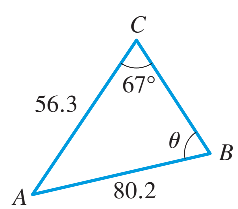
4.



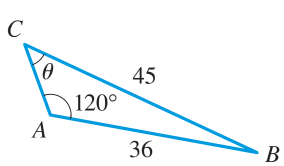
5.



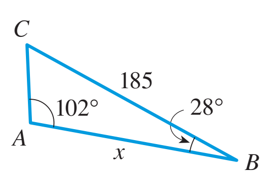
6.



7.

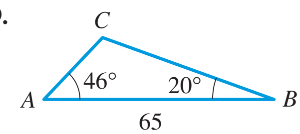


8.

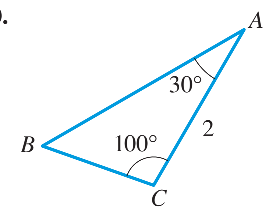


9-12 ■ Resuelva el triángulo usando la Ley de Senos.

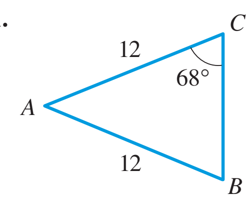
9.



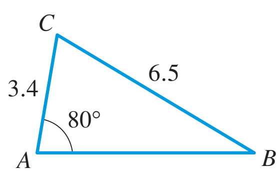
10.



11.



12.



13-18 ■ Trace cada triángulo y a continuación resuelva el triángulo usando la Ley de Senos.

13. $\angle A = 50°$, $\angle B = 68°$, $c = 230$

14. $\angle A = 23°$, $\angle B = 110°$, $c = 50$

15. $\angle A = 30°$, $\angle C = 65°$, $b = 10$

16. $\angle A = 22°$, $\angle B = 95°$, $a = 420$

17. $\angle B = 29°$, $\angle C = 51°$, $b = 44$

18. $\angle B = 10°$, $\angle C = 100°$, $c = 115$

19-28 ■ Use la Ley de Senos para despejar todos los posibles triángulos que satisfacen las condiciones dadas.

19. $a = 28$, $b = 15$, $\angle A = 110°$

20. $a = 30$, $c = 40$, $\angle A = 37°$

21. $a = 20$, $c = 45$, $\angle A = 125°$

22. $b = 45$, $c = 42$, $\angle C = 38°$

23. $b = 25, \quad c = 30, \quad \angle B = 25°$

24. $a = 75, \quad b = 100, \quad \angle A = 30°$

25. $a = 50, \quad b = 100, \quad \angle A = 50°$

26. $a = 100, \quad b = 80, \quad \angle A = 135°$

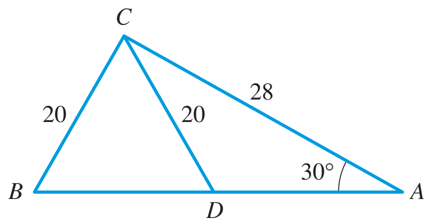
27. $a = 26, \quad c = 15, \quad \angle C = 29°$

28. $b = 73, \quad c = 82, \quad \angle B = 58°$

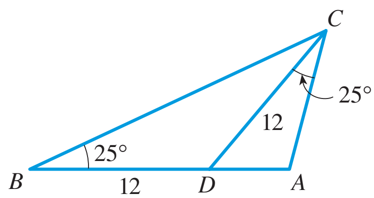
29. Para el triángulo mostrado, encuentre

(a) $\angle BCD$ y

(b) $\angle DCA$.



30. Para el triángulo mostrado, encuentre la longitud AD.



31. En el triángulo ABC, $\angle A = 40°$, $a = 15$, y $b = 20$.

(a) Demuestre que hay dos triángulos, ABC y $A'B'C'$, que satisfacen estas condiciones.

(b) Demuestre que las áreas de los triángulos en el inciso (a) son proporcionales a los senos de los ángulos C y C', es decir,

$$\frac{\text{área de } \triangle ABC}{\text{área de } \triangle A'B'C'} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } C'}$$

32. Demuestre que, dados los tres ángulos A, B, C de un triángulo y un lado, a por ejemplo, el área del triángulo es

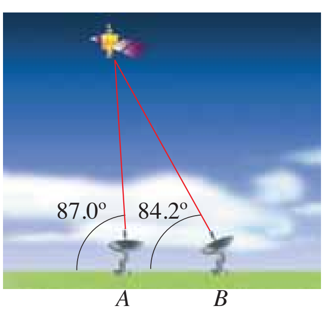
$$\text{área} = \frac{a^2 \text{ sen } B \text{ sen } C}{2 \text{ sen } A}$$

APLICACIONES

33. Rastreo de un satélite La trayectoria de un satélite, que gira en órbita alrededor de la Tierra, hace que el satélite pase directamente sobre dos estaciones de rastreo A y B, que están a 50 millas una de otra. Cuando el satélite está en un lado de las dos estaciones, los ángulos de elevación en A y B se miden y resultan de 87.0° y 84.2°, respectivamente.

(a) ¿A qué distancia está el satélite de la estación A?

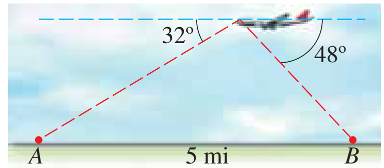
(b) ¿Cuál es la altura del satélite sobre la Tierra?



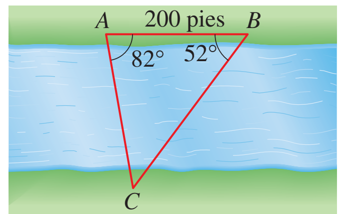
34. Vuelo de un avión Un piloto está volando sobre una carretera recta. Él determina los ángulos de depresión a dos señales de distancia, colocadas a 5 millas entre sí, y encuentra que son de 32° y 48° como se muestra en la figura.

(a) Encuentre la distancia entre el avión y el punto A.

(b) Encuentre la elevación del avión.



35. Distancia entre márgenes de un río Para hallar la distancia de una orilla a la otra de un río, una experta en topografía escoge los puntos A y B, que están a 200 pies entre sí en un lado del río (vea la figura). A continuación, ella escoge un punto de referencia C en el lado opuesto del río y encuentra que $\angle BAC \approx 82°$ y $\angle ABC \approx 52°$. Aproxime la distancia de A a C.

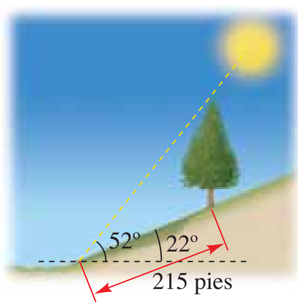


36. Distancia de una orilla a otra de un lago Los puntos A y B están separados por un lago. Para hallar la distancia entre ellos, un topógrafo localiza un punto C en tierra de manera que $\angle CAB = 48.6°$. También mide CA como 312 pies y CB como 527 pies. Encuentre la distancia entre A y B.

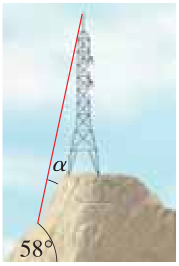
37. La Torre Inclinada de Pisa El campanario de la catedral de Pisa, Italia, está inclinado 5.6° con respecto a la vertical. Una turista está de pie a 105 m de su base, con la torre inclinada directamente hacia ella. Ella mide el ángulo de elevación a lo alto de la torre y ve que es de 29.2°. Encuentre la longitud de la torre al metro más cercano.

38. Antena de radio Una antena de radio de onda corta está sostenida por dos cables de retenida (vientos), de 165 pies y 180 pies de largo. Cada cable está unido a lo alto de la antena y anclado al suelo, en dos puntos de anclaje en lados opuestos de la antena. El cable más corto forma un ángulo de 67° con el suelo. ¿A qué distancia están entre sí los puntos de anclaje?

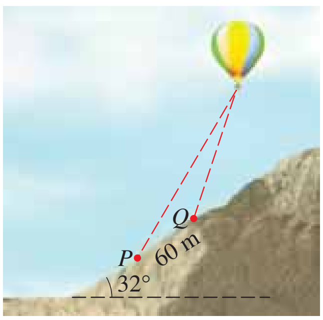
39. Altura de un árbol Un árbol en una ladera proyecta una sombra de 215 pies ladera abajo. Si el ángulo de inclinación de la ladera es 22° con respecto a la horizontal y el ángulo de elevación del Sol es 52°, encuentre la altura del árbol.



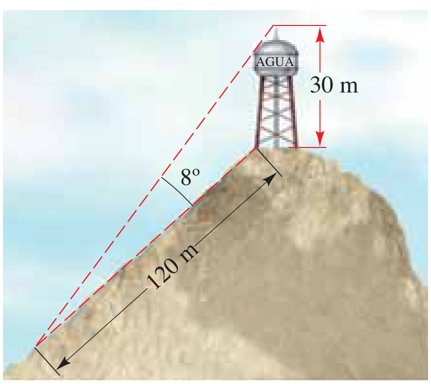
40. Longitud de un alambre de retenida Una torre de comunicaciones está situada en lo alto de un empinado cerro, como se ve en la figura. El ángulo de inclinación del cerro es 58°. Un alambre de retenida se ha de unir a lo alto de la torre y al suelo, a 100 metros colina abajo desde la base de la torre. El ángulo α de la figura está determinado como de 12°. Encuentre la longitud del cable requerido para el alambre de retenida.



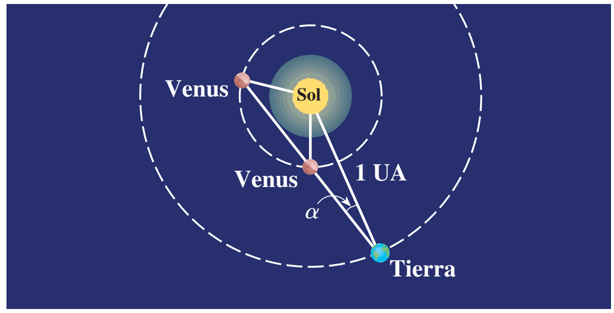
41. Cálculo de una distancia Observadores en P y Q están localizados en el costado de un cerro que está inclinado 32° con la horizontal, como se muestra. El observador en P determina que el ángulo de elevación a un globo de aire caliente es de 62°. Al mismo tiempo, el observador en Q mide el ángulo de elevación al globo y ve que es de 71°. Si P está 60 metros colina abajo desde Q, encuentre la distancia de Q al globo.



42. Cálculo de un ángulo Una torre de 30 m para agua está situada en lo alto de un cerro. De una distancia de 120 m bajando por el cerro, se observa que el ángulo formado entre lo alto y la base de la torre es de 8°. Encuentre el ángulo de inclinación del cerro.



43. Distancias a Venus La *elongación* α de un planeta es el ángulo formado por el planeta, la Tierra y el Sol (vea la figura). Se sabe que la distancia del Sol a Venus es 0.723 UA (vea Ejercicio 65 en la Sección 6.2). En cierto instante, se ve que la elongación de Venus es de 39.4°. Encuentre las posibles distancias de la Tierra a Venus en ese momento en unidades astronómicas (UA).



44. Burbujas de jabón Cuando dos burbujas de unen entre sí en el aire, su superficie común es parte de una esfera cuyo centro D está en la línea que pasa por los centros de las burbujas (vea la figura). También, los ángulos ACB y ACD miden 60° cada uno de ellos.

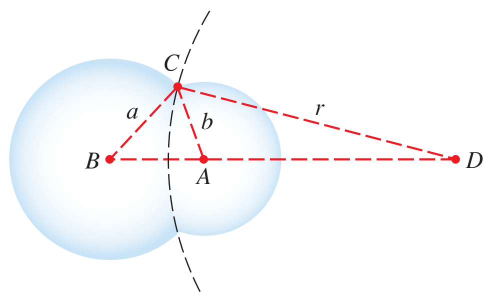
(a) Demuestre que el radio r de la cara común está dado por

$$r = \frac{ab}{a - b}$$

[*Sugerencia:* Use la Ley de Senos junto con el hecho de que un ángulo θ y su suplemento $180° - \theta$ tienen el mismo seno.]

(b) Encuentre el radio de la cara común si los radios de las burbujas son 4 cm y 3 cm.

(c) ¿Qué forma toma la cara común si las dos burbujas tienen radios iguales?



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

45. Número de soluciones en el caso ambiguo Hemos visto que cuando se usa la Ley de Senos para resolver un triángulo en el caso LLA, puede haber dos soluciones, una solución o ninguna. Trace ángulos como los de la Figura 6 para verificar los criterios de la tabla para el número de soluciones, si nos dan $\angle A$ y los lados a y b.

Criterio	Número de soluciones
$a \geq b$	1
$b > a > b \operatorname{sen} A$	2
$a = b \operatorname{sen} A$	1
$a < b \operatorname{sen} A$	0

Si $\angle A = 30°$ y $b = 100$, use estos criterios para hallar el intervalo de valores de a para los cuales el triángulo ABC tiene dos soluciones, una solución o ninguna solución.

6.6 La Ley de Cosenos

La Ley de Cosenos ▶ Navegación: orientación y rumbo ▶ El área de un triángulo

▼ La Ley de Cosenos

La Ley de Senos no se puede usar directamente para resolver triángulos si conocemos dos lados y el ángulo entre ellos, o si conocemos los tres lados (Casos 3 y 4 de la sección precedente). En estos dos casos aplica la **Ley de Cosenos**.

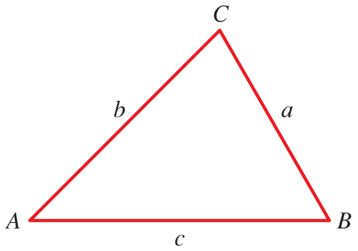


FIGURA 1

LA LEY DE COSENOS

En cualquier triángulo ABC (vea Figura 1), tenemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

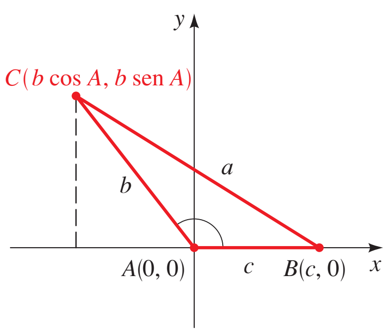


FIGURA 2

DEMOSTRACIÓN Para probar la Ley de Cosenos, ponga el triángulo ABC de modo que $\angle A$ esté en el origen, como se muestra en la Figura 2. Las coordenadas de los vértices B y C son $(c, 0)$ y $(b\cos A, b\operatorname{sen} A)$, respectivamente. (El lector debe comprobar que las coordenadas de estos puntos serán las mismas si trazamos el ángulo A como ángulo agudo.) Usando la Fórmula de Distancias, obtenemos

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\cos A - c)^2 + (b\operatorname{sen} A - 0)^2 \\ &= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\operatorname{sen}^2 A \\ &= b^2(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) - 2bc\cos A + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \text{Porque } \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \end{aligned}$$

Esto prueba la primera fórmula. Las otras dos fórmulas se obtienen de la misma forma si se coloca cada uno de los otros vértices del triángulo en el origen y se repite el argumento precedente. ■

En palabras, la Ley de Cosenos dice que el cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de esos dos lados por el coseno del ángulo incluido.

Si uno de los ángulos de un triángulo, por ejemplo $\angle C$, es un ángulo recto, entonces $\cos C = 0$ y la Ley de Cosenos se reduce al Teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$. Por lo tanto, el Teorema de Pitágoras es un caso especial de la Ley de Cosenos.

EJEMPLO 1 | Longitud de un túnel

Un túnel se ha de construir por una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo hace las mediciones que se ven en la Figura 3. Use la información del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

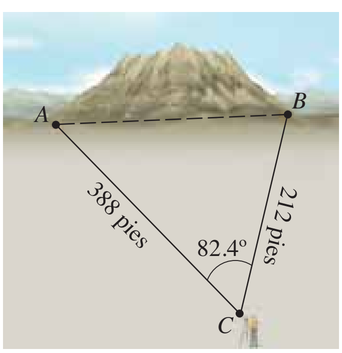


FIGURA 3

SOLUCIÓN Para aproximar la longitud c del túnel, usamos la Ley de Cosenos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C && \text{Ley de Cosenos} \\ &= 388^2 + 212^2 - 2(388)(212)\cos 82.4^\circ && \text{Sustituya} \\ &\approx 173730.2367 && \text{Use calculadora} \\ c &\approx \sqrt{173730.2367} \approx 416.8 && \text{Tome raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el túnel será de aproximadamente 417 pies de largo.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **39** ■

EJEMPLO 2 | LLL, la Ley de Cosenos

Los lados de un triángulo son $a = 5$, $b = 8$ y $c = 12$ (vea Figura 4). Encuentre los ángulos del triángulo.

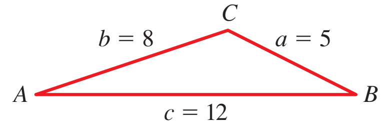


FIGURA 4

SOLUCIÓN Primero hallamos $\angle A$. De la Ley de Cosenos, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Despejando $\cos A$, obtenemos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2(8)(12)} = \frac{183}{192} = 0.953125$$

COS⁻¹ o INV COS o ARC COS

Usando una calculadora, encontramos que $\angle A = \cos^{-1}(0.953125) \approx 18°$. En la misma forma obtenemos

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 12^2 - 8^2}{2(5)(12)} = 0.875$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 8^2 - 12^2}{2(5)(8)} = -0.6875$$

Usando una calculadora, encontramos que

$$\angle B = \cos^{-1}(0.875) \approx 29° \qquad \text{y} \qquad \angle C = \cos^{-1}(-0.6875) \approx 133°$$

Desde luego, una vez calculados dos ángulos, el tercero se puede hallar más fácilmente del hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. No obstante, es buena idea calcular los tres ángulos usando la Ley de Cosenos y sumar los tres ángulos como prueba en los cálculos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

EJEMPLO 3 | LAL, la Ley de Cosenos

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 46.5°$, $b = 10.5$ y $c = 18.0$.

SOLUCIÓN Podemos hallar a usando la Ley de Cosenos.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= (10.5)^2 + (18.0)^2 - 2(10.5)(18.0)(\cos 46.5°) \approx 174.05 \end{aligned}$$

Entonces, $a \approx \sqrt{174.05} \approx 13.2$. También usamos la Ley de Cosenos para hallar $\angle B$ y $\angle C$, como en el Ejemplo 2.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13.2^2 + 18.0^2 - 10.5^2}{2(13.2)(18.0)} \approx 0.816477$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{13.2^2 + 10.5^2 - 18.0^2}{2(13.2)(10.5)} \approx -0.142532$$

Usando calculadora, encontramos que

$$\angle B = \cos^{-1}(0.816477) \approx 35.3° \qquad \text{y} \qquad \angle C = \cos^{-1}(-0.142532) \approx 98.2°$$

Para resumir: $\angle B \approx 35.3°$, $\angle C \approx 98.2°$ y $a \approx 13.2$. (Vea Figura 5.)

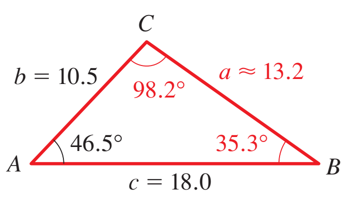


FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Podríamos haber usado la Ley de Senos para hallar $\angle B$ y $\angle C$ en el Ejemplo 3, porque conocíamos los tres lados y un ángulo del triángulo. Pero, conocer el seno de un ángulo no especifica de manera única el ángulo, porque un ángulo θ y su suplemento $180° - \theta$ tienen ambos el mismo seno. Entonces, necesitaríamos determinar cuál de los dos ángulos es la selección correcta. Esta ambigüedad no aparece cuando usamos la Ley de Cosenos, porque todo ángulo entre 0° y 180° tiene un coseno único. Por lo tanto, usar sólo la Ley de Cosenos es preferible en problemas como el Problema 3.

▼ Navegación: orientación y rumbo

En navegación, es frecuente que una dirección se dé como **rumbo**, es decir, como un ángulo agudo medido directamente del norte o del sur. El rumbo N 30° E, por ejemplo, indica una dirección que apunta 30° al este del norte (vea Figura 6).

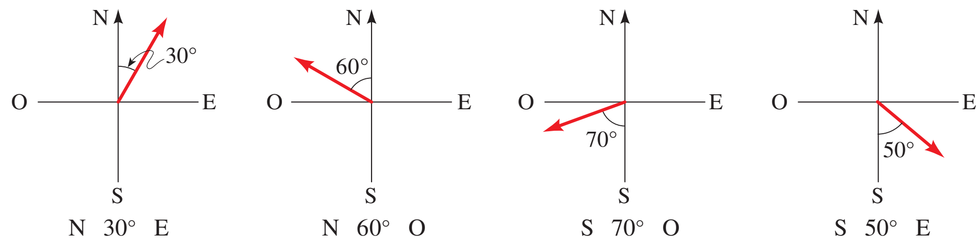


FIGURA 6

EJEMPLO 4 | Navegación

Un piloto sale de un aeropuerto y hace rumbo en la dirección N 20° E, volando a 200 mi/h. Después de una hora, hace una corrección de curso y hace rumbo en la dirección N 40° E. Media hora después de esto, problemas en los motores lo obligan a hacer un aterrizaje de emergencia.

(a) Encuentre la distancia entre el aeropuerto y su punto final de aterrizaje.

(b) Encuentre el rumbo del aeropuerto a su punto final de aterrizaje.

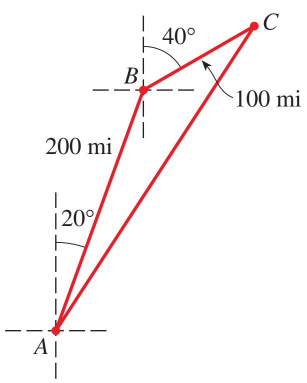


FIGURA 7

SOLUCIÓN

(a) En una hora el avión viaja 200 millas y, en media hora, 100 millas, de modo que podemos localizar el curso del piloto como en la Figura 7. Cuando hace la corrección de su curso, vira 20° a la derecha, de modo que el ángulo entre los dos catetos de su viaje es 180° − 20° = 160°. Entonces, por la Ley de Cosenos, tenemos

$$\begin{aligned} b^2 &= 200^2 + 100^2 - 2 \cdot 200 \cdot 100 \cos 160° \\ &\approx 87{,}587.70 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $b \approx 295.95$. El piloto aterriza a unas 296 millas de su punto de partida.

(b) Primero usamos la Ley de Senos para hallar $\angle A$.

$$\frac{\operatorname{sen} A}{100} = \frac{\operatorname{sen} 160°}{295.95}$$

$$\operatorname{sen} A = 100 \cdot \frac{\operatorname{sen} 160°}{295.95}$$

$$\approx 0.11557$$

Usando la tecla $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ en una calculadora, hallamos que $\angle A \approx 6.636°$. De la Figura 7 vemos que la línea del aeropuerto al punto final de aterrizaje apunta en la dirección 20° + 6.636° = 26.636° al este del norte. En consecuencia, el rumbo es aproximadamente N 26.6° E.

Otro ángulo con seno 0.11557 es 180° − 6.636° = 173.364°. Pero éste es claramente demasiado grande para ser $\angle A$ en $\angle ABC$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45** ■

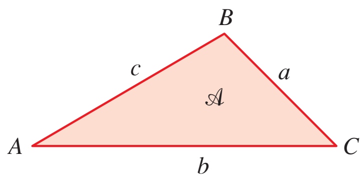


FIGURA 8

El área de un triángulo

Una aplicación interesante de la Ley de Cosenos involucra una fórmula para hallar el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus tres lados (vea Figura 8).

FÓRMULA DE HERÓN

El área $\mathcal{A}$ de un triángulo ABC está dada por

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ es el **semiperímetro** del triángulo; esto es, s es la mitad del perímetro.

DEMOSTRACIÓN Empezamos con la fórmula $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} C$ de la Sección 6.3. Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \tfrac{1}{4}a^2b^2 \operatorname{sen}^2 C \\ &= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2 C) && \text{Identidad de Pitágoras} \\ &= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos C)(1 + \cos C) && \text{Factorice} \end{aligned}$$

A continuación, escribimos las expresiones $1 - \cos C$ y $1 + \cos C$ en términos de a, b y c. Por la Ley de Cosenos tenemos

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Ley de Cosenos} \\ 1 + \cos C &= 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Sume 1} \\ &= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Común denominador} \\ &= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} && \text{Factorice} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab} && \text{Diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

Análogamente

$$1 - \cos C = \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{2ab}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula que obtuvimos para $\mathcal{A}^2$ resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \tfrac{1}{4}a^2b^2 \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}\,\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab} \\ &= \frac{(a+b+c)}{2}\,\frac{(a+b-c)}{2}\,\frac{(c+a-b)}{2}\,\frac{(c-a+b)}{2} \\ &= s(s-c)(s-b)(s-a) \end{aligned}$$

Para ver que los factores de los últimos dos productos son iguales, observe por ejemplo que

$$\begin{aligned} \frac{a+b-c}{2} &= \frac{a+b+c}{2} - c \\ &= s - c \end{aligned}$$

La Fórmula de Herón se obtiene al tomar la raíz cuadrada de cada lado. ■

FIGURA 9

EJEMPLO 5 | Área de un lote

Un negociante desea comprar un lote triangular en una zona de gran movimiento en el centro de una ciudad (vea Figura 9). Los frentes del lote en las tres calles adyacentes miden 125, 280 y 315 pies. Encuentre el área del lote.

SOLUCIÓN El semiperímetro del lote es

$$s = \frac{125 + 280 + 315}{2} = 360$$

Por la Fórmula de Herón el área es

$$\mathcal{A} = \sqrt{360(360 - 125)(360 - 280)(360 - 315)} \approx 17{,}451.6$$

Entonces, el área es aproximadamente 17, 452 pies^2.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **53**

6.6 EJERCICIOS

CONCEPTOS

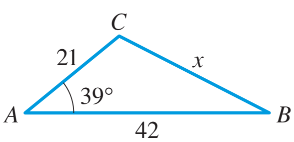
1. Para el triángulo ABC con lados a, b y c la Ley de Cosenos dice que $c^2 =$ ____________________.
2. ¿En cuál de los siguientes casos debe usarse la Ley de Cosenos para resolver un triángulo?

ALA LLL LAL LLA

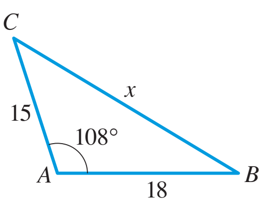
HABILIDADES

3-10 ■ Use la Ley de Cosenos para determinar el lado x indicado o el ángulo θ.

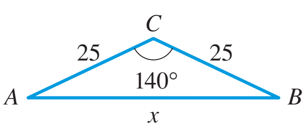
3.



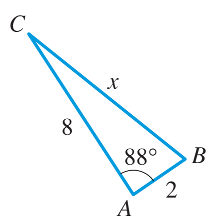
4.



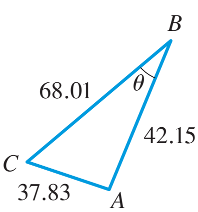
5.



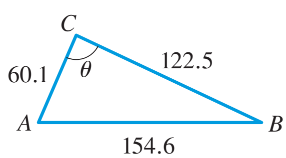
6.



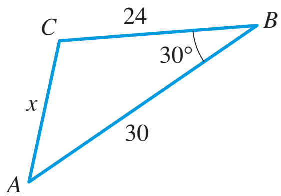
7.



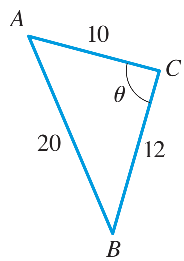
8.



9.

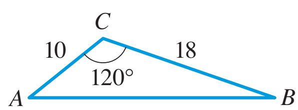


10.

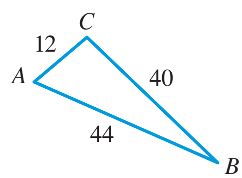


11-20 ■ Resuelva el triángulo ABC.

11.



12.



13. $a = 3.0, \quad b = 4.0, \quad \angle C = 53°$

14. $b = 60, \quad c = 30, \quad \angle A = 70°$

15. $a = 20, \quad b = 25, \quad c = 22$

16. $a = 10, \quad b = 12, \quad c = 16$

17. $b = 125, \quad c = 162, \quad \angle B = 40°$

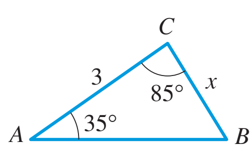
18. $a = 65, \quad c = 50, \quad \angle C = 52°$

19. $a = 50, \quad b = 65, \quad \angle A = 55°$

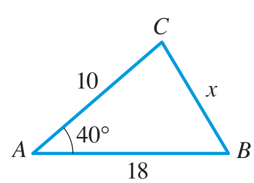
20. $a = 73.5, \quad \angle B = 61°, \quad \angle C = 83°$

21-28 ■ Encuentre el lado indicado x o el ángulo θ. (Use ya sea la Ley de Senos o la Ley de Cosenos, según sea apropiado.)

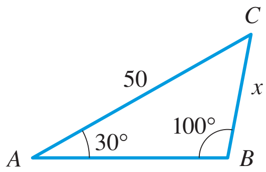
21.



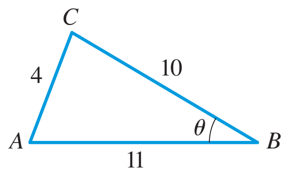
22.



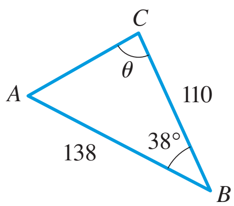
23.



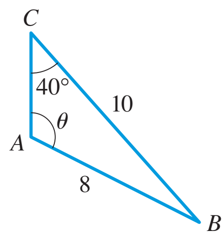
24.



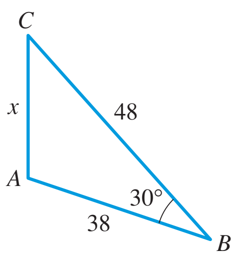
25.



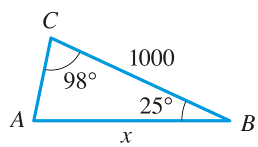
26.



27.



28.



29-32 ■ Encuentre el área del triángulo cuyos lados tienen las longitudes dadas.

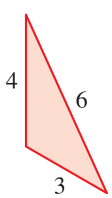
29. $a = 9, \quad b = 12, \quad c = 15$ **30.** $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 2$

31. $a = 7, \quad b = 8, \quad c = 9$

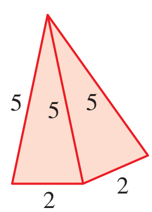
32. $a = 11, \quad b = 100, \quad c = 101$

33-36 ■ Encuentre el área de la figura sombreada, redondeada a dos lugares decimales.

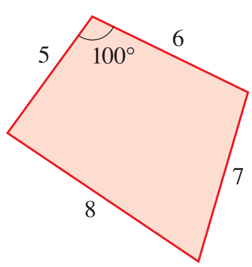
33.



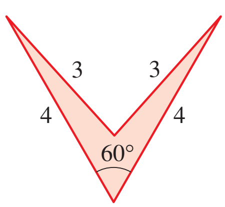
34.



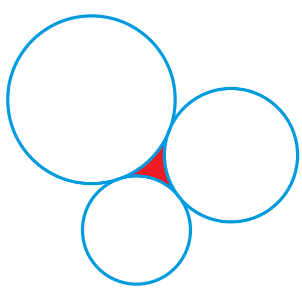
35.



36.



37. Tres círculos de radios 4, 5 y 6 cm son mutuamente tangentes. Encuentre el área sombreada encerrada entre los círculos.



38. Demuestre que en el triángulo ABC

$$a = b\cos C + c\cos B$$

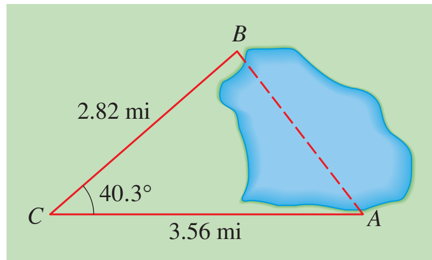
$$b = c\cos A + a\cos C$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

Éstas reciben el nombre de *Leyes de Proyección.* [*Sugerencia:* Para obtener la primera ecuación, sume las ecuaciones segunda y tercera en la Ley de Cosenos y despeje a.]

APLICACIONES

39. Topografía Para hallar la distancia de un lado a otro de un pequeño lago, un topógrafo ha tomado las mediciones que se ilustran. Encuentre la distancia de un lado a otro del lago usando esta información.



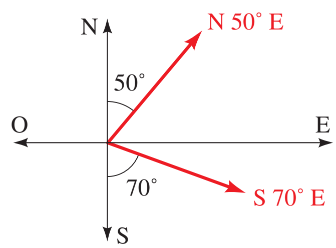
40. Geometría Un paralelogramo tiene lados de longitudes 3 y 5, y un ángulo es de 50°. Encuentre las longitudes de las diagonales.

41. Cálculo de una distancia Dos carreteras rectas divergen en un ángulo de 65°. Dos autos salen del crucero a las 2:00 a.m. uno de ellos corriendo a 50 mi/h y el otro a 30 mi/h. ¿A qué distancia entre sí están los autos a las 2:30 p.m.?

42. Cálculo de una distancia Un auto viaja por una carretera recta, dirigiéndose al este durante 1 hora, y luego corre 30 minutos en otro camino con dirección al noreste. Si el auto ha mantenido una velocidad constante de 40 mi/h, ¿a qué distancia está de su posición inicial?

43. Situación por estima Una aviadora vuela en una trayectoria recta durante 1 h 30 min. Entonces hace una corrección de curso, dirigiéndose 10° a la derecha de su curso original, y vuela 2 horas en la nueva dirección. Si ella mantiene una velocidad constante de 625 mi/h, ¿a qué distancia está de su posición inicial?

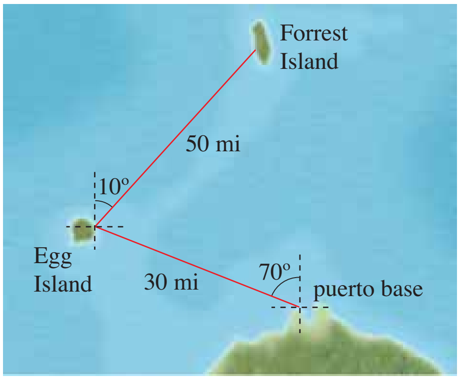
44. Navegación Dos botes salen del mismo puerto al mismo tiempo. Uno de ellos navega a una velocidad de 30 mi/h en la dirección N 50° E y, el otro, viaja a una velocidad de 26 mi/h en una dirección S 70° E (vea la figura). ¿A qué distancia están entre sí los dos botes después de una hora?



45. Navegación Un pescador sale de su puerto base y navega en dirección N 70° O. Viaja 30 minutos y llega a Egg Island. Al día siguiente navega al N 10° E durante 50 minutos, llegando a Forrest Island.

(a) Encuentre la distancia entre el puerto base del pescador y Forrest Island.

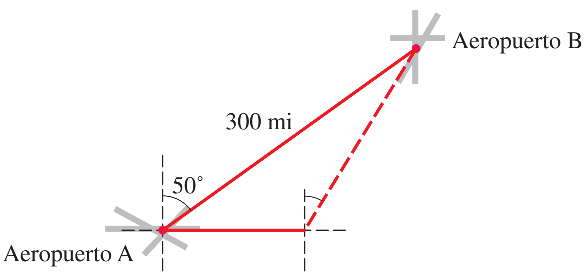
(b) Encuentre el rumbo de Forrest Island de regreso a su puerto base.



46. Navegación El aeropuerto B está a 300 millas del aeropuerto A a un rumbo N 50° E (vea la figura). Un piloto que desea volar de A a B erróneamente vuela en dirección al este a 200 mi/h durante 30 minutos, cuando se da cuenta de su error.

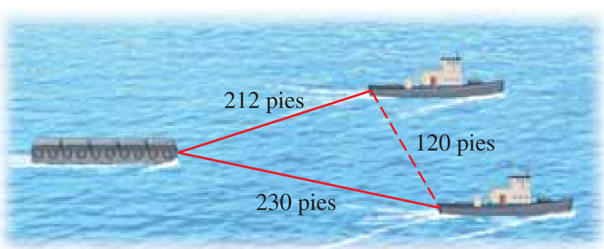
(a) ¿A qué distancia está el piloto de su destino en el momento en que se percata del error?

(b) ¿Qué rumbo debe tomar su avión para llegar al aeropuerto B?

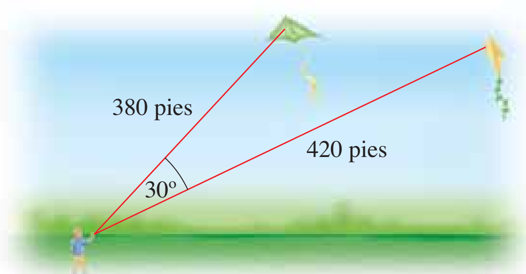


47. Campo triangular Un campo triangular tiene lados de longitudes 22, 36 y 44 yardas. Encuentre el ángulo más grande.

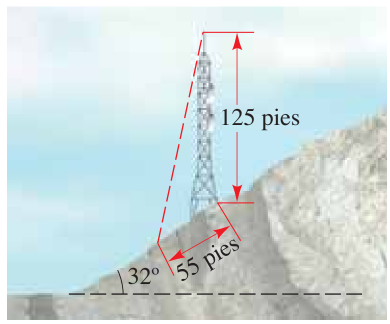
48. Remolque de una barcaza Dos remolcadores que están a 120 pies uno del otro tiran de una barcaza, como se muestra. Si la longitud de un cable es 212 pies y la longitud del otro es 230 pies, encuentre el ángulo formado por los dos cables.



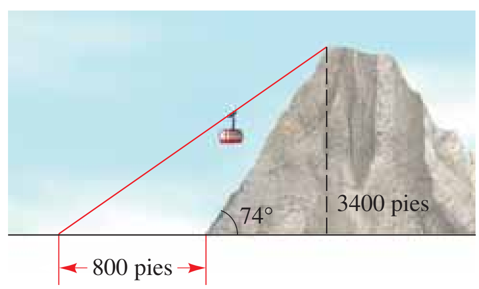
49. Cometas en vuelo Un niño está haciendo volar dos cometas al mismo tiempo; tiene 380 pies de cuerda a una de las cometas y 420 pies para la otra. Él estima que el ángulo entre las dos cuerdas es de 30°. Aproxime la distancia entre las cometas.



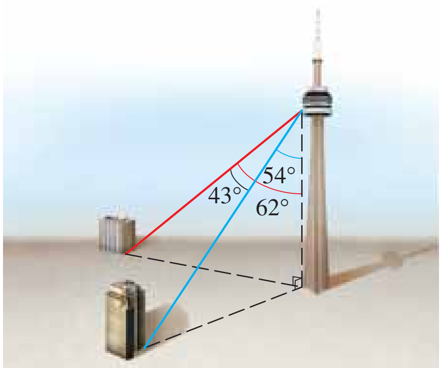
50. Asegurar una torre Una torre de 125 pies está situada en la ladera de una montaña que está inclinada 32° con la horizontal. Un cable de retenida se ha de sujetar a la parte superior de la torre y anclarse en un punto a 55 pies debajo de la base de la torre. Encuentre la longitud más corta del alambre necesario.



51. Teleférico Una empinada montaña está inclinada 74° con la horizontal y se eleva a 3400 pies sobre la llanura circundante. Un funicular se ha de instalar desde un punto a 800 pies de la base hasta lo alto de la montaña, como se muestra. Encuentre la longitud más corta del cable necesario.



52. Torre CN La Torre CN en Toronto, Canadá, es la estructura libre más alta de Norteamérica. Una mujer que está en la plataforma de observación, a 1150 pies sobre el suelo, desea determinar la distancia entre dos puntos de referencia que están al nivel del suelo. Ella observa que el ángulo formado por las líneas de vista a estos dos puntos de referencia es de 43°; también observa que el ángulo entre la vertical y la línea de vista a uno de los puntos de referencia es de 62° y el del otro punto de referencia es de 54°. Encuentre la distancia entre los dos puntos de referencia.



53. **Valor de un terreno** Un terreno en el centro de Columbia está valuado en \$20 el pie cuadrado. ¿Cuál es el valor de un lote triangular con lados de longitudes 112, 148 y 190 pies?

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

54. **Despejar los ángulos de un triángulo** El párrafo que sigue la solución del ejemplo 3 de la página 477 explica un método alternativo para hallar $\angle B$ y $\angle C$, usando la Ley de Senos. Use este método para resolver el triángulo del ejemplo, hallando $\angle B$ primero y $\angle C$ después. Explique cómo escoger el valor apropiado para la medición de $\angle B$. ¿Cuál método prefiere usted para resolver un problema de triángulo LAL, el explicado en el Ejemplo 3 o el que usó en este ejercicio?

CAPÍTULO 6 | REPASO

■ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. **(a)** Explique la diferencia entre un ángulo positivo y un ángulo negativo.
   (b) ¿Cómo se forma un ángulo de 1 grado de medida?
   (c) ¿Cómo se forma un ángulo de 1 radián de medida?
   (d) ¿Cómo se define la medida en radianes de un ángulo θ?
   (e) ¿Cómo se convierte de grados a radianes?
   (f) ¿Cómo se convierte de radianes a grados?
2. **(a)** ¿Cuándo está un ángulo en posición inicial?
   (b) ¿Cuándo son coterminales dos ángulos?
3. **(a)** ¿Cuál es la longitud s de un arco de círculo con radio r que subtiende un ángulo central de θ radianes?
   (b) ¿Cuál es el área A de un sector de círculo con radio r y ángulo central de θ radianes?
4. Si θ es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, defina las seis relaciones trigonométricas en términos de los lados adyacentes y opuestos a θ y la hipotenusa.
5. ¿Qué significa resolver un triángulo?
6. Si θ es un ángulo en posición normal, $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal y r es la distancia del origen a P, escriba expresiones para las seis funciones trigonométricas de θ.
7. ¿Cuáles funciones trigonométricas son positivas en los cuadrantes primero, segundo, tercero y cuarto?
8. Si θ es un ángulo en posición normal, ¿cuál es el ángulo de referencia $\bar{\theta}$?
9. **(a)** Exprese las identidades recíprocas.
   (b) Exprese las identidades de Pitágoras.
10. **(a)** ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud a y b y con ángulo entre ellos θ?
    (b) ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud a, b y c?
11. Defina la función seno inversa $\operatorname{sen}^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?
12. Defina la función coseno inversa $\cos^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?
13. Defina la función tangente inversa $\tan^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?
14. **(a)** Exprese la Ley de Senos.
    (b) Exprese la Ley de Cosenos.
15. Explique el caso ambiguo de la Ley de Senos.

■ EJERCICIOS

1-2 ■ Encuentre la medida en radianes que corresponda a la medida dada en grados.

1. **(a)** 60° **(b)** 330° **(c)** −135° **(d)** −90°
2. **(a)** 24° **(b)** −330° **(c)** 750° **(d)** 5°

3-4 ■ Encuentre la medida en grados que corresponda a la medida dada en radianes.

3. **(a)** $\frac{5\pi}{2}$ **(b)** $-\frac{\pi}{6}$ **(c)** $\frac{9\pi}{4}$ **(d)** 3.1
4. **(a)** 8 **(b)** $-\frac{5}{2}$ **(c)** $\frac{11\pi}{6}$ **(d)** $\frac{3\pi}{5}$
5. Encuentre la longitud de un arco de una circunferencia de radio 8 m si el arco subtiende un ángulo central de 1 rad.
6. Encuentre la medida de un ángulo central θ en un círculo de 5 pies de radio si el ángulo está subtendido por un arco de 7 pies de longitud.
7. Un arco circular de 100 pies de longitud subtiende un ángulo central de 70°. Encuentre el radio del círculo.
8. ¿Cuántas revoluciones hará una rueda de 28 pulg. de un auto en media hora si el auto está corriendo a 60 mi/h?

ÁLGEBRA LINEAL

Stanley I. Grossman • José Job Flores Godoy

Séptima edición

McGraw Hill

En la sección 2.1 se definieron los vectores columna y vectores renglón como conjuntos ordenados de n números reales o escalares. En el siguiente capítulo se definirán otros tipos de conjuntos de vectores, denominados *espacios vectoriales.*

En principio, el estudio de los espacios vectoriales arbitrarios es un tema abstracto. Por esta razón es útil poder contar con un grupo de vectores que se pueden visualizar fácilmente para usarlos como ejemplos.

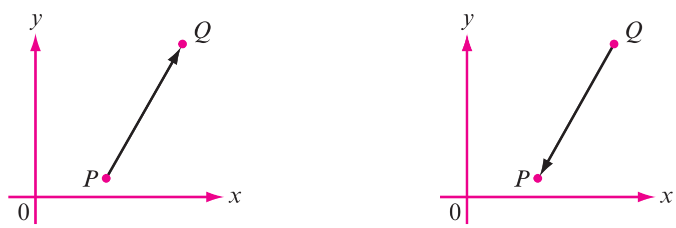
En el presente capítulo se discutirán las propiedades básicas de los vectores en el plano xy y en el espacio real de tres dimensiones. Los estudiantes que conocen el cálculo de varias variables ya están familiarizados con este material, en cuyo caso se podrá cubrir rápidamente, a manera de repaso. Para los que no, el estudio de este capítulo proporcionará ejemplos que harán mucho más comprensible el material de los capítulos 5, 6 y 7.

4.1 Vectores en el plano

Como se definió en la sección 2.1, $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de vectores (x_1, x_2) con x_1 y x_2 números reales. Como cualquier punto en el plano se puede escribir en la forma (x, y), es evidente que se puede pensar que cualquier punto en el plano es un vector en $\mathbb{R}^2$, y viceversa. De este modo, los términos “el plano” y “$\mathbb{R}^2$” con frecuencia son intercambiables. Sin embargo, para muchas aplicaciones físicas (incluyendo las nociones de fuerza, velocidad, aceleración y momento) es importante pensar en un vector no como un punto sino como una entidad que tiene “longitud” y “dirección”. Ahora se verá cómo se lleva a cabo esto.

Segmento de recta dirigido

Sean P y Q dos puntos en el plano. Entonces el **segmento de recta dirigido** de P a Q, denotado por $\overrightarrow{PQ}$, es el segmento de recta que va de P a Q (vea la figura 4.1*a*). Observe que los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ son diferentes puesto que tienen direcciones opuestas (figura 4.1*b*).



a) $\overrightarrow{PQ}$ *b*) $\overrightarrow{QP}$

Figura 4.1

Los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ apuntan hacia direcciones opuestas.

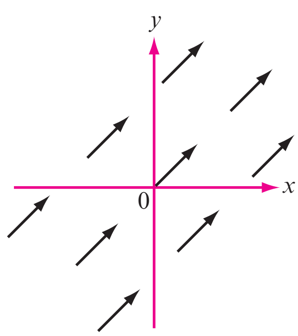


Figura 4.2

Un conjunto de segmentos de recta dirigidos equivalentes.

Punto inicial

Punto terminal

El punto P en el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se denomina **punto inicial** del segmento y el punto Q se denomina **punto terminal**. Las dos propiedades más importantes de un segmento de recta dirigido son su magnitud (longitud) y su dirección. Si dos segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud y dirección, se dice que son **equivalentes** sin importar en dónde se localizan respecto al origen. Los segmentos de recta dirigidos de la figura 4.2 son todos equivalentes.

Observación

Los segmentos de recta dirigidos en la figura 4.2 son todos representaciones del mismo vector.

Segmentos de recta dirigidos equivalentes

Definición 4.1.1

Definición geométrica de un vector

El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina **representación** del vector.

Vector

Representación del vector

De la definición 4.1.1 se observa que un vector dado **v** se puede representar de múltiples formas. Observe la figura 4.3: sea $\overrightarrow{PQ}$ una representación de **v**; entonces, sin cambiar magnitud ni dirección, se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ en forma paralela de manera que su punto inicial se traslada al origen. Después se obtiene el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{0R}$, que es otra representación del vector **v**. Ahora suponga que la R tiene las coordenadas cartesianas (a, b). Entonces se puede describir el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{0R}$ por las coordenadas (a, b). Es decir, $\overrightarrow{0R}$ es el segmento de recta dirigido con punto inicial $(0, 0)$ y punto terminal (a, b). Puesto que una representación de un vector es tan buena como cualquier otra, se puede escribir el vector **v** como (a, b).

Nota

La forma de la definición geométrica de un vector presenta la noción de una clase de equivalencias, la cual es útil para dividir conjuntos en subconjuntos ajenos. Además, es suficiente elegir un elemento de cada subconjunto para representar a todos los otros elementos.

Observación

Con la definición 4.1.2 es posible pensar en un punto en el plano *xy* con coordenadas (a, b) como un vector que comienza en el origen y termina en (a, b).

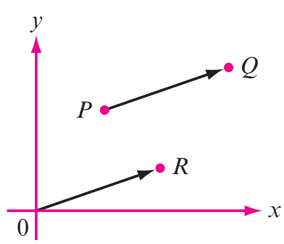


Figura 4.3

Se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ para obtener un segmento de recta dirigido equivalente con su punto inicial en el origen. Observe que $\overrightarrow{0R}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son paralelos y tienen la misma longitud.

Observación

El vector cero tiene magnitud cero. Por lo tanto, puesto que los puntos inicial y terminal coinciden, se dice que el vector cero *no tiene dirección*.

Definición 4.1.2

Definición algebraica de un vector

Un **vector v** en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se denominan **elementos** o **componentes** del vector **v**. El **vector cero** es el vector $(0, 0)$.

Observación

Se hace hincapié en que las definiciones 4.1.1 y 4.1.2 describen, precisamente, los mismos objetos. Cada punto de vista (geométrico o algebraico) tiene sus ventajas. La definición 4.1.2 es la definición de un vector de dimensión 2 que se ha estado utilizando.

Puesto que en realidad un vector es un conjunto de segmentos de recta equivalentes, se define la **magnitud** o **longitud de un vector** como la longitud de cualquiera de sus representaciones y su **dirección** como la dirección de cualquiera de sus representaciones. Haciendo uso de la representación $\overrightarrow{0R}$ y escribiendo el vector $\mathbf{v} = (a, b)$ se define a

$$\boxed{|\mathbf{v}| = \text{magnitud de } \mathbf{v} = \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

Magnitud o longitud de un vector

Esto se deduce del teorema de Pitágoras (vea la figura 4.4). Se ha usado la notación $|\mathbf{v}|$ para denotar a la magnitud de $\mathbf{v}$. Observe que $|\mathbf{v}|$ es un *escalar.*

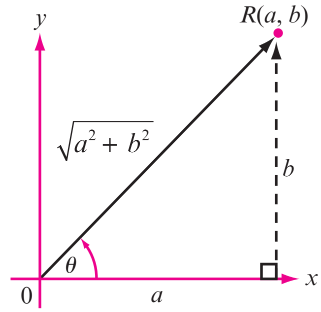


Figura 4.4
La magnitud de un vector con coordenada x igual a a y coordenada y igual a b es $\sqrt{a^2+b^2}$.

EJEMPLO 4.1.1 Cálculo de la magnitud de seis vectores

Calcule las magnitudes de los vectores i) $\mathbf{v} = (2, 2)$; ii) $\mathbf{v} = (2, 2\sqrt{3})$; iii) $\mathbf{v} = (-2\sqrt{3}, 2)$; iv) $\mathbf{v} = (-3, -3)$; v) $\mathbf{v} = (6, -6)$; vi) $\mathbf{v} = (0, 3)$.

Solución **i)** $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ii) $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$

iii) $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2} = 4$

iv) $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

v) $|\mathbf{v}| = \sqrt{6^2+(-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

vi) $|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2+3^2} = \sqrt{9} = 3$

Nota

$\tan\theta$ es periódica con periodo π. Entonces, si $a \neq 0$, siempre existen *dos* números en $[0, 2\pi)$, tales que $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Por ejemplo, $\tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{5\pi}{4} = 1$. Para determinar θ de manera única es necesario determinar el cuadrante de $\mathbf{v}$, como se apreciará en el siguiente ejemplo.

Dirección de un vector

Se define la **dirección del vector v** $= (a, b)$ como el ángulo θ, medido en radianes, que forma el vector con el lado positivo del eje x. Por convención, se escoge θ tal que $0 \le \theta < 2\pi$. De la figura 4.4 se deduce que si $a \neq 0$, entonces

$$\boxed{\tan\theta = \frac{b}{a}} \qquad \textbf{(4.1.2)}$$

EJEMPLO 4.1.2 Cálculo de las direcciones de seis vectores

Calcule las direcciones de los vectores en el ejemplo 4.1.1.

Solución Estos seis vectores están dibujados en la figura 4.5.

a) $\mathbf{v}$ se encuentra en el primer cuadrante y como $\tan\theta = \frac{2}{2} = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

b) $\theta = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{2} = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (ya que $\mathbf{v}$ está en el primer cuadrante).

c) $\mathbf{v}$ está en el segundo cuadrante y como $\tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, y de la figura 4.5*c* que $\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

d) $\mathbf{v}$ está en el tercer cuadrante, y como $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$, se encuentra que $\theta = \pi + \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}$.

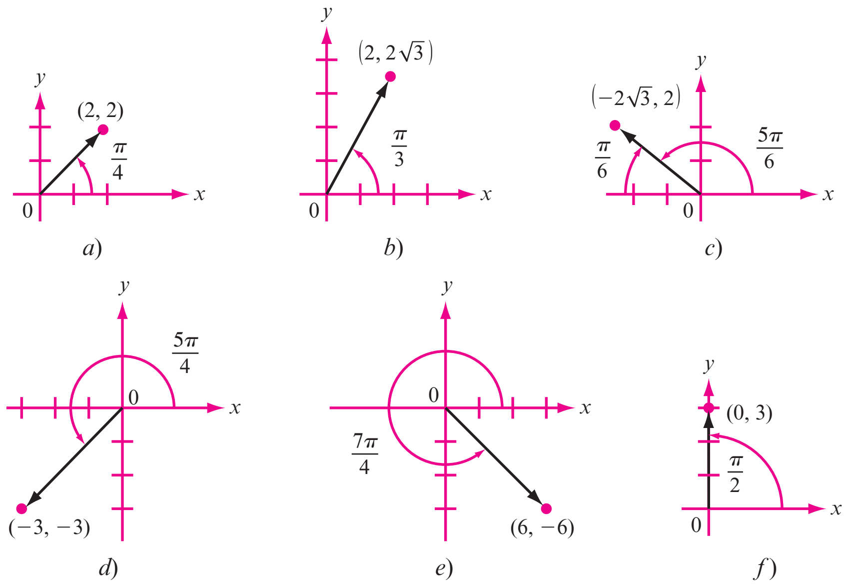


Figura 4.5

Direcciones de seis vectores.

e) Como **v** está en el cuarto cuadrante y $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, se obtiene $\theta = 2\pi - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{4}$.

f) No se puede usar la ecuación (4.1.2) porque $\frac{b}{a}$ no está definido. No obstante, en la figura 4.5 *f*) se ve que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

En general, si $b > 0$

$$\boxed{\text{Dirección de } (0, b) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \text{dirección de } (0, -b) = \frac{3\pi}{2} \qquad b > 0}$$

En la sección 2.1 se definió la suma de vectores y la multiplicación por un escalar. ¿Qué significan en términos geométricos estos conceptos? Se comienza con la multiplicación por un escalar. Si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces $\alpha\mathbf{v} = (\alpha a, \alpha b)$. Se encuentra que

$$|\alpha\mathbf{v}| = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \alpha^2 b^2} = |\alpha|\sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha||\mathbf{v}| \tag{4.1.3}$$

es decir,

Magnitud de αv

Multiplicar un vector por un escalar diferente de cero tiene el efecto de multiplicar la longitud del vector por el valor absoluto de ese escalar.

Más aún, si $\alpha > 0$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ está en el mismo cuadrante que **v** y, por lo tanto, la dirección de $\alpha\mathbf{v}$ es la *misma* que la dirección de **v** ya que $\tan^{-1}\left(\frac{\alpha b}{\alpha a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. Si $\alpha < 0$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta a la de **v**. En otras palabras,

Dirección de αv

Dirección de $\alpha\mathbf{v}$ = dirección de **v**, si $\alpha > 0$
Dirección de $\alpha\mathbf{v}$ = (dirección de **v**) + π si $\alpha < 0$ **(4.1.4)**

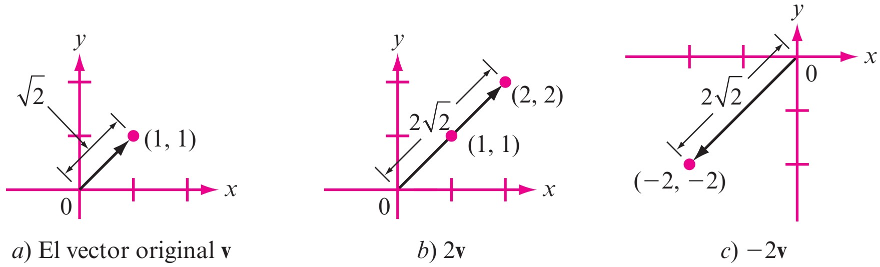


Figura 4.6

El vector 2**v** tiene la misma dirección que **v** y el doble de su magnitud. El vector −2**v** tiene dirección opuesta a **v** y el doble de su magnitud.

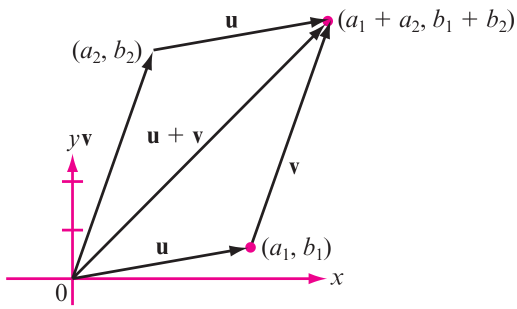


Figura 4.7

La regla del paralelogramo para sumar vectores.

EJEMPLO 4.1.3 Multiplicación de un vector por un escalar

Sea $\mathbf{v} = (1, 1)$. Entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ y $|2\mathbf{v}| = |(2, 2)| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2|\mathbf{v}|$. Todavía más, $|-2\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} = 2|\mathbf{v}|$. Así, la dirección de $2\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{4}$, mientras que la dirección de $-2\mathbf{v}$ es $\frac{5\pi}{4}$ (vea la figura 4.6).

Ahora suponga que se suman dos vectores: $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ como en la figura 4.7. De la figura se puede apreciar que el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ se puede obtener trasladando la representación del vector **v** de manera que su punto inicial coincida con el punto terminal (a_1, b_1) del vector **u**. Por lo tanto, se puede obtener el vector **u** + **v** dibujando un paralelogramo con un vértice en el origen y lados **u** y **v**. Entonces **u** + **v** es el vector que va del origen a lo largo de la diagonal del paralelogramo.

Nota. Al igual que un segmento de recta es la distancia más corta entre dos puntos, se deduce de inmediato, de la figura 4.7, que

Desigualdad del triángulo

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \tag{4.1.5}$$

Desigualdad del triángulo

Por razones que resultan obvias en la figura 4.7, la desigualdad (4.1.5) se denomina **desigualdad del triángulo.**

También se puede utilizar la figura 4.7 para obtener una representación geométrica del vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Como $\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}$, el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es el vector que se debe sumar a **v** para obtener **u**. Este hecho se ilustra en la figura 4.8*a*. Un hecho similar se ilustra en la figura 4.8*b*.

Existen dos vectores especiales en $\mathbb{R}^2$ que nos permiten representar a cualquier otro vector en el plano de una forma conveniente. Se denota el vector (1, 0) por el símbolo **i** y el vector (0, 1) por el símbolo **j** (vea la figura 4.9). Si $\mathbf{v} = (a, b)$ es cualquier vector en el plano, entonces como $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, se puede escribir

Vectores i y j

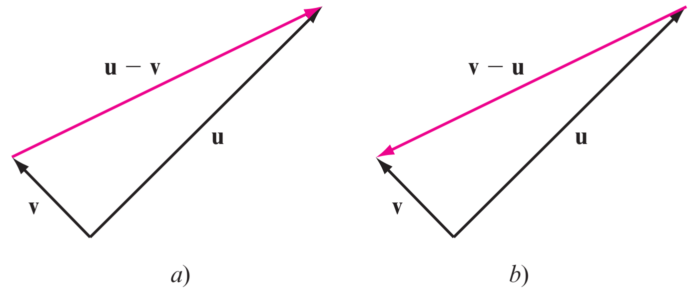


Figura 4.8

Los vectores **u** − **v** y **v** − **u** tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas.

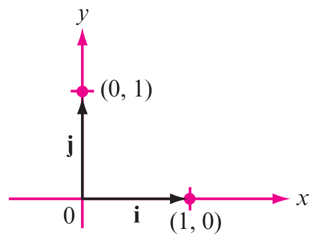


Figura 4.9

Los vectores **i** y **j**.

$$\boxed{\mathbf{v} = (a, b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}} \qquad (4.1.6)$$

Con esta representación se dice que **v** está *expresado en sus componentes horizontal y vertical.* Los vectores **i** y **j** tienen dos propiedades:

i) Ninguno de ellos es múltiplo del otro. (En la terminología del capítulo 5, son *linealmente independientes*.)

ii) Cualquier vector **v** se puede escribir en términos de **i** y **j** como en la ecuación (4.1.6).†

Nota histórica

Hamilton utilizó por primera vez los símbolos **i** y **j**. Definió su cuaternión como una cantidad de la forma $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, donde a es la "parte escalar" y $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ es la "parte vectorial". En la sección 4.3 se escribirán los vectores en el espacio en la forma $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

Bajo estas dos condiciones se dice que **i** y **j** forman una **base** en $\mathbb{R}^2$. En el capítulo 5 se estudiarán las bases en espacios vectoriales arbitrarios.

Base

Ahora se definirá un tipo de vector que es muy útil en ciertas aplicaciones.

Definición 4.1.3

Vector unitario

Un **vector unitario** es un vector con longitud 1.

EJEMPLO 4.1.4 Un vector unitario

El vector $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{j}$ es un vector unitario ya que

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

† En la ecuación (4.1.6) se dice que **v** se puede escribir como una *combinación lineal* de **i** y **j**. Se estudiará el concepto de combinación lineal en la sección 5.5.

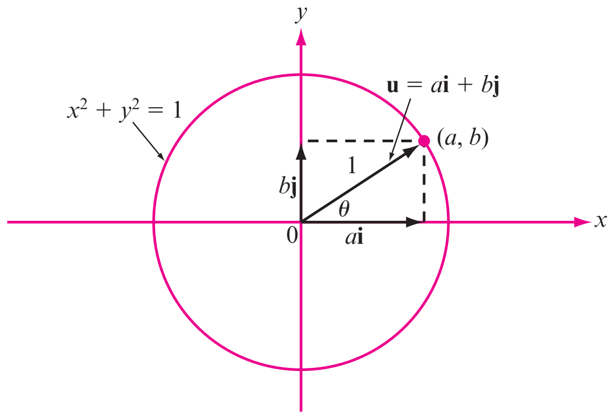


Figura 4.10

El punto terminal de un vector unitario que tiene su punto inicial en el origen se encuentra sobre el círculo unitario (círculo centrado en el origen con radio 1).

Sea $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces $|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, de manera que $a^2 + b^2 = 1$ y $\mathbf{u}$ se puede representar por un punto en el círculo unitario (vea la figura 4.10). Si θ es la dirección de $\mathbf{u}$, es claro que $a = \cos\theta$ y $b = \operatorname{sen}\theta$. De este modo, cualquier vector unitario $\mathbf{u}$ se puede escribir en la forma

Representación de un vector unitario

$$\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} \tag{4.1.7}$$

donde θ es la dirección de $\mathbf{u}$.

EJEMPLO 4.1.5 Cómo escribir un vector unitario como $(\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$

El vector unitario $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{j}$ del ejemplo 4.1.4 se puede escribir en la forma de (4.1.7) con $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

También se tiene (vea el problema 4.1.26).

Sea $\mathbf{v}$ un vector diferente de cero. Entonces $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$.

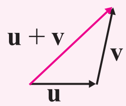
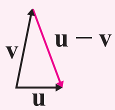
EJEMPLO 4.1.6 Cómo encontrar un vector unitario con la misma dirección que un vector dado diferente de cero

Encuentre un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Solución Aquí $|\mathbf{v}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, por lo que $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)\mathbf{i} - \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)\mathbf{j}$ es el vector que se busca.

Se concluye esta sección con un resumen de las propiedades de los vectores.

Tabla 4.1

Objeto	Definición intuitiva	Expresión en términos de componentes si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$, y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$
Vector $\mathbf{v}$	Un objeto que tiene magnitud y dirección	$v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ o (v_1, v_2)
$\lvert\mathbf{v}\rvert$	Magnitud (o longitud) de $\mathbf{v}$	$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
$\alpha\mathbf{v}$	 (en este dibujo $\alpha = 2$)	$\alpha v_1\mathbf{i} + \alpha v_2\mathbf{j}$ o $(\alpha v_1, \alpha v_2)$
$-\mathbf{v}$		$-v_1\mathbf{i} - v_2\mathbf{j}$ o $(-v_1, -v_2)$ o $-(v_1, v_2)$
$\mathbf{u} + \mathbf{v}$		$(u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
$\mathbf{u} - \mathbf{v}$		$(u_1 - v_1)\mathbf{i} + (u_2 - v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Resumen 4.1

- El **segmento de recta dirigido** que se extiende de P a Q en $\mathbb{R}^2$ denotado por $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que va de P a Q. (p. 232)
- Dos segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^2$ son **equivalentes** si tienen la misma magnitud (longitud) y dirección. (p. 233)
- ***Definición geométrica de un vector***

  Un vector en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^2$ equivalentes a un segmento de recta dirigido dado. Una representación de un vector tiene su punto inicial en el origen y se denota por $\overrightarrow{0R}$. (p. 233)
- ***Definición algebraica de un vector***

  Un vector $\mathbf{v}$ en el plano xy ($\mathbb{R}^2$) es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se llaman **componentes** del vector $\mathbf{v}$. El **vector cero** es el vector $(0, 0)$. (p. 233)
- Las definiciones geométrica y algebraica de un vector en $\mathbb{R}^2$ se relacionan de la siguiente manera: si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces una representación de $\mathbf{v}$ es $\overrightarrow{0R}$, donde $R = (a, b)$. (p. 233)
- Si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces la **magnitud de v**, denotada por $\lvert\mathbf{v}\rvert$, está dada por $\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$. (p. 233)
- Si $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces la **dirección de v** es el ángulo en $[0, 2\pi]$ que forma cualquier representación de $\mathbf{v}$ con el lado positivo del eje x. (p. 234)

- ***Desigualdad del triángulo***

  En $\mathbb{R}^2$

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \qquad \text{(p. 236)}$$

- En $\mathbb{R}^2$ sean $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$; entonces $\mathbf{v} = (a, b)$ se puede escribir como $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. (p. 237)
- Un **vector unitario** $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^2$ es un vector que satisface $|\mathbf{u}| = 1$. En $\mathbb{R}^2$ un vector unitario se puede escribir como

$$\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} \qquad \text{(p. 238)}$$

  donde θ es la dirección de $\mathbf{u}$.

AUTOEVALUACIÓN 4.1

I) Un *vector* es __________.

a) dos puntos en el plano xy.
b) un segmento de recta entre dos puntos.
c) un segmento de recta dirigido de un punto a otro.
d) una colección de segmentos de recta dirigidos equivalentes.

II) Si $P = (3, -4)$ y $Q = (8, 6)$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene longitud _______.

a) $|3|+|-4|$ *b)* $(3)^2 + (-4)^2$
c) $(3 - 8)^2 + (-4 - 6)^2$ *d)* $\sqrt{(8-3)^2 + (6-(-4))^2}$

III) La dirección del vector $(4, 8)$ es ________.

a) π *b)* $\tan^{-1}(8 - 4)$ *c)* $\left(\frac{8}{4}\right)\pi$ *d)* $\tan^{-1}\left(\frac{8}{4}\right)$

IV) Si $\mathbf{u} = (3, 4)$ y $\mathbf{v} = (5, 8)$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ________.

a) $(7, 13)$ *b)* $(8, 12)$ *c)* $(2, 4)$ *d)* $(15, 32)$

V) Si $\mathbf{u} = (4, 3)$, entonces el vector unitario con la misma dirección que $\mathbf{u}$ es _______.

a) $(0.4, 0.3)$ *b)* $(0.8, 0.6)$ *c)* $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ *d)* $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$

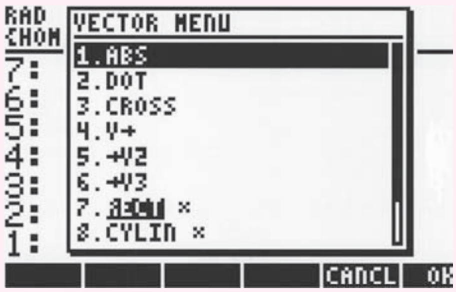
Respuestas a la autoevaluación

I) *d)* **II)** *d)* **III)** *d)* **IV)** *b)* **V)** $b = c$

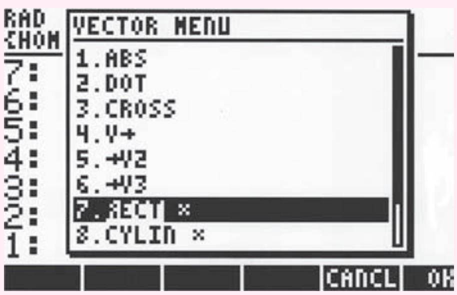
MANEJO DE LA CALCULADORA 4.1

Se puede trabajar con vectores en la calculadora HP50g. Primero seleccionamos el modo de coordenadas rectangulares para la representación de vectores, con la bandera 177 del sistema en la posición de elección, y al oprimir ↰ MTH se presenta la siguiente ventana:

El menú de VECTOR contiene las siguientes funciones:

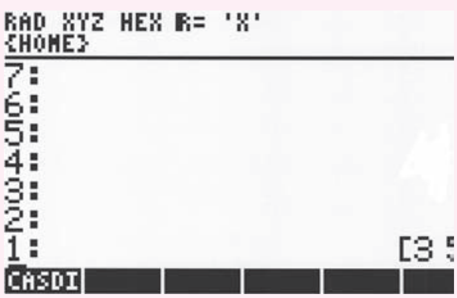


Y hay que asegurarse que la opción 7 esté seleccionada (esto se verá como texto blanco sobre fondo negro).



Se pueden escribir vectores directamente en la pila utilizando la secuencia ↰ [] y escribiendo los números separados por comas o espacios, finalizando con la tecla ENTER, por ejemplo el vector (3, 5).

↰ [] 3 SPC 5 ENTER



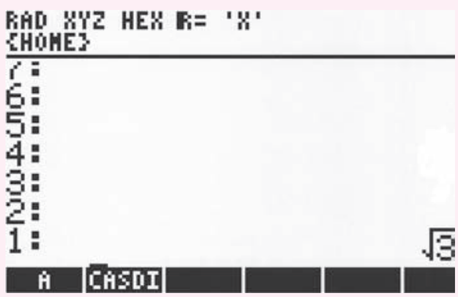
Se pueden guardar en memoria vectores como cualquier otro objeto utilizando el comando STO▸, esto es, se escribe el vector a guardar en la pila, se escribe el nombre de la variable donde se quiere guardar el vector,

' ALPHA A

y por último se oprime STO▸.

Observe que ahora se tiene un nueva variable con etiqueta A.

Para obtener la magnitud de un vector se utiliza el comando A B S; por ejemplo, encontrar la magnitud del vector guardado en A, FI ALPHA ALPHA A B S ENTER, se obtiene:



Si se quiere expresar un vector en forma de magnitud y ángulo, se tiene que cambiar el sistema de coordenadas de la calculadora; esto se puede hacer siguiendo los pasos mostrados al inicio de esta sección, pero eligiendo la opción 8 en la figura 2 de la página anterior. [***Observación:*** Asegúrese de incluir un punto decimal en las cantidades de los vectores, de lo contrario la conversión no se efectuará en forma automática.]

También se pueden describir vectores en forma polar y la calculadora hará la conversión adecuada con respecto al sistema de coordenadas que se esté utilizando. Para especificar un vector en forma de magnitud-ángulo se abren corchetes con ↰ [] seguido de la magnitud y el símbolo de ángulo ALPHA ↱ 6 seguido del ángulo, es decir, Si queremos escribir un vector con magnitud 5 y ángulo de 3 radianes, la secuencia de teclas es la siguiente:

La suma entre vectores y la multiplicación por un escalar se realiza de modo transparente para el usuario siempre y cuando las dimensiones sean compatibles. En los problemas 59 al 71 utilice la calculadora para encontrar la magnitud y dirección (en radianes y grados) de cada vector en $\mathbb{R}^2$.

Problemas 4.1

De los problemas 1 al 19 encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

1. $\mathbf{v} = (-4, 4)$ **2.** $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, -2)$ **3.** $\mathbf{v} = (7, 9)$ **4.** $\mathbf{v} = (-4, -4)$

5. $\mathbf{v} = (-\sqrt{3}, -2)$ **6.** $\mathbf{v} = (-8, 9)$ **7.** $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3})$ **8.** $\mathbf{v} = (-2, \sqrt{3})$

9. $\mathbf{v} = (3, -8)$ **10.** $\mathbf{v} = (1, -\sqrt{3})$ **11.** $\mathbf{v} = (3, 2)$ **12.** $\mathbf{v} = (-5, 1)$

13. $\mathbf{v} = (1, 2)$ **14.** $\mathbf{v} = (-5, 8)$ **15.** $\mathbf{v} = (10, 10)$ **16.** $\mathbf{v} = (-7, 10)$

17. $\mathbf{v} = (10, 0)$ **18.** $\mathbf{v} = (6, -8)$ **19.** $\mathbf{v} = (-2, 9)$

20. Sea $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $\mathbf{v} = (-5, 4)$. Encuentre: *a*) $3\mathbf{u}$; *b*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *c*) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; *d*) $2\mathbf{u} - 7\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.

21. Sea $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Encuentre: *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; *c*) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; *d*) $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$; *e*) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *f*) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.

22. Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Encuentre: *a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b*) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; *c*) $3\mathbf{u}$; *d*) $-7\mathbf{v}$; *e*) $8\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *f*) $4\mathbf{v} - 6\mathbf{u}$. Bosqueje estos vectores.

23. Demuestre que el vector $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ es un vector unitario.

24. Muestre que los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son vectores unitarios.

25. Demuestre que el vector $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{j}$ es un vector unitario.

26. Demuestre que si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \neq 0$, entonces $\mathbf{u} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{j}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$.

De los problemas 27 al 34 encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

27. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ **28.** $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ **29.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ **30.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

31. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ **32.** $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$; $\quad a \neq 0$

33. $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ **34.** $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

35. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, demuestre que $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$ y $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{sen}\theta$, donde θ es la dirección de $\mathbf{v}$.

36. Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, encuentre sen θ y cos θ.

37. Si $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, encuentre sen θ y cos θ.

Un vector **v** tiene dirección opuesta a la del vector **u** si la dirección de **v** es igual a la dirección de **u** más π radianes. De los problemas 38 al 45 encuentre un vector unitario **v** que tenga dirección opuesta a la dirección del vector dado **u**.

38. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{u}$ **39.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **40.** $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ **41.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{u}$

42. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **43.** $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ **44.** $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ **45.** $\mathbf{u} = -5\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

46. Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que: *a)* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; *b)* $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; *c)* $3\mathbf{u} + 8\mathbf{v}$.

47. Sea $P = (c, d)$ y $Q = (c + a, d + b)$. Muestre que la magnitud de $\overrightarrow{PQ}$ es $\sqrt{a^2+b^2}$.

48. Demuestre que la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ en el problema 47 es la misma que la dirección del vector (a, b). [***Sugerencia:*** Si $R = (a, b)$, demuestre que la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela a la recta que pasa por los puntos 0 y R.]

De los problemas 49 al 56 encuentre un vector **v** que tenga la magnitud y dirección dadas.

49. $|\mathbf{v}| = 3, \theta = \frac{\pi}{6}$ **50.** $|\mathbf{v}| = 1, \theta = -\frac{\pi}{3}$ **51.** $|\mathbf{v}| = 8, \theta = \frac{\pi}{3}$

52. $|\mathbf{v}| = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$ **53.** $|\mathbf{v}| = 9, \theta = \frac{2\pi}{3}$ **54.** $|\mathbf{v}| = 6, \theta = \frac{2\pi}{3}$

55. $|\mathbf{v}| = 7, \theta = -\frac{2\pi}{3}$ **56.** $|\mathbf{v}| = 3, \theta = -\frac{5\pi}{4}$

***57.** Demuestre de manera algebraica (es decir, estrictamente de las definiciones de suma y magnitud de vectores) que para cualesquiera dos vectores **u** y **v**, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

58. Demuestre que si **u** y **v** son diferentes del vector cero, entonces $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ si y sólo si **u** es un múltiplo escalar positivo de **v**.

En los problemas 59 al 71 utilice la calculadora para encontrar la magnitud y dirección (en radianes y grados) de cada vector en $\mathbb{R}^2$.

59. (1.735, 2.437) **60.** (0.9502, 0.0344) **61.** (−1.735, 2.437)

62. (−1.735, −2.437) **63.** (0.4387, 0.3861) **64.** (−58, −99)

65. (58, 99) **66.** (0.3192, 0.3129) **67.** (0.01468, −0.08517)

68. (0.01468, 0.08517) **69.** (−0.8649, −0.0301)

70. (−0.01468, 0.08517) **71.** (−0.1649, 0.6277)

EJERCICIOS CON MATLAB 4.1

Información de MATLAB

Introduzca un vector como una matriz de 2×1 o de 3×1. La suma y multiplicación por un escalar es la misma que para las matrices.

Producto escalar de `u` y `v`: `u'*v`

Magnitud (*longitud*) de `v`: `sqrt(v'*v)` o `norm(v)`

Dirección de *v:* vea el ejemplo 4.1.2 y use el hecho de que $\tan^{-1}(c)$ se encuentra con `atan(c)`. También se puede utilizar el comando `atan2(x,y)` (ver `doc atan2`)

Gráficas: varios problemas utilizan gráficas. Se proporcionan instrucciones específicas en cada problema.

1. ***a)*** Utilice MATLAB para verificar los resultados obtenidos con lápiz y papel para la magnitud y dirección de los vectores de los problemas impares 1 al 12 de esta sección.

Nota. $\sqrt{3}$ se encuentra con `sqrt(3)`.

b) Utilice MATLAB para encontrar la magnitud y dirección de los vectores en los problemas pares 38 al 48 en esta sección.

2. Las combinaciones lineales de vectores serán importantes en el trabajo futuro. Este problema describe una manera de visualizar las combinaciones lineales de vectores en el plano (vea también el problema 3 siguiente).

a) Se quieren graficar varias combinaciones lineales de dos vectores dados en el mismo conjunto de ejes. Cada vector será representado por un recta de (0, 0) al punto terminal del vector. Sean **u** y **v** dos matrices (vectores) de 2×1 dadas. Se quieren graficar varios vectores **z**, donde $\mathbf{z} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ con $-1 \le a, b \le 1$ para ayudar a la comprensión de la geometría de una combinación lineal. Lea la nota sobre *gráficas* que se presentó antes de estos problemas de MATLAB.

Introduzca **u** y **v** como vectores columna, elegidos por usted tales que no sean paralelos. Dé lo siguiente:

```
w=u+v;ww=u-v;aa=[u',v',w',ww'];M=max(abs(aa))
axis('square');axis([-M M -M M])
plot([0 v(1)],[0,v(2)],[0,u(1)],[0,u(2)])
hold on
grid
```

Con esto verá **u** y **v** graficados. Los siguientes comandos de MATLAB grafican la combinación lineal entre los vectores **u** y **v**

```
a=1; b=1;
z=a*u+b*v;
plot([0 z(1)],[0 z(2)],'c','linewidth',5')
```

Repita cinco veces los tres renglones de comandos anteriores, pero modifique la elección de a y b con $0 \le a, b \le 1$ (recuerde que puede usar las flechas hacia arriba). Observe la geometría de cada combinación lineal conforme obtenga cada una de las gráficas.

¿Cómo se verá la pantalla de gráficas si se grafican múltiples casos de a y b?

Repita seis veces los últimos tres renglones de comandos con los siguientes cambios: cambie `'c'` a `'r'` y elija al menos otras seis a y b para $0 \le a \le 1$ y $-1 \le b \le 0$. Sea $a = 1$ y $b = -1$ la primera elección. Observe la geometría y conteste la pregunta anterior.

Repita los últimos tres renglones de comandos seis veces con los siguientes movimientos: cambie `'c'` a `'m'` y elija por lo menos otras seis a y b para $-1 \leq a \leq 0$ y $0 \leq b \leq 1$. Sean $a = -1$ y $b = 1$ los primeros valores. Observe la geometría y conteste la pregunta anterior.

Repita seis veces más los últimos tres renglones de comandos con los siguientes movimientos: cambie `'c'` a `'k'` y elija por lo menos otros seis valores de a y b para $-1 \leq a, b \leq 1$. Sean $a = -1$ y $b = -1$ los primeros valores. Observe la geometría y responda la pregunta, igual que antes.

¿Cómo se vería la pantalla de gráficas si se graficaran cada vez más combinaciones lineales?

Al terminar este problema dé el comando `hold off`.

b) Siguiendo las instrucciones anteriores, explore lo que ocurre si comienza con **u** y **v** paralelos.

Al terminar este problema, dé el comando `hold off`.

3. (*Este problema usa el archivo lincomb.m*) Dados dos vectores no paralelos en el plano, se puede escribir otro vector en el plano como una combinación lineal de estos dos vectores. El archivo *lincomb.m* se presenta a continuación.

M

```
function lincomb(u,v,w

% LINCOMB función que grafica los vectores u,v,w y
%      se expresa w como la combinacion lineal
%      del u,v es decir
%         w = a u + b v, con a,b reales
%
%    u: vector de 2x1
%    v: vector de 2x1
%    w: vector de 2x1

% define el origen
origen=[0;0];
% se encuentran los valores de las constantes
% de la combinacion lineal
A=[u,v];
xx=A\w;
Ou=[origen,u];
Ov=[origen,v];
Ow=[origen,w];
PP1=[origen,xx(1)*u,xx(1)*u+xx(2)*v,xx(2)*v,origen];
%Grafica de vectores
plot(Ou(1,:),Ou(2,:),'-*b',Ov(1,:),Ov(2,:),'-*b',...
    Ow(1,:),Ow(2,:),'-*g')
text(u(1)/2,u(2)/2,'\bf u')
text(v(1)/2,v(2)/2,'\bf v')
text(w(1)/2,w(2)/2,'\bf w')
hold on
plot(PP1(1,:),PP1(2,:),':r')
grid on
%
title(['u=[',num2str(u(1)),';',num2str(u(2)),'], ',...
   'v=[',num2str(v(1)),';',num2str(v(2)),'], ',...
   'w=[',num2str(w(1)),';',num2str(w(2)),']'])
xlabel(['w = (',num2str(xx(1),2),...
    ') u + (',num2str(xx(2),2),') v'])
%
axis square
a=axis;
```

```
axis([min(a([1,3])),max(a([2,4])),min(a([1,3])),max(a([2,4]))])
%
hold off
```

Una vez que se haya escrito la función en un archivo con nombre *lincomb.m*, dé el comando `doc lincomb` para tener una descripción de este archivo con extensión *m*.

Sean **u** y **v** dos vectores de 2×1 que no son paralelos. Sea `w=5*(2*rand(2,1−1)`. Dé `lincomb(u,v,w)`. Primero verá graficados **u**, **v** y **w**. Oprima cualquier tecla y aparecerá la geometría de **w** escrita como una combinación lineal de **u** y **v**. Repita para diferentes vectores **w**, **u** y **v**.

4.2 El producto escalar y las proyecciones en $\mathbb{R}^2$

En la sección 2.2 se definió el producto escalar de dos vectores. Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v}$ (a_2, b_2), entonces

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2} \qquad (4.2.1)$$

Ahora se verá la interpretación geométrica del producto escalar.

Definición 4.2.1

Ángulo entre vectores

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces el **ángulo φ entre u y v** está definido como el ángulo no negativo más pequeño† entre las representaciones de **u** y **v** que tienen el origen como punto inicial. Si $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ para algún escalar α, entonces $\varphi = 0$ si $\alpha > 0$ y $\varphi = \pi$ si $\alpha < 0$.

Esta definición se ilustra en la figura 4.11. Observe que φ siempre se puede elegir para que sea un ángulo no negativo en el intervalo $[0, \pi]$.

Teorema 4.2.1 **La magnitud de un vector en términos del producto escalar**

Demostración

Sea **v** un vector. Entonces

$$\boxed{|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \qquad (4.2.2)$$

Demostración

Sea $\mathbf{v} = (a, b)$. Entonces

$$|\mathbf{v}|^2 = a^2 + b^2$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = |\mathbf{v}|^2$$

† Este ángulo estará en el intervalo $[0, \pi]$.

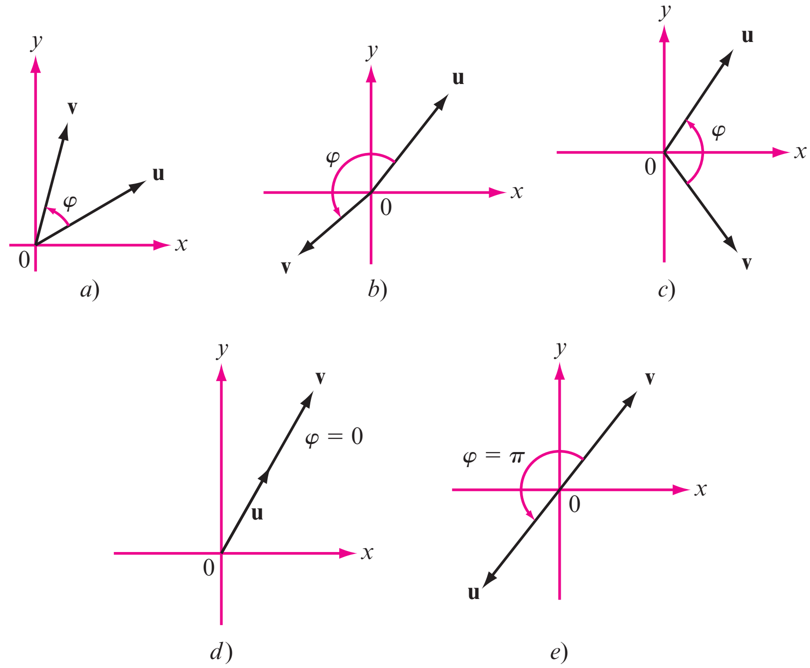


Figura 4.11
Ángulo φ entre dos vectores.

Teorema 4.2.2

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}} \qquad \textbf{(4.2.3)}$$

Demostración

La ley de los cosenos (vea el problema 3.4.10, página 223) establece que en el triángulo de la figura 4.12

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

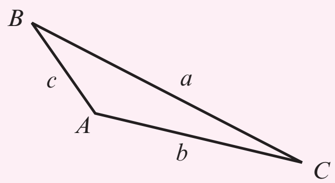


Figura 4.12
Triángulo con lados a, b y c.

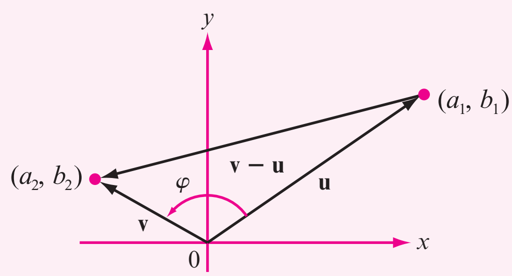


Figura 4.13
Triángulo con lados $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|$.

Ahora se colocan las representaciones de **u** y **v** con los puntos iniciales en el origen de manera que $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ (vea la figura 4.13). Entonces de la ley de los cosenos, $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi$. Pero

$$\overset{\text{de (4.2.2)}}{\downarrow} \qquad \overset{\text{teorema 2.2.1 iii), página 64}}{\downarrow}$$

$$|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 = (\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$$
$$= |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2$$

Así, después de restar $|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2$ en ambos lados de la igualdad, se obtiene $-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi$, y el teorema queda demostrado.

Observación. Haciendo uso del teorema 4.2.1 se puede definir el producto escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ como

$$\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi}$$

EJEMPLO 4.2.1 Cálculo del ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Solución $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -14 + 3 = -11$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-7)^2+1^2} = \sqrt{50}$. Así,

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{50}} = \frac{-11}{\sqrt{650}} \approx -0.431455497^{\dagger}$$

de manera que

$$\varphi = \cos^{-1}(-0.431455497) \approx 2.0169^{\ddagger} (\approx 115.6°)$$

Nota. Como $0 \le \varphi \le \pi$, $\cos^{-1}(\cos\varphi) = \varphi$.

Definición 4.2.2

Vectores paralelos

Dos vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son **paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π. Observe que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

EJEMPLO 4.2.2 Dos vectores paralelos

Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = (2, -3)$ y $\mathbf{v} = (-4, 6)$ son paralelos.

Solución $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \dfrac{-8-18}{\sqrt{13}\sqrt{52}} = \dfrac{-26}{\sqrt{13}(2\sqrt{13})} = \dfrac{-26}{2(13)} = -1.$

Por lo tanto, $\varphi = \pi$ (de manera que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas).

Teorema 4.2.3

Si $\mathbf{u} \ne \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.

Demostración

La prueba se deja como ejercicio (vea el problema 42 de esta sección).

† Estas cifras, al igual que otras en el libro, se obtuvieron con una calculadora.
‡ Al hacer este cálculo, asegúrese de que su calculadora esté en modo de radianes.

Definición 4.2.3

Vectores ortogonales

Los vectores **u** y **v** diferentes de cero son **ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

EJEMPLO 4.2.3 Dos vectores ortogonales

Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ son ortogonales.

Solución $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$. Esto implica que $\cos \varphi = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)} = 0$, y como φ está en el intervalo $[0, \pi]$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Teorema 4.2.4

Los vectores **u** y **v** diferentes de cero son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Demostración

Esta prueba también se deja como ejercicio (vea el problema 43 de esta sección).

Muchos problemas interesantes se refieren a la noción de la proyección de un vector sobre otro. Antes de definir esto se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.2.5

Sea **v** un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector **u** el vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

es ortogonal a **v**.

Demostración

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \left[\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}$$

$$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Los vectores **u**, **v** y **w** se ilustran en la figura 4.14.

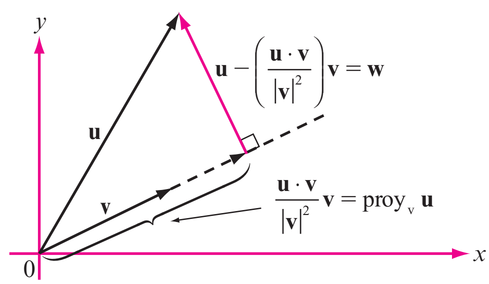


Figura 4.14

El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a **v**.

Definición 4.2.4

Proyección

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de **u** sobre **v** es un vector denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, que se define por

$$\boxed{\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}} \tag{4.2.4}$$

La **componente** de **u** en la dirección de **v** es $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, y es un escalar. **(4.2.5)**

Observe que $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario en la dirección de **v**.

Observación 1. De las figuras 4.14 y 4.15 y del hecho de que $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ se deduce que

v y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen:
i) la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > \mathbf{0}$ y
ii) direcciones opuestas si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < \mathbf{0}$.

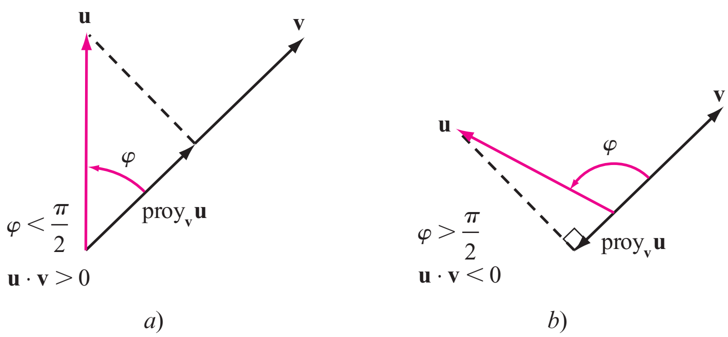


Figura 4.15

a) **v** y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$,
b) **v** y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen direcciones opuestas si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.

Observación 2. Se puede pensar en la $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ como la componente de **v** del vector **u**.

Observación 3. Si **u** y **v** son ortogonales, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, de manera que $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = 0$.

Observación 4. Una definición alternativa de la proyección es: si **u** y **v** son vectores diferentes de cero, entonces $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es el único vector con las siguientes propiedades:

i) $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es paralelo a **v**.
ii) $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es ortogonal a **v**.

EJEMPLO 4.2.4 Cálculo de una proyección

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

Solución $\text{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \left[\frac{5}{(\sqrt{2})^2}\right]\mathbf{v} = \left(\frac{5}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{5}{2}\right)\mathbf{j}$ (vea la figura 4.16).

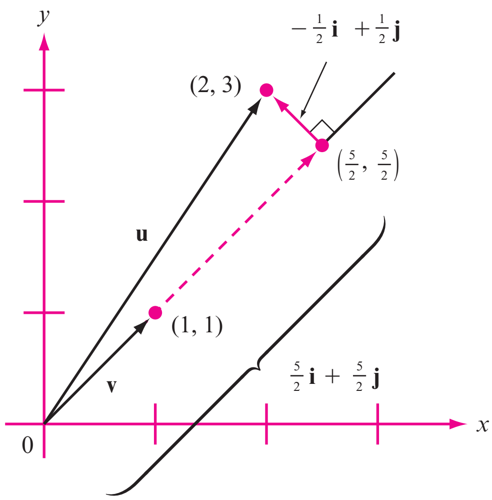


Figura 4.16

La proyección de (2, 3) sobre (1, 1) es $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

EJEMPLO 4.2.5 Cálculo de una proyección

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

Solución En este caso $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = -\frac{1}{2}$; así, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$ (vea la figura 4.17).

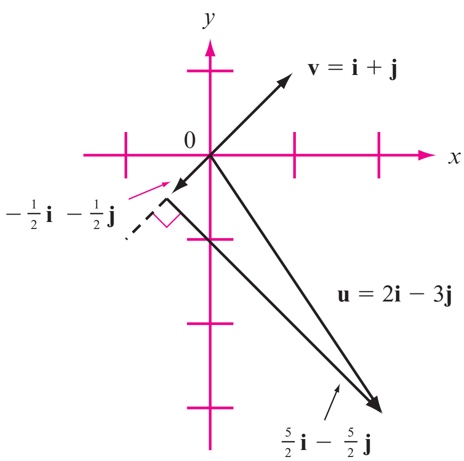


Figura 4.17

La proyección de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

Resumen 4.2

- Sean $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$; entonces el **producto escalar** o **producto punto** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, está dado por (p. 247)

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2$$

Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$, entonces

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

- El **ángulo** φ entre dos vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^2$ es el único número en $[0, \pi]$ que satisface (p. 247)

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

- Dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son **paralelos** si el ángulo entre ellos es 0 o π. Son paralelos si uno es un múltiplo escalar del otro. (p. 249)
- Dos vectores $\mathbb{R}^2$ son **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. Son ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero. (p. 251)
- Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^2$. La **proyección** de **u** sobre **v** es un vector, denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, que está definido por (p. 251)

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}$$

El escalar $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ se llama la **componente** de **u** en la dirección de **v**.

- $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ es ortogonal a **v**. (p. 251)

AUTOEVALUACIÓN 4.2

I) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ = ________.

a) 1 *b)* $\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2}$

c) 0 *d)* $\mathbf{i}+\mathbf{j}$

II) $(3, 4)\cdot(3, 2)$ = ________.

a) $(3 + 3)(4 + 2) = 36$ *b)* $(3)(3) + (4)(2) = 17$

c) $(3 - 3)(2 - 4) = 0$ *d)* $(3)(3) - (4)(2) = 1$

III) El coseno del ángulo entre $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ e $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ es ________.

a) $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ *b)* 0 *c)* $\sqrt{2}$ *d)* $\frac{1}{\sqrt{2+0}}$

IV) Los vectores $2\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ y $3\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{j}$ son ________.

a) Ni paralelos ni ortogonales *b)* Paralelos

c) Ortogonales *d)* Idénticos

V) $\text{Proy}_{\mathbf{w}}\mathbf{u}$ = ______________.

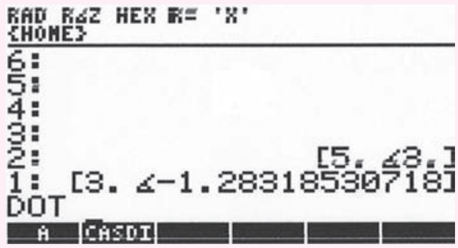
a) $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *b)* $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *c)* $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *d)* $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{u}|}\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

Respuestas a la autoevaluación

I) *c)* **II)** *b)* **III)** *b)* **IV)** *c)* **V)** *c)*

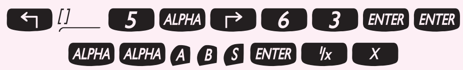
MANEJO DE LA CALCULADORA 4.2

Se puede obtener el producto punto entre dos vectores utilizando el comando D O T. Se necesita tener dos vectores de dimensiones compatibles en las posiciones 1 y 2 de la pila y escribir el comando DOT seguido de la tecla ENTER, esto si se quiere obtener el producto punto entre los vectores $\mathbf{v}_1$ con magnitud 5 y ángulo 3 radianes y el vector $\mathbf{v}_2$ con magnitud 3 y ángulo 5 radianes

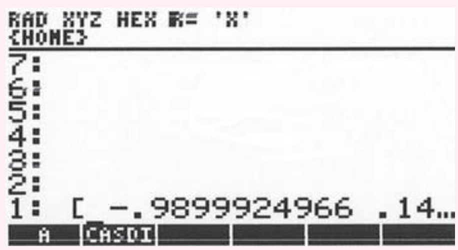


que da por resultado $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -6.2422025$.

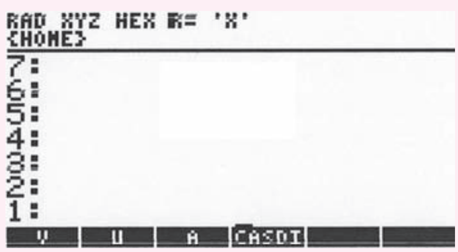
Si queremos obtener el vector unitario asociado a $\mathbf{v}_1$ (magnitud 4 y ángulo 3 radianes) podemos proceder como sigue:



que da por resultado



Para calcular el operador $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, si tenemos guardados vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:



Observe que aparecen las variables V y U. Finalmente, para encontrar la proyección

Problemas 4.2

De los problemas 1 al 11 calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

1. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-8\\9\end{pmatrix}$

2. $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}; \mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$

3. $\mathbf{u}=3\mathbf{i}; \mathbf{v}=-7\mathbf{j}$

4. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{u}=-5\mathbf{i}; \mathbf{v}=18\mathbf{j}$

6. $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{i}; \mathbf{v}=\beta\mathbf{j}; \alpha, \beta$ reales

7. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$

8. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}; \mathbf{v}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}$

9. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}; \mathbf{v}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}$

10. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{u}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}; \mathbf{v}=5\mathbf{i}-4\mathbf{j}$

12. Demuestre que para cualesquiera números reales α y β, los vectores $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=\beta\mathbf{i}-\alpha\mathbf{j}$ son ortogonales.

13. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores arbitrarios. Explique por qué el producto $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ *no está definido.*

De los problemas 14 al 20 determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después esboce cada par.

14. $\mathbf{u}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}; \mathbf{v}=-6\mathbf{i}-10\mathbf{j}$

15. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}-2\\9\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$

16. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}; \mathbf{v}=-9\mathbf{i}+6\mathbf{j}$

17. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}; \mathbf{v}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}$

18. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}-2\\9\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$

19. $\mathbf{u}=7\mathbf{i}; \mathbf{v}=-23\mathbf{j}$

20. $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}; \mathbf{v}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

21. Sean $\mathbf{u}=-3\mathbf{i}+6\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$. Determine α tal que:

a) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.
b) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.
c) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{4}$.
d) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{3}4$.

22. Sean $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}$. Determine α y β tales que:

a) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.
b) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.
c) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{4}$.
d) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\frac{\pi}{3}4$.

23. En el problema 21 demuestre que no existe un valor de α para el que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas.

24. Encuentre condiciones para α y β del problema 22 para que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tengan la misma dirección.

En los problemas 25 al 38 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

25. $\mathbf{u}=3\mathbf{i}; \mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$

26. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

27. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

28. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

29. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$

30. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

31. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

32. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$

33. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

34. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; α y β reales positivos

35. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}$

36. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

37. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} - \beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; α y β reales positivos con $\alpha > \beta$

38. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

39. Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Establezca una condición sobre a_1, b_1, a_2 y b_2 que asegure que $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ tengan la misma dirección.

40. En el problema 39 establezca una condición que asegure que $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tengan direcciones opuestas.

41. Sean $P = (2, 3)$, $Q = (5, 2)$, $R = (2, -5)$ y $S = (1, -2)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\,\overrightarrow{PQ}$.

42. Sean $P = (-1, 4)$, $Q = (3, -1)$, $R = (-7, -5)$ y $S = (1, 1)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PR}}\,\overrightarrow{QS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{QS}}\,\overrightarrow{PR}$.

43. Pruebe que los vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α. [***Sugerencia:*** Demuestre que $\cos\varphi = \pm 1$ si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$.]

44. Pruebe que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

45. Demuestre que el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es ortogonal a la recta $ax + by + c = 0$.

46. Demuestre que el vector $\mathbf{u} = b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ es paralelo a la recta $ax + by + c = 0$.

47. Un triángulo tiene vértices $(-1, 3)$, $(4, -22)$ y $(23, -6)$. Encuentre el coseno de cada ángulo.

48. Un triángulo tiene vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3). Encuentre el coseno de cada ángulo.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

*49. La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** establece que para cualesquiera números reales a_1, a_2, b_1 y b_2

$$\left\|\sum_{i=1}^{2} a_i b_i\right\| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2} b_i^2\right)}$$

Utilice el producto escalar para probar esta fórmula. ¿Bajo qué circunstancias se puede sustituir la desigualdad por una igualdad?

***50.** Pruebe que la distancia más corta entre un punto y una recta se mide por una línea que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.

51. Encuentre la distancia entre $P = (2, 3)$ y la recta que pasa por los puntos $Q = (-1, 7)$ y $R = (3, 5)$.

52. Encuentre la distancia entre $(3, 7)$ y la recta que va a lo largo del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ que pasa por el origen.

53. Sea A una matriz de 2×2 tal que cada columna es un vector unitario y que las dos columnas son ortogonales. Demuestre que A es invertible y que $A^{-1} = A^{\top}$ (A se conoce como **matriz ortogonal**).

Matriz ortogonal

En los problemas 54 al 58 utilice una calculadora para encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

54. $(0.231, 0.816)$ **55.** $(-91, 48)$ **56.** $(1\,295, -7\,238)$

57. $(-5.2361, -18.6163)$ **58.** $(-20\,192, 58\,116)$

En los problemas 59 al 62 utilice una calculadora para encontrar la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ y esboce $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

59. $\mathbf{u} = (3.28, -5.19)$, $\mathbf{v} = (-6.17, -11.526)$

60. $\mathbf{u} = (-0.8649, -0.0301)$, $\mathbf{v} = (-0.1649, 0.6277)$

61. $\mathbf{u} = (-5\,723, 4\,296)$, $\mathbf{v} = (17\,171, -9\,816)$

62. $\mathbf{u} = (37\,155, 42\,136)$, $\mathbf{v} = (25\,516, 72\,385)$

EJERCICIOS CON MATLAB 4.2

1. Para los pares de vectores de los problemas 24 a 32, verifique los vectores proyección calculados con lápiz y papel usando MATLAB (consulte la información de manejo de MATLAB anterior a los problemas de MATLAB 4.1).

2. (*Este problema usa el archivo prjtn.m*) El problema se refiere a la visualización de las proyecciones. A continuación se presenta la función prjtn.m.

M

```
function prjtn(u,v)
% PRJTN funcion proyeccion. Grafica la proyeccion del vector u
%       en la direccion del vector v
%
%       u: vector de 2x1
%       v: vector de 2x1
origen=[0;0];

P=(u'*v)/(v'*v)*v;

Ou=[origen,u];
Ov=[origen,v];
OP=[origen,P];
uMP=[u,P];

plot(Ou(1,:),Ou(2,:),'22b*',Ov(1,:),Ov(2,:),'22b*',...
   OP(1,:),OP(2,:),'-go',uMP(1,:),uMP(2,:),':m')
text(u(1)/2,u(2)/2,'\bf u');
text(u(1),u(2),'1')
```

```
text(v(1)/2,v(2)/2,'\bf v');
text(v(1),v(2),'2')
text(P(1)/2,P(2)/2,'\bf P');
text(P(1),P(2),'3')
a=axis;
axis([min(a([1,3]))-1,max(a([2,4]))+1,...
    min(a([1,3]))-1,max(a([2,4]))+1])
axis square
grid on
title('P es la proyeccion de u en v')
xlabel('u termina en 1, v termina en 2, P termina en 3')
```

Una vez que se ha escrito la función en un archivo con nombre prjtn dé el comando `doc prjtn` para tener una descripción de este archivo con extensión *m*.

Para los pares de vectores **u** y **v** dados en seguida:

a) Introduzca **u** y **v** como matrices de 2×1 y calcule **p** = proyección de **u** sobre **v**.
b) Dé el comando `prjtn(u, v)` (este archivo despliega **u** y **v** en la pantalla de gráficas. Oprima cualquier tecla y bajará una perpendicular del punto terminal de **u** hasta la recta determinada por **v**. Oprima cualquier tecla y se indicará el vector proyección).
c) Mientras observa las gráficas en la pantalla, verifique que el vector **p** graficado sea el vector calculado en *a*). Localice el vector (paralelo a) **u** − **p**. ¿Cuál es la relación geométrica entre **u** − **p** y **v**?

i) $\mathbf{u} = [2; 1]$ $\mathbf{v} = [3; 0]$ ii) $\mathbf{u} = [2; 3]$ $\mathbf{v} = [-3; 0]$

iii) $\mathbf{u} = [2; 1]$ $\mathbf{v} = [-1; 2]$ iv) $\mathbf{u} = [2; 3]$ $\mathbf{v} = [-1; -2]$

v) Elija sus propios vectores **u** y **v** (al menos tres pares).

4.3 Vectores en el espacio

Terna ordenada

Se ha visto que cualquier punto en el plano se puede representar como un par ordenado de números reales. De manera análoga, cualquier punto en el espacio se puede representar por una **terna ordenada** de números reales

$$(a, b, c) \tag{4.3.1}$$

$\mathbb{R}^3$
Origen
eje *x*
eje *y*
eje *z*

Los vectores de la forma (4.3.1) constituyen el espacio $\mathbb{R}^3$. Para representar un punto en el espacio, se comienza por elegir un punto en $\mathbb{R}^3$. A este punto se le denomina el **origen**, denotado por 0. Después se dibujan tres rectas perpendiculares entre sí, a las que se llama el **eje *x***, el **eje *y*** y el **eje *z***. Dichos ejes se pueden seleccionar de diferentes formas, pero la más común tiene los ejes x y y horizontales y el eje z vertical. Sobre cada eje se elige una dirección positiva y la distancia a lo largo de cada eje se mide como el número de unidades en esta dirección positiva a partir del origen.

Sistema derecho
Sistema izquierdo

Los dos sistemas básicos para dibujar estos ejes se describen en la figura 4.18. Si los ejes se colocan como en la figura 4.18*a*), entonces el sistema se denomina **sistema derecho**; si se colocan como en la figura 4.18*b*), se trata de un **sistema izquierdo**. En las figuras, las flechas indican la dirección positiva de los ejes. La razón para la elección de estos términos es la siguiente: en un sistema derecho, si coloca su mano derecha de manera que el dedo índice señale en la dirección positiva del eje x mientras que el medio apunta en la dirección positiva del eje y, entonces su pulgar apuntará en la dirección positiva del eje z. Este concepto se ilustra en la figura 4.19. La misma regla funciona para el sistema izquierdo con los dedos de la mano izquierda. En el resto de este libro se seguirá la práctica común de describir los ejes de coordenadas usando un sistema derecho.

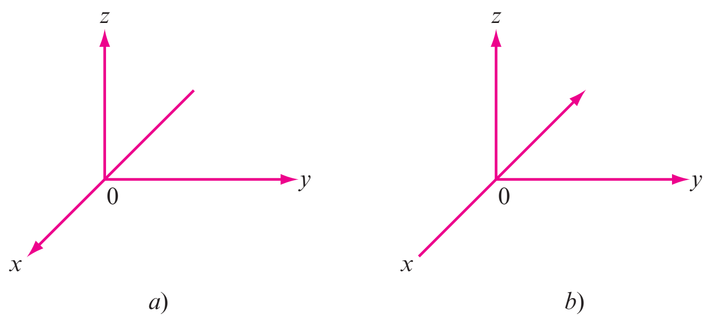


Figura 4.18
a) Un sistema derecho;
b) Un sistema izquierdo.

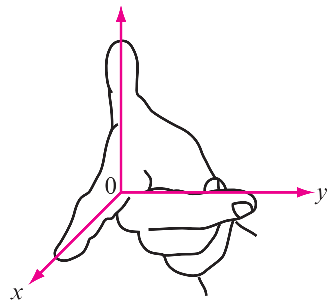


Figura 4.19
La mano derecha indica las direcciones de un sistema derecho.

Planos coordenados

Los tres ejes en nuestro sistema determinan tres **planos coordenados**, que se denominan plano xy, plano xz y plano yz. El plano xy contiene los ejes x y y y es simplemente el plano con el que se ha venido trabajando hasta ahora en la mayor parte del libro. Se puede pensar en los planos xz y yz de modo similar.

Al tener nuestra estructura construida de ejes coordenados y planos, podemos describir cualquier punto P en $\mathbb{R}^3$ de una sola manera:

$$\boxed{P = (x, y, z)} \tag{4.3.2}$$

en donde la primera coordenada x es la distancia dirigida del plano yz a P (medida en la dirección positiva del eje x a lo largo de una recta paralela al eje x), la segunda coordenada y es la distancia dirigida desde el plano xz hasta P (medida en la dirección positiva del eje y y a lo largo de una recta paralela al eje y), y la tercera coordenada z es la distancia dirigida desde el plano xy hasta P (medida en la dirección positiva del eje z y a lo largo de una recta paralela al eje z).

En este sistema, los tres planos coordenados dividen al espacio $\mathbb{R}^3$ en ocho **octantes**, de la misma forma que en $\mathbb{R}^2$ los ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes. El octante en el que los tres ejes coordenados son positivos siempre se selecciona como el primero.

Sistema de coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$

El sistema coordenado que acaba de establecerse con frecuencia se conoce como **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas**. Una vez que la noción de describir un punto en este sistema le resulte familiar, pueden extenderse muchas de las ideas a partir del plano.

Teorema 4.3.1

Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos en el espacio. Entonces la distancia $\overline{PQ}$ entre P y Q está dada por

$$\boxed{\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \tag{4.3.3}$$

Se pide al lector que pruebe este resultado en el problema 49.

EJEMPLO 4.3.1 Cálculo de la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$

Calcule la distancia entre los puntos (3, −1, 6) y (−2, 3, 5).

Solución $\overline{PQ} = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (-1-3)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{42}$

En las secciones 4.1 y 4.2 se desarrollaron las propiedades geométricas de los vectores en el plano. Dada la similitud entre los sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, no es una sorpresa que los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tengan estructuras muy similares. Ahora se desarrollará el concepto de un vector en el espacio. El desarrollo seguirá de cerca los avances de las últimas dos secciones y, por lo tanto, se omitirán algunos detalles.

Segmento de recta dirigido

Sean P y Q dos puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Entonces el **segmento de recta dirigido** $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que se extiende de P a Q. Dos segmentos de recta dirigidos son **equivalentes** si tienen la misma magnitud y dirección. Un **vector en** $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado, y cualquier segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ en ese conjunto se llama una **representación** del vector.

Vector en $\mathbb{R}^3$

Representación de un vector

Hasta aquí las definiciones son idénticas. Por conveniencia, se elige P en el origen para poder describir el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{0Q}$ mediante las coordenadas (x, y, z) del punto Q.

Magnitud de un vector

Entonces la **magnitud** de $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (del teorema 4.3.1).

EJEMPLO 4.3.2 Cálculo de la magnitud de un vector en $\mathbb{R}^3$

Sea $\mathbf{v} = (1, 3, -2)$. Encuentre $|\mathbf{v}|$.

Solución $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$.

Definición 4.3.1

Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores, y sea α un número real (escalar). Entonces se define

Suma de vectores y multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

y

$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

Ésta es la misma definición de suma de vectores y multiplicación por un escalar que se tenía; se ilustra en la figura 4.20.

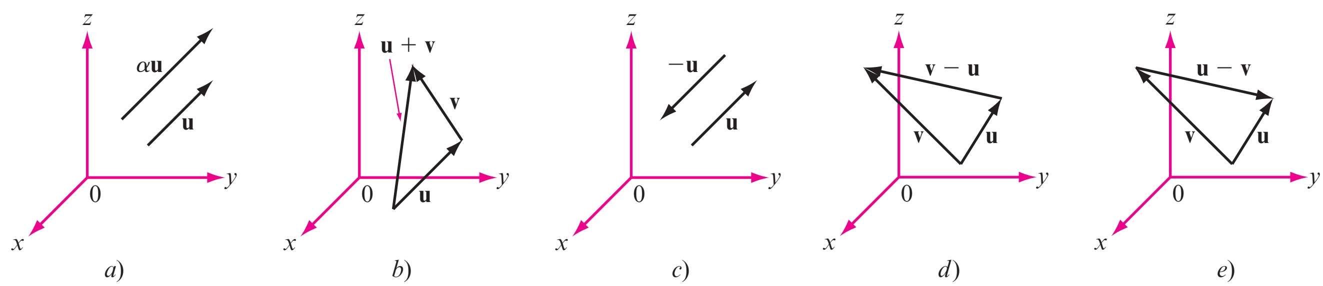


Figura 4.20
Ilustración de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^3$.

Un **vector unitario u** es un vector con magnitud 1. Si **v** es un vector diferente de cero, entonces $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que **v**.

Vector unitario

EJEMPLO 4.3.3 Cálculo de un vector unitario en $\mathbb{R}^3$

Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que $\mathbf{v} = (2, 4, -3)$.

Solución Como $\mathbf{v} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$ se tiene

$$\mathbf{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, -\frac{3}{\sqrt{29}}\right)$$

Ahora se puede definir formalmente la dirección de un vector en $\mathbb{R}^3$. No se puede definir como el ángulo θ que forma el vector con el eje x positivo ya que, por ejemplo, si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, por lo que existe un número infinito de vectores que forman un ángulo θ con el lado positivo del eje x, y estos vectores juntos forman un cono (vea la figura 4.21).

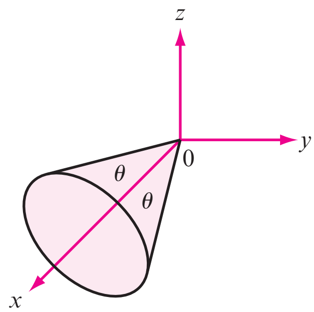


Figura 4.21
Todos los vectores que están en este cono forman un ángulo θ con la parte positiva del eje x.

Definición 4.3.2

Dirección en $\mathbb{R}^3$

La **dirección** de un vector **v** en $\mathbb{R}^3$ se define como el vector unitario $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

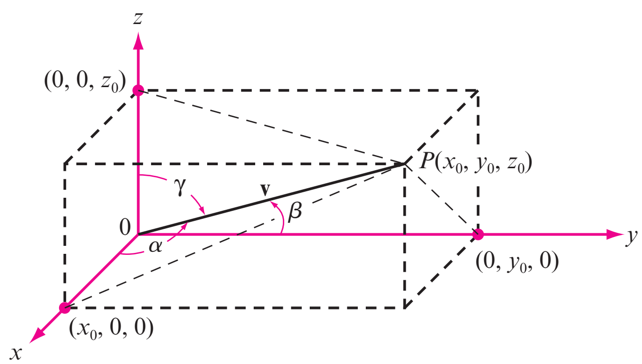


Figura 4.22
El vector **v** forma un ángulo α con el lado positivo del eje x, β con el lado positivo del eje y y γ con el eje positivo del eje z.

Observación

Se pudo haber definido la dirección de un vector **v** en $\mathbb{R}^2$ de esta manera, ya que si $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, entonces $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, donde θ es la dirección de **v**.

Es conveniente definir la dirección de un vector **v** en términos de algunos ángulos. Sea **v** el vector $\overrightarrow{0P}$ descrito en la figura 4.22. Definimos α como el ángulo entre **v** y el eje x positivo, β el ángulo entre **v** y el eje y positivo, y γ el ángulo entre **v** y el eje z positivo. Los ángulos α, β y γ se denominan **ángulos directores** del vector **v**. Entonces, de la figura 4.22,

Ángulos directores

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_0}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\beta = \frac{y_0}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\gamma = \frac{z_0}{|\mathbf{v}|}} \tag{4.3.4}$$

Si **v** es un vector unitario, entonces $|\mathbf{v}| = 1$ y

$$\boxed{\cos\alpha = x_0, \qquad \cos\beta = y_0, \qquad \cos\gamma = z_0} \tag{4.3.5}$$

Cosenos directores

Por definición, cada uno de estos tres ángulos cae en el intervalo de $[0, \pi]$. Los cosenos de estos ángulos se denominan **cosenos directores** del vector **v**. Observe, de la ecuación (4.3.4), que

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 1} \tag{4.3.6}$$

Si α, β y γ son tres números cualesquiera entre cero y π tales que satisfacen la condición (4.3.6), entonces determinan de manera única un vector unitario dado por $\mathbf{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Números directores

Observación. Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $|\mathbf{v}| \neq 1$, entonces los números a, b y c se llaman **números directores** del vector **v**.

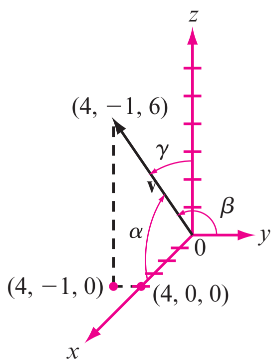


Figura 4.23

Los cosenos directores de $(4, -1, 6)$ son $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$.

EJEMPLO 4.3.4 Cálculo de los cosenos directores de un vector en $\mathbb{R}^3$

Encuentre los cosenos directores del vector $\mathbf{v} = (4, -1, 6)$.

Solución La dirección de **v** es $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{53}} = \left(\frac{4}{\sqrt{53}} - \frac{1}{\sqrt{53}}, \frac{6}{\sqrt{53}}\right)$. Entonces $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{53}} \approx 0.5494$, $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{53}} \approx -0.1374$ y $\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{53}} \approx 0.\,8242$. Con estos valores se usan tablas o una calculadora para obtener $\alpha \approx 56.7° \approx 0.989$ rad, $\beta \approx 97.9° \approx 1.71$ rad y $\gamma = 34.5° \approx 0.602$ rad. En la figura 4.23 se presenta un esbozo del vector, junto con los ángulos α, β y γ.

EJEMPLO 4.3.5 Cálculo de un vector en $\mathbb{R}^3$ dados su magnitud y cosenos directores

Encuentre un vector **v** de magnitud 7 cuyos cosenos directores son $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución Sea $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ y } \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Entonces **u** es un vector unitario ya que $|\mathbf{u}| = 1$. Así, la dirección de **v** está dada por **u** y $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = \left(\frac{7}{\sqrt{6}}, \frac{7}{\sqrt{3}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$.

Nota. Este problema se puede resolver porque $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$.

Es interesante observar que si **v** en $\mathbb{R}^2$ es un vector unitario, se puede escribir $\mathbf{v} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$, donde θ es la dirección de **v**, y entonces $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son los cosenos directores de **v**. En este caso, $\alpha = \theta$ y se define β como el ángulo que forma **v** con el eje y (vea la figura 4.24). Por lo tanto, $\beta = \left(\frac{\pi}{2}\right) - \alpha$, de manera que $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2 - \alpha}\right) = \operatorname{sen}\alpha$ y **v** se puede escribir en la forma de "cosenos directores"

$$\mathbf{v} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j}$$

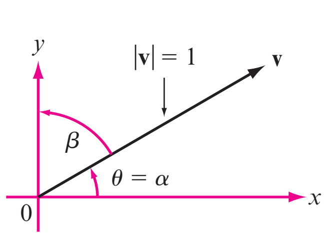


Figura 4.24

Si $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ y **v** es un vector unitario, entonces $v = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j}$.

En la sección 4.1 se observó que cualquier vector en el plano se puede escribir en términos de los vectores base **i** y **j**. Para extender esta idea a $\mathbb{R}^3$ se define

$$\boxed{\mathbf{i} = (1, 0, 0) \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)} \tag{4.3.7}$$

Aquí, **i**, **j** y **k** son vectores unitarios. El vector **i** está sobre el eje x, **j** sobre el eje y y **k** sobre el eje z. En la figura 4.25 se puede ver un bosquejo. Si $\mathbf{v} = (x, y, z)$ es cualquier vector en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{v} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Esto es, *cualquier vector* **v** *en* $\mathbb{R}^3$ *se puede escribir de manera única en términos de los vectores* **i**, **j** *y* **k**.

La definición de producto escalar en $\mathbb{R}^3$ es la definición que se presentó en la sección 2.2. Observe que $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$ e $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$.

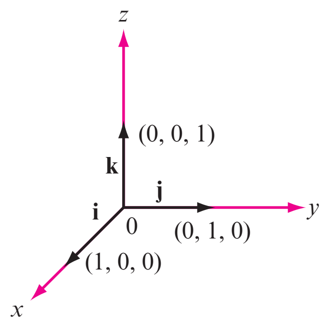


Figura 4.25
Los vectores base **i**, **j** y **k** en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.3.2

Si φ denota el ángulo positivo más pequeño entre dos vectores **u** y **v** diferentes de cero, se tiene

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}} \qquad \textbf{(4.3.8)}$$

Demostración

La prueba es casi idéntica a la prueba del teorema 4.2.2 de la página 248 y se deja al lector como ejercicio (vea el problema 53 de esta sección).

EJEMPLO 4.3.6 Cálculo del coseno del ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^3$

Calcule el coseno del ángulo entre $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 7$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{14}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{26}$, por lo que $\cos\varphi \frac{7}{\sqrt{(14)(26)}} = \frac{7}{\sqrt{364}} \approx 0.3669$ y $\varphi \approx 68.5° \approx 1.2$ rad.

Definición 4.3.3

Vectores paralelos y ortogonales

Dos vectores **u** y **v** diferentes de cero son:

i) **Paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π.

ii) **Ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Teorema 4.3.3

i) Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces **u** y **v** son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para algún escalar $\alpha \neq 0$.

ii) Si **u** y **v** son diferentes de cero, entonces **u** y **v** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Demostración

De nuevo la prueba es sencilla y se deja como ejercicio (vea el problema 54).

Ahora se dará la definición de la proyección de un vector sobre otro. Primero se establece el teorema análogo al teorema 4.2.5 (y cuya demostración es idéntica).

Teorema 4.3.4

Sea $\mathbf{v}$ un vector diferente de cero. Entonces, para cualquier otro vector $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

es ortogonal a $\mathbf{v}$.

Definición 4.3.4

Proyección

Proyección de u sobre v

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, está definida por

$$\boxed{\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}} \qquad (4.3.9)$$

Componente

La **componente** de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ está dada por $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. **(4.3.10)**

EJEMPLO 4.3.7 **Cálculo de una proyección en $\mathbb{R}^3$**

Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

Solución En este caso, $\dfrac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2} = \dfrac{2}{41}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \dfrac{2}{41}\mathbf{i} + \dfrac{4}{41}\mathbf{j} - \dfrac{12}{41}\mathbf{k}$. La componente de $\mathbf{u}$ en la dirección $\mathbf{v}$ es $\dfrac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{2}{\sqrt{41}}$.

Observe que, igual que en el plano, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$ y la dirección opuesta a la de $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.

Resumen 4.3

- El **segmento de recta dirigido** que se extiende de P a Q en $\mathbb{R}^3$ denotado por $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que va de P a Q. (p. 260)
- Dos segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^3$ son **equivalentes** si tienen la misma magnitud (longitud) y dirección. (p. 260)

- ***Definición geométrica de un vector***

  Un vector en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^3$ equivalentes a un segmento de recta dirigido dado. Una representación de un vector tiene su punto inicial en el origen y se denota por $\overrightarrow{0R}$. (p. 260)

- ***Definición algebraica de un vector***

  El **vector cero** es el vector (0, 0). En $\mathbb{R}^3$, un vector $\mathbf{v}$ es una **terna ordenada** de números reales (a, b, c); los números a, b y c son las componentes del vector $\mathbf{v}$. El **vector cero** en $\mathbb{R}^3$ es el vector (0, 0, 0). (p. 252)

- Las definiciones geométrica y algebraica de un vector en $\mathbb{R}^3$ se relacionan de la siguiente manera: si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces una representación de $\mathbf{v}$ es $\overrightarrow{0R}$, donde $R = (a, b, c)$.

- Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces la magnitud de $\mathbf{v}$ está dada por $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. (p. 252)

- ***Desigualdad del triángulo***

  En $\mathbb{R}^3$

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

- En $\mathbb{R}^3$, sean $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$; entonces $\mathbf{v} = (a, b, c)$ se puede escribir como

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

- Un **vector unitario** $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^3$ es un vector que satisface $|\mathbf{u}| = 1$. (p. 261)

  Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

- El **ángulo** φ entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ es el único número en $[0, \pi]$ que satisface

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

- Dos vectores en $\mathbb{R}^3$ son **paralelos** si el ángulo entre ellos es 0 o π. Son paralelos si uno es un múltiplo escalar del otro. (p. 264)

- Dos vectores $\mathbb{R}^3$ son **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. Son ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero. (p. 264)

- Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$. La **proyección** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es un vector, denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, que está definido por (p. 264)

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}$$

  El escalar $\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ se llama la **componente** de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$.

- $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. (p. 264)

- La **dirección** de un vector $\mathbf{v}$ $\mathbb{R}^3$ es el vector unitario (p. 261)

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

- Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces $\cos \alpha = \frac{a}{|\mathbf{v}|}$, $\cos \beta = \frac{b}{|\mathbf{v}|}$ y $\cos \gamma = \frac{c}{|\mathbf{v}|}$ se llaman **cosenos directores** de **v.** (p. 262)

AUTOEVALUACIÓN 4.3

I) Responda si la afirmación siguiente es falsa o verdadera. La práctica común seguida en este libro es desplegar los ejes *xyz* para $\mathbb{R}^3$ como un sistema derecho.

Respuesta: ____________________

II) La distancia entre los puntos (1, 2, 3) y (3, 5, −1) es ______.

a) $\sqrt{(1+2+3)^2+(3+5-1)^2}$ *b)* $\sqrt{2^2+3^2+2^2}$

c) $\sqrt{2^2+3^2+4^2}$ *d)* $\sqrt{4^2+7^2+2^2}$

III) El punto (0.3, 0.5, 0.2) está ______ la esfera unitaria.

a) en la tangente a *b)* sobre

c) dentro de *d)* fuera de

IV) $(x-3)^2+(y+5)^2+z^2=81$ es la ecuación de la esfera con __________.

a) centro 81 y radio (−3, 5, 0) *b)* radio 81 y centro (−3, 5, 0)

c) radio −9 y centro (3, −5, 0) *d)* radio 9 y centro (3, −5, 0)

V) $\mathbf{j}-(4\mathbf{k}-3\mathbf{i})=$ _______.

a) (1, −4, −3) *b)* (1, −4, 3)

c) (−3, 1, −4) *d)* (3, 1, −4)

VI) $(\mathbf{i}+3\mathbf{k}-\mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}-4\mathbf{j}+2\mathbf{i})=$ ________.

a) $2+4+3=9$ *b)* $(1+3-1)(1-4+2)=-3$

c) $1+12-2=-13$ *d)* $2-4-3=-5$

VII) El vector unitario en la misma dirección que $\mathbf{i}+3\mathbf{k}-\mathbf{j}$ es ____________.

a) $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *b)* $\frac{1}{5}(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$

c) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$ *d)* $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})$

VIII) El componente de **u** en la dirección **w** es

a) $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *b)* $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ *c)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\ \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|\ |\mathbf{w}|}$ *d)* $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\ \mathbf{u}}{|\mathbf{w}|\ |\mathbf{u}|}$

Respuestas a la autoevaluación

I) V **II)** *c)* **III)** *c)* **IV)** *d)*

V) *d)* **VI)** *a)* **VII)** *c)* **VIII)** *a)*

MANEJO DE LA CALCULADORA 4.3

Las instrucciones para calculadora presentadas en las secciones 4.1 y 4.2 para vectores en $\mathbb{R}^2$ se extienden a $\mathbb{R}^3$, con la observación que ahora se tienen coordenadas esféricas además de cilíndricas y cartesianas para representar vectores.

Problemas 4.3

De los problemas 1 al 6 encuentre la distancia entre los puntos:

1. (3, −4, 7); (3, −4, 9)
2. (3, −4, 1); (3, −4, 4)
3. (−2, 1, 3); (4, 1, 3)
4. $P=\begin{pmatrix}7\\9\\-8\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}9\\3\\-8\end{pmatrix}$
5. $P=\begin{pmatrix}-5\\1\\10\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}10\\-7\\10\end{pmatrix}$
6. $P=\begin{pmatrix}10\\0\\6\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}-8\\-2\\9\end{pmatrix}$

En los problemas 7 al 26 encuentre la magnitud y los cosenos directores del vector dado.

7. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
8. $\mathbf{v} = 3\mathbf{j}$
9. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
10. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i}$
11. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
12. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$
13. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
14. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
15. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
16. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
17. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
18. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
19. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
20. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
21. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
22. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
23. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
24. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
25. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
26. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
27. Los tres ángulos directores de cierto vector unitario son los mismos y están entre cero y $\frac{\pi}{2}$. ¿Cuál es el vector?
28. Encuentre un vector de magnitud 12 que tenga la misma dirección que el vector del problema 27.
29. Demuestre que no existe un vector unitario cuyos ángulos directores sean $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$.
30. Sea $P = (-2, 1, 4)$ y $Q = (3, 5, -8)$. Encuentre un vector unitario en la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$.
31. Sea $P = (3, 1, -3)$ y $Q = (3, 6, -3)$. Encuentre un vector unitario cuya dirección es opuesta a la de $\overrightarrow{PQ}$.
32. Utilizando P y Q del problema 31, encuentre todos los puntos R tales que $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$.

*33. Demuestre que el conjunto de puntos que satisfacen la condición del problema 32 y la condición $|\overrightarrow{P}| = 1$ forman un círculo.

34. **Desigualdad del triángulo** Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^3$, demuestre que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

Desigualdad del triángulo

35. ¿Bajo qué circunstancias puede sustituirse la desigualdad en el problema 34 por un signo de igualdad?

En los problemas 36 al 51, sea $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{t} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

36. Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

37. Calcule $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

38. Calcule $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$

39. Calcule $\mathbf{t} + 3\mathbf{w} - \mathbf{v}$

40. Calcule $2\mathbf{u} + 7\mathbf{w} + 5\mathbf{v}$

41. Calcule $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$

42. Calcule $2\mathbf{v} + 7\mathbf{t} - \mathbf{w}$

43. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

44. Calcule $(3\mathbf{t} - 2\mathbf{u}) \cdot (5\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$

45. Calcule $|\mathbf{w}|$

46. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}$

47. Calcule el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$

48. Calcule el ángulo entre $\mathbf{t}$ y $\mathbf{w}$

49. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$

50. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{w}$

51. Calcule $\mathbf{w} \cdot \text{proy}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{v}$

52. Pruebe el teorema 4.3.1. [***Sugerencia:*** Utilice el teorema de Pitágoras dos veces en la figura 4.26.]

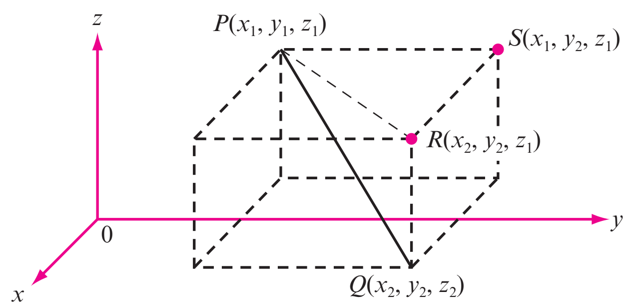


Figura 4.26

53. Pruebe el teorema 4.3.2.

54. Pruebe el teorema 4.3.3.

55. Pruebe el teorema 4.3.4.


Resuelva los siguientes problemas en una calculadora.

En los problemas 56 al 59 encuentre la magnitud y dirección de cada vector.

56. (0.2316, 0.4179, −0.5213)

57. (1.0933, 1.1093, −0.8637)

58. (17.3, 78.4, 28.6)

59. (0.0136, −0.0217, −0.0448)

En los problemas 60 al 63 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$.

60. $\mathbf{u} = (-15, 27, 83)$; $\mathbf{v} = (-84, -77, 51)$

61. $\mathbf{u} = (0.3192, 0.3129, -0.8649)$; $\mathbf{v} = (-0.0301, -0.1649, 0.6277)$

62. $\mathbf{u} = (5\,241, -3\,199, 2\,386)$; $\mathbf{v} = (1\,742, 8\,233, 9\,416)$

63. $\mathbf{u} = (0.24, 0.036, 0.055)$; $\mathbf{v} = (0.088, -0.064, 0.037)$

4.4 El producto cruz de dos vectores

Hasta el momento el único producto de vectores que se ha considerado ha sido el producto escalar o producto punto. Ahora se define un nuevo producto, llamado *producto cruz* (o *producto vectorial*), que está definido *sólo* en $\mathbb{R}^3$.

Nota histórica

El producto cruz fue definido por Hamilton en uno de una serie de artículos publicados en *Philosophical Magazine* entre 1844 y 1850.

Definición 4.4.1

Producto cruz

Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$. Entonces el **producto cruz (cruz vectorial)** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, es un nuevo vector definido por

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}} \tag{4.4.1}$$

Aquí el producto cruz parece estar definido de manera arbitraria. Es evidente que existen muchas maneras de definir un producto vectorial. ¿Por qué se escogió esta definición? La respuesta a esta pregunta se da en la presente sección demostrando algunas propiedades del producto cruz e ilustrando algunas de sus aplicaciones.

Nota

Note que el resultado del producto cruz es un vector, mientras que el resultado del producto escalar es un escalar.

EJEMPLO 4.4.1 **Cálculo del producto cruz de dos vectores**

Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Calcule $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Solución Usando la fórmula (4.4.1) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= [(-1)(-4) - (2)(3)]\mathbf{i} + [(2)(2) - (1)(-4)]\mathbf{j} + [(1)(3) - (-1)(2)]\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\end{aligned}$$

Nota. En este ejemplo, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (-2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = -2 - 8 + 10 = 0$. De manera similar, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Como se verá en breve, el producto cruz de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es siempre ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Antes de continuar el estudio de las aplicaciones del producto cruz se observa que existe una forma sencilla de calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ usando determinantes.

Teorema 4.4.1

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

Nota

En realidad no se tiene un determinante porque **i**, **j** y **k** no son números. Sin embargo, al usar la notación de determinantes, el teorema 4.4.1 ayuda a recordar cómo calcular un producto cruz.

Demostración

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}\end{aligned}$$

que es igual a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ según la definición 4.4.1.

EJEMPLO 4.4.2 **Uso del teorema 4.4.1 para calcular un producto cruz**

Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4-10)\mathbf{i} - (2-15)\mathbf{j} + (-4+12)\mathbf{k}$$
$$= -6\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

El siguiente teorema resume algunas propiedades del producto cruz. Su demostración se deja como ejercicio (vea los problemas 41 al 44 de esta sección).

Teorema 4.4.2

Sean **u**, **v** y **w** tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea α un escalar, entonces:

i) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (**propiedad anticonmutativa para el producto vectorial**).

iii) $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

iv) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (**propiedad distributiva para el producto vectorial**).

v) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (esto se llama **triple producto escalar** de **u**, **v** y **w**).

vi) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ (es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a **u** y a **v**).

vii) Si **u** ni **v** son el vector cero, entonces **u** y **v** son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

El inciso vi) del teorema 4.4.2 es el que se usa con más frecuencia. Se vuelve a establecer como sigue:

> El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**.

Vector normal

Regla de la mano derecha

Se sabe que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector ortogonal a **u** y **v**, pero siempre habrá *dos* vectores unitarios ortogonales a **u** y **v** (vea la figura 4.27). Los vectores **n** y $-\mathbf{n}$ (**n** por la letra inicial de **normal**) son ambos ortogonales a **u** y **v**. ¿Cuál tiene la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$? La respuesta está dada por la **regla de la mano derecha**. Si se coloca la mano derecha de manera que el índice apunte en la dirección de **u** y el dedo medio en la dirección de **v**, entonces el pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (vea la figura 4.28).

Una vez que se ha estudiado la dirección del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, la atención se dirige a su magnitud.

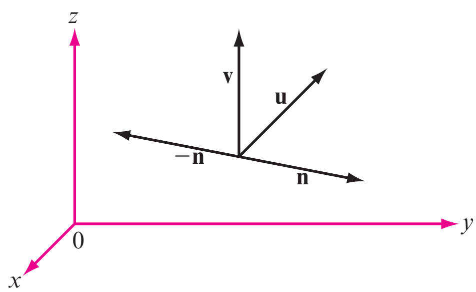


Figura 4.27
Existen exactamente dos vectores, **n** y −**n**, ortogonales a dos vectores no paralelos **u** y **v** en $\mathbb{R}^3$.

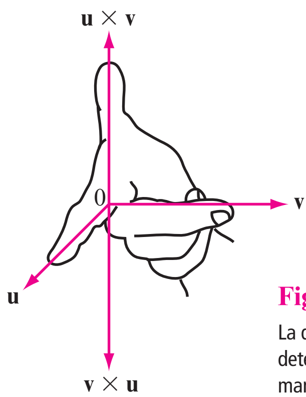


Figura 4.28
La dirección de **u** × **v** se puede determinar usando la regla de la mano derecha.

Teorema 4.4.3

Si φ es un ángulo entre **u** y **v**, entonces

$$\boxed{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi} \tag{4.4.2}$$

Demostración

No es difícil demostrar (comparando coordenadas) que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (vea el problema 40). Entonces, como $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \cos^2 \varphi$ (del teorema 4.3.2, página 263),

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \cos^2 \varphi = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\,(1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado después de sacar la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación. Observe que sen $\varphi \geq 0$ porque $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Existe una interpretación geométrica interesante del teorema 4.4.3. Los vectores **u** y **v** están dibujados en la figura 4.29 y se puede pensar que son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Entonces de la geometría elemental se ve que

El área del paralelogramo que tiene lados adyacentes **u** y **v** es igual a $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ **(4.4.3)**

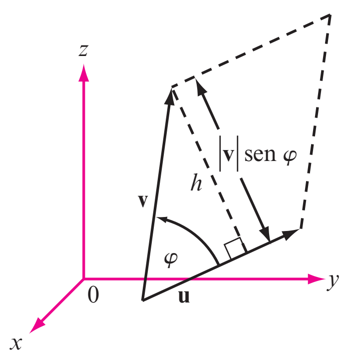


Figura 4.29

φ es el ángulo entre **u** y **v**. $\dfrac{h}{|\mathbf{v}|} = \operatorname{sen} \varphi$, de manera que $h = |\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi$.

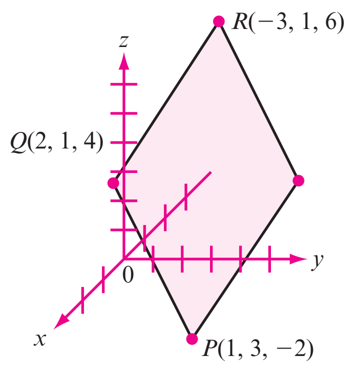


Figura 4.30

Un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 4.4.3 Cálculo del área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$

Encuentre el área del paralelogramo con vértices consecutivos en $P = (1, 3, -2)$, $Q = (2, 1, 4)$ y $R = (-3, 1, 6)$ (vea la figura 4.30).

Solución El paralelogramo.

$$\text{Área} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}| = |(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} + 2\mathbf{k})|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = |-4\mathbf{i} - 32\mathbf{j} - 10\mathbf{k}| = \sqrt{1\,140} \text{ unidades cuadradas.}$$

Interpretación geométrica de los determinantes de 2 × 2 (otra vez)

En la sección 3.1 se estudió el significado geométrico de un determinante de 2×2 (página 183). Ahora se observará el mismo problema. Haciendo uso del producto cruz se obtiene el resultado de la sección 3.1 en forma más sencilla. Sea A una matriz de 2×2 y sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores de dos componentes. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Estos vectores están dados en la figura 4.31.

Área generada

El **área generada** por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define como el área del paralelogramo dado en la figura. Se puede pensar que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ que están en el plano xy. Entonces $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, y

$$\text{área generada por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \left| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{matrix} \right|$$

$$= |(u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}| = |u_1 v_2 - u_2 v_1|^{\dagger}$$

Ahora sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$.

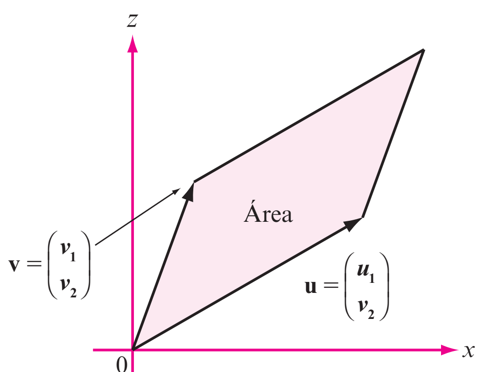


Figura 4.31

El área de la región sombreada es el área generada por **u** y **v**.

¿Cuál es el área generada por $\mathbf{u}'$ y $\mathbf{v}'$? Se calcula siguiendo los pasos anteriores.

† Observe que este es el valor absoluto de det $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & u_2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Área generada por } \mathbf{u}' \text{ y } \mathbf{v}' = |\mathbf{u}' \text{ y } \mathbf{v}'| = \left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_{11}u_1 + a_{12}u_2 & a_{21}u_1 + a_{22}u_2 & 0 \\ a_{11}v_1 + a_{12}v_2 & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$= |(a_{11}u_1 + a_{12}u_2)(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) - (a_{21}u_1 + a_{22}u_2)(a_{11}v_1 - a_{12}v_2)|$$

La manipulación algebraica verifica que la última expresión es igual a

$$|(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(u_1v_2 - u_2v_1)| = \pm\det A \text{ (área generada por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$$

Entonces (en este contexto): *el determinante tiene el efecto de multiplicar el área.* En el problema 48 se pide al lector que demuestre que de cierta forma un determinante de 3×3 tiene el efecto de multiplicar el volumen.

Interpretación geométrica del triple producto escalar

Sean **u**, **v** y **w** tres vectores que no están en el mismo plano. Entonces forman los lados de un **paralelepípedo** en el espacio (vea la figura 4.32). Calculemos su volumen. La base del paralelepípedo es un paralelogramo. Su área, de (3), es igual a $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

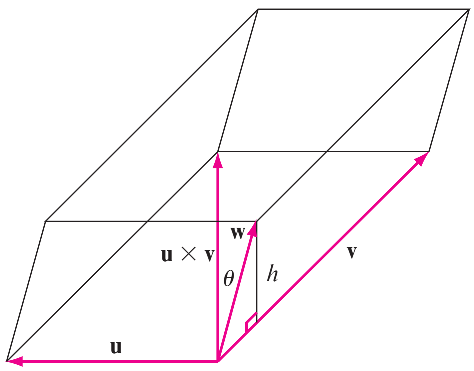


Figura 4.32
Tres vectores **u**, **v** y **w**, que no están en el mismo plano, determinarán un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$.

El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**, y por ello es ortogonal al paralelogramo determinado por **u** y **v**. La altura del paralelepípedo, h, se mide a lo largo del vector ortogonal al paralelogramo.

Del análisis de la proyección en la página 251, se ve que h es el valor absoluto de la componente de **w** en la dirección (ortogonal) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Así, de la ecuación (4.3.10) en la página 264:

$$h = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ en la dirección } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left|\frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}\right|$$

Entonces

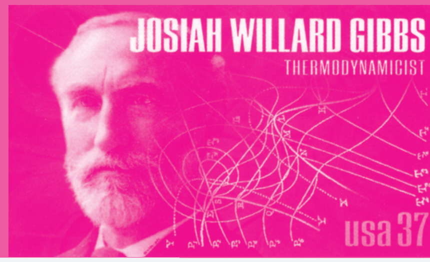
$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \text{área de base} \times \text{altura}$$

$$= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \left[\frac{|\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}\right] = |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$$

Es decir,

> El volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores **u**, **v** y **w** es igual a $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$. Dicho de otro modo, valor absoluto del triple producto escalar de **u**, **v** y **w**. **(4.4.4)**

Semblanza de...



Josiah Willard Gibbs
(*The Granger Collection, Nueva York*)

Josiah Willard Gibbs y los orígenes del análisis vectorial (1839-1903)

Como se ha observado anteriormente, el estudio de los vectores se originó con la invención de los cuaterniones de Hamilton. Hamilton y otros desarrollaron los cuaterniones como herramientas matemáticas para la exploración del espacio físico. Pero los resultados fueron decepcionantes porque vieron que los cuaterniones eran demasiado complicados para entenderlos con rapidez y aplicarlos fácilmente. Los científicos se dieron cuenta de que muchos problemas se podían manejar considerando la parte vectorial por separado y de este modo comenzó el análisis vectorial.

Este trabajo se debe principalmente al físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Como nativo de New Haven, Connecticut, Gibbs estudió matemáticas y física en la Universidad de Yale y recibió el grado de doctor en 1863. Posteriormente estudió matemáticas y física en París, Berlín y Heidelberg. En 1871, fue nombrado profesor de física en Yale. Era un físico original que realizó muchas publicaciones en el área fisicomatemática. El libro de Gibbs *Vector Analysis* apareció en 1881 y de nuevo en 1884. En 1902 publicó *Elementary Principles of Statistical Mechanics.* Los estudiantes de matemáticas aplicadas se encontraron con el singular **fenómeno de Gibbs** en las series de Fourier.

El libro pionero de Gibbs, *Vector Analysis* era en realidad un panfleto pequeño impreso para la distribución privada—en principio para que sus estudiantes lo usaran—. De cualquier forma, creó un gran entusiasmo entre aquellos que veían una alternativa a los cuaterniones, por lo que pronto el libro fue ampliamente difundido. Finalmente, el material se convirtió en un libro formal escrito por E. B. Wilson. El libro *Vector Analysis* de Gibbs y Wilson se basaba en la cátedra de Gibbs, y se publicó en 1901.

Todos los estudiantes de física elemental se encuentran con el trabajo de Gibbs. En la introducción a la física, un espacio vectorial se ve como un segmento de recta dirigido, o flecha. Gibbs dio definiciones de igualdad, suma y multiplicación de vectores; éstas son esencialmente las definiciones dadas en este capítulo. En particular, la parte vectorial de un cuaternión se escribía como $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, y ésta es la forma en que ahora se describen los vectores en $\mathbb{R}^3$.

Gibbs definió el producto escalar, inicialmente sólo para los vectores **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$$

Siguió a esto la definición más general. Gibbs aplicó el producto escalar en problemas referentes a la fuerza (recuerde, primero era físico). Si **F** es un vector de fuerza de magnitud $|F|$ que actúa en la dirección del segmento $\overrightarrow{0Q}$ (vea la figura 4.33), entonces, la efectividad de esta fuerza al empujar un objeto a lo largo del segmento $\overrightarrow{0P}$ (es decir, a lo largo del vector **u**) está dada por $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$.

Si $|\mathbf{u}| = 1$, entonces $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$ es la componente de **F** en la dirección de **u**. También el producto cruz tiene un significado físico.

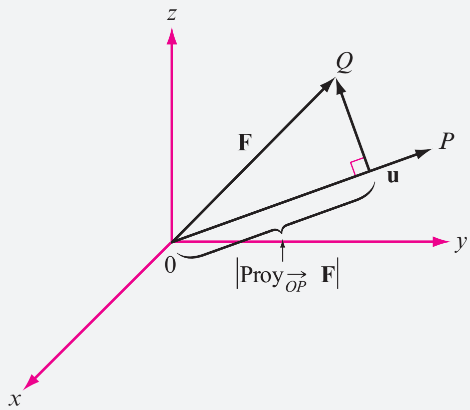


Figura 4.33

La efectividad de **F** en la dirección de $\overrightarrow{0P}$ es la componente de **F** en la dirección de $\overrightarrow{0P}$ ($=\mathbf{u}$) si $\mathbf{u} = 1$.

Suponga que un vector de fuerza **F** actúa en un punto *P* en el espacio en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$. Si **u** es el vector representado por $\overrightarrow{0P}$, entonces el momento de fuerza ejercido por **F** alrededor del origen es el vector $\mathbf{u}\times\mathbf{F}$ (vea la figura 4.34).

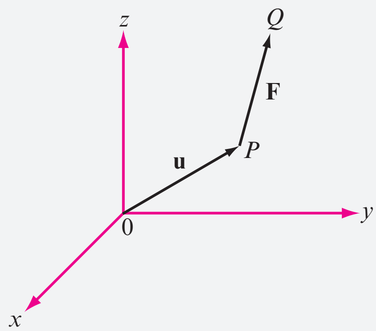


Figura 4.34

El vector $\mathbf{u}\times\mathbf{F}$ es el momento de la fuerza alrededor del origen.

Tanto el producto escalar como el producto cruz entre vectores aparecen frecuentemente en las aplicaciones físicas que involucran el cálculo de varias variables. Éstas incluyen las famosas ecuaciones de Maxwell en electromagnetismo.

Al estudiar matemáticas al final del siglo XX, no debemos perder de vista el hecho de que la mayor parte de las matemáticas modernas se desarrollaron para resolver problemas del mundo real. Los vectores fueron desarrollados por Gibbs y otros para facilitar el análisis de los fenómenos físicos. En ese sentido tuvieron un gran éxito.

Resumen 4.4

- Sea $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$. Entonces el **producto cruz** o **producto vectorial** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, está dado por (p. 269)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- ***Propiedades del producto cruz*** (p. 270)
  - **i)** $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
  - **ii)** $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
  - **iii)** $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.
  - **iv)** $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.
  - **v)** $(\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (el **triple producto escalar**).
  - **vi)** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.
  - **vii)** Si $\mathbf{u}$ ni $\mathbf{v}$ son el vector cero, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- Si φ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi$ = área del paralelogramo con lados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. (p. 271)

Autoevaluación 4.4

I) $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - \mathbf{k} \times \mathbf{i}$ = _____.

a) 0 *b)* $\mathbf{j}$ *c)* $2\mathbf{j}$ *d)* $-2\mathbf{j}$

II) $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$ = ______.

a) 0 *b)* $\mathbf{0}$ *c)* 1 *d)* $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

III) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ ______.

a) 0 *b)* $\mathbf{0}$ *c)* 1 *d)* no está definido

IV) $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k})$ = _______.

a) 0 *b)* $\mathbf{0}$ *c)* 1 *d)* $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

V) El seno del ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ es _______.

a) $\dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{w}|}$ *b)* $\dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}$

c) $\dfrac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}$ *d)* $|\mathbf{u} \times \mathbf{w}| - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|$

VI) $\mathbf{u} \times \mathbf{u}$ = _______.

a) $|\mathbf{u}|^2$ *b)* $\mathbf{1}$ *c)* 0 *d)* $\mathbf{0}$

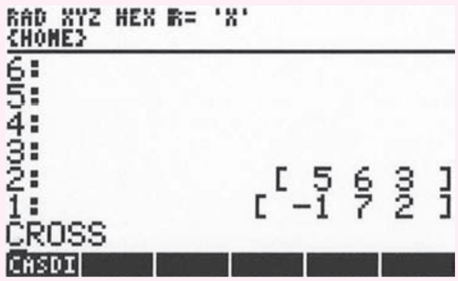
Respuestas a la autoevaluación

I) *d*) **II)** *c*) **III)** *b*) = vector cero [**Nota.** $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ *está* definido porque $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k} = \mathbf{0} = \mathbf{i} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{k})]$

IV) *d*) **V)** *a*) **VI)** *c*) = vector cero

MANEJO DE LA CALCULADORA 4.4

El producto cruz de dos vectores se puede encontrar directamente utilizando el comando CROSS; esto es, encuentre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, con $\mathbf{u} = (5, 6, 3)$ y $\mathbf{v} = (-1, 7, 2)$



que da por resultado $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-9, -13, 41)$.

Problemas 4.4

En los problemas 1 al 27 encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$
2. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
3. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
4. $\mathbf{u} = -7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
6. $\mathbf{u} = -5\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$
7. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$
8. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{k}$
9. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
10. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
11. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
12. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$
13. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
14. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
15. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
16. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
17. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
18. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
19. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
20. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
21. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
22. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
23. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = b\mathbf{i} + b\mathbf{j} + b\mathbf{k}$
24. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$
25. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
26. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
27. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

28. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ como a $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

29. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ como a $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

30. Utilice el producto cruz para encontrar el seno del ángulo φ entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

31. Utilice el producto escalar para calcular el coseno del ángulo φ entre los vectores del problema 30. Después demuestre que para los valores calculados, $\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

En los problemas 32 al 39 encuentre el área del paralelogramo con los vértices adyacentes dados.

32. $(1, -2, 3); (2, 0, 1); (0, 4, 0)$

33. $(-8, 0, 10), (-3, 2, -6), (5, -5, 0)$

34. $(-2, 1, 0); (1, 4, 2); (-3, 1, 5)$

35. $(7, -2, -3); (-4, 1, 6); (5, -2, 3)$

36. $(a, 0, 0); (0, b, 0); (0, 0, c)$

37. $(a, b, 0); (a, 0, b); (0, a, b)$

38. $(4, 8, 10); (1, -8, -7); (-5, 7, -5)$

39. $(7, -5, 9); (-3, -6, -5); (2, -1, -3)$

40. Demuestre que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$. [***Sugerencia:*** Escríbalo en términos de componentes.]

41. Utilice las propiedades 3.2.1, 3.2.4, 3.2.2 y 3.2.3 (en ese orden) para probar los incisos i), ii), iii) y iv) del teorema 4.4.2.

42. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso v) escribiendo las componentes de cada lado de la igualdad.

43. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso vi). [***Sugerencia:*** Utilice los incisos ii) y v) y la propiedad de que el producto escalar es conmutativo para demostrar que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.]

44. Pruebe el teorema 4.4.2 inciso vii). [***Sugerencia:*** Use el teorema 4.3.3, página 263, la propiedad 3.2.6, página 199, y la ecuación (4.4.2).]

45. Demuestre que si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\mathbf{w} = (a_3, b_3, c_3)$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

46. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $-7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

47. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$, donde $P = (2, 1, -1)$, $Q = (-3, 1, 4)$, $R = (-1, 0, 2)$ y $S = (-3, -1, 5)$.

****48.** El **volumen generado** por tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$ está definido como el volumen del paralelepípedo cuyos lados son $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (como en la figura 4.32). Sea A una matriz de 3×3 y sean $\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{w}$. Demuestre que

Volumen generado

Volumen generado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 = (\det A)$(volumen generado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$).

Esto muestra que el determinante de una matriz de 2×2 multiplica el área; el determinante de una matriz de 3×3 multiplica el volumen.

49. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el volumen generado por **u**, **v** y **w**.
b) Calcule el volumen generado por $A\mathbf{u}$, $A\mathbf{v}$ y $A\mathbf{w}$.
c) Calcule det A.
d) Demuestre que [volumen en el inciso *b*)] = ($\pm$det A) $\times$ [volumen en el inciso *a*)].

Triple producto cruz

50. El **triple producto cruz** de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ está definido como el vector $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Demuestre que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

En los problemas 51 al 54 calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ con calculadora.

51. $\mathbf{u} = (-0.346, -0.517, -0.824)$; $\mathbf{v} = (-0.517, 0.811, 0.723)$

52. $\mathbf{u} = (-15, 27, 83)$; $\mathbf{v} = (-84, -77, 51)$

53. $\mathbf{u} = (1.4193, 0.2916, 0.1978)$; $\mathbf{v} = (1.5877, -0.8045, 0.6966)$

54. $\mathbf{u} = (5\,241, -3\,199, 2\,386)$; $\mathbf{v} = (1\,742, 8\,233, 9\,416)$

EJERCICIOS CON MATLAB 4.4

1. Utilice MATLAB para calcular el producto cruz de los vectores dados en los problemas 1, 2, 3, 4 y 10 de esta sección. Verifique sus respuestas calculando los productos escalares de los resultados con los vectores individuales (¿qué valor deben tener estos productos escalares?). El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está definido como un vector de 3×1 dado por

```
[u(2)*v(3)-u(3)*v(2); -u(1)*v(3)+u(3)*v(1);
          u(1)*v(2)-v(1)*u(2)].
```

También puede utilizar el comando `cross`. Para más información utilice `doc cross` desde la pantalla de comandos de MATLAB.

2. *a*) Dé tres vectores aleatorios de 3×1, **u**, **v** y **w** (use `2*rand(3,1)-1`). Calcule $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, el producto escalar de **u** con $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (esto es `u'*cross(v,w)`). Sea B = [u v w]. Encuentre det(B). Compare det(B) con el producto escalar. Haga lo mismo para varios juegos de **u**, **v** y **w**. Formule una conclusión y después pruébela (lápiz y papel).

b) Sean **u**, **v** y **w** tres vectores aleatorios de 3×1 y sea A una matriz aleatoria de 3×3. Sea `A = round(10*(2*rand(3)-1))`. Calcule $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$, $|A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w})|$ y $|\det(A)|$. (En MATLAB, `abs(a)` dé $|\mathbf{a}|$.) Haga esto para varias matrices A hasta que pueda formular una conclusión respecto a las tres cantidades calculadas. Pruebe sus conclusiones para otras matrices aleatorias A.

Según sus conclusiones, ¿qué significado geométrico tiene $|\det(A)|$?

c) (*Lápiz y papel*) Usando *a*) demuestre que $A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}) = \det([A\mathbf{u}\ A\mathbf{v}\ A\mathbf{w}])$, donde A es una matriz de 3×3. Argumente por qué $[A\mathbf{u}\ A\mathbf{v}\ A\mathbf{w}] = AB$, donde $B = [\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}]$.

Ahora pruebe la conclusión obtenida en el inciso *b*).

4.5 Rectas y planos en el espacio

En el plano $\mathbb{R}^2$ se puede encontrar la ecuación de una recta si se conocen dos puntos sobre la recta, o bien un punto y la pendiente de la misma. En $\mathbb{R}^3$ la intuición dice que las ideas básicas son las mismas. Como dos puntos determinan una recta, debe poderse calcular la ecuación de una recta en el espacio si se conocen dos puntos sobre ella. De manera alternativa, si se conoce un punto y la dirección de una recta, también debe ser posible encontrar su ecuación.

Comenzamos con dos puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ sobre una recta L. Un vector paralelo a L es aquel con representación $\overrightarrow{PQ}$. Entonces,

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \tag{4.5.1}$$

es un vector paralelo a L. Ahora sea $R = (x, y, z)$ otro punto sobre la recta. Entonces $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$, que a su vez es paralelo a $\mathbf{v}$, de manera que por el teorema 4.3.3 en la página 263,

$$\overrightarrow{PR} = t\mathbf{v} \tag{4.5.2}$$

para algún número real t. Ahora vea la figura 4.35. Se tiene (en cada uno de los tres casos posibles)

$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR} \tag{4.5.3}$$

y al combinar (4.5.2) y (4.5.3) se obtiene

$$\boxed{\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}} \tag{4.5.4}$$

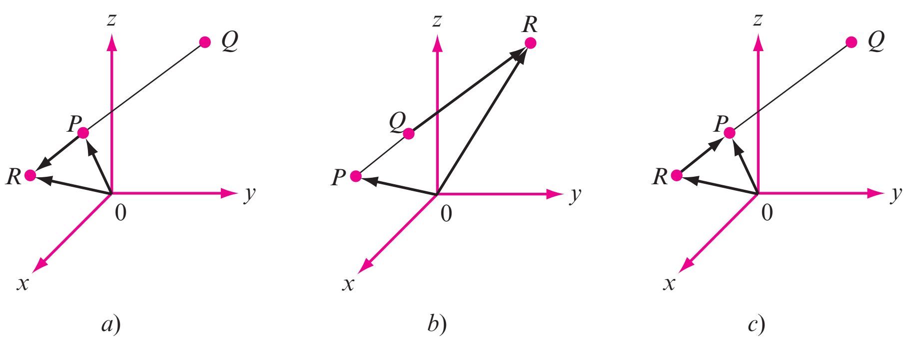


Figura 4.35
En los tres casos $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR}$.

Ecuación vectorial de la recta

La ecuación (4.5.4) se denomina **ecuación vectorial de la recta** L. Si R está sobre L, entonces (4.5.4) se satisface para algún número real t. Inversamente, si (4.5.4) se cumple, entonces invirtiendo los pasos, se ve que $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\mathbf{v}$, lo que significa que R está sobre L.

Si se extienden las componentes de la ecuación (4.5.4) se obtiene

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} + t(x_2 - x_1)\mathbf{i} + t(y_2 - y_1)\mathbf{j} + t(z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

o sea

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}} \tag{4.5.5}$$

Ecuaciones paramétricas de una recta

Las ecuaciones (4.5.5) se denominan **ecuaciones paramétricas de una recta**.

Por último, al despejar t en (4.5.5) y definir $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ y $z_2 - z_1 = c$, se encuentra que si $a, b, c \neq 0$,

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}} \qquad \textbf{(4.5.6)}$$

Ecuaciones simétricas de una recta

Las ecuaciones (4.5.6) se llaman **ecuaciones simétricas de una recta**. Aquí a, b y c son números directores del vector **v**. Por supuesto, las ecuaciones (4.5.6) son válidas sólo si a, b y c son diferentes de cero.

EJEMPLO 4.5.1 Determinación de las ecuaciones de una recta

Encuentre las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por los puntos $P = (2, -1, 6)$ y $Q = (3, 1, -2)$.

Solución Primero se calcula $\mathbf{v} = (3 - 2)\mathbf{i} + [1 - (-1)]\mathbf{j} + (-2 - 6)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$. Después, de (4.5.4), si $R = (x, y, z)$ está sobre la recta, se obtiene $\overrightarrow{0R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(\boldsymbol{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k})$, o sea,

$$x = 2 + t \qquad y = -1 + 2t \qquad z = 6 - 8t \qquad \text{ecuaciones paramétricas}$$

Por último, como $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$, las ecuaciones simétricas son

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{-8} \qquad \text{ecuaciones simétricas} \qquad \textbf{(4.5.7)}$$

Para verificar estas ecuaciones, se comprueba que $(2, -1, 6)$ y $(3, 1, -2)$ estén en realidad en la recta. Se tiene [después de insertar estos puntos en (4.5.7)]

$$\frac{2-2}{1} = \frac{-1+1}{2} = \frac{6-6}{-8} = 0$$
$$\frac{3-2}{1} = \frac{1+1}{2} = \frac{-2-6}{-8} = 1$$

Se pueden encontrar otros puntos en la recta. Por ejemplo, si $t = 3$, se obtiene

$$3 = \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{-8}$$

lo que lleva al punto $(5, 5, -18)$.

EJEMPLO 4.5.2 Obtención de las ecuaciones simétricas de una recta

Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $(1, -2, 4)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución Se usa la fórmula (4.5.6) con $P = (x_1, y_1, z_1) = (1, -2, 4)$ y **v** como se dio, de manera que $a = 1$, $b = 1$ y $c = -1$. Esto lleva a

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

¿Qué pasa si uno de los números directores a, b y c es cero?

EJEMPLO 4.5.3 Determinación de las ecuaciones simétricas de una recta cuando un número director es cero

Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que contiene los puntos $P = (3, 4, -1)$ y $Q = (-2, 4, 6)$.

Solución Aquí $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$ y $a = -5$, $b = 0$, $c = 7$. Entonces una representación paramétrica de la recta es $x = 3 - 5t$, $y = 4$ y $z = -1 + 7t$. Despejando t se encuentra que

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{z+1}{7} \quad \text{y} \quad y = 4$$

La ecuación $y = 4$ es la ecuación de un plano paralelo al plano xz, así que se obtuvo una ecuación de una recta en ese plano.

EJEMPLO 4.5.4 Determinación de las ecuaciones simétricas de una recta cuando dos números directores son cero

Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3, -2)$ y $Q = (2, -1, -2)$.

Solución Aquí $\mathbf{v} = -4\mathbf{j}$ de manera que $a = 0$, $b = -4$ y $c = 0$. Una representación paramétrica de la recta es, por la ecuación (4.5.5), dada por $x = 2$, $y = 3 - 4t$, $z = -2$. Ahora $x = 2$ es la ecuación de un plano paralelo al plano yz, mientras que $z = -2$ es la ecuación de un plano paralelo al plano xy. Su intersección es la recta $x = 2$, $z = -2$, que es paralela al eje y y pasa por los puntos $(2, 0, -2)$. De hecho, la ecuación $y = 3 - 4t$ dice, en esencia, que y puede tomar cualquier valor (mientras que x y z permanecen fijos).

Advertencia

Las ecuaciones paramétricas o simétricas de una recta no son únicas. Para ver esto, simplemente comience con otros dos puntos arbitrarios sobre la recta.

EJEMPLO 4.5.5 Ilustración de la falta de unicidad en las ecuaciones simétricas de una recta

En el ejemplo 4.5.1 la recta cuyas ecuaciones se encontraron contiene al punto $(5, 5, -18)$. Al elegir $P = (5, 5, -18)$ y $Q = (3, 1, -2)$, se encuentra que $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$, de manera que $x = 5 - 2t$, $y = 5 - 4t$ y $z = -18 + 16t$. (Observe que si $t = \frac{3}{2}$ se obtiene $(x, y, z) = (2, -1, 6)$.) Las ecuaciones simétricas son ahora

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+18}{16}$$

Note que $(-2, -4, 16) = -2(1, 2, -8)$.

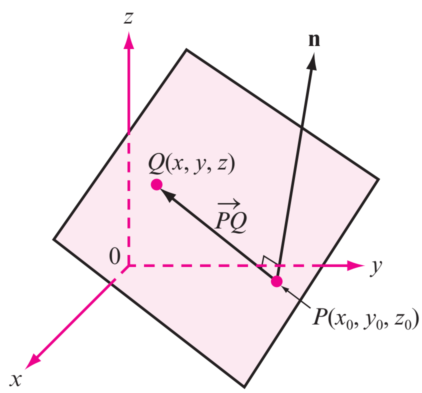


Figura 4.36
El vector **n** es ortogonal a todos los vectores en el plano.

Así como la ecuación de una recta en el espacio se obtiene especificando un punto sobre la recta y un vector *paralelo* a esta recta, pueden derivarse ecuaciones de un plano en el espacio especificando un punto en el plano y un vector ortogonal a todos los vectores en el plano. Este vector ortogonal se llama **vector normal** al plano y se denota por **n** (vea la figura 4.36).

Vector normal

Definición 4.5.1

Plano

Sea P un punto en el espacio y sea $\mathbf{n}$ un vector dado diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ constituye un **plano** en $\mathbb{R}^3$.

Notación. Por lo general, un plano se denota por el símbolo π.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo sobre un plano con vector normal $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Si $Q = (x, y, z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$.

Como $\overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{n}$, tenemos que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$. Pero esto implica que

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{4.5.8}$$

Una manera más común de escribir la ecuación de un plano se deriva de (4.5.8):

Ecuación cartesiana de un plano

$$ax + by + cz = d \tag{4.5.9}$$

donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot \mathbf{n}$

EJEMPLO 4.5.6 Determinación de la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y tiene un vector normal dado

Encuentre un plano π que pasa por el punto (2, 5, 1) y que tiene un vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución De (4.5.8) se obtiene directamente $(x - 2) - 2(y - 5) + 3(z - 1) = 0$, es decir,

$$x - 2y + 3z = -5 \tag{4.5.10}$$

Los tres planos coordenados se representan de la siguiente manera:

i) El *plano xy* pasa por el origen (0, 0, 0) y cualquier vector a lo largo del eje z es normal a él. El vector más simple es $\mathbf{k}$. Así, de (4.5.8) se obtiene $0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0$, lo que lleva a

$$z = 0 \tag{4.5.11}$$

como la ecuación del plano xy. (Este resultado no debe sorprender.)

ii) El *plano xz* tiene la ecuación

$$y = 0 \tag{4.5.12}$$

iii) El *plano yz* tiene la ecuación

$$x = 0 \tag{4.5.13}$$

El dibujo de un plano

No es difícil dibujar un plano.

Caso 1. *El plano es paralelo a un plano coordenado*. Si el plano es paralelo a uno de los planos coordenados, entonces la ecuación del plano es una de las siguientes:

$x = a$ (paralelo al plano yz)

$y = b$ (paralelo al plano xz)

$z = c$ (paralelo al plano xy)

Cada plano se dibuja como un rectángulo con lados paralelos a los otros dos ejes coordenados. La figura 4.37 presenta un bosquejo de estos tres planos.

Caso 2. *El plano interseca a cada eje coordenado*. Suponga que una ecuación del plano es

$$ax + by + cz = d \qquad \text{con } abc \neq 0.$$

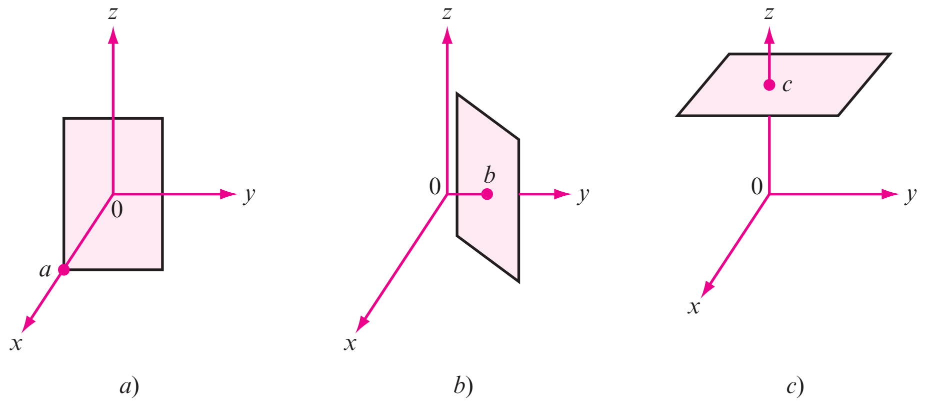


Figura 4.37
Tres planos paralelos a algún plano coordenado.

El cruce con el eje x es el punto $\left(\frac{d}{a}, 0, 0\right)$, el cruce con el eje y es el punto $\left(0, \frac{d}{b}, 0\right)$ y el cruce con el eje z es el punto $\left(0, 0, \frac{d}{c}\right)$.

Paso 1. Grafique los tres puntos de cruce.
Paso 2. Una los tres puntos de cruce para formar un triángulo.
Paso 3. Trace dos líneas paralelas, dibuje un paralelogramo cuya diagonal es el tercer lado del triángulo.
Paso 4. Extienda el paralelogramo dibujando cuatro líneas paralelas.

Este proceso se ilustra con la gráfica del plano $x + 2y + 3z = 6$ en la figura 4.38. Los cruces son (6, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 2).

Tres puntos no colineales determinan un plano ya que determinan dos vectores no paralelos que se intersecan en un punto (vea la figura 4.39).

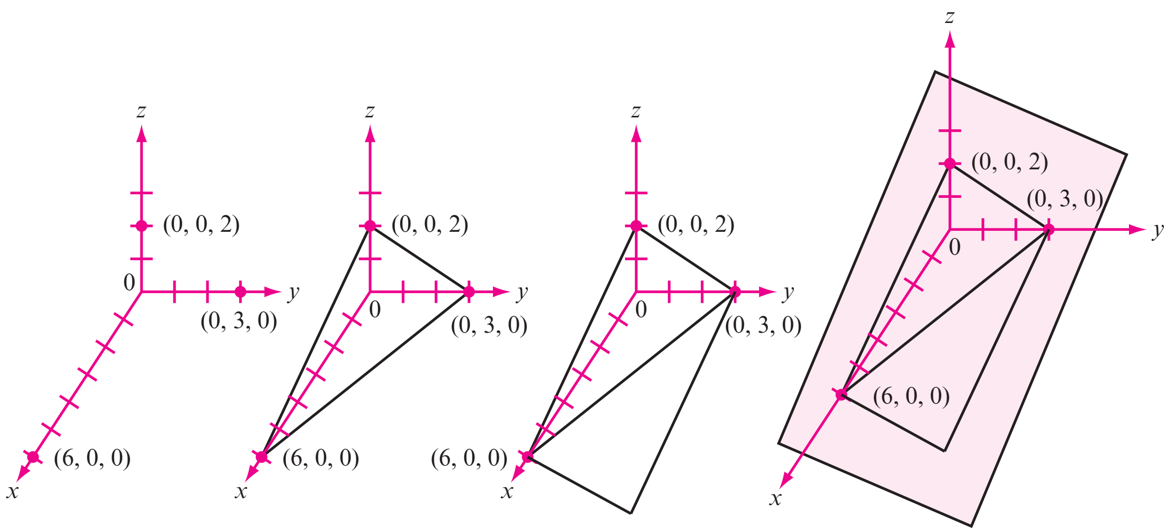


Figura 4.38
Dibujo del plano $x + 2y + 3z = 6$ en cuatro pasos.

EJEMPLO 4.5.7 Determinación de la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados

Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-2, 3, -1)$ y $R = (1, 0, 4)$.

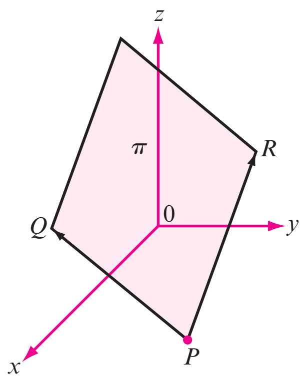


Figura 4.39

Los puntos P, Q y R determinan un plano siempre que no sean colineales.

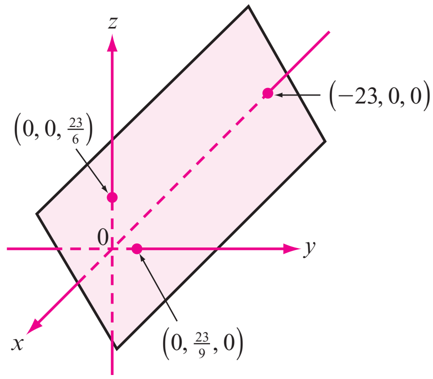


Figura 4.40

El plano $-x + 9y + 6z = 23$.

Solución Los vectores $\overrightarrow{PQ} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{QR} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ están en el plano y por lo tanto son ortogonales al vector normal, de manera que

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

y se obtiene, usando el punto P en la ecuación (4.5.8),

$$\pi: -(x - 1) + 9(y - 2) + 6(z - 1) = 0$$

es decir,

$$-x + 9y + 6z = 23$$

Observe que si se escoge otro punto, digamos Q, se obtiene la ecuación $-(x + 2) + 9(y - 3) + 6(z + 1) = 0$, que se reduce a $-x + 9y + 6z = 23$. La figura 4.40 presenta un bosquejo de este plano.

Definición 4.5.2

Planos paralelos

Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos, es decir, si el producto cruz de sus vectores normales es cero.

En la figura 4.41 se dibujaron dos planos paralelos.

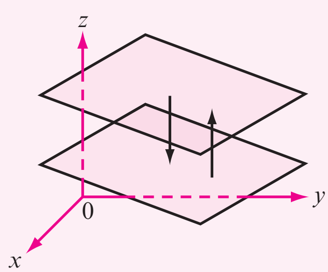


Figura 4.41

Se dibujaron dos planos paralelos.

Nota

Observe que dos planos paralelos pueden ser coincidentes. Por ejemplo, los planos $x + y + z = 1$ y $2x + 2y + 2z = 2$ son coincidentes (son el mismo).

EJEMPLO 4.5.8 Dos planos paralelos

Los planos π_1: $2x + 3y - z = 3$ y π_2: $-4x - 6y + 2z = 8$ son paralelos ya que $\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{n}_2 = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = -2\mathbf{n}_1$ (y $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$).

Si dos planos no son paralelos, entonces se intersecan en una línea recta.

EJEMPLO 4.5.9 Puntos de intersección de planos

Encuentre todos los puntos de intersección de los planos $2x - y - z = 3$ y $x + 2y + 3z = 7$.

Solución Las coordenadas de cualquier punto (x, y, z) sobre la recta de intersección de estos dos planos deben satisfacer las ecuaciones $x + 2y + 3z = 7$ y $2x - y - z = 3$. Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas mediante reducción por renglones se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \end{array}\right)$$

Por lo tanto, $y = \frac{11}{5} - \left(\frac{7}{5}\right)z$ y $x = \frac{13}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)z$. Por último, con $z = t$ se obtiene una representación paramétrica de la recta de intersección: $x = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}t$, $y = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}t$ y $z = t$.

A partir del teorema 4.4.2, inciso vi), en la página 270, se puede derivar un hecho interesante: si $\mathbf{w}$ está en el plano de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, lo que significa que $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$. Inversamente, si $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$, entonces $\mathbf{w}$ es perpendicular a $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, de manera que $\mathbf{w}$ se encuentra en el plano determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. De lo anterior se concluye que

> Tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son coplanares si y sólo si su producto triple escalar es cero.

Resumen 4.5

- Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos sobre una recta L en $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ y sea $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ y $c = z_2 - z_1$.

  Ecuación vectorial de una recta: $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}$. (p. 279)

  Ecuaciones paramétricas de una recta:
  $$x = x_1 + at$$
  $$y = y_1 + bt$$
  $$z = z_1 + ct$$

  Ecuaciones simétricas de una recta: $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$, si a, b y c son diferentes de cero. (p. 280)

- Sea P un punto en $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{n}$ un vector dado diferentes de cero; entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ constituye un plano en $\mathbb{R}^3$. El vector $\mathbf{n}$ se llama **vector normal** al plano. (p. 281)

- Si $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ y $P = (x_0, y_0, z_0)$, entonces la ecuación del plano se puede escribir (p. 282)

$$ax + by + cz = d$$

donde

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot \mathbf{n}$$

- El **plano *xy*** tiene la ecuación $z = 0$; el **plano *xz*** tiene la ecuación $y = 0$; el **plano *yz*** tiene la ecuación $x = 0$. (p. 282)
- Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos. Si los dos planos no son paralelos, entonces se intersecan en una línea recta. (p. 284)

AUTOEVALUACIÓN 4.5

I) La recta que pasa por los puntos (1, 2, 4) y (5, 10, 15) satisface la ecuación ______.

a) $(x, y, z) = (1, 2, 4) + t(4, 8, 11)$

b) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-1}{11}$

c) $(x, y, z) = (5, 10, 15) + s(4, 8, 11)$

d) $\frac{x-5}{4} = \frac{y-10}{8} = \frac{z-15}{11}$

II) La recta que pasa por el punto $(7, 3, -4)$ y es paralela al vector $\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ satisface la ecuación ________.

a) $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+4}{2}$

b) $(x, y, z) = (1, 5, 2) + t(7, 3, -4)$

c) $\frac{x-7}{8} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+4}{-2}$

d) $(x, y, z) = (7, 3, -4) + s(8, 8, -2)$

III) La ecuación vectorial $(x, y, z) - (3, 5, -7) = t(-1, 4, 8)$ describe _________.

a) la recta que pasa por $(-1, 4, 8)$ y es paralela a $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
b) la recta que pasa por $(-3, -5, 7)$ y es paralela a $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
c) la recta que pasa por $(3, 5, -7)$ y es perpendicular a $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
d) la recta que pasa por $(3, 5, -7)$ y es paralela a $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

IV) El plano que pasa por $(5, -4, 3)$ que es ortogonal a $\mathbf{j}$ satisface ________.

a) $y = -4$

b) $(x - 5) + (z - 3) = 0$

c) $x + y + z = 4$

d) $5x - 4y + 3z = -4$

V) El plano que pasa por $(5, -4, 3)$ que es ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ satisface __________.

a) $y = -4$

b) $(x - 5)/1 = (y + 4)/1 = (z - 3)/1$

c) $x + y + z = 4$

d) $5x - 4y + 3z = -4$

VI) El vector ____________ es ortogonal al plano que satisface $2(x - 3) - 3(y + 2) + 5(z - 5) = 0$.

a) $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

b) $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

c) $(2 - 3)\mathbf{i} + (-3 + 2)\mathbf{j} + (5 - 5)\mathbf{k}$

d) $(2)(-3)\mathbf{i} + (-3)(2)\mathbf{j} + (5)(-5)\mathbf{k}$

VII) El plano que satisface $6x + 18y - 12z = 17$ es ________ al plano $-5x - 15y + 10z = 29$.

a) idéntico
b) paralelo
c) ortogonal
d) ni paralelo ni ortogonal

Respuestas a la autoevaluación

I) *a*), *b*), *c*), *d*) **II)** *a*) **III)** *d*) **IV)** *a*)
V) *c*) **VI)** *b*) **VII)** *b*)

Problemas 4.5

En los problemas 1 al 19 encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta indicada.

1. Contiene a $(1, -1, 1)$ y $(-1, 1, -1)$
2. Contiene a $(1, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$
3. Contiene a $(7, 9, -8)$ y $(9, 3, -8)$
4. Contiene a $(2, 3, -4)$ y $(3, 2, 1)$
5. Contiene a $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$
6. Contiene a $(-5, 1, 10)$ y $(10, -7, 10)$
7. Contiene a $(1, 2, 3)$ y $(-1, 2, -2)$
8. Contiene a $(2, 2, 1)$ y es paralela a $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
9. Contiene a $(-1, -6, 2)$ y es paralela a $4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
10. Contiene a $(10, 0, 6)$ y es paralela a $-8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
11. Contiene a $(-2, 3, -2)$ y es paralela a $4\mathbf{k}$
12. Contiene a $(-2, 3, 7)$ y es paralela a $3\mathbf{j}$
13. Contiene a $(6, 10, 3)$ y es paralela a $-10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
14. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{i}$
15. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{j} + e\mathbf{k}$
16. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{k}$
17. Contiene a $(-2, 3, 7)$ y es ortogonal a $3\mathbf{j}$
18. Contiene a $(4, 1, -6)$ y es paralela a $\left(\frac{x-2}{3}\right) = \left(\frac{y+1}{6}\right) = \left(\frac{z-5}{2}\right)$
19. Contiene a $(4, 5, 5)$ y es paralela a $\frac{x-8}{-2} = \frac{y+9}{3} = \frac{z+2}{-7}$
20. Sea L_1 la recta dada por

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

y sea L_2 la recta dada por

$$\frac{x - x_1}{a_2} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{c_2}$$

Demuestre que L_1 es ortogonal a L_2 si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

21. Demuestre que las rectas

$$L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

son ortogonales.

22. Demuestre que las rectas

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{3} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-8}{9}$$

son paralelas.

La rectas en $\mathbb{R}^3$ que no tienen la misma dirección no necesitan tener un punto en común.

23. Demuestre que las rectas L_1: $x = 1 + t$, $y = -3 + 2t$, $z = -2 - t$ y L_2: $x = 17 + 3s$, $y = 4 + s$, $z = -8 - s$ tienen el punto $(2, -1, -3)$ en común.

24. Demuestre que las rectas L_1: $x = 2 - t$, $y = 1 + t$, $z = -2t$ y L_2: $x = 1 + s$, $y = -2s$, $z = 3 + 2s$ *no* tienen un punto en común.

25. Sea L dada en forma vectorial $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}$. Encuentre un número t tal que $\overrightarrow{0R}$ sea perpendicular a $\mathbf{v}$.

De los problemas 26 al 29, utilice el resultado del problema 25 para encontrar la distancia entre la recta L (que contiene a P y es paralela a $\mathbf{v}$) y el origen.

26. $P = (2, 1, -4)$; $\quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

27. $P = (-3, 1, 2)$; $\quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

28. $P = (-5, 3, 1)$; $\quad \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

29. $P = (-2, -5, -4)$; $\quad \mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

De los problemas 30 al 35, encuentre una recta L ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto dado.

30. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z+1}{-3}; \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z+3}{6}; (0, 0, 0)$

31. $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y+3}{-7} = \dfrac{z+1}{3}; \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+3}{-2}; (-4, 7, 3)$

32. $x = 3 - 2t, y = 4 + 3t, z = -7 + 5t; x = -2 + 4s, y = 3 - 2s, z = 3 + s; (-2, 3, 4)$

33. $x = 4 + 10t, y = -4 - 8t, z = 3 + 7t; x = -2t, y = 1 + 4t, z = -7 - 3t; (4, 6, 0)$

34. $\dfrac{x+2}{-10} = \dfrac{y-7}{-8} = \dfrac{z-1}{7}; \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{9}; (4, -10, -5)$

35. $\dfrac{x+2}{6} = \dfrac{y-7}{6} = \dfrac{z-1}{-7}; x = 4, 2 - y = \dfrac{z-1}{3}; (-10, -1, -2)$

***36.** Calcule la distancia entre las rectas

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-4}{-4} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+2}{1}$$

[***Sugerencia:*** La distancia se mide a lo largo del vector $\mathbf{v}$ que es perpendicular a L_1 y a L_2. Sea P un punto en L_1 y Q un punto en L_2. Entonces la longitud de la proyección de $\overrightarrow{PQ}$ sobre $\mathbf{v}$ es la distancia entre las rectas, medida a lo largo del vector que es perpendicular a ambas.]

***37.** Encuentre la distancia entre las rectas

$$L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{1}$$

De los problemas 38 al 55, encuentre la ecuación del plano.

38. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i}$

39. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{j}$

40. $P = (4, 5, -5)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

41. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

42. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

43. $P = (-8, 0, 10)$; $\mathbf{n} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

44. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

45. $P = (2, -1, 6)$; $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

46. $P = (5, -5, 0)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

47. $P = (-3, 11, 2)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

48. $P = (0, -1, -2)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

49. $P = (1, -8, -7)$; $\mathbf{n} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

50. Contiene a $(1, 2, -4)$, $(2, 3, 7)$ y $(4, -1, 3)$

51. Contiene a $(1, -2, -4)$, $(3, 3, 3)$ y $(0, 0, -1)$

52. $(7, -5, 9)$, $(-3, -6, -5)$, $(2, -1, -3)$

53. Contiene a $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$

54. Contiene a $(1, 0, -4)$, $(3, 4, 0)$ y $(0, -2, 1)$

55. $(7, 2, 1)$, $(9, -4, 5)$, $(5, -3, 1)$

Planos ortogonales

Dos planos son **ortogonales** si sus vectores normales son ortogonales. De los problemas 56 al 62 determine si los planos dados son paralelos, ortogonales, coincidentes (es decir, el mismo) o ninguno de los anteriores.

56. π_1: $x + y + z = 2$; π_2: $2x + 2y + 2z = 4$

57. π_1: $x + 2y + 3z = 1$; π_2: $2x + 4y + 6z = 2$

58. π_1: $9x + 9y - z = 143$; π_2: $x - y - 10z = -56$

59. π_1: $2x - y + z = 3$; π_2: $x + y - z = 7$

60. π_1: $2x - y + z = 3$; π_2: $x + y + z = 3$

61. π_1: $4x - y + 7z = 34$; π_2: $4x + 5y - z = -75$

62. π_1: $3x - 2y + 5z = 0$; π_2: $x + 4y - 6z = 0$

De los problemas 63 al 66, encuentre la ecuación del conjunto de todos los puntos de intersección de los dos planos.

63. π_1: $7x - 7y - z = 134$; π_2: $8x - 10y + 10z = 58$

64. π_1: $3x - y + 4z = 3$; π_2: $-4x - 2y + 7z = 8$

65. π_1: $3x - 2y + 5z = 4$; π_2: $x + 4y - 6z = 1$

66. π_1: $-2x - y + 17z = 4$; π_2: $2x - y - z = -7$

***67.** Sea π un plano, P un punto sobre el plano, $\mathbf{n}$ un vector normal al plano y Q un punto fuera del plano (vea la figura 4.42). Demuestre que la distancia perpendicular D de Q al plano está dada por

$$D = |\text{proy}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{PQ}| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

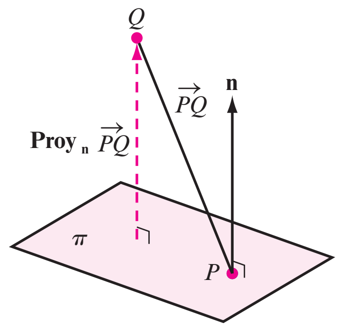


Figura 4.42

De los problemas 68 al 71 encuentre la distancia del punto dado al plano dado.

68. $(-7, -5, -7)$; $9x + 2y + 5z = 97$

69. $(-7, -2, -1)$; $-2x + 8z = -5$

70. $(-3, 5, -1)$; $-3x + 6z = -5$

71. $(3, -3, 0)$; $8x - 8y - 2z = 50$

72. Pruebe que la distancia entre el plano $ax + by + cz = d$ y el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ángulo entre dos planos

El **ángulo entre dos planos** está definido como el ángulo agudo[†] entre sus vectores normales. De los problemas 73 al 75 encuentre el ángulo entre los dos planos

73. Los planos del problema 63

74. Los planos del problema 64

75. Los planos del problema 66

Representación paramétrica de un plano

76.** Sean **u** y **v** dos vectores no paralelos diferentes de cero en un plano π. Demuestre que si **w** es cualquier otro vector en π, entonces existen escalares α y β tales que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$. Esto se denomina **representación paramétrica** del plano π. [Sugerencia:*** Dibuje un paralelogramo en el que $\alpha\mathbf{u}$ y $\beta\mathbf{v}$ formen lados adyacentes y el vector diagonal sea **w**.]

Vectores coplanares

***77.** Tres vectores **u**, **v** y **w** se llaman **coplanares** si están todos en el mismo plano π. Demuestre que si **u**, **v** y **w** pasan todos a través del origen, entonces son coplanares si y sólo si el triple producto escalar es igual a cero: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.

De los problemas 78 al 84 determine si los tres vectores de posición dados (es decir, con punto inicial en el origen) son coplanares. Si lo son, encuentre la ecuación del plano que los contiene.

78. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

79. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

80. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -2\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

81. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

82. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

83. $\mathbf{u} = 9\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

84. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

[†] Recuerde que un ángulo agudo α es un ángulo entre 0° y 90°; es decir, entre 0° y $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 al 9 encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

1. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **2.** $\mathbf{v} = (8, 10)$ **3.** $\mathbf{v} = (-9, 10)$

4. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **5.** $\mathbf{v} = \left(2, -2\sqrt{3}\right)$ **6.** $\mathbf{v} = (3, -10)$

7. $\mathbf{v} = \left(3, -\sqrt{5}\right)$ **8.** $\mathbf{v} = -12\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ **9.** $\mathbf{v} = (-6, 1)$

En los ejercicios 10 al 14 escriba el vector $\mathbf{v}$, representado por $\overrightarrow{PQ}$, en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Bosqueje $\overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v}$.

10. $P = (2, 3)$; $Q = (4, 5)$ **11.** $P = (1, -2)$; $Q = (7, 12)$

12. $P = (10, 10)$; $Q = (-7, 10)$ **13.** $P = (-1, -6)$; $Q = (3, -4)$

14. $P = (-1, 3)$; $Q = (3, -1)$

En los problemas 15 al 18, con $\mathbf{u} = (4, -2)$ y $\mathbf{v} = (-3, 1)$ encuentre

15. $-3\mathbf{v}$ **16.** $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

17. $5\mathbf{v} + 4\mathbf{u}$ **18.** $-2(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

En los problemas 19 al 22, con $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ encuentre

19. $5\mathbf{u}$ **20.** $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

21. $2\mathbf{v} + 4\mathbf{u}$ **22.** $-5\mathbf{u} + 6\mathbf{v}$

En los ejercicios 23 al 31 encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

23. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ **24.** $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ **25.** $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

26. $\mathbf{v} = 11\mathbf{i}$ **27.** $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **28.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

29. $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$ **30.** $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ **31.** $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

32. Si $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ encuentre sen θ y cos θ, donde θ es la dirección de $\mathbf{v}$.

33. Encuentre un vector unitario con la dirección opuesta a $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

34. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

35. Encuentre un vector unitario con la dirección opuesta a la de $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

En los ejercicios 36 al 40 encuentre un vector $\mathbf{v}$ que tenga la magnitud y dirección dadas.

36. $|\mathbf{v}| = 2$; $\theta = \frac{\pi}{3}$ **37.** $|\mathbf{v}| = 6$; $\theta = \frac{2\pi}{3}$

38. $|\mathbf{v}| = 10$; $\theta = \frac{\pi}{6}$ **39.** $|\mathbf{v}| = 4$; $\theta = \pi$

40. $|\mathbf{v}| = 7$; $\theta = \frac{5\pi}{6}$

En los ejercicios 41 al 45 calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

41. $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -12\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ **42.** $\mathbf{u} = -4\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = 11\mathbf{j}$

43. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ **44.** $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

45. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

En los ejercicios 46 al 53 determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después bosqueje cada par.

46. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

47. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{j} = -7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

48. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

49. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

50. $\mathbf{u} = -12\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\mathbf{j} = -9\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

51. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

52. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{j} = -3\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

53. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$

54. Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$. Determine α tal que

a) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sean ortogonales.
b) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sean paralelos.
c) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sea $\frac{\pi}{4}$.
d) El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sea $\frac{\pi}{6}$.

En los ejercicios 55 al 62 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

55. $\mathbf{u} = -12\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

56. $\mathbf{u} = 14\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

57. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

58. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{j}$

59. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

60. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

61. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

62. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

63. Sean $P = (3, -2)$, $Q = (4, 7)$, $R = (-1, 3)$ *y* $S = (2, -1)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\, \overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\, \overrightarrow{PQ}$.

En los ejercicios 64 al 67 encuentre la distancia entre los dos puntos dados.

64. $(4, -1, 7)$; $(-5, 1, 3)$

65. $(-9, -10, -1)$; $(12, -3, 3)$

66. $(2, -7, 0)$; $(0, 5, -8)$

67. $(-1, 0, -4)$; $(3, -2, 6)$

En los ejercicios 68 al 71 encuentre la magnitud y los cosenos directores del vector dado.

68. $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

69. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

70. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

71. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

72. Encuentre un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (3, -1, 2)$ y $Q = (-4, 1, 7)$.

73. Encuentre un vector unitario cuya dirección sea opuesta a la de $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (1, -3, 0)$ y $Q = (-7, 1, -4)$.

En los ejercicios 74 al 83 sean $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcule:

74. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

75. $3\mathbf{v} + 5\mathbf{w}$

76. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{w}$

77. $\text{proy}_{\mathbf{w}}\,(\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})$

78. $\text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{u}$

79. $2\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 7\mathbf{w}$

80. $2\mathbf{u} + 6\mathbf{v} + 3\,\text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{v}$

81. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

82. El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

83. El ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

En los ejercicios 84 al 87 encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

84. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}; \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

85. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 8\mathbf{k}; \quad \mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

86. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}; \quad \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

87. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}; \quad \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

88. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

89. Calcule el área del paralelogramo con vértices adyacentes $(1, 4, -2)$, $(-3, 1, 6)$ y $(1, -2, 3)$.

En los ejercicios 90 al 95 encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta dada.

90. Contiene a $(3, 2, -4)$ y $(0, 2, 3)$

91. Contiene a $(-1, 2, -3)$ y $(-6, 4, 0)$

92. Contiene a $(-4, 1, 0)$ y $(3, 0, 7)$

93. Contiene a $(-3, 5, -4)$ y es paralela al vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

94. Contiene a $(1, 1, 1)$ y es perpendicular a $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

95. Contiene a $(1, -2, -3)$ y es paralela a $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{(-3)} = \frac{z-41}{2}$

96. Demuestre que las rectas L_1: $x = 3 - 2t$, $y = 4 + t$, $z = -2 + 7t$ y L_2: $x = -3 + s$, $y = 2 - 4s$, $z = 1 + 6s$ no tienen puntos en común.

97. Encuentre la distancia del origen a la recta que pasa por el punto $(3, 1, 5)$ y que tiene la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

98. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 2, 4)$ y es ortogonal a L_1: $\frac{x-1}{4} = \frac{y+6}{3} = \frac{z}{(-2)}$ y L_2: $\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{4}$.

En los ejercicios 99 al 101 encuentre la ecuación del plano que contiene al punto dado y es ortogonal al vector normal dado.

99. $P = (-7, 6, -7); \quad \mathbf{n} = 11\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

100. $P = (1, -4, 6); \quad \mathbf{n} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

101. $P = (-4, 1, 6); \quad \mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

102. Encuentre la ecuación del plano que contiene a los puntos $(-2, 4, 1)$, $(3, -7, 5)$ y $(-1, -2, -1)$.

103. Encuentre la ecuación del plano que contiene a los puntos $(-1, 3, 2)$, $(6, 1, 0)$ y $(0, 0, 3)$.

104. Encuentre todos los puntos de intersección de los planos π_1: $-x + y + z = 3$ y π_2: $-4x + 2y - 7z = 5$.

105. Encuentre (de existir) el punto de intersección del plano π_1: $-4x + 3y - 2z = 12$ y la recta L: $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 2 + t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

106. Encuentre todos los puntos de intersección de los planos π_1: $-2x + 3y = 6$ y π_2: $-2x + 3y + z = 3$.

107. Encuentre todos los puntos de intersección de los planos π_1: $3x - y + 4z = 8$ y π_2: $-3x - y - 11z = 0$.

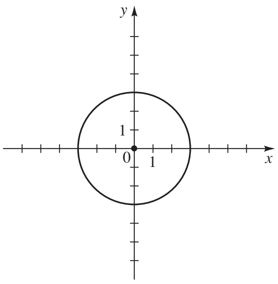
108. Encuentre la distancia desde $(1, -2, 3)$ al plano $2x - y - z = 6$.

109. Encuentre la distancia desde $(3, 4, 8)$ al plano $-x + 3y = 6$.

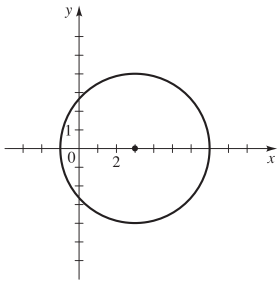
110. Encuentre el ángulo entre los planos del ejercicio 97.

111. Demuestre que los vectores de posición $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ son coplanares y encuentre la ecuación del plano que los contiene.

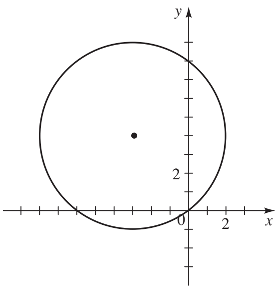
87. $(0, 0), 3$



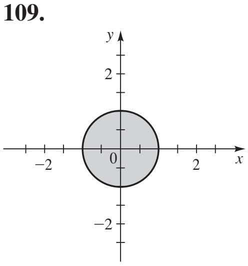
89. $(3, 0), 4$



91. $(-3, 4), 5$



93. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ **95.** $x^2 + y^2 = 65$
97. $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$ **99.** $(x-7)^2 + (y+3)^2 = 9$
101. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ **103.** $(2, -5), 4$ **105.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \frac{1}{2}$
107. $\left(\frac{3}{4}, 0\right), \frac{3}{4}$
109.

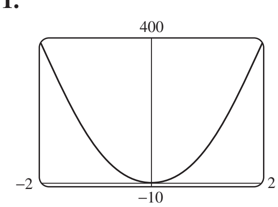


111. 12π **113.** **(a)** 5 **(b)** 31; 25 **(c)** Los puntos P y Q deben estar en la misma calle o la misma avenida.
115. **(a)** 2 Mm, 8 Mm **(b)** $-1.33, 7.33$; 2.40 Mm, 7.60 Mm

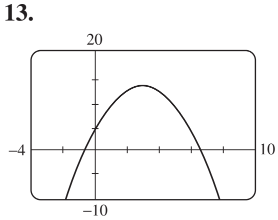
SECCIÓN 1.9 ■ PÁGINA 104

1. x **2.** arriba **3.** **(a)** $x = -1, 0, 1, 3$ **(b)** $[-1, 0] \cup [1, 3]$
4. **(a)** $x = 1, 4$ **(b)** $(1, 4)$ **5.** (c) **7.** (c) **9.** (c)

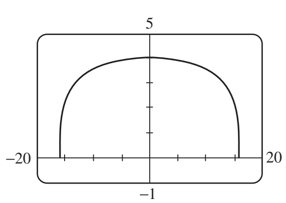
11.



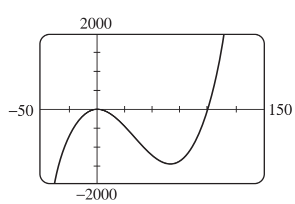
13.



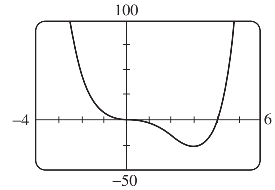
15.



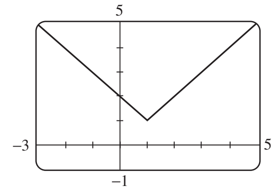
17.



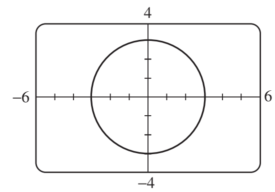
19.



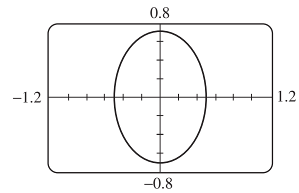
21.



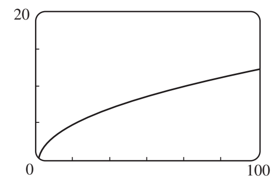
23. No **25.** Sí, 2
27.



29.



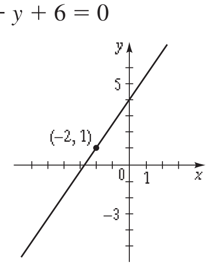
31. -4 **33.** $\frac{5}{14}$ **35.** $\pm 4\sqrt{2} \approx \pm 5.7$ **37.** No hay solución
39. $2.5, -2.5$ **41.** $5 + 2\sqrt[4]{5} \approx 7.99$, $5 - 2\sqrt[4]{5} \approx 2.01$
43. 3.00, 4.00 **45.** 1.00, 2.00, 3.00 **47.** 1.62
49. -1.00, 0.00, 1.00 **51.** 4 **53.** No hay solución
55. 2.55 **57.** -2.05, 0, 1.05 **59.** $[-2.00, 5.00]$
61. $(-\infty, 1.00] \cup [2.00, 3.00]$ **63.** $(-1.00, 0) \cup (1.00, \infty)$
65. $(-\infty, 0)$ **67.** $(-1, 4)$ **69.** $[-1, 3]$ **71.** 0, 0.01
73. **(a)**



(b) 67 mi

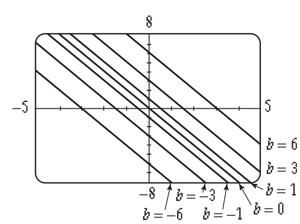
SECCIÓN 1.10 ■ PÁGINA 115

1. y; x; 2 **2.** **(a)** 3 **(b)** 3 **(c)** $-\frac{1}{3}$ **3.** $y - 2 = 3(x - 1)$
4. **(a)** 0; $y = 3$ **(b)** No está definida; $x = 2$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** $\frac{1}{6}$
9. $-\frac{1}{2}$ **11.** $-\frac{9}{2}$ **13.** $-2, \frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{4}$ **15.** $x + y - 4 = 0$
17. $3x - 2y - 6 = 0$ **19.** $5x - y - 7 = 0$
21. $2x - 3y + 19 = 0$ **23.** $5x + y - 11 = 0$
25. $3x - y - 2 = 0$ **27.** $3x - y - 3 = 0$ **29.** $y = 5$
31. $x + 2y + 11 = 0$ **33.** $x = -1$ **35.** $5x - 2y + 1 = 0$
37. $x - y + 6 = 0$
39. **(a)**

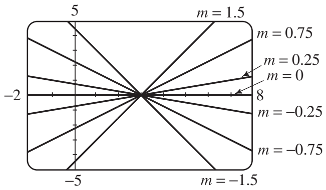


(b) $3x - 2y + 8 = 0$

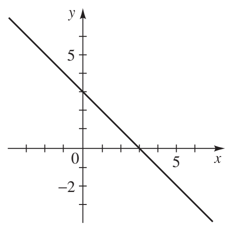
41. Todas tienen la misma pendiente.



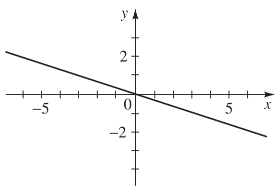
43. Todas tienen el mismo punto de intersección x.



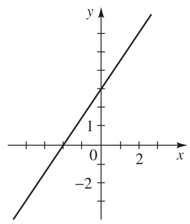
45. $-1, 3$



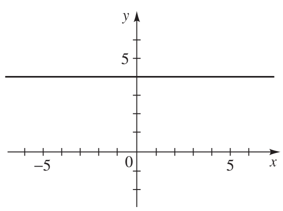
47. $-\frac{1}{3}, 0$



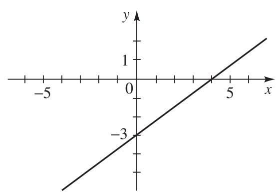
49. $\frac{3}{2}, 3$



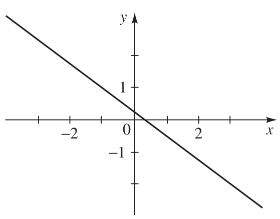
51. $0, 4$



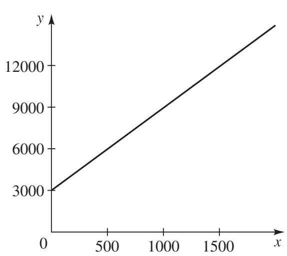
53. $\frac{3}{4}, -3$



55. $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

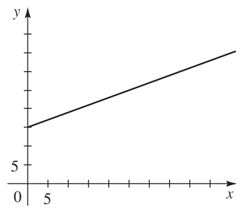


61. $x - y - 3 = 0$ **63.** **(b)** $4x - 3y - 24 = 0$ **65.** 16,667 pies
67. **(a)** 8.34; la pendiente representa el aumento en dosis para un año de aumento en edad. **(b)** 8.34 mg
69. **(a)**

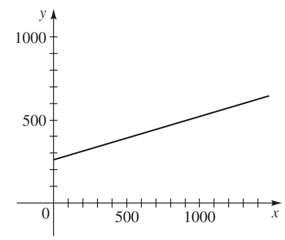


(b) La pendiente representa el costo de producción por tostador; el punto de intersección y representa el costo fijo mensual.

71. **(a)** $t = \frac{5}{24}n + 45$ **(b)** 76°F
73. **(a)** $P = 0.434d + 15$, donde P es la presión en lb/pulg.^{2} y d es la profundidad en pies
(b)



(c) La pendiente es el aumento en la presión del agua, y el punto de intersección y es la presión del aire en la superficie. **(d)** 196 pies
75. **(a)** $C = \frac{1}{4}d + 260$
(b) \$635
(c) La pendiente representa costo por milla.
(d) El punto de intersección y representa el costo mensual fijo.



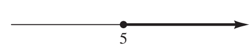
SECCIÓN 1.11 ■ PÁGINA 121

1. Directamente proporcional; proporcionalidad **2.** Inversamente proporcional; proporcionalidad **3.** Directamente proporcional; inversamente proporcional **4.** $\frac{1}{2}xy$ **5.** $T = kx$ **7.** $v = k/z$
9. $y = ks/t$ **11.** $z = k\sqrt{y}$ **13.** $V = klwh$ **15.** $R = k\dfrac{i}{Pt}$
17. $y = 7x$ **19.** $R = 12/s$ **21.** $M = 15x/y$ **23.** $W = 360/r^2$
25. $C = 16lwh$ **27.** $s = 500/\sqrt{t}$ **29.** **(a)** $F = kx$ **(b)** 8
(c) 32 N **31.** **(a)** $C = kpm$ **(b)** 0.125 **(c)** \$57,500
33. **(a)** $P = ks^3$ **(b)** 0.012 **(c)** 324 **35.** 0.7 dB **37.** 4
39. 5.3 mi/h **41.** **(a)** $R = kL/d^2$ **(b)** $0.00291\overline{6}$ **(c)** $R \approx 137\ \Omega$
43. **(a)** 160,000 **(b)** 1,930,670,340 **45.** 36 lb
47. **(a)** $f = \dfrac{k}{L}$ **(b)** La reduce a la mitad

REPASO DEL CAPÍTULO 1 ■ PÁGINA 125

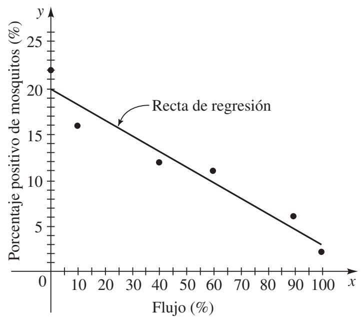
1. Propiedad Conmutativa para la adición
3. Propiedad Distributiva
5. $-2 \le x < 6$

7. $[5, \infty)$



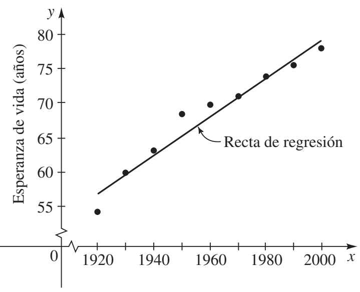
9. 6 **11.** $\frac{1}{72}$ **13.** $\frac{1}{6}$ **15.** 11 **17.** 4 **19.** $16x^3$ **21.** $12xy^8$
23. x^2y^2 **25.** $3x^{3/2}y^2$ **27.** $\dfrac{4r^{5/2}}{s^7}$ **29.** 7.825×10^{10}
31. 1.65×10^{-32} **33.** $3xy^2(4xy^2 - y^3 + 3x^2)$
35. $(x - 2)(x + 5)$ **37.** $(4t + 3)(t - 4)$ **39.** $(5 - 4t)(5 + 4t)$
41. $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$
43. $x^{-1/2}(x - 1)^2$ **45.** $(x - 2)(4x^2 + 3)$
47. $\sqrt{x^2 + 2}(x^2 + x + 2)^2$ **49.** $6x^2 - 21x + 3$ **51.** $-7 + x$
53. $2x^3 - 6x^2 + 4x$ **55.** $\dfrac{3(x + 3)}{x + 4}$ **57.** $\dfrac{x + 1}{x - 4}$ **59.** $\dfrac{1}{x + 1}$
61. $-\dfrac{1}{2x}$ **63.** $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ **65.** 5 **67.** No hay solución

7. (a)



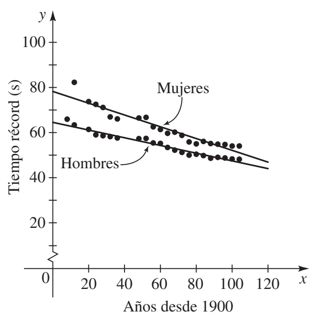
(b) $y = -0.168x + 19.89$ **(c)** 8.13%

9. (a)



(b) $y = 0.2708x - 462.9$ **(c)** 80.3 años

11. (a) Hombres: $y = -0.1703x + 64.61$,
mujeres $y = -0.2603x + 78.27$; x representa años desde1900 **(b)** 2052



Capítulo 2

SECCIÓN 2.1 ■ PÁGINA 149

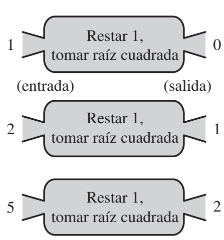
1. valor **2.** dominio, rango **3. (a)** f y g
(b) $f(5) = 10, g(5) = 0$ **4. (a)** elevar al cuadrado, sumar 3

(b)

x	0	2	4	6
$f(x)$	19	7	3	7

5. $f(x) = 2(x + 3)$ **7.** $f(x) = (x - 5)^2$ **9.** Elevar al cuadrado, luego sumar 2 **11.** Restar 4, luego dividir entre 3

13.



15.

x	$f(x)$
-1	8
0	2
1	0
2	2
3	8

17. $3, 3, -6, -\frac{23}{4}, 94$ **19.** $3, -3, 2, 2a + 1, -2a + 1, 2a + 2b + 1$

21. $-\dfrac{1}{3}, -3, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1-a}{1+a}, \dfrac{2-a}{a}$, no está definida

23. $-4, 10, -2, 3\sqrt{2}, 2x^2 + 7x + 1, 2x^2 - 3x - 4$

25. $6, 2, 1, 2, 2|x|, 2(x^2 + 1)$ **27.** $4, 1, 1, 2, 3$

29. $8, -\frac{3}{4}, -1, 0, -1$ **31.** $x^2 + 4x + 5, x^2 + 6$

33. $x^2 + 4, x^2 + 8x + 16$ **35.** $3a + 2, 3(a + h) + 2, 3$

37. $5, 5, 0$ **39.** $\dfrac{a}{a+1}, \dfrac{a+h}{a+h+1}, \dfrac{1}{(a+h+1)(a+1)}$

41. $3 - 5a + 4a^2, 3 - 5a - 5h + 4a^2 + 8ah + 4h^2, -5 + 8a + 4h$

43. $(-\infty, \infty)$ **45.** $[-1, 5]$ **47.** $\{x \mid x \neq 3\}$ **49.** $\{x \mid x \neq \pm 1\}$

51. $[5, \infty)$ **53.** $(-\infty, \infty)$ **55.** $[\frac{5}{2}, \infty)$ **57.** $[-2, 3) \cup (3, \infty)$

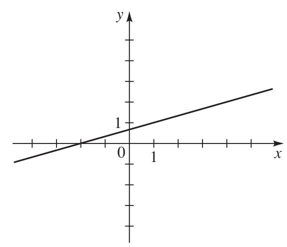
59. $(-\infty, 0] \cup [6, \infty)$ **61.** $(4, \infty)$ **63.** $(\frac{1}{2}, \infty)$

65. (a) $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}$

(b)

x	$f(x)$
2	$\frac{4}{3}$
4	2
6	$\frac{8}{3}$
8	$\frac{10}{3}$

(c)

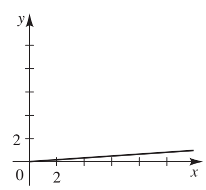


67. (a) $T(x) = 0.08x$

(b)

x	$T(x)$
2	0.16
4	0.32
6	0.48
8	0.64

(c)



69. (a) $C(10) = 1532.1, C(100) = 2100$ **(b)** El costo de producir 10 yd y 100 yd 71. **(c)** $C(0) = 1500$ **71. (a)** 50, 0 **(b)** $V(0)$ es el volumen del tanque lleno, y $V(20)$ es el volumen del tanque vacío, 20 minutos más tarde.

(c)

x	$V(x)$
0	50
5	28.125
10	12.5
15	3.125
20	0

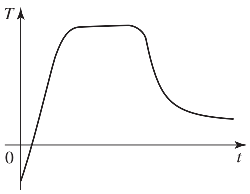
$V(20)$

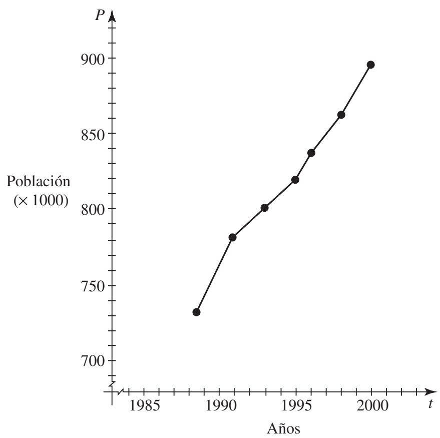
73. (a) $v(0.1) = 4440, v(0.4) = 1665$
(b) El flujo es más rápido cerca del eje central.

(c)

r	$v(r)$
0	4625
0.1	4440
0.2	3885
0.3	2960
0.4	1665
0.5	0

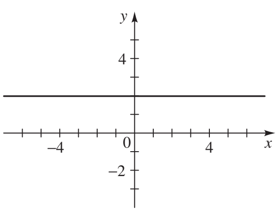
75. **(a)** 8.66 m, 6.61 m, 4.36 m
(b) Parecerá acortarse.
77. **(a)** \$90, \$105, \$100, \$105
(b) Costo total de un pedido, incluyendo envío
79. **(a)** $F(x) = \begin{cases} 15(40 - x) & \text{si } 0 < x < 40 \\ 0 & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ 15(x - 65) & \text{si } x > 65 \end{cases}$
(b) \$150, \$0, \$150
(c) Infracciones por violar límites de velocidad

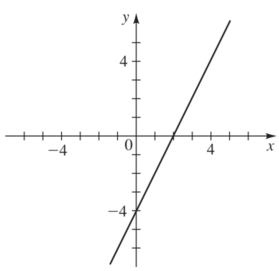
81.


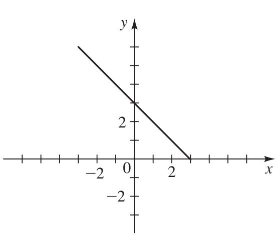
83.


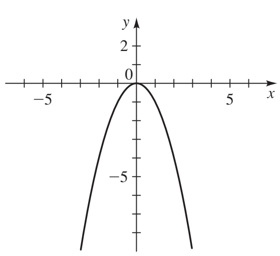
SECCIÓN 2.2 ■ PÁGINA 159

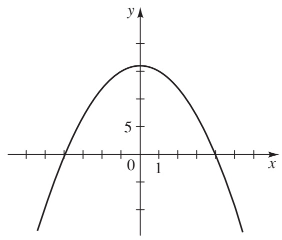
1. $f(x), x^3 + 2, 10, 10$ **2.** 3 **3.** 3
4. **(a)** IV **(b)** II **(c)** I **(d)** III

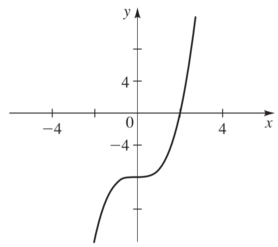
5.


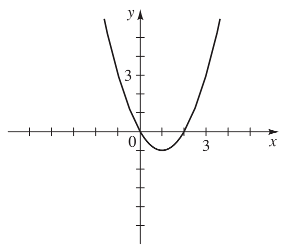
7.


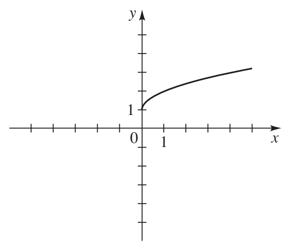
9.


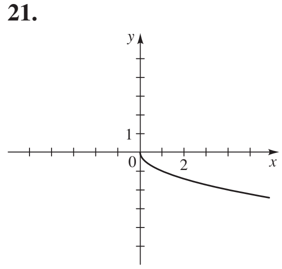
11.


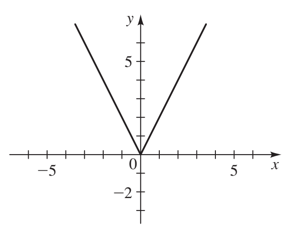
13.


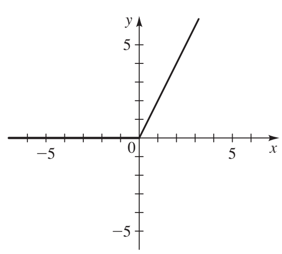
15.


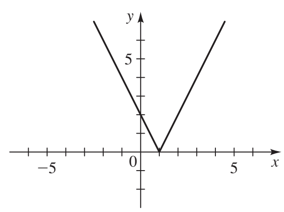
17.


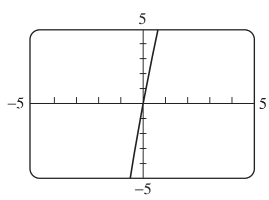
19.


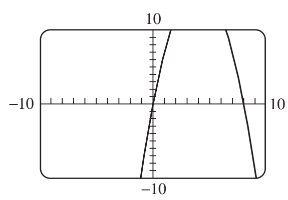
21.


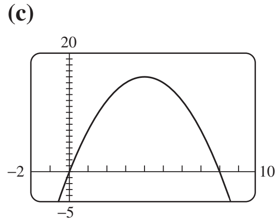
23.


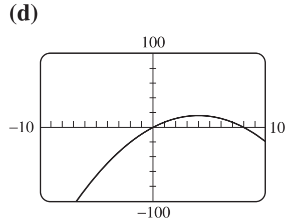
25.


27.


29. **(a)**


(b)


(c)


(d)


La gráfica (c) es la más apropiada.

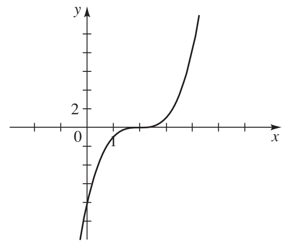
EXAMEN DEL CAPÍTULO 2 ■ PÁGINA 211

1. (a) y (b) son gráficas de funciones, (a) es uno a uno
2. **(a)** $2/3$, $\sqrt{6}/5$, $\sqrt{a}/(a-1)$ **(b)** $[-1, 0) \cup (0, \infty)$
3. **(a)** $f(x) = (x-2)^3$

(b)

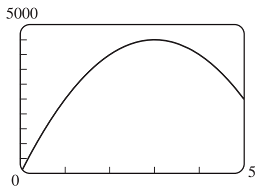
x	$f(x)$
−1	−27
0	−8
1	−1
2	0
3	1
4	8

(c)



(d) Por la Prueba de la Recta Horizontal; tome la raíz cúbica, luego sume 2 **(e)** $f^{-1}(x) = x^{1/3} + 2$ **4.** **(a)** $R(2) = 4000$, $R(4) = 4000$; ingresos totales de ventas con precios de \$2 y \$4

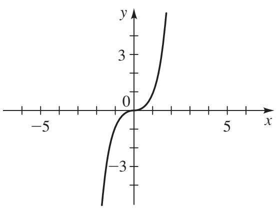
(b)



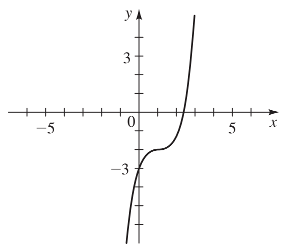
El ingreso aumenta hasta que el precio llega a \$3, luego disminuye

(c) \$4500; \$3 **5.** 5

6. **(a)**

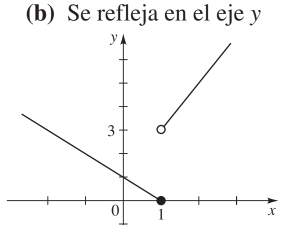


(b)



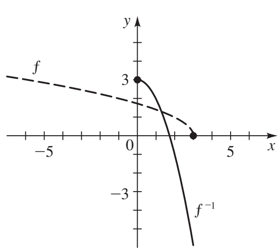
7. **(a)** Se desplaza a la derecha 3 unidades, luego se desplaza hacia arriba 2 unidades **(b)** Se refleja en el eje y

8. **(a)** 3, 0 **(b)**



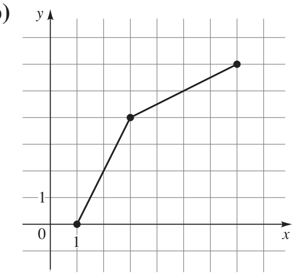
9. **(a)** $(f \circ g)(x) = (x-3)^2 + 1$ **(b)** $(g \circ f)(x) = x^2 - 2$
(c) 2 **(d)** 2 **(e)** $(g \circ g \circ g)(x) = x - 9$
10. **(a)** $f^{-1}(x) = 3 - x^2, x \geq 0$

(b)



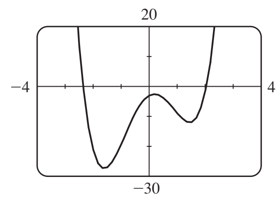
11. **(a)** Dominio $[0, 6]$, rango $[1, 7]$

(b)



(c) $\frac{5}{4}$

12. **(a)**



(b) No

(c) Mínimo local ≈ -27.18 cuando $x \approx -1.61$; máximo local ≈ -2.55 cuando $x \approx 0.18$; mínimo local ≈ -11.93 cuando $x \approx 1.43$ **(d)** $[-27.18, \infty)$
(e) Creciente sobre $[-1.61, 0.18] \cup [1.43, \infty)$; decreciente sobre $(-\infty, -1.61] \cup [0.18, 1.43]$

ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 218

1. $A(w) = 3w^2, w > 0$ **3.** $V(w) = \frac{1}{2}w^3, w > 0$
5. $A(x) = 10x - x^2, 0 < x < 10$
7. $A(x) = (\sqrt{3}/4)x^2, x > 0$
9. $r(A) = \sqrt{A/\pi}, A > 0$
11. $S(x) = 2x^2 + 240/x, x > 0$
13. $D(t) = 25t, t \geq 0$
15. $A(b) = b\sqrt{4-b}, 0 < b < 4$
17. $A(h) = 2h\sqrt{100 - h^2}, 0 < h < 10$
19. **(b)** $p(x) = x(19 - x)$ **(c)** 9.5, 9.5
21. **(b)** $A(x) = x(2400 - 2x)$ **(c)** 600 pies por 1200 pies
23. **(a)** $f(w) = 8w + 7200/w$
(b) El ancho a lo largo del camino es 30 pies, la longitud es 40 pies
(c) 15 pies a 60 pies **25.** **(a)** $A(x) = 15x - \left(\dfrac{\pi + 4}{8}\right)x^2$
(b) Ancho $\approx$ 8.40 pies, altura de el inciso rectangular $\approx$ 4.20 pies
27. **(a)** $A(x) = x^2 + 48/x$ **(b)** Altura $\approx$ 1.44 pies, ancho $\approx$ 2.88 pies
29. **(a)** $A(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$ **(b)** 10 m por 10 m
31. **(b)** Al punto C, 5.1 millas desde B

CAPÍTULO 3

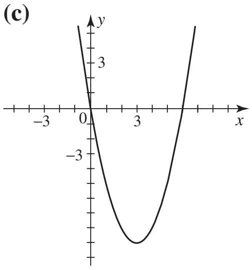
SECCIÓN 3.1 ■ PÁGINA 229

1. cuadrado **2.** **(a)** (h, k) **(b)** hacia arriba, mínimo
(c) hacia abajo, máximo
3. hacia arriba, $(3, 5)$, 5, mínimo
4. hacia abajo, $(3, 5)$, 5, máximo
5. **(a)** $(3, 4)$ **(b)** 4 **(c)** $\mathbb{R}, (-\infty, 4]$
7. **(a)** $(1, -3)$ **(b)** -3 **(c)** $\mathbb{R}, [-3, \infty)$

9. **(a)** $f(x) = (x - 3)^2 - 9$

(b) Vértice $(3, -9)$
puntos intersección x 0, 6
punto de intersección y 0

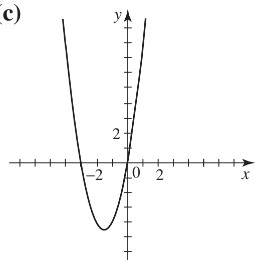
(c)



11. **(a)** $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$

(b) Vértice $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$
puntos intersección x -3,
punto de intersección y 0

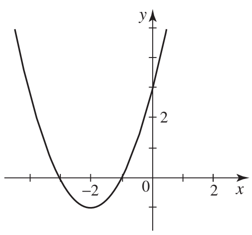
(c)



13. **(a)** $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

(b) Vértice $(-2, -1)$, puntos intersección x $-1, -3$, punto de intersección y 3

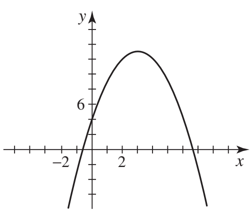
(c)



15. **(a)** $f(x) = -(x - 3)^2 + 13$

(b) Vértice $(3, 13)$; puntos intersección x $3 \pm \sqrt{13}$; punto de intersección y 4

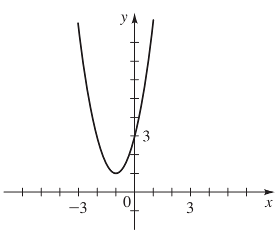
(c)



17. **(a)** $f(x) = 2(x + 1)^2 + 1$

(b) Vértice $(-1, 1)$; no hay puntos intersección x; punto de intersección y 3

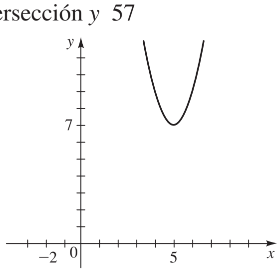
(c)



19. **(a)** $f(x) = 2(x - 5)^2 + 7$

(b) Vértice $(5, 7)$; no hay puntos intersección x; punto de intersección y 57

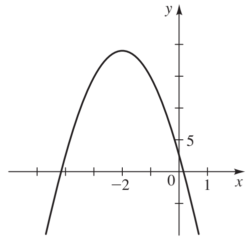
(c)



21. **(a)** $f(x) = -4(x + 2)^2 + 19$

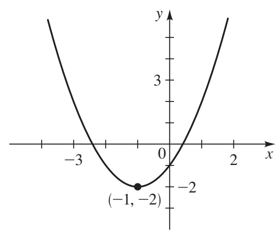
(b) Vértice $(-2, 19)$; puntos intersección x $-2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{19}$; punto de intersección y 3

(c)



23. **(a)** $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

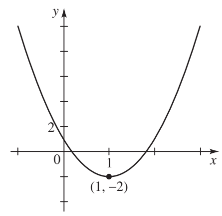
(b)



(c) Mínimo $f(-1) = -2$

25. **(a)** $f(x) = 3(x - 1)^2 - 2$

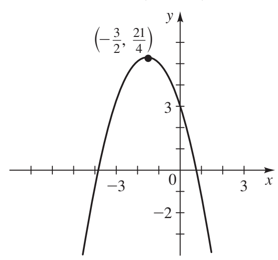
(b)



(c) Mínimo $f(1) = -2$

27. **(a)** $f(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}$

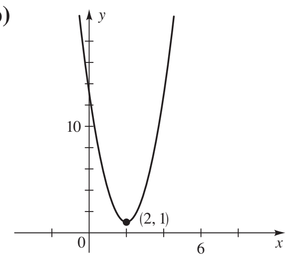
(b)



(c) Máximo $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$

29. **(a)** $g(x) = 3(x - 2)^2 + 1$

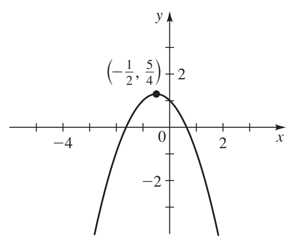
(b)



(c) Mínimo $g(2) = 1$

31. **(a)** $h(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$

(b)



(c) Máximo $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$

33. Mínimo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ **35.** Máximo $f(-3.5) = 185.75$

37. Mínimo $f(0.6) = 15.64$ **39.** Mínimo $h(-2) = -8$

41. Máximo $f(-1) = \frac{7}{2}$ **43.** $f(x) = 2x^2 - 4x$

45. $(-\infty, \infty), (-\infty, 1]$ **47.** $(-\infty, \infty), \left[-\frac{23}{2}, \infty\right)$

49. **(a)** -4.01 **(b)** -4.011025

51. Máximo local 2; mínimos locales -1, 0

53. Máximos locales 0, 1; mínimos locales -2, -1

55. Máximo local ≈ 0.38 cuando $x \approx -0.58$; mínimo local ≈ -0.38 cuando $x \approx 0.58$

57. Máximo local ≈ 0 cuando $x = 0$; mínimo local ≈ -13.61 cuando $x \approx -1.71$; mínimo local ≈ -73.32 cuando $x \approx 3.21$

59. Máximo local ≈ 5.66 cuando $x \approx 4.00$

61. Máximo local ≈ 0.38 cuando $x \approx -1.73$; mínimo local ≈ -0.38 cuando $x \approx 1.73$ **63.** 25 pies

65. \$4000, 100 unidades **67.** 30 veces **69.** 50 árboles por acre

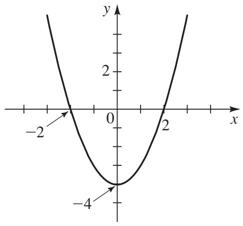
71. 600 pies por 1200 pies **73.** Ancho 8.40 pies, altura de la parte rectangular por 4.20 pies **75.** **(a)** $f(x) = x(1200 - x)$ **(b)** 600 pies por 600 pies

77. **(a)** $R(x) = x(57{,}000 - 3000x)$ **(b)** \$9.50 **(c)** \$19.00

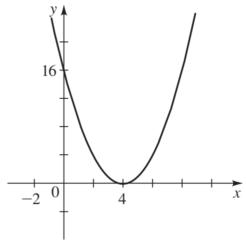
SECCIÓN 3.2 ■ PÁGINA 243

1. II **2.** **(a)** (ii) **(b)** (iv) **3.** (a), (c) **4.** (a)

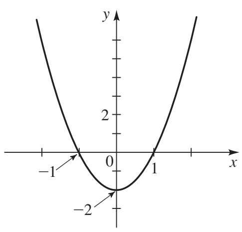
5. **(a)**



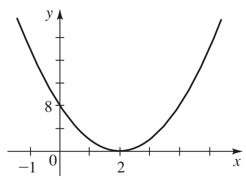
(b)



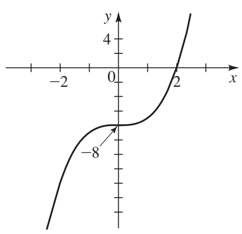
(c)



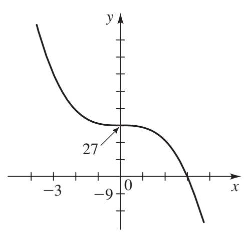
(d)



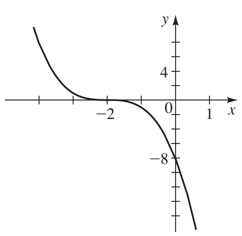
7. **(a)**



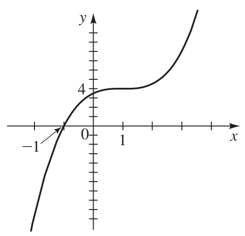
(b)



(c)

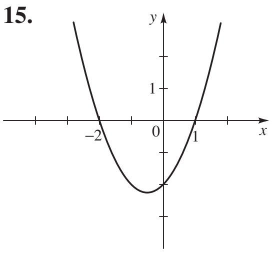


(d)

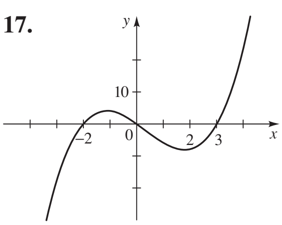


9. III **11.** V **13.** VI

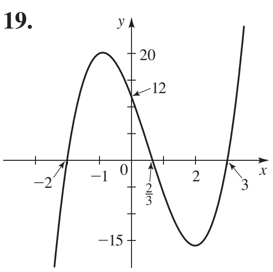
15.



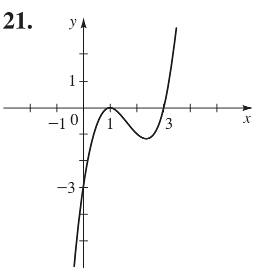
17.



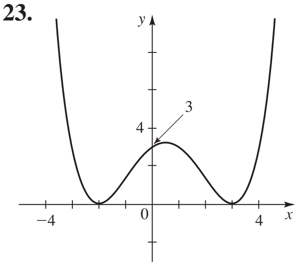
19.



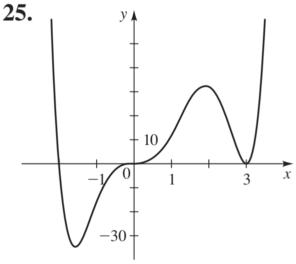
21.



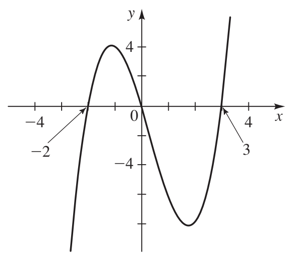
23.



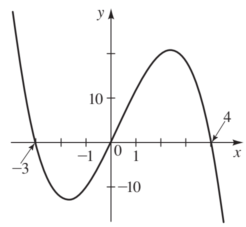
25.



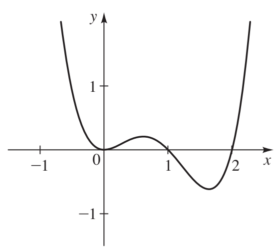
27. $P(x) = x(x + 2)(x - 3)$



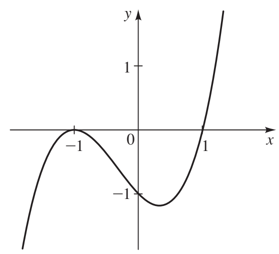
29. $P(x) = -x(x + 3)(x - 4)$



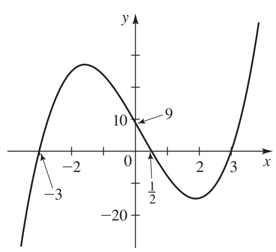
31. $P(x) = x^2(x - 1)(x - 2)$



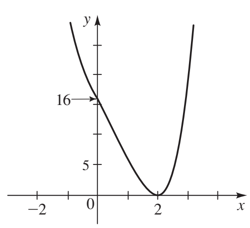
33. $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)$



35. $P(x) = (2x - 1)(x + 3)(x - 3)$

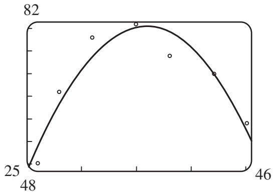


37. $P(x) = (x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)$



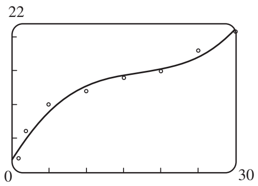
ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 298

1. (a) $y = -0.275428x^2 + 19.7485x - 273.5523$
(b)



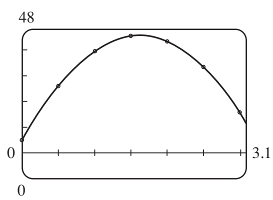
(c) 35.85 lb/pulg.^{2}

3. (a) $y = 0.00203708x^3 - 0.104521x^2 + 1.966206x + 1.45576$
(b)



(c) 43 vegetales **(d)** 2.0 s

5. (a) Grado 2
(b) $y = -16.0x^2 + 51.8429x + 4.20714$



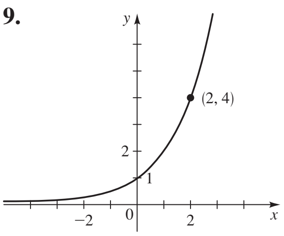
(c) 0.3 s y 2.9 s **(d)** 46.2 pies

CAPÍTULO 4

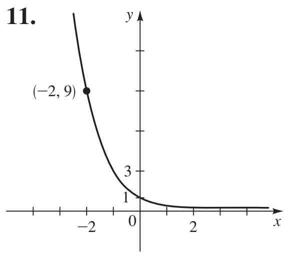
SECCIÓN 4.1 ■ PÁGINA 307

1. 5; $\frac{1}{25}$, 1, 25, 15,625 **2. (a)** III **(b)** I **(c)** II **(d)** IV
3. (a) hacia abajo **(b)** a la derecha **4.** principal, tasa de interés por año, número de veces que el interés se capitalice por año, número de años, cantidad después de t años: \$112.65 **5.** 2.000, 7.103, 77.880, 1.587 **7.** 0.885, 0.606, 0.117, 1.837

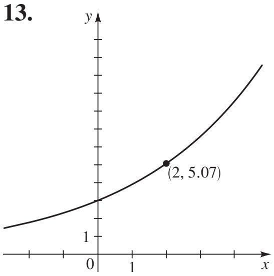
9.



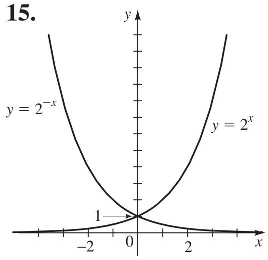
11.



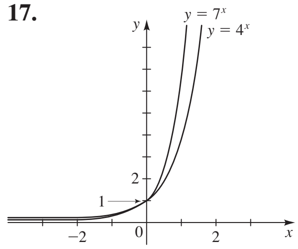
13.



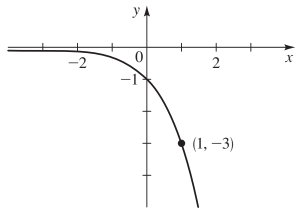
15.



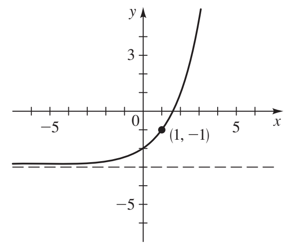
17.



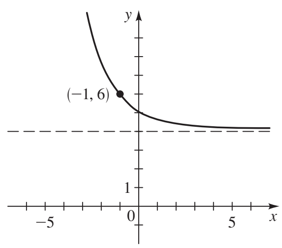
19. $f(x) = 3^x$ **21.** $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **23.** II
25. $\mathbb{R}$, $(-\infty, 0)$, $y = 0$



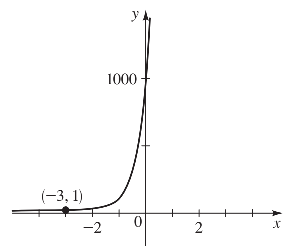
27. $\mathbb{R}$, $(-3, \infty)$, $y = -3$



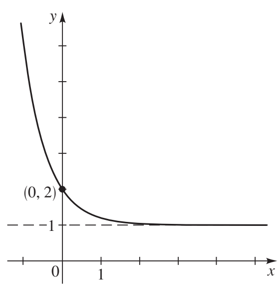
29. $\mathbb{R}$, $(4, \infty)$, $y = 4$



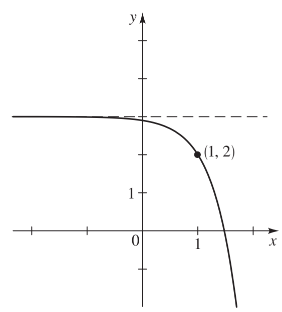
31. $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $y = 0$



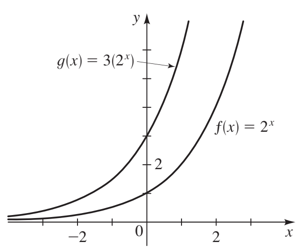
33. $\mathbb{R}$, $(1, \infty)$, $y = 1$



35. $\mathbb{R}$, $(-\infty, 3)$, $y = 3$

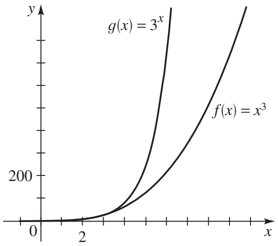


37. (a)

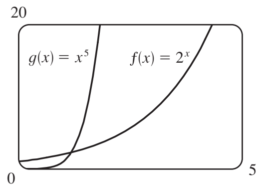


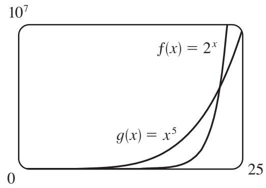
(b) La gráfica de g es más pronunciada que la de f.

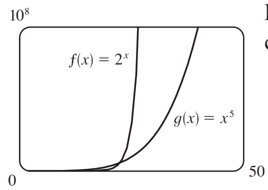
39.



41. (a)

(i)


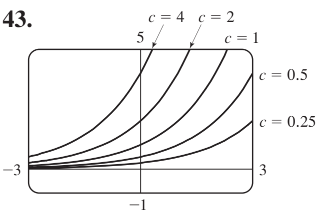
(ii)


(iii)


La gráfica de f por último aumenta con mucha mayor rapidez que la de g.

(b) 1.2, 22.4

43.



Cuanto mayor sea el valor de c, con más rapidez crece la gráfica.

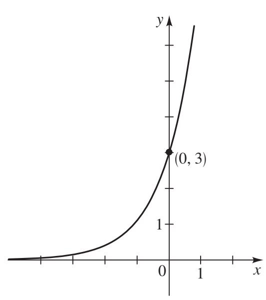
45. (a) Creciente sobre $(-\infty, 0.50]$; decreciente sobre $[0.50, \infty)$ **(b)** $(0, 1.78]$ **47. (a)** $1500 \cdot 2^t$ **(b)** 25,165,824,000
49. \$5203.71, \$5415.71, \$5636.36, \$5865.99, \$6104.98, \$6353.71
51. (a) \$11,605.41 **(b)** \$13,468.55 **(c)** \$15,630.80
53. (a) \$519.02 **(b)** \$538.75 **(c)** \$726.23 **55.** \$7678.96
57. 8.30%

SECCIÓN 4.2 ■ PÁGINA 312

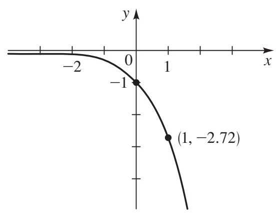
1. natural; 2.71828 **2.** principal, tasa de interés por año, número de años; cantidad después de t años; \$112.75
3. 20.085, 1.259, 2.718, 0.135

5.

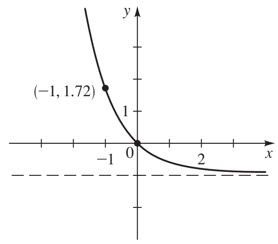
x	y
−2	0.41
−1	1.10
−0.5	1.82
0	3
0.5	4.95
1	8.15
2	22.17



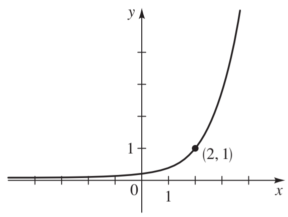
7. $\mathbb{R}, (-\infty, 0), y = 0$



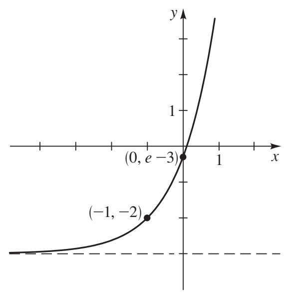
9. $\mathbb{R}, (-1, \infty), y = -1$



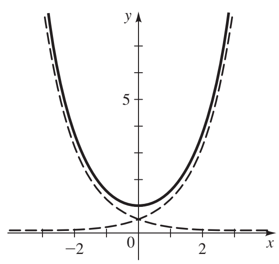
11. $\mathbb{R}, (0, \infty), y = 0$



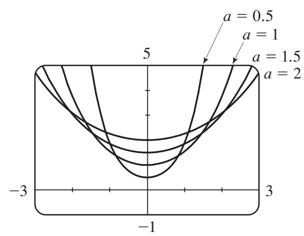
13. $\mathbb{R}, (-3, \infty), y = -3$



15. (a)

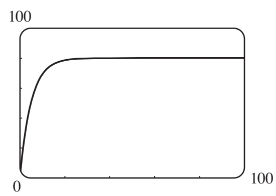


17. (a)



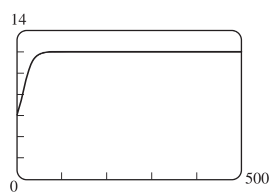
(b) Cuanto mayor sea el valor de a, más ancha es la gráfica.

19. Mínimo local $\approx (0.27, 1.75)$
21. (a) 13 kg **(b)** 6.6 kg
23. (a) 0 **(b)** 50.6 pies/s, 69.2 pies/s
(c)



(d) 80 pies/s

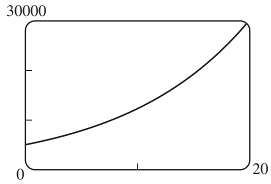
25. (a) 100 **(b)** 482, 999, 1168 **(c)** 1200
27. (a) 11.79 mil millones, 11.97 mil millones
(b)



(c) 12 mil millones

29. \$7213.18, \$7432.86, \$7659.22, \$7892.48, \$8132.84, \$8380.52
31. (a) \$2145.02 **(b)** \$2300.55 **(c)** \$3043.92 **33. (a)** \$768.05 **(b)** \$769.22 **(c)** \$769.82 **(d)** \$770.42 **35.** (a) es el mejor.

37. **(a)** $A(t) = 5000e^{0.09t}$ **(b)**



(c) Después de 17.88 años

SECCIÓN 4.3 ■ PÁGINA 322

1. 10^x

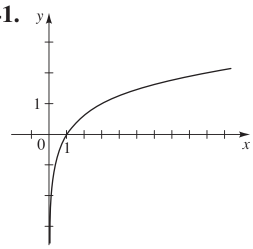
x	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	$10^{1/2}$
$\log x$	3	2	1	0	-1	-2	-3	$\frac{1}{2}$

2. 9; 1, 0, -1, 2, $\frac{1}{2}$
3. **(a)** $\log_5 125 = 3$ **(b)** $5^2 = 25$ **4.** **(a)** III **(b)** II **(c)** I **(d)** IV
5.

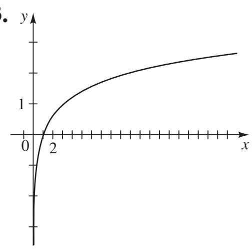
Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	$8^1 = 8$
$\log_8 64 = 2$	$8^2 = 64$
$\log_8 4 = \frac{2}{3}$	$8^{2/3} = 4$
$\log_8 512 = 3$	$8^3 = 512$
$\log_8 \frac{1}{8} = -1$	$8^{-1} = \frac{1}{8}$
$\log_8 \frac{1}{64} = -2$	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

7. **(a)** $5^2 = 25$ **(b)** $5^0 = 1$ **9.** **(a)** $8^{1/3} = 2$ **(b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$
11. **(a)** $e^x = 5$ **(b)** $e^5 = y$ **13.** **(a)** $\log_5 125 = 3$
(b) $\log_{10} 0.0001 = -4$ **15.** **(a)** $\log_8 \frac{1}{8} = -1$ **(b)** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$
17. **(a)** $\ln 2 = x$ **(b)** $\ln y = 3$ **19.** **(a)** 1 **(b)** 0 **(c)** 2
21. **(a)** 2 **(b)** 2 **(c)** 10 **23.** **(a)** -3 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** -1
25. **(a)** 37 **(b)** 8 **(c)** $\sqrt{5}$ **27.** **(a)** $-\frac{2}{3}$ **(b)** 4 **(c)** -1
29. **(a)** 32 **(b)** 4 **31.** **(a)** 5 **(b)** 27 **33.** **(a)** 100 **(b)** 25
35. **(a)** 2 **(b)** 4 **37.** **(a)** 0.3010 **(b)** 1.5465 **(c)** -0.1761
39. **(a)** 1.6094 **(b)** 3.2308 **(c)** 1.0051

41.

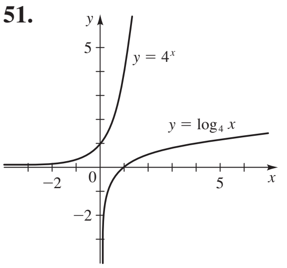


43.

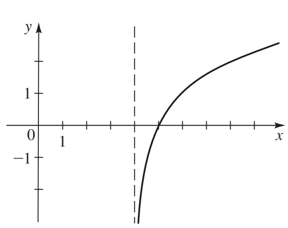


45. $y = \log_5 x$ **47.** $y = \log_9 x$ **49.** I

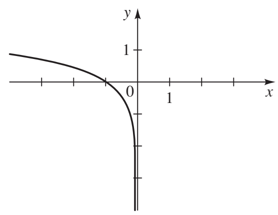
51.



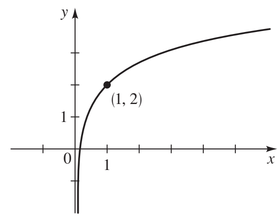
53. $(4, \infty), \mathbb{R}, x = 4$



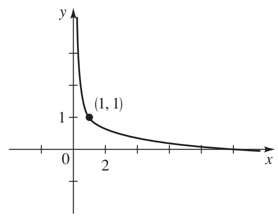
55. $(-\infty, 0), \mathbb{R}, x = 0$



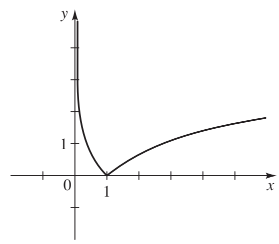
57. $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$



59. $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$

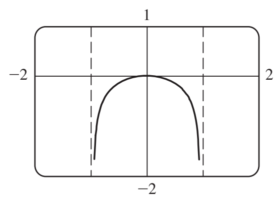


61. $(0, \infty), [0, \infty), x = 0$



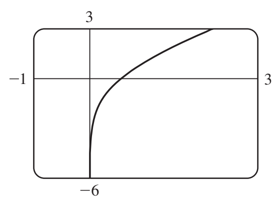
63. $(-3, \infty)$ **65.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ **67.** $(0, 2)$

69.



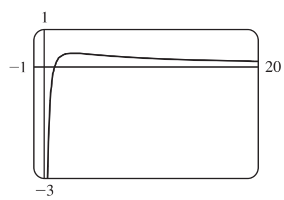
dominio $(-1, 1)$
asíntotas verticales $x = 1$, $x = -1$
máximo local $(0, 0)$

71.



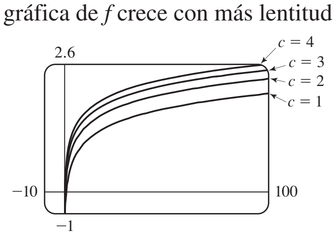
dominio $(0, \infty)$
asíntota vertical $x = 0$
no hay máximo ni mínimo

73.



dominio $(0, \infty)$
asíntota vertical $x = 0$
asíntota horizontal $y = 0$
máximo local $\approx (2.72, 0.37)$

75. $(f \circ g)(x) = 2^{x+1}, (-\infty, \infty)$; $(g \circ f)(x) = 2^x + 1, (-\infty, \infty)$
77. $(f \circ g)(x) = \log_2 (x - 2), (2, \infty)$; $(g \circ f)(x) = \log_2 x - 2, (0, \infty)$
79. La gráfica de f crece con más lentitud que g.
81. **(a)**



(b) La gráfica de $f(x) = \log(cx)$ es la gráfica de $f(x) = \log(x)$ desplazada hacia arriba $\log c$ unidades.

83. **(a)** $(1, \infty)$ **(b)** $f^{-1}(x) = 10^{2^x}$

85. **(a)** $f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ **(b)** $(0, 1)$ **87.** 2602 años

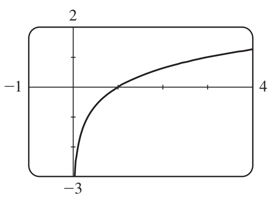
89. 11.5 años, 9.9 años, 8.7 años **91.** 5.32, 4.32

SECCIÓN 4.4 ■ PÁGINA 329

1. suma; $\log_5 25 + \log_5 125 = 2 + 3$
2. diferencia; $\log_5 25 - \log_5 125 = 2 - 3$
3. por el; $10 \cdot \log_5 25$
4. **(a)** $2\log x + \log y - \log z$
(b) $\log\left(\dfrac{x^2 y}{z}\right)$

5. 10, e; Cambio de Base; $\log_7 12 = \dfrac{\log 12}{\log 7} = 1.277$

6. Verdadero **7.** $\frac{3}{2}$ **9.** 2 **11.** 3 **13.** 3 **15.** 200 **17.** 4
19. $1 + \log_2 x$ **21.** $\log_2 x + \log_2(x-1)$
23. $10 \log 6$ **25.** $\log_2 A + 2\log_2 B$ **27.** $\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y$
29. $\frac{1}{3}\log_5(x^2+1)$ **31.** $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$
33. $3\log x + 4\log y - 6\log z$
35. $\log_2 x + \log_2(x^2+1) - \frac{1}{2}\log_2(x^2-1)$
37. $\ln x + \frac{1}{2}(\ln y - \ln z)$ **39.** $\frac{1}{4}\log(x^2+y^2)$
41. $\frac{1}{2}[\log(x^2+4) - \log(x^2+1) - 2\log(x^3-7)]$
43. $3\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \ln(3x+4)$ **45.** $\log_3 160$
47. $\log_2(AB/C^2)$ **49.** $\log\left(\dfrac{x^4(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)$
51. $\ln(5x^2(x^2+5)^3)$
53. $\log\left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)$ **55.** 2.321928 **57.** 2.523719
59. 0.493008 **61.** 3.482892
63.



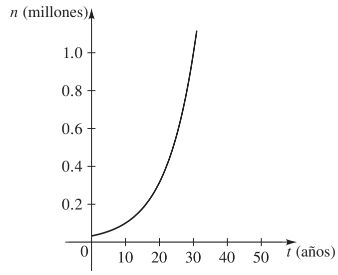
69. **(a)** $P = c/W^k$ **(b)** 1866, 64
71. **(a)** $M = -2.5\log B + 2.5\log B_0$

SECCIÓN 4.5 ■ PÁGINA 338

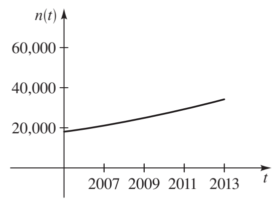
1. **(a)** $e^x = 25$ **(b)** $x = \ln 25$ **(c)** 3.219
2. **(a)** $\log 3(x-2) = \log x$ **(b)** $3(x-2) = x$ **(c)** 3
3. 1.3979 **5.** −0.9730 **7.** −0.5850 **9.** 1.2040 **11.** 0.0767
13. 0.2524 **15.** 1.9349 **17.** −43.0677 **19.** 2.1492
21. 6.2126 **23.** −2.9469 **25.** −2.4423 **27.** 14.0055
29. $\ln 2 \approx 0.6931, 0$ **31.** $\frac{1}{2}\ln 3 \approx 0.5493$ **33.** ± 1 **35.** $0, \frac{4}{3}$
37. $e^{10} \approx 22026$ **39.** 0.01 **41.** $\frac{95}{3}$ **43.** −7 **45.** 5 **47.** 5
49. $\frac{13}{12}$ **51.** 4 **53.** 6 **55.** $\frac{3}{2}$ **57.** $1/\sqrt{5} \approx 0.4472$ **59.** 2.21
61. 0.00, 1.14 **63.** −0.57 **65.** 0.36
67. $2 < x < 4$ o $7 < x < 9$ **69.** $\log 2 < x < \log 5$
71. $f^{-1}(x) = \dfrac{\ln x}{2\ln 2}$ **73.** $f^{-1}(x) = 2^x + 1$
75. **(a)** \$6435.09 **(b)** 8.24 años **77.** 6.33 años **79.** 8.15 años
81. 13 días **83.** **(a)** 7337 **(b)** 1.73 años **85.** **(a)** $P = P_0 e^{-h/k}$
(b) 56.47 kPa **87.** **(a)** $t = -\frac{5}{13}\ln(1 - \frac{13}{60}I)$ **(b)** 0.218 s

SECCIÓN 4.6 ■ PÁGINA 350

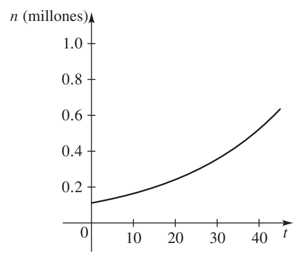
1. **(a)** $n(t) = 10 \cdot 2^{2t/3}$ **(b)** 1.05×10^8 **(c)** Después de 14.9 h
3. **(a)** 3125 **(b)** 317,480
(c)



5. **(a)** $n(t) = 18{,}000e^{0.08t}$ **(b)** 34,137
(c)



7. **(a)** 233 millones **(b)** 181 millones
9. **(a)** $n(t) = 112{,}000 \cdot 2^{t/18}$ **(b)** $n(t) = 112{,}000e^{0.0385t}$
(c)

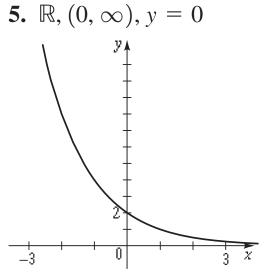


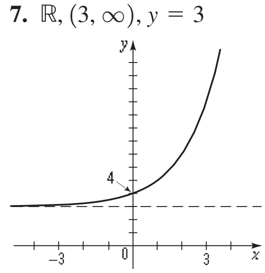
(d) En el año 2045

11. **(a)** 20,000 **(b)** $n(t) = 20{,}000e^{0.1096t}$ **(c)** Sobre 48,000
(d) 2017 **13.** **(a)** $n(t) = 8600e^{0.1508t}$ **(b)** Sobre 11,600
(c) 4.6 h **15.** **(a)** $n(t) = 29.76e^{0.012936t}$ millones
(b) 53.5 años **(c)** 38.55 millones **17.** **(a)** $m(t) = 22 \cdot 2^{-t/1600}$
(b) $m(t) = 22e^{-0.000433t}$ **(c)** 3.9 mg **(d)** 463.4 años
19. 18 años **21.** 149 h **23.** 3560 años
25. **(a)** 210°F **(b)** 153°F **(c)** 28 min
27. **(a)** 137°F **(b)** 116 min
29. **(a)** 2.3 **(b)** 3.5 **(c)** 8.3
31. **(a)** 10^{-3} M **(b)** 3.2×10^{-7} M
33. $4.8 \le \text{pH} \le 6.4$ **35.** $\log 20 \approx 1.3$ **37.** El doble de intenso
39. 8.2 **41.** 73 dB **43.** **(b)** 106 dB

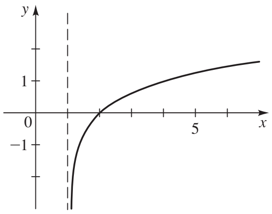
REPASO DEL CAPÍTULO 4 ■ PÁGINA 353

1. 0.089, 9.739, 55.902 **3.** 11.954, 2.989, 2.518
5. $\mathbb{R}, (0, \infty), y = 0$ **7.** $\mathbb{R}, (3, \infty), y = 3$

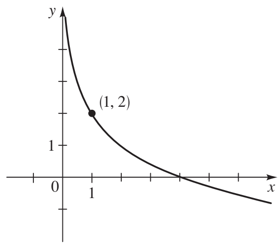




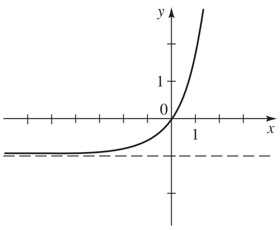
9. $(1, \infty), \mathbb{R}, x = 1$



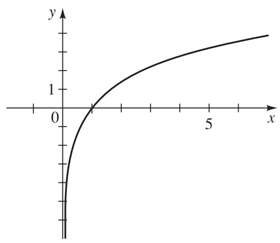
11. $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$



13. $\mathbb{R}, (-1, \infty), y = -1$

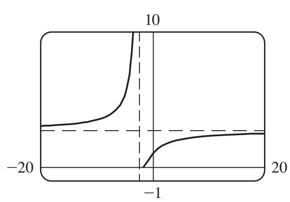


15. $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$



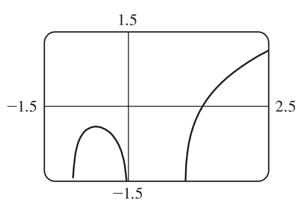
17. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ **19.** $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ **21.** $2^{10} = 1024$
23. $10^y = x$ **25.** $\log_2 64 = 6$ **27.** $\log 74 = x$ **29.** 7 **31.** 45
33. 6 **35.** -3 **37.** $\frac{1}{2}$ **39.** 2 **41.** 92 **43.** $\frac{2}{3}$
45. $\log A + 2 \log B + 3 \log C$ **47.** $\frac{1}{2}[\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)]$
49. $2 \log_5 x + \frac{3}{2} \log_5(1 - 5x) - \frac{1}{2} \log_5(x^3 - x)$
51. $\log 96$ **53.** $\log_2\left(\frac{(x - y)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2}\right)$ **55.** $\log\left(\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)$
57. 5 **59.** 2.60 **61.** -1.15 **63.** $-4, 2$
65. -15 **67.** 3 **69.** 0.430618
71. 2.303600

73.



asíntota vertical
$x = -2$
asíntota horizontal
$y = 2.72$
no hay máximo ni mínimo

75.

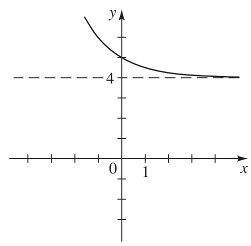


asíntotas verticales
$x = -1, x = 0, x = 1$
máximo local
$\approx (-0.58, -0.41)$

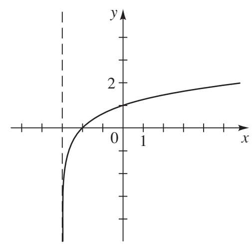
77. 2.42 **79.** $0.16 < x < 3.15$
81. Creciente sobre $(-\infty, 0]$ y $[1.10, \infty)$, decreciente sobre $[0, 1.10]$
83. 1.953445 **85.** -0.579352 **87.** $\log_4 258$
89. **(a)** \$16,081.15 **(b)** \$16,178.18 **(c)** \$16,197.64
(d) \$16,198.31 **91.** 1.83 años **93.** 4.341%
95. **(a)** $n(t) = 30e^{0.15t}$ **(b)** 55 **(c)** 19 años
97. **(a)** 9.97 mg **(b)** 1.39×10^5 años
99. **(a)** $n(t) = 150e^{-0.0004359t}$ **(b)** 97.0 mg **(c)** 2520 años
101. **(a)** $n(t) = 1500e^{0.1515t}$ **(b)** 7940
103. 7.9, básico **105.** 8.0

EXAMEN DE CAPÍTULO 4 ■ PÁGINA 356

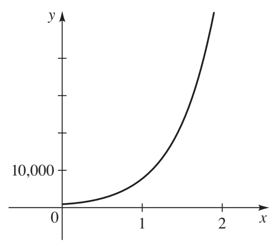
1. **(a)** $\mathbb{R}, (4, \infty), y = 4$



(b) $(-3, \infty), \mathbb{R}, x = -3$



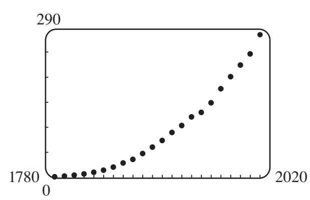
2. **(a)** $\log_6 25 = 2x$ **(b)** $e^3 = A$
3. **(a)** 36 **(b)** 3 **(c)** $\frac{3}{2}$ **(d)** 3 **(e)** $\frac{2}{3}$ **(f)** 2
4. $\frac{1}{3}[\log(x + 2) - 4 \log x - \log(x^2 + 4)]$
5. $\ln\left(\frac{x\sqrt{3 - x^4}}{(x^2 + 1)^2}\right)$ **6.** **(a)** 4.32 **(b)** 0.77 **(c)** 5.39 **(d)** 2
7. **(a)** $n(t) = 1000e^{2.07944t}$
(b) 22,627 **(c)** 1.3 h
(d)



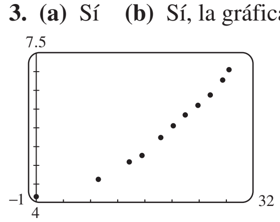
8. **(a)** $A(t) = 12{,}000\left(1 + \frac{0.056}{12}\right)^{12t}$
(b) \$14,195.06 **(c)** 9.249 años
9. **(a)** $A(t) = 3e^{-0.069t}$ **(b)** 0.048 g **(c)** después de 3.6 minutos
10. 1995 veces más intenso

ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 363

1. **(a)**

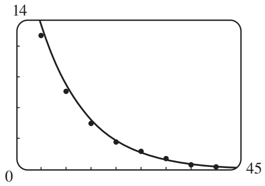


(b) $y = ab^t$, donde $a = 1.180609 \times 10^{-15}$, $b = 1.0204139$, y y es la población en millones en el año t **(c)** 515.9 millones
(d) 207.8 millones **(e)** No
3. **(a)** Sí **(b)** Sí, la gráfica de dispersión parece lineal.



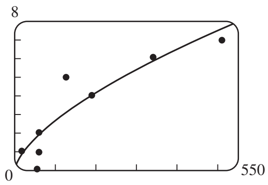
(c) $\ln E = 4.551436 + 0.092383t$, donde t es años desde 1970 y E es el gasto en miles de millones de dólares
(d) $E = 94.76838139e^{at}$, donde $a = 0.0923827621$
(e) 3478.5 mil millones de dólares

5. **(a)** $I_0 = 22.7586444$, $k = 0.1062398$
(b)



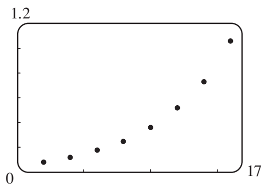
(c) 47.3 pies

7. **(a)** $S = 0.14A^{0.64}$
(b)

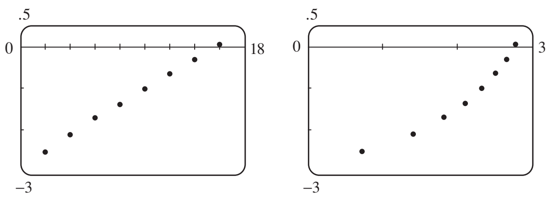


(c) 4 especies

9. **(a)**



(b)



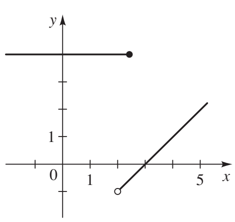
(c) Función exponencial
(d) $y = ab^x$ donde $a = 0.057697$ y $b = 1.200236$

11. **(a)** $y = \dfrac{c}{1 + ae^{-bx}}$, donde $a = 49.10976596$, $b = 0.4981144989$, y $c = 500.855793$ **(b)** 10.58 días

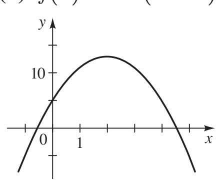
EXAMEN ACUMULATIVO DEL REPASO PARA LOS CAPÍTULOS 2,3 Y 4 ■ PÁGINA 367

1. **(a)** $(-\infty, \infty)$ **(b)** $[-4, \infty)$ **(c)** $12, 0, 0, 2, 2\sqrt{3}$, no definido
(d) $x^2 - 4$, $\sqrt{x+6}$, $-4 + h^2$ **(e)** $\frac{1}{8}$
(f) $f \circ g = x + 4 - \sqrt{x+4}$, $g \circ f = |x - 2|$, $f(g(12)) = 0$, $g(f(12)) = 10$ **(g)** $g^{-1}(x) = x^2 - 4$, $x \geq 0$

2. **(a)** 4, 4, 4, 0, 1 **(b)**



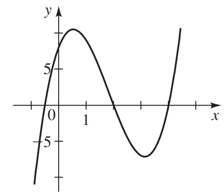
3. **(a)** $f(x) = -2(x-2)^2 + 13$ **(b)** Máximo 13
(c)



(d) Creciente sobre $(-\infty, 2]$; decreciente sobre $[2, \infty)$
(e) Se desplaza hacia arriba 5 unidades
(f) Se desplaza a la izquierda 3 unidades

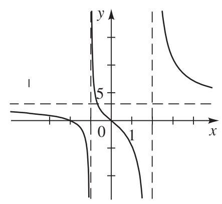
4. f, D; g, C; r, A; s, F; h, B; k, E

5. **(a)** $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{2}$ **(b)** $2, 4, -\frac{1}{2}$
(c) $P(x) = 2(x-2)(x-4)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ **(d)**

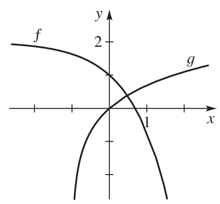


6. **(a)** 1 (multiplicidad 2); -1, $1 + i$, $1 - i$ (multiplicidad 1)
(b) $Q(x) = (x-1)^2(x+1)(x-1-i)(x-1+i)$
(c) $Q(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2 - 2x + 2)$

7. puntos de intersección x $0, -2$; punto de intersección y 0; asíntota horizontal $y = 3$; asíntotas verticales $x = 2$ y $x = -1$



8.



9. **(a)** -4 **(b)** $5 \log x + \frac{1}{2}\log(x-1) - \log(2x-3)$
10. **(a)** 4 **(b)** ln 2, ln 4 **11.** **(a)** \$29,396.15
(b) Después de 6.23 años **(c)** 12.837 años
12. **(a)** $P(t) = 120e^{0.0565t}$ **(b)** 917 **(c)** Después de 49.8 meses

CAPÍTULO 5

SECCIÓN 5.1 ■ PÁGINA 375

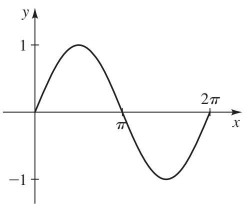
1. **(a)** $(0, 0)$, 1 **(b)** $x^2 + y^2 = 1$ **(c)** (i) 0 (ii) 0 (iii) 0 (iv) 0 **2.** **(a)** terminal **(b)** $(0, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, 0)$
9. $-\frac{4}{5}$ **11.** $-2\sqrt{2}/3$ **13.** $3\sqrt{5}/7$ **15.** $P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
17. $P\left(-\sqrt{5}/3, \frac{2}{3}\right)$ **19.** $P\left(-\sqrt{2}/3, -\sqrt{7}/3\right)$
21. $t = \pi/4$, $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$; $t = \pi/2$, $(0, 1)$;
$t = 3\pi/4$, $\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$; $t = \pi$, $(-1, 0)$;
$t = 5\pi/4$, $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$; $t = 3\pi/2$, $(0, -1)$;
$t = 7\pi/4$, $\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$; $t = 2\pi$, $(1, 0)$
23. $(0, 1)$ **25.** $\left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$ **27.** $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$
29. $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ **31.** $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$
33. **(a)** $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **(b)** $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **(c)** $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **(d)** $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
35. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** $\pi/3$ **(d)** $\pi/6$
37. **(a)** $2\pi/7$ **(b)** $2\pi/9$ **(c)** $\pi - 3 \approx 0.14$ **(d)** $2\pi - 5 \approx 1.28$
39. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$
41. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$
43. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$
45. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$
47. **(a)** $\pi/6$ **(b)** $\left(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}\right)$
49. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ **51.** **(a)** $\pi/3$ **(b)** $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$
53. $(0.5, 0.8)$ **55.** $(0.5, -0.9)$

SECCIÓN 5.2 ■ PÁGINA 384

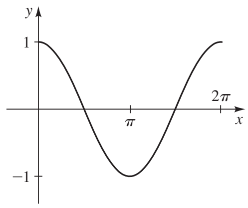
1. $y, x, y/x$ **2.** 1, 1 **3.** $t = \pi/4$, sen $t = \sqrt{2}/2$, cos $t = \sqrt{2}/2$; $t = \pi/2$, sen $t = 1$, cos $t = 0$; $t = 3\pi/4$, sen $t = \sqrt{2}/2$, cos $t = -\sqrt{2}/2$; $t = \pi$, sen $t = 0$, cos $t = -1$; $t = 5\pi/4$, sen $t = -\sqrt{2}/2$, cos $t = -\sqrt{2}/2$; $t = 3\pi/2$, sen $t = -1$, cos $t = 0$; $t = 7\pi/4$, sen $t = -\sqrt{2}/2$, cos $t = \sqrt{2}/2$; $t = 2\pi$, sen $t = 0$, cos $t = 1$
5. **(a)** $\sqrt{3}/2$ **(b)** $-1/2$ **(c)** $-\sqrt{3}$
7. **(a)** $-1/2$ **(b)** $-1/2$ **(c)** $-1/2$
9. **(a)** $-\sqrt{2}/2$ **(b)** $-\sqrt{2}/2$ **(c)** $\sqrt{2}/2$
11. **(a)** $\sqrt{3}/2$ **(b)** $2\sqrt{3}/3$ **(c)** $\sqrt{3}/3$
13. **(a)** -1 **(b)** 0 **(c)** 0
15. **(a)** 2 **(b)** $-2\sqrt{3}/3$ **(c)** 2
17. **(a)** $-\sqrt{3}/3$ **(b)** $\sqrt{3}/3$ **(c)** $-\sqrt{3}/3$
19. **(a)** $\sqrt{2}/2$ **(b)** $-\sqrt{2}$ **(c)** -1
21. **(a)** -1 **(b)** 1 **(c)** -1 **23.** **(a)** 0 **(b)** 1 **(c)** 0
25. sen $0 = 0$, cos $0 = 1$, tan $0 = 0$, sec $0 = 1$, otras no definidas
27. sen $\pi = 0$, cos $\pi = -1$, tan $\pi = 0$, sec $\pi = -1$, otras no definidas
29. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$ **31.** $-\sqrt{11}/4, \sqrt{5}/4, -\sqrt{55}/5$
33. $\sqrt{13}/7, -6/7, -\sqrt{13}/6$ **35.** $-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{12}{5}$ **37.** $\frac{21}{29}, -\frac{20}{29}, -\frac{21}{20}$
39. **(a)** 0.8 **(b)** 0.84147 **41.** **(a)** 0.9 **(b)** 0.93204
43. **(a)** 1 **(b)** 1.02964 **45.** **(a)** -0.6 **(b)** -0.57482
47. Negativo **49.** Negativo **51.** II **53.** II
55. sen $t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$
57. $\tan t = (\text{sen } t)/\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}$
59. $\sec t = -\sqrt{1 + \tan^2 t}$
61. $\tan t = \sqrt{\sec^2 t - 1}$
63. $\tan^2 t = (\text{sen}^2 t)/(1 - \text{sen}^2 t)$
65. $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\tan t = -\frac{3}{4}$, $\csc t = \frac{5}{3}$, $\sec t = -\frac{5}{4}$, $\cot t = -\frac{4}{3}$
67. sen $t = -2\sqrt{2}/3$, $\cos t = \frac{1}{3}$, $\tan t = -2\sqrt{2}$, $\csc t = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$, $\cot t = -\sqrt{2}/4$
69. sen $t = -\frac{3}{5}$, $\cos t = \frac{4}{5}$, $\csc t = -\frac{5}{3}$, $\sec t = \frac{5}{4}$, $\cot t = -\frac{4}{3}$
71. $\cos t = -\sqrt{15}/4$, $\tan t = \sqrt{15}/15$, $\csc t = -4$, $\sec t = -4\sqrt{15}/15$, $\cot t = \sqrt{15}$
73. Impar **75.** Impar **77.** Par **79.** Ninguna de éstas
81. $y(0) = 4$, $y(0.25) = -2.828$, $y(0.50) = 0$, $y(0.75) = 2.828$, $y(1.00) = -4$, $y(1.25) = 2.828$
83. **(a)** 0.49870 amp **(b)** -0.17117 amp

SECCIÓN 5.3 ■ PÁGINA 396

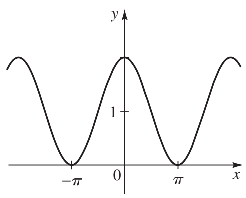
1. 1, 2π



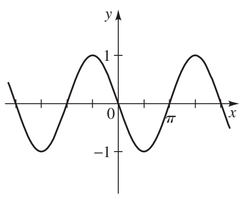
2. 3, π



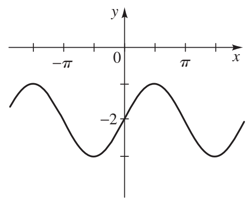
3.



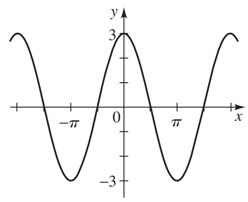
5.



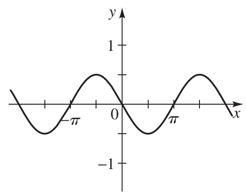
7.



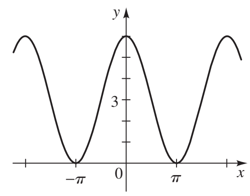
9.



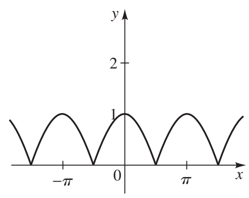
11.



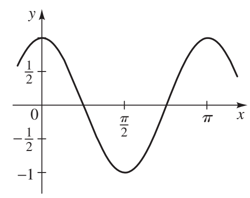
13.



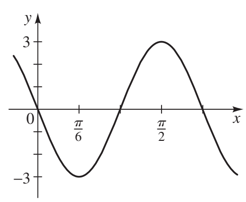
15.



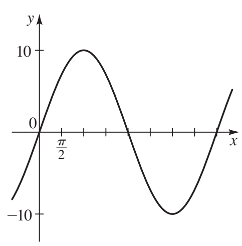
17. 1, π



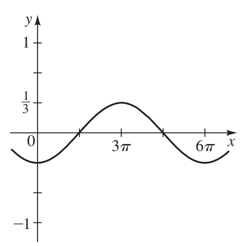
19. 3, $2\pi/3$



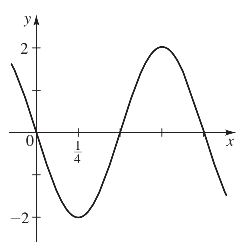
21. 10, 4π



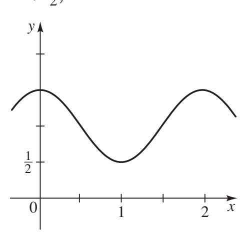
23. $\frac{1}{3}$, 6π



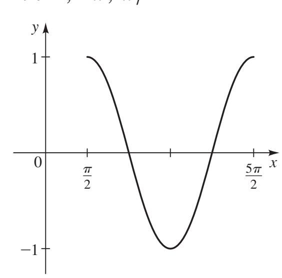
25. 2, 1



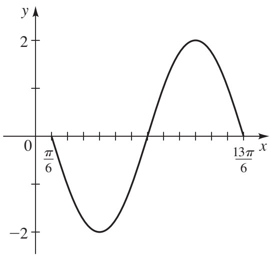
27. $\frac{1}{2}$, 2



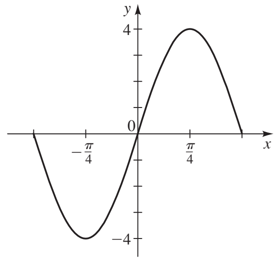
29. 1, 2π, $\pi/2$



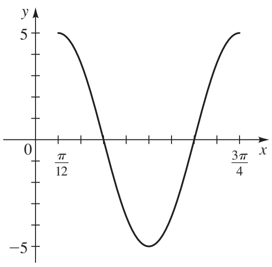
31. $2, 2\pi, \pi/6$



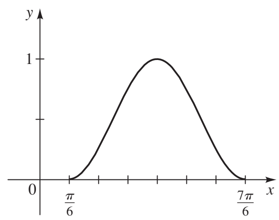
33. $4, \pi, -\pi/2$



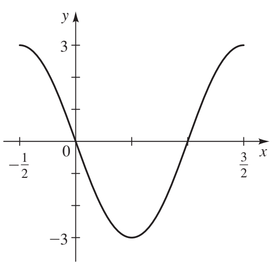
35. $5, 2\pi/3, \pi/12$



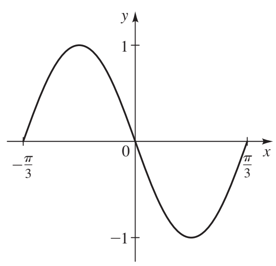
37. $\frac{1}{2}, \pi, \pi/6$



39. $3, 2, -\frac{1}{2}$

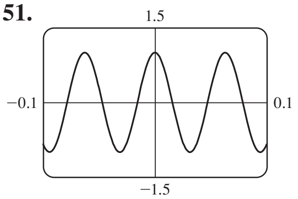


41. $1, 2\pi/3, -\pi/3$

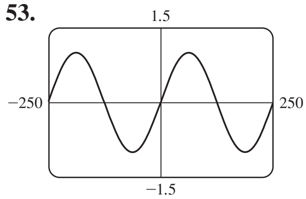


43. **(a)** $4, 2\pi, 0$ **(b)** $y = 4 \operatorname{sen} x$
45. **(a)** $\frac{3}{2}, \frac{2\pi}{3}, 0$ **(b)** $y = \frac{3}{2} \cos 3x$
47. **(a)** $\frac{1}{2}, \pi, -\frac{\pi}{3}$ **(b)** $y = -\frac{1}{2} \cos 2\left(x + \pi/3\right)$
49. **(a)** $4, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ **(b)** $y = 4 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

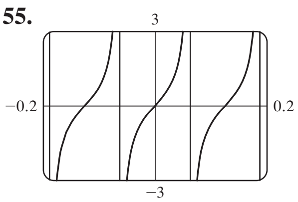
51.



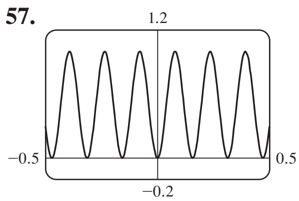
53.



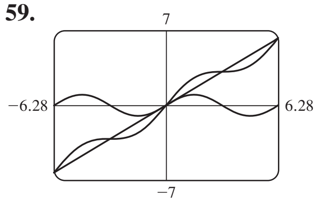
55.



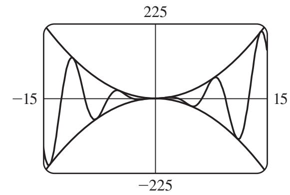
57.



59.

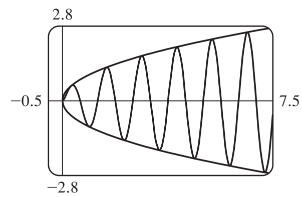


61.



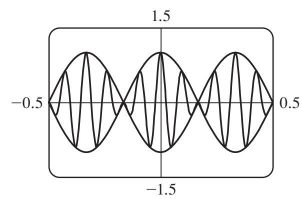
$y = x^2 \operatorname{sen} x$ es una curva senoidal que está entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$

63.



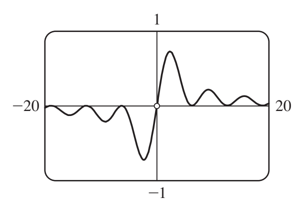
$y = \sqrt{x} \operatorname{sen} 5\pi x$ es una curva senoidal que está entre las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = -\sqrt{x}$

65.



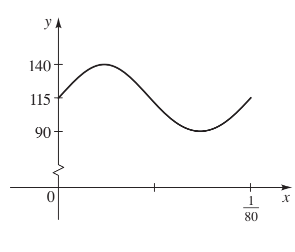
$y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$ es una curva senoidal que está entre las gráficas de $y = \cos 3\pi x$ y $y = -\cos 3\pi x$

67. Valor máximo 1.76 cuando $x \approx 0.94$, valor mínimo -1.76 cuando $x \approx -0.94$ (Los mismos valores máximo y mínimo se presentan en un número infinito de otros valores de x.)
69. Valor máximo 3.0 cuando $x \approx 1.57$, valor mínimo -1.00 cuando $x \approx -1.57$ (Los mismos valores máximo y mínimo se presentan en un número infinito de otros valores de x.)
71. 1.16 **73.** 0.34, 2.80
75. **(a)** Impar **(b)** $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$
(c)



(d) $f(x)$ se aproxima a 0
(e) $f(x)$ se aproxima a 0

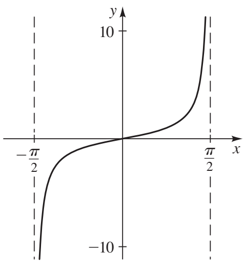
77. **(a)** 20 s **(b)** 6 pies
79. **(a)** $\frac{1}{80}$ min **(b)** 80
(c)



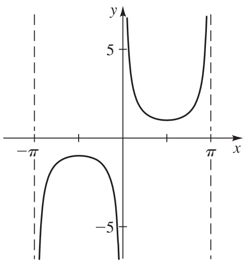
(d) $\frac{140}{90}$; es más alto de lo normal

SECCIÓN 5.4 ■ PÁGINA 405

1. π; $\frac{\pi}{2} + n\pi$, n un entero

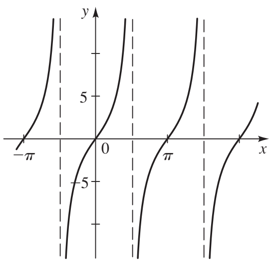


2. 2π; $n\pi$, n un entero

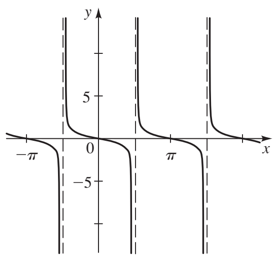


3. II **5.** VI **7.** IV

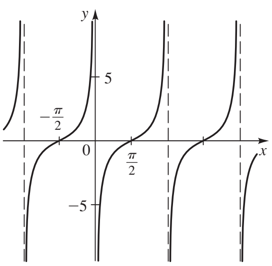
9. π



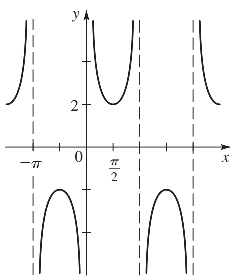
11. π



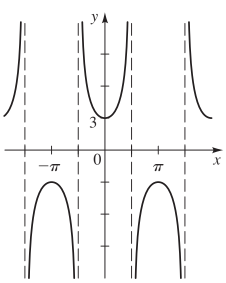
13. π



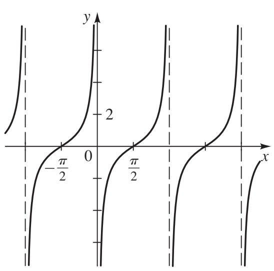
15. 2π



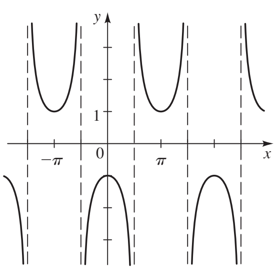
17. 2π



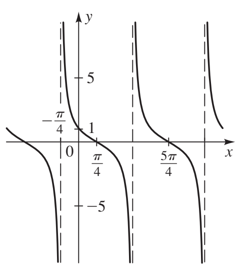
19. π



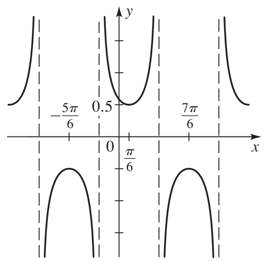
21. 2π



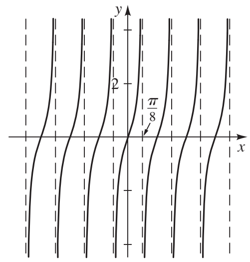
23. π



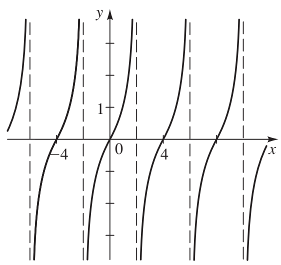
25. 2π



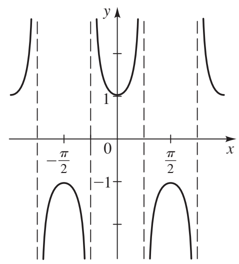
27. $\pi/4$



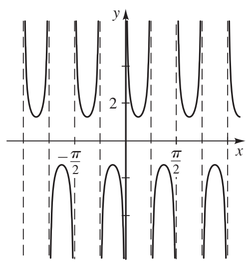
29. 4



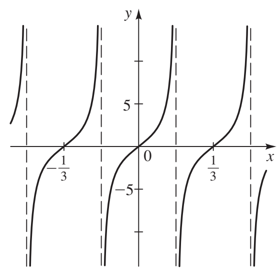
31. π



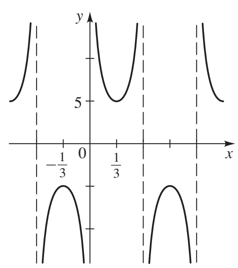
33. $\pi/2$



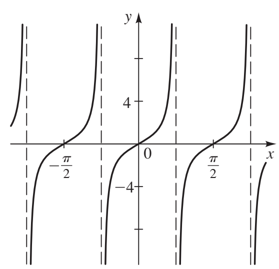
35. $\frac{1}{3}$



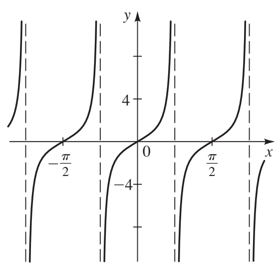
37. $\frac{4}{3}$



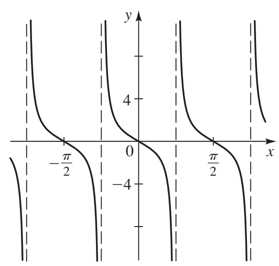
39. $\pi/2$



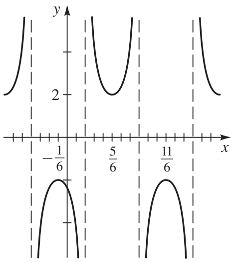
41. $\pi/2$



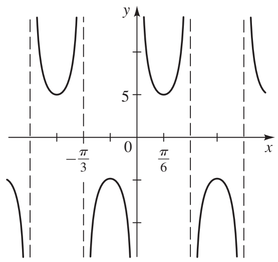
43. $\pi/2$



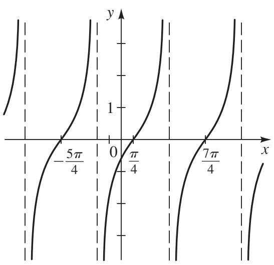
45. 2



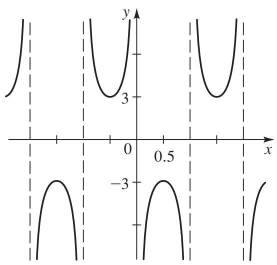
47. $2\pi/3$



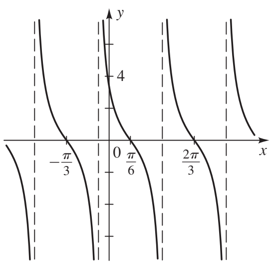
49. $3\pi/2$



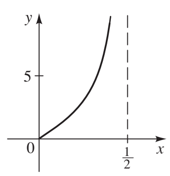
51. 2



53. $\pi/2$



57. (a) 1.53 mi, 3.00 mi, 18.94 mi
(b)



(c) $d(t)$ se aproxima al ∞

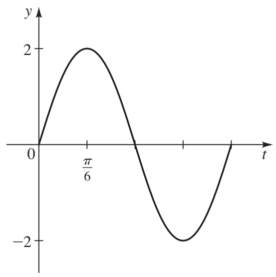
SECCIÓN 5.5 ■ PÁGINA 411

1. (a) $[-\pi/2, \pi/2]$, y, x, $\pi/6$, $\pi/6$, $\frac{1}{2}$
(b) $[0, \pi]$; y, x, $\pi/3$, $\pi/3$, $\frac{1}{2}$ **2.** $[-1, 1]$; (b)
3. (a) $\pi/2$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** No está definida
5. (a) π **(b)** $\pi/3$ **(c)** $5\pi/6$
7. (a) $-\pi/4$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** $\pi/6$
9. (a) $2\pi/3$ **(b)** $-\pi/4$ **(c)** $\pi/4$ **11.** 0.72973
13. 2.01371 **15.** 2.75876 **17.** 1.47113 **19.** 0.88998
21. -0.26005 **23.** $\frac{1}{4}$ **25.** 5
27. No está definida **29.** $5\pi/6$ **31.** $-\pi/6$ **33.** $\pi/6$ **35.** $\pi/6$
37. $-\pi/3$ **39.** $\sqrt{3}/3$ **41.** $\frac{1}{2}$ **43.** $-\sqrt{2}/2$

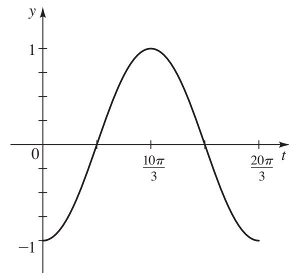
SECCIÓN 5.6 ■ PÁGINA 420

1. (a) a sen ωt **(b)** a cos ωt
2. (a) ke^{-ct} sen ωt **(b)** ke^{-ct} cos ωt

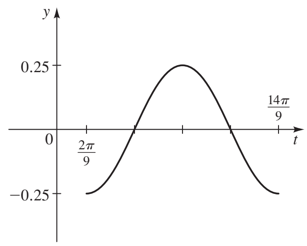
3. (a) 2, $2\pi/3$, $3/(2\pi)$
(b)



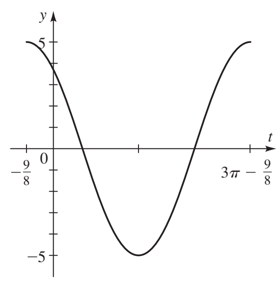
5. (a) 1, $20\pi/3$, $3/(20\pi)$
(b)



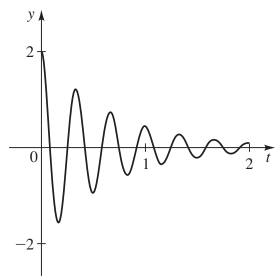
7. (a) $\frac{1}{4}$, $4\pi/3$, $3/(4\pi)$
(b)



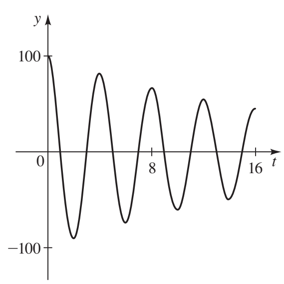
9. (a) 5, 3π, $1/(3\pi)$
(b)



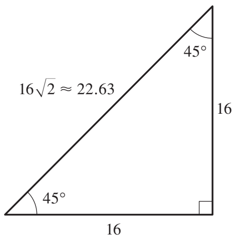
11. $y = 10 \text{ sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right)$ **13.** $y = 6 \text{ sen}(10t)$
15. $y = 60 \cos(4\pi t)$ **17.** $y = 2.4 \cos(1500\pi t)$
19. (a) $y = 2e^{-1.5t} \cos 6\pi t$
(b)



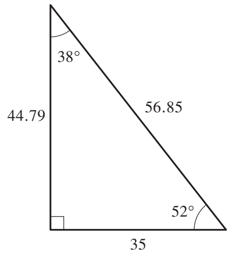
21. (a) $y = 100e^{-0.05t} \cos \dfrac{\pi}{2}t$
(b)



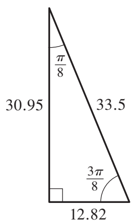
31.



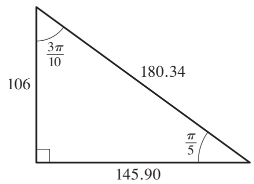
33.



35.



37.



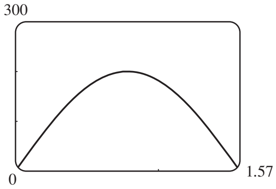
39. sen $\theta \approx 0.45$, cos $\theta \approx 0.89$, tan $\theta = 0.50$, csc $\theta \approx 2.24$, sec $\theta \approx 1.12$, cot $\theta = 2.00$ **41.** 230.9 **43.** 63.7
45. $x = 10 \tan\theta \operatorname{sen}\theta$ **47.** 1026 pies **49.** **(a)** 2100 mi **(b)** No
51. 19 pies **53.** 345 pies **55.** 415 pies, 152 pies **57.** 2570 pies
59. 5808 pies **61.** 91.7 millones de millas **63.** 3960 mi
65. 0.723 AU

SECCIÓN 6.3 ■ PÁGINA 459

1. $y/r,\ x/r,\ y/x$ **2.** cuadrante, positivo, negativo, negativo
3. **(a)** 30° **(b)** 30° **(c)** 30° **5.** **(a)** 45° **(b)** 90° **(c)** 75°
7. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $\pi/3$ **9.** **(a)** $2\pi/7$ **(b)** 0.4π **(c)** 1.4
11. $\frac{1}{2}$ **13.** $-\sqrt{3}/2$ **15.** $-\sqrt{3}$ **17.** 1 **19.** $-\sqrt{3}/2$
21. $\sqrt{3}/3$ **23.** $\sqrt{3}/2$ **25.** -1 **27.** $\frac{1}{2}$ **29.** 2 **31.** -1
33. No definido **35.** III **37.** IV
39. $\tan\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}/\cos\theta$
41. $\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$
43. $\sec\theta = -\sqrt{1 + \tan^2\theta}$
45. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
47. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\csc\theta = -\frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
49. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}/3$, $\sec\theta = 2\sqrt{3}/3$, $\cot\theta = \sqrt{3}$
51. $\operatorname{sen}\theta = 3\sqrt{5}/7$, $\tan\theta = -3\sqrt{5}/2$, $\csc\theta = 7\sqrt{5}/15$, $\sec\theta = -\frac{7}{2}$, $\cot\theta = -2\sqrt{5}/15$
53. **(a)** $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}$ **(b)** $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}/4$ **(c)** $\frac{3}{4}$, 0.88967 **55.** 19.1
57. 66.1° **59.** $(4\pi/3) - \sqrt{3} \approx 2.46$
63. **(b)**

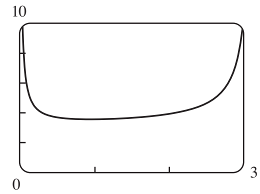
θ	20°	60°	80°	85°
h	1922	9145	29,944	60,351

65. **(a)** $A(\theta) = 400 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$
(b)



(c) ancho = profundidad ≈ 14.14 pulg.
67. **(a)** $9\sqrt{3}/4$ pies ≈ 3.897 pies, $\frac{9}{16}$ pies = 0.5625 pies
(b) 23.982 pies, 3.462 pies

69. **(a)**



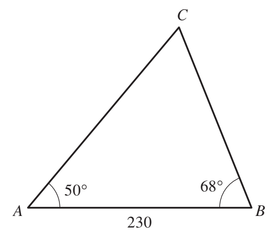
(b) 0.946 rad o 54°

SECCIÓN 6.4 ■ PÁGINA 467

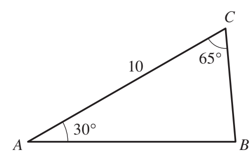
1. **(a)** $[-1, 1]$, $[-\pi/2, \pi/2]$ **(b)** $[-1, 1]$, $[0, \pi]$ **(c)** $\mathbb{R}$, $(-\pi/2, \pi/2)$ **2.** **(a)** $\frac{8}{10}$ **(b)** $\frac{6}{10}$ **(c)** $\frac{8}{6}$ **3.** **(a)** $\pi/6$ **(b)** $5\pi/6$ **(c)** $-\pi/4$ **5.** **(a)** $-\pi/6$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** $\pi/6$
7. 0.46677 **9.** 1.82348 **11.** 1.24905 **13.** No definida
15. 36.9° **17.** 34.7° **19.** 34.9° **21.** 30°, 150°
23. 44.4°, 135.6° **25.** 45.6° **27.** $\frac{4}{5}$ **29.** $\frac{13}{5}$ **31.** $\frac{12}{5}$
33. $\sqrt{1 - x^2}$ **35.** $x/\sqrt{1 - x^2}$ **37.** 72.5°, 19 pies
39. **(a)** $h = 2\tan\theta$ **(b)** $\theta = \tan^{-1}(h/2)$
41. **(a)** $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(h/680)$ **(b)** $\theta = 0.826$ rad
43. **(a)** 54.1° **(b)** 48.3°, 32.2°, 24.5°. La función sen^{-1} no está definida para valores fuera del intervalo $[-1, 1]$.

SECCIÓN 6.5 ■ PÁGINA 473

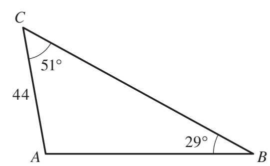
1. $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$ **2.** ALA, LLA **3.** 318.8 **5.** 24.8
7. 44° **9.** $\angle C = 114°$, $a \approx 51$, $b \approx 24$ **11.** $\angle A = 44°$, $\angle B = 68°$, $a \approx 8.99$ **13.** $\angle C = 62°$, $a \approx 200$, $b \approx 242$



15. $\angle B = 85°$, $a \approx 5$, $c \approx 9$



17. $\angle A = 100°$, $a \approx 89$, $c \approx 71$



19. $\angle B \approx 30°$, $\angle C \approx 40°$, $c \approx 19$ **21.** No hay solución
23. $\angle A_1 \approx 125°$, $\angle C_1 \approx 30°$, $a_1 \approx 49$; $\angle A_2 \approx 5°$, $\angle C_2 \approx 150°$, $a_2 \approx 5.6$ **25.** No hay solución
27. $\angle A_1 \approx 57.2°$, $\angle B_1 \approx 93.8°$, $b_1 \approx 30.9$; $\angle A_2 \approx 122.8°$, $\angle B_2 \approx 28.2°$, $b_2 \approx 14.6$
29. **(a)** 91.146° **(b)** 14.427° **33.** **(a)** 1018 mi **(b)** 1017 mi
35. 219 pies **37.** 55.9 m **39.** 175 pies **41.** 192 m
43. 0.427 AU, 1.119 AU

SECCIÓN 6.6 ■ PÁGINA 480

1. $a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ **2.** SSS, SAS **3.** 28.9 **5.** 47
7. 29.89° **9.** 15 **11.** $\angle A \approx 39.4°$, $\angle B \approx 20.6°$, $c \approx 24.6$

13. $\angle A \approx 48°, \angle B \approx 79°, c \approx 3.2$
15. $\angle A \approx 50°, \angle B \approx 73°, \angle C \approx 57°$
17. $\angle A_1 \approx 83.6°, \angle C_1 \approx 56.4°, a_1 \approx 193;$
$\angle A_2 \approx 16.4°, \angle C_2 \approx 123.6, a_2 \approx 54.9$ **19.** No hay tal triángulo
21. 2 **23.** 25.4 **25.** 89.2° **27.** 24.3 **29.** 54 **31.** 26.83
33. 5.33 **35.** 40.77 **37.** 3.85 cm^2 **39.** 2.30 mi **41.** 23.1 mi
43. 2179 mi **45.** **(a)** 62.6 mi **(b)** S 18.2° E **47.** 96°
49. 211 pies **51.** 3835 pies **53.** $165,554

REPASO DEL CAPÍTULO 6 ■ PÁGINA 483

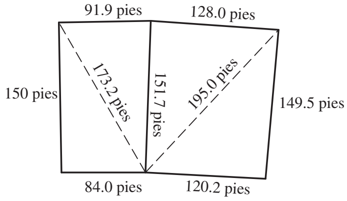
1. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $11\pi/6$ **(c)** $-3\pi/4$ **(d)** $-\pi/2$
3. **(a)** 450° **(b)** −30° **(c)** 405° **(d)** $(558/\pi)° \approx 177.6°$
5. 8 m **7.** 82 pies **9.** 0.619 rad ≈ 35.4° **11.** 18,151 pies^2
13. 300π rad/min ≈ 942.5 rad/min,
7539.8 pulg./min = 628.3 pies/min
15. $\operatorname{sen}\theta = 5/\sqrt{74}$, $\cos\theta = 7/\sqrt{74}$, $\tan\theta = \frac{5}{7}$,
$\csc\theta = \sqrt{74}/5$, $\sec\theta = \sqrt{74}/7$, $\cot\theta = \frac{7}{5}$
17. $x \approx 3.83, y \approx 3.21$ **19.** $x \approx 2.92, y \approx 3.11$
21. $A = 70°, a \approx 2.819, b \approx 1.026$
23. $A \approx 16.3°, C \approx 73.7°, c = 24$
25. $a = \cot\theta, b = \csc\theta$ **27.** 48 m **29.** 1076 mi **31.** $-\sqrt{2}/2$
33. 1 **35.** $-\sqrt{3}/3$ **37.** $-\sqrt{2}/2$ **39.** $2\sqrt{3}/3$ **41.** $-\sqrt{3}$
43. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$,
$\csc\theta = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\cot\theta = -\frac{5}{12}$ **45.** 60°
47. $\tan\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}/\cos\theta$
49. $\tan^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta/(1-\operatorname{sen}^2\theta)$
51. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{7}/4$, $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $\csc\theta = 4\sqrt{7}/7$, $\cot\theta = 3\sqrt{7}/7$
53. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
55. $-\sqrt{5}/5$ **57.** 1 **59.** $\pi/3$ **61.** $2/\sqrt{21}$ **63.** $x/\sqrt{1+x^2}$
65. $\theta = \cos^{-1}(x/3)$ **67.** 5.32 **69.** 148.07 **71.** 9.17
73. 54.1° o 125.9° **75.** 80.4° **77.** 77.3 mi **79.** 3.9 mi
81. 32.12

EXAMEN DEL CAPÍTULO 6 ■ PÁGINA 487

1. $11\pi/6, -3\pi/4$ **2.** 240°, −74.5°
3. **(a)** 240π rad/min ≈ 753.98 rad/min
(b) 12,063.7 pies/min = 137 mi/h **4.** **(a)** $\sqrt{2}/2$
(b) $\sqrt{3}/3$ **(c)** 2 **(d)** 1 **5.** $(26+6\sqrt{13})/39$
6. $a = 24 \operatorname{sen}\theta, b = 24\cos\theta$ **7.** $(4-3\sqrt{2})/4$
8. $-\frac{13}{12}$ **9.** $\tan\theta = -\sqrt{\sec^2\theta - 1}$ **10.** 19.6 pies
11. **(a)** $\theta = \tan^{-1}(x/4)$ **(b)** $\theta = \cos^{-1}(3/x)$ **12.** $\frac{40}{41}$
13. 9.1 **14.** 250.5 **15.** 8.4 **16.** 19.5 **17.** 78.6° **18.** 40.2°
19. **(a)** 15.3 m^2 **(b)** 24.3 m **20.** **(a)** 129.9° **(b)** 44.9
21. 554 pies

ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 490

1. 1.41 mi **3.** 14.3 m **5.** **(c)** 2349.8 pies
7.



CAPÍTULO 7

SECCIÓN 7.1 ■ PÁGINA 498

1. todos; **2.** $\cos(-x) = \cos x$ **3.** $\operatorname{sen} t$ **5.** $\tan\theta$ **7.** −1
9. $\csc u$ **11.** $\tan\theta$ **13.** 1 **15.** $\cos y$ **17.** $\operatorname{sen}^2 x$ **19.** $\sec x$
21. $2\sec u$ **23.** $\cos^2 x$ **25.** $\cos\theta$

27. **(a)** $\text{Lado Izq} = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = \text{Lado Der}$

29. $\text{Lado Izq} = \operatorname{sen}\theta \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \text{Lado Der}$

31. $\text{Lado Izq} = \cos u \dfrac{1}{\cos u} \cot u = \text{Lado Der}$

33. $\text{Lado Izq} = \operatorname{sen} B + \cos B \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} B}$
$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} B} = \text{Lado Der}$

35. $\text{Lado Izq} = -\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{-\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$
$= \dfrac{-1}{\operatorname{sen}\alpha} = \text{Lado Der}$

37. $\text{Lado Izq} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}$
$= \dfrac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta} = \text{Lado Der}$

39. $\text{Lado Izq} = 1 - \cos^2\beta = \operatorname{sen}^2\beta = \text{Lado Der}$

41. $\text{Lado Izq} = \dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)} = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
$= \dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)} = \text{Lado Der}$

43. $\text{Lado Izq} = \dfrac{\frac{1}{\cos t} - \cos t}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \dfrac{\cos t}{\cos t} = \dfrac{1-\cos^2 t}{1} = \text{Lado Der}$

45. $\text{Lado Izq} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y = \text{Lado Der}$

47. $\text{Lado Izq} = \cot x \cos x + \cot x - \csc x \cos x - \csc x$
$= \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x}$
$= \dfrac{-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = \text{Lado Der}$

49. $\text{Lado Izq} = \operatorname{sen}^2 x\left(1 + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \text{Lado Der}$

51. $\text{Lado Izq} = 2(1-\operatorname{sen}^2 x) - 1 = 2 - 2\operatorname{sen}^2 x - 1 = \text{Lado Der}$

53. $\text{Lado Izq} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \dfrac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$
$= \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha)} = \text{Lado Der}$

55. $\text{Lado Izq} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$
$= \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \text{Lado Der}$

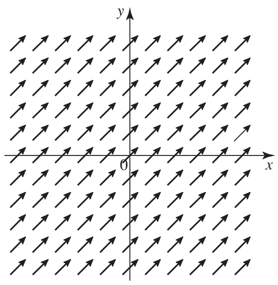
57. $\text{Lado Izq} = \dfrac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x + 1} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - 1}{(\operatorname{sen} x + 1)^2} = \text{Lado Der}$

10. (a) $\langle 4, -3, 4\rangle$ **(b)** $4x - 3y + 4z = 4$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

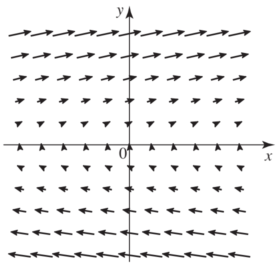
11. $x = 2 - 2t, y = -4 + t, z = 7 - 2t$

CAPÍTULO 9 ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 626

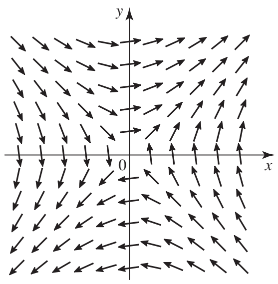
1.



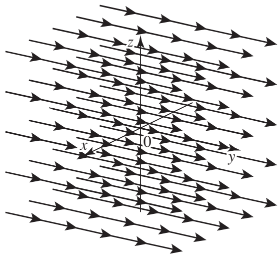
3.



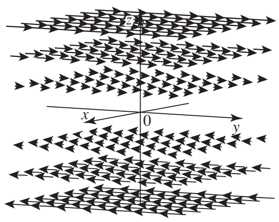
5.



7.

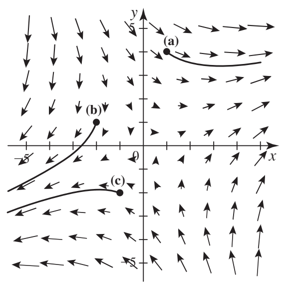


9.



11. II **13.** I **15.** IV **17.** III

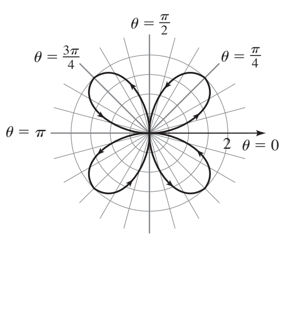
19.



EXAMEN ACUMULATIVO DE REPASO PARA CAPÍTULOS 8 Y 9 ■ PÁGINA 628

1. $(8\sqrt{2}, 7\pi/4), (-8\sqrt{2}, 3\pi/4)$

2. (a)



(b) $(x^2 + y^2)^{3/2} = 4xy$

3. (a) $z = 2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$

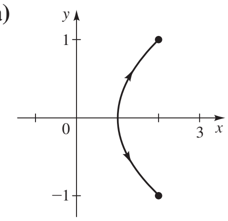
(b) $zw = 12\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i$,

$z/w = \dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{17\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{17\pi}{12}\right)$

(c) $z^{10} = 1024\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right) = 512 + 512\sqrt{3}i$

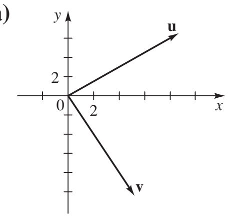
(d) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{18} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{18}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{23\pi}{18} + i\operatorname{sen}\dfrac{23\pi}{18}\right),$
$\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{35\pi}{18} + i\operatorname{sen}\dfrac{35\pi}{18}\right)$

4. (a)



(b) $x = y^2 + 1$, parábola

5. (a)



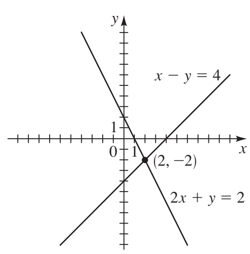
(b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 13, -4\rangle$, $2\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 11, 22\rangle$, $\theta \approx 100.3°$, $\operatorname{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\rangle$ **(c)** 82

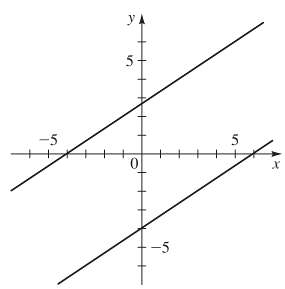
6. (a) 3 **(b)** $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$
(c) $x = 1 + 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 3 - 2t$
7. (a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \langle 2, -13, -3\rangle$, perpendicular
(b) $2x - 13y - 3z = 21$

CAPÍTULO 10

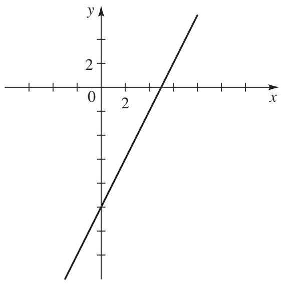
SECCIÓN 10.1 ■ PÁGINA 638

1. x, y; ecuación; (2, 1) **2.** sustitución, eliminación, gráfica **3.** no, número infinito **4.** número infinito; $1 - t$; (1, 0), (−3, 4), (5, −4) **5.** (3, 2) **7.** (3, 1) **9.** (2, 1) **11.** (1, 2) **13.** (−2, 3)
15. (2, −2) **17.** No hay solución





19. Un número infinito de soluciones



21. (2, 2) **23.** (3, −1) **25.** (2, 1) **27.** (3, 5) **29.** (1, 3) **31.** (10, −9) **33.** (2, 1) **35.** No hay solución **37.** $\left(x, \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}\right)$ **39.** $\left(x, 3 - \frac{3}{2}x\right)$ **41.** (−3, −7) **43.** $\left(x, 5 - \frac{5}{6}x\right)$ **45.** (5, 10) **47.** No hay solución **49.** (3.87, 2.74) **51.** (61.00, 20.00) **53.** $\left(-\dfrac{1}{a-1}, \dfrac{1}{a-1}\right)$ **55.** $\left(\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{a+b}\right)$ **57.** 22, 12

59. 5 monedas de 10 centavos, 9 de veinticinco **61.** 200 galones de gasolina regular, 80 galones de Premium **63.** Velocidad del avión 120 mi/h, velocidad del viento 30 mi/h **65.** 200 g de A, 40 g de B **67.** 25%, 10% **69.** $14,000 al 5%, $56,000 al 8% **71.** Juan $2\frac{1}{4}$ h, María $2\frac{1}{2}$ h **73.** 25

SECCIÓN 10.2 ■ PÁGINA 646

1. $x + 3z = 1$ **2.** -3; $4y - 5z = -4$ **3.** Lineal **5.** No lineal **7.** (1, 3, 2) **9.** (4, 0, 3) **11.** $\left(5, 2, -\frac{1}{2}\right)$

13. $\begin{cases} x - 2y - z = 4 \\ -y - 4z = 4 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ 3y + 7z = 14 \end{cases}$

17. (2, 1, −3) **19.** (1, 2, 1) **21.** (5, 0, 1) **23.** (0, 1, 2) **25.** $(1 - 3t, 2t, t)$ **27.** No hay solución **29.** No hay solución **31.** $(3 - t, -3 + 2t, t)$ **33.** $\left(2 - 2t, -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}t, t\right)$ **35.** (1, −1, 1, 2) **37.** $30,000 en bonos a corto plazo, $30,000 en bonos a plazo intermedio, $40,000 en bonos a largo plazo **39.** 250 acres de maíz, 500 acres de trigo, 450 acres de frijol de soja **41.** Imposible **43.** 50 Mango medianoche, 60 Torrente tropical, 30 polvo de piña **45.** 1500 acciones de A, 1200 acciones de B, 1000 acciones de C

SECCIÓN 10.3 ■ PÁGINA 659

1. dependiente, inconsistente

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

3. **(a)** x y y **(b)** dependiente **(c)** $x = 3 + t, y = 5 - 2t, z = t$ **4.** **(a)** $x = 2, y = 1, z = 3$ **(b)** $x = 2 - t, y = 1 - t, z = t$ **(c)** No hay solución **5.** 3×2 **7.** 2×1 **9.** 1×3

11. **(a)** Sí **(b)** Sí **(c)** $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$

13. **(a)** Sí **(b)** No **(c)** $\begin{cases} x + 2y + 8z = 0 \\ y + 3z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

15. **(a)** No **(b)** No **(c)** $\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y + 5z = 1 \end{cases}$

17. **(a)** Sí **(b)** Sí **(c)** $\begin{cases} x + 3y - w = 0 \\ z + 2w = 0 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

19. (1, 1, 2) **21.** (1, 0, 1) **23.** (−1, 0, 1) **25.** (−1, 5, 0) **27.** (10, 3, −2) **29.** No hay solución **31.** $(2 - 3t, 3 - 5t, t)$ **33.** No hay solución **35.** $(-2t + 5, t - 2, t)$ **37.** $x = -\frac{1}{2}s + t + 6, y = s, z = t$ **39.** (−2, 1, 3) **41.** No hay solución **43.** (−9, 2, 0) **45.** $x = 5 - t, y = -3 + 5t, z = t$ **47.** (0, −3, 0, −3) **49.** (−1, 0, 0, 1) **51.** $x = \frac{1}{3}s - \frac{2}{3}t, y = \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}t, z = s, w = t$ **53.** $\left(\frac{7}{4} - \frac{7}{4}t, -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t, \frac{9}{4} + \frac{3}{4}t, t\right)$ **55.** 2 VitaMax, 1 Vitron, 2 VitaPlus **57.** Carrera de 5 millas, nadar 2 millas, ciclismo 30 millas **59.** Imposible

SECCIÓN 10.4 ■ PÁGINA 669

1. dimensión **2.** **(a)** columna, renglones **(b)** (ii), (iii) **3.** (i), (ii)

4. $\begin{bmatrix} 4 & 9 & -7 \\ 7 & -7 & 0 \\ 4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$ **5.** No **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

11. Imposible **13.** $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & -7 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

17. No hay solución **19.** $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -25 & -20 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$ **21.** **(a)** $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Imposible **23.** **(a)** $\begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}$ **(b)** Imposible

25. **(a)** Imposible **(b)** $\begin{bmatrix} 14 & -14 \end{bmatrix}$

27. **(a)** $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -17 \end{bmatrix}$

29. **(a)** $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 10 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

31. **(a)** $\begin{bmatrix} 4 & -45 \\ 0 & 49 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 8 & -335 \\ 0 & 343 \end{bmatrix}$

33. **(a)** $\begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$ **(b)** Imposible

35. $x = 2, y = -1$ **37.** $x = 1, y = -2$

39. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

43. Sólo ACB está definido. $ACB = \begin{bmatrix} -3 & -21 & 27 & -6 \\ -2 & -14 & 18 & -4 \end{bmatrix}$

9. -65.

11. -6.

13. $\begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{28} \\ -\frac{5}{14} & -\frac{9}{28} \end{pmatrix}$.

15. No existe inversa.

17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} \frac{122}{117} \\ \frac{10}{13} \\ \frac{59}{39} \end{pmatrix}$.

23. $x_1 = \frac{1}{4} \quad x_2 = \frac{5}{4} \quad x_3 = -\frac{3}{4}$.

Capítulo 4

Problemas 4.1

1. $|\mathbf{v}| = 4\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$.

3. $|\mathbf{v}| = \sqrt{130}, \quad \theta = 0.9098$ rad.

5. $|\mathbf{v}| = \sqrt{7}, \quad \theta = \pi + 0.8571$ rad.

7. $|\mathbf{v}| = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$.

9. $|\mathbf{v}| = \sqrt{73}, \quad \theta = -1.2120$ rad.

11. $|\mathbf{v}| = \sqrt{13}, \quad \theta = 0.588003$ rad.

13. $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}, \quad \theta \approx 1.1071$.

15. $|\mathbf{v}| = 10\sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$.

17. $|\mathbf{v}| = 10, \theta = 0$.

19. $|\mathbf{v}| = \sqrt{85}, \theta = 1.7895$ rad.

21. *a*) $u + v = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ *b*) $u - v = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
c) $v - u = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ *d*) $-2u + 3v = 18\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$
e) $2u + 3v = 18\mathbf{i} + -11\mathbf{j}$ *f*) $u + 2v = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

23. Obteniendo la magnitud del vector $\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = 1$.

25. $\left\| \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{j} \right\| = 1$.

27. $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{34}, \mathbf{u} = \frac{3}{\sqrt{34}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{34}}\mathbf{j}$.

29. $\dfrac{\mathbf{u} = \mathbf{v}}{|\mathbf{v}| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}}$.

31. $-\frac{1}{\sqrt{73}}(3\mathbf{i} + 8\mathbf{j})$.

33. $|\mathbf{v}| = \sqrt{130}, \mathbf{u} = \frac{7}{\sqrt{130}}\mathbf{i} + \frac{9}{\sqrt{130}}\mathbf{j}$.

35. Use la definición de sen θ y cos θ, como la coordenada y o x de un punto sobre un círculo unitario, con θ radianes a partir del eje x en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

37. $\text{sen}\, \theta = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

39. $|\mathbf{u}| = \sqrt{13} \quad \mathbf{v} = -\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\mathbf{j}$.

41. $\mathbf{v} = -\frac{3}{\sqrt{58}}\mathbf{i} + \frac{7}{\sqrt{58}}\mathbf{j}$.

43. $\frac{1}{\sqrt{73}}(3\mathbf{i} + 8\mathbf{j})$.

45. $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$.

47. $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(c+a-c)^2 + (d+b-d)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$.

49. $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

51. $\mathbf{v} = \left(4, 4\sqrt{3}\right)$.

53. $\mathbf{v} = \left(-\frac{9}{2} \quad \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$.

55. $\mathbf{v} = \left(-\frac{7}{2} \quad -\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$.

57. Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Muestre que $u_1v_1 + u_2v_2 \leq \sqrt{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)}$ elevando ambos lados al cuadrado.
Después,
$$\begin{aligned} |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= |(u_1,u_2)+(v_1,v_2)|^2 = (u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2 \\ &= u_1^2 + u_2^2 + 2(u_1v_1+u_2v_2) + v_1^2 + v_2^2 \\ &\leq |\mathbf{u}|^2 + 2\sqrt{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)} + |\mathbf{v}|^2 \\ &= (|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2 \end{aligned}$$
Al sacar raíces cuadradas, se obtiene $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

59. $|\mathbf{v}| = 2.9915, \quad \angle\mathbf{v} = 0.9521 \text{ rad} \approx 54.5514°$.

61. $|\mathbf{v}| = 2.9915, \quad \angle\mathbf{v} = 2.1895 \text{ rad} \approx 125.4486°$.

63. $|\mathbf{v}| = 0.5814, \theta = 0.7158$ rad.

65. $|\mathbf{v}| = 114.7388, \quad \angle\mathbf{v} = 1.0408$ rad $\approx 59.6357°$.

67. $|\mathbf{v}| = 0.0864, \quad \angle\mathbf{v} = 1.4001$ rad $\approx -80.2205°$.

69. $|\mathbf{v}| = 0.8654, \theta = -3.1069$ rad.

71. $|\mathbf{v}| = 0.6490, \theta = 1.8277$ rad.

Problemas 4.2

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 25$, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{130}\sqrt{145}}{754}$.

3. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$; $\cos\varphi = 0$.

5. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$; $\cos\varphi = 0$.

7. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 30$, $\cos\varphi = \dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{149}}{298}$.

9. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$; $\cos\varphi = 0$.

11. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, $\cos\varphi = 0$.

13. El producto escalar es una operación en la cual la entrada son dos vectores y la salida es un número escalar. Entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ no está definido; una vez que se obtiene el primer producto escalar, entonces sería necesario obtener el producto escalar de un número escalar y un vector, lo cual no está definido como producto escalar.

15. Ninguno.

17. No son paralelos ni ortogonales.

19. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

21. *a)* $\alpha = 2$.
b) No existe solución.
c) $\alpha = 6$.
d) $\alpha = \dfrac{16 - 10\sqrt{3}}{11}$.

23. Que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tengan direcciones opuestas significa que $\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = -\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. Las ecuaciones cuadráticas $-\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 0$ y $\dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 0$ no tienen solución simultánea.

25. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \dfrac{3}{2}\mathbf{i} + \dfrac{3}{2}\mathbf{j}$.

27. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \dfrac{36}{13}\mathbf{i} - \dfrac{24}{13}\mathbf{j}$.

29. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{82}{29} \\ -\dfrac{205}{29} \end{pmatrix}$.

31. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = -\dfrac{2}{13}\mathbf{i} + \dfrac{3}{13}\mathbf{j}$.

33. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \dfrac{22}{13}\mathbf{i} - \dfrac{33}{13}\mathbf{j}$.

35. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{684}{181} \\ -\dfrac{760}{181} \end{pmatrix}$.

37. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \dfrac{\alpha - \beta}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

39. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}(a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})$. Para que $\mathbf{v}$ y $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tengan la misma dirección, se necesita que $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$.

41. $\text{proy}_{\overline{PQ}}\,\overline{RS} = \begin{pmatrix} -\dfrac{9}{5} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}$ y $\text{proy}_{\overline{RS}}\,\overline{PQ} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & -\dfrac{9}{5} \end{pmatrix}$.

43. Sea $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ con a y b no son cero y c y d no son cero. Suponga que $\cos\varphi = \dfrac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}} = \pm 1$
$\Rightarrow ac + bd = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \Rightarrow a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2$
$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \Rightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = 0$
$\Rightarrow (ad - bc)^2 = 0 \Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow c = \dfrac{d}{b}a$. Entonces,
$\dfrac{d}{b}\mathbf{u} = \dfrac{da}{b}\,\mathbf{i} + d\mathbf{j} + c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$. Entonces, $\alpha = \dfrac{d}{b}$. Suponga que $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \alpha a\mathbf{i} + \alpha b\mathbf{j}$ para cierta constante α.
Entonces, $\cos\varphi = \dfrac{\alpha a^2 + \alpha b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\alpha^2a^2+\alpha^2b^2}} = \dfrac{\alpha(a^2+b^2)}{|\alpha|(a^2+b^2)} \pm 1$.
Por lo tanto, los vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α.

45. Observe que $\left(0, -\dfrac{c}{b}\right)$ y $\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)$ son puntos en la línea. Entonces el vector de dirección para la línea es $\mathbf{u} = \dfrac{c}{a}\mathbf{i} - \dfrac{c}{b}\mathbf{j}$. Entonces, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = c - c = 0 \Rightarrow \mathbf{v}$ es ortogonal a la línea $ax + by + c = 0$.

47. $\cos A = \dfrac{23\sqrt{26}\sqrt{73}}{1\,898}$, $\cos B = -\dfrac{61\sqrt{26}\sqrt{617}}{16\,042}$,
$\cos C = \dfrac{104\sqrt{73}\sqrt{617}}{45\,041}$.

49. Sea $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, y $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$, donde φ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Entonces, $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\varphi$. Pero $|\cos\varphi| \le 1$. Entonces, $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Es decir, la desigualdad Cauchy-Schwarz es verdadera. La igualdad se mantiene si $\cos\varphi = \pm 1$. Es decir, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.

51. La línea que pasa por los puntos Q y R la de la ecuación $y = \left(-\dfrac{1}{2}\right)x + \dfrac{13}{2}$. La línea perpendicular que pasa por P es entonces $y = 2x - 1$ y estas líneas se intersecan en el punto $R = (3, 5)$. La distancia de P a R es $d = \sqrt{(3-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$.

53. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces, $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$. Entonces, $A^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. $A^\top A = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 ab + cd \\ ab + cd\, b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como $A^{-1} = A^\top$.

55. $(-0.8845, 0.4665)$.

57. $(-0.2708, -0.9626)$.

59. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (-1.4289, -2.6693)$.

61. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (-6\,164.36, 3\,523.92)$.

Problemas 4.3

1. $\overline{PQ} = 2$.

3. $\overline{PQ} = 6$.

5. $\overline{PQ} = 17$.

7. $|\mathbf{v}| = \sqrt{145}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{145}}{145} \\ \frac{2\sqrt{145}}{29} \\ \frac{3\sqrt{145}}{145} \end{pmatrix}$.

9. $|\mathbf{v}| = \sqrt{230}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{230}}{23} \\ \frac{7\sqrt{230}}{230} \\ \frac{9\sqrt{230}}{230} \end{pmatrix}$.

11. $|\mathbf{v}| = \sqrt{21},\ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{21}},\ \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{21}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{21}}$.

13. $|\mathbf{v}| = \sqrt{66}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{66}}{33} \\ \frac{5\sqrt{66}}{66} \\ \frac{5\sqrt{66}}{66} \end{pmatrix}$.

15. $|\mathbf{v}| = \sqrt{3}$.

17. $|\mathbf{v}| = \sqrt{30},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{30}},\ \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{30}},\ \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

19. $|\mathbf{v}| = \sqrt{141}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{141}}{141} \\ -\frac{10\sqrt{141}}{141} \\ -\frac{5\sqrt{141}}{141} \end{pmatrix}$.

21. $|\mathbf{v}| = \sqrt{3},\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

23. $|\mathbf{v}| = \sqrt{3},\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

25. $|\mathbf{v}| = \sqrt{113}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{113}}{113} \\ -\frac{4\sqrt{113}}{113} \\ \frac{9\sqrt{113}}{113} \end{pmatrix}$.

27. Sea $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$. Como $\mathbf{u}$ es un vector de unidad, se debe tener $3\alpha^2 = 1$. Como los ángulos de dirección están entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, entonces $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

29. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{185}}{37} & \frac{4\sqrt{185}}{185} & -\frac{12\sqrt{185}}{185} \end{pmatrix}$.

31. $(0 \quad -1 \quad 0)$.

33. $|\overrightarrow{PR}| = (x - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1$, que es la ecuación de un círculo en el plano xz de radio unitario centrado en $x = 3$ y $z = 3$.

35. Mediante la prueba al problema 34, se tendrá una igualdad si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Suponga que $\mathbf{v} \neq 0$ y $\mathbf{u} \neq 0$. Mediante el teorema 4.3.2, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ si y sólo si $\varphi = 0$. Mediante el inciso *i*) del teorema 4.3.2 se tiene $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$, si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para algunas $\alpha > 0$. Se concluye que para todos los vectores $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ si y sólo si $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$, o $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para cierta $\alpha > 0$. Por lo tanto, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ si y sólo si uno de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, es un múltiplo escalar no negativo del otro.

37. $18\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$.

39. $3\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$.

41. 31.

43. -24.

45. $\sqrt{86}$.

47. arc cos (25).

49. $\frac{8}{3}\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j} - \frac{8}{3}\mathbf{k}$.

51. $\frac{121}{2}$.

53. Por la ley de los cosenos, $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2\, |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\varphi$. Dado que $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$, entonces $\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$.

55. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

57. $|\mathbf{v}| = 1.7809$, $\text{dir}(\mathbf{v}) = (0.6139 \quad 0.6229 \quad -0.4850)$.

59. $|\mathbf{v}| = 0.0516$, $\text{dir}(\mathbf{v}) = (0.2635, -0.4205, -0.8681)$.

61. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (0.0430 \quad 0.2360 \quad -0.8983)$.

63. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (0.1389, -0.1010, 0.0584)$.

Problemas 4.4

1. $7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

3. $-48\mathbf{i} - 16\mathbf{j} - 60\mathbf{k}$.

5. $28i + 21j - 8k$.

7. $(ad - bc)\mathbf{k}$.

9. $12\mathbf{i} - 138\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$.

11. $-14\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$.

13. $69\mathbf{i} - 84\mathbf{j} + 142\mathbf{k}$.

15. $42\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$.

17. $(b - c)i + (-a + c)j + (a - b)k$.

19. $-110\mathbf{i} + 22\mathbf{j} - 132\mathbf{k}$.

21. $4\mathbf{i} + 8\mathbf{k}$.

23. $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$.

25. $24i - 17j + 9k$.

27. $-20\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

29. $-\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$ y $\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$.

31. $\cos\varphi = \dfrac{-12}{\sqrt{174}}$.

33. Área $= \sqrt{37\,565}$.

35. $11\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. $6\sqrt{74}$ = Área.

37. $|ab|\,\sqrt{3}$.

39. Área $= \sqrt{9\,149}$.

41. Sean $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$

$\mathbf{u} \times 0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ y $0 \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$, por la propiedad 3.2.1 de la sección 3.2.

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$. Después, por la propiedad 3.2.4 de la sección 3.2, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

$(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$ y $0 \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$, por la propiedad 3.2.2 de la sección 3.2.

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ d+l & e+m & f+n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix}$, por la propiedad 3.2.3 de la sección 3.2.

43. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (-(\mathbf{v} \times \mathbf{u})) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. Por ende, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u})$. Por ende, $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.

45. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

47. Volumen $= 5$.

49. *a*) Volumen generado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} = 18$.
b) Volumen generado por $A\mathbf{u}, A\mathbf{v}, A\mathbf{w} = 1\,224$.
c) $\det A = -68$.
d) $1\,224 = -(68)(18)$.

51. $(0.2944, 0.6761, -0.5478)$.

53. $(0.3623, -0.6747, -1.6047)$.

Problemas 4.5

1. $\mathbf{v} = (-1 - 1)\mathbf{i} + (1 + 1)\mathbf{j} + (-1 - 1)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + t(-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$; $x = 1 - 2t$, $y = -1 + 2t$, $z - 1 - 2t$; $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$.

3. $(x \quad y \quad z) = (2t + 7 \quad 9 - 6t \quad -8)$; $x = 2t + 7$, $y = 9 - 6t$, $z = -8$; $\dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-9}{-6}$, $z = -8$.

5. $\mathbf{v} = (3 - 1)\mathbf{i} + (2 - 2)\mathbf{j} + (1 - 3)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$
$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} - 2\mathbf{k})$; $x = 1 + 2t$, $y = 2$, $z = 3 - 2t$; $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$, $y = 2$.

7. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (1 - 2t)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (3 - 5t)\mathbf{k}$, $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{z-3}{-5}$, $y = 2$.

9. $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = -\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$; $x = -1 + 4t$, $y = -6 + t$, $z = 2 - 3t$; $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+6}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$.

11. $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} + t(4\mathbf{k})$; $x = -2$, $y = 3$, $z = -2 + 4t$; $x = -2$, $y = 3$.

13. $(x \quad y \quad z) = (6 - 10t \quad 7t + 10 \quad 9t + 3)$; $x = 6 - 10t$, $y = 7t + 10$, $z = 9t + 3$; $\dfrac{x-6}{-10} = \dfrac{y-10}{7} = \dfrac{z-3}{9}$.

15. $(x \quad y \quad z) = (a \quad b + dt \quad c + et)$; $x = a$, $y = b + dt$, $z = c + et$; $x = a$, $\dfrac{y-b}{d} = \dfrac{z-c}{e}$.

17. $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + c\mathbf{k}$, $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (-2 + at)\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + (7 + ct)\mathbf{k}$, $\dfrac{x+1}{a} = \dfrac{z-7}{c}$, $y = 3$, a, b arbitrarios diferentes de cero.

19. $(x \quad y \quad z) = (4 - 2t \quad 3t + 5 \quad 5 - 7t)$; $x = 4 - 2t$, $y = 3t + 5$, $z = 5 - 7t$; $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-5}{-7}$.

21. $(2, 4, -1) \cdot (5, -2, 2) = 10 - 8 - 2 = 0$, mediante el problema 20.

23. Si $t = 1$ y $s = -5$, ambos conjuntos de ecuaciones paramétricas dan el punto $(2, -1, -3)$. (Encuentre t, s resolviendo las tres ecuaciones obtenidas mediante el cálculo de las coordenadas de L_1, L_2.)

25. Se requiere una t tal que $\overrightarrow{OR} \cdot \mathbf{v} = (\overrightarrow{OP} + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$. Al resolver para t se tiene $t = -\dfrac{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$.

27. $\dfrac{\sqrt{29}\sqrt{598}}{29}$.

29. $\dfrac{2\sqrt{13}\sqrt{543}}{13}$.

31. Se desea $\mathbf{v} = (a, b, c)$ tal que $\mathbf{v} \cdot (-4, -7, 3) = 0$ y $\mathbf{v} \cdot (3, -4, -2) = 0$. Esto produce el sistema
$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -7 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 11 & -1 & 0 \\ 0 & 37 & -1 & 0 \end{array}\right).$$
Si $c = 37$, entonces $b = 1$ y $a = 26$. Por lo tanto, la línea $\dfrac{x+4}{26} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{37}$ satisface las condiciones.

33. La línea $x = 4 - 4t$, $y = 6 + 16t$, $z = 24t$ satisface las condiciones.

35. $(x \quad y \quad z) = (11t - 10 \quad -18t - 1 \quad -6t - 2)$.

37. Sea $\mathbf{v} = (a, b, c)$, $\mathbf{v} \cdot (3, -4, 4) = 0$ y $\mathbf{v} \cdot (-3, 4, 1) = 0$ dan $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Sea $b = 3$. Entonces, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$ es perpendicular tanto a L_1 como a L_2. El punto $P = (-2, 7, 2)$ está en L_1 y el punto $Q = (1, -2, -1)$ está en L_2. Así, la distancia entre L_1 y L_2 está dada por
$$|\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \overline{PQ}| \left|\frac{\overline{PQ} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}\right| = \frac{|\overline{PQ} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{15}{5} = 3.$$

Usar $\left(\mathbf{x} - \overrightarrow{OP}\right) \cdot \mathbf{u} = 0$ en 33-44.

39. $y = 0$.

41. $1(x - 1) + 1(y - 2) + 0(z - 3) = 0$; $x + y = 3$.

43. $3x - 2y + 6z = 36$.

45. $3(x - 2) - (y + 1) + 2(x - 6) = 0$; $3x - y + 2z = 19$.

47. $4(x + 3) + (y - 11) - 7(z - 2) = 0$; $4x + y - 7z = -15$.

49. $5x - 7y + 5z = 26$.

51. $x - 13y + 9z = -9$.

53. Sea $P = (1, 0, 0)$ $Q = (0, 1, 0)$ y $R = (0, 0, 1)$. Como antes, calcule $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ para hallar $n = \overline{PQ} \times \overline{QR} =$
$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Por lo tanto, π está dada por $(x - 1) + y + z = 0$, que se simplifica a $x + y + z = 1$.

55. $20x - 8y - 22z = 102$.

57. No son ortogonales, ni paralelos, ni coincidentes.

59. $\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{n}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 + 0$. Por lo tanto, π_1 y π_2 son ortogonales.

61. Ninguno.

63. $x = \dfrac{40\,t}{7} + \dfrac{467}{7}$, $y = \dfrac{39\,t}{7} + \dfrac{333}{7}$, $z = t$.

65. $x = \dfrac{9}{7} - \dfrac{4}{7}t$, $y = -\dfrac{1}{14} + \dfrac{23}{14}t$, $z = t$.

67. Sea $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $n = (a, b, c)$ y π está dada por $ax + by + cz = d$. Se desea que $R = (r_1, r_2, r_3)$ en π y un $\alpha \neq 0$ tal que $\overline{RQ} = \alpha\mathbf{n}$. Entonces, se tendrá $D = |\overline{RQ}|$, $\overline{RQ} = \alpha n$, que da $r_1 = q_1 - \alpha a$, $r_2 = q_2 - \alpha b$ y $r_3 = q = -\alpha c$. Al sustituir estas ecuaciones en $ar_1 + br_2 + cr_3 = d$ y resolver para α, se obtiene
$\alpha = \dfrac{aq_1 + bq_2 + cq_3 - d}{|\mathbf{n}|^2}$. Dado que $ap_1 + bp_2 + cp_3 = d$,
entonces $\alpha = \dfrac{a(q_1 - p_1) + b(q_2 - p_2) + c(q_3 - p_3)}{|\mathbf{n}|^2} = \dfrac{\overline{PQ} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$.

Por lo tanto,
$$D = |\overline{RQ}| = |(\alpha a, \alpha b, \alpha c)| = \left|\left(\frac{\overline{PQ} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}a, \frac{\overline{PQ} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}b, \frac{\overline{PQ} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}c,\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\overline{PQ} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\right| = |\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \overline{PQ}| = \frac{|\overline{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}.$$

69. El punto $\left(\dfrac{5}{2}, 0, 0\right)$ está en el plano. Entonces, $\overline{PQ} =$
$\left(-7, \dfrac{5}{2}, -2 - 0, -1 - 0\right) = \left(-\dfrac{19}{2}, -2, -1\right)$, y
$$D = \frac{\left|\left(-\frac{19}{2}, -2, 1\right) \cdot (-2, 0, 8)\right|}{|(-2, 0, 8)|} = \frac{11}{2\sqrt{17}}.$$

71. $D = \dfrac{\sqrt{33}}{33}$.

73. 0.7706 rad.

75. 2.0671 rad.

77. Supóngase que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son coplanares. Dado que $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$.

Por lo tanto, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$. Por otra parte, suponga $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$. Entonces, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Como $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a **v** y **w**, por lo tanto **u** yace en el plano determinado por **v** y **w**. Use el problema 77 para resolver 78-82.

79. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (-3, 1, 8) \cdot (-58, 2, -22) = 0$; coplanar π: $-58x + 2y - 22z = 0 \Rightarrow -29x + y - 11z = 0$.

81. Los vectores no son coplanares.

83. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 18$; no son coplanares.

Ejercicios de repaso capítulo 4

1. $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

3. $|\mathbf{v}| = \sqrt{181}$, $\theta = 2.3036$ rad.

5. $|\mathbf{v}| = 4$, $\varphi = 10\frac{\pi}{6}$.

7. $|\mathbf{v}| = \sqrt{14}$, $\theta \approx \pi - 0.6405$.

9. $|\mathbf{v}| = \sqrt{37}$, $\theta = 2.9764$ rad.

11. $\overrightarrow{PQ} = 6\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$.

13. $\overrightarrow{PQ} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

15. $(9 \quad -3)$.

17. $(1 \quad -3)$.

19. $10\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$.

21. $-2\mathbf{i} + 38\mathbf{j}$.

23. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

25. $-\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$.

27. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{58}}(-7\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$.

29. $\mathbf{u} = \frac{8\sqrt{145}}{145}\mathbf{i} - \frac{9\sqrt{145}}{145}\mathbf{j}$.

31. $\mathbf{u} = -\frac{\sqrt{26}}{26}\mathbf{i} + \frac{5\sqrt{26}}{26}\mathbf{j}$.

33. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{29}}(-5\mathbf{i} + -2\mathbf{j})$.

35. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{249}}(-10\mathbf{i} + 7\mathbf{j})$.

37. $-3\mathbf{i} - 3\sqrt{3}\mathbf{j}$.

39. $\mathbf{v} = -4\mathbf{i}$.

41. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -96$, $\cos\varphi = -\frac{32\sqrt{137}}{685}$.

43. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$, $\cos\varphi = -\frac{22}{\sqrt{3\,965}}$.

45. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -14$, $\cos\varphi = -\frac{14}{\sqrt{205}}$.

47. Ninguno.

49. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -40$, $\cos\varphi = \frac{40}{41} \Rightarrow$ **u** y **v** no son paralelos ni ortogonales.

51. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, **u** y **v** son ortogonales.

53. $\mathbf{u} = 7\mathbf{v} \Rightarrow$ **u** y **v** son paralelos.

55. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = -\frac{33}{29}\mathbf{i} + \frac{77}{29}\mathbf{j}$.

57. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{3}{13}\mathbf{i} + \frac{2}{13}\mathbf{j}$.

59. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = -\frac{3}{10}\mathbf{i} + \frac{9}{10}\mathbf{j}$.

61. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = 0$.

63. $\text{proy}_{\overline{PQ}}\overrightarrow{RS} = -\frac{33}{82}(\mathbf{i} + 9\mathbf{j})$, $\text{proy}_{\overline{PQ}}\overrightarrow{RS} = -\frac{33}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$.

65. $d = \sqrt{506}$.

67. $2\sqrt{30}$.

69. $|\mathbf{v}| = \sqrt{14}$; $\cos\alpha\ \frac{1}{\sqrt{14}}$; $\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma = -\frac{3}{\sqrt{14}}$.

71. $|\mathbf{v}| = 9$, $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$.

73. $u = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$.

75. $-16\mathbf{i} + 17\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$.

77. $\frac{196}{135}\mathbf{i} + \frac{196}{135}\mathbf{j} + \frac{196}{135}\mathbf{k}$.

79. $41\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 35\mathbf{k}$.

81. 13.

83. 2.0793 rad.

85. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -33\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 43\mathbf{k}$.

87. $-26\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

89. Área $= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{1\,201}$.

91. Ecuación vectorial: $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + t[-5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}]$.
Ecuación paramétrica: $x = -1 - 5t$, $y = 2 + 2t$, $z = -3 + 3t$.
Ecuación simétrica: $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$.

93. $L: (x \quad y \quad z) = (-3 \quad 5 \quad -4) + t(1 \quad -1 \quad 1)$; $x = -3 + t$, $y = 5 - t$, $z = -4 + t$; $x + 3 = 5 - y = z + 4$.

95. Ecuación vectorial: $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + t(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.
Ecuación paramétrica: $x = 1 + 5t$, $y = -2 - 3t$, $z = -3 + 2t$.
Ecuación simétrica: $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{2}$.

97. $d = \sqrt{85}$.

99. $11x - 2y - 6z = -47$.

101. $2x - 3y + 5z = 19$.

103. $8(x + 1) + 9(y - 3) + 19(z - 2) = 0$.

105. $x = \frac{3}{4}, y = -\frac{5}{2}, z = \frac{15}{4}$.

107. $x = \frac{4}{3} - \frac{15}{6}t, y = -4 - \frac{7}{2}t, z = t$.

109. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

111. Plano: $4(x - 1) + 6(y + 2) + 8(z - 1) = 0 \Rightarrow 4x + 6y + 8z = 0$.
Entonces: $4(9) + 6(-2) + 8(-3) = 36 - 12 - 24 = 0$.
Por lo tanto, **u**, **v** y **w** son coplanares.

Capítulo 5

Problemas 5.1

1. No es un espacio vectorial; no existen elementos inversos.

3. Sí es un espacio vectorial.

5. No; iv) no toda matriz diagonal tiene un inverso multiplicador.

7. No; iv) si (x, y) está estrictamente en el primer cuadrante, entonces $(-x, -y)$ está en el tercer cuadrante; vi) no aplica si $\alpha < 0$.

9. No; i) $x^4 - x^4 = 0$; iii) $0 \notin V$.

11. Sí; los axiomas se derivan de los teoremas 2.5.1 y 2.1.1.

13. No; i) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha + a \\ \beta + b & 2 \end{pmatrix} \notin V$; iii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin V$; iv) $-\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ -\beta & -1 \end{pmatrix} \notin V$; si $\alpha \neq 1$.

15. Sí es un espacio vectorial.

17. Sí, i) la suma de dos polinomios con un término constante cero tendrá un término constante cero, iii) $0 \in V$, iv) si $p(x) \in V$, entonces $-p(x) \in V$; iv) $\alpha p(x)$ tiene un término constante cero para todo escalar α; el resto de los axiomas se deriva de las reglas usuales de la adición y de la multiplicación escalar de polinomios.

19. No, ya que el neutro aditivo tendrá término constante positivo.

21. Sí; i) $t_1(a, b, c) + t_2(a, b, c) = (t_1 + t_2)(a, b, c) \in V$; iii) $(0, 0, 0) \in V$; iv) si $(\alpha, \beta, \gamma) = t(a, b, c) \in V$, entonces $(-\alpha, -\beta, -\gamma) = (-t)(a, b, c) \in V$; vi) $a[t(a, b, c)] = (\alpha t)(a, b, c) \in V$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el resto de las acciones se derivan de la sección 1.5.

23. No; vii) si $\alpha \neq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha(x + y) &= \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha, \alpha x_2 + ay_2 + 1); \\ &\neq \alpha x + \alpha y = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2 + 11); \end{aligned}$$

viii) $$\begin{aligned} (\alpha + \beta)x &= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) \\ &\neq \alpha x + \beta x = (\alpha + \beta)x_1 + 1, \\ &\quad (\alpha + \beta)x_2 + 1. \end{aligned}$$

25. Sí; es un espacio vectorial trivial.

27. Sí, siempre que comprendamos que escalar ahora significa número *racional*; i) $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in V$, dado que la suma de dos números racionales es racional; vi) $\alpha(a + b\sqrt{2}) = \alpha a + \alpha b\sqrt{2} \in V$, dado que el producto de dos números racionales es racional; el resto de los axiomas se derivan como casos especiales de reglas para la adición y multiplicación de números racionales.

29. Suponga que $x + y = 0$ y $x + z = 0$. Así, $x + y = x + z$. Al sumar y a ambos lados de la ecuación se tiene $y + (x + y) = y + (x + z)$. Al usar las propiedades ii) y v), se obtiene $y + 0 = 0 + z$. Por lo tanto, $y = z$.

31. i) Si $x > 0$ y $y > 0$, entonces $x + y = xy > 0$; ii) $(x + y) + z = xy + z = xyz = x + yz = x + (y + z)$; iii) $x + 1 = x \cdot 1 = x = 1 + x = 1 \cdot x$; iv) $x + x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$; v) $x + y = xy = yx = y + x$; vi) si $x > 0$, entonces $\alpha x = x^\alpha > 0$ para todo α; vii) $\alpha(x + y) = \alpha xy = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = x^\alpha + y^\alpha = \alpha x + \alpha y$; viii) $(\alpha + \beta)x = x^{(\alpha + \beta)} = x^\alpha x^\beta = x^\alpha + x^\beta = \alpha x + \beta x$; ix) $\alpha(\beta x) = (\beta x)^\alpha - (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)x$; x) $1x = x^1 = x$.

Problemas 5.2

1. No, porque $(0, 0) \notin H$.

3. H es un subespacio.

5. H es un subespacio.

7. H no es un subespacio.

9. H es un subespacio.

11. H es un subespacio.

13. Sí es un subespacio vectorial de V.