UCSF
Universidad Católica de Santa Fe

INGRESO DE MATEMÁTICA

Facultad de Ciencias de la Salud

Lic. Karina Torres
Prof. María Belén Kerz

Ingreso 2024

¿Qué esperamos de los alumnos? Nuestro primer objetivo es poder recuperar los contenidos trabajado en el nivel secundario para que puedan **leer eficientemente** textos, enunciados o problemas y puedan **integrar información: conceptos y herramientas (matemática)** para dar respuesta a la situación.

Contenidos:

1. Proporcionalidad. Porcentaje
2. Conjunto numéricos reales: Propiedades de las operaciones y de los conjuntos. Expresiones equivalentes. Anotación científica. Redondeo y truncamiento.
3. Expresiones algebraicas: lenguaje coloquial y simbólico en diferentes contextos, operaciones básicas, producto notable. Polinomio
4. Ecuaciones de una variable: lineales, cuadráticas, con módulo, racionales e inecuaciones. Sistema de ecuaciones lineales con dos variables.
5. Funciones: Definición, representación gráfica y analítica. Hallar dominio de una función a partir de su fórmula.

1. Proporcionalidad. Porcentaje	Definición de proporcionalita directa. Calculo de porcentaje de una cantidad, o viceversa.
2. Conjunto numéricos reales: Propiedades de las operaciones. Expresiones equivalentes. Anotación científica. Aproximación decimal.	Propiedades de la suma, resta, multiplicación y división: conmutativa, distributiva, asociativa, inverso multiplicativo e inverso aditivo, elemento neutro de la suma y la resta. Propiedades de la potencia y raíz: producto y cociente de potencia de igual base, potencia de otra potencia, potencia de exponente nulo, uno, negativo y racional. Expresión de números racionales: decima, fracción y mixta. Fracciones equivalentes, Fracción irreducible. Notación científica y operaciones multiplicación, división y potenciación con números escritos en notación científica. Aproximación decimal: métodos de redondeo y truncamiento.
3. Expresiones algebraicas: lenguaje coloquial y simbólico en diferentes contextos, operaciones básicas, producto notable. Polinomio	Expresiones algebraicas. Términos semejantes. Operaciones con expresiones algebraicas: adición, sustracción, producto y división, potenciación de monomios. Operaciones combinadas con expresiones algebraicas. Productos Notables. Factor común
4. Ecuaciones de una variable: lineales, cuadráticas, con módulo, racionales e inecuaciones. Sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	Significa de ecuación. Resolución de ecuación. Interpretación de solución en contexto matemático y no matemático. Definición de módulo, resolución de ecuaciones con valor absoluto. Definición de sistema de ecuaciones lineales. Clasificación y resolución (método de igualación, sustitución y sustracción) Interpretación de solución en contexto matemático y no matemático.
5. Funciones: Definición, representación gráfica y analítica. Hallar dominio de una función a partir de su fórmula.	Ejes cartesianos. Expresión gráfica y simbólica de funciones básica. Dependencia entre variables. Ejemplos de funciones en contextos numéricos, geométricos y experimentales. Definición de dominio y conjunto imagen. Calculo del dominio en una función.

Reglas algebraicas para los números reales

$$a + b = b + a$$
$$ab = ba$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a(bc) = (ab)c$$
$$a(b + c) = ab + ac$$
$$a(b - c) = ab - ac$$
$$(a + b)c = ac + bc$$
$$(a - b)c = ac - bc$$
$$a + 0 = a$$
$$a \cdot 0 = 0$$
$$a \cdot 1 = a$$
$$a + (-a) = 0$$
$$-(-a) = a$$
$$(-1)a = -a$$
$$a - b = a + (-b)$$
$$a - (-b) = a + b$$
$$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$
$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$
$$(-a)b = -(ab) = a(-b)$$
$$(-a)(-b) = ab$$
$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$
$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$
$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad (c \neq 0)$$

Exponentes

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$
$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Radicales

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$
$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \ \sqrt[n]{a^n} = a \quad (a > 0)$$
$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$$
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Productos especiales

$$x(y + z) = xy + xz$$
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$
$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$
$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$$

Fórmulas de factorización

$$ab + ac = a(b + c)$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Líneas rectas

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	(fórmula de la pendiente)
$y - y_1 = m(x - x_1)$	(forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(forma punto-intersección)
$x =$ constante	(recta vertical)
$y =$ constante	(recta horizontal)

Desigualdades

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a(-c) > b(-c)$.

Logaritmos

$\log_b x = y$ si y sólo si $x = b^y$
$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$
$\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$
$\log_b m^r = r \log_b m$
$\log_b 1 = 0$
$\log_b b = 1$
$\log_b b^r = r$
$b^{\log_b m} = m$
$\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$

Conteo

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Alfabeto griego

alfa	Α	α	nu	Ν	ν
beta	Β	β	xi	Ξ	ξ
gamma	Γ	γ	ómicron	Ο	o
delta	Δ	δ	pi	Π	π
épsilon	Ε	ϵ	ro	Ρ	ρ
zeta	Ζ	ζ	sigma	Σ	σ
eta	Η	η	tau	Τ	τ
theta	Θ	θ	ípsilon	Υ	υ
iota	Ι	ι	fi	Φ	ϕ, φ
kappa	Κ	κ	ji	Χ	χ
lambda	Λ	λ	psi	Ψ	ψ
mu	Μ	μ	omega	Ω	ω

Símbolo	Significado
$=$	igual
$<$	menor que...
$\leq$	menor o igual que...
$>$	mayor que...
$\geq$	mayor o igual que...
$\neq$	distinto
$\approx$	aproximadamente igual
$\equiv$	idénticamente igual
$\pm, \mp$	más menos / menos más
$\sum$	sumatorio
$\prod$	producto
$\forall$	para todo, cuantif. universal
$\exists$	existe, cuantif. existencial
$\Rightarrow$	implica (si…entonces…)
$\Leftrightarrow$	equivale (si y solo si)
$/$	tal que
$\therefore$	por lo tanto, por consiguiente
$\because$	porque, puesto que
$\neg$	negación
$\wedge$	conjunción ("y", "además")
$\vee$	disyunción ("o")
∞	infinito

Símbolo	Significado
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los reales positivos
$\{a, b, \ldots\}$	conjunto de elementos a,b,...
$\varnothing$	conjunto vacio
$\cap, \bigcap$	intersección de conjuntos
$\cup, \bigcup$	unión de conjuntos
$\subset$	incluido en el conjunto

Tema 1: Porcentaje y Proporcionalidad

Comprender que significa la proporcionalidad, identificar situaciones que haya una relación proporcional y hacer los cálculos correspondientes. Comprender y aprender la “regla de tres simple”. Calcular porcentajes.

Razón y proporcionalidad

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al multiplicar o dividir una de ellas por un número cualquiera, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Se establece una relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes cuando:

- A más corresponde más.
- A menos corresponde menos.

Desafío 1, parte A:
1. Florencia hace tortas por encargo y empezará a ofrecer torta de frutillas. Tiene una receta para una torta de 10 porciones. Para organizarse, arma una tabla.
En la primera columna anota la cantidad que necesita de cada ingrediente para la torta de 10 porciones y en las siguientes columnas anota las cantidades de cada ingrediente para tortas con distintas cantidades de porciones.
Completa la tabla

Cantidad de porciones	**10**	**20**	**5**	**8**	**15**	**18**
Harina (en gramos)	400					
Huevos (en unidades)	3					
Leche (en litros)	¼					
Azúcar (en gramos)	300					
Manteca (en gramos)	225					
Frutilla (en unidades)	20					

En la actividad anterior estudiaron como varia una cantidad en relación de otra, en este caso como varía la cantidad de ingredientes de una torta en función del número de porciones.

Si miran alguna fila de la tabla que completaron, por ejemplo, la del azúcar, notaran que la cantidad para 10 porciones más la cantidad para 5 porciones es igual a la cantidad para 15 porciones. Lo mismo ocurre con la suma de las cantidades para 10 y 8 porciones, y la cantidad de 18 porciones. Y lo mismo con otras cantidades de porciones.

10+5=15

Cantidad de porciones	10	20	5	8	15	18
Cantidad de azúcar (gramos)	300	600	150	240	450	540

300+15=450

- Al sumar dos cantidades de porciones, le corresponde la suma de las cantidades de azúcar de dos cantidades de porciones

En la tabla puede ver que a 20 porciones le corresponde el doble de azúcar que a 10, y a 15 le corresponde el triple que a 5, y esto para con el cuádruple, el quíntuple, etc.

x2 **x3**

Cantidad de porciones	10	20	5	8	15	18
Cantidad de azúcar (gramos)	300	600	150	240	450	540

x2 **x3**

- Al doble de una cantidad de porciones le corresponde el doble de la cantidad de azúcar; el triple le corresponde el triple; el cuádruple, el cuádruple; etc.

En este caso se dice que la cantidad de azúcar es PROPORCIONAL a la cantidad de porciones, es decir que la cantidad de azúcar varía proporcionalmente a la cantidad de porciones.

Desafío 1, parte B:
Completa esta nueva tabla en relación entre la cantidad de porciones de torta y los centilitros de leche usada, según la receta del desafío 1

Cantidad de porciones	2	4	7	9	12	14
Leche (en centilitros)						

La constante de proporcionalidad

Hay otra propiedad que verifica las relaciones de proporcionalidad directa que permite completa las tablas de manera sencilla.

Por ejemplo: Como hemos visto, si consideramos la variación de leche (en centilitros) en función de las cantidad de porciones, por ser proporcional se verifica que: Si se dividen un valor de la fila de abajo por el que le corresponde de la fila de arriba, obtiene siempre el mismo número

$$25:10 = 50:20 = 12{,}5:5 = 20:8 = \cdots = 2{,}5$$

Y ese número indica la cantidad de centilitro de leche que se necesita para cada porción.

Cuando la relación entre dos variables es de proporcionalidad directa, se llama **constante de proporcionalidad** o **coeficiente de proporcionalidad** al número por el que hay que multiplicar cada valor de la primera variable para obtener el que le corresponde de la segunda. La constante es el valor de la segunda variable que corresponde a la unidad de la primera. En el ejemplo anterior, la constante es 2,5; porque se necesitan 2,5 centilitros de leche por cada porción.

Desafío 1, parte C:
Calcula la constante de proporcionalidad para estos ingredientes de la torta del desafío 1, en función de la cantidad de porciones.
La cantidad de frutilla (en unidades): __________
La cantidad de harina (en gramos): ___________
La cantidad de manteca (en gramos): __________
La cantidad de harina (en kilogramo): ___________

En una situación en la que hay dos cantidades variables, si todos los valores de la segunda se obtienen multiplicando todos los valores de la primera por un número, la relación es de proporcionalidad directa.

Problema de profundización:

6 Juan maneja por la Ruta 2 desde Buenos Aires hasta Mar del Plata, a una velocidad de 120 km por hora. La distancia entre las dos ciudades es de 404 km.

a ¿Qué distancia recorrió después de 20 minutos? ....

¿Y después de 40 minutos? ¿Y después de 1 hora y 20 minutos?

....

b ¿Cuánto tardará en recorrer 300 km?

....

c ¿A qué distancia de Mar del Plata estará después de 3 horas de viaje?

....

7 En la actividad anterior estudiaste cómo variaba la distancia recorrida por el auto en función del tiempo de viaje.

a Completá la tabla con los valores hallados.

Tiempo de viaje (en hs)								
Distancia recorrida (en km)								

b ¿La distancia recorrida es proporcional al tiempo de viaje? Si es necesario, calculá más valores. Justificá tu respuesta.

....

c ¿Es cierto que la segunda fila de la tabla se obtiene multiplicando el valor de la primera por 120?

....

Conceptos que hemos trabajado:

Magnitudes: Valor numérica que se les designa a los objetos en función de una característica propia que puede ser medida, como el tamaño, el peso o la extensión.

Son magnitudes:

- La longitud del lado un cuadrado.
- La capacidad de una botella de agua.

Razón (matemática): **Razón** es el cociente entre dos números o dos cantidades comparables entre sí:

$$\frac{a}{b}$$

Siendo a y b dos números reales, y b es distinto de cero

<u>Proporcionalidad:</u> Una **proporción** es una igualdad entre dos **razones**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

<u>Constante de proporcionalidad:</u> Es el cociente de las razones de una proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

EJEMPLO

En un comedor escolar cada alumno se come 2 croquetas. Dos alumnos comen 4 croquetas; 3 alumnos, 6 croquetas; 4 alumnos, 8 croquetas...

Número de alumnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Número de croquetas	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30

- Podemos expresar las razones de los valores de cada magnitud de la siguiente manera.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots, \frac{9}{18}, \dots, \frac{12}{24}, \dots, \frac{15}{30}$$

Son razones de las magnitudes número de alumnos y croquetas.

- Observamos que: $\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \frac{2}{4} = 0{,}5 \quad \frac{3}{6} = 0{,}5 \quad \frac{4}{8} = 0{,}5 \quad \dots \quad \frac{9}{18} = 0{,}5 \quad \dots \quad \frac{12}{24} = 0{,}5 \quad \dots \quad \frac{15}{30} = 0{,}5$

Todas las razones tienen el mismo valor: 0,5.

- La igualdad de dos razones forma una **proporción**.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0{,}5 \qquad \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = 0{,}5 \qquad \frac{9}{18} = \frac{12}{24} = 0{,}5$$

- El cociente de las razones de una proporción se llama **constante de proporcionalidad** (0,5).

<u>Problemas de interpretación y aplicación</u>

1. Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales y expliquen como lo han pensado

a) Número de horas trabajadas y dinero cobrado.

b) Número de horas que un alumno ve la televisión y número de horas de estudio.

c) Número de personas que comen y cantidad de alimento.

d) El número de hojas de un libro y su peso.

e) Número de personas que participan en la compra de un regalo y dinero que aportan.

f) La edad de un alumno y su altura

g) La edad de una persona y la cantidad de dientes

h) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una distancia.

i) El número de limpiadores de un edificio y el tiempo que tardan.

j) El número de ladrillos de una pared y su altura.

k) El peso de la fruta y el dinero que cuesta.

l) La velocidad de un corredor y la distancia que recorre.

m) El número de grifos de un depósito y el tiempo que tarda en llenarse

2.

En un mercado 1 kilogramo de manzanas cuesta 1,50 €. Elabora una tabla en la que las magnitudes: masa de manzanas (de 1 a 10 kg) y el precio correspondiente, forman razones iguales.

Peso (kg)	1									
Precio (€/kg)	1,50									

3. Para hacer jugo de frutas, Bruno mezcla $\frac{1}{2}$ litro de jugo de naranja y 200 mℓ de jugo de manzana.

a. Completen la tabla para obtener la misma mezcla que Bruno. Anoten las cuentas que hacen para completarla.

Cantidad de jugo de naranja (ℓ)	0,5	0,25			0,75
Cantidad de jugo de manzana (mℓ)	200		600	80	

b. ¿Existe alguna relación entre las cantidades de ambas frutas? ¿Cuál? Escriban cómo lo pensaron.

c. ¿Cómo podrían completar la tabla conociendo la cantidad de mililitros de jugo de manzana necesarios para 1 ℓ de jugo de naranja?

4. Para hacer un postre para sus amigos, Ana elige una receta que se llama Copa Imperial

Copa Imperial
para 6 personas

Ingredientes
- Frutillas .... 300 gramos
- Jugo de naranja ...... $\frac{1}{3}$ de taza
- Chocolate cobertura . . 180 gramos
- Azúcar .... 6 cucharadas
- Crema de leche...... 250 gramos
- Helado de vainilla ... $\frac{3}{4}$ kg

a) ¿Qué cantidad de frutilla y de azúcar va a necesitar para que la receta le salga exactamente igual, pero para 12 porciones? ¿y para 14?
b) ¿Cuántas porciones de la Copa Imperial puede hacer con 3kg de helado de vainilla?
c) ¿Es cierto que con 6kg de helado puede hacer el doble de porciones que con 3kg? ¿Por qué?

5.

Determina si estas razones forman una proporción aplicando su propiedad.

a) $\frac{8}{3}$ y $\frac{4}{6}$

c) $\frac{42}{35}$ y $\frac{6}{5}$

e) $\frac{108}{81}$ y $\frac{4}{3}$

b) $\frac{2}{7}$ y $\frac{6}{5}$

d) $\frac{24}{12}$ y $\frac{12}{6}$

f) $\frac{49}{37}$ y $\frac{11}{15}$

6 El precio de 12 fotocopias es de 0,50 €. ¿Cuánto costará hacer 30 fotocopias?

7 Un ciclista recorre 75 kilómetros en 2 horas. Si mantiene siempre la misma velocidad, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 5 horas?

8 Un túnel de lavado limpia 12 coches en una hora (60 minutos). ¿Cuánto tiempo tardará en lavar 25 coches? ¿Y 50 coches?

9 Diez barras de pan cuestan 4,75 €. ¿Cuánto costarán 18 barras? ¿Y 24 barras?

10 El precio de 9 billetes de autobús es 10 €. ¿Cuál será el precio de 12 billetes? ¿Y de 15 billetes?

11 Si 5 botellas de leche cuestan 3,75 €, ¿cuánto costará una caja de 12 botellas? ¿Y una caja de 36 botellas?

Regla de tres directa

Consiste en formar una pareja de fracciones equivalentes con los tres datos y la incógnita.

MAGNITUD 1		MAGNITUD 2	
a	$\longrightarrow$	m	$\left.\right\} \dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{x}$
b	$\longrightarrow$	x	

$$a \cdot x = b \cdot m \rightarrow x = \frac{b \cdot m}{a}$$

En la web

Practica resolviendo problemas de proporcionalidad directa.

Regla de tres directa

Dos pares de valores correspondientes forman dos fracciones equivalentes. Esto nos permite calcular uno de los cuatro valores si se conocen los otros tres.

Ejemplo

Tres botes de mermelada cuestan 5,40 €. ¿Cuánto cuestan 4 botes?

5,40 € ? €

MAGNITUDES

N.º DE BOTES		COSTE (€)
3	$\longrightarrow$	5,40
4	$\longrightarrow$	x

Formamos dos fracciones equivalentes:

$$\frac{3}{4} = \frac{5{,}40}{x} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 5{,}40}{3} = 7{,}20$$

Para obtener el valor de x, recuerda el procedimiento de la página 129.

$$\frac{3}{4} = \frac{5{,}40}{x} \rightarrow 3 \cdot x = 4 \cdot 5{,}40 \rightarrow x = \frac{4 \cdot 5{,}40}{3} = 7{,}20$$

Solución: Cuatro botes de mermelada cuestan 7,20 €.

Piensa y practica

1. Resuelve por reducción a la unidad.

Tres chocolatinas pesan 90 gramos. ¿Cuánto pesan 2 chocolatinas?

90 g ? g ? g

N.º CHOCOLATINAS		PESO (g)
3	$\longrightarrow$	90
1	$\longrightarrow$	?
2	$\longrightarrow$	?

2. Resuelve por reducción a la unidad.

Un canguro avanza 12 metros en cuatro saltos. ¿Cuánto avanzará en 10 saltos?

3. ¿Verdadero o falso?

a) Tres barras de pan pesan 600 gramos. Dos barras pesarán 400 gramos.

b) Dos kilos de patatas han costado 0,80 €. Tres kilos costarán 1,30 €.

c) Por aparcar dos horas pago 3 €. Por aparcar media hora pago 0,75 €.

4. Calcula x en cada caso, como en el ejemplo:

- $\mathbf{\dfrac{4}{6} = \dfrac{14}{x} \rightarrow x = \dfrac{6 \cdot 14}{4} = 21}$

a) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{x}$ b) $\dfrac{6}{9} = \dfrac{10}{x}$ c) $\dfrac{5}{6} = \dfrac{7}{x}$

d) $\dfrac{10}{12} = \dfrac{4}{x}$ e) $\dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{x}$ f) $\dfrac{4}{6} = \dfrac{14}{x}$

g) $\dfrac{1{,}2}{3} = \dfrac{0{,}6}{x}$ h) $\dfrac{1{,}6}{0{,}8} = \dfrac{1}{x}$ i) $\dfrac{0{,}5}{0{,}6} = \dfrac{7{,}5}{x}$

5. Resuelve con una regla de tres.

He pagado 9,20 € al comprar cuatro chocolatinas. ¿Cuánto habría pagado si hubiera comprado tres?

CHOCOLATINAS		COSTE (€)
4	$\longrightarrow$	9,20
3	$\longrightarrow$	x

6. Por un gasto de 20 € te dan 3 cupones-descuento. ¿Cuántos cupones te darán por un gasto de 140 €?

7. Si 100 g de salmón ahumado cuestan 2,40 €, ¿cuánto costarán 260 g?

Desafío 2

1. En el supermercado proponen distintas ofertas cada día de la semana.

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES
Lleve 3, pague 2. En productos seleccionados. Fideos, arroz y sopas instantáneas	**Llevando dos productos iguales pague la mitad del segundo.** En productos seleccionados. Fideos, arroz y sopas instantáneas	**15% de descuento en toda su compra**

a. El lunes Juan compró 3 paquetes de arroz. Cada uno cuesta $42,60.
i. ¿Cuánto pagó?
ii. ¿Cuánto pagó cada paquete?
iii. ¿Qué parte de la compra se ahorra por comprar el lunes y no otro día?
iv. ¿Qué porcentaje de descuento representa?

> Calcular el **p%** de un número es calcular la fracción $\frac{p}{100}$ de dicho número.

b. Laura compra el martes 2 paquetes de fideos iguales. Cada paquete cuesta $12,80.
i. ¿Cuánto pagó por cada paquete?
ii. ¿Qué porcentaje de descuento le hicieron sobre cada paquete?
iii. Si Laura quiere llevar 3 paquetes, ¿el porcentaje de descuento será el mismo? ¿Por qué?

c. ¿Qué le conviene a Laura: comprar los 3 paquetes de fideos el martes o el miércoles? ¿Cómo se dan cuenta?

SIGNIFICADO DE PORCENTAJE. TANTO POR CIENTO (%)

- Fíjate en las siguientes frases.
  «El equipo ganó este año el 85 % de los partidos».
  «El 9 % de los alumnos de la clase superan los 13 años».
- En la vida diaria se utilizan los números mediante expresiones de porcentaje.
- Expresar un determinado **tanto por ciento** (85 %, 9 %) de una cantidad (partidos, alumnos) consiste en dividir esa cantidad en 100 partes y coger, tomar, indicar, señalar… el tanto indicado.

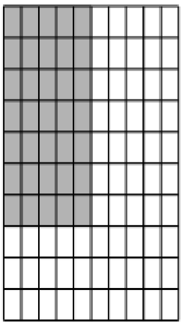
EJEMPLO

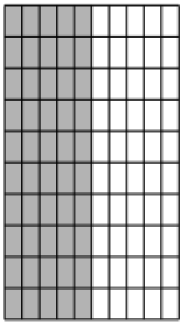
	%	Significado	Fracción	Valor	Se Lee
El equipo ganó el 85 % de los partidos	85	85 de cada 100	$\frac{85}{100}$	0,85	85 por ciento
El 9% de los alumnos superan los 13 años	9	9 de cada 100	$\frac{9}{100}$	0,09	9 por ciento

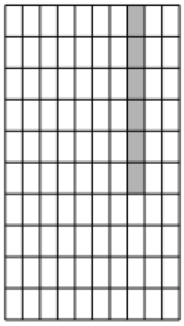
1 Completa la siguiente tabla.

%	Significado	Fracción	Valor	Se Lee
7				
			0,15	
		$\frac{38}{100}$		
	4 de cada 100			

2 Expresa la fracción y el tanto por ciento que representa la zona coloreada.

a) 

b) 

c) 

PORCENTAJE DE UNA CANTIDAD

Recordando el concepto de fracción de una cantidad, el **tanto por ciento de una cantidad** se puede calcular de dos maneras:

1.ª Multiplicando la cantidad por el tanto por ciento y dividiendo entre 100.

2.ª Dividiendo la cantidad entre 100 y multiplicando por el tanto por ciento.

EJEMPLO

Enrique ha comprado unas zapatillas en las rebajas. Las zapatillas marcaban un precio de 60 €, pero le han realizado un descuento del 15 % ¿Cuántos euros le han rebajado del precio inicial?

$$15\,\%\text{ de }60 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{15\cdot 60}{100} = \dfrac{900}{100} = 9\text{ € le han descontado.} \\ \dfrac{60}{100}\cdot 15 = 0{,}6\cdot 15 = 9 = 9\text{ € le han descontado.} \end{cases}$$

Después de realizar el descuento al precio de las zapatillas, ¿cuánto pagó Enrique por ellas?

Una vez realizado el descuento, se resta a la cantidad lo que valía el artículo.

$60 - 9 = 51$ € Por tanto, Enrique pagó 51 € por las zapatillas.

3 Expresa los números en porcentajes.

a) $0{,}16 =$

c) $0{,}03 =$

e) $0{,}625 =$

b) $\frac{4}{5} =$

d) $\frac{7}{8} =$

f) $0{,}25 =$

4 Calcula el 37,5% de 50.

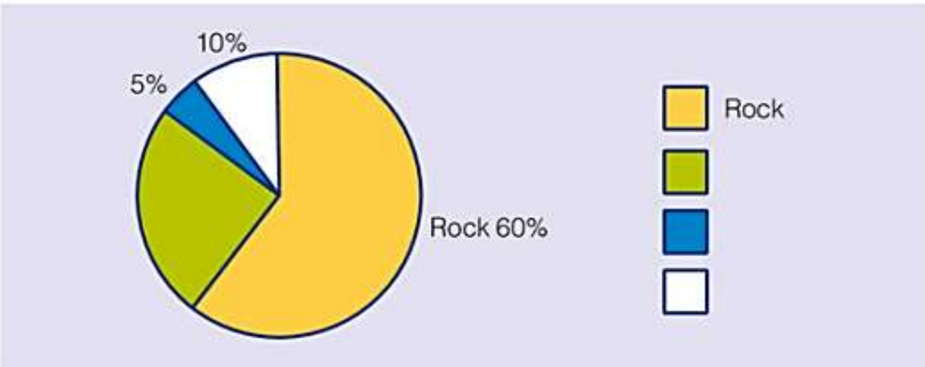
5. Fernando puso $13.000 a plazo fijo en el banco por 2 meses, con un interés del 0,6% mensual. ¿Cuánto dinero le devolverán una vez terminado el plazo?

6. Julián pagó $120 por un libro luego de que le hicieran una rebaja del 10%. Escriban una sola cuenta que permita calcular el precio del libro antes del descuento.

7. La empresa telefónica cobra un recargo de 5% por pagar la factura fuera de término. Por este motivo, el abonado debe pagar $120. ¿Cómo calcularían el importe original haciendo una sola cuenta?

8. En un colegio, 15 de cada 60 alumnos no practican ningún deporte. ¿Qué porcentaje de alumnos no practica deportes?

9. Los chicos de primer año hicieron una encuesta sobre gustos musicales a 200 amigos. Representaron los datos en este gráfico, que está incompleto.



a. ¿Cuántos chicos escuchan rock?
b. Si hay 10 chicos que escuchan cumbia, ¿qué zona del gráfico les corresponderá? ¿Y a los 50 que escuchan pop?
c. ¿Qué procentaje de los chicos escucha música pop?
d. Si para realizar el gráfico consideraron que cada ángulo central del sector circular es proporcional al porcentaje y todo el círculo tiene un ángulo de 360°, ¿qué ángulo central le corresponde a cada sector?

10. Un comerciante tiene una ganancia del 25% sobre el precio de costo de los productos que vende.

a. Si un producto le costó $120, ¿a cuánto deberá venderlo?

b. Si vendió un producto a $180, ¿cuánto habrá sido el costo?

11. Una tienda de ropa hacen un descuento del 10% por fin de temporada, y luego un 5% de recargo por pagar con tarjeta de crédito.

a. Al final, ¿hace un aumento o un descuento? ¿De qué porcentaje? Expliquen cómo lo pensaron.

b. Teniendo en cuenta los descuentos anteriores, escriban una cuenta que permita calcular cuánto se pagará por un producto que cuesta $150.

c. La cajera se equivoca y hace primero el recargo del 5% y luego el descuento del 10%. ¿Cobra más, menos o lo mismo que al revés? ¿Cómo se dan cuenta?

Ejercicios y problemas

Las relaciones de proporcionalidad

1. Indica los pares de magnitudes que son directamente proporcionales (D), los que son inversamente proporcionales (I) y los que no guardan proporcionalidad (X).

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en ir de Palencia a Valladolid.

b) El tiempo que funciona el aspirador y la cantidad de energía que gasta.

c) El peso de un besugo y su coste.

d) El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un cubo.

e) La edad de una persona y el número de veces que va al médico.

f) Las veces que un jugador de baloncesto lanza a canasta y los puntos que consigue.

2. Calcula en cada caso el término desconocido:

a) $\frac{6}{10} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{21}{24} = \frac{28}{x}$ c) $\frac{17}{24} = \frac{51}{x}$

d) $\frac{14}{21} = \frac{x}{69}$ e) $\frac{x}{63} = \frac{65}{91}$ f) $\frac{39}{x} = \frac{13}{17}$

g) $\frac{x}{18} = \frac{18}{81}$ h) $\frac{5}{9} = \frac{1}{x}$ i) $\frac{3}{2{,}4} = \frac{35}{x}$

Problemas de proporcionalidad

3. Resuelve mentalmente.

a) Rosa ha pagado 3,60 € por un trozo de queso de 300 gramos. ¿Cuánto pagará por 150 gramos?

b) Dos bolsas de arroz cuestan 2,10 €. ¿Cuánto cuestan tres bolsas?

4. Resuelve por reducción a la unidad.

Un empleado recibió la semana pasada 60 € por 5 horas extraordinarias de trabajo. ¿Cuánto recibirá esta semana por solo 3 horas?

5. Si con medio kilo de jamón salen cuatro bocadillos, ¿cuánto jamón necesito para 10 bocadillos?

6. Una fábrica ha sacado 2 280 coches en los últimos 15 días. Si sigue con el mismo ritmo de producción, ¿cuántos sacará en los próximos veinte días?

7. Cuatro cajas de galletas pesan 2,4 kg. ¿Cuánto pesarán cinco cajas iguales a las anteriores?

8. Una fuente arroja 42 litros de agua en 6 minutos. ¿Cuántos litros arrojará en 15 minutos?

9. Un empleado recibió la semana pasada 60 € por 5 horas extraordinarias de trabajo. ¿Cuánto recibirá esta semana por solo 3 horas?

10. Las grosellas se venden a 2,30 euros el cuarto. ¿Cuánto cuesta cuarto y mitad?

11. Un besugo de un kilo y doscientos gramos ha costado 14,40 €. ¿Cuánto costará otro besugo de ochocientos gramos?

Porcentajes

12. Calcula mentalmente.

a) 10 % de 340 b) 10 % de 4 800

c) 50 % de 68 d) 50 % de 850

e) 25 % de 40 f) 25 % de 2 000

g) 20 % de 45 h) 20 % de 500

i) 32 % de 50 j) 80 % de 50

13. Calcula con lápiz y papel y, después, comprueba con la calculadora.

a) 15 % de 360 b) 11 % de 3 400

c) 8 % de 175 d) 60 % de 1 370

e) 45 % de 18 f) 84 % de 5 000

g) 150 % de 80 h) 120 % de 350

i) 200 % de 45 j) 250 % de 250

14. Calcula y, si el resultado no es exacto, redondea a las unidades.

a) 16 % de 470 b) 14 % de 288

c) 57 % de 1 522 d) 7 % de 3 640

e) 6 % de 895 f) 92 % de 2 630

g) 115 % de 94 h) 120 % de 751

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

15. Copia y completa cada casilla con un número decimal y, después, calcula el resultado:

a) 20 % de 560 = ☐ · 560 = …

b) 16 % de 1 250 = ☐ · 1 250 = …

c) 72 % de 925 = ☐ · 925 = …

d) 9 % de 700 = ☐ · 700 = …

e) 2 % de 650 = ☐ · 650 = …

16. Copia y completa en tu cuaderno.

PARA CALCULAR EL…	20 %	15 %	43 %	65 %	5 %	2 %
SE MULTIPLICA POR…	0,20					

17. Completa con el porcentaje adecuado en cada caso:

a) ☐ % de 70 = 35

b) ☐ % de 230 = 115

c) ☐ % de 800 = 200

d) ☐ % de 370 = 37

e) ☐ % de 56 = 5,6

f) ☐ % de 30 = 6

Problemas de porcentajes

18. Reflexiona y contesta.

a) En una caja de bombones, el 25 % está envuelto. ¿Qué tanto por ciento está sin envolver?

b) Un 35 % de los empleados de cierta fábrica trabajan en turno de mañana; otro 35 %, en el de tarde, y el resto lo hacen en el turno de noche. ¿Qué porcentaje trabaja en el turno de noche?

19. En mi clase somos 28 y el 25 % nos hemos apuntado a atletismo. ¿Cuántos nos hemos apuntado?

20. Solo el 12 % de los 25 asistentes a la clase de baile son chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas son?

21. Un televisor que costaba 450 € está rebajado un 15 %. ¿Cuánto cuesta tras la rebaja?

22. ¿A cuánto asciende una factura de 85 € después de cargarle el 21 % de IVA?

23. Este año, el 30 % de la vacas de la granja ha tenido un ternero. ¿Cuántas vacas hay en la granja, sabiendo que han nacido 12 terneros?

Autoevaluación

1. Indica si hay relación de proporcionalidad directa o inversa en los siguientes pares de magnitudes:

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en llegar a su destino.

b) El peso de un libro y su precio.

c) El número de horas trabajadas y el pago recibido.

d) El número de caballos que tiene un granjero y el tiempo que tardan en consumir una carga de heno.

e) El número de folios de un paquete y su peso.

2. Completa estas tablas en tu cuaderno:

PROPORCIONALIDAD DIRECTA			
1	2	3	4
	30		

PROPORCIONALIDAD INVERSA			
1	2	3	4
	30		

3. Resuelve con ayuda de la regla de tres.

Un trozo de queso de 375 gramos ha costado 4,50 €. ¿Cuánto costará otro trozo de 200 gramos?

4. Un jardinero, con su máquina cortacésped, tarda 18 minutos en segar una parcela de 200 m^2. ¿Qué superficie puede segar en hora y media?

5. Calcula.

a) 10 % de 48   b) 30 % de 350   c) 65 % de 520

6. Un colegio tiene 585 estudiantes. El 60 % se queda al comedor. ¿Cuántos estudiantes usan ese servicio?

7. Marta ha comprado una blusa que costaba 35 €, pero estaba rebajada un 20 %. ¿Cuánto ha pagado finalmente por la blusa?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Algoritmo de resolución de problemas de Proporcionalidad

Para resolver problemas de proporcionalidad hemos de:

a) Leer y comprender el enunciado del problema.
b) Crear una tabla de doble entrada con las magnitudes del problema, poniendo x en la magnitud a calcular.
c) Discutir si son magnitudes directa o inversamente proporcionales.
d) Escribir la proporción teniendo en cuenta que:
   1) Si es Directa, escribimos la proporción con los números tal y como aparecen en la tabla.
   2) Si es Inversa, escribimos la proporción con la fracción inversa de una de las dos magnitudes (la que tiene a la x)
e) Resolver la proporción y analizar su resultado.

01.- Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.

a) Número de horas trabajadas y dinero cobrado.
b) Número de horas que un alumno ve la televisión y número de horas de estudio.
c) Número de personas que comen y cantidad de alimento.
d) El número de hojas de un libro y su peso.
e) Número de personas que participan en la compra de un regalo y dinero que aportan.
f) La edad de un alumno y su altura.

Sol: a) Si; b) No; c) Si; d) Si; e) No; f) No

02.- Completa las siguientes tablas de valores:

a)

3	6	12	24	48
4	8	16	32	64

b)

4	8	12	16	4820
1	2	3	4	1205

03.- Dos kilos de naranjas cuestan 1,50 €. ¿Cuánto costarán 5 kg? ¿Y 12 kg?

Sol: a) 3,75€; b) 9€

De 5 kilos de olivas se han obtenido 3,2 litros de aceite. ¿Cuántos litros se obtendrán de una tonelada y media de aceitunas?

Si representamos los datos en una tabla:

Kilos de olivas	Litros de aceite
5 kilos	3,2 litros
1.500 kilos	x

A más kilos de aceitunas, se obtendrá más aceite. Proporcionalidad directa.

$$\frac{5\ kg}{3,2\ l} = \frac{1500\ kg}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1500 \cdot 3,2}{5} = 960$$

Se obtendrán 960 litros de aceite.

04.- En una obra, dos obreros realizan una zanja de 5 m. Si mantienen el mismo ritmo de trabajo, ¿cuántos metros abrirán si se incorporan 3 obreros más?

Sol: 12,5 metros

05.- El precio de 12 fotocopias es de 0,50 €. ¿Cuánto costará hacer 30 fotocopias?

Sol: 1,25 €

06.- Un ciclista recorre 75 kilómetros en 2 horas. Si mantiene siempre la misma velocidad, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 5 horas?

Sol: 187,5 km

07.- Un túnel de lavado limpia 12 coches en una hora (60 minutos). ¿Cuánto tiempo tardará en lavar 25 coches? ¿Y 50 coches?

Sol: a) 2 h y 5 min; b) 4 h y 10 min

08.- Diez barras de pan cuestan 4,75 €. ¿Cuánto costarán 18 barras? ¿Y 24 barras?

Sol: a) 8,55 €; b) 11,4 €

09.- El precio de 9 billetes de autobús es 10 €. ¿Cuál será el precio de 12 billetes? ¿Y de 15 billetes?

Sol: a) 13,33 €; b) 16,67 €

10.- Se está construyendo una autopista y hay que realizar un túnel en la montaña. Está planificado que dos máquinas realicen la obra en 90 días. Para reducir ese tiempo a la tercera parte, ¿cuántas máquinas harían falta?

Sol: 6 máquinas

11.- 5 botellas de leche cuestan 3,75 €, ¿cuánto costará una caja de 12 botellas? ¿Y una caja de 36 botellas?

Sol: a) 9 €; b) 27 €

12.- Completa las siguientes tablas de valores.

a)

5	10	20	4	12	60
60	30	15	75	25	5

b)

8	2	6	3	1	6
3	12	4	8	24	4

c)

1	2	3	4	6	9
36	18	12	9	6	4

d)

6	3	21	7	42	1
7	14	2	6	1	42

13.- 10 albañiles tardan 45 días en construir un muro. Si se quiere terminar en 15 días, ¿cuántos albañiles harían falta? ¿y si se quiere terminar en 5 días?

Sol: a) 30 albañiles; b) 90 Albañiles

14.- Isabel ha comprado al principio de curso 7 cuadernos que le han costado 6,30 euros. ¿Cuánto se gastó María si compró 5 cuadernos?

Sol: 4,50 €.

15.- Un depósito de agua se llena en 18 horas con un grifo del que salen 360 litros de agua cada minuto. **a)** ¿Cuánto tardaría en llenarse el depósito si salieran 270 litros por minuto? **b)** ¿Y si fueran 648 l/min?

Sol: a) 24 horas; b) 10 horas

16.- Sabiendo que dispongo de una determinada cantidad de dinero y que con ella puedo comprar 6 prendas a 4.000 € cada una. ¿Cuántas prendas podría comprar si me costaran 3.000 € cada una?

Sol: 8 prendas.

17.- Seis personas efectúan un trabajo en 10 días. ¿Cuánto tardarán en hacerlo ocho personas?

Sol: 7,5 días.

18.- Indica si las siguientes magnitudes son o no inversamente proporcionales.

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una distancia.
b) El número de limpiadores de un edificio y el tiempo que tardan.
c) El número de ladrillos de una pared y su altura.
d) El peso de la fruta y el dinero que cuesta.
e) La velocidad de un corredor y la distancia que recorre.
f) El nº de grifos de un depósito y el tiempo que tarda en llenarse.

Sol: a) Si; b) Si; c) No; d) No; e) No; f) Si

19.- Tres niños pintan una valla en 2 horas. Si se incorpora uno más, ¿cuánto tiempo tardarán en pintarla?

Sol: Una hora y media

20.- Si 20 obreros levantan un muro de ladrillos en 6 días, ¿cuántos días tardarían 12 obreros?

Sol: 10 días

Un tractor, trabajando 8 horas al día, labra un campo en 9 días. ¿Cuántas horas diarias debe trabajar para realizar el trabajo en solo 6 días?

Si representamos los datos en una tabla:

Horas al día	Días
8 horas	9 días
x	6 días

Para tardar menos días tendrá que trabajar más horas diarias, por tanto, se trata de una proporcionalidad Inversa.

$$8 \cdot 9 = x \cdot 6 \quad \rightarrow \quad x = \frac{8 \cdot 9}{6} = 12$$

Tendrá que trabajar 12 horas diarias.

21.- Una merluza de 2 kilos y 300 gramos ha costado 28,75 €. ¿Cuánto pagaré por otra de kilo y medio?

Sol: 18,75 €

22.- Un ganadero tiene 20 vacas y dispone de pienso para alimentarlas durante 60 días. Si tuviera 120 vacas ¿para cuántos días tendría pienso?

Sol: 10 días.

23.- Una máquina embotelladora llena 240 botellas en 20 minutos. ¿Cuántas botellas llenará en hora y media?

Sol: 1.080 botellas.

Tres operarios limpian un parque en 7 horas. ¿Cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo 7 operarios?

Si representamos los datos en una tabla:

Operarios	Tiempo (h)
3 operarios	7 horas
7 operarios	x

A más operarios, menos tiempo por lo que se trata de una proporcionalidad inversa.

$$\frac{3\text{ Op}}{7\text{ h}} = \frac{x}{7\text{ Op}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{3 \cdot 7}{7} = 3$$

7 operarios tardarían 3 horas.

24.- Un camión tarda 4 horas en hacer un reparto a una velocidad 65 km/h. **a)** ¿Qué velocidad llevará una moto que hace el mismo reparto en la mitad de tiempo? **b)** ¿Y una avioneta que emplease 45 minutos?

Sol: a) 130 Km/h; b) 346,67 Km/h

25.- El próximo verano tengo planeado un viaje a Estados Unidos, por lo que necesitaré comprar dólares. El banco me hace un cambio de 1 dólar por 1,20 €. ¿Cuántos dólares me darán por 1.500 €?

Sol: 1.250 dólares.

26.- Una finca tiene una valla antigua sostenida por 650 postes que están colocados a intervalos de 1,20 m. ¿Cuántos postes se necesitarán para la nueva valla en la que los postes se colocarán cada 1,30 m?

Sol: 600 postes

27.- Un grifo con un caudal de 54 litros por hora, llena un depósito en 8 horas. ¿Cuál deberá ser el caudal para llenar la mitad del depósito en 6 horas?

Sol: 36 litros por hora.

28.- Un edificio es construido por 15 albañiles en 200 días. ¿Cuántos albañiles tendré que añadir a la cuadrilla para poder terminar el trabajo en 150 días?

Sol: 5 albañiles.

29.- Por tres horas de trabajo, Pedro ha cobrado 60 euros. ¿Cuánto cobrará si trabaja 8 horas?

Sol: 160 €.

30.- Cinco fontaneros instalan los cuartos de baño de una urbanización en 16 días. ¿Cuántos fontaneros se deberían contratar para terminar la obra en 10 días?

Sol: 8 fontaneros.

31.- Un manantial que aporta un caudal de 3,5 litros por minuto, llena un depósito en una hora y media. ¿Cuánto tardaría si el caudal aumentara a 4,5 l/min?

Sol: 1 hora y 10 minutos.

32.- Un campamento de refugiados que alberga a 4600 personas tiene víveres para 24 semanas. ¿En cuánto se reducirá ese tiempo si llegan 200 nuevos refugiados?

Sol: En una semana

33.- Una piscina tiene 6 grifos que manan el mismo caudal, en litros de agua por minuto. Si solo abrimos 2 grifos, la piscina se llena en 8 horas. Calcula cuánto tiempo tardaría en llenarse si abrimos los seis grifos.

Sol: 2 horas y 40 minutos.

34.- Una motobomba, en 7 horas ha vertido 1250 metros cúbicos de agua a un aljibe. ¿Cuánto tardará en aportar los 1.000 m^3 que aún faltan para llenarlo?

Sol: 5 horas y 36 minutos

35.- Con un depósito de agua se abastecen 20 casas durante 15 días. ¿Cuánto duraría el depósito si los habitantes de 8 casas se marcharan de vacaciones?

Sol: 25 días.

36.- Un ciclista tarda 20 min en recorrer cierta distancia a una velocidad de 40 km/h. ¿Cuál será su velocidad si ha de recorrer la misma distancia en 32 min?

Sol: 25 Km/h.

37.- Un ciclista a una velocidad de 30 km/h, tarda 4h 19' 56'' en hacer un circuito. ¿Cuánto tardará una moto en hacer el mismo circuito a una velocidad de 84 km/h?

Sol: 1 h 32 min y 50 seg

38.- Juan ha ganado 390 euros por trabajar durante 5 días, **a)** ¿Cuánto ganaría si trabajara 18 días?, **b)** ¿cuántos días tiene que trabajar para ganar 3.120 €?

Sol: a) 1.404 €; b) 40 días.

39.- Un grifo, abierto durante 10 minutos, hace que el nivel de un depósito suba 35 cm. **a)** ¿Cuánto subirá el nivel si el grifo permanece abierto 18 minutos más? **b)** ¿Cuánto tiempo debería permanecer abierto el grifo para que el nivel suba 70 cm?

Sol: a) 63 cm; b) 20 min

40.- Una tienda rebaja todos los artículos en la misma proporción. Si por una camiseta de 18 € pago 16,20 €, **a)** ¿cuánto debo pagar por un jersey de 90 €?, **b)** ¿qué porcentaje de descuento hacen?

Sol: a) 81 €; b) El 10 %

41.- Un camión que carga 3 toneladas necesita 15 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes necesitará para hacer transportar la misma arena un camión que carga 5 toneladas?

Sol: 9 viajes

42.- Virginia mide 1,60 m de altura y, en este momento, su sombra tiene una longitud de 0,8 m. Si la sombra de un árbol mide 10 m, ¿cuál es su altura?

Sol: 20 metros

43.- Tres obreros descargan un camión en dos horas. ¿Cuánto tardarán con la ayuda de dos obreros más?

Sol: 1 hora y 12 minutos.

44.- Tres kilogramos de carne cuestan 6 euros. ¿Cuánto podré comprar con 4,5 euros?

Sol: 2,25 kg.

45.- Un sastre ha cobrado 398 € por un traje en el que ha invertido 4 metros de tela y 10 horas de trabajo. Sabiendo que valora su trabajo a razón de 19 € la hora, ¿cuánto cobrará por otro traje para el que ha necesitado 3,5 metros de tela y 12 horas de trabajo?

Sol: Cobrará por el traje 410 €

46.- Una receta de tarta de manzana nos especifica los siguientes ingredientes para 6 personas: 360 gr. de harina, 4 huevos, 300 gr de mantequilla, 250 gr de azúcar y 6 manzanas. Calcula los ingredientes necesarios de una tarta de manzana para 15 personas.

Sol: 900 gr harina, 10 huevos, 750 gr mantequilla, 625 gr de azúcar y 15 manzanas

47.- Luisa y Aya tienen que pintar éste verano la valla de la casa de sus abuelos, si la valla mide 30 metros de larga y su abuelo les ha dicho que por cada 6 metros que pinten les dará 5 €. **a)** Completa la tabla de valores con las magnitudes correspondientes.

b) Forma proporciones y halla la constante de proporcionalidad, **c)** Si la valla midiera 42 metros de larga, ¿cuánto dinero ganarían Luisa y Aya?

Sol: b) K=5/6; c) 35 €.

48.- Un taller de ebanistería, si trabaja 8 horas diarias, puede servir un pedido en 6 días. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar para servir el pedido en 4 días?

Sol: 12 horas

49.- Una fortaleza sitiada tiene víveres para 500 hombres durante tres meses. ¿Cuánto tiempo podrán resistir con ración normal de comida si se incorporan 150 hombres?

Sol: 69 días

Se está construyendo una autopista y hay que realizar un túnel en la montaña. Está planificado que dos máquinas realicen la obra en 90 días. Para reducir ese tiempo a la tercera parte, ¿cuántas máquinas harían falta?

Si representamos los datos en una tabla:

Máquinas	Tiempo (días)
2 máquinas	90 días
x	30 días

A más máquinas, menos días de trabajo, por lo que se trata de una proporcionalidad inversa.

$$2{\cdot}90 = x{\cdot}30 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2{\cdot}90}{30} = 6 \text{ máquinas}$$

Se necesitarían 6 máquinas.

50.- ¿Son directamente proporcionales la longitud de una circunferencia y la longitud de su diámetro? Da varios ejemplos y compruébalo.

Sol: Sí.

51.- Un grajero tiene alfalfa en el almacén para alimentar a sus 3 vacas durante 10 días. ¿Cuánto le duraría el forraje si tuviera 5 vacas?

Sol: 6 días

52.- Una moto va a 50 km/h y tarda 40 minutos en cubrir cierto recorrido. ¿Cuánto tardará un coche a 120 Km/h?

Sol: 16 minutos y 40 segundos.

53.- Un ganadero tiene 20 vacas y pienso para alimentarlas durante 30 días. ¿Cuánto tiempo le durará el pienso si se mueren 5 vacas?

Sol: 40 días

54.- Para hacer una tarta de queso de 3 kilos hemos de utilizar 1,20 kilos de queso. ¿Cuánto queso hemos de utilizar para hacer una tarta de 4,5 kilos?

Sol: 1,8 kg.

55.- Si 46 estuches de lápices de colores cuestan 368 €, ¿cuánto cuesta cada uno?, ¿cuántos estuches podremos comprar si disponemos de 400 €?

Sol: a) 8 €, b) 50 estuches.

56.- Un agricultor labra una determinada superficie en 12 horas utilizando dos tractores. **a)** ¿Cuánto tardará en labrarla si utiliza tres tractores?; **b)** ¿y si utiliza 8?

Sol: a) 8 horas; b) 3 horas

57.- Una máquina pone, 15.000 tornillos en 8 horas, funcionando de forma ininterrumpida. ¿Cuántos tornillos pondrá en 3 horas?; ¿y en 4 horas 13 minutos y 34 seg?

Sol: a) 5.625; b) 7.923 tornillos.

58.- Después de una tormenta, dos autobombas tardan 6 horas en desaguar un garaje inundado. ¿Cuántas horas hubieran tardado utilizando sólo tres autobombas?

Sol: 4 horas.

59.- En una bañera, el agua alcanza 12 cm de altura con un grifo que mana 180 ml por segundo en 12 minutos. Si el grifo manase 90 ml/s, ¿qué altura alcanzaría en el mismo tiempo?

Sol: 6 cm.

60.- Un padre le da la paga a sus tres hijas de forma que a cada una le corresponde una cantidad proporcional a su edad. A la mayor, que tiene 20 años, le da 50 euros. ¿Cuánto dará a las otras dos de 15 y 8 años de edad?

Sol: 37,50 € a la de 15 y 20 € a la de 8 años.

61.- Carlos Sainz ha dado 5 vueltas al circuito de Jerez en 8 minutos y 30 segundos. Si mantiene la misma velocidad, ¿cuánto tiempo tardará en dar las 3 próximas vueltas?

Sol: 5,1 minutos

62.- Determina en cuáles de estas situaciones aparece la proporcionalidad y resuelve las que se pueda: **a)** Si los cereales se venden en cajas de tres paquetes, a 1,80 € la caja, ¿cuánto costarán 12 paquetes?; **b)** Si un bebé aumenta de peso 3 kg en tres meses, ¿cuánto aumentará en el primer año?; **c)** Pedro puede comer 2 pasteles en 3 minutos. ¿Cuánto tiempo le llevará comer 12 pasteles?; **d)** Si 5 chicas beben 3 botellas de limonada, ¿Cuánta limonada podrán beber 30 chicas?

Sol:

63.- De una plancha de acero se ha cortado una porción rectangular de 70 cm de longitud y 60 cm de anchura. Ahora deseamos cortar una nueva porción de 40 cm de anchura y que tenga el mismo peso que la primera. ¿Cuál será el largo de esta nueva porción?

Sol: El largo de la nueva porción será de 105 cm.

64.- Un arquitecto planea terminar un edificio en 1,5 años, con la ayuda de 36 obreros. Si le conceden una prórroga de medio año, ¿a cuántos obreros podría despedir?

Sol: De 9 obreros

65.- En un reloj antiguo, un engranaje tiene dos ruedas, de 18 y 12 dientes, respectivamente. Si la rueda mayor da 6 vueltas, averigua cuántas vueltas da la rueda menor.

Sol: La rueda de 12 dientes dará 9 vueltas

66.- Por dos motores de 4 y 6 caballos de potencia se han pagado 1.014 €. El primero tiene 2.400 h de funcionamiento y el segundo 5.400 h. **a)** ¿Cuánto deberíamos de pagar por cada uno si se estableciera proporcionalmente al número de caballos de vapor?; **b)** Y si se estableciese en proporción inversa a las horas de funcionamiento?

Sol: a) 405,60€ y 608,40€; b) 702 y 312 €

67.- Dos desagües iguales vacían una balsa de agua en 4 horas y cuarto. ¿En cuánto tiempo se vaciaría si abriésemos tres desagües?

Sol: 170 minutos

68.- En una caja hay 200 caramelos de dos sabores, limón y naranja. Si por cada caramelo de limón gay 3 de naranja, ¿Cuántos caramelos de naranja hay en la caja?

Sol: 150 caramelos.

2,8 millones de personas mueren cada año en el mundo a causa de la obesidad o el sobrepeso según la OMS.

El_azúcar_mata

Problemas de Porcentajes

Algoritmo de resolución de Problemas de Porcentajes:

Un porcentaje se representa con el símbolo: % $\% = \frac{parte}{total} \cdot 100$

Un porcentaje maneja tres elementos: un *total*, un *tanto por ciento* y *una parte* del total.

- Conocidos el total y el porcentaje, la parte la calcularemos multiplicando el porcentaje por el total: *Parte = %·Total*
- Conocidos la parte y el porcentaje, el total lo calcularemos haciendo una proporción.
- Conocidos la parte y el total, el porcentaje lo calcularemos dividiendo la parte entre el total y multiplicándolo por 100.

01.- De un colegio con 600 alumnos, el 50% son de Educación Primaria, el 35% de ESO y el 15% de Bachillerato. Halla el número de alumnos de cada nivel educativo.

Sol: 300 de primaria, 210 de ESO y 90 de Bachillerato.

02.- Una fábrica produce 1.500 automóviles al mes. El 25% son furgonetas, el 60% turismos y el resto monovolúmenes. Halla las unidades producidas de cada tipo de automóvil.

Sol: 375 furgonetas, 900 turismos y 225 monovolúmenes.

03.- En una reunión hay un 60 % de mujeres. Si hay 12 mujeres, calcula el número total de personas que han asistido a la reunión.

Sol: 20 personas

04.- En un instituto de 1.200 alumnos se han publicado los resultados de una encuesta sobre música moderna: el 30% de los alumnos prefieren música tecno, el 25% pop, un 40% rock, y el resto, música melódica. Calcula los alumnos que prefieren cada modalidad musical y el porcentaje de los que eligen la música melódica.

Sol: 360 tecno, 300 pop, 480 rock y 60 música melódica.

Una empresa de limpieza tiene 180 empleados, de los cuales el 35% trabaja en el turno de noche. ¿Cuántos empleados hay en el turno de noche?

$Parte = \%\cdot Total \quad \rightarrow \quad 35\%\cdot 180 = \frac{35}{100}\cdot 180 = \frac{180\cdot 35}{100} = 180\cdot 0{,}35 = 63$

Por tanto en el turno de noche hay 63 empleados.

05.- Un pantano tiene una capacidad total de 5 millones de metros cúbicos de agua. Actualmente está lleno al 75% de su capacidad. Calcula los metros cúbicos de agua que contiene.

Sol: 3.750.000 metros cúbicos.

06.- El cuaderno de Anastasio tenía originalmente 80 páginas, pero ha usado el 40% y ha arrancado el 25%. ¿Cuántas páginas quedan disponibles? ¿Qué porcentaje del total representan?

Sol: 28 páginas. b) 35 %

07.- Un billete de avión a Paris costaba el verano pasado 460 €. Si este año ha subido un 20 %, ¿cuánto cuesta ahora el billete?

Solución: Este año el billete cuesta 552 €

08.- Una tienda pone una oferta con una rebaja del 15%. Si un televisor está marcado en 900 €, ¿Qué rebaja me harán? ¿Cuánto voy a pagar por el televisor?

Solución: Me rebajarán 135 € pago por el televisor 765 €

09.- El gasto de electricidad de este mes es de 90 €. Al recibir la factura tengo que pagar además el 18 % de IVA. ¿Cuál es el coste total de la factura?

Solución: En la factura pagaré 106,20 €

10.- He comprado un ordenador que costaba 600 €, pero ahora está rebajado con el 25%. ¿Cuánto pago por el ordenador?

Solución: Voy a pagar por el ordenador 450 €

11.- Un pueblo tenía el año pasado 3.000 habitantes y este año tiene 3.150. ¿Qué porcentaje ha aumentado la población?

Solución: La población ha aumentado un 5 %

12.- He comprado una bicicleta por 250 €. Si quiero ganarme un 32 %, ¿A cómo debo venderla?

Solución: Debo vender la bicicleta por 330 €.

13.- Unas zapatillas que tienen un 30 % de rebaja me han costado 42 €, ¿cuánto costaban antes de la rebaja?

Solución: Las zapatillas costaban antes de las rebajas 60 €

14.- En un partido de fútbol, el equipo local tuvo el 60 % de posesión del balón. El primer tiempo se prolongó en 3 minutos y el segundo en 4 minutos. ¿Cuánto tiempo tuvo el balón el equipo visitante?

Sol: 38 minutos y 48 segundos.

15.- En distintos supermercados nos hemos encontrado las siguientes ofertas. Decidir razonadamente la que más interesa al consumidor: **a)** Pague dos y llévese tres. **b)** Pague tres y llévese cuatro. **c)** La segunda unidad a mitad de precio.

Solución: a) paga: 66,67%, rebaja: 33,33% b) paga: 75%, rebaja: 25% c) paga: 75%, rebaja: 25 %

Una empresa de limpieza tiene 63 empleados en el turno de noche, lo que supone el 35 % de la plantilla. ¿Cuántos empleados componen el total de la plantilla?

Empleados	Porcentaje
63	35%
x	100%

$\rightarrow \quad \frac{63}{x} = \frac{35}{100} \quad \rightarrow \quad x = \frac{63\cdot 100}{35} = 180$

Por tanto, la plantilla la componen 180 empleados

16.- En el trayecto Madrid-Zaragoza con el AVE, si el tren llega con un retraso superior al 12% del tiempo establecido te devuelven el precio del billete. Si el tiempo previsto para ese viaje es de 1h 50m y hoy ha tardado 2h 5m, ¿tendrán derecho a devolución?

Sol: Si

17.- Una familia compra un frigorífico que cuesta 840 € pagando una entrada del 30 % al contado y el resto en 6 letras. ¿Cuál es el importe de cada letra?

Solución: Cada mes pagarán 98 €.

18.- La factura de dos meses de luz de una familia es de 65 euros, a falta de añadir el 21 % de I.V.A. ¿Cuánto supone el I.V.A.? ¿Cuál es el precio final de la factura?

Solución: I.V.A.: 13,65 €. Precio final: 78,65 €

19.- Recojo el coche del taller y la factura asciende a 80 euros. Por pagarlo al contado me hacen un descuento del 7%. ¿Cuánto me han descontado? ¿Cuánto he pagado?

Solución: Descuento: 5,6 € Precio final: 74,4 €

20.- Un reloj valía 32 euros, pero el relojero me lo ha rebajado y he pagado finalmente 28.80 euros. ¿Qué tanto por ciento me han rebajado?

Solución: 10 %

Una empresa de limpieza tiene 180 empleados, de los cuales 63 trabaja en el turno de noche. ¿Qué porcentaje de los empleados trabaja en el turno de noche?

Empleados	Porcentaje
180	100%
63	x

$\frac{180}{63} = \frac{100}{x} \qquad x = \frac{63\cdot 100}{180} = \frac{63}{180}\cdot 100 = 35\%$

Por tanto, el 35% de los empleados está en el turno de noche.

21.- En un incendio han ardido el 40% de los árboles de un bosque. Si después del incendio quedan 4.800 árboles sin quemar, ¿cuántos árboles había al principio?

Solución: 8000 árboles

22.- Una máquina que fabrica tornillos produce un 3% de piezas defectuosas. Si hoy se han apartado 51 tornillos defectuosos, ¿cuántas piezas ha fabricado la máquina?

Solución: 1700 Tornillos

23.- En una tienda en la que todo está rebajado el 15% he comprado un pantalón por el que he pagado 102 €. ¿Cuál era el precio antes de la rebaja?

Solución: 120 €

Problemas de Porcentajes

24.- Hoy ha subido el precio del pan el 10%. Si una barra me ha costado 0,77€, ¿cuánto valía ayer?

Solución: 70 céntimos

25.- El valor de mis acciones, tras subir un 5%, es de 2.100 €. ¿Cuál era el valor anterior a la subida?

Solución: 2.000 €

26.- Un cliente ha comprado una lavadora por 375 euros. Estaba de oferta con un 20 % de descuento. ¿Cuál era el precio sin rebaja?

Sol: 468,75 €.

27.- El año pasado en mi colegio había 72 alumnos que jugábamos al fútbol, pero este año somos 108 alumnos. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento?

Sol: 50 % de aumento.

28.- Luisa tiene de tarea resolver 18 problemas de matemáticas de los que ya ha resuelto más del 65% pero menos del 70%. ¿Cuántos le quedan por resolver?

Sol: 6.

29.- En mi pueblo, ha disminuido la población un 8% en los últimos cinco años. Si actualmente somos 782 habitantes, ¿cuántos había en el pueblo?

Sol: 850 habitantes

30.- Si he leído 45 páginas, que representan el 60% de la mitad de un libro, ¿qué porcentaje del libro me queda por leer? ¿Y cuántas páginas?

Sol a) el 70% b) 105 páginas

31.- Un artículo que vale 75 euros tiene una rebaja del 20%. Nos dan dos opciones: **a)** hacen el descuento y luego añaden el 16 % de IVA, **b)** añaden el 16 % IVA y luego hacen el descuento. ¿Qué conviene más?

Sol: Las dos opciones son iguales.

32.- La gasolina ha subido un 4 %. Si antes costaba 1,25 euros el litro, ¿cuál es su precio actual?

Sol: 1,3 €

33.- Unas zapatillas que antes costaban 60 € tienen un descuento del 15%. Calcula cuánto valen ahora.

Sol: 51 €

34.- Imane realiza el 40% de un viaje en un 4x4, 1/3 a caballo y el resto andando. Si la caminata ha sido de 80 Km, ¿cuál es la longitud total del recorrido?

Sol: 300 Km

35.- El 26% de los libros de una biblioteca son novelas, el 18% son libros de poesía, el 10 % son libros de historia, el 22 % son libros de ciencias y el resto son enciclopedias. ¿Qué tanto por ciento son enciclopedias? ¿Cuántos libros hay de cada tipo si en la biblioteca hay 52.000 libros?

Sol: Las enciclopedias son un 24% y en la biblioteca hay 13.520 novelas, 9.360 libros de poesía, 5.200 de historia, 11.440 de ciencias y 12.480 son enciclopedias.

36.- El valor de un ordenador en una tienda es de 450,50€ pero si nos lo tienen que llevar a casa e instalarlo su valor se incrementa el 6%. Calcula el incremento del coste inicial y cuánto tendremos que pagar si queremos que lo lleven e instalen en casa.

Sol: 27,03 € y 477,53 €

37.- Un pantalón después de una rebaja de un 30% cuesta 21€, por tanto ¿cuál era el precio inicial?

Sol: 30 €

38.- Enrique ha pagado por un ordenador portátil en el Black Friday 850€. Si estaba rebajado un 15% ¿cuál era su precio el jueves?

Sol: 1.000 €

39.- Después de rebajarme un 12%, un balón de baloncesto me cuesta 79,20 €. ¿Cuánto costaba el balón antes de rebajarlo? ¿Y tras añadirle el 16 % de IVA?

Sol: 90€ costaba; 104,40€

40.- En un envase de galletas anuncian que hay un 25% más de galletas por el mismo precio. Los envases antiguos pesaban 1 kg y el envase actual con la oferta pesa 1,20 kg. ¿Es cierta la propaganda?

Sol: no, debería pesar 1,25kg

41.- Después de aumentarme el 16% de IVA, he pagado 200 € por un mueble. **a)** ¿Cuánto costaba antes de pagar el IVA? **b)** Si me habían hecho un descuento del 15% sobre el precio original antes de pagar el IVA, ¿Cuál era ese precio?

Sol: a) 172,41 €; b) 202,84€

En unos grandes almacenes, rebajan un abrigo un 20% en las primeras rebajas y, sobre ese precio, vuelven a hacer otro 20% de descuento en las segundas rebajas. ¿Qué porcentaje del precio original se ha rebajado el abrigo?

Si me rebajan un 20%, es que pago un 80%, y si luego me rebajan otro 20% entonces pago el 80% del 80 %, que en forma decimal es:

$$0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64 \quad \rightarrow \quad 64\%$$

Por tanto, pago el 64%, así que me ahorro el 36%.

42.- Este mes ha habido en mi comunidad autónoma 120 accidentes de tráfico, lo que mejora la cifra del año pasado que fue de 160 accidentes. ¿En qué tanto por ciento han disminuido este tipo de accidentes?

Sol: En el 25%

43.- Según la Organización Mundial de la Salud, el 35% de los fumadores padecerá una enfermedad pulmonar en el futuro. Si el 40 % de la población de una ciudad de 54.000 habitantes son fumadores, ¿cuántas personas de esa ciudad podrán padecer una enfermedad pulmonar?

Sol: 7.560 habitantes

44.- Un depósito de agua está al 93% de su capacidad. Si se añaden 14.000 litros, quedará completo. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Sol: 200.000 litros

45.- Roberto y Andrés compran una camisa cada uno, ambas del mismo precio. Roberto consigue una rebaja del 12%, mientras que Andrés solo consigue el 8%. De esta forma, uno paga 1,40 € más que el otro. ¿Cuál era el precio de las camisas?

Sol: La camisa costaba 35 €.

46.- Los socios de una Pyme deciden repartir proporcionalmente al número de acciones los 4.200 € de beneficios del último mes. Si la distribución de las acciones de la entre los socios está reflejada en la tabla: **a)** ¿Qué cantidad de dinero corresponde a cada socio? **b)** Si la empresa destina un 10 % de los beneficios para obra social, ¿qué cantidad de dinero corresponde al socio *C*?

	Acciones
Socio A	20%
Socio B	40%
Socio C	10%
Socio D	30%

Sol: a) Al socio *A* 840 €, al socio *B* 1 680 €, al socio *C* 420 € y al socio *D* 1.260 €; b) 378 €.

47.- En un McDonald se pueden consumir diferentes tipos de alimentos. En la tabla siguiente presentamos el contenido calórico y de grasas saturadas de una ración:

	Calorías	Grasas (gr)
Patatas fritas	1.500	100
Alitas de Pollo	600	40
Buñuelos	450	22
Pastel de Crema	290	19
Aritos de Cebolla	276	16

Si una persona se toma un día una ración de cada uno de estos alimentos, **a)** ¿Cuál ha sido su consumo total de calorías y grasas?; **b)** ¿En qué porcentajes sobrepasan la cantidad recomendada de 2.000 calorías y 65 gramos de grasa por persona y día?

Sol: a) 3.116 cal y 197 g de grasas; b) 55,8 % de cal y 203% de grasas

48.- Si un número aumenta en un 10%, resulta 42 unidades mayor que si dicho número disminuye en un 5%. ¿Cuál es ese número?

Sol: El número es el 280.

$a+(b+c)=(a+b)+c$

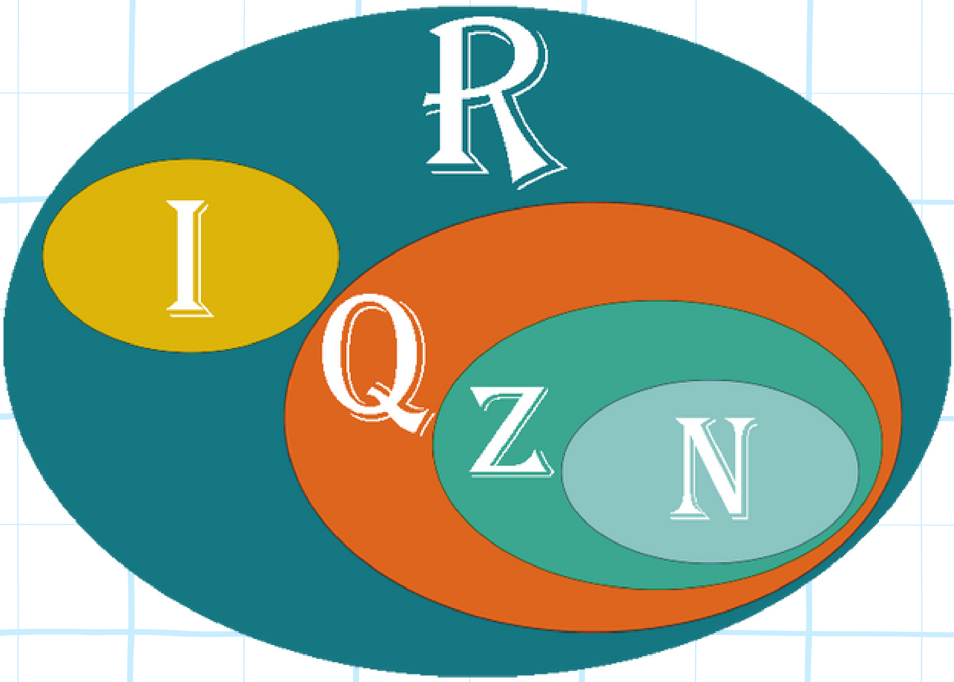
$a+0=a$

$a+b=b+a$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Tema 2: Conjuntos numéricos reales

Identificar los tipos de números reales. Comprender las propiedades de los conjuntos. Aprender las propiedades de las operaciones. Resolver situaciones problemáticas. Identificar expresiones equivalentes: expresión decimal y fracción, y anotación científicas.



Los números reales

Racionales $\mathbb{Q}$

Son todos los números que podemos expresar como fracción.

$$\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}$$

- Los naturales y los enteros se puede escribir como fracción

$$3 = \frac{3}{1} \qquad -5 = -\frac{5}{1} \qquad 0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{7}$$

- Las fracciones y los números mixtos

$$\frac{3}{5} \qquad -1\frac{2}{3} \qquad -\frac{7}{4} \qquad 5\frac{3}{8}$$

- Los números decimales EXACTOS y los PERIÓDICOS:

$$2{,}5 \qquad -8{,}14 \qquad 0{,}272 \qquad -0{,}012$$

$$3{,}144444\ldots = 3{,}1\hat{4}$$
$$-71{,}3333\ldots = -71{,}\hat{3}$$
$$0{,}16161616\ldots = 0{,}\widehat{16}$$
$$-4{,}122525\ldots = -4{,}12\widehat{25}$$

Enteros $\mathbb{Z}$

Números no decimales, positivos o negativos, y el cero.

0, 1, -1, 2, -2, …, -50, 51, -51, …

Naturales $\mathbb{N}$

Números que sirven para contar y ordena (cardinalidad y cardinalidad)

1, 2, 3, 4, …, 152, 153, 154, …

Irracionales $\mathbb{I}$

Son todos los números que no se puede expresar como fracción.

- Son los números con expresiones decimales infinitos no periódicos.

$$\sqrt[3]{7} \qquad \pi - 2$$

$$-15{,}16171819202122\ldots$$

$$5.\sqrt{2}$$

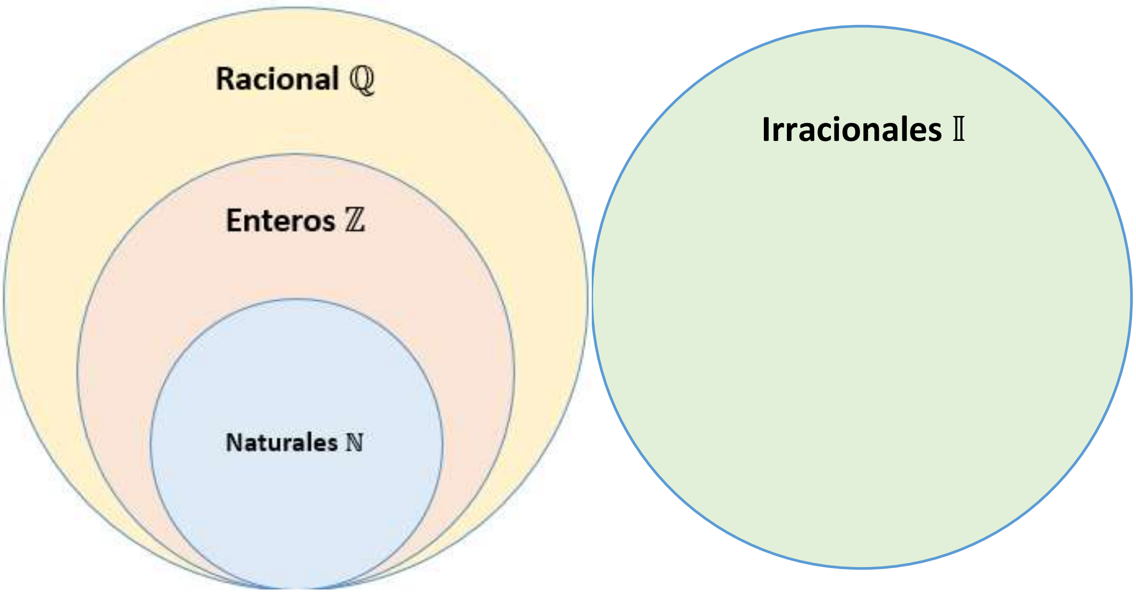
Actividad:

1. ¿Cómo se podría clasificar los siguientes números en función de los conjuntos numéricos que aparecen en el diagrama?

$$\frac{2}{3};\ -3;\ \sqrt{2};\ 0;\ \sqrt{9};\ \sqrt{-9}; 2{,}5; 7;\ \pi + 4;\ -25;\ \sqrt[3]{-7};\ -\frac{1}{5}; 1{,}444\ldots;$$

$$-12{,}13141516117181920\ldots;\ \phi;\ \sqrt[3]{-125};\ \sqrt[4]{9-5^2};\ -\sqrt{3};\ \sqrt{\frac{36}{25}}$$

$$1 + \sqrt{8}; 2,\hat{3}; 0{,}10100100010000\ldots; -1{,}43\widehat{12}$$



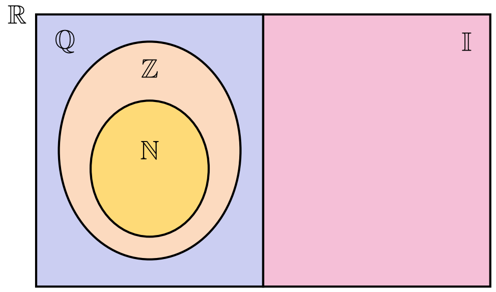
2. Recordemos que propiedades tiene cada conjunto marcando con una cruz si cumplen dicha condición.

	Naturales $\mathbb{N}$	Enteros $\mathbb{Z}$	Racionales $\mathbb{Q}$	Irracionales $\mathbb{I}$
Tiene primer elemento				
Tiene último elemento				
Es un conjunto ordenado				
Es un conjunto denso				

3. ¿Todos los números con expresión decimal infinita, son irracional?
4. ¿Todos los números irracionales son positivos?
5. El "0", ¿Es racional o irracional?
6. ¿Existe un orden entre números irracionales?, Por ejemplo: ¿Quién es más grande: $\sqrt{8}\ o\ 2{,}8283848586878889\ldots$?
7. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, explique cómo pensaste cada caso.
    a) Todos los números naturales son enteros
    b) Todos los enteros son naturales
    c) Algunos números racionales son enteros
    d) Algunos números naturales son irracionales
    e) Todos los números irracionales son reales

Para repasar los tipos de expresiones decimales y pasaje de un decimal a fracción, te invitamos a ver el siguiente video

- ✓ https://www.youtube.com/watch?v=v9RYe_qrs-Y



2.3.1. Operaciones y propiedades

Comenzaremos recordando las **propiedades de la suma** de números reales.

Propiedades de la suma. Para x, y y z reales cualesquiera, la suma satisface las siguientes propiedades:

- **Conmutativa:** $x + y = y + x$ (el orden de los términos no afecta al resultado).
- **Asociativa:** $x + (y + z) = (x + y) + z$ (podemos elegir cómo agrupar).
- **Neutro aditivo:** $x + 0 = x$ (sumar cero no afecta al número).
- **Existencia de inverso aditivo:** para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único elemento en $\mathbb{R}$ denotado por $-x$, llamado **opuesto** de x, que satisface $x + (-x) = 0$.

Con respecto a la existencia de opuesto, es importante notar dos cosas. La primera es que no significa que $-x$ sea un número negativo, sino que simplemente denota el opuesto del número x. Si x es negativo, entonces su opuesto $-x$ será positivo. Por ejemplo, el opuesto de 3 es -3, mientras que el opuesto de -5 es 5. En símbolos, $-(-5) = 5$. Esto se escribe en forma general como

$$-(-x) = x,$$

y significa que el opuesto del opuesto de un número, es dicho número. Observar que el opuesto del cero es él mismo, y es el único entero que satisface ser el opuesto de sí mismo.

Lo segundo a remarcar es que si en lugar de $\mathbb{R}$ nos restringimos a un conjunto más pequeño como el de los naturales $\mathbb{N}$, entonces la propiedad de existencia de opuesto dentro del conjunto no se cumple, ya que el opuesto de cualquier natural es negativo, por lo que no pertenece a $\mathbb{N}$. Si nos restringimos a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$, sí se cumple.

Recordemos ahora las **propiedades del producto** de números reales.

Propiedades del producto. Si x, y y z son reales cualesquiera, entonces valen las siguientes propiedades para el producto:

- **Conmutativa:** $x \cdot y = y \cdot x$ (el orden de los factores no afecta al resultado).
- **Asociativa:** $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (podemos elegir cómo agrupar).
- **Neutro multiplicativo:** $x \cdot 1 = x$ (multiplicar por 1 no afecta al número).
- **Existencia de inverso multiplicativo:** para cada $x \in \mathbb{R}$ *distinto de cero*, existe un único elemento en $\mathbb{R}$ denotado por x^{-1} o $\frac{1}{x}$, llamado **inverso multiplicativo** o **recíproco** de x, que satisface $x \cdot x^{-1} = 1$.

Al igual que con el elemento opuesto, si nos restringimos ahora a $\mathbb{N}$ o incluso a $\mathbb{Z}$, no se cumple que todo elemento tenga un inverso multiplicativo allí. De hecho, ningún entero, excepto 1 y -1, tienen inverso multiplicativo que sea entero. Por ejemplo, el inverso de 5 es $\frac{1}{5}$ (pues $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$), el cual no es entero. En cambio, sí se cumple que todo número en $\mathbb{Q}$ (distinto de cero) tiene su inverso multiplicativo en $\mathbb{Q}$, y lo mismo ocurre en $\mathbb{I}$.

Observar que el inverso del inverso de un número distinto de cero, es dicho número. Por ejemplo, $(5^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$. En forma general, si $x \neq 0$ entonces:

$$\boxed{\left(x^{-1}\right)^{-1} = x.}$$

A lo largo de todo el texto, como es usual, usaremos en forma indistinta la notación xy o $x \cdot y$ para indicar el producto entre x e y.

De las propiedades anteriores se puede deducir la **regla de los signos**:

$$\boxed{x(-y) = (-x)y = -(xy)} \qquad \text{y} \qquad \boxed{(-x)(-y) = xy.}$$

La regla anterior se recuerda de manera "gráfica" como:

$$+ \times - = -$$

$$- \times - = +$$

Antes de pasar a las demás operaciones, recordemos una propiedad conjunta de la suma y el producto:

- **Distributiva del producto respecto de la suma:** para cualesquiera números reales x, y y z, se tiene

$$\boxed{x(y + z) = xy + xz.}$$

Utilizaremos la suma y el producto para definir las demás operaciones: resta o diferencia, división, potenciación, radicación y logaritmo.

Resta o diferencia. La diferencia entre dos números reales x e y se define como la suma entre x y el opuesto de y:

$$x - y = x + (-y).$$

De la definición anterior se deduce que la diferencia *no* es conmutativa. Esto significa que $x - y \neq y - x$. Por ejemplo:

$$3 - 5 = 3 + (-5) = -2, \quad \text{pero} \quad 5 - 3 = 5 + (-3) = 2.$$

Además, la definición implica que

$$x - (-y) = x + y.$$

De esto se sigue la conocida regla para eliminar un paréntesis que está precedido por el signo menos: hay que cambiar los signos de cada término dentro del mismo.

Ejemplo 12. Hallar el resultado de $(-2) + 5 - (1 + (-3) + 2 - (-1 + 2))$.

Solución:

$$\begin{aligned}(-2) + 5 - (1 + (-3) + 2 - (-1 + 2)) &= -2 + 5 - (1 - 3 + 2 + 1 - 2)\\ &= -2 + 5 - (-1)\\ &= -2 + 5 + 1 = 4.\end{aligned}$$

«

No debemos olvidar la "jerarquía" de las operaciones: se debe calcular primero lo que está entre paréntesis, corchetes y llaves. Las restas se calculan de izquierda a derecha. Recordaremos luego el orden en que se realizan las operaciones combinadas.

Al estar la resta definida mediante la suma, se obtiene fácilmente la propiedad **distributiva del producto respecto de la resta**:

$$x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x(-z) = xy - xz.$$

División o cociente. El cociente entre dos números reales x e y, con $y \neq 0$, se define como el producto entre x y el inverso de y:

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

El cociente $\frac{x}{y}$ también se denota $x : y$. De la definición anterior se deduce que la división *no* es conmutativa: $x : y \neq y : x$. Por ejemplo:

$$10 : 5 = 2, \qquad \text{pero} \qquad 5 : 10 = \tfrac{1}{2}.$$

De hecho, si $x = 0$ entonces $y : x$ no está definido (no se permite dividir por cero), mientras que $x : y = 0$ siempre que y sea distinto de cero.

De la definiciones de cociente e inverso multiplicativo, para x e y distintos de cero, se concluye que

$$\boxed{\frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}.}$$

Al estar el cociente definido mediante el producto, se obtiene fácilmente la propiedad **distributiva del cociente respecto de la suma**:

$$\boxed{\frac{x+y}{z}} = (x+y)\cdot z^{-1} = xz^{-1} + yz^{-1} = \boxed{\frac{x}{z} + \frac{y}{z}.}$$

donde $z \neq 0$. Análogamente se obtiene la propiedad **distributiva del cociente respecto de la resta**:

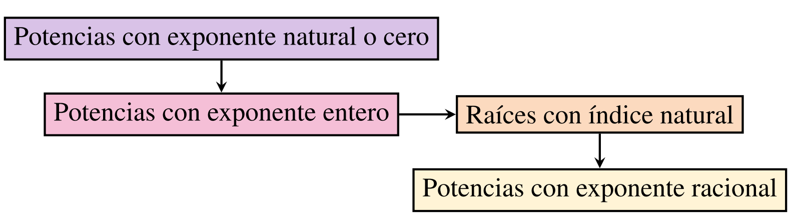
$$\boxed{\frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}.}$$

Un error frecuente es aplicar "al revés" la propiedad distributiva. Para el caso general,

$$\boxed{\frac{x}{y+z} \neq \frac{x}{y} + \frac{x}{z}.}$$

Este y otros errores frecuentes se enuncian en el Ejercicio 5 al finalizar la sección.

Pasaremos ahora a la potencia y la radicación, las cuales se definen en un orden determinado, el cual esquematizamos a continuación para organizar las ideas:



Luego analizaremos el caso de potencias con exponente real, pero de manera no formal, ya que la definición precisa escapa a los contenidos de este libro.

Potencia. Los nombres de los elementos que intervienen en una potencia son solamente dos:

x^n ← exponente

base → x

Potencia con exponente natural o cero: Como se indicó en el esquema, comenzaremos recordando la definición de potencia con base real y exponente *natural*: si x es un número real y n un natural mayor que uno, la potencia x^n se define como el producto de x consigo mismo n veces:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}.$$

Por ejemplo:

$$x^2 = x \cdot x, \qquad x^3 = x \cdot x \cdot x, \qquad x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x.$$

En lo anterior, x^2 se lee como "x al cuadrado", x^3 como "x al cubo", y x^4 como "x a la cuarta". La definición de potencia se completa para todos los exponentes naturales con $\boxed{x^1 = x}$ (caso $n = 1$).

Si $n = 0$, se define $x^0 = 1$ siempre que $x \neq 0$. Es decir, todo número no nulo elevado a la potencia cero es igual a uno, por definición*:

$$\boxed{x^0 = 1, \quad x \neq 0.}$$

Sin embargo, no existe definición para cero elevado a la cero, por lo que 0^0 es llamado una **indeterminación**.

Ejemplo 13. Calculando potencias. Aplicaremos la definición de potencia para calcular las indicadas a continuación:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \\ (-2)^3 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8, \\ 2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, \\ (-2)^4 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16. \end{aligned}$$

«

*Esta definición no es arbitraria sino que se origina a partir de la división de potencias de igual base, en cuyo caso, como veremos luego, los exponentes se restan: si $x \neq 0$, $x^3 : x^3 = x^{3-3} = x^0$. Pero por otro lado, todo número dividido por sí mismo es uno, por lo que $x^3 : x^3 = x^{3-3} = 1$. Igualando se obtiene $x^0 = 1$, siempre que $x \neq 0$.

En el ejemplo anterior hemos combinado la definición de potencia junto con la regla de los signos. El procedimiento realizado nos permite concluir que cualquier número real, ya sea positivo o negativo, elevado a una potencia par da como resultado un número positivo. En cambio, si la potencia es impar, el signo no se altera: un número positivo elevado a una potencia impar da como resultado otro número positivo, y al elevar un número negativo a una potencia impar se obtiene otro negativo. Entonces, para $a \geq 0$ y n natural, se tiene que:

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{si } n \text{ es par;} \\ -(a^n), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Ejemplo 14. Exponentes pares e impares. De la definición de potencia tenemos que:

$$3^2 = 9, \qquad 2^5 = 32.$$

Para bases negativas, aplicando (2.3.1) obtenemos

$$(-3)^2 = 9, \qquad (-2)^5 = -32.$$

Notar que si $a = 1$, entonces

$$(-1)^{180} = 1 \quad \text{pero} \quad (-1)^{175} = -1,$$

donde en este caso lo único que importó es que 180 es par, y 175 es impar. «

▶ **Potencia con exponente entero:** Extenderemos ahora la definición de potencia a exponentes *enteros* (es decir, veremos qué significa, por ejemplo, x^{-3}). Si n es un número natural y $x \neq 0$, se define

$$\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}.}$$

Se pide $x \neq 0$ porque no es posible dividir por cero.

Ejemplo 15. Calculando potencias enteras. Aplicando la definición, obtenemos:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},$$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9},$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$ «

El proceso efectuado en el último ejemplo se puede escribir en forma general para obtener una regla para elevar fracciones a exponentes enteros negativos: hay que elevar la fracción recíproca (es decir, la fracción que se obtiene "dando vuelta" la original, que no es más que el inverso multiplicativo de ella), pero ahora con exponente positivo:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{n}.$$

Como caso particular de lo anterior con $p = 1$ tenemos que:

$$\left(\frac{1}{q}\right)^{-n} = q^n.$$

En palabras, la fórmula anterior nos dice que un denominador con exponente negativo, se transforma en numerador con exponente positivo.

Ejemplo 16. Simplificando expresiones. Simplificar la siguiente expresión:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\frac{3^2}{5}\frac{1}{3^{-2}}.$$

Solución: Primero aplicaremos las observaciones anteriores y la definición de potencia, y luego efectuaremos el producto:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\frac{3^2}{5}\frac{1}{3^{-2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2}\frac{3^2}{5}3^2 = \left(\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{3^2}{5}\cdot 3^2 = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{5\cdot 5\cdot 5} = \frac{3^6}{5^3}.$$ «

A través de la definición de potencia hemos adelantado en el cálculo anterior una de las propiedades que enunciaremos luego (pág. 29) para exponentes más generales: cuando se multiplican potencias de igual base los exponentes se suman. Lo hemos usado para exponentes naturales, y es una consecuencia directa de la definición:

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{x\cdot x\cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}\cdot\underbrace{x\cdot x\cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ factores}} = \underbrace{x\cdot x\cdot \ldots \cdot x}_{n+m \text{ factores}} = x^{n+m}.$$

Siguiendo el esquema planteado, antes de definir potencias con exponente racional, necesitaremos la definición de la radicación con índice natural.

Radicación. Para n *natural*, decimos que un número r es **raíz n-ésima** del número x, si satisface que

$$r^n = x.$$

Para los casos $n = 2$ y $n = 3$, estas raíces se conocen como **raíz cuadrada** y **raíz cúbica**, respectivamente.

Ejemplo 17. Hallando raíces.

- 2 es raíz cúbica de 8, pues $2^3 = 8$.
- -2 es raíz cúbica de -8, pues $(-2)^3 = -8$.
- 2 es raíz quinta de 32, pues $2^5 = 32$.
- 9 es raíz cuadrada de 81, pues $9^2 = 81$. Pero también $(-9)^2 = 81$, por lo que -9 también es raíz cuadrada de 81. Entonces, las raíces cuadradas de 81 son ± 9 (se utiliza el símbolo $\pm$ para indicar tanto el valor positivo como el negativo).
- Puesto que $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$, 2 es raíz cuarta de 16, y -2 también.
- No existe ningún número real que sea raíz cuadrada de -4, pues todo número real elevado al cuadrado da como resultado un número no negativo.
- No existe ningún número real que sea raíz cuarta de -16, pues todo número real elevado a la cuarta da como resultado un número no negativo. «

El ejemplo anterior, junto con (2.3.1), nos conducen a la siguiente conclusión sobre las raíces n-ésimas de un número x:

x \ n	Par	Impar
+ Positivo	dos raíces reales ✔✔	una raíz real positiva ✔
− Negativo	no tiene raíz real ✗	una raíz real negativa ✔

Como observamos en el cuadro anterior, si n es impar entonces para cada número real x existe un único número real r satisfaciendo $r^n = x$. Esto se denota como $\sqrt[n]{x} = r$. Por ejemplo, $\sqrt[3]{8} = 2$ y $\sqrt[3]{-8} = -2$. En cambio, si n es natural y x positivo, existen dos valores reales satisfaciendo $r^n = x$. Se llama **raíz n-ésima principal** de x al único número real **positivo** r que satisface dicha igualdad. Utilizamos en este caso la notación $\sqrt[n]{x} = r$ para indicar a esta raíz principal. Cuando $n = 2$, por convención no se coloca el índice: $\sqrt[2]{x}$ se escribe como $\sqrt{x}$. Por ejemplo, $\sqrt{16} = 4$. Además, para cada natural n tenemos que $\sqrt[n]{0} = 0$, pues $0^n = 0$ sin importar el valor de n. Si x es negativo y n es par, el símbolo $\sqrt[n]{x}$ **no está definido**, ya que no es posible encontrar ningún número real r que verifique $r^n = x$.

Llamamos **radicación** al proceso de calcular la raíz n-ésima $\sqrt[n]{x}$ de un número x, con n natural, siempre que sea posible. Los nombres de los elementos involucrados en esta operación son:

índice $\rightarrow \sqrt[n]{x} \leftarrow$ radicando

radical $\nearrow$

Repetimos que cuando aparece una raíz con radicando positivo e índice par, el símbolo $\sqrt[n]{\ }$ representa solamente al valor de la raíz principal (es decir, el positivo). Este valor es el que arroja la calculadora en dicho caso. Por ejemplo:

$$\sqrt{4} = 2, \qquad \sqrt[4]{81} = 3. \qquad \checkmark$$

$$\sqrt{4} = \pm 2, \qquad \sqrt[4]{81} = \pm 3. \qquad \text{✗}$$

Ejemplo 18. Resolver el siguiente ejercicio combinado:

$$2\sqrt{25} - \sqrt[4]{16} + 3\sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{-8}.$$

Solución:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{25} - \sqrt[4]{16} + 3\sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{-8} &= 2 \cdot 5 - 2 + 3 \cdot 2 - (-2) \\ &= 10 - 2 + 6 + 2 = 16. \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior hemos tenido en cuenta la jerarquía de las operaciones (es decir, el orden en que deben resolverse), lo que recuerda la conocida frase “las sumas y restas separan términos”. Esto significa que primero se resuelven las operaciones dentro de un mismo término, y por último se realizan las sumas y las restas:

$$4 + 10 : 2 \neq 14 : 2 = 7 \quad \text{✗} \qquad 4 + 10 : 2 = \overbrace{4} + \overbrace{10 : 2} = 4 + 5 = 9 \quad \checkmark$$

Como es sabido, los paréntesis, corchetes y llaves imponen su orden en las operaciones.

Potencia con exponente racional: La definición de raíz con índice natural nos permite extender la definición de potencia al caso de exponente *racional*. Es decir, veremos ahora el significado de, por ejemplo, $x^{\frac{4}{5}}$ o $x^{-\frac{3}{7}}$. Sean $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m}{n}$ es irreducible, y sea $x \in \mathbb{R}$. Se define

$$\boxed{x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.}$$

en caso de que sea posible. Lo ilustramos a continuación.

Ejemplo 19. **Exponentes racionales.**

- $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$ *
- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

*Luego de ver las propiedades de la potencia y raíz simplificaremos esta expresión.

- $5^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$
- $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$
- $(-27)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-27)^{-1}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$
- $(-2)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^2} = \sqrt[5]{4}$
- $(-4)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(-4)^5} = \sqrt[6]{-1024} \rightsquigarrow$ no existe en $\mathbb{R}$ por ser índice par y radicando negativo. «

El ejemplo anterior, junto a lo que ya conocemos sobre radicación, nos conduce a las 3 posibilidades siguientes para $x^{\frac{m}{n}}$ cuando la base x es *negativa*:

- m par, n impar. Es un número positivo (pues x^m es positivo). ✔
- m impar, n impar. Es un número negativo (pues x^m es negativo). ✔
- m impar, n par. No tiene solución en $\mathbb{R}$ (pues x^m es negativo). ✗

Notar que la opción m y n ambos pares se descarta en la lista anterior pues en tal caso la fracción $\frac{m}{n}$ no estaría en su forma irreducible. Concluimos que **la potencia con base negativa y exponente racional irreducible solamente existe cuando el denominador de dicho exponente es impar.**

No hay que dejar pasar los dos requisitos sutiles pero fundamentales sobre el exponente racional $\frac{m}{n}$ establecidos en la definición de potencia: el primero es que al pedir m entero y n natural, es el numerador m el que se está "llevando el signo" de la fracción. Por ejemplo, si el exponente es $-\frac{3}{4}$, tomamos $m = -3$ y $n = 4$. Esto se debe a que el denominador n pasa a ser el índice de la raíz, la cual definimos solamente para índices naturales. El segundo requisito es que la fracción sea irreducible. En realidad esto no será necesario cuando la base sea positiva, pero como veremos en el ejemplo siguiente, si la base es negativa y el exponente no se encuentra en su mínima expresión, podemos obtener resultados absurdos.

Ejemplo 20. **Se debe reducir el exponente.** Supongamos que queremos calcular $(-2)^{\frac{6}{2}}$ y no observamos que el exponente puede reducirse a 3. Entonces, si aplicamos la definición de potencia con exponente racional sin reducir la fracción, obtenemos

$$(-2)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-2)^6} = \sqrt{64} = 8.$$

Sin embargo, si observamos que $\frac{6}{2} = 3$, tenemos

$$(-2)^{\frac{6}{2}} = (-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8,$$

obteniendo así un resultado diferente al primero. Este último es el correcto, pues se obtuvo respetando la definición. «

Como se pudo observar, hay que tener cuidado con las bases negativas con exponentes racionales, para no cometer errores que conduzcan a resultados incorrectos. Para evitar estos inconvenientes, será de gran utilidad la siguiente fórmula que relaciona una potencia con base negativa con otra cuya base es positiva, siempre que el exponente sea irreducible y tenga denominador impar (que, como mencionamos antes, es el único caso que importa pues de lo contrario la potencia no existe). Más precisamente, sean m entero y n natural *impar* con $\frac{m}{n}$ irreducible. Para $x > 0$ se tiene que

$$(-x)^{\frac{m}{n}} = (-1)^m x^{\frac{m}{n}}. \tag{2.3.2}$$

La fórmula anterior será una herramienta muy útil para "deshacernos" de las bases negativas.

Ejemplo 21. **Eliminando bases negativas.** Aplicando la fórmula anterior, tenemos que:

$$(-2)^{\frac{4}{5}} = (-1)^4 2^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{4}{5}},$$
$$(-7)^{\frac{5}{3}} = (-1)^5 7^{\frac{5}{3}} = (-1) \cdot 7^{\frac{5}{3}}.$$

«

La definición de potenciación con base positiva y exponente *real* requiere conceptos que escapan al contenido de este libro. Sin embargo, dichos conceptos tienen que ver con "aproximar" el exponente irracional mediante exponentes racionales. Este proceso lo realiza la calculadora al "cortar" la cantidad de decimales de un número irracional en una cantidad finita de ellos. De esta forma, aproxima por ejemplo al irracional π por el racional 3.141592654, y a $\sqrt{2}$ por 1.414213562. En otras palabras, todos los números que uno ingrese en la calculadora se convierten en racionales (muy cercanos al número deseado). Entonces, no resultará para ella un problema calcular 2^π, $4^{\sqrt{3}}$ o $e^{\sqrt{2}}$. Usaremos el resultado arrojado por la calculadora cuando se presenten estos casos. Por ejemplo,

$$2^\pi \approx 8.82497782708.$$

El símbolo $\approx$ indica que el valor no es exacto, sino que hemos redondeado la expresión. Notar que π se encuentra entre 3 y 4, por lo que tiene sentido que 2^π sea un número comprendido entre $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$.

Propiedades de la potencia con base positiva. Si x e y son reales *positivos* y $q, r \in \mathbb{R}$, entonces valen las siguientes propiedades:

- **Producto de potencias de igual base:** $x^q \cdot x^r = x^{q+r}$ (los exponentes se suman).
- **División de potencias de igual base:** $x^q : x^r = x^{q-r}$ (los exponentes se restan).

- **Potencia de otra potencia:** $(x^r)^q = x^{rq}$ (los exponentes se multiplican).
- **Distributiva con respecto al producto:** $(x \cdot y)^q = x^q \cdot y^q$.
- **Distributiva con respecto al cociente:** $(x : y)^q = x^q : y^q$.
- **No es distributiva con respecto a la suma ni a la resta:** es decir, no se puede distribuir cuando dentro del paréntesis hay una suma o resta:

$$\text{✗} \quad (x+y)^q \neq x^q + y^q,$$

$$\text{✗} \quad (x-y)^q \neq x^q - y^q.$$

- **Cambio de orden:** $x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
- **Invariancia por fracciones equivalentes:** $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 22. **Aplicando las propiedades de la potencia.**

- $8^{\frac{5}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 8^2 = 64.$
- $7^{\frac{3}{2}} : 7^{\frac{5}{2}} = 7^{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}} = 7^{-1} = \frac{1}{7}.$
- $\left(\left(a^2 \cdot a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{6}{5}} = \left(\left(a^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{6}{5}} = a^{\left(\frac{10}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{6}{5}\right)} = a^{14}, \qquad a > 0.$
- $(5 \cdot x)^2 = 5^2 \cdot x^2 = 25x^2, \qquad x > 0.$
- $\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{2^3} = \frac{a^3}{8}, \qquad a > 0.$ «

Ejemplo 23. **Cambiando el orden.** Veamos un ejemplo de cómo funciona la propiedad de "cambio de orden". Si aplicamos la definición de potencia para calcular $27^{\frac{2}{3}}$, primero tenemos que elevar al cuadrado y luego sacar la raíz cúbica:

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9,$$

pero cambiando el orden de estas operaciones tenemos que

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Se obtiene así el mismo resultado pero en una forma más sencilla, por involucrar números más pequeños al calcular primero la raíz, y elevar luego al cuadrado. Por otro lado, la última propiedad de las potencias nos dice que el mismo resultado se obtiene si el exponente no es irreducible, debido a que la base es *positiva*:

$$27^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{27^4} = \sqrt[6]{531441} = 9,$$

como puede comprobarse mediante la calculadora. «

Muchas de las teclas de las calculadoras científicas tienen dos funciones: la que está escrita sobre la tecla que se ejecuta directamente con ella, o la que está escrita por encima de ella (arriba). Para poder usar esta segunda función es necesario oprimir antes la tecla SHIFT o INV. Las calculadoras científicas actuales cuentan con una tecla cuya segunda función aparece como $\blacksquare\!\sqrt{\square}$ (o $\sqrt[x]{\ }$ en las más antiguas), para calcular la raíz con cualquier índice. Sin embargo, algunas solamente traen teclas para calcular la raíz cuadrada de un número, o la cúbica. En tal caso, se puede pasar la raíz a potencia, y usar la tecla $x^{\blacksquare}$ o x^y, según el modelo. Por ejemplo, para calcular $\sqrt[6]{729}$ podemos hacer $729^{\frac{1}{6}}$.

Cabe mencionar que las bases negativas se eliminan en las propiedades anteriores ya que los exponentes racionales pueden llevar a cosas como

$$\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(-1)},$$

que surgen tomando $x = y = -1$ y $q = \frac{1}{2}$ en la propiedad distributiva con respecto al producto. En esta igualdad, el lado izquierdo tiene sentido pues es $\sqrt{1}$, mientras que el lado derecho no lo tiene pues no existen ninguno de los factores en el conjunto de los números reales. Además, aún pidiendo que las expresiones tengan sentido, algunas propiedades no valen para bases negativas, como la "potencia de otra potencia". El ejemplo siguiente* muestra que si la aplicamos en dicho caso, podemos llegar a algo absurdo.

Ejemplo 24. Cuidado con las bases negativas.

$$\begin{aligned} -27 &= (-27)^1 = (-27)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} \\ &= \left((-27)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[3]{(-27)^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[3]{729}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27. \end{aligned}$$

Siguiendo la cadena de igualdades anterior, se obtiene $-27 = 27$, lo cual es absurdo. «

Sin embargo, si los exponentes fueran **enteros** entonces las propiedades siguen valiendo para bases **negativas**. Además, para exponentes racionales con denominador impar, se puede usar la fórmula (2.3.2) para pasar de bases negativas a positivas, y luego aplicar la propiedades. Hacer uso de esta combinación será una herramienta muy útil, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

*Fuente: `https://en.wikipedia.org/wiki/Exponentiation`. Consultado en agosto de 2018.

Ejemplo 25. Eliminando bases negativas para aplicar las propiedades. Aplicando (2.3.2), se obtiene:

$$\begin{aligned}(-8)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{5}} =&(-1)^1\cdot 8^{\frac{1}{5}}\cdot 4^{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\right)}\\ =&(-1)\cdot\left(2^3\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{6}{5}}=(-1)\cdot 2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{12}{5}}\\ =&(-1)\cdot 2^{\frac{15}{5}}=(-1)\cdot 2^3=-8.\end{aligned}$$ «

Ejemplo 26. Calcular $(-8)^{\frac{2}{3}}$ utilizando la fórmula (2.3.2) y la propiedad de cambio de orden.

Solución:

$$(-8)^{\frac{2}{3}}=(-1)^2 8^{\frac{2}{3}}=1\cdot\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=2^2=4.$$ «

En cuanto a las **propiedades de la radicación**, puesto que $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$, estas son inmediatas a partir de las propiedades de la potencia.

Propiedades de la radicación. Si n y m son naturales, y x e y son reales *positivos*, entonces valen las siguientes propiedades:

- **Distributiva con respecto al producto:** $\sqrt[n]{x\cdot y}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$.
- **Distributiva con respecto al cociente:** $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.
- **Raíz de otra raíz:** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[m\cdot n]{x}$ (los índices se multiplican).
- **No es distributiva con respecto a la suma ni a la resta:** es decir, no se puede distribuir cuando el radicando es una suma o resta:

$$✗\quad \sqrt[n]{x+y}\neq\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y},$$
$$✗\quad \sqrt[n]{x-y}\neq\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}.$$

- **¡Cuidado al sumar o restar $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{m}$!**

$$✗\quad \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[m]{x}\neq\sqrt[n+m]{x}\ \text{ pues }\ \frac{1}{n}+\frac{1}{m}\neq n+m,$$
$$✗\quad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}}\neq\sqrt[n-m]{x}\ \text{ pues }\ \frac{1}{n}-\frac{1}{m}\neq n-m.$$

- Si n es impar, $\sqrt[n]{-x}=-\sqrt[n]{x}$.
- $\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$ ⇝ es decir, son operaciones inversas cuando $x>0$ (o $x=0$). Si x fuera *negativo* vale lo mismo para n *impar*, pero hay que tener cuidado para n par, y dicho caso se analiza en detalle en (2.3.3), en la Sección 2.3.4.

Ejemplo 27. **Aplicando las propiedades de la radicación.**

- $\sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.
- $\sqrt[3]{\sqrt{20}} = \sqrt[6]{20}$.
- $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{7^5} = \sqrt[6]{16807}$ (notar que el resultado no es $\sqrt[5]{7}$, que es lo que se obtendría erróneamente al sumar los índices).
- $\sqrt[8]{3^8} = \left(\sqrt[8]{3}\right)^8 = 3$, y $\sqrt[7]{(-3)^7} = -3$. Sin embargo $\sqrt[8]{(-3)^8} \neq -3$, como se verá en (2.3.3). «

Ejemplo 28. **Simplificando radicales.** Veamos cómo usar la propiedad distributiva de la raíz para simplificar expresiones:

$$\sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2},$$

$$\sqrt[4]{5^{11}} = \sqrt[4]{5^8 \cdot 5^3} = \sqrt[4]{5^8}\,\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{8}{4}}\,\sqrt[4]{125} = 5^2\,\sqrt[4]{125} = 25\,\sqrt[4]{125}.$$ «

El procedimiento utilizado en el ejemplo anterior se puede generalizar de la siguiente manera: sean m y n naturales con $m > n$, y sea x un real positivo. Sean q y r naturales tales que $m = n \cdot q + r$ (es decir, hacemos la división $m : n$ y llamamos q al cociente y r al resto). Entonces

$$\sqrt[n]{x^m} = x^q\,\sqrt[n]{x^r}.$$

Esta igualdad se obtiene mediante el mismo razonamiento empleado en el ejemplo, el cual suele ser más sencillo de aplicar que memorizar la fórmula resultante.

Ejemplo 29. Simplificar $\sqrt{\frac{243}{125}}$.

Solución: Primero hay que factorizar los números involucrados, para luego simplificar exponentes con índices de acuerdo al procedimiento anterior:

$$\sqrt{\frac{243}{125}} = \sqrt{\frac{3^5}{5^3}} = \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{5^3}} = \frac{\sqrt{3^4 \cdot 3}}{\sqrt{5^2 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{3^4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot \sqrt{5}} = \frac{9}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Otra forma de resolverlo es mediante la fórmula de arriba, aplicada por un lado al numerador y por otro al denominador. Para $\sqrt{3^5}$ se aplica con $n = 2$, $m = 5$ y $x = 3$, lo que produce $q = 2$ y $r = 1$ (pues $5 = 2 \cdot 2 + 1$). Luego

$$\sqrt{3^5} = 3^2\,\sqrt{5}.$$

Para el denominador $\sqrt{5^3}$, la fórmula se aplica con $n = 2$, $m = 3$ y $x = 5$, lo que produce $q = 1$ y $r = 1$. Por lo tanto

$$\sqrt{5^3} = 5\,\sqrt{5}.$$ «

Diremos que dos o más radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando. Lo único que pueden tener distinto es el coeficiente que los multiplica. Por ejemplo, los radicales $3\sqrt{2}$ y $-5\sqrt{2}$ son semejantes. Para comprobar si dos radicales son semejantes o no, se simplifican lo más posible, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 30. Reconociendo radicales semejantes. Determinar si los radicales $\sqrt[3]{162}$ y $\sqrt[3]{48}$ son semejantes.

Solución: Observemos primero que ambos tienen índice igual a 3. Además, si factorizamos los radicandos obtenemos

$$162 = 2 \cdot 3^4, \qquad 48 = 2^4 \cdot 3.$$

Entonces, por un lado tenemos que

$$\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{6},$$

y, por el otro,

$$\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^4} = \sqrt[3]{3} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{6}.$$

Luego, son radicales semejantes. «

Ejemplo 31. Combinando radicales. La propiedad distributiva de la suma y la resta nos permite combinar radicales semejantes. Por ejemplo, si consideramos los radicales del ejemplo anterior tenemos que

$$\sqrt[3]{162} + \sqrt[3]{48} - 9\sqrt[3]{6} = 3\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{6} - 9\sqrt[3]{6} = (3 + 2 - 9)\sqrt[3]{6} = -4\sqrt[3]{6}.$$ «

Consideremos las dos fracciones siguientes:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

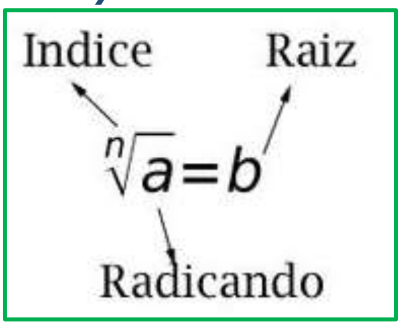
Sabiendo que $\sqrt{2} \approx 1.4142$, para obtener un valor numérico aproximado de las fracciones anteriores, debemos hacer la división $1 : (1.4142)$ para la primera, mientras que para la segunda debemos resolver $(1.4142) : 2$. Sin una calculadora, la última es más sencilla de resolver que la primera, ya que dividir por 2 es tomar la mitad del número, lo cual es aproximadamente 0.7. Resulta que estas dos fracciones son equivalentes, y la segunda puede obtenerse a partir de la primera mediante un procedimiento denominado **racionalización del denominador**. El mismo consiste en eliminar los radicales que aparecen en el denominador, multiplicando y dividiendo la fracción dada por un mismo valor, elegido convenientemente. Ilustramos el método en el ejemplo siguiente.

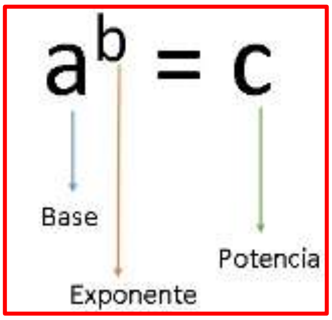
Propiedades de potencia

Recordemos un poco las propiedades de la potencia. Complete el cuadro para que se cumpla la igualdad

$a, b \in \mathbb{R} - \{0\}; \quad n, m \in \mathbb{N}$		
P1	$a^0 =$ ______	$(-\sqrt{41})^0 =$ ______
P2	$a^1 =$ ______	$(\pi + 7)^1 =$ ______
P3	$a^{-n} =$ ______	$\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{-2} =$ ______
P4	$a^n \cdot a^m = a$——	$\pi^4 \cdot \pi^{-2} =$ ______
P5	$a^n : a^m = a$——	$\frac{(\sqrt{3})^3}{\sqrt{3}} =$ ______
P6	$(a^n)^m = a$——	$[(4\varphi)^2]^{\frac{1}{4}} =$ ______
P7	$a^{n/m} =$______	$-13^{4/3} =$ ______
P8	$a^n \cdot b^n =$______ $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$______	$(\sqrt{5})^3 \cdot (\sqrt{125})^3 =$ ______
P9	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} =$________	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{12}} =$ ______
P10	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} =$ ______ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} =$ ______	$5^{1/2} \cdot \sqrt{20} =$ ______

Partes de la potencia y la raíz





Actividad 5:

1. Resuelve estos cálculos sin usar calculadora

a. $0{,}5^{119} \cdot 2^{119}$

b. $\left(\frac{4}{5}\right)^{12} : \left(\frac{4}{5}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{20}$

c. $3.420^{9} : 342^{9}$

d. $\sqrt[7]{(-5)^{14}}$

e. $\sqrt{625} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$

f. $\sqrt[3]{125^{-9}}$

2. Rodeen, en cada caso, las expresiones equivalentes a la dada. Expliquen cómo lo pensaron.

a. $\frac{7^4 \cdot 3^4}{7^{-2} \cdot 6^3} =$ **i.** $\frac{7^6}{3 \cdot 2^3}$ **ii.** $\frac{7^2 \cdot 3^2}{6^2}$ **iii.** $\frac{7^3 \cdot 1^4}{3^{-2} \cdot 2^3}$ **iv.** $\frac{7^6 \cdot 3}{2^3}$ **v.** $\frac{1^4 \cdot 3^2}{1^{-2} \cdot 6^3}$

b. $\frac{22^3 \cdot 2^5}{44^{12}} =$ **i.** $\frac{2^5}{22^9 \cdot 2^7}$ **ii.** $\frac{2^5}{2^9}$ **iii.** $\frac{1}{44^4}$ **iv.** $\frac{1}{22^9 \cdot 2^7}$ **v.** $\frac{1^4 \cdot 1^5}{1^{12}}$

3. Estos pares de expresiones algebraicas son equivalentes. Expliquen por qué.

a. $x^5 \cdot x^2 \cdot x^{-3}$ y $\frac{x^7}{x^3}$ **b.** $(x^{10} \cdot x^{21})^3 : x^{\frac{2}{3}}$ y $\sqrt[3]{x^{277}}$ **c.** $\sqrt[3]{x^6 : x^2}$ y $\sqrt[3]{x} \cdot x$

4. Decidan si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Escriban cómo lo decidieron.

a. $a^{\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{a^2} = 1$ para cualquier valor de a.

b. $b^3 + b^3 = b^6$ para cualquier número real b.

c. $\sqrt{x^2} = x$ para todos los números reales x.

d. $(q^4)^{\frac{3}{8}} = \sqrt{q^3}$ para cualquier número q positivo.

e. $(2p + 7)^2 = 4p^2 + 49$ para cualquier número real p.

f. No existe ningún número real cuyo cuadrado sea 101.

g. $\sqrt{a^2 + 36} = a + 6$ para cualquier número real positivo a.

h. $\sqrt[n]{a}$ no existe si n es un número natural par y a es un número real negativo.

i. Si a y b son números reales distintos de cero y c es un número natural cualquiera, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^{c}$.

5. ⚠ El objetivo de este ejercicio es evitar cometer los siguientes **errores***, que son tan graves como frecuentes. Hallar ejemplos que prueben que:

(a) $\frac{n}{m} + \frac{p}{q} \neq \frac{n+p}{m+q}$

(b) $\frac{\cancel{n}+p}{\cancel{n}} \neq p$

(c) $\frac{n}{m+q} \neq \frac{n}{m} + \frac{n}{q}$

(d) $\frac{1}{m} + \frac{1}{q} \neq \frac{1}{m+q}$

(e) $a^n \cdot a^m \neq a^{n \cdot m}$

(f) $\frac{a^n}{a^m} \neq a^{\frac{n}{m}}$

(g) $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$

(h) $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(i) $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} \neq \sqrt[n+m]{x}$

6.

Simplifique y exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos en los problemas 1 a 14.

1. $(2^3)(2^2)$

2. $x^6 x^9$

3. $w^4 w^8$

4. $z^3 z z^2$

***5.** $\dfrac{x^3 x^5}{y^9 y^5}$

6. $(x^{12})^4$

7. $\dfrac{(a^3)^7}{(b^4)^5}$

8. $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^5$

9. $(2x^2 y^3)^3$

10. $\left(\dfrac{w^2 s^3}{y^2}\right)^2$

11. $\dfrac{x^9}{x^5}$

12. $\left(\dfrac{2a^4}{7b^5}\right)^6$

13. $\dfrac{(x^3)^6}{x(x^3)}$

14. $\dfrac{(x^2)^3(x^3)^2}{(x^3)^4}$

Potencias y Raíces en $\mathbb{Z}$

Propiedades de las potencias

Producto	Cociente
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$	$a^b : a^c = a^{b-c}$
$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$	$a^c : b^c = (a : b)^c$

Potencia	Potencia de Fracción
$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^c = \dfrac{a^c}{b^c}$
$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$	

Propiedades de las Raíces cuadradas

$$\sqrt{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a$$

Potencias de base negativa

$$a^b \begin{cases} si \quad a > 0 \quad + & (+2)^3 = +8 \\ si \quad a < 0 \quad \begin{cases} si \quad b \quad par \quad + \\ si \quad b \quad impar \quad - \end{cases} & \begin{matrix} (-2)^4 = +16 \\ (-2)^3 = -8 \end{matrix} \end{cases}$$

1.- Calcula Aplicando las Propiedades de las potencias:

a) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3$ **b)** $5^7 : 5^3$ **c)** $(5^3)^4$

d) $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4$ **e)** $(3^4)^4$ **f)** $[(5^3)^4]^2$

g) $(8^2)^3$ **h)** $(9^3)^2$ **i)** $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2$

j) $2^7 : 2^6$ **k)** $(2^2)^4$ **l)** $(4 \cdot 2 \cdot 3)^4$

m) $(2^5)^4$ **n)** $[(2^3)^4]^0$ **ñ)** $(27^2)^5$

Sol: a)3^8; b)5^4; c)5^{12}; d)30^4; e)3^{16}; f)5^{24}; g)2^{18}; h)3^{12}; i)2^{10}; j)2; k)2^8; l)24^4; m)2^{20}; n)1; ñ)3^{30}

2.- Calcula, teniendo cuidado con los signos:

a) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$ **b)** $(-2)^{-2} \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$

c) $2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^6$ **d)** $(-2)^5 : 2^3$

e) $2^2 : (-2)^{-3}$ **f)** $-2^6 : (-2)^3$

g) $2^{-2} : 2^{-3}$ **h)** $(-2)^3 \cdot (+2)^7$

Sol: **a)** $(-2)^9$; **b)** $(-2)^5$; **c)** 2 ; **d)** -2^2 ; **e)** -2^5 ; **f)** 2^3 ; **g)** 2 ; **h)** $-(2)^{10}$

3.- ¿Qué signo tienen las potencias siguientes?

a) 6^3 **b)** $(-3)^{12}$ **c)** 3^{21} **d)** $(-3)^{21}$

e) $(-2)^4$ **f)** 5^{32} **g)** $(-3)^5$ **h)** 4^{51}

i) 3^{35} **j)** $(-1)^{17}$ **k)** 3^{-3} **l)** $(-2)^{-3}$

4.- Calcula las siguientes potencias:

a) 3^4 **b)** $(-1)^3$ **c)** $(-2)^3$ **d)** 2^5

e) $(-2)^4$ **f)** -2^2 **g)** $(-3)^3$ **h)** 5^2

Sol: **a)** 81; **b)** -1; **c)** -8; **d)** 32; **e)** 16 ; **f)** -4 ; **g)** -27 ; **h)** 25

5.- Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma de potencia:

a) $(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^3$ **b)** $(3^2 \cdot 5^3)^3$ **c)** $(5^3 \cdot 2^2 \cdot 4^3)^2$

Sol: **a)** $2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^9$; **b)** $3^6 \cdot 5^9$; **c)** $5^6 \cdot 2^{16}$

6.- Reduce a una única potencia:

a) $x^4 \cdot x^6$ **b)** $(-m)^3 \cdot (-m)^4$ **c)** $m^8 : m^6$

d) $x^7 : x^6$ **e)** $(-4)^7 : (4^2)^2$ **f)** $(m^4)^3$

g) $(a^{10} : a^6)^2$ **h)** $(x^5 : x^2) \cdot x^4$ **i)** $(-x^2)^5$

j) $(x^6 \cdot x^4) : x^7$ **k)** $(5^2 \cdot 5^4) : 5^3$ **l)** $(2^4)^3 : 2^7$

m) $(5^2)^5 : \left[(-5)^3\right]^2$ **n)** $\left[(-3)^4\right]^3 : \left[(-3)^3\right]^3$

Sol: **a)** x^{10}; **b)** $-m^7$; **c)** m^2; **d)** x; **e)** -4^3; **f)** m^{12}; **g)** a^8; **h)** x^7; **i)** $-x^{10}$; **j)** x^3; **k)** 5^3; **l)** 2^5; **m)** 5^4; **n)** -3^3

7.- Reduce a una única potencia:

a) $(a^2 \cdot a^3 \cdot a)^3 \cdot (a^2 \cdot a^3 \cdot a^0)$ b) $2^3 \cdot 2 \cdot \left(\dfrac{2^3 \cdot 2}{2^4 \cdot 2^2}\right)$ c) $3^2 \cdot 3^3 \cdot \left(\dfrac{3^3 \cdot 3^4}{3^4 \cdot 3^2}\right)$

Sol: **a)** a^{23}; **b)** 2^2; **c)** 3^6

8.- Calcula:

a) $(5^8 \cdot 5^4) : (5^2)^5$ **b)** $\left[(-2^6) \cdot (+2)^3\right] : \left[(+2)^3\right]^2$

c) $\left[(-7)^8 \cdot 7^5\right] : (7^4)^3$ **d)** $\left[(-3)^3\right]^3 : \left[(-3)^2 \cdot (-3)^3\right]$

Sol: **a)** 5^2; **b)** -2^3; **c)** 7; **d)** 3^4

9.- Opera y calcula:

a) $10^6 : (5^4 \cdot 2^4)$ **b)** $(-12)^7 : \left[(-3^5 \cdot 4^5)\right]$

c) $\left[(-9)^5 \cdot (-2)^5\right] : 18^4$ **d)** $\left[5^7 \cdot (-4)^7\right] : 20^4$

e) $8^4 : (2^5 \cdot 4^2)$ **f)** $25^3 : \left[(-15)^5 : 3^5\right]$

Sol: **a)** 10^2; **b)** 12^2; **c)** 18; **d)** -20^3; **e)** 2^3; **f)** -5

10.- Reduce a una única potencia:

a) $\left[2^9 : (2^3)^2\right] \cdot 5^3$ **b)** $10^2 : \left[(5^2)^3 : 5^4\right]$

c) $6^3 : \left[(2^7 : 2^6) \cdot 3\right]^2$ **d)** $\left[(6^2)^2 \cdot 4^4\right] : (2^3)^4$

Sol: **a)** 10^3; **b)** 2^2; **c)** 6; **d)** 3^4

11.- Calcula, si es posible, las siguientes raíces:

a) $\sqrt{49}$ **b)** $\sqrt{8^2}$ **c)** $\sqrt{-49}$ **d)** $\sqrt{15^2}$

e) $\sqrt{169}$ **f)** $\sqrt{-225}$ **g)** $\sqrt{2500}$ **h)** $\sqrt{50^2}$

i) $\sqrt{-x^2}$ **j)** $\sqrt{x^2}$ **k)** $\sqrt{(-144)^2}$ **l)** $\sqrt{a^4}$

m) $\sqrt{(-2)^2}$ **n)** $\sqrt{-a^4}$ **ñ)** $\sqrt{(-a)^4}$ **o)** $\sqrt{m^6}$

p) $\sqrt{-81}$ **q)** $\sqrt{(-m)^6}$ **r)** $\sqrt{-a^4}$ **s)** $\sqrt{-m^6}$

Sol: **a)** 7; **b)** 8; **c)** No; **d)** 15; **e)** 13; **f)** No; **g)** 50; **h)** 50; **i)** No; **j)** x; **k)** -144; **l)** a^2; **m)** 2; **n)** no; **ñ)** a^2; **o)** m^3; **p)** no; **q)** m^3; **r)** no; **s)** no

12.- Calcula:

a) $(4^6 : 4^3) \cdot (4^4 : 4)$ **b)** $(36^5 : 6^4) : (2^4 \cdot 3^4)$

c) $x \cdot (x^9 : x^3) : x^3$ **d)** $\left[(2^8 : 4^2) : 5^0\right] : 8$

e) $16^4 : 4^7 \cdot 8^3$ **f)** $(-m^8 \div m^3) \div (-m^2)$

g) $4^3 - 5^2 + 3^0$ **h)** $\sqrt{144} - \sqrt{121}$

i) $6^3 \div 6^2 + 5^2 \cdot 5$ **j)** $\left[(3^{11} : 9^2) \cdot 27^2\right] : 81^3$

k) $\left[2^7 \cdot (-3)^7\right] \div 36^2$ **l)** $m^{10} : (m^3)^3 \cdot p$

m) $\left[(-k)^9 : k^5\right] : (-k)^3$ **n)** $(25^5 \cdot (-4)^5) : (-10)^3$

Sol: **a)** 4^6; **b)** 6^2; **c)** x^4; **d)** 2^4; **e)** 2^8; **f)** m^3; **g)** 40; **h)** 1; **i)** 131; **j)** 3; **k)** -6^3; **l)** m·p; **m)** k; **n)** 10^7

13.- Realiza las siguientes operaciones combinadas y calcula el resultado: *(usa potencias si es necesario)*

a) $3 \cdot 4^2 - 3^2 : 3^0 + \sqrt{81} : 3^2 =$

b) $5 \cdot (7-2)^2 : 25 - 4^4 : 4^3 + \sqrt{36} : 6 =$

c) $5^2 + 5^3 - 5 + 5^0 =$

d) $25 - 5 \cdot 2 + 8^4 : 4^5 + 2 \cdot \sqrt{49} =$

e) $(-30)^7 : (-6)^7$ **f)** $8^4 : (-4)^4$ **g)** $\dfrac{9^5}{3^5}$ **h)** $\left(-(-2^2)^3\right)^4$

i) $(-10)^3 \cdot (-10)^4 \cdot 10^3 : 100^2$ **j)** $16^2 \cdot 8^3 : (-4)^3$

k) $625 \cdot 25^2 : 125$ **l)** $(-100)^3 \cdot (-1000)^2 : (-10)^7$

Sol: **a)** 40; **b)** 2; **c)** 146; **d)** 33; **e)** 5^7; f) 2^4; **g)** 3^5; **i)** -10^6; **j)** -2^{23}; **k)** 5^5; **l)** 10^2

14.- Una finca tiene forma cuadrada y su área mide 81 m^2. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

Sol: 9 m.

15.- Escribe el producto de cien por mil como una única potencia.

Sol: 10^5

16.- Un cine tiene el mismo número de filas que de columnas, y en total tiene 289 butacas. ¿Cuántas butacas tiene cada fila?

Sol: 17 butacas.

17.- Un rectángulo mide 120 m de largo y 30 m de ancho. Calcula el lado de un cuadrado que tenga la misma área.

Sol: 60 m.

18.- Lily va a colocar en su supermercado oriental 5 cajas de vasos en las que los vasos vienen ordenados en 5 filas de 5 vasos. Expresa como una única potencia el número de vasos a colocar y calcúlalo.

Sol: 5^3=125 vasos.

19.- El patio de un centro escolar es cuadrado, y cada lado mide 60 m. Queremos ponerlo de terrazo, que mide 40 cm x 40 cm. Si cada pieza de terrazo vale 0,65 €, y por colocarlo cobran 3.000 €, ¿cuánto cuesta arreglar el patio?

Sol:17.625 €.

20.- Un parque cuadrado, que tiene de superficie 7,84 ha, está plantado de pinos perfectamente alineados y distribuidos en filas y columnas. Si cada pino ocupa 49 m^2, ¿cuántos pinos hay en cada fila?

Sol: 40 pinos.

21.- Halla el área de una finca cuadrada que tiene 100 m de lado. Da el resultado en hectáreas.

Sol: 1 Ha.

22.- En una papelería hay 4 estanterías con 8 baldas en cada una de ellas y sobre cada balda, 16 libros. Expresa en forma de potencia el total de libros que hay en la papelería.

Sol: 2^9=512 libros.

23.- ¿Es cierto que la suma de potencias de la misma base es otra potencia cuya base es la misma y cuyo exponente es la suma de los exponentes de los sumandos? Justifica la respuesta con un ejemplo

Sol: No

24.- Con 195 árboles se quiere formar un cuadrado de filas y columnas. ¿Cuántos árboles tiene que haber en cada lado? ¿Cuántos sobran? ¿Cuántos más serían necesarios para formar un cuadrado de un árbol más de lado?

Sol: 1 más.

25.- En la fiesta de cumpleaños de mi hermano pequeño había 128 caramelos para repartir. Después del reparto cada niño tenía tantos caramelos como niños había. Si sobraron 7 caramelos, ¿cuántos niños había?

Sol: 11 niños.

26.- La raíz cuadrada de un número es 37 y si el número fuese 44 unidades mayor su raíz cuadrada sería exacta. **a)** ¿Cuál es el número? **b)** ¿Cuántas unidades como mínimo habría que quitarle al número para que la raíz fuese también exacta?

Sol: a) 1.400; b) 31 unidades.

27.- El presupuesto para alicatar las cuatro paredes de una cocina cuadrada es de 900 €. Si las paredes son cuadradas y nos cobran a 25 € el metro cuadrado, ¿cuánto mide el lado de cada pared?

Sol: 3 m.

28.- Con cubitos se forman cubos mayores de lado 2, 3, 4 y 5. ¿Cuántos cubitos son necesarios en cada caso? Exprésalo en forma de potencias.

Sol: 2^3, 3^3, 4^3 y 5^3.

29.- Una mesa rectangular tiene el largo igual al doble del ancho. Si la superficie es de 512 cm^2, ¿cuál es el perímetro?

Sol: 96 cm.

30.- Escribe el cubo del producto de cien por mil como una única potencia.

Sol: 10^5

31.- Una finca tiene forma cuadrada y mide 25 m de lado. Si el metro cuadrado se paga a 300 €, ¿cuánto vale la finca?

Sol: 187.500 €

32.- Calcula si existen estas raíces:

a) $\sqrt[3]{1}$ **b)** $\sqrt[3]{-1}$ **c)** $\sqrt[3]{64}$

d) $\sqrt[4]{625}$ **e)** $\sqrt[4]{-625}$ **f)** $\sqrt[4]{10.000}$

Sol: **a)** 1; **b)**-1; **c)** 4; **d)** 5; **e)** No; **f)** 10

33.- Calcula las siguientes raíces exactas:

a) $\sqrt{0{,}04}$ **b)** $\sqrt{0{,}49}$ **c)** $\sqrt{0{,}81}$

d) $\sqrt{0{,}0001}$ **e)** $\sqrt{0{,}0121}$ **f)** $\sqrt{0{,}1225}$

Sol: **a)** 0,2; **b)** 0,7; **c)** 0,9; **d)** 0,01; **e)** 0,11; **f)** 0,35

34.- Calcula utilizando las propiedades de las potencias:

$a)\ \dfrac{6^4\cdot8^2}{3^2\cdot2^3\cdot2^4}$ $\quad b)\ \dfrac{15^2\cdot4^2}{12^2\cdot10}$ $\quad c)\ \dfrac{2^5\cdot4^3}{8^2\cdot16}$ $\quad d)\ \dfrac{2^5\cdot3^5\cdot4}{2^5\cdot9^3}$

Sol: **a)** 72; **b)** 5/2; **c)** 2; **d)** 4/3

35.- Simplifica:

$a)\ \dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{a^2}$ $\quad b)\ \left(a:\dfrac{1}{a}\right)^3$ $\quad c)\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^4\cdot\dfrac{b^3}{a^2}$ $\quad d)\ \left(\dfrac{2}{4}\right)^3:\left(2^{-1}\right)^{-2}$

Sol: **a)** a; **b)** a^6; **c)** a^2/b; **d)** 2^{-5}

36.- Calcula utilizando las propiedades de las potencias:

$a)\ \dfrac{625^2\cdot(25)^3\cdot5^4}{5^0\cdot125^2\cdot\left(25^2\right)^3}$ $\quad b)\ \dfrac{16\cdot(32)^5:64}{1024^2}$ $\quad c)\ \dfrac{27\cdot\left(9^2\right)^4\cdot81}{729^4}$

Sol: **a)** 1; **b)** 8; **c)** 1/3

37.- La masa del Sol es, aproximadamente, 330.000 veces la de la Tierra. Si la masa de la Tierra es $6\cdot10^{24}$ kg., calcula la masa del Sol.

Sol: $1{,}98\cdot10^{30}$ kg.

38.- El diámetro de un virus es de $5\cdot10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra, si su radio medio es de 6.370 km?

Sol: $8\cdot10^{13}$ virus

39.- Un átomo de oxígeno, O, tiene una masa aproximada de: 0, 000 000 000 000 000 000 000 026 560 gramos, exprésala en kilogramos y en toneladas con la ayuda de la notación científica.

Sol: a) $2{,}656\cdot10^{-26}$ Kg; b) $2{,}656\cdot10^{-29}$ Ton.

40.- La masa de un protón es de aprox. $1{,}6726\cdot10^{-27}$ kg, unas 1.836 veces la masa de un electrón. Con estos datos, ¿puedes calcular la masa aproximada de un electrón?

Sol: $9{,}11\cdot10^{-31}$ Kg.

41.- Calcula y simplifica:

$$a)\ 4+\frac{1}{6}:\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\frac{8}{5}\cdot\sqrt{\frac{25}{16}}=$$

$$b)\ \sqrt{\frac{4}{16}}\cdot\left(\frac{24}{8}-\frac{5}{2}\right)^2:\frac{2}{7}+3\cdot\frac{5}{7}=$$

$$c)\ \frac{2}{5}:\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\right)\cdot\sqrt{\frac{9}{16}}+1:\left(-\frac{3}{4}\right)^2=$$

$$d)\ -3-\sqrt{\frac{4}{25}}\cdot\left[(-3):\left(\frac{1}{5}:\frac{1}{10}\right)\right]^3=$$

$$e)\ \left(4+\frac{1}{3}\right)^3:\sqrt{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-3\right)=$$

$$f)\ \sqrt{\frac{16}{25}}-\frac{7}{2}+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+4-\frac{1}{8}\right]=$$

Sol: **a)** 15/7; **b)** 289/112; **c)** 283/144; **d)** -33/20; **e)** 17333/108; **f)** 137/40

9. Determinar el error en el siguiente razonamiento (indicar cuál/es igualdades son incorrectas):

$$-1 \overset{(a)}{=} (-1)^{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}} \overset{(b)}{=} \left((-1)^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{4}} \overset{(c)}{=} \left(\sqrt[5]{(-1)^4}\right)^{\frac{5}{4}} \overset{(d)}{=} \left(\sqrt[5]{1}\right)^{\frac{5}{4}} \overset{(e)}{=} (1)^{\frac{5}{4}} \overset{(f)}{=} 1.$$

10. Determinar cuál de los dos razonamientos es el correcto y justificar:

$$(-2)^{\frac{10}{2}} = \sqrt{(-2)^{10}} = \sqrt{1024} = 32;$$

$$(-2)^{\frac{10}{2}} = (-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32.$$

2.3.2. Notación científica

La **notación científica**, también conocida como notación en forma exponencial, es una manera “compacta” de escribir números demasiado grandes o demasiado pequeños, los cuales son frecuentes en muchos campos de la ciencia. Por ejemplo, tenemos los siguientes valores aproximados:

- Masa de la Luna: 74000000000000000000 toneladas.
- Distancia de la Tierra al Sol: 150000000 km.
- Masa de un protón: 0.0000000000000000000000000016726 kg.

En dichos números, muy grandes o muy pequeños, hay una gran cantidad de ceros, ya sea a la derecha o a la izquierda. Estos ceros pueden representarse como potencias enteras de 10, por ejemplo:

$$10^5 = 100000, \qquad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0.0001.$$

En forma general, si n es un número natural entonces

$$10^n = \underbrace{10\cdots00}_{\text{Un 1 y } n \text{ ceros}}, \qquad 10^{-n} = 0.\underbrace{00\cdots001}_{n-1 \text{ ceros y un 1}}.$$

Entonces, multiplicar un número por 10^n desplaza el separador de decimales (en este caso el punto) n lugares hacia la derecha, mientras que multiplicar por 10^{-n} lo desplaza n lugares hacia la izquierda:

$$2.5 \times 10^7 = 2\underbrace{5000000}_{\text{7 lugares}}, \qquad 2.5 \times 10^{-4} = 0.\underbrace{0002}_{\text{4 lugares}}5.$$

Lo que hicimos fue precisamente expresar un número muy grande y uno muy chico en notación científica. Formalmente, se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado en la forma

$$\boxed{m \times 10^n,}$$

siendo n un entero y m un número racional tal que $1 \leq m < 10$. El exponente n es llamado **orden de magnitud**.

Ejemplo 39. Utilizando notación científica.

- Masa de la Luna: 7.4×10^{19} toneladas.
- Distancia de la Tierra al Sol: 1.5×10^{8} km.
- Masa de un protón: 1.6726×10^{-27} kg.

Las calculadoras también utilizan notación científica para expresar números muy grandes o muy chicos. La forma de indicarlo depende del modelo de la calculadora, pero las posibles opciones de salida para, por ejemplo, 6.8954×10^{15} son las siguientes:

`6.8954x10^15`, `6.8954 15`, `6.8954E15.`

Recíprocamente, para ingresar en la calculadora un número en notación científica, se utilizan la tecla $\boxed{\times 10^x}$ en las más modernas, o la indicada como $\boxed{\text{EXP}}$ en las más antiguas, muchas veces ubicadas a la izquierda de la tecla $\boxed{\text{Ans}}$.

Ejercicios 2.3.2

1–4. Expresar en notación científica las cantidades dadas.

1. 2650000000000000000 metros.

2. 0.0000000000000000000015 kilogramos.

3. 10204000000000000000000000000 litros.

4. 0.000000000000000000000102 gramos.

5–9. Escribir cada número dado en notación decimal.

5. 3.5674×10^{9}

6. 1.23×10^{-8}

7. 6.4×10^{5}

8. 8.2×10^{-6}

2.3.3. Orden en los números reales

En el conjunto $\mathbb{R}$ tenemos definida una **relación de orden** que denotamos como antes con el símbolo $<$ (menor). En términos no formales decimos que $a < b$ (o $b > a$) si al ubicar ambos puntos en la recta numérica, a queda a la izquierda de b. Como antes, $a \leq b$ significa $a < b$ o $a = b$. Esta relación de orden satisface las propiedades enunciadas a continuación:

- **Tricotomía:** dados dos números reales a y b, entonces se cumple una y solo una de las siguientes opciones:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

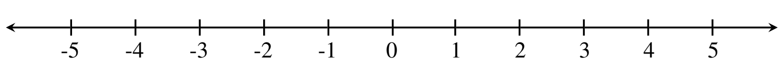
- **Transitiva:** si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Las operaciones estudiadas previamente producen un efecto en el orden entre dos números reales: algunas lo mantienen, otras lo invierten. En cualquiera de estos casos, esto se conoce como **monotonía** de la operación, y enunciamos el efecto de cada una a continuación:

- **Suma (o resta):** si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todo número real c.
- **Producto (o cociente):** si $a < b$, entonces $ac < bc$ cuando $c > 0$, pero $ac > bc$ cuando $c < 0$.
- **Potencia (o radicación):** si $q > 0$ y $0 < x < y$ entonces $x^q < y^q$.
- **Logaritmo:** si $0 < x < y$, entonces $\log_a x < \log_a y$ cuando $a > 1$, pero $\log_a x > \log_a y$ cuando $0 < a < 1$.

La monotonía del producto dice que multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número positivo, no cambia el sentido de la misma. Sin embargo, si multiplicamos por un número negativo, la misma se invierte. Algo similar ocurre con el logaritmo, el cual preserva el orden cuando la base es mayor que uno, pero lo invierte en caso contrario.

El conjunto de todos los números reales puede representarse gráficamente como una recta numérica, como se indica a continuación:



Existe una forma simple de expresar el conjunto de los números *reales* que satisfacen una desigualdad doble o simple, y es mediante **intervalos**. Por ejemplo, si a y b son dos números reales con $a < b$, el conjunto

$$J = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

puede escribirse de manera más simple mediante el **intervalo abierto** (a, b), que representa la parte de la recta comprendida entre a y b, como lo indica el siguiente gráfico:

Si las desigualdades no fueran estrictas, es decir, si se incluyeran los extremos a y b, entonces el conjunto resultante se llama **intervalo cerrado** $[a, b]$:

$$F = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b],$$

cuya representación gráfica es

Si se incluye solamente uno de los dos extremos, el conjunto resultante se llama **intervalo semiabierto** y se denota como $(a, b]$ si incluye a b pero no a a, y como $[a, b)$ en el caso inverso. Ilustramos ambas posibilidades a continuación:

Finalmente, podemos tener conjuntos de la forma

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

en los que solamente hay una desigualdad. El conjunto A se escribe en forma de intervalo como $(-\infty, a)$, y B como (a, ∞)*. Ambos determinan **semirrectas abiertas** en la recta numérica. El símbolo ∞ se lee infinito y *no* representa un número. Similarmente, el conjunto C se escribe como $(-\infty, a]$, D como $[a, \infty)$, y determinan **semirrectas cerradas**. En el siguiente gráfico ilustramos los conjuntos B y C:

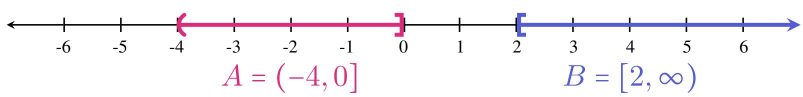
Resumiendo, utilizamos corchete para indicar que el extremo del intervalo está incluido, y en caso contrario usamos paréntesis. Una forma alternativa de representar estas situaciones en la recta real es utilizando un círculo “lleno” en

*Aunque, al igual que con los números reales, el signo + colocado delante es redundante, a veces suele escribirse $(a, +\infty)$ para indicar este conjunto. Similarmente, suele escribirse también $[a, +\infty)$ para indicar el conjunto $[a, \infty)$.

lugar de corchete, o uno "vacío" en lugar de paréntesis, como puede encontrarse en otros textos. Puesto que los símbolos ∞ y $-\infty$ no representan números reales, siempre deben ir acompañados con paréntesis, y nunca con corchete. Así, otra forma de denotar al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es mediante el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 40. **Representación gráfica de intervalos.** En el primer gráfico representaremos los conjuntos

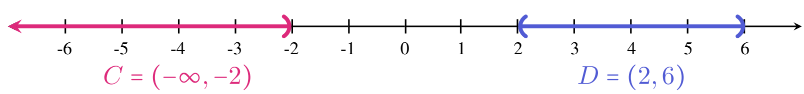
$$A = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x \leq 0\} \qquad \text{y} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}.$$



Por otro lado, los conjuntos

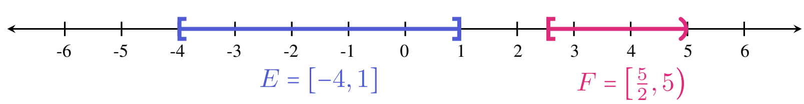
$$C = \{x \in \mathbb{R} : x < -2\} \qquad \text{y} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 6\}$$

se representan gráficamente como:



Finalmente, representaremos gráficamente los conjuntos

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 1\} \qquad \text{y} \qquad F = \left\{x \in \mathbb{R} : \tfrac{5}{2} \leq x < 5\right\}.$$



«

En capítulos posteriores, será fundamental comprender el resultado de la unión y la intersección de intervalos. Para ejercitar esto, se recomienda en particular la resolución del Ejercicio 4 de la lista siguiente.

Ejercicios 2.3.3

1. Completar con el signo menor (<) o mayor (>) según corresponda:

(a) $5 \,\square\, 8$, entonces $5 - 2 \,\square\, 8 - 2$.

(b) $5 \,\square\, 8$, entonces $5 \cdot (-2) \,\square\, 8 \cdot (-2)$.

(c) $2 \,\square\, (-3)$, entonces $2 \cdot 4 \,\square\, (-3) \cdot 4$.

(d) $(-4) \,\square\, (-3)$, entonces $(-4) \cdot (-2) \,\square\, (-3) \cdot (-2)$.

(e) $5 \,\square\, 3$, entonces $5^{\frac{1}{2}} \,\square\, 3^{\frac{1}{2}}$.

(f) $4 \,\square\, 6$, entonces $4^3 \,\square\, 6^3$.

(g) $4 \,\square\, 6$, entonces $\log_3 4 \,\square\, \log_3 6$.

(h) $4 \,\square\, 6$, entonces $\log_{\frac{1}{3}} 4 \,\square\, \log_{\frac{1}{3}} 6$.

2. Escribir en forma de intervalo los siguientes conjuntos y representarlos en la recta numérica:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 3\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 4\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 4\}, \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2\}.$$

3. Utilizar desigualdades para expresar los siguientes intervalos, y representarlos en la recta numérica:

$$(2,5), \quad [2,\infty), \quad [-2,1), \quad (-\infty,0), \quad (-6,-3].$$

4. Hallar y representar gráficamente la unión y la intersección de los siguientes pares de intervalos:

(a) $(-2,3)$ y $[0,5]$.

(b) $[3,8)$ y $[8,11]$.

(c) $(-3,2]$ y $[2,6)$.

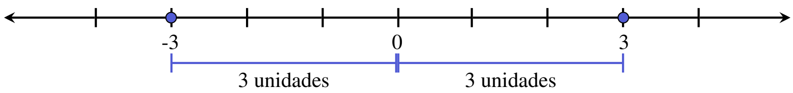
2.3.4. Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real x se indica con $|x|$ y se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0; \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Es decir, si un número x es positivo o cero, su valor absoluto es igual a él, pero si el número x es negativo, entonces su valor absoluto es el opuesto de x, el cual ahora es positivo. Por lo tanto el valor absoluto de un número es siempre positivo o cero, pero **nunca negativo**. Por ejemplo, $|3| = 3$ mientras que $|-5| = 5$.

Haremos ahora una **interpretación geométrica** del valor absoluto. Para ello, observemos que $|3| = |-3| = 3$. Si ubicamos el 3 y el -3 en la recta numérica, observamos que ambos se encuentran a 3 unidades de distancia del cero, el primero hacia la derecha y el segundo hacia la izquierda.



Geométricamente, $|x|$ representa la distancia del número x al cero.

Consideremos ahora dos números reales x e y. Nos preguntamos si la cantidad $|x - y|$ nos da alguna información sobre dichos números. Analicemos para ello los siguientes casos:

- si $x = 5$, $y = 2$, $|x - y| = |5 - 2| = 3$;
- si $x = 2$, $y = 5$, $|x - y| = |2 - 5| = |-3| = 3$;
- si $x = 5$, $y = -2$, $|x - y| = |5 - (-2)| = |5 + 2| = 7$;
- si $x = -5$, $y = -2$, $|x - y| = |-5 - (-2)| = |-5 + 2| = |-3| = 3$;
- si $x = -5$, $y = 2$, $|x - y| = |-5 - 2| = |-7| = 7$.

Si graficamos en la recta numérica los casos anteriores, podemos comprobar lo siguiente:

Geométricamente, $|x - y|$ representa la distancia entre los números x e y.

Observar que $|x + y| = |x - (-y)|$, lo que junto a lo anterior implica que $|x + y|$ representa la distancia entre x y $-y$ (el opuesto de y).

Es aquí donde debemos detenernos para advertir sobre un error muy frecuente al momento de resolver ejercicios que involucran valor absoluto. En el siguiente ejemplo, incluiremos la forma correcta de resolverlos, así como dicho error habitual.

Ejemplo 41. **Comprendiendo la definición de valor absoluto.** Utilizar la definición para expresar $|2x - 5|$.

Solución: Aplicando directamente la misma, tenemos que

$$|2x - 5| = \begin{cases} 2x - 5, & \text{si } 2x - 5 \geq 0; \\ -2x + 5, & \text{si } 2x - 5 < 0. \end{cases}$$

Con esto la consigna ya estaría cumplida*, pero vamos a analizar un poco lo obtenido antes de pasar al modo incorrecto de resolverla. Lo anterior nos dice que si queremos conocer $|2x-5|$ para un valor particular de x, debemos chequear si $2x-5$ es positivo o cero (y en tal caso evaluar en el primer renglón de la llave anterior), o si es negativo (y evaluar en el segundo). Por ejemplo, para $x = 1$ tenemos que $2x - 5 = 2 \cdot 1 - 5 = -3 < 0$, por lo que para conocer el valor de $|2x - 5|$ debemos reemplazar en el segundo renglón de la llave anterior, para obtener $|2x - 5| = -2 \cdot 1 + 5 = 3$. Es claro que esto también se podía obtener para $x = 1$ haciendo directamente el reemplazo

$$|2x - 5| = |2 \cdot 1 - 5| = |-3| = 3,$$

pero saber trabajar en forma general resultará fundamental más adelante.

⚠ La forma **incorrecta** (pero frecuente) de resolverlo es la siguiente:

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5, & \text{si } x \geq 0; \\ -2x+5, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

El "punto de corte" no es siempre $x = 0$ sino donde todo lo que está "dentro" del valor absoluto pasa de positivo a negativo. En este caso, lo que está "dentro" no es x, sino $2x - 5$. Notar que según esta fórmula errónea, para conocer el valor de $|2x - 5|$ en $x = 1$, deberíamos evaluar en el primer renglón de dicha fórmula, ya que en este caso $x = 1$ es positivo. De esta forma, obtendríamos que $|2x - 5| = 2.1 - 5 = -3$, lo cual es claramente incorrecto pues es negativo, y el valor absoluto de todo número es siempre mayor o igual que cero. «

Ejemplo 42. Reescribir $5|7 - 3x| + 2$ utilizando la definición de valor absoluto. Además, hallar el valor de esta expresión para $x = -1$ y $x = 3$.

Solución: Aplicando dicha definición (solamente donde aparece el valor absoluto), tenemos que

$$5|7-3x|+2 = \begin{cases} 5(7-3x)+2, & \text{si } 7-3x \geq 0; \\ 5(-7+3x)+2, & \text{si } 7-3x < 0. \end{cases}$$

Resolviendo en lo anterior obtenemos

$$5|7-3x|+2 = \begin{cases} 37-15x, & \text{si } 7-3x \geq 0; \\ 15x-33, & \text{si } 7-3x < 0. \end{cases}$$

Hallaremos ahora el resultado de la expresión para los valores particulares de x dados, reemplazando directamente en ella. Si $x = -1$, entonces

$$5|7 - 3x| + 2 = 5|7 - 3 \cdot (-1)| + 2 = 5|7 + 3| + 2 = 5 \cdot |10| + 2 = 5 \cdot 10 + 2 = 52,$$

*Aunque las propiedades de monotonía de las operaciones presentadas en la Sección 2.3.3 nos permitan ya escribir $x \geq \frac{5}{2}$ en lugar de $2x - 5 \geq 0$, se opta aquí por posponer la resolución de inecuaciones, incluso de las más simples, hasta la Sección 4.5.

y cuando $x = 3$ tenemos

$$5|7-3x|+2 = 5|7-3\cdot 3|+2 = 5|7-9|+2 = 5\cdot|-2|+2 = 5\cdot 2+2 = 12.$$ «

A continuación enumeramos algunas de las **propiedades** del valor absoluto.

Propiedades del valor absoluto. Si x e y son números reales cualesquiera, entonces vale lo siguiente:

(a) $|x| \geq 0$;
(b) $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$;
(c) $|-x| = |x|$;
(d) $|xy| = |x||y|$;
(e) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (desigualdad triangular);
(f) Si $a \geq 0$ se tiene que $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$ (análogamente con $<$);
(g) Si $a \geq 0$ se tiene que $|x| \geq a$ si y solo si $x \geq a$ o $x \leq -a$ (análogamente con $>$).

¿Qué nos dicen todos los símbolos anteriores? Poder interpretar el lenguaje matemático es fundamental para comprender los conceptos y resultados. La propiedad (**a**) establece que el valor absoluto es siempre positivo o cero, pero nunca negativo, mientras que (**b**) afirma que el único número que dista cero unidades del cero, es el mismo cero.

En (**c**) se establece que cada número dista del cero lo mismo que su opuesto, lo cual es lógico ya que éstos se encuentran hacia lados opuestos en la recta numérica, pero a la misma distancia de él.

La propiedad (**d**) dice que el valor absoluto se distribuye con respecto al producto (y en consecuencia con respecto al cociente). Sin embargo, esto nunca debe hacerse cuando tenemos una suma o resta de dos números, es decir, es fácil encontrar valores para x e y tales que

$$|x-y| \neq |x|-|y|,$$

$$|x+y| \neq |x|+|y|.$$

Para los casos anteriores, lo que vale es la desigualdad triangular (**e**), que junto con (**c**) implican que

$$|x-y| \leq |x|+|y|,$$

pues $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$.

Finalmente, las propiedades (**f**) y (**g**) nos indican, respectivamente, cuáles son los números que se encuentran "cerca" del cero (en el sentido que están a una distancia menor o igual que a), y cuáles se encuentran “lejos” de él (por encontrarse a una distancia mayor que a). Gráficamente, si a es un número positivo, entonces $|x| \leq a$ indica todos aquellos valores que se encuentren a una distancia menor o igual que a del cero, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda. Esto se representa como el intervalo $[-a, a]$, ilustrado en la Figura 2.1. Análogamente, $|x| < a$ si y solo si $-a < x < a$, lo cual termina de ilustrar la propiedad (**f**).

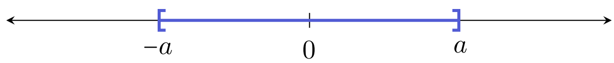


Figura 2.1: $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$.

En cambio, $|x| \geq a$ indica todos aquellos valores que se encuentren a una distancia del cero mayor o igual que a, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda. Esto se representa como la unión de los dos intervalos $(-\infty, a]$ y $[a, \infty)$ que se ilustran en la Figura 2.2. De la misma forma, si la desigualdad es estricta tenemos que $|x| > a$ si y solo si $x > a$ o $x < -a$, lo cual termina de ilustrar la propiedad (**g**).

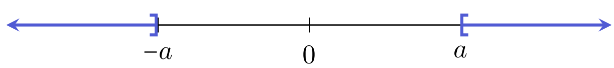


Figura 2.2: $|x| \geq a$ si y solo si $x \geq a$ o $x \leq -a$.

Notar que si en (**f**) tomamos a negativo y buscamos los valores de x tales que $|x| \leq a$, la respuesta sería el conjunto vacío, ya que el valor absoluto nunca puede ser negativo. De la misma forma, si a es negativo en (**g**), entonces la solución a $|x| \geq a$ son todos los números reales, ya que el valor absoluto es siempre positivo o cero.

En el Capítulo 4 retomaremos el concepto de valor absoluto resolviendo ecuaciones e inecuaciones que lo involucren. Allí, comprender su definición y propiedades será una herramienta imprescindible.

Ejemplo 43. **Aplicando las propiedades del valor absoluto.** Reescribir las siguientes desigualdades utilizando las propiedades (**f**) y (**g**) para eliminar el valor absoluto según corresponda:

(i) $|x| < 3$

(ii) $|2 - b| \geq 4$

(iii) $|5y| > 10$

Solución: Utilizamos la propiedad (**f**) para reescribir (i) como $-3 < x < 3$. Para las dos restantes usaremos la propiedad (**g**): la desigualdad en (ii) es equivalente a

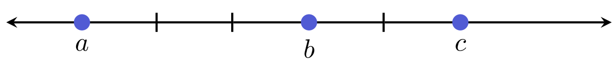
$$2 - b \geq 4 \quad \text{o} \quad 2 - b \leq -4,$$

mientras que lo dado en (iii) equivale a

$$5y > 10 \quad \text{o} \quad 5y < -10.$$

Ejemplo 44. Sean a, b y c números reales tales que $|a - b| = 3$ y $|b - c| = 2$. Si además satisfacen que $a < b < c$, encontrar la distancia entre a y c.

Solución: Para resolverlo, resultará útil ubicarlos en la recta numérica. Podemos comenzar ubicando a en cualquier parte, y combinar las hipótesis $a < b$ con $|a - b| = 3$ para concluir que b debe estar a 3 unidades hacia la derecha de a. De la misma forma, de $b < c$ y $|b - c| = 2$ se deduce que c debe estar a 2 unidades hacia la derecha de b, obteniendo así el siguiente gráfico:



Entonces, podemos concluir que la distancia entre a y c es 5. En este caso se cumple que $|a - c| = |a - b| + |b - c| = 3 + 2$, pero esto sucedió gracias a la hipótesis adicional $a < b < c$. Sin esto, lo único que podemos saber gracias a la desigualdad triangular (**e**) es que

$$|a - c| = |a - b + b - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|.$$

Es decir, podríamos asegurar que $|a - c| \leq 5$, pero no podríamos dar su valor exacto (por ejemplo, si el orden fuera $a < c < b$, entonces haciendo un gráfico similar al anterior se obtiene que $|a - c| = 1$).

Como se mencionó anteriormente, la comprensión del valor absoluto será fundamental al momento de resolver ecuaciones. Por eso, la observación siguiente evitará cometer un error frecuente:

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3,$$

pero también

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Lo mismo ocurre con cualquier otro exponente par:

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

El error frecuente consiste en “cancelar” el índice con el exponente para obtener

$$\sqrt[\cancel{4}]{(-2)^{\cancel{4}}} = -2. \quad ✗$$

Si el exponente es impar entonces no tenemos este problema de signos:

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{(-27)} = -3.$$

De lo anterior concluimos que si $x \in \mathbb{R}$ y n es un número natural, entonces:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & \text{si } n \text{ es par;} \\ x, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Ejercicios 2.3.4

1. Hallar:

(a) $3|-5|$

(b) $|-1-6|$

(c) $-|-9|+1$

(d) $|2+3(-2)|$

(e) $-|(-2)^2|$

(f) $(-|(-2)|)^2$

2. Utilizar la definición de valor absoluto para reescribir las siguientes expresiones:

(a) $|x-2|$

(b) $2|3-x|+5$

(c) $|2y-3|-1$

(d) $-4|x+1|$

(e) $|-x-1|+2$

3. Representar gráficamente los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 3\}, \quad C = \{x \in \mathbb{N} : |x| < 3\}.$$

4. Representar gráficamente los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 4\}, \quad C = \{x \in \mathbb{Z} : |x| > 1\}.$$

5. Reescribir los siguientes conjuntos como intervalos o como unión de dos intervalos, según corresponda:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \tfrac{1}{2}\right\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}.$$

6. Utilizar las propiedades del valor absoluto para reescribir las siguientes desigualdades:

(a) $|x - 2| < 4$

(b) $|3x + 1| \geq 2$

(c) $|3y| \leq 6$

(d) $|-y + 1| > 2$

(e) $|t + 5| \leq 2$

7. ¿Qué valores de x en $\mathbb{R}$ satisfacen $|x| < -3$? ¿Cuáles cumplen $|x| > -3$?

8. Demostrar que $|x - y| \neq |x| - |y|$ y que $|x + y| \neq |x| + |y|$.

9. Utilizando las propiedades del valor absoluto para $x \in \mathbb{R}$, seleccionar la opción correcta en cada caso:

(a)	$|-x + 1| = |x - 1|$ ☐	$|-x + 1| = |-x - 1|$ ☐	$|-x + 1| = |x + 1|$ ☐
(b)	$|x + 3| = |x| + 3$ ☐	$|x + 3| \leq |x| + 3$ ☐	$|x + 3| \leq x + 3$ ☐
(c)	$|2x - 3| \leq |2x| - 3$ ☐	$|2x - 3| \leq 2x + 3$ ☐	$|2x - 3| \leq |2x| + 3$ ☐
(d)	$|3x - 6| = 3|x - 6|$ ☐	$|3x - 6| = 3|x - 2|$ ☐	$|3x - 6| = -3|-x + 2|$ ☐

10. Marcar en cada caso la opción correcta:

(a) La distancia entre 2 y -4 es

$|2 - 4|$ ☐ $\qquad |2 + 4|$ ☐ $\qquad |2| - |-4|$ ☐

(b) La distancia entre -3 y -6 es

$|-3| + |-6|$ ☐ $\qquad |-3 - 6|$ ☐ $\qquad |-3 + 6|$ ☐

11. Jenaro, Zoe y Mateo viven a lo largo de una calle recta. Si sabemos que Jenaro vive a 5 cuadras de Zoe y a 2 cuadras de Mateo, ¿cuál es la máxima distancia a la que pueden encontrarse entre sí las casas de Zoe y Mateo? Justificarlo usando las propiedades del valor absoluto, y realizar un gráfico que ilustre la situación.

12. Hallar

$\sqrt[6]{(-3)^6} =$ $\qquad \sqrt[5]{(-3)^5} =$ $\qquad \sqrt[8]{x^8} =$ $\qquad \sqrt[3]{x^3} =$

13. ⚠ Buscar valores adecuados que prueben que las siguientes afirmaciones son **incorrectas**:

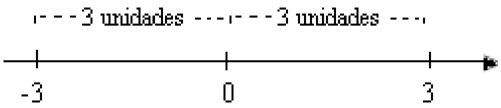
(a) Si $x < y$, entonces $|x| < |y|$. ✗

(b) Si $|x| < |y|$, entonces $x < y$. ✗

(c) Si $|x| < |y|$, entonces $|x + z| < |y + z|$. ✗

VALOR ABSOLUTO

Cualquier número *a* tiene su representación en la recta real. El valor absoluto de un número representa la distancia del punto *a* al origen. Observe en el dibujo que la distancia del 3 al origen es 3 unidades, igualmente la distancia del punto -3 al origen es 3. En notación, esto es $|-3| = 3$. Las barras se leen como el valor absoluto de lo que esta dentro de ellas. En el valor absoluto no importa en que lado de la recta real está representado el número. Analíticamente podemos ver que si *a* es positivo, es decir esta a la derecha del cero, entonces $|a| = a$ y si está a la izquierda del origen, es decir si *a* es negativo, entonces $|a| = -a$. Esto lo escribimos en la siguiente definición



Definición.- El valor absoluto de un número real, *x*, se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0 \\ -x, & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1

a.- $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

b.- $\left|-\frac{1}{2}\right| = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Observe como el valor absoluto a una cantidad positiva la deja igual y a una cantidad negativa le cambia el signo.

c.- Si *x*>2 entonces $|x-2| = x-2$, pues *x*-2>0 y así usamos la primera parte de la definición. Visto de otra manera a la expresión que le estamos tomando valor absoluto es de signo positivo y el valor absoluto lo deja igual.

d.- Si *x*<2 entonces $|x-2| = -(x-2)$, pues *x*-2<0 y así usamos la segunda formula de la definición. Visto de otra manera a la expresión que le estamos tomando valor absoluto es de signo negativo y el valor absoluto le cambia de signo.

Notación Científica

La ***notación científica*** nos permite escribir números muy grandes o muy pequeños de forma abreviada. Esta notación consiste simplemente en multiplicar por una potencia de base 10 con exponente positivo o negativo.

$$\underbrace{1}_{\text{un número entero}} , \underbrace{32}_{\text{varios decimales}} \cdot 10^{\overset{\text{exponente}}{16}} = 1{,}32 \cdot 10^{16}$$

1.- Explica en qué consiste la notación científica. ¿Es $13{,}4\cdot10^{9}$ la expresión en notación científica del número 13.400.000.000? Justifica tu respuesta.

Sol: No, es $1{,}34\cdot10^{10}$

2.- Escribe en notación científica:

60250000000	35 cienmilésimas	0,0000000745
345 millones	Siete billones	0,00001234
25100000	5 billones de billón	3 millardos
5 nanómetros	342.6 microgramos	10 gúgols

Sol: $6{,}025\cdot10^{10}$; $3{,}5\cdot10^{-4}$; $7{,}45\cdot10^{-8}$; $3{,}45\cdot10^{8}$; $7\cdot10^{12}$; $1{,}234\cdot10^{-5}$….

3.- La masa de la Tierra es $5{,}98\cdot10^{24}$ kg. ¿Cuál sería la masa equivalente a 3 planetas iguales a la Tierra?

Sol: $1{,}8\cdot10^{25}$ kg.

4.- El diámetro de un virus es de $5\cdot10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra, si su radio medio es de 6.370 km?

Sol: $8\cdot10^{13}$ virus

5.- La velocidad de la luz es $3\cdot10^{8}$ m/s. **a)** ¿Qué distancia recorre la luz en un año?; **b)** ¿Cuánto tarda la luz solar en llegar a Plutón, si están separados $5{,}91\cdot10^{5}$ km?

Sol: a) $9{,}45\cdot10^{12}$ km; b) 19,7 seg

6.- La distancia entre el centro de la Tierra y el de la Luna es de $3{,}84\cdot10^{8}$ metros. Si el radio de la Tierra es $6{,}37\cdot10^{6}$ metros y el de la Luna es $1{,}74\cdot10^{6}$ metros, calcula la distancia entre las superficies de la Tierra y la Luna.

Sol: f= $4{,}63\cdot10^{6}$ m.

7.- Teniendo en cuenta que el volumen de la Luna es $2{,}19\cdot10^{10}$ km^3, y su masa es $7\cdot10^{22}$ kg: **a)** Calcula la densidad media de la Luna, expresándola en kg/m^3.
b) Compara su densidad con la de la parte sólida de la Tierra (5,517 g/cm^3).

Sol: a) 3.196,3 kg/m^3; b) 1,73

8.- La masa de una molécula de hidrógeno es $3{,}3\cdot10^{-24}$ g. ¿Cuántas moléculas hay en un gramo de hidrógeno?

Sol: $3\cdot10^{23}$ moléculas

9.- ¿Qué edad tendría una persona que haya vivido mil doscientos cuarenta mil millones de segundos?

Sol: 35.428 años

10.- El volumen de la Pirámide de Keops es 2.500.000 m^3 y el del Lago Ness de 7.500.000.000 m^3. **a)** ¿Cuántos m^3 es mayor el Lago Ness que la Pirámide de Keops? **b)** ¿Cuántas veces es mayor el Lago que la pirámide?

Sol: a) $7{,}4975\cdot10^{9}$ m^3; b) $3\cdot10^{3}$ veces

11.- La masa de un protón es de aprox. $1{,}6726\cdot10^{-27}$ kg unas 1.836 veces la masa de un electrón. Con estos datos puedes calcular la masa aproximada de un electrón.

Sol: $9{,}11\cdot10^{31}$ Kg.

12.- Si una persona tiene 5 litros de sangre y aproximadamente 4.500.000 glóbulos rojos en cada milímetro cúbico de ésta, calcula en notación científica su número aproximado de glóbulos rojos.

Sol: $2{,}25\cdot10^{13}$ glóbulos rojos.

13.- Una biblioteca tiene 2.753.255 libros. Si cada libro tiene de media 287 páginas y una persona puede leer 1 página cada 3 minutos, ¿Cuántos segundos tardaría en leer todos los libros a un ritmo de 9 horas diarias?

Sol: $4{,}39\cdot10^{6}$ seg

14.- La distancia media de la Tierra al Sol es $1{,}50\cdot10^{8}$ km. La distancia Mercurio-Sol es 0,39 veces la de la Tierra al Sol. Expresa en centímetros esta distancia.

Sol: $5{,}85\cdot10^{12}$ cm.

15.- En astrofísica se utiliza mucho el año-luz como medida de grandes distancias. Sabiendo que un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año, expresa utilizando la notación científica el número de metros y de kilómetros que equivalen a un año-luz.

Sol: $9{,}46 \times 10^{15}$ m; $9{,}46 \times 10^{12}$ Km;

16.- Supón que en el ordenador puedes teclear 110 cifras por minuto. ¿Cuántas podrías teclear en 100 días si te dedicas a ello durante 8 horas diarias?

Sol: $5{,}28\cdot10^{6}$ cifras

17.- El diámetro aproximado de los glóbulos blancos de la sangre es $1{,}2\cdot10^{-7}$m. Si Alexander tiene 5,5 litros de sangre en su cuerpo y el número de glóbulos blancos por mm^3 es de 7.500, averigua el número aproximado de glóbulos blancos que tiene Alexander.

Sol: $4{,}125\cdot10^{10}$ glóbulos blancos.

18.- El virus de ébola es una célula cuyo tamaño son 14 micras, si una micra es la milésima parte de un milímetro, ¿cuántos metros mide un virus? Si otro virus mide 12 micras, ¿cuántos de estos virus alineados hay en el borde de tu pupitre?

Sol: a) $2{,}805\cdot10^{13}$ glóbulos rojos; b) 39,27 %

Un átomo de oxígeno, O, tiene una masa aproximada de:

0, 000 000 000 000 000 000 000 026 560 gramos

Expresa dicha masa en notación científica.

Si desplazamos la coma desde donde está ahora

0,0000000000000000000000026560

Hasta ponerla entre el 2 y el 6

0000000000000000000000002,6560

Hemos desplazado la coma 23 lugares hacia la derecha, por lo que el exponente será -23 y entonces en notación científica la masa será:

0,0000000000000000000000026560 = $2{,}656\cdot10^{-23}$

19.- Un año luz son $9{,}46\cdot10^{15}$ m, la distancia Tierra-Sol es de 150.000 millones de metros, la velocidad de la luz es $C=3\cdot10^{8}$ m/s ¿cuantas veces podría hacer el trayecto Tierra-Sol un fotón de luz en un año?

Sol: 63.066 veces aproximadamente.

20.- Un microscopio permite agrandar un objeto $2{,}5\cdot10^{4}$ veces. ¿A qué tamaño se verá una partícula de polvo que mide $5\cdot10^{-5}$ metros?

Sol: 1,25 metros

21.- La masa de un protón es aproximadamente $1{,}6726\cdot10^{-24}$ gramos. ¿Cuantos protones serían necesarios para formar una masa de 48 toneladas?

Sol: $2{,}87\cdot10^{31}$ protones.

22.- Los veterinarios estiman que el 5% de la población mundial tiene un perro. Según esta estimación, ¿cuántos perros hay en el mundo si hay $6{,}8\cdot10^{9}$ habitantes?

Sol: $3{,}4\cdot10^{8}$ perros.

23.- En un depósito de 6 m^3 se pueden colocar $2{,}4\cdot10^{29}$ bolitas de acero. **a)** ¿Cuántas se podrán colocar en un dm^3?; **b)** Calcula el volumen medio de cada bolita.

Sol: a) $4\cdot10^{25}$ bolitas; b) $2{,}5\cdot10^{-26}$ cm^3

24.- La masa de la tierra es de $5{,}98\cdot10^{24}$ Kg y la masa de Júpiter es 317,94 veces mayor, ¿de cuántos kg hablamos?

Sol: $1{,}901\cdot10^{27}$ Kg.

25.- Una de las estrellas más cercanas a la Tierra es α_1-Centauro cuya distancia aproximada es de 4 años luz. ¿Puedes calcular la distancia en kilómetros, sabiendo que la velocidad de la luz es de $3\cdot10^{8}$ m/s?

Sol: $4{,}07\cdot10^{13}$ Km

26.- Un disco duro multimedia tiene 1,5 Tb de capacidad, y un *DVD-ROM*, 4,7 Gb. ¿Cuántos *DVD-ROM* necesito para hacer una copia de seguridad de mi disco duro?, ¿Y cuántos *CD-ROM* si su capacidad es de 750 Mb? Datos: 1 Tb = 2^{10} Gb; 1Gb = 2^{10} Mb.

Sol: 327 DVD's y 2098 CD's

27.- Si 18 g de agua contienen $6{,}023\cdot10^{23}$ moléculas. ¿Cuál es la masa en gramos de una molécula de H_2O?

Sol: $2{,}989\cdot10^{-23}$ gr.

Tema 3: Expresiones algebraicas

Expresar el lenguaje coloquial en simbólico en diferentes contextos, y viceversa. Operar expresiones con letras y números, aprender los producto notable. Identificar que son los polinomios y factorizar.

Exponente

Signo

$$-5x^{3}$$

Coeficiente

Variable o Literal

Capítulo 3

Polinomios y expresiones racionales

3.1. Polinomios

Los polinomios son objetos muy frecuentes en todas las ciencias que utilizan a la matemática como herramienta. Las ecuaciones y funciones que involucran polinomios tienen aplicaciones en una gran variedad de problemas, desde la matemática elemental hasta la física, química, economía, arquitectura y áreas relacionadas con la biología y la salud.

Trabajaremos aquí con polinomios de una sola **variable**, es decir, un valor que puede ir cambiando (a diferencia de las **constantes**, que denotan un valor fijo). Simbolizaremos aquí con x a la variable, pero, por supuesto, puede elegirse cualquier otro nombre. Esta variable puede tener exponente pero este deberá ser un número natural o cero, y podrá también estar multiplicada por cualquier constante real (número fijo llamado **coeficiente**). Un polinomio de una variable es una suma finita de este tipo de expresiones. Más precisamente, un **polinomio** en x con coeficientes reales es cualquier expresión de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

siendo los números reales a_0, a_1,... a_n los coeficientes del polinomio.

El subíndice en estos coeficientes es una notación que nos indica a qué potencia de x acompaña cada uno: a_3 multiplica a x^3, a_0 a x^0, a_7 a x^7, y así sucesivamente. Por eso, a_k se denomina **coeficiente de grado k**. El coeficiente de grado 0, a_0, también recibe el nombre de **término independiente** o **constante**, ya que $x^0 = 1$ y, por lo tanto, la variable "desaparece" en dicho término.

Cada término a_kx^k que compone al polinomio se llama **monomio**. Por lo tanto un polinomio es simplemente una suma de monomios.

Los siguientes son ejemplos de polinomios:

$$3x^4 - 2x + \tfrac{1}{2}, \qquad \pi x^7 + 5x^2, \qquad 3, \qquad 8x + 1, \qquad x^2 - \sqrt{3}x. \quad ✓$$

En cambio, estas expresiones *no* son polinomios:

$$x^{-2} + 3x, \qquad \frac{1}{x^2 + 3x + 1}, \qquad x^{\frac{1}{2}} - 5, \qquad x^{\pi} - x^2. \quad ✗$$

Notar que cada número real puede ser visto como un polinomio, y es llamado **polinomio constante**. El caso especial del cero recibe el nombre de **polinomio nulo**.

Para ponerle nombre a un polinomio escribimos, por ejemplo,

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \qquad q(x) = x - 3 + x^2, \qquad r(x) = 2x^3 - x^2 + \tfrac{1}{4}x + 5.$$

Es decir, los nombramos con alguna letra e indicamos entre paréntesis cómo hemos llamado a la variable, la cual, como ya mencionamos, no necesariamente debe llamarse x:

$$s(t) = t^2 - 3t + 1,$$

es un polinomio con t como variable.

El **grado** de un polinomio no nulo p, denotado como $\mathrm{gr}(p)$, se define como el exponente más grande al que aparece elevada la variable, siendo su coeficiente no nulo. Por ejemplo, para los polinomios dados arriba tenemos que

$$\mathrm{gr}(p) = 4, \qquad \mathrm{gr}(q) = 2, \qquad \mathrm{gr}(r) = 3, \qquad \mathrm{gr}(s) = 2.$$

En particular, los polinomios constantes pero *no nulos* tienen grado cero, mientras que **el polinomio nulo no posee grado**.

Cuando se define el grado de un polinomio se aclara "siendo su coeficiente no nulo". Esto se debe a que, por ejemplo, podemos escribir

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = 0x^5 + x^4 - x^2 + 1 = 0x^{18} + x^4 - 2x^2 + 1,$$

y de esta manera no podríamos determinar el grado. Pero, como se indica, para ello se tienen en cuenta solamente los términos cuyos coeficientes sean distintos de cero.

Si un polinomio tiene grado n, entonces a_n se denomina **coeficiente principal** del polinomio. Así, por ejemplo, en los polinomios anteriores el coeficiente principal de p es 1, al igual que el de q y s, mientras que el de r es 2.

Cuando un polinomio tiene coeficiente principal igual a 1, es llamado **polinomio mónico**. En los ejemplos anteriores, p, q y s son polinomios mónicos.

Un polinomio **completo** es aquel que tiene escritos todos los términos, desde el independiente hasta el término de mayor grado, incluidos todos los monomios con coeficientes nulos. Un polinomio está **ordenado** si los monomios que lo forman están escritos de mayor a menor grado* (es decir, los exponentes aparecen en forma decreciente).

Siguiendo con los mismos ejemplos anteriores, tenemos

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \rightsquigarrow \text{Ordenado pero no completo.}$$
$$q(x) = x - 3 + x^2 \rightsquigarrow \text{Completo pero no ordenado.}$$
$$r(x) = 2x^3 - x^2 + \tfrac{1}{4}x + 5 \rightsquigarrow \text{Completo y ordenado.}$$

Los términos con coeficientes nulos suelen no escribirse, pero siempre podemos completar un polinomio agregando ceros como coeficientes de los términos de menor orden faltantes:

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 \rightsquigarrow \text{Completo y ordenado.} \quad \checkmark$$

Dos polinomios son **iguales** si tienen el mismo grado y, además, los coeficientes de cada término de igual grado son iguales. Entonces, los polinomios

$$q(x) = x - 3 + x^2 \qquad \text{y} \qquad \tilde{q}(x) = x^2 + x - 3$$

son iguales.

Los polinomios también se clasifican según la cantidad de términos que poseen, teniendo algunos de ellos su propio nombre:

- **Monomio:** un término.
- **Binomio:** dos términos.
- **Trinomio:** tres términos.
- **Cuatrinomio:** cuatro términos.

Siguiendo con los ejemplos dados en la página 56, p, q y s son trinomios mientras que r es un cuatrinomio. El polinomio $x^2 - 1$ es un binomio, mientras que $-2x^3$ es un monomio, al igual que los polinomios constantes.

Dado un número real c, el **valor numérico** (o **especialización**) de un polinomio en c es lo que resulta de sustituir el símbolo de la variable por el número c, y efectuar luego las operaciones indicadas en la expresión del polinomio. Más precisamente, dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y un número real c, el valor númerico de p en c se denota y define por

$$\boxed{p(c) = a_n c^n + \cdots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0.}$$

*Esto es solamente una convención, ya que también se podrían ordenar de menor a mayor grado.

Ejemplo 45. **Valor numérico de un polinomio.** Si $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, entonces el valor numérico de p en 0 es

$$p(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1.$$

De igual forma, obtenemos el valor numérico de p en 3 haciendo

$$p(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^2 + 1 = 81 - 18 + 1 = 64.$$ «

Decimos que un número real c es **raíz** de un polinomio p si $p(c) = 0$, es decir, si el valor numérico de p en c es cero. Una raíz es conocida también como **cero** del polinomio.

Ejemplo 46. **Raíz de un polinomio.** Para el polinomio p del ejemplo anterior, podemos asegurar que 0 y 3 *no* son raíces de él, pues obtuvimos $p(0) = 1 \neq 0$, y $p(3) = 64 \neq 0$. Sin embargo, vemos que

$$p(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0,$$

por lo que 1 *sí* es una raíz de p. «

El concepto de raíz de un polinomio será fundamental para comprender cómo factorizarlo, lo cual es la clave para simplicar expresiones algebraicas o resolver ecuaciones polinómicas, como se verá más adelante.

Ejercicios 3.1

1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios y cuáles no. En caso de serlo, indicar su grado y su coeficiente principal:

(a) $\pi x^5 - x^2 + 1$

(b) $2x^3 - x^{-2} + 5x - 2$

(c) $2 - x^2 + \sqrt{2}x^5 - x^6$

(d) $x - \sqrt{x} + 5$

2. Reescribir los siguientes polinomios en forma completa y ordenada:

(a) $p(x) = 4 - 3x^5 + ex^2$

(b) $q(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + x$

(c) $r(x) = x + 7 - 3x^2$

3. Clasificar los siguientes polinomios según su cantidad de términos:

(a) $x + 1$

(b) $x^5 - 3x + 2$

(c) $\frac{3}{2}x^6$

(d) $x^2 - 3x^5 + x - 1$

(e) $\sqrt{5}$

4. Hallar el valor numérico de los polinomios del ejercicio anterior en -2 y en 1.

5. Determinar si el/los valor/es indicado/s en cada caso corresponden o no a una raíz del polinomio:

(a) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$; $c = 2$, $c = 0$, $c = -4$.

(b) $q(x) = -2x^3 + 10x^2 - 2x + 10$; $c = 0$, $c = -1$, $c = 5$.

(c) $r(x) = x^2 + 1$; c cualquier número real.

3.2. Operaciones entre polinomios

En esta sección nos ocuparemos de definir las operaciones suma, resta, producto y división entre polinomios.

3.2.1. Suma y resta de polinomios

Antes de sumar polinomios, comencemos sumando monomios. Si sumamos dos monomios de igual grado*, el resultado es otro monomio del mismo grado, cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los monomios:

$$ax^n + bx^n = (a + b)x^n.$$

Del mismo modo se procede con la resta de dos monomios de igual grado, pues $ax^n - bx^n = ax^n + (-b)x^n$. Entonces

$$ax^n - bx^n = (a - b)x^n.$$

Ejemplo 47. Sumando y restando monomios.

$$3x^2 + 5x^2 = 8x^2, \qquad 2x^5 - 6x^5 = -4x^5, \qquad x + \sqrt{2}x = (1 + \sqrt{2})x. \qquad \ll$$

Puesto que un polinomio está formado por varios monomios, para sumar (o restar) dos polinomios vamos a sumar (o restar) los monomios de igual grado de cada uno de ellos (completando con cero cuando corresponda). Más precisamente, tenemos la siguiente definición:

*Los monomios de igual grado se llaman también **monomios semejantes**.

La **suma** de polinomios es una operación en la que, partiendo de dos polinomios p y q, obtenemos un tercer polinomio, denotado $p+q$, que tiene como coeficiente de cada monomio a la suma de los coeficientes de los monomios de igual grado de p y q.

Ejemplo 48. Sumando dos polinomios. Considerar $p(x) = 4x^5 - 3x + x^2$ y $q(x) = -2x^3 + x + 4x^2 + 1$. Entonces

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= (4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x + 0) + (0x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x + 1)\\ &= 4x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1.\end{aligned}$$

Luego $(p+q)(x) = 4x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1$.

La **resta** $p - q$ se define como el polinomio $p + (-q)$, siendo $-q$ el **polinomio opuesto** de q, es decir, el polinomio cuyos coeficientes son los opuestos de los coeficientes de q. Esto implica que para restar dos polinomios, se restan los coeficientes de los monomios del mismo grado de p y q.

Ejemplo 49. Restando polinomios. Consideremos, como en el ejemplo anterior, $p(x) = 4x^5 - 3x + x^2$ y $q(x) = -2x^3 + x + 4x^2 + 1$. Entonces

$$\begin{aligned}(p-q)(x) &= (4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x + 0) - (0x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x + 1)\\ &= 4x^5 + 0x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(p-q)(x) = 4x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$.

El paso de ordenar y completar ambos polinomios antes de sumarlos no es obligatorio, sirve simplemente para organizar los monomios y no olvidarnos de ninguno. Este procedimiento también puede hacerse de manera similar pero encolumnando los coeficientes de igual grado:

x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
4	0	0	1	-3	0
0	0	-2	4	1	1
4	0	-2	5	-2	1

$\uparrow$ $p+q$

x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
4	0	0	1	-3	0
0	0	2	-4	-1	-1
4	0	2	-3	-4	-1

$\uparrow$ $p-q$

Por lo tanto, se concluye que $(p+q)(x) = 4x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1$, y que $(p-q)(x) = 4x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, como obtuvimos anteriormente.

Lo que está escrito sobre la línea de puntos suele no ponerse, pero ayuda a recordar en qué forma se ordenaron los exponentes, si creciente o decrecientemente. Si dicho orden está claro, ese renglón puede obviarse.

De cualquiera de las dos formas anteriores pueden también sumarse (o restarse) más de dos polinomios, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 50. **Sumando más de dos polinomios.** Calcular $(p-q+r)(x)$, siendo

$$p(x) = 2x^4-x^2-3x, \qquad q(x) = -3x^2+2x-5x^3+1, \qquad r(x) = 7-x^4+3x^2-x.$$

Solución: Lo haremos mediante el método de encolumnar los respectivos coeficientes, cambiando de signo los de q pues está restando. Esta vez no vamos a escribir las potencias de x, ya que a lo largo de este libro lo haremos siempre en forma decreciente.

2	0	-1	-3	0
0	5	3	-2	-1
-1	0	3	-1	7
1	5	5	-6	6

Por lo tanto $(p-q+r)(x) = x^4+5x^3+5x^2-6x+6$. «

De las propiedades de la suma de números reales se deduce que la suma de polinomios es **conmutativa** ($p+q=q+p$) y **asociativa** ($(p+q)+r=p+(q+r)$), que el polinomio nulo es **neutro** ($p+0=p$), y que la suma de un polinomio con su **opuesto** da como resultado el polinomio nulo ($p+(-p)=0$).

Puesto que la resta de dos polinomios $p-q$ se define como la suma del primero más el opuesto del segundo, tenemos que: el orden importa, por lo tanto **la resta no es conmutativa** (ver Ejercicio 1e).

Ejemplo 51. **Modelando con polinomios.** Una empresa fabrica y vende un producto. La ganancia se determina restando de los ingresos obtenidos el costo de los gastos de producción. Para este producto, dichas cantidades vienen dadas, en pesos, por:

$$I(x) = x^3-3x^2+12x; \qquad C(x) = x^3-6x^2+15x,$$

siendo x la cantidad de unidades del producto. Se pide:

(**a**) Hallar el polinomio que representa la ganancia de la empresa al vender x unidades del producto.
(**b**) La ganancia obtenida al vender 100 unidades del producto.

Solución: La ganancia de la empresa al vender x unidades es

$$G(x) = I(x)-C(x) = x^3-3x^2+12x-(x^3-6x^2+15x) = 3x^2-3x.$$

Luego, la ganancia al vender 100 unidades es de $G(100) = 29700$ pesos. «

Ejercicios 3.2.1

1. Sean $p(x) = 2x^4 - 3x^2 - 5x^3 + x^5$, $q(x) = 2 - 3x + x^3 - 2x^4$, $r(x) = 2 - x^5$ y $s(x) = x^2 + 2x^4$. Realizar las siguientes operaciones y expresar el resultado como un polinomio ordenado:

(a) $p - r - s$

(b) $p + p$

(c) $s - r + q$

(d) $q + p + s$

(e) $p - q$ y $q - p$. Comparar los resultados.

2. Determinar $\text{gr}(p + s)$, $\text{gr}(q + s)$, $\text{gr}(r + s)$, siendo p, q, r y s como en el ejercicio anterior. Concluir si existe o no una regla sobre el grado de la suma de polinomios.

3. ✂ Se recorta un rectángulo de cartulina cuya base es x cm y su altura $2x^2$ cm. Hallar el polinomio que representa el perímetro del rectángulo, y el valor del mismo cuando $x = 2$.

3.2.2. Producto de polinomios

Al igual que con la suma, comencemos viendo cómo se realiza el producto de monomios, el cual se define como:

$$(ax^n)(bx^m) = (a \cdot b)x^{n+m}.$$

Es decir, el resultado es otro monomio cuyo grado es la *suma* de los grados de los dos monomios, y cuyo coeficiente es el *producto* de los coeficientes de los monomios.

Ejemplo 52. Multiplicando monomios.

$$(3x^4) \cdot (-2x^5) = -6x^9, \qquad \left(\frac{1}{2}x^3\right)(2x) = x^4, \qquad (-4)(-x^7) = 4x^7. \quad «$$

De lo anterior y de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma (y a la resta) en los reales, se concluye que para efectuar el **producto** $p \cdot q$ de dos polinomios p y q, se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los monomios que forman el segundo polinomio, y se suman todos los monomios obtenidos (sumar significa respetar los signos obtenidos al hacer el producto). Para simplificar el resultado se suman los monomios de igual grado, si los hubiera.

Ejemplo 53. Multiplicando dos polinomios. Hallar el producto entre los polinomios $p(x) = 2x^2 - 4x$ y $q(x) = 3 + 5x$.

Solución:

$$\begin{aligned}(2x^2 - 4x)(3 + 5x) &= \left(2x^2\right)(3) + \left(2x^2\right)(5x) + (-4x)(3) + (-4x)(5x)\\ &= 6x^2 + 10x^3 - 12x - 20x^2\\ &= 10x^3 - 14x^2 - 12x.\end{aligned}$$

«

De la definición y de las propiedades de la suma y el producto se deducen los siguientes hechos:

- El producto de polinomios satisface las propiedades **conmutativa** (es decir, $p \cdot q = q \cdot p$) y **asociativa** ($p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$).
- El polinomio de grado cero $p(x) = 1$ es **neutro multiplicativo**: $q \cdot p = q$.
- El polinomio nulo es **absorbente multiplicativo**: $q \cdot 0 = 0$.
- Vale la propiedad **distributiva** respecto de la suma y la resta:

$$p \cdot (q \pm r) = p \cdot q \pm p \cdot r.$$

- Los únicos polinomios cuyo inverso multiplicativo es otro polinomio son los polinomios constantes no nulos.
- El **grado del producto** es la suma de los grados de los factores*:

$$\mathrm{gr}(p \cdot q) = \mathrm{gr}(p) + \mathrm{gr}(q).$$

La propiedad asociativa es fundamental ya que cuando tenemos un producto de más de dos polinomios, la forma de realizarlo es asociando de a pares, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 54. Multiplicando más de dos polinomios.

$$\begin{aligned}(x + 3)(2x^3 + 2 - x)(1 - x^2) &= \left((x + 3)(2x^3 + 2 - x)\right)(1 - x^2)\\ &= \Big((x + 3)(2x^3 + 2 - x)\Big)(1 - x^2)\end{aligned}$$

*Se diferencia de la suma y resta, donde no existe una regla para el grado del polinomio resultante, como se vio en el Ejercicio 2 de la sección anterior.

$$
\begin{aligned}
&= \left(2x^4 + 2x - x^2 + 6x^3 + 6 - 3x\right)(1 - x^2)\\
&= \left(2x^4 + 6x^3 - x^2 - x + 6\right)(1 - x^2)\\
&= 2x^4 - 2x^6 + 6x^3 - 6x^5 - x^2 + x^4 - x + x^3 + 6 - 6x^2\\
&= -2x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 7x^2 - x + 6,
\end{aligned}
$$

donde en el penúltimo paso no se dibujaron las "flechas", simplemente se expresó el resultado de multiplicar cada monomio del primer polinomio por cada uno de los del segundo. Finalmente, se sumaron los monomios de igual grado y se ordenaron. «

Si bien cualquier producto de polinomios se puede efectuar como se indicó arriba, hay algunos casos particulares que, si los sabemos manejar, podrán ahorrarnos un poco de tiempo al momento de hacer los cálculos. Sin embargo, si al intentar usar alguno de estos casos particulares no se recuerda la fórmula, siempre se puede recurrir a hacer el producto en la forma tradicional.

Los casos especiales que veremos son tres: cuadrado de un binomio, cubo de un binomio, y un producto de binomios cuyo resultado es una diferencia de cuadrados.

Cuadrado de un binomio.

Como su nombre lo indica, analizaremos el resultado de elevar al cuadrado un binomio, lo que significa multiplicar el binomio por sí mismo. Lo haremos primero para una expresión de la forma $a + b$:

$$\boxed{(a+b)^2} = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2 = \boxed{a^2 + 2ab + b^2.} \tag{3.2.1}$$

En palabras, si elevamos al cuadrado la suma de dos términos, se obtiene la suma entre el cuadrado del primero, el cuadrado del segundo y el doble producto de ellos. Análogamente*,

$$\boxed{(a-b)^2} = (a-b)(a-b) = a^2 - a\cdot b - b\cdot a + b^2 = \boxed{a^2 - 2ab + b^2.} \tag{3.2.2}$$

Notar que el signo menos solamente afecta, en el resultado final, al término que tiene el doble producto de los términos, ya que $(-b)(-b) = b^2$.

Apliquemos las fórmulas (3.2.1) y (3.2.2) para comprenderlas mejor.

Ejemplo 55. Cuadrado de un binomio.

- $(x+5)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25.$
- $(x-3)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9.$
- $(2x^3 - 4x)^2 = \left(2x^3\right)^2 - 2\cdot(2x^3)\cdot(4x) + (4x)^2 = 4x^6 - 16x^4 + 16x^2.$ «

*Este resultado puede obtenerse también a partir de la suma, ya que $a - b = a + (-b)$.

El trinomio que se obtiene al elevar un binomio al cuadrado es llamado **trinomio cuadrado perfecto**. Polinomios de esta forma serán estudiados con más detalle en el Capítulo 4.

Cubo de un binomio.

Ahora consideraremos el resultado de hacer $(a+b)^3$. Aplicando la definición de potencia y (3.2.1), obtenemos

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2).$$

Resolviendo este producto se llega al siguiente resultado:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3ba^2 + 3ab^2 + b^3.} \tag{3.2.3}$$

Similarmente se obtiene:

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3ba^2 + 3ab^2 - b^3.} \tag{3.2.4}$$

Notar que en este caso el signo menos afecta a los términos en los que b posee exponentes impares.

Ejemplo 56. **Cubo de un binomio.** Aplicar las fórmulas (3.2.3) o (3.2.4) para obtener el cubo de los siguientes binomios:

$$(x+2)^3, \qquad (x-3)^3, \qquad (3x^2+x)^3.$$

Solución:

- $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot 2\cdot x^2 + 3\cdot x\cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$
- $(x-3)^3 = x^3 - 3\cdot 3\cdot x^2 + 3\cdot x\cdot 3^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27.$
- $(3x^2+x)^3 = (3x^2)^3 + 3x(3x^2)^2 + 3(3x^2)x^2 + x^3$
  $= 27x^6 + 27x^5 + 9x^4 + x^3.$ «

El polinomio que se obtiene al elevar un binomio al cubo se llama **cuatrinomio cubo perfecto**.

Diferencia de cuadrados.

Consideremos un producto de dos factores con el siguiente aspecto:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2 = a^2 - b^2.$$

Luego,

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.} \tag{3.2.5}$$

Se llama **diferencia de cuadrados** al resultado obtenido, ya que es la diferencia de dos cuadrados. Notar que el cuadrado que aparece restando es el correspondiente al valor que cambia de signo entre los dos factores.

Ejemplo 57. Utilizar la fórmula (3.2.5) para efectuar los siguientes productos:

- $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9.$
- $(2x+5)(2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25.$
- $(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) = \left(x^2\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = x^4 - 2.$
- $(x^3 + 4x)(x^3 - 4x) = \left(x^3\right)^2 - (4x)^2 = x^6 - 16x^2.$ «

Manejar los tres casos anteriores será una herramienta fundamental para realizar el proceso inverso en la Sección 3.3, en donde el objetivo será descomponer un polinomio como producto de otros.

Ejercicios 3.2.2

1. Verificar que vale la propiedad distributiva respecto de la suma

$$p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r,$$

con los polinomios $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = x - 2$, y $r(x) = 2x - 1$.

2. Determinar el grado del producto de $(x^4 - \sqrt{2}x^3 + 3x^9 + 1)$ por $(\pi x^8 - x)$.

3. Determinar el grado del producto de un polinomio de grado 15 por $\frac{1}{2}x$.

4. Realizar los siguientes productos:

(a) $(2x^4)(-3x^2)\left(\frac{1}{6}x\right)$
(b) $(-3x^4 + 2x - 3)(x - 3x^2 + 1)$
(c) $(x^5 - x)(-2 + x^3 + x^2)$
(d) $(x+2)(-x^3 + 4)(-x - 3)$
(e) $\left(-3x + \frac{1}{2}x^3\right)\left(-2x^2 + 4\right)$

5. Realizar los siguientes productos utilizando las fórmulas obtenidas para los casos especiales presentados en esta sección:

(a) $(x+7)^2$
(b) $(2x-3)^2$
(c) $(x^3+1)^2$
(d) $(x-4)^3$
(e) $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^3$
(f) $(z^2 - 1)^3$
(g) $(t+7)(t-7)$
(h) $(4x - c)(4x + c)$
(i) $(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})$
(j) $(x^2 + \pi)(x^2 - \pi)$
(k) $(x+2)(x+3)(x-2)(x+3)$

3.2.3. División de polinomios

Como en las operaciones anteriores, comencemos dividiendo dos monomios, lo cual se define como:

$$(ax^n) : (bx^m) = (a : b)x^{n-m},$$

para b distinto de cero. Para que el resultado sea un monomio, el exponente debe ser natural o cero, lo que se garantiza cuando $n \geq m$. Es decir, si $n \geq m$, el resultado es otro monomio cuyo grado es la *resta* de los grados de los dos monomios, y cuyo coeficiente es el *cociente (división)* de los coeficientes de los monomios.

Ejemplo 58. Dividiendo monomios.

$$\frac{3x^6}{-2x^5} = -\frac{3}{2}x, \qquad (6x^8) : (3x^5) = 2x^3, \qquad \frac{-6x^4}{-4x^4} = \frac{3}{2}.$$ «

Nuevamente la división de monomios será la clave para dividir polinomios. Aunque la división de polinomios suele asustar a los estudiantes, es, en realidad, más sencilla de lo que parece. Para hacerla hay que seguir un algoritmo, es decir, una serie de instrucciones que se repite. Vamos a describir a continuación este algoritmo y luego lo aplicaremos en algunos ejemplos.

Algoritmo de la división.

- **Paso 1.** Escribir ambos polinomios ordenados (de mayor a menor exponente), y el dividendo completo.
- **Paso 2.** Dividir el monomio de mayor grado del dividendo por el de mayor grado del divisor.
- **Paso 3.** Multiplicar el monomio obtenido por *todo* el polinomio divisor, y *restarle* este resultado al dividendo.
- **Paso 4.** Comparar el grado del polinomio obtenido con el del divisor:
  - Si el grado del polinomio obtenido es mayor o igual que el grado del divisor, volver al paso 2 y repetir el proceso tomando como dividendo a este nuevo polinomio.
  - Si el polinomio obtenido tiene grado menor que el grado del divisor o es el polinomio nulo, la división termina.

Ilustramos este proceso y recordamos la terminología en el siguiente ejemplo. Haremos la división

$$(4x^4 - 3x^2 - 4x^3 - 1) : (2x^2 - x + 1),$$

que también se puede escribir como

$$\frac{4x^4 - 3x^2 - 4x^3 - 1}{2x^2 - x + 1}.$$

Este cociente es posible porque el grado del dividendo (numerador) es mayor que el grado del divisor (denominador), así que aplicaremos el algoritmo.

Pasos 1 y 2: Ordenamos y completamos el dividendo, ubicamos los polinomios en la forma usual y dividimos:

$$\begin{array}{rrrrr|lll}
4x^4 & -4x^3 & -3x^2 & +0x & -1 & 2x^2 & -x & +1 \\ \cline{6-8}
 & & & & & \boxed{2x^2} & &
\end{array}$$

Paso 3: Multiplicamos y restamos:

$$\begin{array}{crrrrr|lll}
 & 4x^4 & -4x^3 & -3x^2 & +0x & -1 & 2x^2 & -x & +1 \\ \cline{7-9}
- & \boxed{4x^4} & \boxed{-2x^3} & \boxed{+2x^2} & \boxed{+0x} & \boxed{+0} & 2x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & \diagup & -2x^3 & -5x^2 & +0x & -1 & & &
\end{array}$$

Paso 4: El grado del polinomio obtenido es 3, que es mayor que el grado del divisor, por lo que volvemos al paso 2, para enfocarnos en la división entre los polinomios $-2x^3 - 5x^2 - 1$ y $2x^2 - x + 1$. Para ello, hacemos la división de monomios $(-2x^3) : 2x^2 = -x$, colocamos este resultado y repetimos. Luego de varias repeticiones obtenemos:

$$\begin{array}{rrrrrr|lllr}
\text{dividendo} \rightarrow & 4x^4 & -4x^3 & -3x^2 & +0x & -1 & 2x^2 & -x & +1 & \leftarrow \text{divisor} \\ \cline{7-9}
 & 4x^4 & -2x^3 & +2x^2 & +0x & +0 & 2x^2 & -x & -3 & \leftarrow \text{cociente} \\ \cline{2-6}
 & \diagup & -2x^3 & -5x^2 & +0x & -1 & & & & \\
 & & -2x^3 & +x^2 & -x & +0 & & & & \\ \cline{3-6}
 & & \diagup & -6x^2 & +x & -1 & & & & \\
 & & & -6x^2 & +3x & -3 & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & \diagup & -2x & +2 & \leftarrow \text{residuo o resto} & & &
\end{array}$$

? ¿Cómo podemos verificar si lo obtenido es correcto? La verificación es la misma que cuando hacemos división de números:

$$\begin{array}{r|l}
11 & 2 \\ \cline{2-2}
10 & 5 \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
\qquad \text{Verificación: } 5 \cdot 2 + 1 = 11. \; ✓$$

Es decir, para que esté correcta debe ocurrir que

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \cdot \text{divisor} + \text{resto}. \qquad (\dagger)$$

Realicemos entonces la verificación para comprobar que resolvimos correctamente la división. En nuestro ejemplo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\text{cociente} \cdot \text{divisor} + \text{resto} &= (2x^2 - x - 3)(2x^2 - x + 1) + (-2x + 2) \\
&= (4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3) + (-2x + 2) \\
&= 4x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 1 \\
&= \text{dividendo}. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

? ¿Cómo se expresa correctamente el resultado de una división? Por ejemplo, volviendo al ejemplo numérico, no es correcto escribir $11 : 2 = 5$, pues la igualdad no es cierta. Lo correcto es

$$11 : 2 = 5 + \tfrac{1}{2}.$$

¿De dónde se obtiene esta igualdad? Dividiendo ambos miembros de la ecuación dada en ($\dagger$) por el divisor, obtenemos

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}.$$

Si el resto es cero, el último término desaparece (en la sección siguiente retomaremos este caso). Esta fórmula nos permite expresar el resultado completo de una división. Para el caso de nuestro ejemplo nos queda:

$$\frac{4x^4 - 3x^2 - 4x^3 - 1}{2x^2 - x + 1} = 2x^2 - x - 3 + \frac{-2x + 2}{2x^2 - x + 1}. \quad \checkmark$$

la cual es la forma correcta de expresar el resultado de la división luego de hacer el algoritmo. Otra forma de dar el resultado, es simplemente indicando cuál es el cociente, y cuál es el resto.

Ejemplo 59. **Dividiendo polinomios.** Hallar el cociente

$$\frac{-x^5 + 12x^4 - 18x^3 + 12}{2 - 4x^2 + 2x^3}.$$

Solución: Luego de observar que la división es posible pues el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, aplicamos el algoritmo de la división.

$$
\begin{array}{cccccc|ccc}
-x^5 & +12x^4 & -18x^3 & +0x^2 & +0x & +12 & 2x^3 & -4x^2 & +2 \\
\cline{7-9}
-x^5 & +2x^4 & +0x^3 & -x^2 & +0x & +0 & -\frac{1}{2}x^2 & +5x & +1 \\
\cline{1-6}
\diagup & 10x^4 & -18x^3 & +x^2 & +0x & 12 & & & \\
 & 10x^4 & -20x^3 & +0x^2 & +10x & +0 & & & \\
\cline{2-6}
 & \diagup & 2x^3 & +x^2 & -10x & +12 & & & \\
 & & 2x^3 & -4x^2 & +0x & +2 & & & \\
\cline{3-6}
 & & \diagup & 5x^2 & -10x & +10 & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto

$$\frac{-x^5 + 12x^4 - 18x^3 + 12}{2 - 4x^2 + 2x^3} = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 1 + \frac{5x^2 - 10x + 10}{2 - 4x^2 + 2x^3}.$$

En otra palabras, el cociente es $-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 1$ y el resto es $5x^2 - 10x + 10$. En el Ejercicio 3 se pide la verificación de este resultado.

De la definición de división de monomios y del algoritmo de la división tenemos que el **grado del cociente** es igual al grado de dividendo menos el grado del divisor: $\mathrm{gr}(p : q) = \mathrm{gr}(p) - \mathrm{gr}(q)$.

La regla de Ruffini.

Existe una forma práctica para hacer el cociente cuando el divisor es un binomio de la forma $x - r$ con r un número real (positivo o negativo). Notar que tanto el exponente como el coeficiente de x deben ser iguales a 1.

Describimos el algoritmo para dividir $p(x) : (x - r)$ según esta regla y lo ilustramos a continuación.

- **Paso 1.** Se trazan dos líneas perpendiculares (formando una letra L) y se escriben en el primer renglón los coeficientes a_n, $a_{n-1}, \dots, a_1$, a_0 de p, ordenados y completos (ver el ejemplo para comprender esto).
- **Paso 2.** Se escribe el número r en el segundo renglón, del lado izquierdo de la línea vertical, y el coeficiente principal a_n de p se "baja" al renglón inferior, debajo de la línea horizontal.
- **Paso 3.** Se multiplica a_n por r y se escribe debajo de a_{n-1}.
- **Paso 4.** Se suman estos dos valores (a_{n-1} y ra_n), y se coloca el resultado en la misma columna, en el renglón inferior.
- **Paso 5.** Se repite el proceso con este número: se multiplica por r, se coloca debajo de a_{n-2} y se suma. Se sigue así hasta a_0.

Puesto que el grado del resto de un cociente debe ser menor que el grado del divisor, que en este caso es 1, se concluye que el resto de dividir un polinomio cualquiera por $x - r$ es un número real (es decir, un polinomio de grado cero o el polinomio nulo). **El resto es el número que se obtiene al final del renglón inferior, mientras que los demás números son los coeficientes del cociente** (el cociente tendrá un grado menos que p, pues el divisor tiene grado 1).

Ilustremos los pasos de la regla de Ruffini realizando la división

$$\frac{3x^4 - 2x^2 + x - 3}{x + 1}.$$

Pasos 1 y 2: Notar que $x + 1 = x - (-1)$, por lo que $r = -1$ (es decir, como la fórmula viene dada con un signo menos delante de r, el número r tiene el signo opuesto al que vemos en el divisor).

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -2 & 1 & -3\\ -1 & & & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

Paso 3: Multiplicamos $3 \cdot (-1)$ y encolumnamos:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -2 & 1 & -3\\ -1 & & -3 & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

Paso 4: Sumamos la columna:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -2 & 1 & -3\\ -1 & & -3 & & & \\ \hline & 3 & -3 & & & \end{array}$$

Paso 5: Repetimos hasta el final:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -2 & 1 & -3\\ -1 & & -3 & 3 & -1 & 0\\ \hline & \multicolumn{4}{l}{\underbrace{3 \quad\; -3 \quad\; 1 \quad\; 0}_{\text{coeficientes del cociente}}} & \underbrace{-3}_{\text{resto}} \end{array}$$

Entonces, el cociente es $3x^3 - 3x^2 + x$ y el resto es -3. Como siempre, para verificarlo podemos ver que recuperamos el polinomio dividendo haciendo "cociente por divisor más resto":

$$(3x^3 - 3x^2 + x)(x+1) - 3 = 3x^4 - 2x^2 + x - 3. \quad ✓$$

Ejemplo 60. Aplicando Ruffini. Aplicar la regla de Ruffini para efectuar las siguientes divisiones:

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, \qquad \frac{x^5 - 3x^3 - x + 1}{x + 1}.$$

Solución: Apliquemos la regla en cada caso

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}$$

Entonces, para la primera división el cociente es x^2+2x+1 y el resto es 0. Luego

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x + 1)(x - 1),$$

mientras que para la segunda, el cociente es $x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ y el resto es 4. Por lo tanto

$$\frac{x^5 - 3x^3 - x + 1}{x + 1} = \left(x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 3\right) + \frac{4}{x + 1}.$$

Como antes, para verificarlo podemos ver que recuperamos el polinomio dividendo haciendo "cociente por divisor más resto". «

Ejercicios 3.2.3

1. Dividir los siguientes monomios:

(**a**) $(6x^7) : (2x^3)$ (**b**) $(2x^5) : (-3x^4)$ (**c**) $(\sqrt{2}x^8) : (x^8)$

2. Determinar el grado del cociente entre $\pi x^8 - \frac{4}{6}x^4 - 3x^3$ y $-x^3 + 4x + 2$.

3. Verificar que el resultado obtenido en el Ejemplo 59 es correcto.

4. Realizar las siguientes divisiones de polinomios y verificar el resultado:

(**a**) $(6x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x + 2)$

(**b**) $(x^3 + 6x^2 + 6x + 5) : (x^2 + x + 1)$

(c) $(8x^5 + 1) : (2x^3 - 1)$

(d) $(6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1) : (2x^2 + x - 3)$

5. Realizar las siguientes divisiones usando la regla de Ruffini y verificar:

(a) $(6x^4 + 8x^3 - 10x^2 + 8x - 2) : (x - 2)$

(b) $(x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5) : (x - 5)$

(c) $(-3x^5 + x^4 - 5x^2 + x^3 - 2) : (x + 1)$

(d) $(3 - 3x^3 + 6x^4) : (x + 2)$

6. Realizar cada una de las siguientes divisiones primero mediante el algoritmo de la división y luego usando la regla de Ruffini.

(a) $(2x^4 - 3x^2 + 2x - 3) : (x + 3)$

(b) $(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) : (x - 2)$

3.3. Factorización de polinomios

Como vimos en la sección anterior, cuando realizamos una división (de polinomios o de números naturales), la igualdad

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \cdot \text{divisor} + \text{resto}$$

nos permite verificar el resultado obtenido. En el caso en que el resto sea cero, la igualdad anterior se transforma en

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \cdot \text{divisor}.$$

En otras palabras, cuando el resto es cero logramos escribir el dividendo como producto de dos factores: el cociente y el divisor. Por ejemplo, para el caso de números naturales tenemos que

$$10 = 2 \cdot 5,$$

pues el cociente al dividir 10 por 2 es 5, y el resto es cero. En forma más general, si al dividir p por q obtenemos un cociente c y resto cero, entonces

$$p = q \cdot c$$

y decimos que p es **divisible** por q, o también que p es **múltiplo** de q. Desde otro punto de vista, se dice que q es **divisor** de p, o que q es **factor** de p. Esta terminología se emplea tanto para números naturales como para polinomios.

Ejemplo 61. **Factores de un polinomio.** Como vimos en el primer caso del Ejemplo 60, aplicando la regla de Ruffini obtuvimos que

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x + 1)(x - 1).$$

Entonces decimos que $x^3 + x^2 - x - 1$ es divisible por $(x^2 + 2x + 1)$ y por $(x - 1)$, o que es múltiplo de cada uno de ellos. También decimos que $(x^2 + 2x + 1)$ y $(x - 1)$ son factores de $x^3 + x^2 - x - 1$, o que son divisores de él. «

Factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de otros polinomios, como en el ejemplo anterior. Este es el objetivo de esta sección, y resultará una herramienta fundamental para resolver ecuaciones polinómicas.

Comencemos con casos ya conocidos, que son los estudiados en la sección anterior.

Diferencia de cuadrados. Este es uno de los casos más simples de identificar, ya que, como su nombre lo indica, es una diferencia (es decir, una resta) de dos cantidades al cuadrado. Esto es, nos encontramos con una expresión de la forma

$$a^2 - b^2,$$

y queremos factorizarla. En la sección anterior vimos que este es el aspecto del producto

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),}$$

obteniendo así una factorización del binomio dado.

Ejemplo 62. **Reconociendo una diferencia de cuadrados.** Como se dijo antes, es sencillo reconocer este caso: solamente hay que extraer las raíces de las dos cantidades involucradas en la resta:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x^2} \; - \; \underset{\substack{\downarrow \\ 4}}{16}.$$

Entonces factorizamos $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$. «

Notar que el término que aparece sumando en un factor y restando en el otro, es la cantidad cuyo cuadrado estaba restando en el binomio dado. El otro término siempre tiene un signo + delante.

Ejemplo 63. **Otra diferencia de cuadrados.** Factoricemos ahora $9t^8 - 5$:

$$\begin{array}{ccc} 9t^8 & - & 5. \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3t^4 & & \sqrt{5} \end{array}$$

Entonces $9t^8 - 5 = \left(3t^4 + \sqrt{5}\right)\left(3t^4 - \sqrt{5}\right)$.

Trinomio cuadrado perfecto. Si el polinomio que queremos factorizar es de la forma

$$a^2 + 2ab + b^2,$$

entonces es lo que llamamos en la sección anterior un trinomio cuadrado perfecto. Sabemos que este tipo de trinomios provienen de hacer $(a+b)^2$. Es decir, en este caso se tiene

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$

lo cual es una factorización del polinomio dado, pues $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. Los factores repetidos se expresan en forma de potencia simplemente para agilizar la escritura.

Ejemplo 64. **Reconociendo un trinomio cuadrado perfecto.** Con la práctica, reconocer este tipo de trinomios no es difícil. Esencialmente, la idea es reconocer en el trinomio dos términos que sean el cuadrado de ciertas cantidades, y verificar si el término restante es el doble producto de dichas cantidades. Por ejemplo, considerar el trinomio

$$x^2 + 6x + 9.$$

Observando el polinomio, identificamos dos términos que son el cuadrado de dos cantidades: x y 3 (cuyos cuadrados son x^2 y 9). Además, si hacemos el doble producto de estas cantidades obtenemos $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$, que coincide con el término restante. Entonces es un trinomio cuadrado perfecto, el cual se factoriza como

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2.$$

Miremos ahora el trinomio

$$x^2 - 10x + 25.$$

Aquí los cuadrados que identificamos son x^2 y 25, provenientes de x y 5. Sin embargo, el doble producto de ellos es $10x$, y en el trinomio aparece con signo opuesto. Para lograr $-10x$, tomamos una de las dos cantidades negativa, por ejemplo, -5 (y se sigue cumpliendo que $(-5)^2 = 25$). Entonces

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2.$$

Los dos trinomios presentados en el ejemplo anterior muestran que se debe observar el signo del término de la forma $2ab$ para determinar si se factoriza como $(a+b)^2$, o como $(a-b)^2$. En este último caso, ya que $z^2 = (-z)^2$ para cualquier número real z, se tiene que $(a-b)^2 = (-a+b)^2$, por lo que cualquiera de las dos factorizaciones es correcta.

En el siguiente ejemplo se incluye una forma más "visual" de identificar trinomios cuadrados perfectos. El mismo muestra además que el trinomio no debe ser necesariamente un polinomio de grado 2 y con coeficiente principal igual a 1.

Ejemplo 65. **Más trinomios cuadrados perfectos.** Factorizar los siguientes trinomios

$$p(x) = x^6 + 8x^3 + 16, \qquad q(x) = 9x^4 - 30x^2 + 25.$$

Solución: Para el caso de p, los dos cuadrados que vemos son x^6 que es el cuadrado de x^3, y 16 que es el cuadrado de 4. El doble producto de estas cantidades es $2 \cdot 4 \cdot x^3 = 8x^3$, que coincide con el término restante. Por lo tanto

$$p(x) = (x^3+4)^2.$$

Hagamos el mismo razonamiento para q pero en forma gráfica que suele ayudar:

$$9x^4 - 30x^2 + 25$$

$$3x^2 \qquad\qquad 5$$

$$\underbrace{2 \cdot 3x^2 \cdot 5 = 30x^2}_{\text{Doble producto de las raíces halladas.}}$$

En el gráfico anterior, debajo de las flechas verticales, identificamos las dos cantidades cuyos cuadrados son los términos del trinomio, y luego hicimos el doble producto de estas cantidades para comparar con el término restante. Finalmente, prestamos atención al signo de este término para concluir que

$$q(x) = \left(3x^2 - 5\right)^2.$$

Cuatrinomio cubo perfecto. Si el polinomio que queremos factorizar es de la forma

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

entonces es lo que llamamos en la sección anterior un cuatrinomio cubo perfecto. Sabemos que este tipo de trinomios provienen de hacer $(a+b)^3$. Es decir, en este caso se tiene

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3,$$

lo que resulta una factorización del polinomio dado ya que

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b).$$

Como antes, utilizamos la potencia para agilizar la escritura de factores repetidos.

En los siguientes ejemplos identificaremos cuatrinomios cubos perfectos de manera análoga a lo que hicimos para reconocer trinomios cubos perfectos, solamente que ahora debemos identificar *cubos* en lugar de cuadrados, lo que automáticamente nos define los signos de cada término.

Ejemplo 66. **Reconociendo un cuatrinomio perfecto.** Factorizar los polinomios

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8, \qquad q(t) = 27t^6 + 27t^4 + 9t^2 + 1.$$

Solución: Comencemos con el polinomio p:

$$x^3 - \underbrace{6x^2} + \underbrace{12x} - 8$$

$$x \qquad\qquad -2$$

$$3 \cdot x^2 \cdot (-2) = -6x^2, \qquad 3 \cdot x \cdot (-2)^2 = 12x.$$

Entonces $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$. Con respecto a q, tenemos:

$$27t^6 + \underbrace{27t^4} + \underbrace{9t^2} + 1$$

$$3t^2 \qquad\qquad 1$$

$$3 \cdot (3t^2)^2 \cdot 1 = 27t^4, \qquad 3 \cdot 3t^2 \cdot 1^2 = 9t^2.$$

Entonces $27t^6 + 27t^4 + 9t^2 + 1 = (3t^2+1)^3$. «

? Pero, ¿qué podemos hacer para factorizar polinomios que no tengan la forma de los presentados hasta ahora? Lo primero que debemos intentar es sacar *factor común*, como se explica a continuación.

Factor común. Así como los casos anteriores provinieron de leer una igualdad ya conocida desde el lado adecuado, lo mismo ocurre con el método de extraer factores comunes en un polinomio. Este método consiste en determinar si el polinomio dado es el resultado de haber aplicado la propiedad distributiva del producto respecto de la suma o la resta. Por ejemplo, esta propiedad nos dice que

$$3x^2\left(x+2\right) = 3x^3 + 6x^2.$$

Extraer factor común es exactamente el proceso inverso: nos dan el polinomio $3x^3 + 6x^2$ y debemos identificar qué factores aparecen en *todos* sus términos. En este caso vemos que el 3 aparece como factor en ambos términos (ya que $6 = 2 \cdot 3$), y también x^2 (ya que $x^3 = x^2 \cdot x$). Los factores comunes a todos los términos los extraemos, y lo multiplicamos por el polinomio que resulta de "quitarle" dichos factores al original (esto significa dividir cada término por lo que sacamos como factor común):

$$3x^3 + 6x^2 = 3x^2(x+2).$$

Como siempre es posible **verificar** si lo hemos hecho bien, aplicando la propiedad distributiva del lado derecho de la igualdad para ver si recuperamos el polinomio del lado izquierdo.

De esta forma hemos factorizado el polinomio dado. Recordemos que factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de otros *polinomios*, por lo que x se extrae como factor común con el menor exponente al que aparece, para evitar exponentes negativos. Por ejemplo, si en el ejemplo anterior hubiéramos tomado como factor común a $3x^3$, nos queda

$$3x^3 + 6x^2 = 3x^3(1 + 2x^{-1}),$$

y, aunque la igualdad es cierta para todo $x \neq 0$ (hacer la distributiva del lado izquierdo para verificarlo), lo que queda entre paréntesis *no* es un polinomio.

Ejemplo 67. Extrayendo factores comunes.

- $x^4 - 4x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 4x + 1)$.
- $10x^2 + 25x + 15 = 5(2x^2 + 5x + 3)$.
- $9t^3 - 6t^2 + 12t^8 - 18t^9 = 3t^2(3t - 2 + 4t^6 - 6t^7)$.
- $3x(x+1)+5(x+1) = (x+1)(3x+5)$. Aquí el factor común es el binomio $(x+1)$ que está en ambos términos.
- $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$. Sacar factor común nos permitió obtener una diferencia de cuadrados y seguir factorizando.
- $x^3 - 12x^2 + 36x = x(x^2 - 12x + 36) = x(x-6)^2$. Sacar factor común nos permitió obtener un trinomio cuadrado perfecto y seguir factorizando. «

Ejemplo 68. **Cualquier constante no nula como factor común.** Si consideramos el polinomio $p(x) = 3x^2 - 12x + 6$, es claro que podemos extraer al 3 como factor común:

$$3x^2 - 12x + 6 = 3(x^2 - 4x + 2).$$

Los coeficientes que quedan en el polinomio entre paréntesis son los coeficientes del polinomio original divididos por 3, de manera que al hacer la distributiva se recupera lo que está a la izquierda de la igualdad. Pero si podemos dividir cada coeficiente por 3, entonces podemos dividir por cualquier otro número que se desee, siempre que no sea cero:

$$3x^2 - 12x + 6 = 6\left(\tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right) = -4\left(-\tfrac{3}{4}x^2 + 3x - \tfrac{3}{2}\right).$$

En otras palabras, aunque el aspecto del resultado quizás "empeore",

todo polinomio p es divisible por cualquier polinomio de grado cero.

En particular, **siempre es posible factorizar un polinomio (no constante) dado, como producto entre una constante y un polinomio mónico (es decir, uno con coeficiente principal igual a 1).** Por ejemplo:

$$2x^2 - x + 5 = 2\left(x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}\right),$$
$$\pi x^5 + 2x^3 - x + \sqrt{2} = \pi\left(x^2 + \tfrac{2}{\pi}x^3 - \tfrac{1}{\pi}x + \tfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right).$$

Así, cada polinomio puede factorizarse como el producto entre una constante y uno o más polinomios mónicos:

$$2x^3 + 3x^2 = x^2(2x + 3) = 2(x^2)\left(x + \frac{3}{2}\right).$$ «

Aunque en algunos textos suele considerarse el último miembro en la expresión anterior como la factorización *completa* del polinomio dado, no exigiremos aquí que cada factor sea mónico.

Ejemplo 69. **Factor común en grupos.** A veces nos encontramos con un cuatrinomio que no tiene un factor común a todos sus términos, pero tiene uno que es común a dos de ellos, y otro factor común a los otros dos. Antes de describirlo veamos un ejemplo que ilustra el método:

$$\underbrace{4x^3 - 4x^2}_{\substack{4x^2 \text{ es factor común} \\ \text{de estos dos términos}}} \underbrace{+2x - 2}_{\substack{2 \text{ es factor común} \\ \text{de estos dos términos}}} = 4x^2(x - 1) + 2(x - 1) = \underbrace{(x - 1)(4x^2 + 2)}_{\substack{(x-1) \text{ es factor común} \\ \text{de ambos términos}}}.$$

Este caso especial de extraer factores comunes se llama “factor común en grupos” porque se agrupan ciertos términos para sacar factor común entre ellos. Dado un cuatrinomio, la forma de agrupar los términos no es casual, sino que se eligen de manera que el resultado permita obtener nuevamente un factor común en el binomio resultante. El polinomio de partida también puede tener 6 términos, o cualquier otro número par de términos, pero no es tan sencillo darse cuenta de cómo armar los grupos en estos casos. «

Describiremos a continuación un método de factorizar un polinomio que incluye a algunos de los presentados antes. Es importante entender que aún cuando muchos de ellos puedan factorizarse con el método que sigue, manejar los casos “con nombre” que estudiamos antes ahorrará tiempo y cálculos. Es decir, aunque sea posible factorizar varios de los ejemplos anteriores mediante el método que presentaremos a continuación, siempre es más sencillo y rápido hacerlo como se ilustró.

Recordemos que para factorizar un polinomio hay que hallar sus divisores, es decir, polinomios tales que al dividir el polinomio por ellos, el resto sea cero. Existe un teorema* que nos permite saber cuánto es el resto de dividir un polinomio (de grado al menos 1) por un binomio de la forma $x-r$, siendo r un número real:

Teorema del resto: El resto de dividir un polinomio p por el binomio $x-r$ es igual a $p(r)$.

Ejemplo 70. **Aplicando el teorema del resto.** Sea $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 4$.

- El resto de dividir p por $x-4$ será $p(4) = 80$.
- El resto de dividir p por $x+2$ será $p(-2) = -22$ (notar que $x+2 = x-(-2)$, por lo que $r = -2$).
- El resto de dividir p por $x+1$ será $p(-1) = 0$.
- El resto de dividir p por x será $p(0) = 4$. «

Volvamos a nuestro objetivo: buscamos dividir p por un polinomio tal que el resto sea cero. Por el teorema del resto, al dividir p por $x-r$ el resto es $p(r)$. Entonces el binomio $x-r$ será divisor de p si y solo si $p(r) = 0$. Este resultado se conoce como **teorema del factor**, ya que en otras palabras dice que:

El binomio $(x-r)$ es factor del polinomio p si y solo si $p(r) = 0$.

*En matemática llamamos **teorema** a una proposición que afirma una verdad demostrable.

Recordemos que un valor r que satisface $p(r) = 0$ es llamado raíz (o cero) del polinomio p. Entonces, el teorema del factor dice que p tendrá un factor de la forma $x - r$ si y solo si r es raíz de p.

Nuestro objetivo se transforma entonces en encontrar, si las tiene, raíces reales de un polinomio dado. Para esto contamos afortunadamente con otro teorema, el cual será la clave para nuestro propósito.

Teorema de la raíz racional: Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con todos sus coeficientes enteros, con a_0 y a_n no nulos. Si p tiene una raíz racional r, entonces r es de la forma $\frac{m}{k}$, siendo m divisor de a_0 y k divisor de a_n.

El teorema anterior dice "si el polinomio tiene una raíz racional, entonces es de tal forma", pero puede que no tenga raíces racionales o de hecho que no tenga raíces reales, a pesar de tener coeficientes enteros:

- $p(x) = x^2 - 2$ tiene como raíces a $\pm\sqrt{2}$, pues $p(\pm\sqrt{2}) = 2 - 2 = 0$, y puede verse que son las únicas*, por lo tanto no tiene raíces racionales.
- $q(x) = x^2 + 2$ no tiene raíces reales, pues $r^2 \geq 0$ para todo r real, entonces $q(r) = r^2 + 2 \geq 2$ y por lo tanto no es cero para ningún real r.

En este texto trabajaremos con polinomios que sí tengan raíces racionales, para poder aplicar este método.

Ejemplo 71. **Buscando raíces racionales.** Sea $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$. Si p tiene raíces racionales, entonces serán de la forma $\frac{m}{k}$, siendo m divisor de -3 y k divisor de 2. Entonces:

- las posibilidades para m son: $1, -1, 3$ y -3;
- las posibilidades para k son: $1, -1, 2$ y -2.

Entonces las posibles raíces racionales son las combinaciones de $\frac{m}{k}$, las cuales son

$$\pm 1, \quad \pm 3, \quad \pm\tfrac{3}{2}, \quad \pm\tfrac{1}{2}.$$

Por supuesto, siempre es conveniente comenzar probando con las posibles raíces enteras:

$$p(1) = 2 - 5 + 6 - 3 = 0,$$

y así tuvimos suerte y encontramos que $r = 1$ es raíz de p, por lo que $x - 1$ es factor de p. Podemos ver que los demás valores posibles no son raíces de p. «

*Demostrar esta afirmación escapa a los contenidos de este curso, pero proviene del hecho que un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces.

> Resumiendo el método, buscamos números reales r tales que $p(r) = 0$. Si el polinomio tiene coeficientes enteros, probaremos aquí con números de la forma $r = \frac{m}{k}$, siendo m divisor del término independiente y k divisor del coeficiente principal. Si lo hallamos, $x - r$ será factor de p, y podremos factorizar $p(x) = c(x)(x - r)$, siendo $c(x)$ el cociente que puede hallarse aplicando la regla de Ruffini.

Ejemplo 72. Factorizando un polinomio. Factorizar el polinomio

$$p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3.$$

Solución: En el ejemplo anterior vimos que $r = 1$ es raíz de p, lo que implica que el binomio $x - 1$ es divisor de p. Apliquemos entonces la regla de Ruffini para efectuar la división:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 6 & -3 \\ 1 & & 2 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -3 & 3 & 0 \end{array}$$

Como se esperaba, el resto es cero por lo que

$$2x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = (2x^2 - 3x + 3)(x - 1).$$ «

Ejemplo 73. Factorizando un polinomio. Factorizar completamente (es decir, seguir factorizando mientras sea posible) el polinomio $q(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$.

Solución: Como el coeficiente principal de q es 1, las posibles raíces racionales son todas enteras y estarán dadas por los divisores del término independiente, 12. Entonces, debemos probar con los valores ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12, para ver si alguno es raíz de q:

$$q(1) = 8, \quad ✗ \qquad q(-1) = 0. \quad ✓$$

Hacemos entonces la división por $x + 1$ utilizando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -9 & 4 & 12 \\ -1 & & -1 & 1 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -8 & 12 & 0 \end{array}$$

Como esperábamos, el resto es cero por lo que

$$q(x) = (x^3 - x^2 - 8x + 12)(x + 1).$$

Pero se pide que lo factoricemos por completo, lo que significa que debemos ver si el factor $c(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ puede a su vez factorizarse. Probando con los mismos valores que antes, vemos que $c(2) = 0$, por lo que haremos $c(x) : (x-2)$ mediante la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -8 & 12 \\ 2 & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Entonces $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x^2 + x - 6)(x - 2)$, por lo que

$$q(x) = (x^3 - x^2 - 8x + 12)(x + 1) = (x^2 + x - 6)(x - 2)(x + 1).$$

Pero $x^2 + x - 6$ aún se puede factorizar, pues su valor numérico en 2 es cero, por lo que aplicamos la regla de Ruffini por tercera vez para realizar el cociente $(x^2 + x - 6) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Luego $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ y, en consecuencia,

$$q(x) = (x + 3)(x - 2)(x - 2)(x + 1) = (x + 3)(x - 2)^2(x + 1).$$ «

Una **raíz múltiple** de un polinomio es una raíz que ocurre más de una vez. En el ejemplo anterior el factor $(x - 2)$ aparece dos veces en la factorización de q, así que $r = 2$ es una raíz múltiple. Puesto que ocurre dos veces, se llama una **raíz doble**. Si ocurriera solamente una vez es llamada **raíz simple**. Si ocurre tres veces se denomina **raíz triple**, y así sucesivamente. La cantidad de veces que ocurre una raíz se llama **orden de multiplicidad**, o simplemente **multiplicidad** de dicha raíz*.

Una pregunta natural en este punto es ¿cómo nos damos cuenta si el polinomio está completamente factorizado? Es decir, ¿hasta cuándo seguimos? En el ejemplo anterior es claro que terminamos ya que llegamos a todos factores de

*En términos matemáticos, se dice que una raíz r de p tiene multiplicidad k si podemos factorizar $p(x) = (x - a)^k s(x)$, siendo $s(x)$ un polinomio tal que $s(r) \neq 0$. Es decir, $(x - r)^k$ es factor de p pero $(x - r)^{k+1}$ no lo es.

grado 1, por lo que más que eso no podemos hacer. Sin embargo, con factores de mayor grado no es tan claro darse cuenta si se puede seguir o si ya no tiene más raíces reales. Si bien no hay una receta para responder esta pregunta que esté dentro del alcance de este libro, la idea que servirá para abordar los ejercicios de este curso es la siguiente:

- Intentar aplicar cada uno de los métodos descriptos.

- Si se llega a un polinomio de grado 2, existe un criterio para saber si se puede o no seguir factorizando. Este criterio, al igual que una fórmula para determinar sus raíces aún cuando no sean racionales, será estudiado en el Capítulo 4. Allí se presenta un análisis que justifica la siguiente afirmación, que nos dice cuándo podremos factorizar a un polinomio de grado 2:

$p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene raíces reales si y solo si $b^2 - 4ac \geq 0$.

Ilustremos esto con dos polinomios ya vistos.

Ejemplo 74. **Criterio de parada para polinomios cuadráticos.** En el Ejemplo 73 obtuvimos a $x^2 + x - 6$ como factor del polinomio original. En este polinomio,

$$a = 1, \quad b = 1 \quad \text{y} \quad c = -6.$$

Entonces $b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 > 0$, por lo que la afirmación anterior dice que podemos seguir factorizando. Esto coincide con lo hecho, ya que lo logramos escribir como $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

Por otro lado, en el Ejemplo 72 uno de los factores era $2x^2 - 3x + 3$. En este polinomio

$$a = 2, \quad b = -3 \quad \text{y} \quad c = 3,$$

por lo que $b^2 - 4ac = 9 - 24 = -15 < 0$, lo que indica que ya no tiene raíces reales y la factorización ha finalizado, es decir, que en dicho ejemplo ya habíamos completado la factorización. «

El siguiente ejemplo, además de aplicar lo estudiado a un caso particular de polinomio, nos da una pauta más con respecto a saber cuándo hemos finalizado la factorización para polinomios no cuadráticos con una forma especial.

Ejemplo 75. **Suma o diferencia de potencias de igual grado.** Esto no es un método nuevo, sino que consiste en aplicar lo aprendido a un caso particular: factorizar binomios de la forma $x^n - r^n$ o $x^n + r^n$, siendo r un número real positivo, y n un natural. En realidad, como explicamos a continuación, lo "nuevo" aparece solo cuando n es impar.

- n par

  - Suma $x^n + r^n$. Cuando tenemos la *suma* de dos potencias *pares*, entonces el polinomio ya está factorizado por completo en los reales. Por ejemplo, $x^2 + 4$. Esto se debe a que dicha suma es estrictamente positiva, por lo que no tiene raíces reales.

  - Resta $x^n - r^n$. Cuando tenemos la *resta* de dos potencias *pares*, entonces estamos en realidad ante una diferencia de cuadrados, y se trabaja como ya lo vimos:

$$x^8 - 3^8 = \left(x^4\right)^2 - \left(3^4\right)^2 = \left(x^4 - 3^4\right)\left(x^4 + 3^4\right).$$

    Notar que en lo anterior, $x^4 - 3^4$ puede a su vez factorizarse como

$$x^4 - 3^4 = (x^2 - 3^2)(x^2 + 3^2) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 3^2),$$

    al reconocer dos veces más una diferencia de cuadrados. Así,

$$x^8 - 3^8 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 3^2)\left(x^4 + 3^4\right).$$

Notar que los dos últimos factores son de la forma $x^n + r^n$ con n par y, por el caso anterior, no pueden factorizarse más.

- n impar

  - Suma $x^n + r^n$. Por ejemplo, consideremos

$$p(x) = x^3 + 125 = x^3 + 5^3.$$

    Observar que $p(-5) = 0$, por lo que $(x - (-5)) = (x + 5)$ es divisor de p. Aplicando la regla de Ruffini tenemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 125 \\ -5 & & -5 & 25 & -125 \\ \hline & 1 & -5 & 25 & 0 \end{array}$$

    Luego,

$$x^3 + 5^3 = (x^2 - 5x + 25)(x + 5).$$

  - Resta $x^n - r^n$. Consideremos ahora

$$q(x) = x^5 - 32 = x^5 - 2^5.$$

    Notar que $q(2) = 0$, así que aplicamos la regla de Ruffini para dividir q por $(x - 2)$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \end{array}$$

Entonces

$$x^5 - 2^5 = (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)(x - 2).$$

Resumiendo, si n es **impar** entonces

$$x^n + r^n \text{ es divisible por } x + r,$$

$$x^n - r^n \text{ es divisible por } x - r.$$

Más aún, puede demostrarse que $-r$ es la *única* raíz real de $x^n + r^n$, mientras que r es la *única* raíz real de $x^n - r^n$. Entonces, el polinomio se encuentra **totalmente factorizado** una vez efectuada la división por los respectivos factores.

Si n es **par** entonces $x^n + r^n$ *no tiene* raíces reales, mientras que $x^n - r^n$ es una diferencia de cuadrados, y sus *únicas* raíces reales son r y $-r$.

Finalizamos la sección enfatizando algo que ya se ha mencionado pero es de gran importancia:

¿Cómo saber si una factorización es correcta? Siempre es posible verificar si la factorización es correcta multiplicando los factores obtenidos y operando, para comprobar que se llega de esta forma al polinomio de partida. No debemos olvidar que al factorizar un polinomio se obtiene una expresión con distinta forma (multiplicación de polinomios), pero equivalente a la original.

Ejercicios 3.3

1. Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados:

(a) $4x^2 - 49$ **(c)** $25x^6 - 9$

(b) $t^8 - 6$ **(d)** $36x^2 - 25$

2. Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

(a) $x^2 - 8x + 16$ **(c)** $4x^4 + 12x^2 + 9$

(b) $9x^2 - 12x + 4$ **(d)** $t^4 - 6t^3 + 9t^2$

3. Factorizar los siguientes cuatrinomios cubos perfectos:

(a) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

(b) $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$

(c) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

(d) $8t^6 - 12t^4 + 6t^2 - 1$

4. Determinar m para que el resto de dividir $mx^5 - 2x^4 + 3x^2 - 7$ por el binomio $x - 1$ sea igual a 2.

5. Determinar k para que $x + 1$ sea factor de $5x^7 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + k$.

6. En el Ejemplo 69 se factorizó al polinomio $p(x) = 4x^3 - 4x^2 + 2x - 2$ extrayendo factor común por grupos. Rehacerlo buscando una raíz según el teorema del factor, y aplicando luego la regla de Ruffini para dividir.

7–20. Factorizar por completo los polinomios dados.

7. $3x^4 - 12x^2$

8. $3x^4 + 15x^2$

9. $x^3 - x^2 + 4x - 4$

10. $4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$

11. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3x$

12. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x - 8$

13. $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

14. $x^5 + 1$

15. $x^5 - 1$

16. $x^6 - 1$

17. $4x^4 - 64$

18. $3x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 40$

19. $2x^6 - 5x^5 - 3x^4$

20. $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40$

Polinomios en GeoGebra

Para comenzar a usar GeoGebra, veamos cómo se ingresa un polinomio. Para ello usamos el campo de Entrada, en el cual podremos escribir si habilitamos el teclado, cliqueando en el símbolo del mismo. Si trabajamos en una computadora, este se encuentra en la esquina inferior izquierda:

Productos notables más usados	
El cuadrado de un binomio	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
El cubo de un binomio	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Diferencias de cuadrado	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Diferencias de cubos	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Sumas de cubos	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

11. Desarrollar, aplicando las **igualdades notables**:

a) $(x+2)^2=$

b) $(x-3)^2=$

c) $(x+2)(x-2)=$

d) $(3x+2)^2=$

e) $(2x-3)^2=$

f) $(5x+4)(5x-4)=$

g) $(x^2+5)^2=$

h) $(x^3-2)^2=$

i) $(x^2-1)(x^2+1)=$

j) $(2x^2+3x)^2=$

k) $(2x^2-3)^2=$

l) $(-x-3)^2=$

m) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=$

n) $\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2=$

o) $\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)=$

p) $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2=$

q) $\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{4}\right)^2=$

r) $\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3}+2\right)=$

s) $\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{x}\right)^2=$

t) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)=$

u) $\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2=$

(*Soluc:* ***m)*** $x^2+x+\frac{1}{4}$; ***n)*** $4a^2-6a+\frac{9}{4}$; ***o)*** $1-\frac{x^2}{4}$; ***p)*** $4x^2+3x+\frac{9}{16}$; ***q)*** $\frac{9}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{x^2}{16}$; ***r)*** $4-\frac{a^2}{9}$; ***s)*** $\frac{9}{4}x^2-3+\frac{1}{x^2}$; ***t)*** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{9}$; ***u)*** $\frac{9}{4}x^2+\frac{3x}{4}+\frac{1}{16}$)

12. Operar y simplificar:

a) $(x+1)^2+(x-2)(x+2)=$

b) $(3x-1)^2-(2x+5)(2x-5)=$

c) $(2x+3)(-3+2x)-(x+1)^2=$

d) $(-x+2)^2-(2x+1)^2-(x+1)(x-1)=$

e) $-3x+x(2x-5)(2x+5)-(1-x^2)^2=$

f) $(3x-1)^2-(-5x^2-3x)^2-(-x+2x^2)(2x^2+x)=$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 42: 34***

(*Soluc:* ***a)*** $2x^2+2x-3$; ***b)*** $5x^2-6x+26$; ***c)*** $3x^2-2x-10$; ***d)*** $-4x^2-4x+4$; ***e)*** $-x^4+4x^3+2x^2-28x-1$; ***f)*** $-29x^4-30x^3+x^2-6x+1$)

Descomposición Factorial P(x)

Descomponer en factores un polinomio es expresarlo como producto de otros polinomios.

- Empezamos sacando factor común siempre que sea posible.
- Se identifican las identidades notables.
- Se buscan divisores de la forma x – a, tales que, **a** sea divisor del término independiente.

Teorema del Resto: El resto de la división de un polinomio P(x), entre un binomio de la forma (x–a) coincide con el valor numérico de dicho polinomio para x = a.

$$R = P(a)$$

Teorema del Factor: Si x = a es una raíz del polinomio P(x), dicho polinomio es divisible por x – a, o lo que es lo mismo, (x – a) es un factor de P(x).

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x)$$

01)	x^3+8x^2+15x	**18)**	$2x^3+4x^2-10x-12$	**35)**	$2x^3-10x^2+14x-6$
02)	$x^3-7x^2+16x-12$	**19)**	x^3-3x^2-x+3	**36)**	$3x^4-2x^3-13x^2+8x+4$
03)	x^3+3x^2-10x	**20)**	x^3-5x^2+8x-4	**37)**	$x^4-4x^3-6x^2+36x-27$
04)	$2x^3-8x^2+2x+12$	**21)**	x^3+3x^2-4	**38)**	$x^4+4x^3-2x^2-12x+9$
05)	x^4-5x^2+4	**22)**	$2x^3-x^2-25x-12$	**39)**	$7x^4-28x^3+21x^2+28x-28$
06)	$x^4-x^3-x^2+x$	**23)**	x^3-5x^2+7x-3	**40)**	$2x^4-13x^3+27x^2-23x+7$
07)	$x^4-2x^3-13x^2+38x-24$	**24)**	x^3-2x^2-4x+8	**41)**	$2x^4+3x^3-x$
08)	$x^5-5x^4+7x^3-3x^2$	**25)**	x^3+4x^2-x-4	**42)**	$2x^4-2x^3-22x^2+10x+60$
09)	$x^4+3x^3+4x^2+6x+4$	**26)**	$3x^3+6x^2-45x-108$	**43)**	$4x^4-28x^2+49$
10)	$3x^3+3x^2-18x$	**27)**	$9x^2-25$	**44)**	$2x^4+12x^3+26x^2+24x+8$
11)	$x^4-3x^3+3x^2-3x+2$	**28)**	$36x^6-49x^4$	**45)**	$x^6-14x^4+49x^2-36$
12)	$2x^3-2x^2-12x$	**29)**	$121-25x^8$	**46)**	$x^4+6x^3+9x^2-4x-12$
13)	$x^4-x^3-7x^2+x+6$	**30)**	$3x^4+6x^3+6x^2+6x+3$	**47)**	$x^4+10x^3+37x^2+60x+36$
14)	$4x^4-6x^3+2$	**31)**	$x^4+3x^3+4x^2+6x+4$	**48)**	x^5-2x^3+x
15)	x^3-2x^2-x+2	**32)**	$3x^2+14x-5$	**49)**	$x^6+2x^5-3x^4-4x^3+4x^2$
16)	x^3-4x^2+5x-2	**33)**	x^3+5x^2+8x	**50)**	$x^4+3x^3-3x^2-11x-6$
17)	x^3+2x^2-4x-8	**34)**	$4x^5+2x^4-2x^3$	**51)**	$10x^4-100x^2+90$

SOLUCIONES							
		13)	$(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-3)$	**26)**	$3\cdot(x-4)\cdot(x+3)^2$	**39)**	$7\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)^2$
01)	$x\cdot(x+3)\cdot(x+5)$	**14)**	$2\cdot(x-1)\cdot(2x^3-x^2-x-1)$	**27)**	$(3x+5)\cdot(3x-5)$	**40)**	$(x-1)^3\cdot(2x-7)$
02)	$(x-2)^2\cdot(x-3)$	**15)**	$(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$	**28)**	$(6x^3-7x^2)\cdot(6x^3+7x^2)$	**41)**	$x\cdot(x+1)^2\cdot(2x-1)$
03)	$x(x-2)\cdot(x+5)$	**16)**	$(x-1)^2\cdot(x-2)$	**29)**	$(11-5x^4)\cdot(11+5x^4)$	**42)**	$(x+2)\cdot(x-3)(x-\sqrt{5})\cdot(x+\sqrt{5})$
04)	$2(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$	**17)**	$(x+2)^2\cdot(x-2)$	**30)**	$3\cdot(x+1)^2\cdot(x^2+1)$	**43)**	$(2x^2-7)^2$
05)	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$	**18)**	$2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$	**31)**	$(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2)$	**44)**	$2\cdot(x+1)^2\cdot(x+2)^2$
06)	$(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot x$	**19)**	$(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$	**32)**	$(3x-1)\cdot(x+5)$	**45)**	$(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)(x+2)(x+3)$
07)	$(x-1)(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$	**20)**	$(x-2)^2\cdot(x-1)$	**33)**	$x\cdot(x^2+5x+8)$	**46)**	$(x-1)\cdot(x+2)^2\cdot(x+3)$
08)	$x^2(x-1)^2\cdot(x-3)$	**21)**	$(x+2)^2\cdot(x-1)$	**34)**	$2x^3\cdot(2x-1)\cdot(x+1)$	**47)**	$(x+3)^2\cdot(x+2)^2$
09)	$(x^2+2)\cdot(x+2)\cdot(x+1)$	**22)**	$(x+3)\cdot(x-4)\cdot(2x+1)$	**35)**	$2\cdot(x-1)^2\cdot(x-3)$	**48)**	$x\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)^2$
10)	$3x\cdot(x-2)\cdot(x+3)$	**23)**	$(x-1)^2\cdot(x-3)$	**36)**	$(3x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-1)$	**49)**	$x^2\cdot(x-1)^2\cdot(x+2)^2$
11)	$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+1)$	**24)**	$(x-2)^2\cdot(x+2)$	**37)**	$(x-3)^2\cdot(x+3)\cdot(x-1)$	**50)**	$(x+1)^2(x-2)\cdot(x+3)$
12)	$2x\cdot(x+2)\cdot(x-3)$	**25)**	$(x+4)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$	**38)**	$(x+3)^2\cdot(x-1)^2$	**51)**	$10\cdot(x-\sqrt{3})^2\cdot(x+\sqrt{3})^2$

Lenguaje Algebraico

El *lenguaje algebraico* utiliza letras y números unidos por los signos de las operaciones aritmética, de esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas lo que nos permite, formular expresiones algebraicas para luego poder resolver problemas mediante ecuaciones.

Expresión algebraica

Una *expresión algebraica* es un conjunto de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas.

$A = \pi \cdot R^2$ *es la expresión algebraica para calcular el área de un círculo.*

Monomios

Un *monomio* es la expresión algebraica más sencilla y consiste en el producto de un número por varias letras.

$$4x^2yz^3 \rightarrow \begin{cases} 4 & \rightarrow \text{Coeficiente} \\ x^2yz^3 & \rightarrow \text{Parte Literal} \end{cases}$$

Dos *monomios* son *semejantes* si tienen la misma parte literal.

$5x^3$ y $3x^3$ Son semejantes *$5x$ y $3x^2$ No son semejantes*

El *grado* de un monomio es el número de letras de la parte literal (la suma de todos los exponentes de su parte literal)

El *valor numérico* de un monomio es el valor que se obtiene al sustituir la letra (o letras) por un número (o números) y realizar los cálculos.

El valor numérico de $3x^2$ para $x=2$ es $3\cdot(2)^2 = 3\cdot 4=12$

Operaciones con Monomios

Para *sumar* o *restar* monomios, se suman o se restan los coeficientes de los monomios que sean semejantes:

$5x^2 - 3x^2 = 2x^2$ $4x^3 + 7x^3 - 5x^3 = 6x^3$

Para *multiplicar* monomios se multiplican los coeficientes por un lado y las partes literales por otro (Propiedades de las potencias)

$5x^2 \cdot 3x^3 = 15\,x^5$ $4x^5 \cdot 7x^2 = 28\,x^7$

Para *dividir* monomios se dividen los coeficientes por un lado y las partes literales por otro.

$10x^4 : 2x^3 = 5\,x$ $24x^5 : 6x^2 = 4\,x^3$

Polinomios

Un *polinomio, P(x),* es la suma de varios monomios no semejantes, a los que llamaremos *términos* del polinomio. El coeficiente del término de mayor grado es el *coeficiente principal*, y el término sin letra (o de grado 0) se llama *término independiente*. Los representaremos por letras mayúsculas P, Q, R ….y entre paréntesis expresaremos la variable de la que depende. P(x), Q(x)…

$$P(x) = \underbrace{4x^3}_{\text{Término de grado 3}} + \underbrace{3x^2}_{\text{Término de grado 2}} - \underbrace{2x}_{\text{Término de grado 1}} + \underbrace{5}_{\text{Término independiente}}$$

El *grado de un polinomio* es el mayor de los grados de los monomios que los componen.

Grado de P(x) = $4x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ = 3 (el mayor)

$$4x^3 + 2x^2 + 6x - 7 \rightarrow \begin{cases} \text{grado} : 3 \\ \text{Coef. principal} : 4 \\ \text{Término independiente} : -7 \end{cases}$$

Un polinomio es *completo* si contiene todos los términos consecutivos desde el de mayor grado hasta el de menor, si no es así, será incompleto

$P(x) = \underbrace{8x^4 + 3x^2 + 2x + 5}_{\text{Incompleto, falta término de grado 3}}$ $Q(x) = \underbrace{3x^3 + 2x^2 - 4x + 5}_{\text{Completo}}$

El *valor numérico de un polinomio* P(x) para *x=a, P(a)*, es el número que se obtiene al cambiar *x* por el número *a*, y realizar las operaciones indicadas.

Sea el polinomio $P(x) = 3x^2 + 2x + 5$

$$P(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) + 5 = 3\cdot 1 - 2 + 5 = 3 - 2 + 5 = 6$$
$$P(2) = 3(2)^2 + 2(2) + 5 = 3\cdot 4 + 4 + 5 = 12 + 4 + 5 = 21$$

Un número cualquiera *x=a es raíz de un polinomio P(x),* cero de un polinomio, cuando el valor numérico de dicho polinomio si x=a es nulo.

x=a es raíz de P(x) si P(a)=0

$$P(x) = x^2 - 4$$

$$P(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \qquad P(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

2 y -2 son raíces del polinomio x^2-4

Operaciones con polinomios

Para *sumar o restar* polinomios, sumaremos o restaremos los monomios semejantes que los componen y damos el resultado en orden decreciente en grado.

$$(x^4 - 3x^2 + x + 1) + (x^3 - x^2 + 5x - 2) =$$
$$= x^4 - 3x^2 + x + 1 + x^3 - x^2 + 5x - 2 = x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x - 1$$

$$(x^4 - 3x^2 + x + 1) - \underbrace{(x^3 - x^2 + 5x - 2)}_{\text{para restar dos polinomios}} =$$
$$= x^4 - 3x^2 + x + 1 \underbrace{- x^3 + x^2 - 5x + 2}_{\text{cambiamos el signo de todos los miembros del segundo}} = x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x + 3$$

Para *multiplicar* dos polinomios, multiplicaremos todos los monomios del primero por todos los monomios del segundo y después agruparemos los monomios semejantes dando el resultado en orden decreciente en grado.

$$(6x^2 + 7x - 8)(-2x + 5)$$

TIC

$$\begin{array}{r} -12x^3 - 14x^2 + 16x \\ 30x^2 + 35x - 40 \\ \hline -12x^3 + 16x^2 + 51x - 40 \end{array}$$

Para *dividir* un polinomio *P(x)* entre otro *Q(x),* dividimos cada término del dividendo entre todos los términos del divisor usando la regla de la división "cociente por divisor más resto igual a Dividendo"

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & -2x^2 & +8x & -11 & 2x-3 \\ \cline{5-5} -4x^3 & +6x^2 & & & 2x^2 + 2x + 7 \\ \hline & 4x^2 & +8x & -11 & \\ & -4x^2 & +6x & & \\ \hline & & 14x & -11 & \\ & & -14x & +21 & \\ \hline & & & 10 & \end{array}$$

Cociente = $2x^2 + 2x + 7$
Resto = 10

Cálculo de los términos

$4x^3 : 2x = 2x^2$

$4x^2 : 2x = 2x$

$14x : 2x = 7$

Para sacar *factor común* en un polinomio se buscan todos los factores comunes (los que se repiten) a todos los términos y se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma:

$$60x^4 + 18x^3 - 24x^2 = 6x^2 \cdot (10x^2 + 3x - 4)$$

Identidades Notables

El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primero, más el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \qquad (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

El cuadrado de la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primero, menos el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \qquad (2x-4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$$

Suma por diferencia. La suma de dos términos multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (x+3)\cdot(x-3)=x^2-9$$

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en descomponerlo en producto de polinomios del menor grado posible, de forma que ninguno de ellos pueda descomponerse a su vez.

Un polinomio se puede factorizar de tres maneras:

- *Sacando factor común.*

$$10x^3+2x^2-8x=2x\cdot(5x^2+x-4) \qquad x^5-5x^3=x^3(x^2-5)$$

- *Identificando identidades notables.*

$$x^2+5x+6=(x+3)^2 \qquad 4x^2-20x+25=(2x-5)^2$$

- *Buscando sus raíces mediante Ruffini.*

El proceso de factorización comienza *buscando divisores* de la forma *x-a*, tales que, *a*, sea divisor del término independiente de nuestro polinomio.

Como cada raíz origina un factor de la forma $x-a$, cuando en la división por Ruffini el resto para un $x=a$ sale 0, estamos diciendo que el polinomio de partida es divisible por el binomio $x-a$, y por tanto, este binomio junto con el cociente obtenido nos dará una factorización del polinomio [recuerda que si $R(x)=0$, entonces, $D(x)=d(x)\cdot C(x)$]. Habrá que ir comprobando si los cocientes que vamos obteniendo se pueden descomponer, puesto que se trata de conseguir factores irreducibles.

$$P(x)=x^3-4x^2+x+6$$

	1	-4	1	6	Los divisores de 6 son ±1, ±2, ±3 y ±6, probamos con -1 y obtenemos resto 0. Probamos con 1, y nada, probamos con 2 y obtenemos resto 0. Por tanto la factorización es $P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$
-1	0	-1	5	-6	
	1	-5	6	0	
2	0	2	-6		
	1	-3	0	<- -	

Fracciones algebraicas

Una *fracción algebraica* es una fracción en la que tanto numerador como denominador son polinomios.

$$\frac{x+3}{x-5} \qquad \frac{x+2}{x^2-4} \qquad \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$$

Al igual que en las fracciones de números enteros, *en las fracciones algebraicas se suele trabajar con la fracción irreducible*, es decir, con aquella fracción equivalente a la original, pero que no se puede simplificar más.

Para simplificar una fracción algebraica se dividen numerador y denominador por un polinomio que sea factor común de ambos, y para ello nos ayudaremos de la factorización de polinomios.

a) $$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)}=\frac{x+2}{x-2}$$

Las dos son identidades notables que convertimos en producto y simplificamos

b) $$\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-6}=\frac{(x-2)^2}{(x+3)\cdot(x-2)}=\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x-2)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x-3)}=\frac{x-2}{x-3}$$

En el numerador hay una identidad notable, y en el denominador factorizamos con Ruffini después y simplificamos.

c) $$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\frac{(x-3)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)}=\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x-3)}{\cancel{(x-2)}\cdot x}=\frac{x-3}{x}$$

En el numerador hacemos Ruffini y en el denominador sacamos factor común y después simplificamos.

d) $$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x+2)}}=\frac{x^2-1}{(x-2)^2}$$

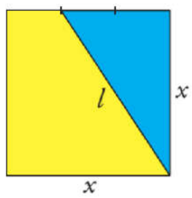
Hacemos Ruffini tanto en el numerador como en el denominador y después simplificamos.

Resolución de Problemas Algebraicos

A la hora de *resolver problemas algebraicos* seguiremos el siguiente esquema:

a) Lectura y comprensión del enunciado.
b) Análisis de los datos del enunciado. *(Ayudarse con un dibujo)*
c) Traducción del problema al lenguaje algebraico
d) Planteamiento de las operaciones a realizar y realización.
e) Resolución del problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para ello.
f) Dar la solución del problema (responder a las preguntas).
g) Evaluar e interpretar los resultados obtenidos con los datos del problema. ¿Son lógicos? ¿Se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿Puedo comprobar si la solución es correcta?

1.- Fíjate en la figura y expresa algebraicamente:
a) El área del triángulo Azul.
b) El área del trapecio amarillo.
c) La longitud de l.
d) Calcula la longitud de l, si x=5 cm



a) El área de un triángulo viene dada por:

$$A=\frac{Base\cdot Altura}{2}=\frac{B\cdot h}{2},$$

En el dibujo podemos observar que la base del triángulo es *x*, y la altura es *2/3 x*. Por tanto si sustituimos en la fórmula obtenemos:

$$A_{\triangle}(x)=\frac{B\cdot h}{2}=\frac{x\cdot\frac{2}{3}x}{2}=\frac{\frac{2}{3}x^2}{2}=\frac{1}{3}x^2 \ u.a.$$

b) El área del trapecio amarillo la podemos calcular restando al área del cuadrado, el área del triángulo azul.

$$A_T(x)=A_{\square}-A_{\triangle}=x^2-\frac{1}{3}x^2=\frac{2}{3}x^2 \ u.a.$$

c) La longitud de l, la podemos calcular utilizando el teorema de Pitágoras $a^2=b^2+c^2$ en el triángulo azul.

Sustituyendo nuestros valores llegamos a: $l^2=x^2+\left(\frac{2}{3}x\right)^2$

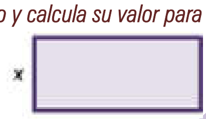
Si operamos y despejamos l:

$$l^2=x^2+\left(\frac{2}{3}x\right)^2=x^2+\frac{4}{9}x^2=\frac{13}{9}x^2 \quad\rightarrow\quad l=\sqrt{\frac{13}{9}x^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}x \ u.l.$$

d) Si x=5, el valor de l será:

$$l(x)=\frac{\sqrt{13}}{3}x \quad\rightarrow\quad l(5)=\frac{\sqrt{13}}{3}\cdot5=\frac{5\sqrt{13}}{3}=6\ cm$$

2.- Doblando un alambre de 40 cm formamos un rectángulo. Halla la expresión algebraica que define el área del rectángulo y calcula su valor para x=4.



Si formamos un rectángulo de altura x, como 40 cm es el perímetro, las dos bases medirán *40-2x* y una sola base medirá *20-x*. Por tanto el área del rectángulo será *(base x altura)*:

$$A(x)=base\ x\ altura=(20-x)\cdot x=20x-x^2 \quad\rightarrow\quad A(4)=80-16=64\ cm^2$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\sqrt{x}$$

Tema 4: Ecuaciones

Aprender a resolver ecuaciones de una variable: lineales, cuadráticas, con módulo, racionales e inecuaciones; y sistema de ecuaciones lineales con dos variables.
Modelizar situaciones, resolver y responder en función del problema.

$$2^{2x-4}=64$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x^2-x=0$$
$$2x^2-4x=0$$
$$3x^2+9x=0$$

Capítulo 4

Ecuaciones e inecuaciones

4.1. El lenguaje matemático

Innumerables situaciones correspondientes a diversas áreas y situaciones cotidianas pueden ser modeladas mediante ecuaciones e inecuaciones. Para resolver un problema matemáticamente, el primer paso es traducirlo del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico. Este es precisamente el objetivo de esta sección: traducir una situación concreta al lenguaje matemático, transformándola en una ecuación, inecuación o un sistema de ellas (cómo resolver el planteo obtenido será el objetivo de las siguientes secciones).

Antes de "traducir" problemas concretos, comencemos expresando cosas más simples. En la siguiente lista se escriben en lenguaje matemático algunas frases frecuentes. Comprender esta forma de expresarlas será fundamental para el planteo de problemas específicos.

- El doble de un número $x \rightsquigarrow 2x$
- Las tres cuartas partes de un número $x \rightsquigarrow \frac{3}{4}x$
- Se aumenta en 5 al triple de un número $y \rightsquigarrow 3y + 5$
- El triple del número y, más 5 $\rightsquigarrow 3y + 5$
- El triple del número y más 5 $\rightsquigarrow 3(y + 5)$
- La mitad del consecutivo de un número entero $x \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x + 1)$
- El cuadrado de la mitad de un número $z \rightsquigarrow \left(\frac{z}{2}\right)^2$
- El número x supera al número y en 30 unidades $\rightsquigarrow x = y + 30$*
- Un número entero x más su consecutivo $\rightsquigarrow x + (x + 1)$

*Es frecuente ver que esta expresión es traducida como $x + 30 = y$. Este error puede evitarse pensando que si el número x supera a y, significa que y es más pequeño, por lo que hay que sumarle a él la cantidad necesaria para igualar a x.

Ahora sí, plantearemos en lenguaje algebraico algunas situaciones concretas.

Ejemplo 82. **Usando el lenguaje matemático.** Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 84. ¿Cuál es el número?

Solución: Llamemos x al número buscado (este paso es fundamental, es decir, antes de comenzar a plantear un problema se debe indicar siempre qué representa cada letra o símbolo utilizado). En el enunciado aparecen involucrados el doble del número (es decir $2x$) y también su mitad ($x/2$), y establece que

$$2x - \tfrac{x}{2} = 84.$$

En la sección siguiente veremos cómo resolver la igualdad anterior, por ahora solamente nos centraremos en el planteo. «

Ejemplo 83. En un avión viajan 420 pasajeros de tres países: argentinos, uruguayos y chilenos. Hay 40 chilenos más que uruguayos, y de argentinos hay el doble que de uruguayos y chilenos juntos. ¿Cuántos hay de cada país?

Solución: Denotemos con y a la cantidad de uruguayos que viajan en el avión. Entonces la cantidad de chilenos es $y + 40$, y la cantidad de argentinos se representa como $2(y + (y + 40))$. Luego, la traducción algebraica del problema es

$$y + (y + 40) + 2(y + (y + 40)) = 420.$$ «

☞ El planteo matemático de algunos problemas es más sencillo si trabajamos con más de una incógnita. Este es el caso de las siguientes situaciones.

Ejemplo 84. **Usando más de una incógnita.** Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 24 unidades, y cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor.

Solución: Para traducir esta situación al lenguaje matemático, podemos llamarle x a la longitud del lado menor del rectángulo, e y a la del lado mayor. Puesto que su perímetro es 24, sabemos que

$$2x + 2y = 24. \qquad (A)$$

Además se afirma que el lado mayor mide el triple que el menor, es decir

$$y = 3x. \qquad (B)$$

Las dos igualdades (A) y (B) deben cumplirse simultáneamente. Esto se conoce con el nombre de "sistema de ecuaciones", y su resolución será estudiada en la Sección 4.4. «

Ejemplo 85. Determinar las edades de dos personas sabiendo que la suma de sus edades hoy es de 64 años, y que dentro de 8 años el mayor tendrá el triple de edad que el menor.

Solución: Llamemos x a la edad que tiene hoy la persona menor, e y a la edad que tiene hoy la mayor. Sabemos que

$$x + y = 64. \quad (a)$$

La edad de cada una dentro de 8 años es $x + 8$ e $y + 8$, respectivamente. En ese momento, el mayor tendrá el triple que el menor, por lo que para que sean iguales hay que multiplicar la edad del menor por 3 (o dividir a la del mayor por 3). Es decir

$$3(x + 8) = y + 8. \quad (b)$$

Al igual que antes, las igualdades (a) y (b) deben cumplirse a la vez. «

Finalmente, veremos problemas en los que aparecen una o más desigualdades en lugar de una igualdad, las cuales reciben el nombre de inecuaciones, y serán estudiadas en detalle en secciones posteriores.

Ejemplo 86. Usando desigualdades. Si al doble de la edad de Jeremías se le resta 19 años, el resultado es menor que 37. Pero si al tercio de su edad se le suma 10, entonces el resultado es mayor que 18. ¿Cómo se expresan mediante desigualdades estas expresiones?

Solución: Si llamamos x a la edad de Jeremías, el enunciado afirma las dos condiciones siguientes:

$$2x - 19 < 37 \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{3} + 10 > 18.$$ «

En las secciones siguientes nos ocuparemos de resolver los planteos anteriores: ecuaciones, inecuaciones y sistemas.

Ejercicios 4.1

Expresar en lenguaje matemático las siguientes situaciones problemáticas (no resolverlas). Recordar definir siempre la/s variable/s involucrada/s, es decir, siempre se debe indicar qué representa cada letra utilizada.

1. El kilo de manzanas cuesta el doble que el kilo de limones. Si por 3 kilos de manzanas y 5 kilos de limones se pagó $165, ¿cuánto cuesta el kilo de cada uno?

2. Tres hermanos se reparten 1300 pesos. El mayor recibe el doble que el mediano, quien a su vez recibe el cuádruple que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

3. En un estadio de fútbol hay 43200 personas. Si sabemos que hay 4800 locales más que visitantes, ¿cuántos locales y cuántos visitantes hay?

4. Se han consumido las 7/8 partes de un bidón de agua. Añadiendo 38 litros se llena hasta las 3/5 partes. Calcular la capacidad del bidón.

5. Agustín hizo un viaje en su auto, en el cual consumió 20 litros de nafta. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió 2/3 de la nafta que tenía el tanque, mientras que en la segunda etapa consumió la mitad de la nafta que le quedaba en el tanque luego de la primera. Hallar una igualdad para determinar los litros de nafta que tenía Agustín en el tanque antes de partir.

4.2. Resolución de ecuaciones

Si se comprende el proceso que se utiliza, resolver ecuaciones puede ser más simple de lo que uno imagina. Comencemos recordando qué es una ecuación.

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones conteniendo uno o más valores desconocidos.

Las expresiones que aparecen a ambos lados del símbolo = (igual) se llaman **miembros** de la ecuación.

Aprenderemos a resolver ecuaciones que tengan solamente un valor desconocido. Al valor desconocido se lo llama **incógnita**, y se lo suele denotar con x, pero puede representarse con cualquier otra letra.

Antes de ver cómo resolver ecuaciones, hay que entender qué significa esto. **Resolver** una ecuación es simplemente hallar el valor (o los valores) de la incógnita, de manera que la igualdad sea cierta si reemplazamos dicha incógnita por cualquiera de los valores hallados. Dependiendo del caso, el valor buscado puede ser único, pueden existir varios valores que hagan la igualdad cierta, o puede ocurrir que no exista ninguno. Cualquier valor que haga cierta la igualdad se llama **solución** de la ecuación. Luego, una ecuación puede tener una única solución, varias o ninguna, y es llamada **identidad** cuando es verdadera para cualquier valor de la incógnita. Cuando la ecuación esté modelando un problema concreto, habrá que elegir entre todas las soluciones de la ecuación, aquellas que tengan sentido en el contexto del problema, y descartar las que no lo tengan (ver Ejemplo 112).

Notar que siempre es posible saber por nuestra cuenta si hemos resuelto correctamente la ecuación. Por ejemplo, para saber si $x = 1$ es solución de la ecuación

$$x + 3 = 5 - x,$$

podemos reemplazar x por 1 en ambos lados de la igualdad (miembros) para obtener

$$1 + 3 = 5 - 1,$$

lo cual es cierto ya que el resultado es 4 en ambos.

El procedimiento anterior se denomina **verificación**, y consiste en comprobar que la igualdad se cumple al reemplazar la incógnita por el o los valores obtenidos.

Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones. Utilizaremos el símbolo $\Longleftrightarrow$ (que se lee "si y solo si") para conectar dos ecuaciones que son equivalentes. La clave para resolver una ecuación es transformarla en ecuaciones equivalentes cada vez más simples, utilizando la **propiedad uniforme**. Esta propiedad establece que:

> Si se realiza la misma operación con el mismo número en ambos miembros de una ecuación, se mantiene la igualdad.

La propiedad uniforme es la base para resolver ecuaciones, y es la que justifica lo que en lenguaje coloquial expresamos como "pasar" algo de un lado a otro de la igualdad. La palabra "pasar" simplemente abrevia una serie de pasos matemáticos utilizados con el fin de llegar a *despejar* la incógnita x. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$6(x-4)^3 - 15 = 33$$

lo primero que uno hace es "pasar" al otro lado el número 15 sumando. Pero, ¿por qué lo pasa sumando? Comprender esto es la clave para lograr resolver en forma correcta las ecuaciones. En realidad, matemáticamente lo que se hace es lo siguiente:

$$\begin{aligned} 6(x-4)^3 - 15 + 15 &= 33 + 15 && \text{sumar } 15 \text{ a ambos lados} \\ 6(x-4)^3 + 0 &= 33 + 15 && -15 + 15 = 0 \text{ por ser opuestos} \\ 6(x-4)^3 &= 48 && 33 + 15 = 48. \end{aligned}$$

En lo anterior usamos la propiedad uniforme en el primer paso, luego usamos la propiedad asociativa de la suma, la propiedad de existencia del opuesto y, finalmente, que el cero es neutro para la suma. Todas esas operaciones y propiedades se resumen al decir informalmente que "pasamos" el 15 sumando, y en la práctica los pasos intermedios se omiten o reducen.

De la misma forma, con el fin de despejar x ahora "pasamos" el número 6 para el otro lado. En este caso, como está multiplicando "pasa" para el otro lado dividiendo, ya que para eliminarlo lo que hacemos es dividir ambos lados de la igualdad por 6:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{6}(x-4)^3}{\cancel{6}} &= \frac{48}{6} && \text{dividir ambos miembros por 6} \\ (x-4)^3 &= 8 && \tfrac{6}{6} = 1\text{, por eso se “cancelan”.} \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos raíz cúbica a ambos lados (es la forma de “pasar” el número 3 que está como exponente hacia el otro miembro), y resolvemos para obtener

$$x - 4 = 2.$$

En lo anterior hemos usado la fórmula (2.3.3) (página 52) ya que, al ser 3 un número impar, el cubo y la raíz cúbica se “cancelan” directamente. Finalmente, sumamos 4 a ambos lados (informalmente, “pasamos el 4 sumando”) y se obtiene $x = 6$. Por fortuna, podemos verificar si este valor es correcto, poniendo 6 en cada lugar donde decía x en la ecuación original:

$$6(6-4)^3 - 15 = 33.$$

Es fácil ver que el lado izquierdo da como resultado 33, así que la respuesta $x = 6$ es correcta.

👉 **Es muy importante dar la respuesta al problema**, es decir, indicar el conjunto S cuyos elementos son las soluciones para la ecuación. En este caso, tenemos $S = \{6\}$.

⚠ Se debe notar que no hay una única manera de resolver una ecuación, pero sí es importante tener en cuenta la jerarquía entre las operaciones: para despejar la incógnita siempre se comienza “pasando” al otro lado lo que está “más lejos” de ella, en el sentido de la resolución de operaciones combinadas. Por ejemplo, una vez obtenido

$$6(x-4)^3 = 48$$

hubiera sido incorrecto si en el paso siguiente escribimos

$$6(x-4) = \sqrt[3]{48}. \quad ✗$$

El error se detecta rápidamente si, ante la duda, en lugar de “pasar” la potencia aplicamos raíz cúbica a ambos lados:

$$6(x-4)^3 = 48 \iff \sqrt[3]{6(x-4)^3} = \sqrt[3]{48} \iff \sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[\cancel{3}]{(x-4)^{\cancel{3}}} = \sqrt[3]{48},$$

es decir,

$$\sqrt[3]{6}\cdot(x-4) = \sqrt[3]{48}. \quad ✓$$

Esto muestra un camino diferente de proceder, “pasando” correctamente la raíz cúbica antes que el 6, el cual también es válido.

Veremos ahora algunos ejemplos de resolución de ecuaciones, ilustrando diferentes técnicas según el caso, así como ciertos errores frecuentes con el fin de evitarlos luego. Es importante la lectura de los mismos, ya que contienen las herramientas fundamentales para la resolución de ecuaciones.

Ejemplo 87. Resolver la ecuación $6(x+2)-21=3(x+1)$.

Solución:

$$\begin{aligned} 6(x+2)-21 &= 3(x+1) \\ 6x+12-21 &= 3x+3 && \text{propiedad distributiva del producto} \\ 6x-9 &= 3x+3 && \text{se resolvió } 12-21 \\ 6x-3x &= 9+3 && \text{se sumó } 9-3x \text{ en ambos miembros} \\ 3x &= 12 && \text{se resolvió} \\ x &= 4 && \text{se dividieron ambos miembros por 3.} \end{aligned}$$

El paso "se sumó $9-3x$ en ambos miembros" es lo que suele expresarse informalmente como "llevamos a un lado todo lo que tiene x, y al otro lo que no tiene x".

Luego de realizar la verificación (este es un paso que debe hacerse siempre, aunque lo omitiremos algunas veces aquí), podemos concluir que el conjunto solución de la ecuación es $S=\{4\}$. «

Ejemplo 88. Un error frecuente.

Cuando no se comprende el proceso utilizado para despejar la incógnita en una ecuación, pueden cometerse errores como el siguiente:

$$6x=30 \iff x=\frac{30}{-6}=-5. \quad ✗$$

Es decir, el número 6 que está multiplicando a la incógnita se lo "pasa" dividiendo, y como es positivo se lo "pasa" además como negativo. Incluso a veces, por ser positivo, suele verse lo siguiente:

$$6x=30 \iff x=30-6=24. \quad ✗$$

Todos estos errores pueden evitarse pensando cuál es la propiedad que hace que el número 6 se "elimine" del lado izquierdo: dividir ambos miembros por 6 como sigue

$$6x=30 \iff \frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}}=\frac{30}{6} \iff x=5. \quad ✓$$ «

Ejemplo 89. Resolver la ecuación $5^2 + 3\sqrt{2x-6} = 2^3 5 - 9$.

Solución:

$5^2 + 3\sqrt{2x-6} = 2^3 5 - 9$	
$25 + 3\sqrt{2x-6} = 31$	se resolvió 5^2 y también $2^3 5 - 9$
$3\sqrt{2x-6} = 31 - 25$	se restó 25 en ambos miembros
$3\sqrt{2x-6} = 6$	se resolvió $31 - 25$
$\sqrt{2x-6} = \frac{6}{3}$	se dividieron ambos miembros por 3
$\sqrt{2x-6} = 2$	se resolvió $\frac{6}{3}$
$2x - 6 = 2^2$	se elevaron ambos miembros al cuadrado
$2x = 4 + 6$	se sumó 6 en ambos miembros
$2x = 10$	se resolvió el miembro derecho
$x = \frac{10}{2}$	se dividieron ambos miembros por 2
$x = 5.$	se resolvió $\frac{10}{2}$

Luego de realizar la verificación, podemos concluir que el conjunto solución de la ecuación es $S = \{5\}$. «

En lo anterior, uno de los pasos consistió en "elevar al cuadrado" ambos miembros de la ecuación. Como se muestra en el ejemplo siguiente, esto a veces puede introducir una solución ficticia, por lo que la verificación se convierte, en este caso, en un paso fundamental para la resolución de la ecuación.

Ejemplo 90. Cuidado al elevar al cuadrado.

Supongamos que tenemos la ecuación $\sqrt{x-3} = -2$, y para resolverla elevamos ambos miembros al cuadrado para eliminar el radical. Entonces obtenemos

$$x - 3 = (-2)^2 = 4,$$

lo cual implica $x = 7$. Verifiquemos si $x = 7$ es solución de la ecuación:

$$\sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2 \neq -2. \quad ✗$$

¿Por qué elevar al cuadrado generó una solución incorrecta? Si observamos la ecuación original, del lado izquierdo tenemos una cantidad positiva (o cero), mientras que del derecho, una negativa. Esto permite concluir que ningún valor de x hará cierta esta igualdad, es decir, $S = \varnothing$. Al elevar al cuadrado ambos miembros los convertimos en positivos, y generamos así soluciones para la nueva ecuación, que no necesariamente resuelven la original. A continuación ampliaremos esto, y veremos cómo proceder en estos casos para determinar la solución de la ecuación dada. «

? En el ejemplo anterior, ¿cuál es la operación que generó una solución ficticia? Cuando, para eliminar el radical, elevamos un número a una potencia *par* podemos introducir una **solución ficticia**. El motivo es el siguiente:

$$\boxed{a = b \Rightarrow a^2 = b^2.}$$

Sin embargo,

$$\boxed{a^2 = b^2 \not\Rightarrow a = b} \qquad \text{pues lo correcto es} \qquad \boxed{a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b|,}$$

ya que $\sqrt{x^2} = |x|$, según la fórmula (2.3.3) en la página 52 aplicada para $n = 2$.

El razonamiento matemático para cuando trabajamos con implicaciones en lugar de equivalencias es el siguiente: si x es solución de la ecuación original, entonces debe satisfacer la obtenida al elevar la misma al cuadrado. Eso no significa que lo recíproco sea cierto: no todo valor que satisfaga la ecuación resultante de elevar al cuadrado la original, será solución de ella. **La importancia de los valores obtenidos al resolver la nueva ecuación es que, si la original tiene soluciones, estas se encontrarán entre dichos valores.** Luego, para hallar las soluciones de la ecuación dada, simplemente debemos verificar cuáles de estos valores la satisfacen. Si ninguno lo hace, la ecuación no tiene solución. Este es el procedimiento que debe efectuarse siempre que se trabaje con ecuaciones que involucren radicales. En el Ejemplo 102 volveremos a ilustrar esto.

Ejemplo 91. Ecuaciones con valor absoluto. Resolver $2|x-4|-1=5$.

Solución:

$$2|x-4|-1=5 \iff 2|x-4|=6 \iff |x-4|=3.$$

Si $|y| = 3$, por definición se tiene que $y = 3$ o $y = -3$. En símbolos,

$$|y| = 3 \iff y = 3 \quad \text{o} \quad y = -3.$$

En este caso, lo que cumple el rol de y es todo lo que está dentro del valor absoluto, es decir, $x - 4$. Luego

$$|x-4| = 3 \iff x-4 = 3 \quad \text{o} \quad x-4 = -3.$$

Estas dos igualdades arrojan $x = 3 + 4 = 7$, o bien $x = -3 + 4 = 1$. Luego, puesto que el conjunto solución S consiste en todas las soluciones posibles, tenemos que $S = \{7, 1\}$, como puede fácilmente verificarse. «

Como vimos en el Ejemplo 90, al elevar ambos miembros de una ecuación al cuadrado (o cualquier otra potencia par), se pueden introducir soluciones ficticias. La clave está en que $\sqrt{x^2} = |x|$ (y no simplemente x, como suele verse cuando se "simplifican" el índice con el exponente). Recordar esto es fundamental para no "perder" soluciones al aplicar raíces con índice par en ambos miembros de una igualdad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 92. **Cuidado al cancelar índices y exponentes pares.**

Considerar la ecuación $\frac{1}{2}(x+5)^2 = 8$. Veamos un error muy frecuente al resolver este tipo de ecuaciones, que lleva a "perder" soluciones:

$$\frac{1}{2}(x+5)^2 = 8 \iff (x+5)^2 = 16 \iff x+5 = 4 \iff x = -1. \quad ✗$$

Si bien $x = -1$ es una de las soluciones de la ecuación, al "pasar" la raíz en forma incorrecta perdimos otra de ellas. En este caso, la resolución correcta es

$$\frac{1}{2}(x+5)^2 = 8 \iff (x+5)^2 = 16 \iff \sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{16} \iff |x+5| = 4. \quad ✓$$

Esta última igualdad de traduce en las posibilidades

$$x+5 = 4 \qquad \text{o} \qquad x+5 = -4,$$

lo cual induce las dos soluciones $x = -1$ y $x = -9$. Entonces $S = \{-1, -9\}$. «

El siguiente ejemplo muestra otra forma de perder soluciones, al "cancelar" expresiones que se anulan para algún valor de la incógnita.

Ejemplo 93. **Cuidado de no dividir por cero.**

La propiedad uniforme implica que si $a = b$ entonces $a : c = b : c$ para todo c *permitido* en la división, es decir, siempre que $c \neq 0$. Es por eso que hay que tener cuidado, cuando "pasamos dividiendo" una expresión, de asegurarnos de que esta sea distinta de cero, y considerar aparte el caso que sea cero, para no perder alguna de las soluciones de la ecuación. Para ilustrar esto, consideremos las siguientes ecuaciones:

$$3x - 6 = 8x - 16, \qquad x^3 - x^2 + 2x - 2 = 6x - 6.$$

Una forma de resolver la primera es sacando el número 3 como factor común del miembro izquierdo y el 6 del miembro derecho, para obtener

$$3(x-2) = 6(x-2).$$

Si en la expresión anterior "cancelamos" $(x-2)$, obtenemos $3 = 6$, lo cual no es cierto y podría hacernos pensar que la ecuación no tiene solución. Sin embargo, el error está en que cuando "cancelamos" en realidad estamos utilizando la propiedad uniforme para dividir ambos miembros por $(x-2)$. Al hacer esto, para no dividir por cero debemos pedir que $x \neq 2$. Entonces, **resta considerar el caso $x = 2$**: debemos preguntarnos si este valor es o no solución de la ecuación dada. Para ello reemplazamos por dicho valor en la ecuación original, y vemos que ambos miembros valen cero. Es decir, la igualdad se cumple, y por lo tanto $x = 2$ es solución de la ecuación. Luego, el conjunto solución es $S = \{2\}$.

Lo mismo ocurre con la segunda ecuación, en la que si sacamos factor común x^2 de los dos primeros términos de la izquierda, de los dos restantes sacamos 2 como factor común, y en el miembro derecho sacamos el número 8 como factor común, nos queda

$$x^2(x-1)+2(x-1)=6(x-1).$$

Si sacamos ahora factor común $(x-1)$ del lado izquierdo, la ecuación anterior resulta

$$(x-1)(x^2+2)=6(x-1).$$

Entonces consideramos dos posibilidades: $x=1$ y $x\neq 1$. En este último caso podemos dividir ambos miembros por $(x-1)$, ya que esta cantidad no es cero, y obtenemos

$$x^2+2=6.$$

Esto es equivalente a $x^2=4$, cuyas soluciones son $x=2$ y $x=-2$ (recordar que $\sqrt{x^2}=|x|$). Sin embargo, no debemos olvidarnos de considerar la posibilidad $x=1$, para determinar si este valor forma parte o no de las soluciones. Reemplazando x por dicho valor en la ecuación original se obtiene cero a ambos lados del signo igual, por lo que $x=1$ también es solución. Así, como puede verificarse, $S=\{2,\,-2,\,1\}$. «

Ejemplo 94. La incógnita en el exponente. Resolver la ecuación $5^{3x-2}=20$.

Solución: Para "bajar" el exponente aplicamos logaritmo a ambos miembros (en este caso en base 5) y luego usamos una de las propiedades del logaritmo (ver página 37) para "cancelar" las operaciones (pues $\log_a(a^x)=x\log_a a=x$):

$$5^{3x-2}=20 \Longleftrightarrow \log_5\left(5^{3x-2}\right)=\log_5 20.$$

Puesto que $\log_5 20\approx 1.861$, podemos obtener un valor aproximado de la solución resolviendo la ecuación

$$3x-2=1.861,$$

cuya solución es $x=\frac{3.861}{3}=1.287$. Para verificar que el valor $x=1.287$ aproxima a la solución, reemplazamos en la ecuación para obtener

$$5^{3\cdot 1.287-2}=5^{1.861}\approx 20.$$

Trabajar con aproximaciones numéricas sirve para dar una idea del valor de la solución en problemas concretos. Pero, en este caso, dicha solución puede expresarse de manera exacta como

$$x^*=\frac{2+\log_5 20}{3},$$

de modo que el conjunto solución es $S=\{x^*\}$. «

Ejemplo 95. La incógnita en el exponente: usando propiedades de la potencia. Resolver la ecuación $2^x 16^{-x} = (0.5)^{x-8}$.

Solución: Notar que en este caso es posible expresar todas las potencias involucradas en la ecuación en una misma base. Así, la misma puede reescribirse como

$$2^x \left(2^4\right)^{-x} = \left(2^{-1}\right)^{x-8}.$$

Usando las propiedades de la potencia, podemos a su vez reescribirla como

$$2^{x-4x} = 2^{-x+8},$$

es decir,

$$2^{-3x} = 2^{-x+8}.$$

Aplicamos ahora logaritmo a ambos miembros (en este caso en base 2) y luego usamos una de las propiedades del logaritmo para “cancelar” las operaciones:

$$\log_2\left(2^{-3x}\right) = \log_2\left(2^{-x+8}\right) \iff -3x = -x + 8.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $x = -4$. Realicemos la verificación:

$$x = -4: \quad 2^{-4}16^4 = 2^{-4}2^{16} = 2^{12} = 2^{4+8} = (0.5)^{-4-8}. \quad ✔$$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto solución es $S = \{-4\}$. «

⚠ Al resolver una ecuación suponemos que x es un valor que satisface la igualdad y, a partir de ello, operamos. Pero suponer que satisface la igualdad implica suponer que las operaciones involucradas en la misma están bien definidas para dicho valor. Esto aquí significa que no genera denominadores nulos, radicandos negativos cuando haya índices pares o logaritmos de un número negativo o cero. En otras palabras, suponemos que x es un valor “permitido” para la ecuación dada. Al momento de resolver una ecuación, es fundamental identificar los valores permitidos, para descartar como solución aquellos que no lo sean. El siguiente ejemplo ilustra el caso de los valores que deben descartarse debido a que generan un denominador nulo.

Ejemplo 96. Valores no permitidos: generan denominadores nulos. 👉

Resolver la ecuación $\frac{3x}{x-3} = 1 + \frac{9}{x-3}$.

Solución: Puesto que la expresión $x - 3$ aparece en los denominadores, esto automáticamente descarta a $x = 3$ como solución de la ecuación, pues al reemplazar x por el valor 3, estaríamos dividiendo por cero. Teniendo esto presente, es decir, si $x \neq 3$, resolvamos ahora la ecuación:

$$\frac{3x}{x-3} = 1 + \frac{9}{x-3} \iff 3x = \left(1 + \frac{9}{x-3}\right)(x-3).$$

Aplicando la propiedad distributiva en el miembro derecho se obtiene

$$3x = x - 3 + 9,$$

lo que equivale a $2x = 6$, y por lo tanto $x = 3$. Puesto que este valor era no permitido, se concluye que la ecuación no tiene solución. A diferencia del Ejemplo 93 en el que dividimos por cero, en este caso la estrategia de multiplicar a ambos miembros por $x - 3$ es correcta, solamente que la solución obtenida estaba descartada de antemano. «

☞ El ejemplo anterior muestra cómo se procede cuando se trabaja con ecuaciones que involucran fracciones algebraicas, o cualquier expresión en la cual la incógnita aparece en un denominador: se deben descartar todos los valores de la misma que anulen a alguno de los denominadores dados. En ecuaciones con logaritmos, los valores permitidos para la incógnita son aquellos que no generan, en la ecuación dada, ningún logaritmo de un número negativo o cero. Ilustramos esto en los ejemplos a continuación.

Ejemplo 97. **Ecuaciones con logaritmos.** Resolver la ecuación

$$\log_5(3x) - \log_5(2x+1) = 0.$$

Solución: Los valores permitidos son aquellos x tales que

$$3x > 0 \quad \text{y} \quad 2x + 1 > 0. \qquad (\dagger)$$

Esto significa que los valores de x que no satisfagan alguna de estas dos desigualdades no podrán ser solución de la ecuación, ya que generarían una operación no definida.

Para resolver este tipo de ecuaciones se utilizan las propiedades de los logaritmos:

$$\log_5(3x) - \log_5(2x+1) = \log_5\left(\frac{3x}{2x+1}\right),$$

por lo que la ecuación dada se reescribe como

$$\log_5\left(\frac{3x}{2x+1}\right) = 0.$$

Notar que aquí el denominador $2x + 1$ es distinto de cero, pues requerimos que esta cantidad sea positiva al determinar los valores permitidos para x. Supongamos que existe un valor de x dentro de los permitidos (es decir, que verifica las dos desigualdades en $(\dagger)$) que satisface la ecuación. Ahora trataremos de hallarlo. De la definición de logaritmo, la última igualdad vale si y solo si

$$5^0 = \frac{3x}{2x+1}.$$

De esta manera, hemos eliminado el logaritmo para obtener la ecuación equivalente

$$1 = \frac{3x}{2x+1},$$

la que, a su vez, equivale a $3x = 2x + 1$, cuya solución es $x = 1$. Notar que este valor satisface las dos desigualdades establecidas al comienzo:

$$3 \cdot 1 > 0 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 1 + 1 > 0,$$

por lo tanto es un valor permitido para la solución. Resta entonces realizar la verificación, para comprobar que es solución de la ecuación:

$$x = 1: \quad \log_5(3 \cdot 1) - \log_5(2 \cdot 1 + 1) = \log_5 3 - \log_5 3 = 0. \qquad ✓$$

Luego, el conjunto solución es $S = \{1\}$. «

Ejemplo 98. Valores no permitidos: generan logaritmos de cantidades no positivas.

Resolver la ecuación $\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = 2$.

Solución: Los valores permitidos son aquellos x tales que

$$x - 4 > 0 \quad \text{y} \quad x + 4 > 0.$$

Para resolver la ecuación, sea x un valor que satisface la ecuación. Para hallarlo, aplicando la propiedad de la suma de logaritmos de igual base, tenemos que

$$\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = \log_3\left((x-4)\cdot(x+4)\right),$$

por lo que la ecuación dada puede reescribirse como

$$\log_3\left((x-4)\cdot(x+4)\right) = 2.$$

De la definición de logaritmo, esto vale si y solo si

$$(x-4)\cdot(x+4) = 3^2,$$

lo cual es equivalente a

$$x^2 - 16 = 9.$$

Esta última igualdad equivale a $x^2 = 25$, y sabemos que los valores posibles de x que satisfacen esto son $x = 5$ y $x = -5$. Sin embargo, solamente el primero de ellos satisface las dos desigualdades requeridas para los valores permitidos, por lo $x = -5$ se descarta. Reemplacemos entonces en la ecuación para verificar que $x = 5$ es solución:

$$x = 5: \quad \log_3(5-4) + \log_3(5+4) = \log_3 1 + \log_3 9 = 0 + 2 = 2. \qquad ✓$$

Luego, el conjunto solución es $S = \{5\}$. «

Para el caso de ecuaciones que involucran radicales con índice par, los valores permitidos para la incógnita son aquellos que no generan radicandos negativos. Se ilustra el modo de resolver ecuaciones de este tipo en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 99. Valores no permitidos: generan radicales con índice par y radicando negativo.

Resolver la ecuación $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x-4}$.

Solución: Los valores permitidos son aquellos x tales que

$$x - 3 \geq 0 \quad \text{y} \quad 2x - 4 \geq 0.$$

Para resolver la ecuación, comenzamos elevando ambos miembros al cuadrado para eliminar los radicales, obteniendo la ecuación

$$x - 3 = 2x - 4.$$

Hallemos su solución:

$$x - 3 = 2x - 4 \iff -3 + 4 = 2x - x,$$

es decir, $x = 1$. Sin embargo, este valor no es permitido ya que no satisface ninguna de las desigualdades requeridas al comienzo (como antes, no satisfacer al menos una de ellas es suficiente para descartarlo). Por lo tanto, no existe ningún número real que sea solución de la ecuación dada, y $S = \varnothing$. «

Con el fin de reforzar todo lo visto hasta aquí, resumimos a continuación los casos en los que se debe tener cuidado:

- **Formas de generar soluciones ficticias:** al elevar al cuadrado (u otra potencia par). Los valores que no resulten solución se detectarán al realizar la verificación. Ver Ejemplo 90.
- **Formas de “perder” soluciones:**
  - al simplificar incorrectamente exponentes e índices pares. Ver Ejemplo 92;
  - al dividir por una expresión y no considerar el caso en que la misma se anule. Ver Ejemplo 93.
- **Valores a descartar:**
  - los que generen denominadores iguales a cero. Ver Ejemplo 96;
  - los que generen logaritmos de cantidades no positivas. Ver Ejemplos 97 y 98;
  - los que generen radicandos negativos. Ver Ejemplo 99.

Algunas ecuaciones pueden ser llevadas a una forma particular: un producto de factores en un miembro, y cero en el otro. Para resolver este tipo de ecuaciones se utiliza una propiedad conocida como **propiedad del producto cero**, la cual establece que:

> Un producto de factores es cero si y solo si uno o más de los factores son iguales a cero.

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de la propiedad del producto cero.

Ejemplo 100. Un producto igual a cero. Resolver la ecuación

$$(x-2)(x^3-1)=0.$$

Solución: Por la propiedad del producto cero, sabemos que la ecuación se satisface si y solo si uno o ambos factores son cero. Es decir

$$x-2=0 \qquad \text{o} \qquad x^3-1=0.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene

$$x=2 \qquad \text{o} \qquad x=\sqrt[3]{1}=1.$$

Luego, tenemos que $S=\{2,\,1\}$. Se puede ver en la ecuación original que cualquiera de estos dos valores anulan el miembro izquierdo. «

Ejemplo 101. Resolver la ecuación $x^4-x^3+x^2-3x=6$.

Solución: La ecuación dada es equivalente a $x^4-x^3+x^2-3x-6=0$. Factorizando el polinomio que aparece a la izquierda, la ecuación se transforma en

$$(x-2)(x+1)(x^2+3)=0.$$

Por la propiedad del producto cero, sabemos que la ecuación se satisface si y solo si alguno de los factores es cero. Es decir

$$x-2=0, \qquad x+1=0 \qquad \text{o} \qquad x^2+3=0.$$

La última opción no es posible ya que $x^2+3\geq 0+3=3>0$, por lo que solamente pueden valer las dos primeras. Resolviendo estas dos ecuaciones se obtiene

$$x=2 \qquad \text{o} \qquad x=-1.$$

Entonces $S=\{2,\,-1\}$. Se puede ver en la ecuación original que cualquiera de estos dos valores hacen que el miembro izquierdo valga 6. «

Ejemplo 102. **Descartando soluciones ficticias.**

Hallar los valores de x que satisfacen la igualdad $x + 4 = \sqrt{x + 10}$.

Solución: Los valores permitidos para x son aquellos tales que $x + 10 \geq 0$, pues si el índice es par entonces el radicando no puede ser negativo. Para resolver la ecuación, elevamos ambos miembros al cuadrado para eliminar el radical, y obtenemos:

$$(x + 4)^2 = x + 10.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}(x + 4)^2 = x + 10 &\iff x^2 + 8x + 16 = x + 10 \\ &\iff x^2 + 7x + 6 = 0.\end{aligned}$$

Aplicando la regla de Ruffini, el polinomio que aparece en el miembro izquierdo puede factorizarse como $(x + 1)(x + 6)$, por lo que la ecuación se transforma en

$$(x + 1)(x + 6) = 0.$$

Por la propiedad del producto cero, las soluciones son $x = -1$ y $x = -6$. Ambos valores son permitidos, pues ninguno genera radicando negativo en la ecuación original. Sin embargo, puesto que hemos elevado al cuadrado para resolver, pudimos haber introducido una solución ficticia. Para determinar esto, debemos verificar la validez de la ecuación original con cada valor obtenido. A continuación calculamos el valor de ambos miembros de la ecuación dada para cada uno de los valores obtenidos, para determinar si se cumple la igualdad o no:

	$x + 4$	$\sqrt{x + 10}$	
$x = -1$	$-1 + 4 = 3$	$\sqrt{-1 + 10} = 3,$	✔
$x = -6$	$-6 + 4 = -2$	$\sqrt{-6 + 10} = 2.$	✗

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{-1\}$. «

Como consecuencia de la propiedad del producto cero se obtiene la del **cociente cero**:

> Un cociente es cero si y solo si el numerador es cero
> (y el denominador distinto de cero).

Ejemplo 103. **Un cociente igual a cero.** Resolver la ecuación

$$\frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 1} = 0.$$

Solución: Observemos primero que el denominador que aparece en la ecuación nunca es cero, ya que $x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0$. Por la propiedad del cociente cero, sabemos que la ecuación se satisface si y solo si el numerador es cero. Es decir, la ecuación se transforma en

$$x^2 + 3x - 18 = 0.$$

Para resolver esta ecuación* aplicamos la regla de Ruffini para factorizar el polinomio del miembro izquierdo como $x^2 + 3x - 18 = (x + 6)(x - 3)$. Por lo tanto, la ecuación que debemos resolver es

$$(x + 6)(x - 3) = 0.$$

Aplicando ahora la propiedad del producto cero sabemos que las posibilidades son

$$x + 6 = 0 \qquad \text{o} \qquad x - 3 = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $x = -6$ y $x = 3$. Puesto que ninguno de estos valores anula al denominador ya que, como dijimos al principio, este nunca se anula, ambos están permitidos. Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{-6, 3\}$. «

Para resolver ecuaciones en GeoGebra se dispone del comando Resuelve, donde se coloca entre paréntesis la ecuación en la cual la incógnita siempre debe llamarse x. Otra opción es ingresar la ecuación tal como aparece en el campo de entradas, y aparecerá un botón que dice RESUELVE. La salida será una o más líneas verticales indicando el o los valores de la solución. Si la ecuación es polinómica se indicará también una lista con las soluciones.

Ejercicios 4.2

1. Resolver los problemas planteados en los Ejemplos 82 y 83, de la página 98.

2. Resolver los problemas planteados en los Ejercicios 1 a 5 de la Sección 4.1.

3–24. Resolver las ecuaciones. Recordar que se debe expresar la solución y realizar la verificación (analizar antes cuáles son los valores permitidos).

3. $2(x + 3) - 5(-2x + 1) = 2x - 19$

4. $\frac{x}{4} + 3 - 2x = -11$

5. $-2 = \sqrt[3]{y - 7}$

6. $\frac{3x-1}{2} + \frac{4-2x}{3} = x + 3$

*En la sección siguiente veremos una fórmula para resolver este tipo de ecuaciones.

7. $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{5-x} = 0$

8. $-2 + |t-3| = 6$

9. $|1+5x| = -9$

10. $\big||5-2x|-8\big| = 3$

11. $\left|\frac{x-3}{x+2}\right| = 2$

12. $\sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-4}$

13. $3^{2x-1} = 81$

14. $5^x \cdot 25^x = 125$

15. $\sqrt[2-x]{25^{\frac{2x+1}{2}}} = \frac{1}{5}$

16. $2^{3x} = (0.5)^{3x+2}$

17. $\sqrt[3x]{\sqrt[3]{\sqrt[3x]{9}}} = 3^{2x}$

18. $\log(x+1) + \log 5 = \log(x-3)$

19. $\log_3(2x-5)^4 = 8$

20. $\log_9(x+1) + \log_9 9(x+1) = 2$

21. $\log_x 81 - 2\log_x 3 = 2$

22. $\log_2 x + \log_2(x+6) = 4$

23. $\ln(x+8) = \ln x + \ln 8$

24. $\log\sqrt{8x+2} - \log\sqrt{x-4} = 1 - \log 2$

25. Factorizar para resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

(a) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = 0$

(b) $2x^5 + 2x^4 - 16x^3 - 24x^2 = 0$

(c) $x^6 - 25x^4 + x^2 = 25$

(d) $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 = x^3 + x - 2$

(e) $x^3 + 5x^2 + x = 3x^2 + 16x + 36$

26. Ingresar las ecuaciones polinómicas del ejercicio anterior en el campo de entradas de GeoGebra para comparar con los resultados obtenidos.

27. Cintia quiere ser cantante. Tiene un contrato discográfico que le paga una tarifa base de \$4000 pesos mensuales y \$120 por cada disco que vende. El mes pasado ganó un total de \$8440. Escribir una ecuación que determine el número de discos que vendió Cintia el último mes, y resolverla.

28. Al multiplicar un cierto número por 81, este aumenta en 154000 unidades. ¿Cuál es dicho número?

29. La suma de tres números impares consecutivos es igual a 99. Hallar la suma de los dos números mayores.

30. Hay 3400 personas en un estadio. Se observa que por cada 10 visitantes había 24 locales. ¿Cuántos locales asistieron?

31. La suma de las edades de 4 amigos es 46. José y Franco tienen la misma edad. Francisco supera en 3 años a la mitad de la edad de cada uno de ellos, mientras que Luciano tiene 4 años más que Francisco. Determinar la edad de cada uno.

4.3. Ecuaciones de segundo grado

En esta sección veremos cómo resolver una **ecuación de segundo grado** (también llamada **cuadrática**), la cual es una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$, y x es la incógnita. Es decir, es un polinomio de grado 2 igualado a cero. Aquí a es llamado **coeficiente cuadrático**, b el **coeficiente lineal** y c es el **término independiente**.

Notar que pedimos el coeficiente cuadrático a distinto de cero para que efectivamente sea un polinomio de grado 2, ya que si $a = 0$ entonces la ecuación es $bx + c = 0$, la cual deja de ser cuadrática. Si $b \neq 0$, la solución de esta ecuación lineal es $x = -\frac{c}{b}$.

Sin embargo, los coeficientes b o c pueden ser cero. Si esto ocurre, es decir, si al menos uno de ellos es cero, entonces la ecuación cuadrática es sencilla de resolver, aplicando las herramientas dadas en la sección anterior. Analizaremos estos casos en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 104. **Coeficiente lineal $b = 0$.** Supongamos que tenemos la ecuación

$$2x^2 - 8 = 0.$$

Esta ecuación se resuelve en forma directa con lo aprendido en la sección anterior, simplemente despejando x de la forma usual:

$$2x^2 - 8 = 0 \iff 2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

Luego, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{2, -2\}$. Notar que el mismo conjunto es solución de

$$-2x^2 + 8 = 0.$$

Sin embargo, veamos qué ocurre si la ecuación fuese

$$2x^2 + 8 = 0.$$

En este caso, con los mismos pasos anteriores obtenemos

$$x^2 = -4,$$

cuya solución no existe en los reales pues ningún número real elevado al cuadrado da como resultado un número negativo. Lo mismo ocurre si tenemos la ecuación

$$-2x^2 - 8 = 0.$$

«

El ejemplo anterior se escribe en forma general como sigue.

La ecuación cuadrática $ax^2 + c = 0$ tiene solución real si y solo si $a \cdot c \leq 0$ (es decir, o bien a y c tienen signos distintos, o bien $c = 0$), y en tal caso el conjunto solución es $S = \left\{\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$.

Ejemplo 105. **Término independiente $c = 0$.** Supongamos que tenemos la ecuación

$$5x^2 - 3x = 0.$$

Entonces podemos factorizar el miembro izquierdo, extrayendo a x como factor común:

$$x(5x - 3) = 0.$$

Por la propiedad del producto cero, sabemos que esto ocurre si y solo si

$$x = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 5x - 3 = 0.$$

Despejando x en la última igualdad obtenemos que el conjunto solución de la ecuación dada es $S = \left\{0, \frac{3}{5}\right\}$. «

En forma general, factorizando $ax^2 + bx = x(ax + b)$ tenemos que:

El conjunto solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx = 0$ es $S = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$. Si $b = 0$, el conjunto solución se reduce a $S = \{0\}$.

Entonces solamente resta ver cómo resolver ecuaciones de segundo grado en las que el polinomio involucrado es completo, es decir, con todos los coeficientes distintos de cero:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con a, b y c no nulos. Para resolverla, usaremos una técnica que se conoce como **completar cuadrados**, que consiste en sumar y restar una cantidad adecuada, de manera de hacer aparecer un trinomio cuadrado perfecto. Al sumar y restar una misma cantidad en uno de los miembros, no estamos alterando la ecuación, pues lo que agregamos en total es cero.

Recordemos que un **trinomio cuadrado perfecto** (abreviado **t.c.p.**) es un polinomio de tres términos que resulta de elevar al cuadrado un binomio (ver página 65). En particular, consideremos el que se obtiene de elevar al cuadrado el binomio $x + r$, para algún r real:

$$(x + r)^2 = x^2 + 2rx + r^2.$$

Queremos sumar (y luego restar) una cantidad adecuada, para que aparezca en la ecuación original algo que tenga la "forma" del trinomio anterior. Esta forma puede describirse como sigue: el término independiente (r^2) es el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal ($2r$), mientras que el coeficiente cuadrático es 1. Antes de hacerlo en forma general, veamos un ejemplo para aclarar esta frase.

Ejemplo 106. Completando cuadrados. Consideremos la ecuación

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

En este caso el coeficiente lineal es -6, su mitad es -3, y $(-3)^2 = 9$, que no coincide con el término independiente que es 5. El truco consiste en hacer aparecer dicho 9, pero, para no afectar el resultado de la ecuación, así como lo sumamos también lo restamos:

$$x^2 - 6x + 5 = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{\text{t.c.p.}} - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$(x - 3)^2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - 3)^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 3 = \pm 2,$$

lo que produce las opciones $x_1 = 2 + 3 = 5$ y $x_2 = -2 + 3 = 1$ (se utiliza la notación x_1 y x_2 para indicar dos valores diferentes para las soluciones). Es decir, el conjunto solución es $S = \{5, 1\}$. Puede verse fácilmente que estos dos valores satisfacen la ecuación original:

$$5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0 \qquad \text{y} \qquad 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0.$$ ✓ «

Notar que en el ejemplo anterior el signo del binomio viene dado por el signo del coeficiente lineal, es decir, el trinomio proviene de resolver $(x+r)^2$, siendo r la mitad del coeficiente lineal, que puede ser negativo o positivo.

Ejemplo 107. Resolver la ecuación cuadrática $2x^2 + 4x - 1 = 0$ utilizando el método de completar cuadrados.

Solución: A diferencia del ejemplo anterior, el coeficiente cuadrático no es 1. Entonces, el primer paso en este caso es extraer dicho coeficiente como factor común, para luego completar cuadrados en lo obtenido:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 1 = 2\left(x^2 + 2x - \tfrac{1}{2}\right) &= 2\Big(\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{t.c.p.}} - 1 - \tfrac{1}{2}\Big) \\ &= 2\left((x+1)^2 - \tfrac{3}{2}\right) = 2(x+1)^2 - 3. \end{aligned}$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$2(x+1)^2 - 3 = 0 \iff (x+1)^2 = \tfrac{3}{2} \iff x + 1 = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

lo que implica $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - 1$. «

Cuando el coeficiente cuadrático no es igual a 1, este debe extraerse como factor común. En el ejemplo anterior lo tomamos como factor común de los tres términos, pero también podríamos haberlo tomado solamente de los dos que poseen x:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 1 &= 2\left(x^2 + 2x\right) - 1 \\ &= 2\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) - 1 \\ &= 2\left(x^2 + 2x + 1\right) - 2 - 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 3. \end{aligned}$$

Hacerlo de esta manera evitó incluir fracciones innecesarias. La única precaución que debemos tener es que cuando llevamos el $-r^2$ fuera del paréntesis (en este caso es -1), no hay que olvidar que está multiplicado por el factor común (que en este caso es 2).

No toda ecuación cuadrática tiene siempre dos soluciones reales. Como puede verse en los siguientes ejemplos, puede ocurrir también que tenga una única solución, o incluso que no tenga ninguna.

Ejemplo 108. **Una ecuación cuadrática con solución única.** Completar cuadrados para resolver la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Solución: En este caso el coeficiente lineal es -2, su mitad es -1 y $(-1)^2 = 1$, lo cual coincide con el término independiente. Esto significa que el polinomio del miembro izquierdo ya es un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$(x-1)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-1| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$$

Puede verificarse que reemplazando x por 1 en el miembro izquierdo de la ecuación original se obtiene cero como resultado, por lo que $S = \{1\}$. «

Ejemplo 109. **Una ecuación cuadrática sin solución.** Resolver la ecuación cua-drática $x^2 - 2x + 3 = 0$ utilizando el método de completar cuadrados.

Solución: Aquí, al igual que en el ejemplo anterior, el coeficiente lineal es -2, y el cuadrado de su mitad es 1, lo cual no coincide con su término independiente 3. Entonces, al sumar y restar 1 se obtiene

$$x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + 3 = (x-1)^2 + 2.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$(x-1)^2 + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 = -2.$$

La última ecuación no tiene solución, ya que ningún número real elevado al cuadrado puede dar como resultado un número negativo. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. «

Siguiendo las mismas ideas de los ejemplos anteriores, consideremos ahora el caso general

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con a no nulo. Completemos cuadrados:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right) = a\Big(\underbrace{x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2}_{\text{t.c.p.}} - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a}\Big)$$

$$= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \tfrac{b^2}{4a} = a(x-h)^2 + k,$$

con $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = c - \frac{b^2}{4a}$ (esta forma de expresar un polinomio cuadrático se retomará en el Capítulo 5). Luego, la ecuación original se transforma en

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros (recordar la propiedad (2.3.3)) y resolviendo, obtenemos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La fórmula anterior se llama **resolvente** y se aplica para hallar, si existen, las soluciones reales de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Si el radicando que aparece en la fórmula es negativo, entonces la ecuación no tendrá soluciones reales. Si es cero, tendrá una única solución (llamada **solución doble**), y si es positivo entonces la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas x_1 y x_2 dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El radicando se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática y se denota como

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Como mencionamos, será suficiente con calcular el valor del discriminante para saber la cantidad de soluciones de una ecuación cuadrática:

- $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas;
- $\Delta = 0$: una solución (llamada doble);
- $\Delta < 0$: sin soluciones reales.

Lo anterior justifica el "criterio de parada" para la factorización de polinomios cuadráticos, enunciado en la página 84.

Ejemplo 110. Aplicando la resolvente. Hallar las soluciones de la ecuación

$$2x^2 + 4x - 6 = 0.$$

Solución: Debemos resolver una ecuación cuadrática en la que $a = 2$, $b = 4$ y $c = -6$. Aplicando la resolvente con estos valores tenemos

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4},$$

de lo que se obtiene $x_1 = \frac{-4+8}{4} = 1$ y $x_2 = \frac{-4-8}{4} = -3$. Luego, $S = \{1, -3\}$. «

Ejemplo 111. Resolver la ecuación $\log_7(2x) - \log_7(x^2 - 8) = 0$.

Solución: Los valores permitidos para x son aquellos tales que

$$2x > 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 8 > 0,$$

ya que el logaritmo de números negativos no está definido.

Para resolver la ecuación, comenzamos aplicando la propiedad de la resta de dos logaritmos con igual base para transformar la ecuación en

$$\log_7\left(\frac{2x}{x^2-8}\right) = 0.$$

Por definición de logaritmo, esto es equivalente a

$$7^0 = \frac{2x}{x^2-8},$$

con lo que eliminamos el logaritmo, y ahora debemos resolver esta última ecuación:

$$1 = \frac{2x}{x^2-8} \iff x^2 - 8 = 2x \iff x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Resolvemos ahora esta ecuación cuadrática usando la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2},$$

lo que lleva a $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$. Sin embargo, $x = -2$ no formará parte del conjunto solución, ya que no satisface las desigualdades que definen a los valores permitidos (en este caso no satisface ninguna de las dos, pero no satisfacer alguna de ellas es suficiente para descartar dicho valor). Para verificar que $x = 4$ es solución de la ecuación original, reemplazamos para obtener:

$$x = 4: \quad \log_7(2 \cdot 4) - \log_7(4^2 - 8) = \log_7(8) - \log_7(8) = 0. \quad ✓$$

Luego, la única solución es $x = 4$, es decir, $S = \{4\}$. «

El siguiente ejemplo muestra que a veces algunas soluciones de la ecuación deben ser descartadas como soluciones de un problema concreto. Esto se debe a que, si bien la ecuación modela el problema, por el contexto del mismo algunos valores no son permitidos.

Ejemplo 112. Soluciones descartadas debido al contexto.

Hallar la longitud de la base de un triángulo que tiene un área de 24 cm^2, y cuya altura mide 2 cm más que la base correspondiente.

Solución: Llamemos x a la longitud de la base (en centímetros). Entonces la altura mide $x + 2$ cm. Sabemos que

$$24 = \text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{x(x+2)}{2}.$$

Es decir $48 = x(x + 2)$, o equivalentemente,

$$0 = x^2 + 2x - 48.$$

Aplicando la resolvente se obtienen dos soluciones para esta ecuación: $x_1 = 6$ y $x_2 = -8$. Sin embargo, como x representa una longitud, la solución negativa queda descartada. Entonces la única solución posible para el problema es que la longitud de la base sea 6 cm. «

Ejemplo 113. **Usando el discriminante.** Utilizar el discriminante para determinar la cantidad de soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

(**a**) $4x^2 + 2x + 3 = 0$, (**b**) $-x^2 - x + 12 = 0$, (**c**) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Solución: Calculemos el discriminante de cada ecuación:

(**a**) $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -44$,

(**b**) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49$,

(**c**) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$.

De esto podemos concluir que la ecuación (**a**) no tiene soluciones reales, la (**b**) tiene dos soluciones reales distintas, mientras que la (**c**) tiene solución única. «

Si bien la resolvente es una fórmula muy útil para hallar soluciones de una ecuación cuadrática, manejar el procedimiento de completar cuadrados resultará fundamental para conocer la apariencia de las funciones cuadráticas, que serán estudiadas en el capítulo siguiente.

Recordemos que el teorema del resto afirma que si r es un número real y p es un polinomio de grado al menos 1, entonces el resto de dividir p por $(x - r)$ es $p(r)$, es decir, el resto es el valor que se obtiene al hallar el valor numérico de p en r. Como consecuencia directa de esto, el teorema del factor afirma que el binomio $(x - r)$ es factor del polinomio p si y solo si $p(r) = 0$. Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio de grado 2, y sean x_1 y x_2 dos soluciones reales (distintas o iguales) de la ecuación $p(x) = 0$ obtenidas mediante la resolvente. Es decir que

$$p(x_1) = 0 \qquad \text{y} \qquad p(x_2) = 0,$$

o equivalentemente, x_1 y x_2 son raíces de p (esto significa que estamos en el caso $\Delta \geq 0$). Luego, tanto $(x - x_1)$ como $(x - x_2)$ son factores de p. Más precisamente, se tiene que p se factoriza como:

$$\boxed{p(x) = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

Ejemplo 114. Factorizando un polinomio cuadrático. Utilizar la resolvente para factorizar los polinomios

$$p(x) = x^2 + x - 6 \qquad \text{y} \qquad q(x) = 2x^2 - 20 - 6x.$$

Una vez obtenida la factorización, verificar que es correcta resolviendo el producto para recuperar los polinomios dados.

Solución: Comencemos aplicando la resolvente para hallar las soluciones de $p(x) = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

de lo que se infiere $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$. Entonces, podemos factorizar p como

$$p(x) = (x - 2)(x + 3).$$

Para verificar, hacemos la distributiva y operamos:

$$(x - 2)(x + 3) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6 = p(x). \quad ✓$$

Con respecto a q, tenemos

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-20)}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm 14}{4},$$

lo que implica $x_1 = 5$ y $x_2 = -2$. Por lo tanto q se factoriza como

$$q(x) = 2(x - 5)(x + 2).$$

Realicemos la verificación:

$$2(x-5)(x+2) = 2(x^2+2x-5x-10) = 2(x^2-3x-10) = 2x^2-6x-20 = q(x), \; ✓$$

por lo que la factorización obtenida es correcta. «

⚠ Un error frecuente es olvidar el número a en la factorización anterior, y escribir

$$q(x) = (x - 5)(x + 2). \qquad ✗$$

Ejercicios 4.3

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 + 2 = 38$

(b) $x^2 + 4 = 0$

(c) $2x^2 - 4x = 0$

(d) $\frac{x^2-x}{x^2+1} = 0$

(e) $\frac{x^2-x}{x-1} = 0$

2. Hallar el valor de c tal que $x^2 - 8x + c$ es un trinomio cuadrado perfecto.

3. Completar cuadrados para llevar cada polinomio a la forma $a(x - h)^2 + k$. Verificar.

(a) $x^2 + 5 - 2x$

(b) $x^2 + 4x + 1$

(c) $-2x^2 - x + 1$

4. Completar cuadrados para resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 + x - 6 = 0$

(b) $2x^2 + 8x + 8 = 0$

(c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

(d) $x^2 - 4 - 3x = 0$

5. Hallar, si es posible, las soluciones de las siguientes ecuaciones aplicando la resolvente:

(a) $2x^2 + 50 + 20x = 0$

(b) $x^2 + 3x - 4 = 0$

(c) $x^2 + 6x + 13 = 0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x(3x - 2) = x^2 - 5x$

(b) $4 - 3x - x^2 = (3x - 2)^2 - 1$

(c) $\frac{x^2+2x-3}{3x+2} = 0$

(d) $\frac{x^2+2x-3}{x-1} = 0$

(e) $\sqrt{2x-1} = x - 2$. *Advertencia:* recordar que al elevar al cuadrado se pueden introducir soluciones ficticias.

(f) $3\sqrt{2x-1} = 3x$

(g) $\sqrt{x^2+6x} = x + \sqrt{2x}$. *Sugerencia:* elevar al cuadrado dos veces para eliminar por completo las raíces y luego factorizar para aplicar la propiedad del producto cero.

(h) $3\log_2(x) - \log_2(x+1) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$

7. Usar el discriminante para determinar cantidad de soluciones de las siguientes ecuaciones:

(a) $2x^2 - 2x - 24 = 0$

(b) $-x^2 - 5 + 2x = 0$

(c) $-x^2 - 4x - 4 = 0$

8. Determinar el valor de a de modo que la ecuación $ax^2 - 24x + 9 = 0$ tenga una raíz doble.

9. Utilizar la resolvente para factorizar los polinomios dados a continuación:

(a) $p(x) = x^2 + 6x + 8$

(b) $q(x) = 3x^2 + 3x - 6$

(c) $r(x) = x^2 + 2x - 63$

10. La altura de un triángulo es 2 cm menor que la longitud de la base, y su área es de 684 cm^2. ¿Cuáles son las medidas de la base y de la altura de dicho triángulo?

11. Encontrar un número natural tal que dos veces su cuadrado exceda al propio número en 120.

12. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 113. Encontrar dichos números.

13. La suma de los cuadrados de dos números naturales *pares* consecutivos es 100. Encontrar dichos números.

14. Encontrar dos números naturales *impares* consecutivos tales que su producto sea igual a 195.

15. Un joven empleado, interrogado acerca de su edad respondió: “El doble del cuadrado de la edad que tendré dentro de cuatro años, menos el triple del cuadrado de la edad que tenía hace dos años, es el doble de la edad que tendré dentro de 54 años”. Determinar la edad del joven empleado al momento de responder la pregunta.

4.4. Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Resolver un sistema significa hallar todas las **soluciones** del sistema, es decir, todos los valores posibles para las incógnitas que hacen verdadera cada una de las ecuaciones.

En particular, veremos métodos para resolver un sistema de **dos ecuaciones lineales con dos incógnitas***, el cual es uno de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{cases}$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son números reales, y las incógnitas son x e y. La llave se usa para enfatizar que se quiere que ambas ecuaciones se cumplan a la vez, es decir, una solución al sistema son valores para x e y que hacen válidas a ambas igualdades simultáneamente.

Ejemplo 115. **Comprobando si es solución de un sistema.** Podemos comprobar que $x = 3$ e $y = 1$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} 2x - y &= 5 \\ 3x + 2y &= 11, \end{cases}$$

pues

$$2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5, \quad ✔$$

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 9 + 2 = 11. \quad ✔$$

La solución en el ejemplo anterior también se puede escribir como par ordenado $(3, 1)$, como veremos en el Capítulo 5 cuando presentemos una interpretación gráfica de este tipo de sistemas y de sus soluciones. Allí encontraremos también una explicación para el siguiente hecho.

Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ocurre exactamente una de las siguientes opciones:

- **Tiene una solución única.**
- **Tiene infinitas soluciones.**
- **No tiene solución.**

*Una **ecuación de primer grado** o **ecuación lineal** es una igualdad que involucra una o más incógnitas con exponente igual a 1, y no contiene productos entre ellas, es decir, una ecuación que contiene solamente sumas y restas de múltiplos constantes de una variable a la primera potencia.

Estas tres opciones son las únicas posibilidades para las soluciones de un sistema de este tipo: una, ninguna o infinitas.

Los sistemas reciben un nombre de acuerdo a la cantidad de soluciones que posean: **compatible determinado** (solución única), **compatible indeterminado** (infinitas soluciones), o **incompatible** (sin soluciones).

La resolución analítica de este tipo de sistemas es bastante sencilla, pues consiste esencialmente en transformar el sistema en una ecuación lineal de una sola incógnita, resolverla y hallar con la solución obtenida el valor de la incógnita restante. Para ello, veremos dos métodos que describiremos a continuación.

▶ **Método de sustitución.** Como su nombre lo indica, este método consiste en despejar una de las incógnitas de alguna de las dos ecuaciones, y sustituir lo obtenido en la restante.

Para ilustrar el procedimiento, resolvamos algunos sistemas mediante este método.

Ejemplo 116. **Resolviendo por sustitución: solución única.** Resolver mediante sustitución el siguiente sistema, y luego clasificarlo según la cantidad de soluciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y &= -10 \\ x - 5y &= 2. \end{cases}$$

Solución: Observando el sistema, lo más simple es despejar x de la segunda ecuación para obtener

$$x = 2 + 5y. \quad (*)$$

Ahora sustituimos esta expresión donde aparece x en la primera ecuación y resolvemos:

$$2(2+5y) + 4y = -10 \iff 4 + 10y + 4y = -10 \iff 14y = -14 \iff y = -1.$$

Ya tenemos el valor para y, por lo que reemplazando en $(*)$ obtenemos

$$x = 2 + 5(-1) = -3.$$

Para verificar, podemos reemplazar estos dos valores en ambas ecuaciones y ver que las igualdades se cumplen. Por lo tanto la solución al sistema es $x = -3$, $y = -1$, y el sistema es compatible determinado (tiene solución única). «

Ejemplo 117. **Resolviendo por sustitución: infinitas soluciones.** Utilizar el método de sustitución para resolver y clasificar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 1 \\ -4x + 6y &= -2. \end{cases}$$

Solución: Si despejamos x en la primera ecuación nos queda

$$x = \frac{1+3y}{2}. \qquad (\diamond)$$

Ahora sustituimos esta expresión donde aparece x en la segunda ecuación:

$$-4\left(\frac{1+3y}{2}\right) + 6y = -2.$$

Para resolver lo anterior, aplicamos la propiedad distributiva y obtenemos

$$-2 - 6y + 6y = -2,$$

lo que equivale a $-2 = -2$. Puesto que esta igualdad es siempre cierta, independientemente del valor de y, cualquier número real es solución de ella. Para un valor fijo de y se obtiene el correspondiente valor de x que hace verdaderas las dos ecuaciones mediante $(\diamond)$. Para aclarar esto, realicemos la verificación: sea y un número real cualquiera, y sea

$$x = \frac{1+3y}{2}.$$

Veamos que estos valores satisfacen ambas ecuaciones del sistema dado:

$$2x - 3y = 2\underbrace{\left(\frac{1+3y}{2}\right)}_{x} - 3y = 1 + 3y - 3y = 1, \quad \checkmark$$

$$-4x + 6y = -4\underbrace{\left(\frac{1+3y}{2}\right)}_{x} + 6y = -2 - 6y + 6y = -2. \quad \checkmark$$

Así, para cada número real y dado se obtiene un correspondiente valor de x, de manera que ambas igualdades se cumplen. Por ejemplo, cuando $y = 1$ el valor de x es $\frac{1+3\cdot 1}{2} = 2$, o cuando $y = 0$ entonces $x = \frac{1+3\cdot 0}{2} = \frac{1}{2}$. Luego la ecuación tiene infinitas soluciones, por lo que el sistema es compatible indeterminado. «

Ejemplo 118. Resolviendo por sustitución: sin solución. Resolver mediante sustitución el siguiente sistema, y luego clasificarlo:

$$\begin{cases} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 2. \end{cases}$$

Solución: Si despejamos y en la primera ecuación nos queda

$$y = 3 - x.$$

Ahora sustituimos esta expresión donde aparece y en la segunda ecuación:

$$2x + 2(3 - x) = 2.$$

Para resolver lo anterior, aplicamos la propiedad distributiva y obtenemos

$$2x + 6 - 2x = 2,$$

lo que equivale a $6 = 2$. Puesto que esta igualdad es falsa independientemente del valor de x, la ecuación no tiene solución, y por lo tanto tampoco la tendrá el sistema. En este caso, es un sistema incompatible. «

Veamos ahora otra forma de resolver este tipo de sistemas.

▶ **Método de igualación.** Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones, y después igualar (como lo indica el nombre) las dos expresiones obtenidas. De esta forma se obtiene una ecuación con una sola incógnita, la cual podemos resolver para luego obtener el valor de la otra.

Resolvamos algunos sistemas mediante este método para ilustrarlo.

Ejemplo 119. **Resolviendo por igualación: solución única.** Utilizar el método de igualación para resolver y clasificar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y & = & -6 \\ -x + 5y & = & 13. \end{cases}$$

Solución: Por el aspecto de ambas ecuaciones, parece conveniente despejar x de ambas para obtener

$$\begin{cases} x & = & \frac{-6+4y}{3} \\ x & = & 5y - 13. \end{cases}$$

Igualamos entonces las dos expresiones obtenidas para x, y luego resolvemos:

$$\begin{aligned} \frac{-6+4y}{3} = 5y - 13 &\iff -6 + 4y = 3(5y - 13) \\ &\iff -6 + 4y = 15y - 39 \\ &\iff 33 = 11y \\ &\iff y = 3. \end{aligned}$$

Teniendo el valor para y, podemos obtener el de x reemplazando en cualquiera de las dos expresiones para ella en función de y:

$$x = 5 \cdot 3 - 13 = 15 - 13 = 2.$$

Por lo tanto, luego de realizar la verificación, se concluye que la solución al sistema es $x = 2$ e $y = 3$, por lo que el mismo es compatible determinado. «

Ejemplo 120. Resolviendo por igualación: infinitas soluciones. Resolver por igualación y clasificar:

$$\begin{cases} 3x - 6y &= 12 \\ 4x - 8y &= 16. \end{cases}$$

Solución: Parece indistinto despejar cualquiera de las dos incógnitas, por lo que elegiremos despejar x en ambas para obtener, luego de simplificar, el sistema

$$\begin{cases} x &= 4 + 2y \\ x &= 4 + 2y. \end{cases}$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para x nos queda

$$4 + 2y = 4 + 2y,$$

lo cual es cierto para cualquier valor de y, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones de la forma $x = 4 + 2y$, siendo y cualquier número real. Realicemos la verificación: sea y un número real fijo, y sea $x = 4 + 2y$. Veamos que estos valores satisfacen ambas ecuaciones del sistema dado:

$$3x - 6y = 3\underbrace{(4 + 2y)}_{x} - 6y = 12 + 6y - 6y = 12, \quad ✓$$

$$4x - 8y = 4\underbrace{(4 + 2y)}_{x} - 8y = 16 + 8y - 8y = 16. \quad ✓$$

Así, para cada número real y dado se obtiene un correspondiente valor de x, de manera que ambas igualdades se cumplen. Por ejemplo, cuando $y = 1$ el valor de x es $4 + 2 \cdot 1 = 6$, o cuando $y = 2$ entonces $x = 4 + 2 \cdot 2 = 8$. El sistema resulta entonces compatible indeterminado. «

Ejemplo 121. Resolviendo por igualación: sin solución. Resolver mediante el método de igualación el siguiente sistema y clasificarlo:

$$\begin{cases} -4x + 2y &= 6 \\ -2x + y &= 5. \end{cases}$$

Solución: Despejando y en ambas ecuaciones tenemos, luego de simplificar,

$$\begin{cases} y &= 3 + 2x \\ y &= 5 + 2x. \end{cases}$$

Ahora igualamos:

$$3 + 2x = 5 + 2x,$$

lo que equivale a $3 = 5$. Puesto que esta igualdad es falsa independientemente del valor de x, la ecuación no tiene solución, y por lo tanto tampoco la tendrá el sistema. En este caso, es un sistema incompatible. «

Tanto el método de sustitución como el de igualación presentan la misma eficacia y sencillez, por lo que si no se indica nada, se puede elegir cualquiera de ellos para resolver un sistema dado.

Aplicaremos lo aprendido sobre sistemas para resolver problemas concretos, como el siguiente.

Ejemplo 122. Las edades de Camila y de su mamá suman 54 años, y dentro de 9 años la edad de la mamá será el doble de la edad de Camila. ¿Cuántos años tiene cada una ahora?

Solución: Llamemos x a la edad de Camila ahora, e y a la edad actual de su mamá. Entonces, las respectivas edades dentro de 9 años serán $x + 9$ e $y + 9$. Los datos del problema nos dicen que

$$\begin{cases} x + y = 54 & \text{(pues las dos edades suman 54 años)} \\ 2(x + 9) = y + 9 & \text{(lo que ocurrirá en 9 años).} \end{cases}$$

Resolveremos este sistema por sustitución, despejando x de la primera ecuación:

$$x = 54 - y, \quad (\dagger)$$

y reemplazando en la segunda:

$$\begin{aligned} 2(54 - y + 9) = y + 9 &\iff 2(63 - y) = y + 9 \\ &\iff 126 - 2y = y + 9 \\ &\iff 117 = 3y \\ &\iff 39 = y. \end{aligned}$$

Esto significa que, luego de verificar, la edad de la mamá de Camila es 39 años, y de $(\dagger)$ tenemos que la edad de Camila es $x = 54 - 39 = 15$ años. «

Como mencionamos, retomaremos los sistemas presentados en esta sección en el Capítulo 5, para interpretarlos desde el punto de vista gráfico, y resolverlos también mediante GeoGebra.

Ejercicios 4.4

1. Resolver los sistemas planteados en los Ejemplos 84 y 85 de la página 98.

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por sustitución y clasificar cada uno según sus soluciones:

(a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 8x - 2y = 5 \\ -12x + 3y = 7 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por igualación y clasificar cada uno según sus soluciones:

(a) $\begin{cases} 2x+y &= 1 \\ 3x+4y &= 14 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-2y &= 6 \\ -\frac{1}{2}x+y &= -3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x+y &= 7 \\ x+2y &= 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x-y &= 2 \\ 2x-2y &= 5 \end{cases}$

4. Encontrar dos números tales que su suma sea 40 y su diferencia sea 14.

5. Carolina tiene hoy el triple de edad que su hijo José. Dentro de 15 años, la edad de Carolina será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que José tiene su madre hoy?

6. Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 20 cm, sabiendo que el lado menor excede en 1 cm a la mitad del lado mayor.

7. Un puesto de frutas vende dos variedades de frutillas: pequeñas y grandes. Una caja de frutillas pequeñas se vende en \$50, y una de frutillas grandes se vende a \$70. En un día, el puesto vende 61 cajas de frutillas por un total de \$3810. ¿Cuántas cajas de cada tipo se vendieron?

8. Las edades de Franco y Clara suman 16 años, y dentro de 12 años, la edad de Clara superará en 4 años a la mitad de la edad de Franco. Determinar las edades que tienen hoy Franco y Clara.

9. El costo de las entradas a un teatro es de \$80 para los adultos y \$50 para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron \$15250, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a la función el sábado?

10. En un estacionamiento hay 59 vehículos entre autos y motos. Si el total de ruedas es de 202, ¿cuántos autos y cuántas motos hay?

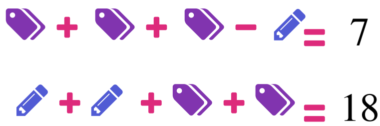
11. Una empresa que fabrica valijas recibe un pedido para un día determinado. Al planificar la producción determinan que si fabrican 250 valijas al día, faltarían 150 al concluir el plazo que tienen. Si fabrican 260 valijas diarias entonces les sobrarían 80. ¿Cuántos días tienen de plazo y cuántas valijas les encargaron?

12. La contraseña de wifi de una escuela posee 6 dígitos. Cuando un alumno la solicita, se le entrega la siguiente instrucción: las 3 primeras cifras corresponden a un número x, y las 3 últimas a un número y, los cuales satisfacen que $y-2x=169$ y $3x-y=18$. ¿Cuál es la contraseña?

13. Melina compró una remera y gastó 185 pesos. La pagó entregando el importe justo, con 10 billetes de dos tipos: de 5 pesos y de 50 pesos. ¿Cuántos billetes de cada clase entregó?

14. En una cafetería se usan dos marcas de café, una de 6 pesos el kilo y otra de 8.50 pesos el kilo. El encargado quiere preparar una mezcla de las dos clases cuyo precio sea 7 pesos el kilo. ¿Cuántos gramos debe poner por kilo de cada marca?

15. Expresar lo siguiente como un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas y resolverlo:



Luego, utilizar lo obtenido para hallar el valor de:

(a) 

(b) 

4.5. Inecuaciones

Una **desigualdad** es una expresión que contiene alguno de los siguientes símbolos de orden:

$<$ (menor), $>$ (mayor), $\leq$ (menor o igual), $\geq$ (mayor o igual).

Las desigualdades que contienen alguno de los dos primeros símbolos se llaman **estrictas**, mientras que las que contienen alguno de los dos últimos se denominan **no estrictas**.

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones conteniendo uno o más valores desconocidos.

Las expresiones que aparecen a ambos lados de los símbolos de la desigualdad se llaman **miembros**.

Las siguientes desigualdades son ejemplos de inecuaciones:

$$x^2 - 2 \geq 5x + 1, \qquad 3x + 2|x-1| > 0,$$

$$x^4 - 3 < x^3 + 2x, \qquad \frac{(x-2)(x+3)}{x^2+6} \leq 0.$$

Ecuaciones

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 34 = -20$ b) $9x + 8 = 7x + 6$ c) $4x + 3 = 3x + 5$
d) $7x + 9 = 3 + 9x$ e) $x - 8 = 2x - 11$ f) $x + 1 = 2x - 7$
g) $6x + 6 = 4 + 8x$ h) $9 + 9x = 17 + 5x$ i) $2x + 3 = 3x$
j) $25 - 2x = 3x + 20$ k) $4x + 1 = 3x + 3$ l) $5x - 3 = 10x - 6$
m) $1 + 8x = 31 - 16x$ n) $5x - 11 = 15x - 19$ ñ) $48 - 18x = 9x + 30$
o) $2x + 17 = 3x + 7$ p) $10 - 5x = x - 2$ q) $70 - 3x = 4x$
r) $48 - 3x = 5x$ s) $30 - 4x = -3x - 10$ t) $10x - 15 = 4x + 27$
u) $3x + 1 = 6x - 8$ v) $47 - 3x = 5 + 11x$ w) $30 - 9x = 21 - 7x$
x) $3x - 10 = 2x + 1$ y) $25 - 2x = 3x - 35$ z) $75 - 5x = 3x + 3$
A) $5 + 8x = 2x + 20$ B) $2x - 3 = x + 5$ γ) $2 - 6x = 3x - 1$

Sol: a) 7; **b)** -1; **c)** 2; **d)** 3; **e)** 3; **f)** 8; **g)** 1; **h)** 2; **i)** 3; **j)** 1; **k)** 2; **l)** 3/5; **m)** 5/4; **n)** 4/5; **ñ)** 2/3; **o)** 10; **p)** 2; **q)** 10; **r)** 6; **s)** 40; **t)** 7; **u)** 3; **v)** 3; **w)** 9/2; **x)** 11; **y)** 12; **z)** 9; **α)** 5/2; **β)** 8; **γ)** 1/3

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis y corchetes:

a) $x - 3(x - 2) = 6x - 2$ b) $3x - 7 = 2(x + 1)$ c) $2(2 + 4x) = 3 + 12x$
d) $5x = 7(5x - 3) + 3$ e) $2(x - 5) = 3x - 17$ f) $2 + 5(x - 13) = x - 3$
g) $2x - 1 = 3(2x - 15)$ h) $2(x - 2) = -(4 - x)$ i) $2(3x - 49) = -x + 14$
j) $20 = 2x - (10 - 4x)$ k) $60x - 1 = 3(1 + 12x)$ l) $5(x - 1) + 10(x + 2) = 45$
m) $2x + 3(2x - 1) = x + 67$ n) $12x + 3(2x - 4) = 60$ ñ) $3x - (x + 1) = x - 2$
o) $x - 3(x + 5) = 3x + 10$ p) $(x - 15) = 3(x - 19)$ q) $3(2 - x) = 18x - 1$
r) $3(x + 4) = 4x + 1$ s) $10 + 5(x - 3) = 3(x + 1)$ t) $2(3 - 4x) = 2x - 9$
u) $10 - 9x = 4[x - 4]$ v) $15x = 2[1 + 9x] - 3$ w) $3[10 - x] = 2[8 - x] + 13x$
x) $x + 3 = 3[2x - 4]$ y) $3[2x - (3x + 1)] = x + 1$ z) $6x + 4 = 4[2x - 5(x - 2)]$

Sol: a) 1; **b)** 9; **c)** ¼; **d)** 3/5; **e)** 7; **f)** 15; **g)** 11; **h)** 0; **i)** 16; **j)** 5; **k)** 1/6; **l)** 2; **m)** 10; **n)** 4; **ñ)** -1; **o)** -5; **p)** 21; **q)** 1/3; **r)** 11; **s)** 4; **t)** 3/2; **u)** 2; **v)** 1/3; **w)** 1; **x)** 3; **y)** -1; **z)** 2.

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $\frac{3x}{2} + 2 = x + 4$ b) $x - 8 = \frac{x}{2} - \frac{x-6}{3}$ c) $x - \frac{3x}{4} = \frac{x}{7} + 3$
d) $2\left(\frac{x+5}{3}\right) = x + 3$ e) $\frac{9x}{4} - 6 = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$ f) $\frac{5x}{6} - \frac{3x}{4} = x - 11$
g) $\frac{3x}{5} - 7 = \frac{2x}{6} + 1$ h) $x - 10 = \frac{5}{9}(x - 6)$ i) $\frac{x}{3} + x = 10 + \frac{2x}{9}$
j) $\frac{3x}{2} + 1 = 12 - \frac{x}{3}$ k) $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = x - 3$ l) $4x - 7 = \frac{5x-6}{4}$
m) $\frac{x+2}{3} = 5x - 4$ n) $\frac{2x-10}{3x-20} = \frac{7}{8}$ ñ) $\frac{x}{4} + \frac{3x}{6} + x = 21$
o) $\frac{x}{4} - \frac{13}{6} = \frac{5x}{2} - \frac{5}{6}$ p) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 94$ q) $\frac{x}{3} + 10 = \frac{x}{5} + 16$
r) $\frac{x-7}{x+3} = \frac{10}{x+3} - 3$ s) $3x - 9 + \frac{x}{5} = 2x - 3$ t) $\frac{x}{4} + 5 = \frac{2x}{5} - 2 - \frac{x}{30}$
u) $\frac{3}{x-1} = \frac{x}{x-1} - 1$ v) $\frac{5x}{8} - 5(x - 20) = \frac{18-2x}{6}$ w) $x + \frac{x+1}{5} = x + \frac{x}{2}$

Sol: a) 4; **b)** 12; **c)** 28; **d)** 1; **e)** 4; **f)** 12; **g)** 30; **h)** 15; **i)** 9; **j)** 6; **k)** 10; **l)** 2; **m)** 1; **n)** 12; **ñ)** 12; **o)** -16/27; **p)** 120; **q)** 45; **r)** 2; **s)** 5; **t)** 60; **u)** 2; **v)** 24; **w)** 2/3

4.- Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $3x-\frac{7-x}{8}=2x-1+\frac{x-3}{4}$ b) $8-\frac{3x}{10}+\frac{2x}{4}-\frac{5x}{8}=-9$ c) $\frac{x+1}{2}+\frac{3+x}{6}=1+\frac{x}{3}$

d) $\frac{3x}{5}-2+\frac{3x}{2}-\frac{x}{10}=0$ e) $\frac{10}{x+5}+\frac{3+4x}{x+5}=3$ f) $\frac{x+2}{x-1}-\frac{x+3}{x+1}=\frac{2x+2}{x^2-1}$

g) $\frac{7x-3}{6}-\frac{3x-1}{4}=\frac{5x-1}{4}$ h) $\frac{4x-3}{6}-\frac{3x-1}{4}=\frac{4x-2}{3}-1$ i) $\frac{2x}{5}-2-\frac{x}{3}=\frac{x}{10}-3$

j) $\frac{15}{x+10}-\frac{5}{x+2}=0$ k) $\frac{2x+1}{4}-\frac{3x}{9}-2=\frac{3x-2}{4}$ l) $\frac{15}{x-2}-\frac{12x+6}{x^2-4}=\frac{18}{x+2}$

m) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}$ n) $\frac{x}{2a}-2=\frac{1+x}{2}$ ñ) $\frac{x^2-2x+1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{3}{2x}$

o) $\frac{x}{3}+\frac{x-5}{2}-\frac{x}{4}=\frac{5x-2}{2}$ p) $\frac{x+1}{2}+\frac{5+x}{6}=1+\frac{9-2x}{3}$ q) $\frac{x}{3}+x=\frac{2x}{6}-2(3-x)$

r) $\dfrac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2$ s) $\dfrac{\frac{3x}{5}-12}{x+1}=6$ t) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{6}-x=2-x$

u) $\frac{x}{2}-\frac{x-3}{3}-x=-1-2\frac{x}{3}$ v) $\frac{2x-3}{5}-\frac{x}{2}+x=x-\frac{x}{4}$ w) $\frac{6x-3}{3}-\frac{4x-3}{5}=2x-2$

x) $\frac{x-1}{2}+x=\frac{2x+3}{3}+1$ y) $2x-\frac{x-3}{2}=x+\frac{4+x}{3}$ z) $\frac{2x-5}{5}-\frac{x}{2}+2=x+\frac{x+4}{4}$

Sol: a) -1; **b)** 40; **c)** 0; **d)** 1; **e)** 2; **f)** 3; **g)** 0; **h)** 1; **i)** 30; **j)** 2; **k)** -15/7; **l)** 4; **m)** ½; **n)** 5·a/(1-a); **ñ)** -5; **o)** -18/23; **p)** 2; **q)** 6; **r)** 3; **s)** 5; **t)** 6; **u)** 12; **v)** 4; **w)** 2; **x)** 3; **y)** -1; **z)** 0.

5.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x+4}-\frac{3}{x^2+3x-4}=\frac{5}{x-1}$ b) $x-\frac{x}{2}+3x=\frac{3x}{2}+\frac{5+x}{3}+x+1$

c) $\frac{x-3}{3}-\frac{3(x-2)}{2}=\frac{x-3-(x+2)}{2}$ d) $\frac{x-3}{5}-\frac{x-3}{2}=\frac{x-3}{3}-\frac{x+3}{2}$

e) $x(x-2)-\frac{x+2}{3}-\frac{x-2}{2}=(x-2)^2-4$ f) $\frac{x-3}{2}+x=\frac{2x-13}{3}+2+x$

g) $x(x-2)-\frac{x+2}{3}-\frac{x-2}{2}=(x-2)^2-4x$ h) $x-\frac{x+2}{3}+3(x-3)=2+\frac{2x+1}{3}$

i) $\frac{3(x+1)}{4}-\frac{x+3}{6}+x=2x+\frac{3-7x}{12}$ j) $\frac{2}{x+1}+\frac{3x-3}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}+\frac{7}{x+1}$

k) $\frac{x-3}{5}-\frac{4x+3}{5}=2x+4$ l) $\frac{20}{x+1}+\frac{5x-5}{x^2-1}=\frac{52}{x-1}-\frac{40}{x+1}$

Sol: a) 0; **b)** 4: **c)** 27/7; **d)** 51/2; **e)** -2/7; **f)** 5; **g)** 22/31; **h)** 4; **i)** 0; **j)** 0; **k)** -2; **l)** 9

6.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-7x+12=0$	b) $x^2-9x+18=0$	c) $x^2-5x+6=0$
d) $x^2+8x+15=0$	e) $x^2-6x-27=0$	f) $x^2-6x+9=0$
g) $x^2+6x=-9$	h) $4x^2+4x=3$	i) $x^2-9x+14=0$
j) $x^2-6x+8=0$	k) $2x^2+10x-48=0$	l) $x^2-x=20$
m) $x^2=5x+6$	n) $2x^2-5x+3=0$	ñ) $x^2+10x+25=0$
o) $x^2+9=10x$	p) $3x^2-39x+108=0$	q) $2x^2-9x+9=0$
r) $3x^2+2x=8$	s) $4x^2+12x+9=0$	t) $5x^2+1=6x$
u) $6x^2+1=5x$	v) $6x^2-6=5x$	w) $2x^2+7x+6=0$
x) $x^2=2x+3$	y) $4x^2+3=8x$	z) $x^2-x+1/4=0$

Sol: a) 3 y 4; **b)** 3 y 6; **c)** 2 y 3; **d)** -5 y -3) **e)** -3 y 9; **f)** 3; **g)** -3; **h)** ½ y -3/2; **i)** 2 y 7; **j)** 4 y 2; **k)** 3 y -8; **l)** -4 y 5; **m)** 6 y -1; **n)** 1 y 3/2; **ñ)** -5; **o)** 1 y 9; **p)** 4 y 9; **q)** 3 y 3/2; **r)** -2 y 4/3; **s)** -3/2; **t)** 1 y 1/5; **u)** ½ y 1/3; **v)** -2/3 y 3/2; **w)** -2 y -3/2; **x)** -1 y 3; **y)** ½ y 3/2; **z)** ½.

7.- Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $1-\frac{x^2}{3}-\frac{3x+2}{3}=1$	b) $(x-3)^2-\frac{x-1}{3}=2x$	c) $\frac{x-3}{3}-\frac{1}{x-1}=3x$
d) $x-\frac{2}{x}+\frac{1}{2x}=5x+5$	e) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{3+x}{x}=2$	f) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{3+x}{x-1}=2$
g) $3x-1-\frac{3}{x}=\frac{1+3x}{4}$	h) $x+\frac{1}{x}=\frac{6}{3x}$	i) $x-2=\frac{2x-3}{x}$
j) $x+\frac{1}{x-2}=4$	k) $x^2-x=\frac{2}{9}-\frac{2x}{3}$	l) $\frac{x^2}{3}+2=\frac{5x}{3}$
m) $x+\frac{2}{x}=3$	n) $x-2=\frac{4x-8}{x}$	ñ) $\frac{x}{2}+\frac{3}{x}=\frac{2x+9}{x}$
o) $2x-2=\frac{6x}{x-1}-5$	p) $x(x+1)-\left(x+\frac{x}{2}\right)=0$	q) $\frac{x}{3}+\frac{2}{x}=\frac{3x+10}{3x}$
r) $x+3=\frac{2x+1}{x-1}$	s) $\frac{9(x-1)}{3x^2-2x-2}=\frac{1}{x}$	t) $\frac{x-3}{2(x-1)}=-\frac{1}{x}$

Sol: a) -2 y -1; **b)** 4/3 y 7; **c)** 5/8 y 0; **d)** -3/4 y -1/2; **e)** -3 y -1/2; **f)** -3 y 0; **g)** 1 y -4/3; **h)** 1 y -1; **i)** 3 y 1; **j)** 3; k) -1/3 y 2/3; **l)** 2 y 3; **m)** 1 y 2; **n)** 4 y 2; **ñ)** -2 y 6; **o)** -1/2 y 3; **p)** 0 y ½; q) -1 y 4; **r)** -2 y 2; **s)** ½ y 2/3; **t)** -1 y 2.

8.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-3)(x-2)+\frac{x(x-3)}{2}=(x-2)^2$	b) $(x-2)x-\frac{x+2}{3}-\frac{x^2-4}{2}=(x-2)^2-4$
c) $(x-3)^2-\frac{x-2}{3}+(3-x)(x-1)=(x-2)^2$	d) $\frac{x-3}{x}+3x-\frac{5}{x}=2x-\frac{3}{x}-3$
e) $3x-\frac{8}{x}+(x-1)^2=3(x-2)-(x-5)$	f) $\frac{(x-3)^2}{2}-x+x^2=x-(x-2)$
g) $\frac{1}{x-1}+3x+3x^2-2=\frac{3}{x-1}+3x^2$	h) $2+\frac{x+4}{3}=\frac{4x+4}{3}+\frac{2-x}{x-3}$

Sol: a) 1 y 4; **b)** -2/3 y 4; **c)** -1 y 8/3; **d)** -5 y 1; **e)** -2 y 2; **f)** 1 y 5/3; **g)** 5/3 y 0; **h)** 2 y 4

9.- Resuelve:

1) $\frac{x^2-4}{x+3}=0$ (Sol: x=±2)

2) $\frac{x^2-4}{x+3}=-12$ (Sol: x_1=−8, x_2=−4)

3) $\frac{x}{3x}=\frac{x-1}{-3x-1}$ (Soluc: x=1/3)

4) $\frac{3x^2+2x}{5x^2-3}=0$ (Sol: x_1=0, x_2=−2/3)

5) $\frac{x^2+3x-4}{x-3}=0$ (Sol: x_1=1, x_2=−4)

6) $\frac{x^2+6x+3}{x-1}=-x$ (Sol: x_1=−3/2, x_2=−1)

7) $\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{13}{12}$ (Sol: x=±5)

8) $\frac{1-2x}{x+7}=\frac{x}{x-1}$ (x_1=−1; x_2=−1/3)

9) $(x-3)^2=\frac{x}{4}$ (Sol: x_1=4, x_2=9/4)

10) $6+\frac{2x+4}{3}x=8$ (Sol: x_1=1, x_2=−3)

11) $1064=\frac{4+6(x-1)}{2}\cdot x$ (Sol: x_1=19, x_2=−56/3)

10.- Resuelve las ecuaciones:

1) $\frac{(x+2)^2}{9}=\frac{7}{9}-\frac{(x+3)(x-3)}{5}$ (Sol: x_1=2, x_2=-24/7)

2) $\frac{(2x+1)^2}{5}-\frac{(x+3)(x-3)}{3}=\frac{20}{3}$ (Sol: x_1=2, x_2=-26/7)

3) $\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(x+1)(x-1)}{3}=\frac{4x^2-19x+31}{6}$ (Sol: x_1=−3, x_2=2)

4) $\frac{(2x+1)(2x-1)}{6}-\frac{(x+1)^2}{9}=\frac{x(7x-8)-1}{18}$ (Sol: x_1=−2, x_2=2/3)

5) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{5x+6}{6}=\frac{(x+3)(x-3)}{3}+6$ (Sol: x_1=0, x_2=7)

6) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{(x-3)^2}{3}=\frac{x(11-x)}{6}$ (Sol: x_1=−8, x_2=6)

7) $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36$ (Sol: x=±9)

8) $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(1+2x)^2}{3}=-2-\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}$ (Sol: x_1=1, x_2=11/3)

9) $\frac{(x+3)(x-3)-4}{2}-\frac{x-2}{3}=\frac{(x-2)^2+1}{6}$ (Sol: x_1=4, x_2=−5)

10) $\frac{(x+2)(x-2)}{12}+\frac{2x+1}{18}-\frac{6-5(x-2)}{6}=\frac{3(x-1)^2+11}{36}$ (Sol: x_1=3)

11.- Resuelve las ecuaciones irracionales:

a) $x+\sqrt{x}=30$

b) $\sqrt{x}+1=\sqrt{x+9}$

c) $\sqrt{7-3x}-x=7$

d) $\sqrt{x+4}=3-\sqrt{x-1}$

e) $5\sqrt{x}+3=2x$

f) $3\sqrt{6x+1}-5=2x$

g) $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1$

h) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$

i) $\sqrt{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}}=6$

j) $1+\sqrt{x+1}=x/3$

k) $\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}=\sqrt{x}$

l) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+1}$

m) $2\sqrt{x+4}=\sqrt{5x+4}$

n) $\sqrt{x^2+3x+7}=5$

Sol: a) 25; **b)** 16; **c)** -3 y -14; **d)** 13/9; **e)** 9 y ¼; **f)** 8 y ½; **g)** 5 y 1; **h)** 5; **i)** 221; **j)** 15 y 0; **k)** 0, 3 y -3; **l)** 12; **m)** 12; **n)** 3 y -6.

Problemas de Ecuaciones

Algoritmo de resolución de Problemas de Ecuaciones:

a) Lectura y comprensión del enunciado
b) Traducción del problema al lenguaje algebraico.
c) Planteamiento de la Ecuación.
d) Resolución de la ecuación con precisión.
e) Evaluación e interpretación de los resultados con los datos del enunciado.

Problemas de Números

1.- Tres números consecutivos suman 51, ¿Cuáles son esos números?
Solución: 16, 17 y 18

2.- Calcula el número que sumado con su anterior y con su siguiente da 114.
Solución: 38

3.- Calcula el número que se triplica al sumarle 26.
Solución: 13

4.- Halla un número cuyo triple menos 5 sea igual a su doble más 3.
Solución: 8

Si a un número le sumo su triple y le resto 20, me quedan el 28. ¿Cuál es el número?

Si llamamos x al número, su triple será 3x, y ya podemos plantear la ecuación:

Ya podemos plantear la ecuación:

$$x + 3x - 20 = 28$$

Cuya solución es:

$$x + 3x - 20 = 28 \quad \to \quad x + 3x = 28 + 20$$

$$4x = 48 \quad \to \quad x = \frac{48}{4} = 12 \quad \to \quad x = 12$$

Por tanto el número es el 12.

5.- Halla un número que sumado a su doble da 48.
Solución: 16

6.- Halla un número que multiplicado por 3, sumándole luego 10, multiplicando lo obtenido por 5, agregándole 10 y multiplicando finalmente el resultado por 10 da 750. ¿Qué número es?
Solución: 1

7.- Encontrar dos números que sumados den 204 y tales que uno de ellos es 16 unidades mayor que el otro.
Solución: 94, 110.

8.- Si al doble de un número le sumamos su tercera parte obtenemos 14, ¿Cuál es dicho número?
Solución: El 6.

9.- La suma de 4 números naturales consecutivos es igual a siete veces el menor de ellos. ¿Cuáles son esos números?
Solución: Los números son el 2 el 3 el 4 y el 5.

10.- La suma de dos números impares consecutivos es 36. Busca esos números.
Sol: 17 y 19.

11.- La diferencia entre dos números es 38. Si se divide el mayor de los números por el menor, el cociente es 2 y queda un resto de 8. ¿Qué números son?
Sol: 30 y 68.

12.- Halla dos números sabiendo que uno es cuatro veces mayor que el otro y su suma es 25.
Sol: 5 y 20.

13.- Calcula dos números sabiendo que uno excede al otro en 8 unidades y su suma es 450.
Sol: 221 y 229.

14.- El doble de un número aumentado en 12 es igual a su triple disminuido en 5. ¿Cuál es el número?
Sol: El 17.

Problemas de Edades

15.- ¿Qué edad tiene Rosa sabiendo que dentro de 56 años tendrá el quíntuplo de su edad actual?
Solución: 14 años

16.- Un padre tiene 47 años y su hijo 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea triple que la del hijo?
Solución: 7 años

17.- La edad de un padre es doble que la del hijo. Hallar ambas edades sabiendo que suman 51 años.
Solución: 17 y 34 años.

18.- Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. Si entre los tres suman 98 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?
Solución: Rosa tiene 33 años, Juan tiene 58 y Alberto 13.

19.- El doble de la edad que tenía hace cinco años es 80. ¿Cuál es mi edad actualmente?
Solución: 45

20.- Si Elena es tres años menor que Lucio, y este es uno mayor que Berta, y entre los tres suman 41 años, ¿Qué edad tiene cada uno?
Solución: Berta 14 años, Lucio 15 y Elena 12 años

21.- Si a la edad de Rodrigo se le suma su mitad se obtiene la edad de Andrea ¿Cuál es la edad de Rodrigo si Andrea tiene 24 años?
Solución: 16 años

22.- Una mamá tiene el cuádruplo de la edad de su hijo, y dentro de cinco años, tendrá el triple de años que él. ¿Qué edad tienen?
Solución: Mamá: 40 años, hijo: 10 años.

23.- Las edades de dos hermanos suman 38 años. Calcularlas, sabiendo que la edad de uno es superior en 8 años a la edad del otro.
Solución: 15 y 23 años

24.- La suma de las edades de tres hijos es igual a la edad de su madre. Si la madre tiene 48 años, y cada uno de los hijos tiene 2 años más que el anterior, ¿cuáles son sus edades?
Solución: 14, 16 y 18 años tienen los hijos.

La edad actual de Sergio es el doble que la de su hermana Raquel, pero hace 10 años la edad de Sergio era el triple que la de Raquel. ¿Cuántos años tienen actualmente cada uno?

Si llamamos x a la edad de Raquel y recogemos los datos en una tabla:

	Edad Actual	Hace10 años
Raquel	x	x-10
Sergio	2x	2x-10

Ya podemos plantear la ecuación:

$$\underbrace{2x - 10}_{\text{Hace 10 años la edad de Sergio}} = \underbrace{3(x-10)}_{\text{Será el triple de la edad de Raquel}}$$

Cuya solución es:

$$2x - 10 = 3(x - 10) \quad \to \quad 2x - 10 = 3x - 30$$

$$2x - 3x = -30 + 10 \quad \to \quad -x = -20 \quad \to \quad x = 20$$

Por tanto la edad actual de Raquel es 20 años y la de Sergio es 40.

Si comprobamos vemos que hace 10 años, Raquel tenía 10 años y Sergio 30 años que es su triple.

25.- La suma de las edades actuales de Sara y su hermano Ghali es 20. Dentro de 7 años la diferencia entre la edad de Ghali y la de Sara será igual a la edad actual de Sara menos 1. Calcula sus edades actuales.
Sol: Ghali 13 años y Sara 7.

26.- Un padre tiene 20 años más que su hijo. Dentro de 12 años, el padre tendrá el doble de la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno actualmente?
Sol: 8 y 28 años

27.- Un padre tiene triple edad que su hijo. Si el padre tuviera 30 años menos y el hijo 8 más, los dos tendrían la misma edad. Averiguar la edad de cada uno.
Sol: El hijo 19 años y el padre 57.

Problemas de Dinero

28.- Mónica tiene 12 € más que Javier y esperan que mañana les den 5 € de paga a cada uno. En ese caso, Mónica tendrá mañana el doble que Javier. ¿Cuánto tiene hoy cada uno?
Solución: Javier tiene 7 €, y Mónica, 19 €.

29.- Para organizar la excursión de un grupo de amigos, cada uno ha puesto 16 €. Si fueran tres más, solo pondrían 12 €. ¿Cuántos amigos han ido de excursión?
Solución: 9 amigos.

30.- Si Ana y Sonia tienen 2500€ entre las dos, y Ana tiene 700 € más que Sonia, ¿cuánto tiene cada una?
Solución: Marina 1600€ y Sonia 900 €

31.- Luis ha gastado 4,20 € más que Loli. Si entre los dos han gastado 18 € ¿Cuánto gastó cada uno?
Sol: Loli 6,90 € y Luis 11,10 €.

32.- Tengo en una mano el doble de monedas que en la otra. Si en total tengo 27 monedas ¿Cuántas monedas tengo en cada mano?
Sol: 9 monedas en una y 18 en la otra.

33.- Juan tiene 90 € en billetes de 5 € y de 10 €. Si el número de billetes de 5 € es el cuádruple del número de billetes de 10 €, ¿cuántos billetes tiene de cada clase?

Sol: 3 billetes de 10 € y 12 de 5 €.

Luis se ha comprado un traje, un bastón y un sombrero por 259 €. El traje costó 8 veces lo que el sombrero y el bastón 30 € menos que el traje. Hallar los precios de cada prenda.

Si llamamos x al precio del sombrero: $\begin{cases} Sombrero: x \\ Traje: 8x \\ Bastón: 8x-30 \end{cases}$

Ya podemos plantear la ecuación:

$$\underbrace{x}_{Sombrero} + \underbrace{8x}_{Traje} + \underbrace{8x-30}_{Bastón} = 259$$

Cuya solución es:

$$x+8x+8x-30=259 \quad \rightarrow \quad 17x=259+30$$

$$17x=289 \quad \rightarrow \quad x=\frac{289}{17}=17 \quad \rightarrow \quad x=17$$

Por tanto El Sombrero cuesta 17 €, el traje 136 € y el bastón 106 €.

Si comprobamos vemos que la suma de los tres es 259: **17+136+106=259**

34.- Tengo 13 monedas, unas de 2 céntimos y otras de 5 céntimos. Si las cambio todas por una moneda de 50 céntimos, ¿cuántas tengo de cada clase?

Sol: 5 de 2 céntimos y 8 de 5 céntimos.

35.- Si sumamos 10 € al doble de tu dinero resultará lo mismo que si restamos tu dinero de 43 €. ¿Cuánto tienes?

Sol: 11 €.

36.- Ana compra un pañuelo, una falda, y un abrigo en 505 €. Calcula los precios respectivos, si la falda vale 25 veces más que el pañuelo, y el abrigo, el triple de la falda.

Sol: Pañuelo 5 €, falda 125 € y abrigo 375 €.

Problemas con figuras geométricas

37.- En un rectángulo la base mide 18 cm más que la altura y el perímetro mide 76 cm ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Solución: 10 x 28 cm

38.- Determina las medidas de un rectángulo de 1800 m de perímetro y cuya altura es dos tercios de la base.

Solución: 540 m de base y 360 de Altura.

39.- En un triángulo uno de los ángulos es el doble de otro y éste es igual al tercero incrementado en 40º. ¿Cuál es el valor de cada ángulo?

Solución: 44°, 88°, 48°

40.- El triple del perímetro de un cuadrado es 144 cm. ¿Cuánto mide su lado?

Solución: 12 cm.

41.- Una parcela rectangular es 18 metros más larga que ancha, y tiene una valla de 156 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

Solución: 30 metros de ancho y 48 m de largo.

El perímetro de un huerto rectangular es de 66 m. Si el lado mayor mide 11 m. más que el lado menor. ¿Cuánto miden los lados del jardín?

Si llamamos x al lado menor: $\begin{cases} Lado\ menor: x \\ Lado\ mayor: x+11 \end{cases}$

Ya podemos plantear la ecuación sabiendo que el perímetro es la suma de los lados:

$$2\cdot \underbrace{x}_{Lado\ Menor} + 2\underbrace{(x+11)}_{Lado\ mayor} = 66$$

Cuya solución es:

$$2x+2(x+11)=66 \quad \rightarrow \quad 2x+2x+22=66$$

$$4x+22=66 \quad \rightarrow \quad 4x=66-22 \quad \rightarrow \quad 4x=44$$

$$x=\frac{44}{4}=11 \quad \rightarrow \quad x=11$$

Por tanto las dimensiones del huerto son 11 metros de alto por 22 metros de ancho

42.- El perímetro de un triángulo isósceles mide 20 cm, sabiendo que el lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado del triángulo?

Sol: 8 cm los lados iguales y 4 cm el desigual.

43.- El largo de un rectángulo mide 12 cm más que su ancho. Halla sus dimensiones sabiendo que el perímetro mide 264 cm.

Sol: 60 y 72 cm.

45.- En un rectángulo un lado mide 18 cm más que el otro y el perímetro mide 76 cm ¿Cuánto miden sus lados?

Sol: Sus lados miden 10 y 28 cm.

46.- Si aumentamos en 8 cm el lado de un cuadrado, su perímetro se triplica. ¿Cuánto mide el lado?

Sol: 4 cm.

47.- El perímetro de un rectángulo es 50 cm. y su base mide 5 cm. más que su altura. Determina sus medidas.

Solución: 10 y 15 cm.

Problemas con fracciones

48.- Después de gastar 1/3 y 1/8 de lo que tenía me quedan 33 euros. ¿Cuánto dinero tenía?

Solución: 72 Euros

49.- Un granjero lleva al mercado una cesta de huevos, por el camino se rompen 2/5 de la mercancía. Decide volver al gallinero y recoger 21 huevos más con lo que ahora tiene 6/8 de la cantidad inicial ¿Cuántos huevos tenía al principio?

Solución: 140 huevos

50.- Se han consumido las 4/5 partes de un bidón de aceite. Si se reponen 30 litros, queda lleno hasta la mitad. ¿Cuál es su capacidad?

Solución: 100 L.

Tenemos un depósito de agua lleno con 3/8 de su capacidad. Se le añaden 132 litros se llena hasta 5/6 de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Si llamamos x a la capacidad del depósito, ya podemos plantear la ecuación:

$$\frac{3}{8}x+132=\frac{5}{6}x$$

Cuya solución es:

$$\frac{3}{8}x+132=\frac{5}{6}x \quad \rightarrow \quad \frac{18x}{48}+\frac{6336}{48}=\frac{40x}{48}$$

$$18x+6336=40x \quad \rightarrow \quad 6336=40x-18x$$

$$6336=22x \quad \rightarrow \quad x=\frac{6336}{22}=288 \quad \rightarrow \quad x=288$$

Por tanto la capacidad del depósito es de 288 litros

51.- Un hombre gastó 1/5 de lo que tenía en ropa y 3/8 en libros, si le prestó 102 € a un amigo y se quedó sin nada. ¿Cuánto dinero gastó?

Solución: 48 € en ropa y 90 € en libros

52.- Al restar dos números, da 6, y la mitad del mayor excede en 10 a los 3/8 del menor. Halla dichos números.

Solución: Los números son 56 y 62.

53.- De un depósito se extraen los 2/7 de su contenido, después 1/3 de lo que quedaba. Si queda 1 Hl. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Solución: 210 litros.

54.- Un cajero hace dos pagos. En el primero da los 2/5 de lo que hay más 500 dh. En el segundo da la mitad de lo que queda más 250 dhs. Al final queda en el cajero la quinta parte de lo que tenía al principio. Calcula lo que tenía el cajero al principio y los pagos que ha efectuado.

Sol: 5.000 dhs

Otros problemas de ecuaciones

55.- En un examen de 20 preguntas, por cada respuesta correcta dan tres puntos y por cada fallo restan dos ¿Cuántas preguntas acertó Aida si obtuvo 30 puntos y las contestó todas?

Solución: 14 preguntas

56.- En una cafetería, entre sillas y taburetes hemos contado 44 asientos con 164 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?

Solución: 32 sillas y 12 taburetes.

57.- Si a un cántaro de agua, le añadieras 14 litros de agua, tendría el triple que si le sacaras dos litros. ¿Cuánta agua hay en el cántaro?

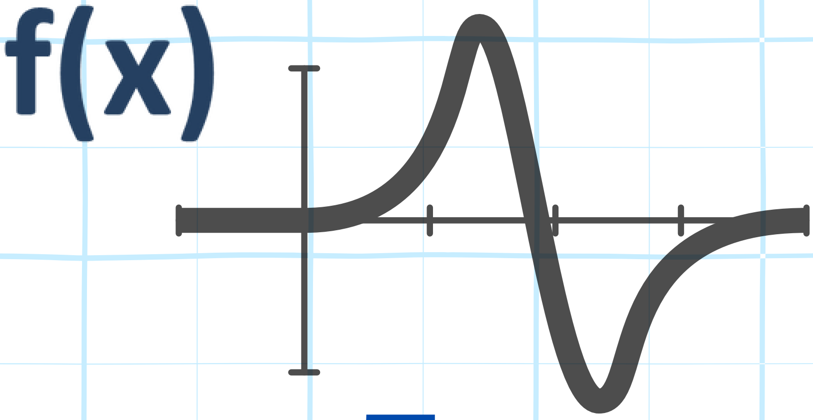
Solución: 10 litros.

58.- En una granja, entre gallinas y conejos, hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

Sol: 14 gallinas y 6 conejos.

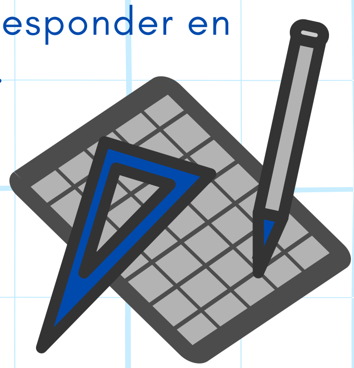
59.- Cada vez que un jugador gana una partida recibe 7€ y cada vez que pierde paga 3€. Al cabo de 15 partidas ha ganado 55 €. Calcula las partidas ganadas.

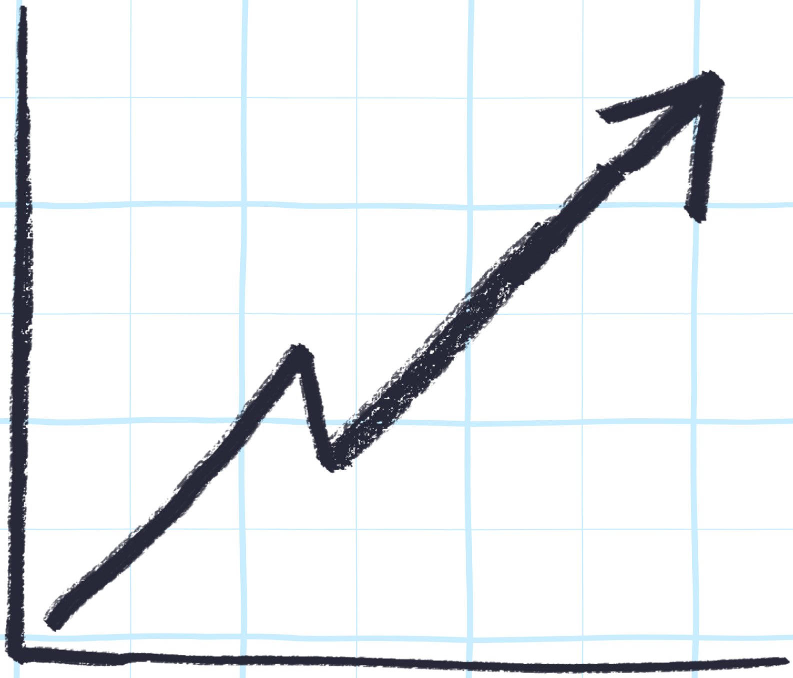
Solución: 10 partidas



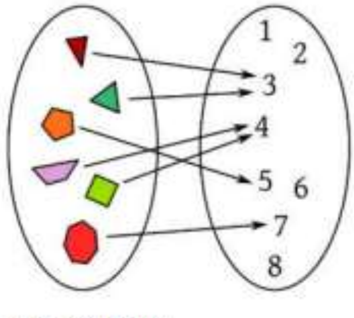
Tema 5: Funciones

Reconocer situaciones de funciones. Identificar la representación gráfica y analítica. Hallar dominio de una función a partir de su fórmula y su grafica. Analizar gráficos de funciones. Modelizar situaciones, resolver y responder en función del problema.





Las funciones son las herramientas principales para la descripción matemática de una situación real. Todas las fórmulas de la Física no son más que funciones: expresan cómo ciertas magnitudes (por ejemplo el volumen de un gas) dependen de otras (la temperatura y la presión). El concepto de función es tan importante que muchas ramas de la matemática moderna se caracterizan por el tipo de funciones que estudian. No es de extrañar, por ello, que el concepto de función sea de una gran generalidad. Además, se trata de uno de esos conceptos cuyo contenido esencial es fácil de comprender pero difícil de formalizar.



La idea básica de función es la siguiente. Supongamos que tenemos dos conjuntos A y B; una función de A en B es una regla que a cada elemento de A asocia un único elemento de B.

Veremos que las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena. Si *f* es una función y *x* es un número que está en su dominio, se representa por *f(x)* (léase "f de x") el número que *f* asigna a *x*, que se llama imagen de *x* por *f*, *Im(f)*.

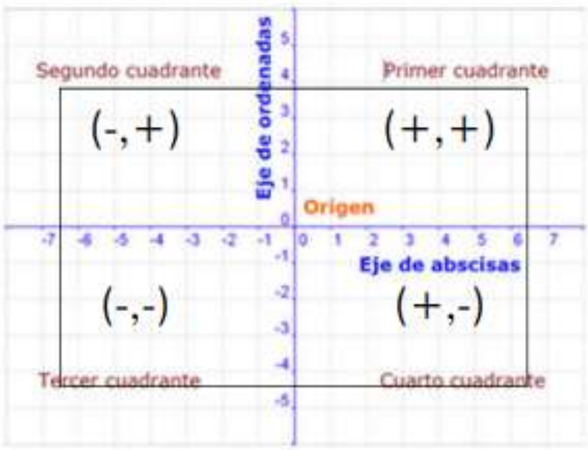
10.2.- Sistemas de Representación en el plano

La gráfica de una función pone de manifiesto, a simple vista, muchas de sus propiedades. Para dibujar gráficas de funciones nos ayudaremos de los ejes cartesianos, y diremos que la gráfica de una función *f* es el conjunto de pares de números $(x, f(x))$ donde x son los puntos del dominio de la función.

10.2.1.- Ejes de coordenadas o Cartesianos.

El sistema de representación de puntos en el plano más común está formado por dos ejes perpendiculares, uno horizontal llamado ***eje de abscisas***, donde se representan los valores de la *variable independiente* (que toma los valores libremente, y que suele llamarse "x"), y otro vertical llamado ***eje de ordenadas***, donde se representan los valores de la *variable dependiente* (porque se calculan a partir de la otra, y que suele llamarse "y").

Ambos reciben el nombre de ***ejes de coordenadas*** o ejes cartesianos (en honor del famoso filósofo y matemático francés *Renè Descartes*).



El punto donde se cortan ambos ejes se llama ***origen de coordenadas*** y, al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes, y que se nombran en el sentido contrario a las agujas del reloj empezando desde la parte positiva del eje de abscisas.

Piensa y practica

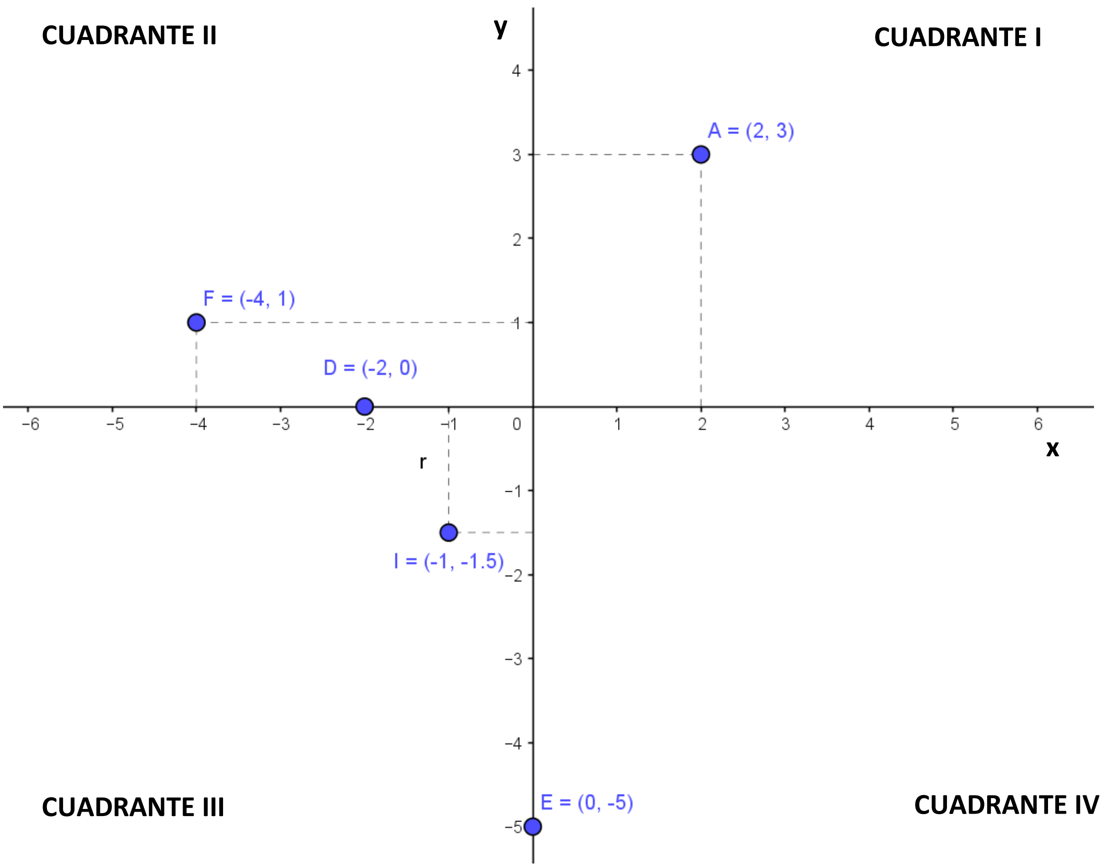
1.- Representa en un sistema cartesiano los siguientes puntos:

$$A(1,1) \qquad B(0,0) \qquad C(4,0) \qquad D(3,-3)$$
$$E(-1,-3) \qquad F(-5,6) \qquad G(0,-5)$$

Ubicación de puntos en el Plano Cartesiano

Cuando en matemática queremos ubicar puntos para representar diversas gráficas lo hacemos en el plano Cartesiano. El mismo contiene dos rectas perpendiculares llamadas **ejes cartesianos** que dividen al plano en cuatro partes iguales llamados **cuadrantes.** En cada recta ubicamos los números reales respetando la unidad de medida (que no necesariamente debe repetirse en ambos ejes) y la intersección de ambas rectas será el **origen de coordenadas: (0,0)**
La recta horizontal se llama **eje de abscisas**, también conocido como **eje x.**
La recta vertical se llama **eje de ordenadas**, también conocido como **eje y.**
Para ubicar cualquier punto en el plano lo hacemos como un **par ordenado** indicando siempre **primero la abscisa y luego la ordenada**, es decir de la forma (x,y).

Veamos algunos ejemplos:



<u>Actividad 1</u>: Teniendo en cuenta los puntos de arriba completen el siguiente cuadro:

Punto	x	y	Par ordenado	Cuadrante
A	2	3	(2,3)	I
D	-2	0	(-2,0)	Eje x
F				
I				
E				

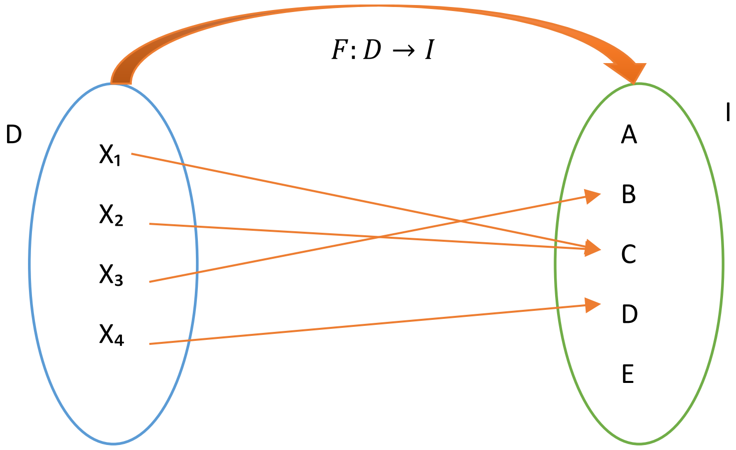
Función

Una función es una relación entre dos variables en el cual a cada valor de la variable independiente le corresponde un **único** valor de la variable dependiente.

Dominio de una función: Conjunto de todos los valores que toma la variable independiente, se lo puede escribir como Dom(f) o D(f).

Imagen de una función: Conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente, se lo puede escribir como Im(f) o I(f)

Codominio: es un conjunto en el cual está incluido el conjunto imagen.



En resumen: La relación f:D→I (donde D es el dominio e I el codominio) es una función si y solo si cumple dos condiciones:

- **Condición de Existencia:** cada elemento del dominio de la relación debe estar relacionado con un elemento del codominio.
- **Condición de Unicidad:** cada elemento del dominio está relacionado con solo un elemento del codominio.

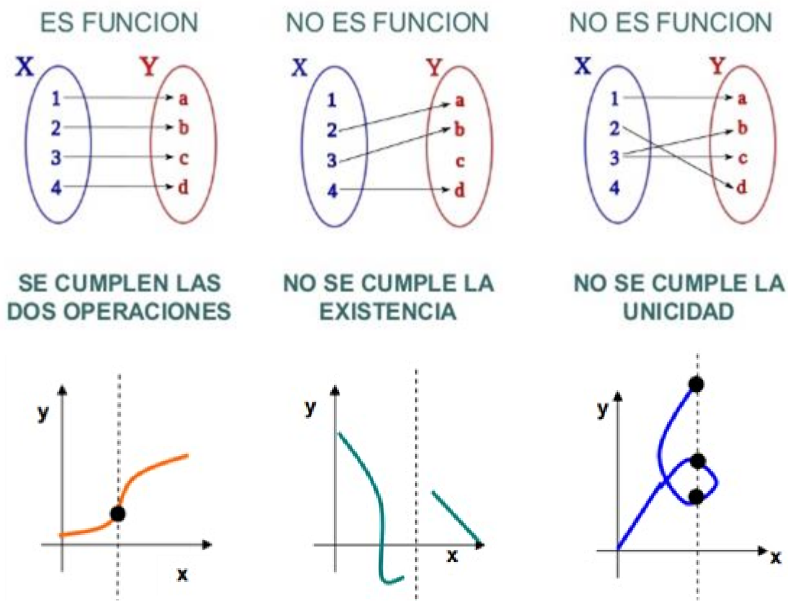
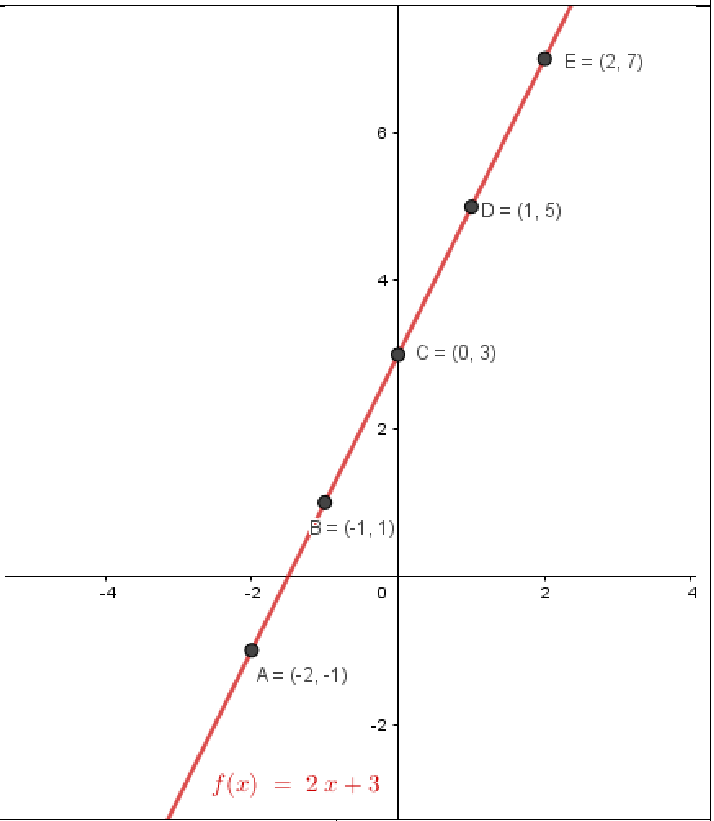
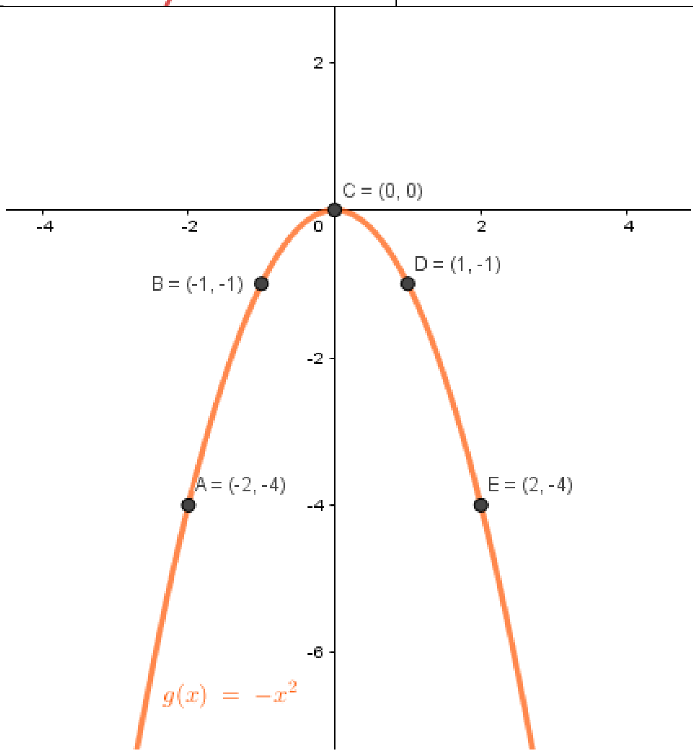


Tabla / Formula / Grafico

Una función puede estar definida por la fórmula, tabla o gráfica

Una **tabla** es una representación de datos, que muestra qué valor de la variable dependiente le corresponde a cada valor de la variable dependiente.
La **fórmula** es una expresión algebraica que establece la relación entre las dos variables.
La **gráfica** de una función es un tipo de representación gráfica en el sistema de ejes cartesianos que permite conocer el comportamiento de dicha función.

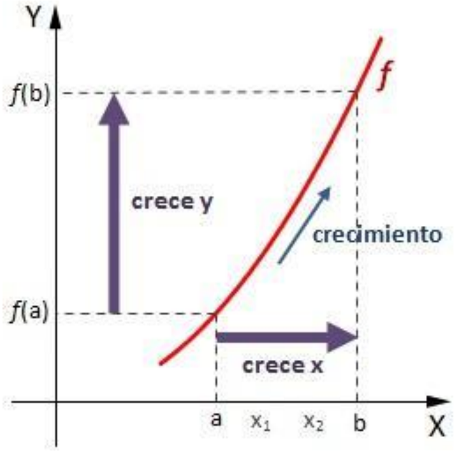
<table>
<tr><th>Tabla</th><th>Formula</th><th>Grafica</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$y = 2x + 3$</th></tr>
<tr><td>-2</td><td>2(-2)+3=-4+3=-1</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7</td></tr>
</table>
</td><td>$f(x) = 2x + 3$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$y = -x^2$</th></tr>
<tr><td>-2</td><td>$-(-2)^2=-(+4)=-4$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-4</td></tr>
</table>
</td><td>$g(x) = -x^2$</td><td>
</td></tr>
</table>

Estudio de funciones

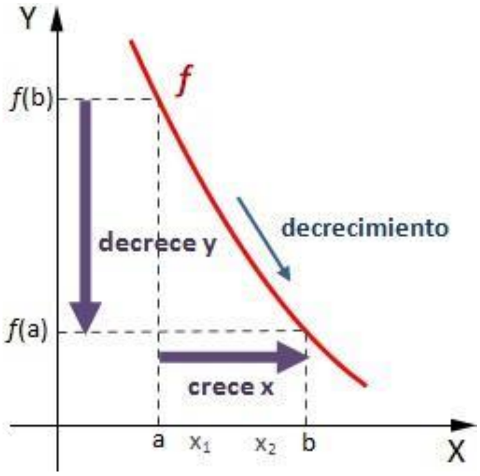
Es el análisis de su comportamiento a partir de la variación de los valores de las variables.

Previo a su estudio debemos definir el **dominio** y **conjunto imagen** de la función; una vez definido estos dos conjuntos, observaremos el **crecimiento** de la función, las **intersecciones** de la gráfica con los ejes x e y, y los valores **máximos y mínimos** que alcanzan la misma.

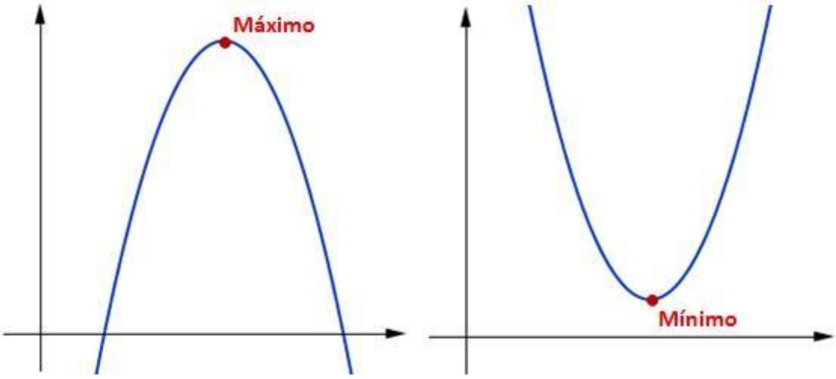
- **Intervalos de crecimientos y decrecimientos**
  Una función es **creciente** en el intervalo (a,b) del dominio, si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1<x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Es decir, es creciente en (a,b) si al aumentar la variable independiente x, aumenta la variable dependiente y.



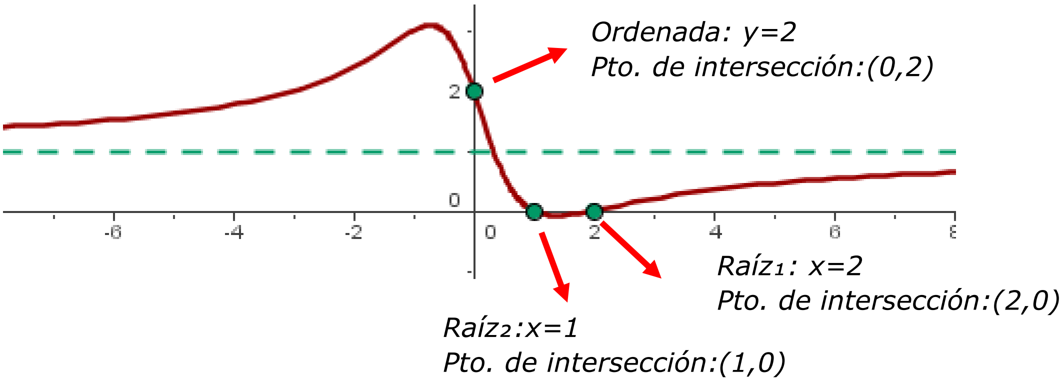
  Una función es **decreciente** en el intervalo (a,b) del dominio, si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1<x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$. Es decir, es decreciente en (a,b) si al aumentar la variable independiente x, disminuye la variable dependiente y.



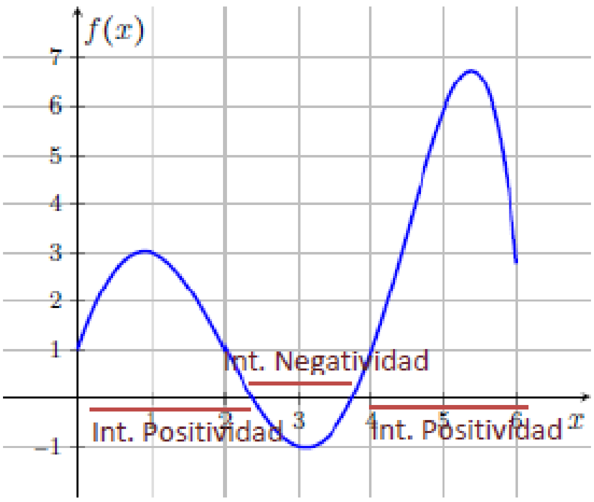
- **Máximos y mínimos.**
  Una función alcanza un **máximo absoluto** para un valor x_0 del dominio, si para todo x perteneciente al mismo, con x distinto de x_0, la imagen de x es menor que la de x_0. El valor máximo de la función es la imagen de x_0. Una función alcanza un **mínimo absoluto** para un valor x_0 del dominio, si para todo x perteneciente al mismo, con x distinto de x_0, la imagen de x es mayor que la de x_0. El valor mínimo de la función es la imagen de x_0. Si en cualquiera de los casos no se cumple en todo el dominio, pero si en un intervalo cercano a x_0, entonces lo llamaremos mínimo o máximo relativo.



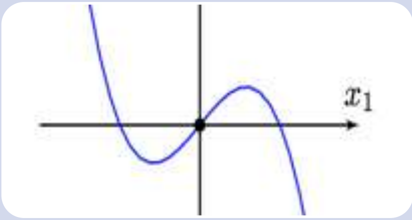
- Los **ceros o raíces** de una función son los valores de la variable independiente cuya imagen es 0. Gráficamente veremos que la función corta al eje de abscisas.
  La **ordenada al origen** es el valor de la variable dependiente, que es imagen de 0. Gráficamente veremos que la función corta al eje de ordenadas.
  También podemos escribirlo como los puntos de intersección con los ejes



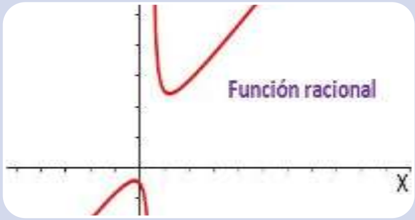
- **Intervalo de positividad y negatividad.**
  El **intervalo de positividad** es un subconjunto del dominio cuyas imágenes son números positivos. De igual modo, el **intervalo de negatividad** es un subconjunto del dominio cuyas imágenes son números negativos.



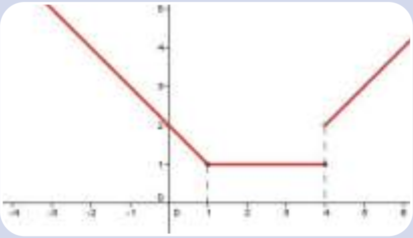
Función constante



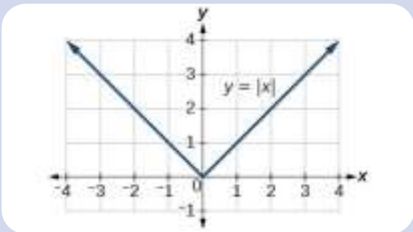
Función polinómica



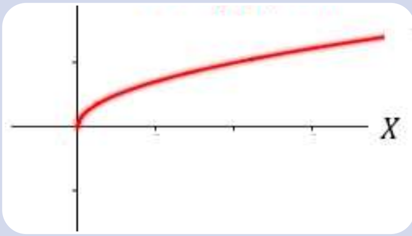
Función Racional



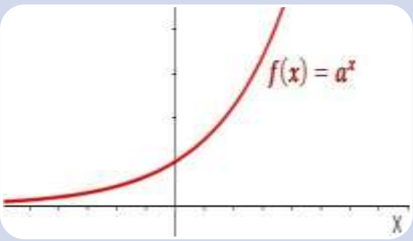
Función por tramo



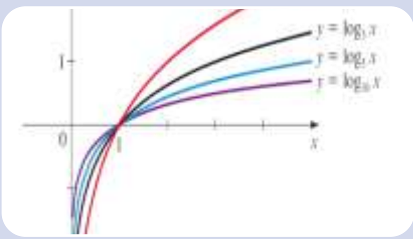
Función valor absoluto.



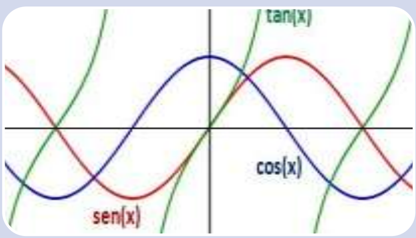
Funciones radical



Función exponencial



Función logaritmo



Función trigonometrica

En la cátedra trabajamos con

- Funciones polinómica de grado 1 y 2
- Funciones exponenciales
- Funciones logaritmo
- Funciones trigonométricas

Sin embargo, hay que saber obtener el dominio de TODAS las funciones porque tiene aplicaciones en otros contenidos matemáticos y ajenos a la matemática.

- Funciones Polinómicas, son de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$ y su dominio es $\mathbb{R}$.
- Funciones Racionales, son de la forma $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_o}$ su dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores que anulan el denominador.
- Funciones Irracionales, son del tipo $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, siendo su dominio:
  - El mismo que el de $g(x)$ si n es impar
  - El conjunto de valores reales que hagan $g(x) \geq 0$ si n es par
- Funciones exponenciales, son de la forma $f(x) = a^{g(x)}$, con a>0 y a≠1, su dominio es el mismo que el de $g(x)$
- Funciones logarítmicas, son de la forma $f(x) = \log_a g(x)$, con a>0. Su dominio son los valores de x, que hacen $g(x) > 0$.
- Funciones circulares: $f(x) = senx$, $f(x) = \cos x$, su dominio es $\mathbb{R}$.

A partir de estas dos, podemos definir el resto de funciones circulares:

$$tg(x) = \frac{senx}{\cos x},\ \sec(x) = \frac{1}{\cos x} \text{ sus dominios son } \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z\right\}$$

$$ctg(x) = \frac{\cos x}{senx},\ cosec(x) = \frac{1}{senx} \text{ sus dominios son } \mathbb{R} - \{k\pi, k \in Z\}$$

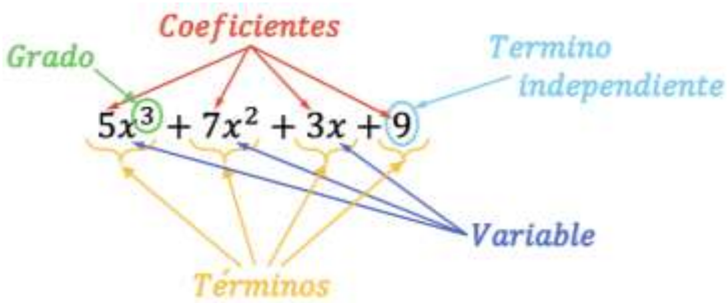
Profundizaremos cada caso…

Funciones polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Los a_i son números reales conocidos como coeficientes

Los exponentes son números naturales.



El dominio de una función polinómica son TODOS LOS REALES

$$\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R}$$

¿Por qué? Porque en los reales se puede resolver cualquier suma y multiplicación entre reales.

Funciones racionales

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},\ \{\forall x \in \mathbb{R}: h(x) \neq 0\}$$

El dominio de una función racional son todos los números reales que no anulan el denominador

$$\boldsymbol{Dom(f) = \{\forall x \in \mathbb{R}: h(x) \neq 0\}}$$

Ya que no existe en los reales la división por cero

Para hallar las restricciones, me planteo la ecuación $h(x) = 0$ y resuelvo

Veamos algunos ejemplos y observa que la "división entre 0" no necesariamente significa que *x* es 0

Función	**Dominio**
$f(x) = \frac{1}{x}$	Si $x = 0$, estarías dividiendo entre 0, entonces $x \neq 0$. $\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$
$f(x) = \frac{2+x}{x-3}$	$x - 3 = 0$ $x = 3$ Si $x = 3$, estarías dividiendo entre 0, entonces $x \neq 3$. $\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{3}\}$

$f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x-1}$	$x-1=0$ $x=1$ Primero, siempre hallo en que valores de x el denominador se hace 0. En este caso en x=1. $\boldsymbol{Dom(f)}=\mathbb{R}-\{\mathbf{1}\}$ Si bien puedes simplificar esta función como *f*(*x*) = 2, hay que determinar siempre primero la función Por lo tanto $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2, para\ \boldsymbol{Dom(f)}=\mathbb{R}-\{\mathbf{1}\}$
$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$	$x^2-1=0$ $x^2=1$ $\lvert x\rvert=\sqrt{1}$ $x=\pm 1$ En $x = 1$ y $x = -1$ harían 0 el denominador. $\boldsymbol{Dom(f)}=\mathbb{R}-\{\mathbf{-1},\mathbf{1}\}$ De nuevo, esta función puede simplificarse como $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, pero para $x \neq 1$ y $x \neq -1$.
$f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x^2+1}$	$x^2+1=0$ $x^2=-1$ $\lvert x\rvert=\sqrt{-1}$ $No\ tiene\ solución\ en\ \mathbb{R}$ Este es un ejemplo cuando no hay restricciones en el dominio, aunque haya una variable en el denominador. Porque $x^2 \geq 0$, $x^2 + 1$ nunca será 0. Entonces $\boldsymbol{Dom(f)}=\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{3x+6}{9x^2-9x-54}$	$9x^2-9x-54=0$ $x_{1,2}=\dfrac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 9\cdot(-54)}}{2\cdot 9}$ $x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{2025}}{18}=\dfrac{9\pm 45}{18}$ $x_1=\dfrac{9+45}{18}=\dfrac{54}{18}=3 \qquad x_2=\dfrac{9-45}{18}=-\dfrac{36}{18}=-2$ Entonces $\boldsymbol{Dom(f)}=\mathbb{R}-\{\mathbf{-2},\mathbf{3}\}$

Actividad 1: Determina el dominio de las siguientes funciones.

1) $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 3) $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-4}$ 4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-x^2+3x}$

5) $f(x)=3x^2-\dfrac{2}{x}$ 6) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}$ 7) $f(x)=\dfrac{3x^2-9}{x-\sqrt{3}}$ 8) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

Funciones radicales

$$f(x)=\sqrt{g(x)},\ \{\forall x\in\mathbb{R}: g(x)>0\}$$

El dominio de una función radical (con ÍNDICE PAR) son todos los números reales que no hacen negativo el radica.

$$\boldsymbol{Dom(f)=\{\forall x\in\mathbb{R}: g(x)\geq 0\}}$$

Ya que no existe en los reales la raíz de índice par de numero negativo.

Las raíces cuadradas de números negativos pueden ocurrir cuando la función tiene una variable dentro de un radical con una raíz par. Veamos estos ejemplos y observa que "la raíz cuadrada de un número negativo" ¡no necesariamente significa que el valor dentro del radical es negativo! Por ejemplo, si $x = -4$, entonces $-x = -(-4) = 4$, un número positivo.

Función	**Restricciones al Dominio**
$f(x)=\sqrt{x}$	Si $x < 0$, estarías sacando la raíz cuadrada de un número negativo, entonces $x \geq 0$.
$f(x)=\sqrt{x+10}$	Si $x < -10$, estarías sacando la raíz cuadrada de un número negativo, entonces $x \geq -10$.
$f(x)=\sqrt{-x}$	¿Cuándo es negativa $-x$? Sólo cuando x es positiva. (Por ejemplo, si $x = -3$, entonces $-x = 3$. Si $x = 1$, entonces $-x = -1$.) Esto significa que $x \leq 0$.
$f(x)=\sqrt{x^2-1}$	$x^2 - 1$ debe ser positivo, $x^2 - 1 > 0$. Entonces $x^2 > 1$. Esto sólo sucede cuando x es mayor que 1 o menor que -1: $x \leq -1$ o $x \geq 1$.
$f(x)=\sqrt{x^2+10}$	No hay restricciones en el dominio, aunque hay una variable dentro del radical. Pero $x^2 \geq 0$, $x^2 + 10$ nunca será negativo. Lo menor que puede ser es 10, por lo que no hay peligro de sacar la raíz cuadrada de un número negativo.

Ejercicios resueltos
Funciones: dominio, gráfica e imagen

El objetivo de este apunte es resolver algunos ejercicios de ejemplo, similares a los del comienzo de la práctica del capítulo 4, discutiendo un poco cómo encararlos y cómo resolverlos. En los mismos usaremos contenidos vistos en éste y en los anteriores capítulos.

Ejercicio:

1) Hallar el **dominio**, **graficar** y determinar la **imagen** de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 3$ b) $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ c) $h(x) = \dfrac{1}{x+1} + 2$ d) $s(x) = \sqrt{2-x} - 1$

Resolución:

1) El ejercicio nos pide calcular el **dominio** de varias funciones, realizar sus respectivas **gráficas** y luego para cada función determinar su **imagen**. Primero entonces recordemos un poco qué son cada uno de estos términos.

El **dominio** de una función es el mayor conjunto de números reales para el cual tiene sentido calcular la función (ver página 48 del libro de cátedra). En otras palabras son los valores que puede tomar x en la función y para los cuales podemos realizar la cuenta. Las únicas restricciones de ese estilo que tenemos *por ahora* son que **nunca podemos dividir por cero**, y que las **raíces de índice par tienen que tener argumentos positivos** (es decir que lo que está dentro de la raíz tiene que ser mayor o igual a cero, siempre y cuando la raíz sea de índice par). Las raíces de índice impar no sufren esta restricción.
Más adelante veremos otro tipo de funciones que tienen otros tipos de restricciones de domino.
Para hacer referencia al dominio de una función, por ejemplo la función f, en estas notas se usará la notación: $Dom(f)$.

La **gráfica** de una función f es el conjunto de puntos del plano de la forma $(x, f(x))$ (ver página 49 del libro de cátedra). En otras palabras serán todos los puntos cuya primer coordenada sea algún valor del dominio de la función y su segunda coordenada sea el valor que le corresponde por la función f.
Para la gráfica de algunas funciones tal vez debamos recurrir a los conceptos vistos en los capítulos 2 y 3.

La **imagen** de una función es el conjunto de valores que toma la misma (ver página 49 del libro de cátedra). Si tenemos la gráfica de la función, estos valores se pueden ver mirando qué valores toma la función sobre el eje y. Para hacer referencia a la imagen de una función, por ejemplo la función f, en estas notas se usará la notación: $Im(f)$.

Discutiremos más de esto en cada uno de los ejemplos.

a) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 3$

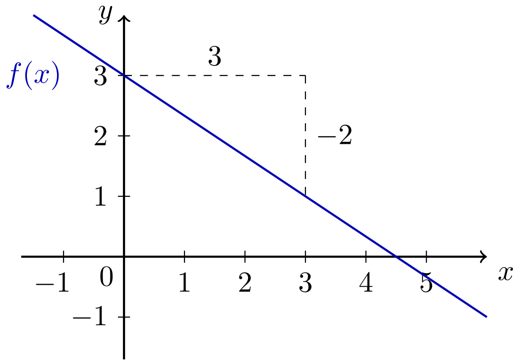
En este caso nos encontramos ante una **función lineal** y por lo tanto su dominio serán todos los números reales (ya que no hay ningún valor de x para el que no se pueda hacer la cuenta). Es decir:

$$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$$

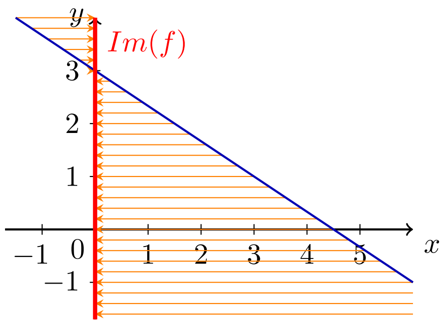
Por otro lado, como la **función es lineal**, su **gráfica será una recta** (ver páginas 23 a 26 del libro de cátedra). Para graficarla entonces lo haremos de la misma forma que graficábamos rectas (como vieron en el curso de nivelación), ya sea usando la información de la **pendiente** y la **ordenada al origen** o buscando dos puntos de la recta.

En este caso tenemos que graficar una recta con **ordenada al origen 3** (que nos indica dónde corta la función al eje y) y una **pendiente** de $\mathbf{-2/3}$, que nos indica que por cada 3 unidades que nos movamos hacia la derecha nos deberemos mover 2 unidades hacia abajo (nótese que el numerador me indica el deplazamiento en la dirección del eje y y el numerador el desplazamiento en la dirección del eje x, y el signo se lo asignamos a uno solo de estos valores).

De esta forma la gráfica de f sería:



Si miramos ahora entonces todos los valores que toma la función sobre el eje y, podemos ver claramente que en este caso, como la recta continúa indefinidamente, la imagen de la función f será todos los reales. Esta idea puede "verse" en la figura de al lado, donde hemos marcado en lineas naranjas horizontales la proyección de algunos de los valores de la función sobre el eje y, y sobre este mismo eje hemos marcado la imagen de la función en rojo. En los siguientes ejemplos tal vez se entienda mejor esta idea. **Aclaración:** todo lo que está marcado en naranja y en rojo ustedes no lo deben escribir en su gráfico, pero es algo que pueden pensar a la hora de tener que determinar la imagen de una función.



Por lo tanto:

$$\boxed{Im(f) = \mathbb{R}}$$

b) $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

En este caso nos encontramos ante una **función cuadrática**, y por lo tanto su dominio serán también todos los números reales (esto pasa en general con cualquier función polinómica), ya que nuevamente no habrá ningún valor de x para el cual no se pueda realizar esa cuenta. Es decir que:

$$\boxed{Dom(g) = \mathbb{R}}$$

Sabemos por otro lado que, al ser una **función cuadrática** su **gráfica será una parábola**. Para graficar una parábola hay varios métodos. Ya vieron en el capítulo 3 que una forma de graficarlas es en base a su ecuación canónica, viendo dónde está el vértice y hacia dónde apuntan las ramas. Si en este caso pensamos a $y = g(x)$, entonces obtenemos la siguiente ecuación:

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

Y si completamos cuadrados y llevamos a la forma canónica (ver ejemplo página 39 del libro de cátedra) obtenemos:

$$-(x-1)^2 = y - 4$$

Que podemos ver que es una parábola con vértice $V(1,4)$, eje vertical y las ramas hacia abajo.

Otra forma en que a veces podemos graficar una parábola es en base a la intersección de esta con los ejes (cuando los tenga).

Para ver dónde la función interseca al eje y, debemos cuánto vale la función en $x = 0$, es decir:

$$\text{Intersección con el eje } y \quad \Rightarrow \quad g(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

Por lo tanto la función corta al eje y en el punto $(0,3)$.

Para ver dónde la función interseca al eje x, debemos ver dónde la función vale 0, es decir:

$$\text{Intersección con el eje } x \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \quad \text{ó} \quad x_2 = 3$$

Por lo tanto la función corta al eje x en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.
Luego además, como las parábolas son simétricas, la coordenada x del vértice (h) será el promedio de las coordenadas x de estos puntos, es decir:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

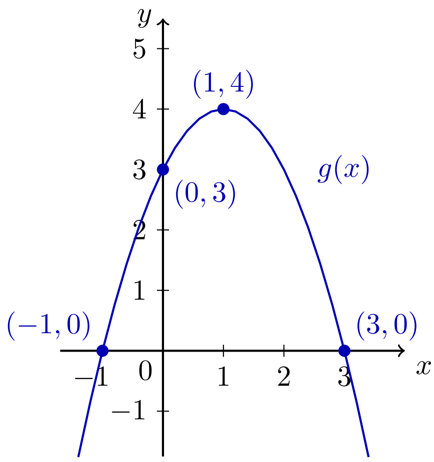
Y la coordenada y del vértice (k) vendrá dada por el valor que tome la función en h, es decir:

$$k = g(h) = g(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4$$

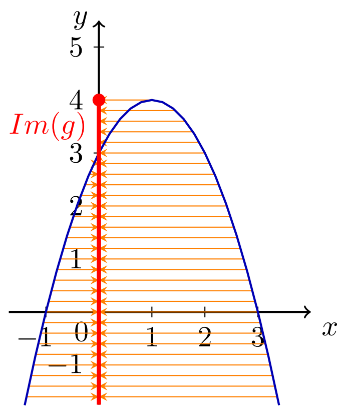
Por lo tanto podemos ver que esta parábola tiene vértice $V(1, 4)$.

Aclaración: No es necesario que realicen los dos métodos par determinar el vértice y ver cómo es la gráfica. A veces uno de los dos métodos es más práctico que el otro. Por ejemplo, a veces la parábola no corta a uno de los ejes, y en esos casos es mejor recurrir al primer método. Incluso pueden combinar métodos, encontrando el vértice como en el primer método, y luego encontrando alguna intersección con algún eje.

Por lo tanto la gráfica de $g(x)$ resulta:



Si vemos ahora los valores que toma la función sobre el eje y, podemos ver que en este caso no podrá tomar cualquier valor. Vemos que claramente la función nunca toma un valor superior a 4, pero sin embargo sigue indefinidamente hacia los valores negativos. Nuevamente esto puede verse si nos imaginamos que trasladamos horizontalmente todos los puntos de la función hacia el eje y (marcado aquí con flechas naranjas, pero ustedes no deben graficarlas, sólo imaginarlas, al igual que la imagen de la función que aquí la marcamos en rojo, pero ustedes tampoco deben marcarla así).
Por lo tanto la imagen de la función g resulta:



$$\boxed{Im(g) = (-\infty, 4]}$$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x+1} + 2$

En este caso tenemos una función donde aparece una fracción con nuestra incógnita en el denominador. Como sabemos que no podemos dividir por 0, deberemos tener esto en cuenta para calcular el dominio de la función. En este caso el denominador se anula cuando:

$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

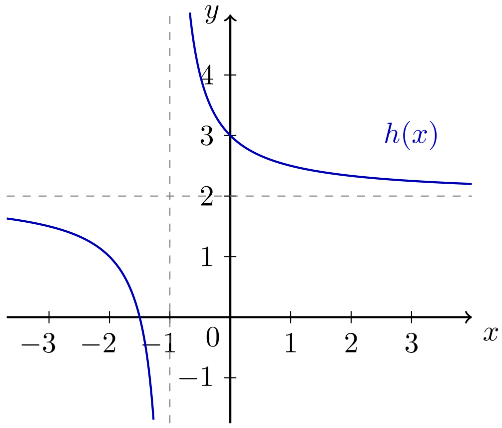
Entonces esta función estará definida para cualquier número **excepto** el -1. Por lo tanto resulta que:

$$\boxed{Dom(h) = \mathbb{R} - \{-1\}}$$

Por otro lado, para realizar la gráfica de esta función podemos ver que si hacemos $y = h(x)$ nos queda la ecuación:

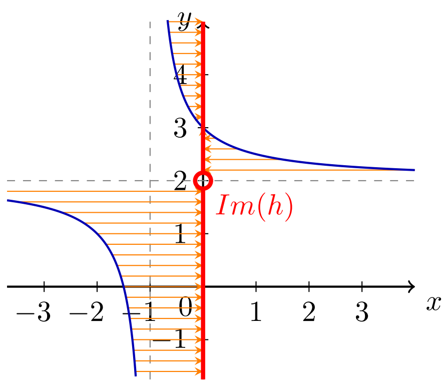
$$y = \frac{1}{x+1} + 2 \quad \Rightarrow \quad y - 2 = \frac{1}{x+1}$$

Que es la ecuación de una hipérbola, con centro $C(-1, 2)$, con constante $t = 1$ y con un numerador de signo positivo, entonces su gráfica será (ver páginas 40 a 43 del libro de cátedra):



Nótese que la línea punteada vertical que trazamos para graficar la hipérbola coincide con el valor de x que no está en el dominio de la función. **Siempre que una función tenga un valor que no esté en su dominio, la gráfica de la función no podrá cruzar por encima de este valor**.

Si analizamos ahora los valores que toma la función sobre el eje y, podemos ver que la función crece indefinidamente tanto para valores positivos como para valores negativos. Sin embargo, si miramos con cuidado, vemos que hay un valor que la función nunca toma, que en este caso es 2. Este valor coincide con la recta horizontal punteada que trazamos para graficar la hipérbola, y este será el único valor que no estará en la imagen de la función h.



Recuerden que el gráfico que se muestra aquí al lado contiene muchos elementos que ustedes no deben graficar, pero si que pueden pensar a la hora de determinar la imagen de una función.

En este caso entonces tenemos que:

$$\boxed{Im(h) = \mathbb{R} - \{2\}}$$

d) $s(x) = \sqrt{2-x} - 1$

En este caso nos encontramos con una función que tiene una raíz de índice par y nuestra variable se encuentra dentro de su argumento. Por esta razón, esta función estará definida cuando el argumento de dicha raíz sea positivo (o cero). Por lo tanto, para ver el dominio de la función s:

$$s(x) = \sqrt{\underbrace{2-x}_{\geq 0}} - 1 \quad \Rightarrow \quad 2 - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \geq x \quad \Rightarrow \quad x \leq 2$$

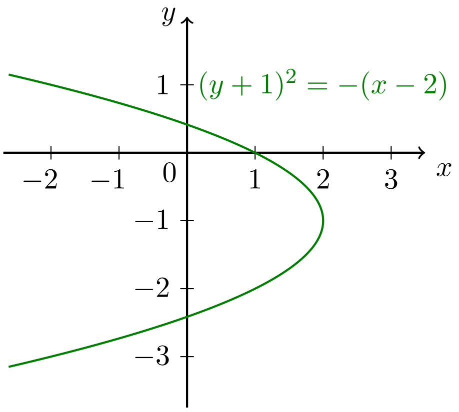
Por lo tanto el dominio de la función s resulta:

$$\boxed{Dom(s) = (-\infty, 2]}$$

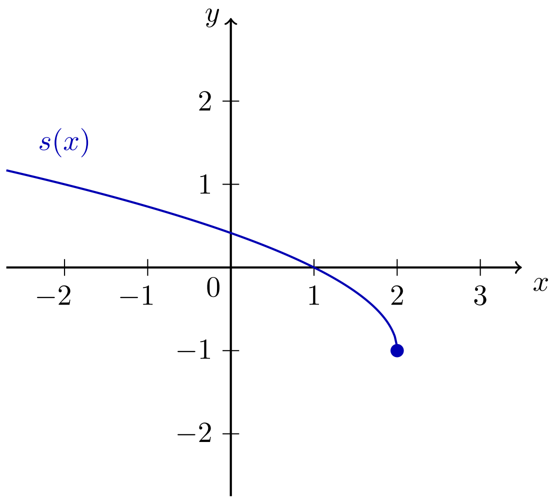
Ahora bien, para trazar la gráfica de esta función, podemos nuevamente recurrir a pensar a $y = s(x)$ y analizar la ecuación que nos queda, para ver si se corresponde con algo que conozcamos. La ecuación que nos queda sería:

$$y = \sqrt{2-x} - 1 \quad \Rightarrow \quad y + 1 = \sqrt{2-x} \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2 = -x + 2 \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2 = -(x-2)$$

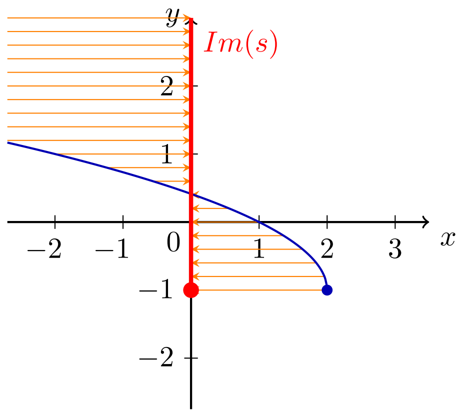
Que se trata de la ecuación de una parábola con vértice $V(2,-1)$, eje horizontal y las ramas hacia la izquierda (ver páginas 39 y 40 del libro de cátedra). Pero si analizamos el gráfico de esta parábola (ver imagen contigua), podemos apreciar que **este gráfico no puede corresponder a la gráfica de una función, ya que para un mismo valor de x hay más de un valor de y**. Sin embargo la gráfica de $s(x)$ estará relacionada con esta parábola. En este caso (como la raíz tiene adelante un signo positivo implícito) se tratará de la rama superior de dicha parábola. Si en cambio nuestra función hubiese sido $t(x) = -\sqrt{2-x} - 1$ su gráfica hubiese sido la rama inferior.



Por lo tanto la gráfica de $s(x)$ resulta:



Si ahora observamos los valores que toma la función sobre el eje y, podemos ver que nunca toma valores por debajo de -1, pero sin embargo crece indefinidamente hacia arriba.
También podríamos hacer el mismo análisis que veníamos haciendo hasta ahora, imaginando que trasladamos horizontalmente los puntos de la gráfica y viendo qué conjunto determinarían éstos sobre el eje y.
De cualquiera de las dos formas obtenemos que la imagen de la función s resulta:



$$\boxed{Im(s) = [-1, +\infty)}$$

Observando el gráfico podemos determinar cuán populares fueron en Google ciertos momentos de la vida del jugador argentino, en relación a otros hechos ocurridos en sendos países en el mismo momento. Por ejemplo, el clásico Real Madrid vs. Barcelona (semana 16) fue completamente popular en España, mientras que en Argentina solamente llegó a la mitad de ese nivel (aunque vimos antes que fue lo más popular en YouTube en Argentina). También podemos decir que el casamiento y la clasificación a la Copa de Mundo tuvieron la mitad de popularidad relativa en España respecto a la que tuvieron en Argentina. «

Ejercicios 5.1

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2x^3 + x + 5$. Hallar la imagen a través de f de $x = 2$, $x = 0$ y $x = -1$.

2. Sea $g(x) = \sqrt{3x-6}$. Hallar el dominio de g. Luego, escoger un valor c en dicho dominio y calcular $g(c)$.

3. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-16x+64}$

(b) $g(x) = \frac{\sqrt{-2x+8}}{x^3+x^2}$

(c) $h(x) = \frac{1}{\log(x^2+10x+25)}$

(d) $r(x) = \frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{\log(x+1)}$

4. Ubicar los siguientes puntos en un mismo sistema de ejes coordenados:

(a) $P_1 = (-2, 4)$

(b) $P_2 = (0, -1)$

(c) $P_3 = (-3, -3)$

(d) $P_4 = (1, 2)$

(e) $P_5 = (2, -3)$

(f) $P_6 = (3, 0)$

5. Sea a un número real positivo. Determinar a qué cuadrante pertenecen los siguientes puntos:

(a) $P = (-a, 2a)$

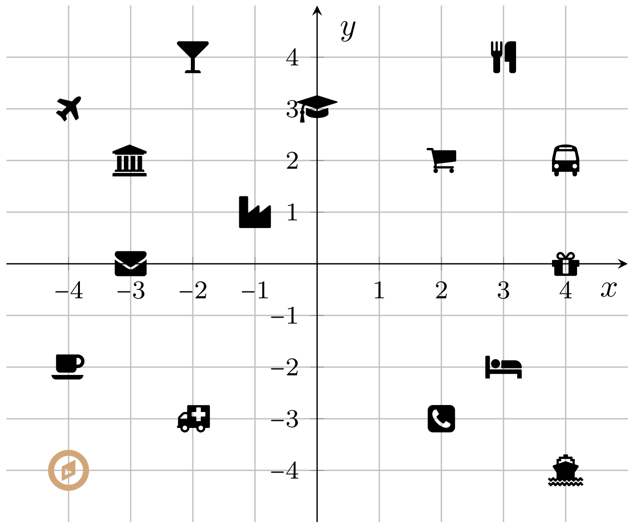
(b) $Q = (a, 4)$

(c) $R = (1, -a)$

(d) $S = (-\sqrt{a}, -2)$

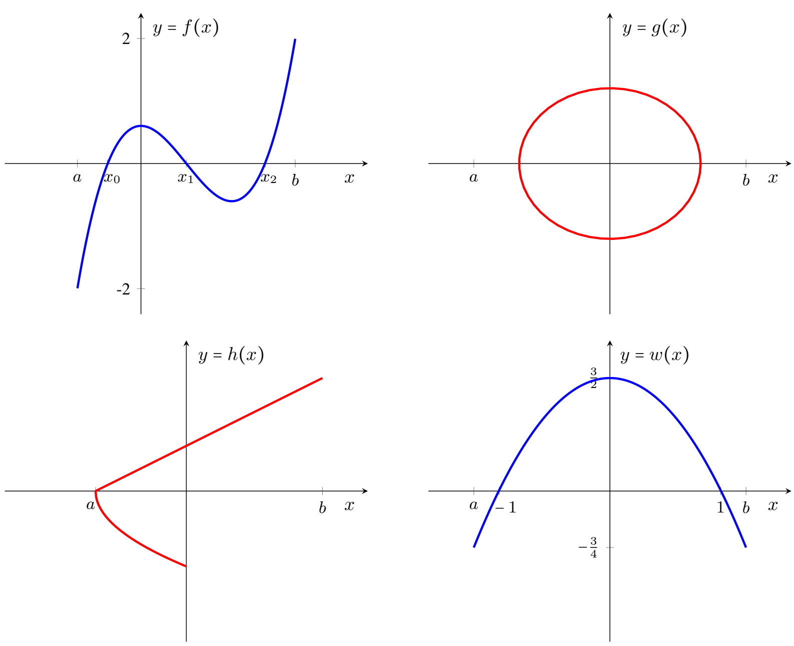
6. Observando los dibujos en el siguiente plano, indicar las coordenadas de cada sitio, suponiendo que estas son siempre números enteros:

Universidad =	Hospital =	Fábrica =
Shopping =	Cafetería =	Banco =
Bar de tragos =	Autobús =	Puerto =
Supermercado =	Telefónica =	Hotel =
Comedor =	Aeropuerto =	Correo =



7. Sea $f(x) = -x^2 + 3$. Representar en un mismo gráfico los puntos $(x, f(x))$, para $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, $x = \sqrt{2}$ y $x = \sqrt{3}$. Unir dichos puntos con línea punteada para ver el aspecto de la gráfica de f.

8. Determinar si los gráficos en la figura siguiente corresponden o no a funciones con dominio $[a, b]$. En caso de no serlo, indicar qué condiciones no se cumplen. En caso de serlo, determinar su imagen y sus raíces, si las tiene.



9. Hallar analíticamente las raíces de las siguientes funciones (recordar que deben pertenecer al dominio).

(a) $f(x) = x^2 + x - 30$

(b) $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

(c) $q(x) = \sqrt[3]{x^2 - 25}$

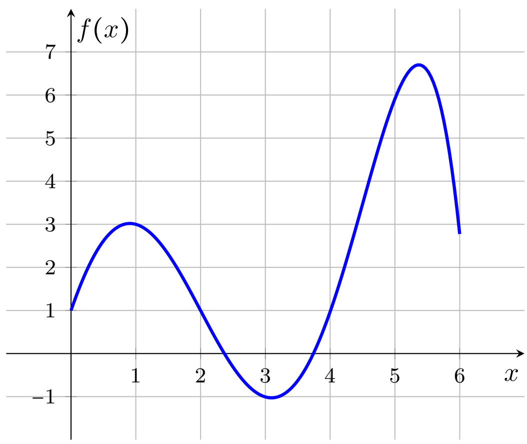
(d) $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

(e) $h(x) = \frac{\log(x^2-3)}{x+2}$

(f) $w(x) = \frac{(x-1)\sqrt{3x^2-27}}{x+3}$

10. Representar en GeoGebra las funciones del ejercicio anterior, y hallar la intersección de cada una con el eje x para comparar con lo obtenido.

11. La representación gráfica de una función $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ es la siguiente:



A partir de ella, resolver las siguientes consignas:

(a) ¿Cuál es la imagen de $x = 1$ a través de f?

(b) Determinar $f(5)$.

(c) Hallar un valor de x tal que $f(x) < 0$.

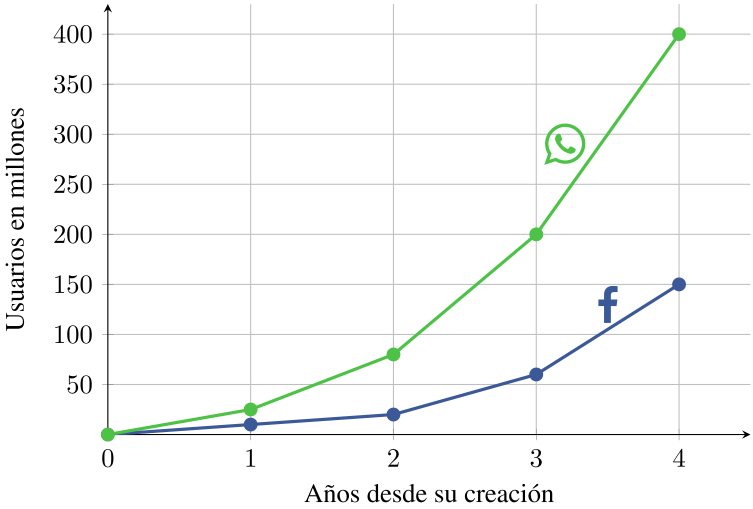
(d) ¿Para qué valores de x se tiene $f(x) = 1$?

(e) ¿Cuántas raíces tiene f?

(f) ¿Cuántos valores de x satisfacen $f(x) = 5$?

(g) Determinar si $y = 7$ pertenece a la imagen de f.

12. El siguiente gráfico muestra el crecimiento en la cantidad de usuarios de Facebook y WhatsApp durante los primeros años desde su creación*.



Teniendo en cuenta que el lanzamiento de WhatsApp fue en 2009, y el de Facebook en 2004, responder las siguientes preguntas de acuerdo a lo que indica el gráfico:

(a) Indicar a qué años corresponde la información dada en el gráfico para cada una de las compañías.

(b) Determinar la cantidad aproximada de usuarios de WhatsApp en 2012 y 2013.

(c) Determinar la cantidad aproximada de usuarios de Facebook en 2007 y 2008.

(d) ¿En qué año WhatsApp alcanzó los 200 millones de usuarios?

(e) Determinar, para cada compañía, el incremento aproximado de usuarios producido desde el segundo hasta el tercer año, a partir de su creación.

13. El gráfico en la Figura 5.3 ilustra la cantidad de usuarios activos en diferentes redes sociales y servicios de mensajería, desde 2013 hasta 2017. A partir de esta información, responder lo siguiente:

(a) Indicar la cantidad aproximada de usuarios activos en cada red social o aplicación al finalizar el año 2017.

(b) Determinar la cantidad aproximada de usuarios que poseía WhatsApp al momento de ser comprada por Facebook, en febrero de 2014. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que esta cantidad se duplica?

*Todos los datos son ilustrativos, y pueden no ser completamente exactos.

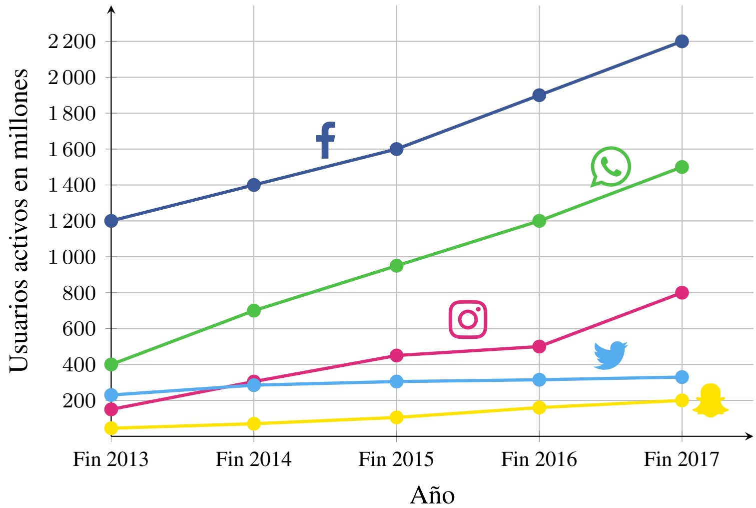


Figura 5.3: Usuarios activos.

(c) ¿Cuándo alcanza Facebook los 1400 millones de usuarios? En ese momento, ¿qué aplicación o red social tiene casi la mitad de usuarios que Facebook? ¿Cuáles tienen casi la cuarta parte?

(d) Indicar el momento aproximado en que la cantidad de usuarios de Instagram comienza a superar a la de Twitter, y cuál es esa cantidad.

(e) ¿Qué redes o aplicaciones no alcanzaron los 800 millones de usuarios en el período informado? ¿Cuáles superaron los 1000 millones?

(f) Hay dos redes o aplicaciones que sextuplican en algún momento la cantidad de usuarios que tiene Snapchat al finalizar 2017. Indicar cuáles son y cuándo alcanzan dicha cantidad.

14. Se cuenta con la siguiente información sobre Instagram:

Se crea Instagram en octubre de 2010.

En 2011 añade hashtags, filtros y efectos, para aumentar los “Me gusta”.

El 3 de abril de 2012 se lanza la versión para Android.

El 9 de abril de 2012 es adquirido por Facebook.

A partir de agosto de 2012 permite etiquetar lugares.

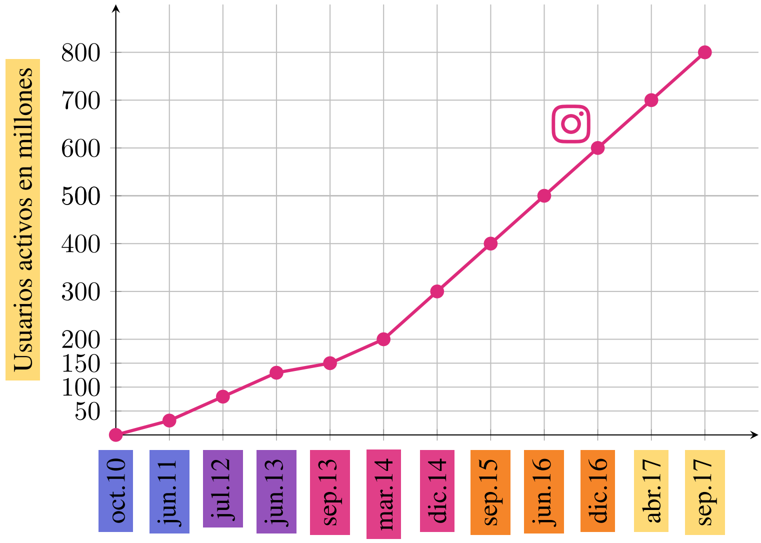
Desde mayo de 2013 permite etiquetar a personas.

En junio de 2013 incorpora videos.

En diciembre de 2013 añade Instagram Direct, para mensajes privados.

En agosto de 2016 llegan las Instagram Stories (historias).

Además, el gráfico siguiente contiene información sobre la cantidad de usuarios activos en Instagram desde su creación hasta el año 2017.



Teniendo en cuenta el gráfico y la información dada, resolver las siguientes consignas:

(a) Cuando es comprado por Facebook, ¿cuántos usuarios activos tenía aproximadamente Instagram?

(b) Indicar la cantidad aproximada de usuarios activos que tenía Instagram al momento de incorporar los videos.

(c) ¿Cuántos usuarios activos había en septiembre de 2013?

(d) Determinar la cantidad de usuarios que había a los 3 meses de haberse incorporado los mensajes privados.

(e) ¿Cuántos usuarios activos había al finalizar el año en el que Instagram introduce las historias?

(f) Indicar el momento en el que se llegó al medio millón de usuarios.

(g) En los dos últimos años contemplados en el gráfico, ¿qué cantidad de usuarios activos se agregó?

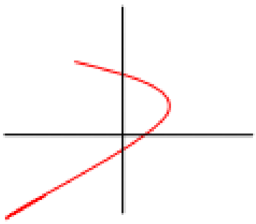
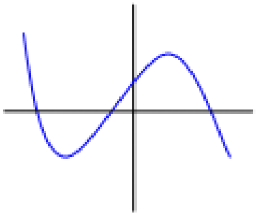
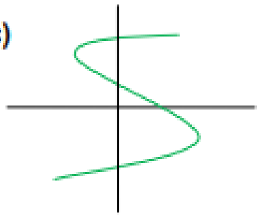
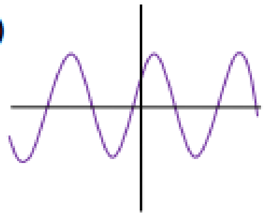
15. Mediante el uso de una tabla de signos como en el Ejemplo 150, esbozar la gráfica de las siguientes funciones polinómicas.

(a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3x + 4$

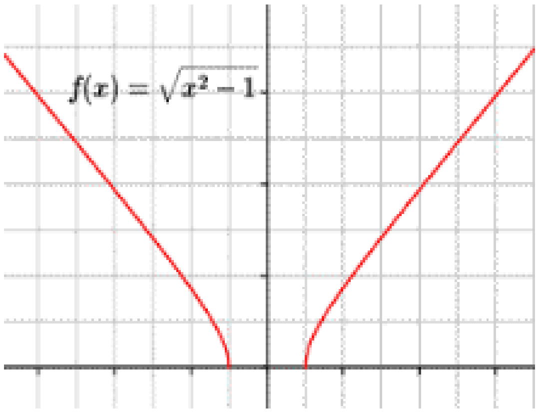
(b) $g(x) = x^3 - 7x + 6$

(c) $h(x) = x^3 + 2x^2 - 33x - 90$

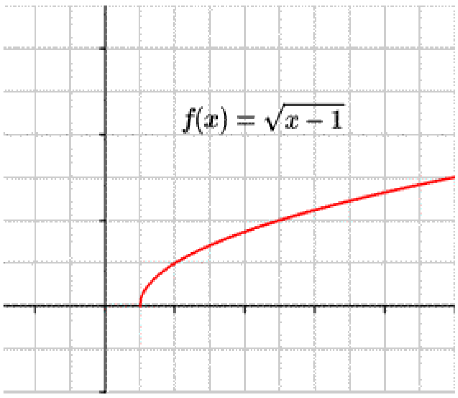
1. ¿Cuál de las siguientes graficas corresponde a una función de dominio real? Justifica tu respuesta

a)  b)  c)  d) 

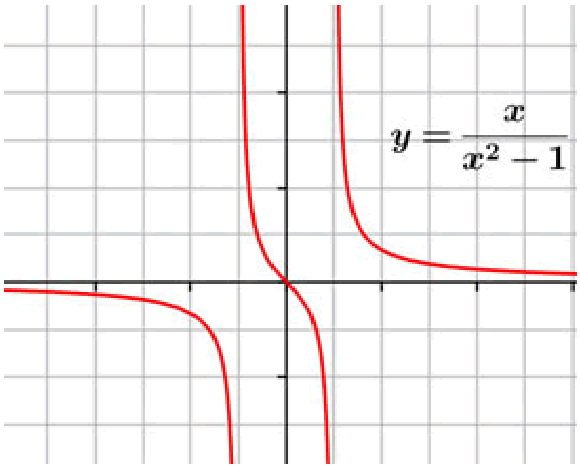
2. Indica el dominio y el conjunto imagen de las siguientes funciones
   A. Dominio: ____________________ Conjunto Imagen: _____________________



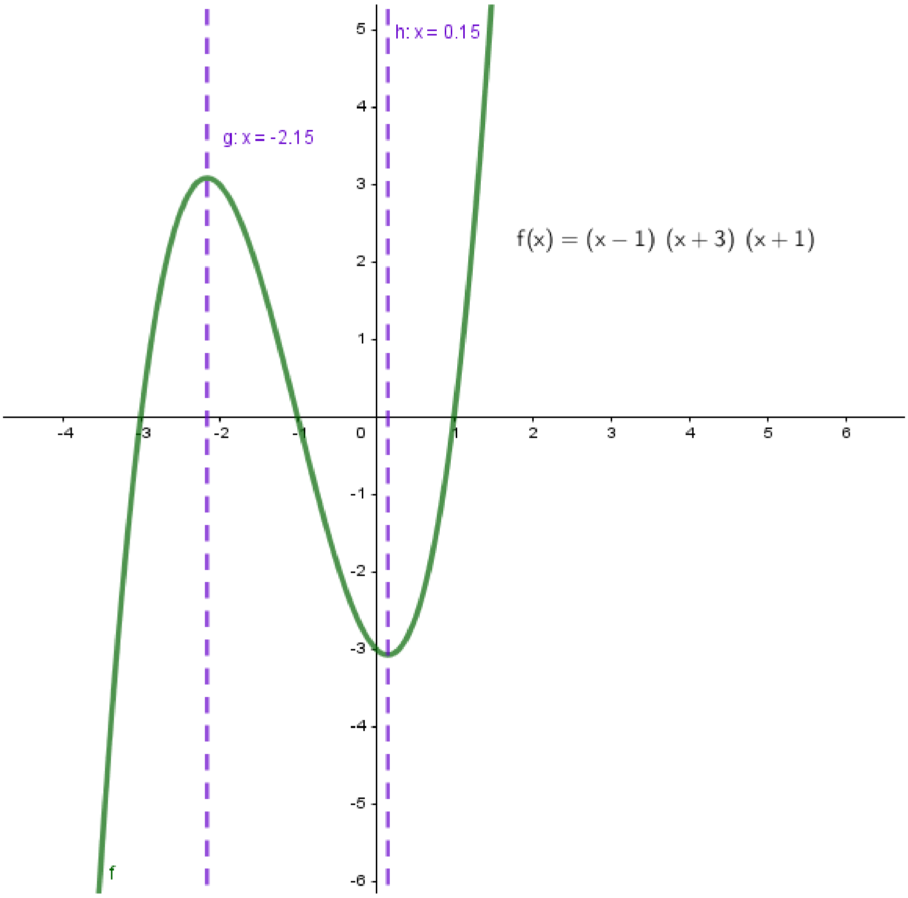
   B. Dominio: ____________________ Conjunto Imagen: _____________________

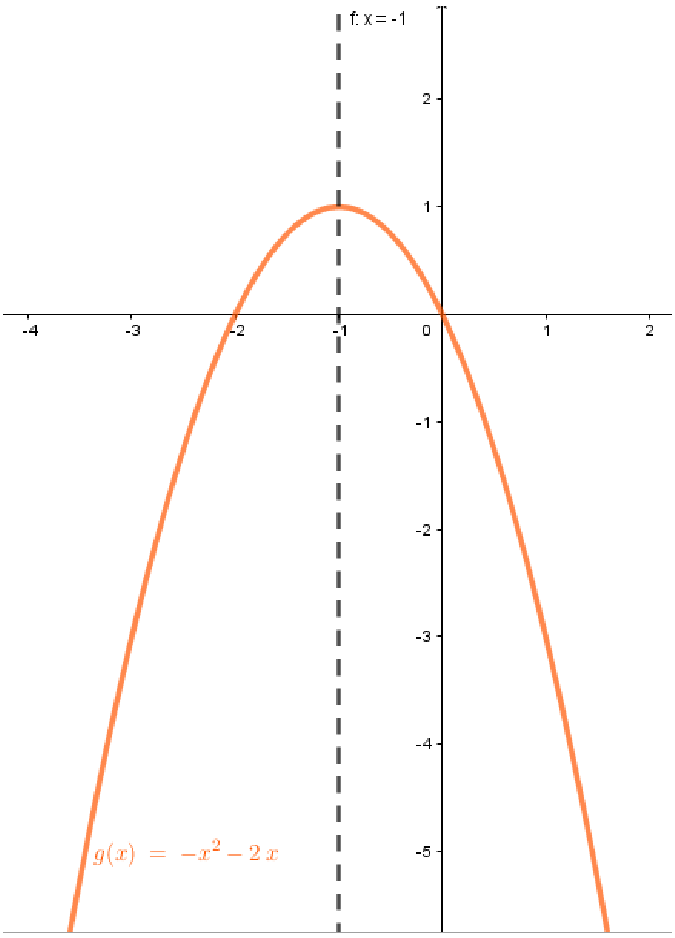


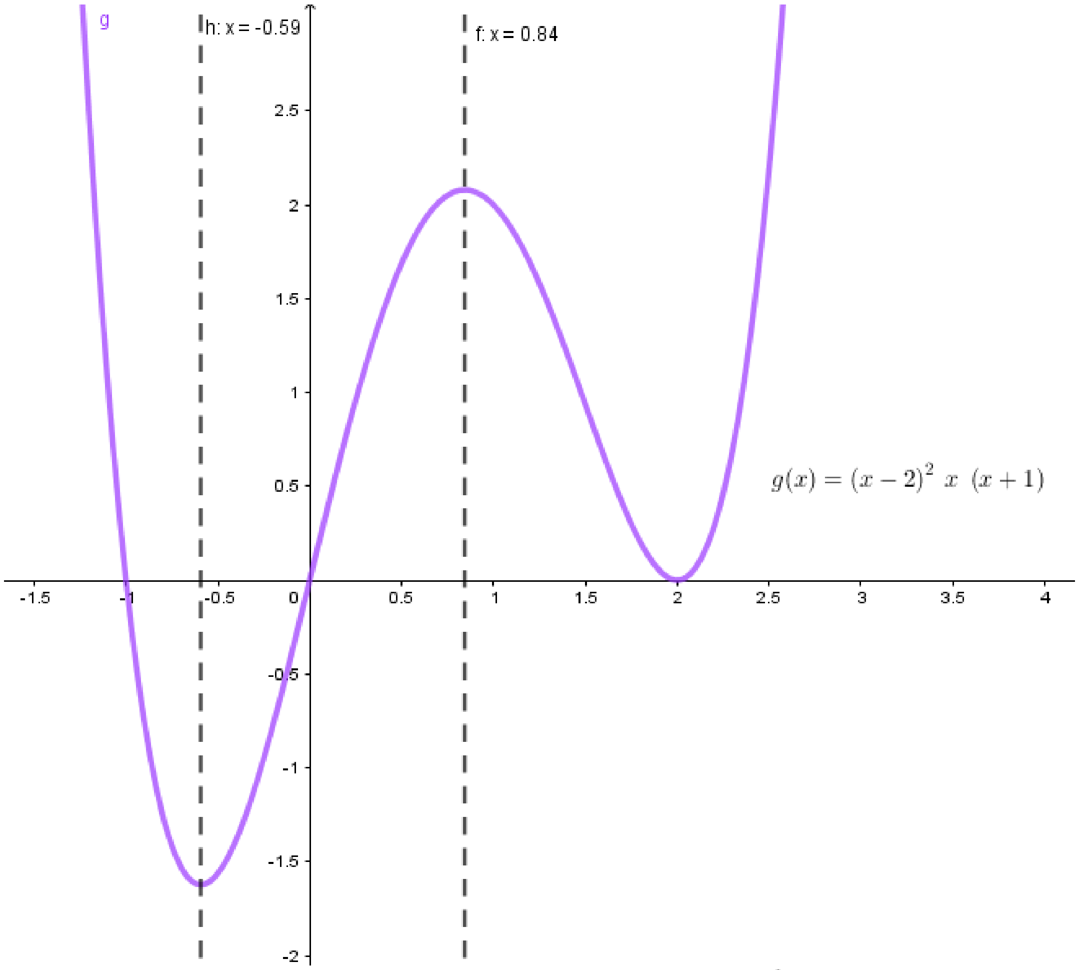
   C. Dominio: ____________________ Imagen: _____________________

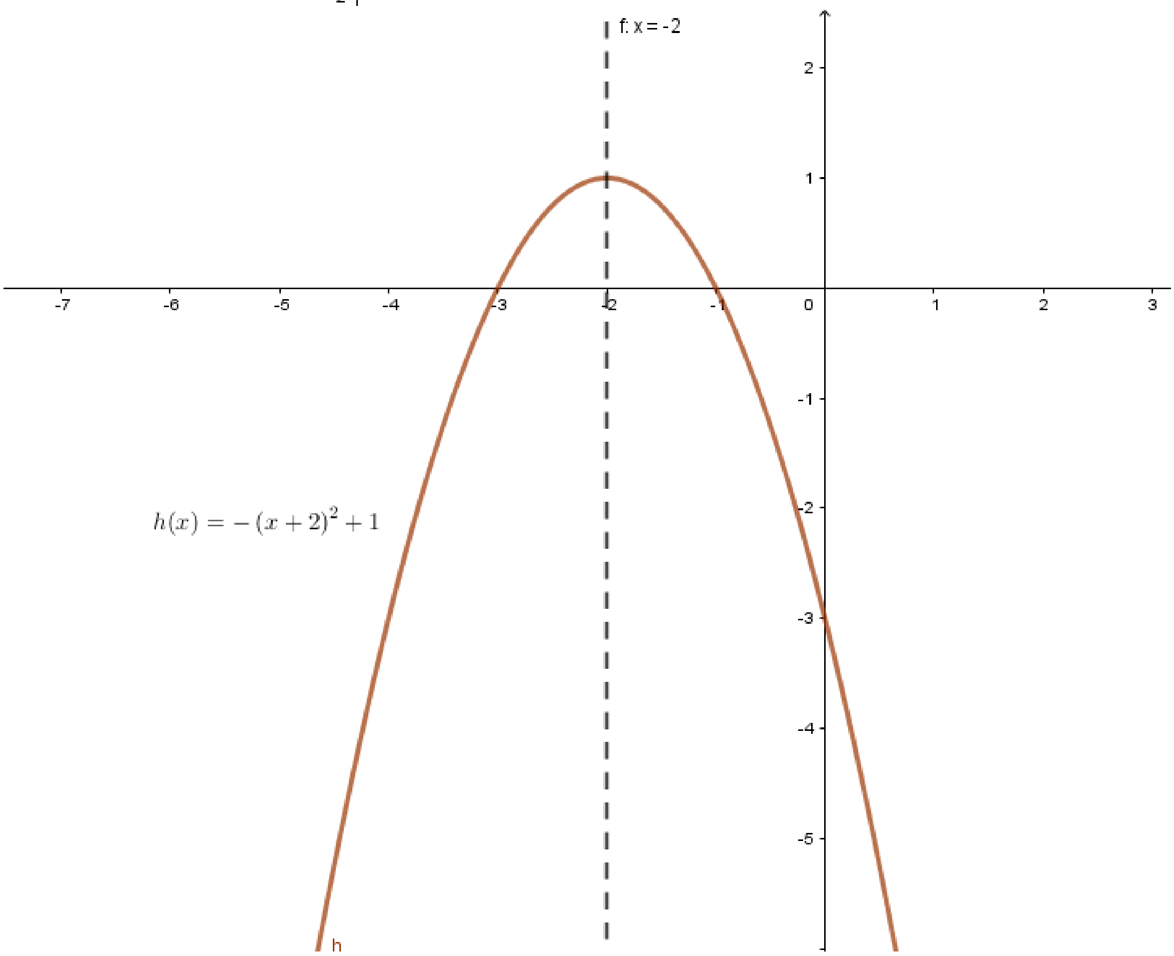


3. Analiza completamente las siguientes funciones.

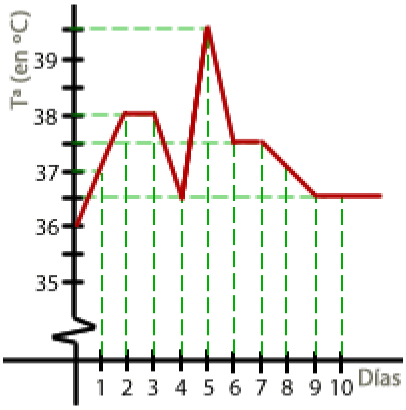





g
h: x = -0.59
f: x = 0.84
$g(x) = (x-2)^2\ x\ (x+1)$


f: x = -2
$h(x) = -(x+2)^2 + 1$
h

4. Responde a las preguntas planteadas en cada caso:



I. La gráfica muestra la temperatura media de un enfermo en cada uno de los 10 días que ha estado ingresado en el hospital.

a) ¿Qué día alcanzó la temperatura máxima?

b) ¿Cuál fue esta temperatura?

c) ¿Entre que dos días se produce la variación máxima de temperatura?

d) ¿Cuál es esta variación?

II. Juan sale de casa con el objetivo de hacer un poco de deporte. Empieza caminando a un ritmo normal y después va a diferentes ritmos alternando carrera y paseo.

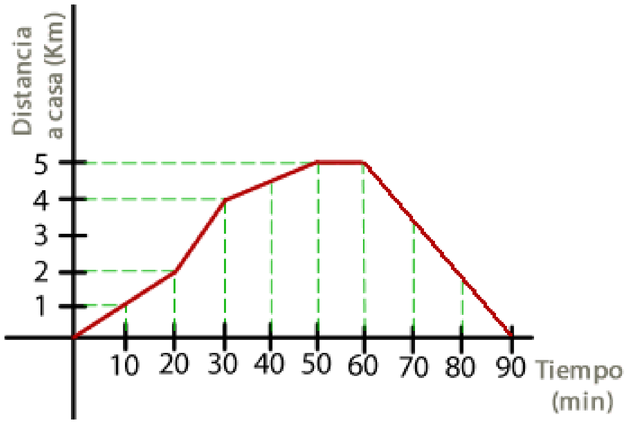
a) ¿Cuánto tiempo pasa fuera de casa?

b) ¿Durante cuánto tiempo está en movimiento?

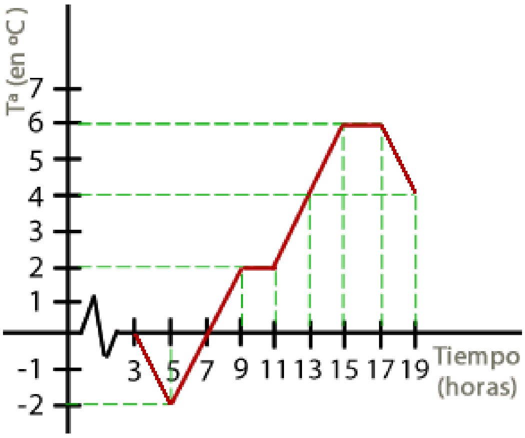
c) ¿Qué distancia ha recorrido a la media hora de salir de casa?

d) ¿Se para en algún momento?

e) ¿Cuál es el máximo tiempo que pasa Juan sin descansar?



III. La gráfica muestra la variación de temperatura durante algunas horas de un día de primavera en Cracovia.



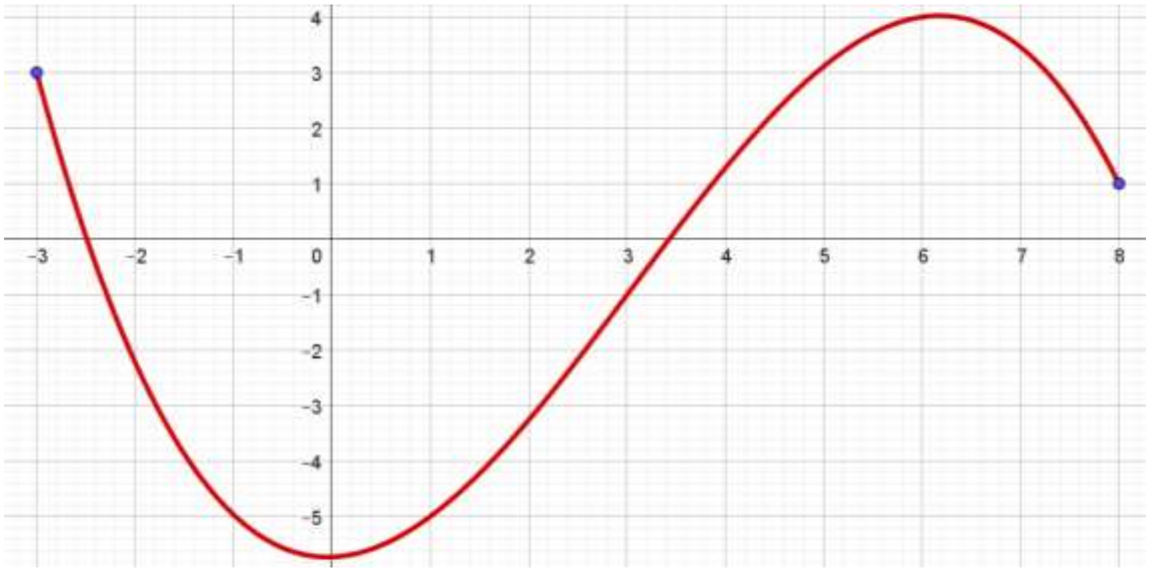
¿De cuántas horas se nos da información en dicha gráfica?

¿Qué temperatura había a las 7 de la mañana?

¿Qué temperatura había a las 10 de la mañana?

¿Cuál es la temperatura máxima que se ha alcanzado?

Grafico 1



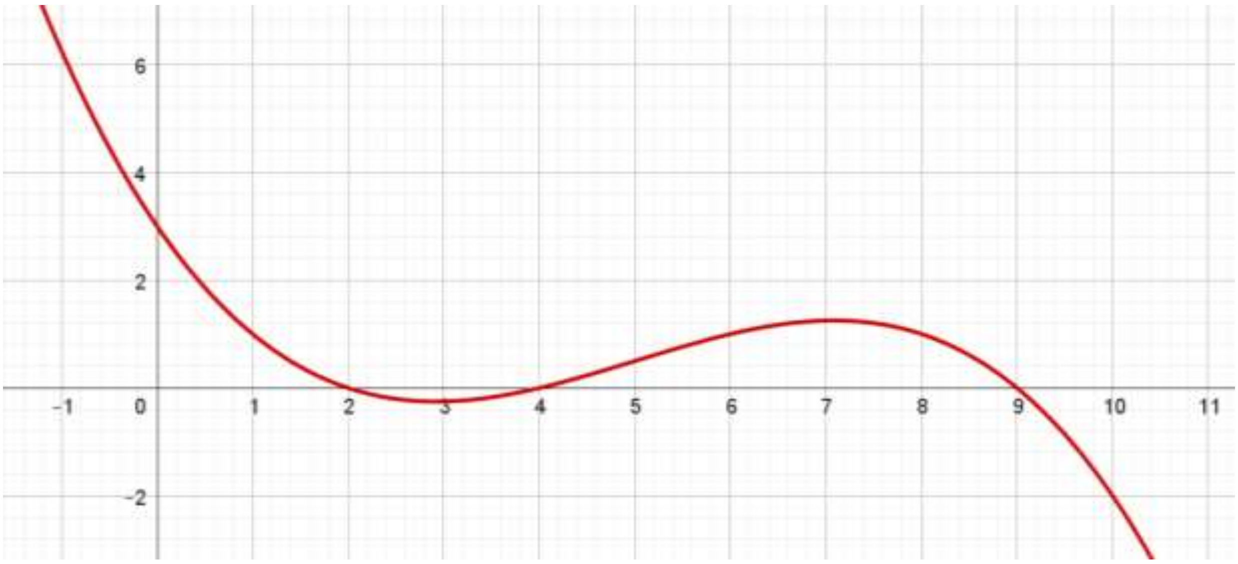
a) Analiza

- Dominio
- Conjunto imagen
- I. crecimiento
- I. decrecimiento
- C+
- C-
- Co
- Puntos de intersecciones con los ejes
- Puntos máximos y mínimos

b) Completa la tabla de valores

x	y
-3	
-2	
	4
3	
	-5,5
8	

Grafico 2



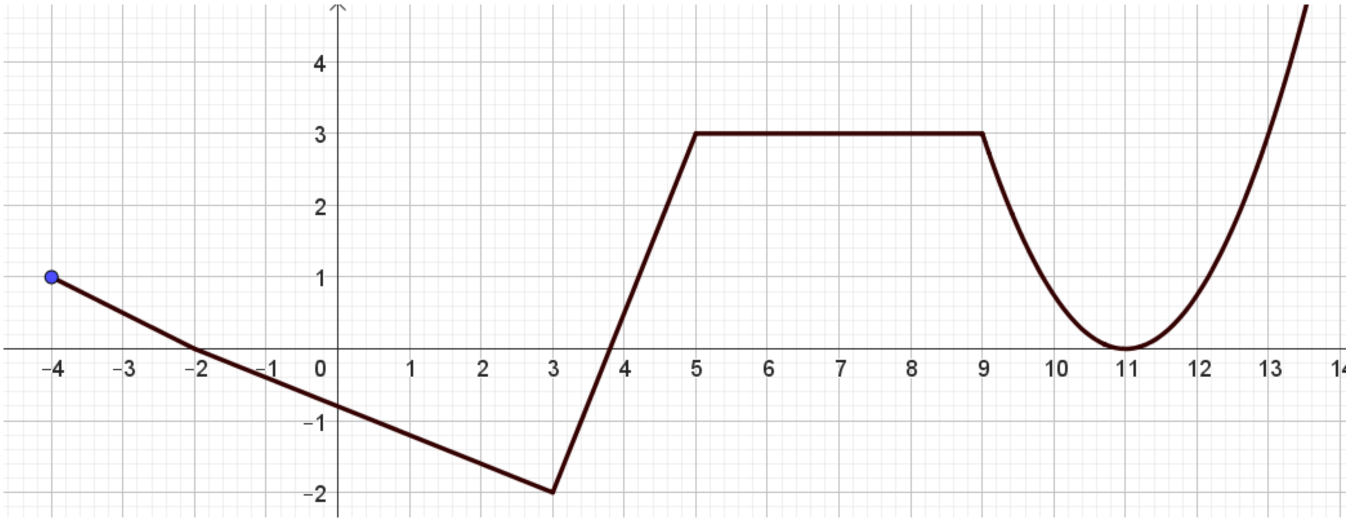
a) Analiza

- Dominio
- Conjunto imagen
- I. crecimiento
- I. decrecimiento
- C+
- C-
- Co
- Puntos de intersecciones con los ejes
- Puntos máximos y mínimos

b) Completa la tabla de valores

x	y
	3
1	
4	
6	
9	
	-2

Grafico 3



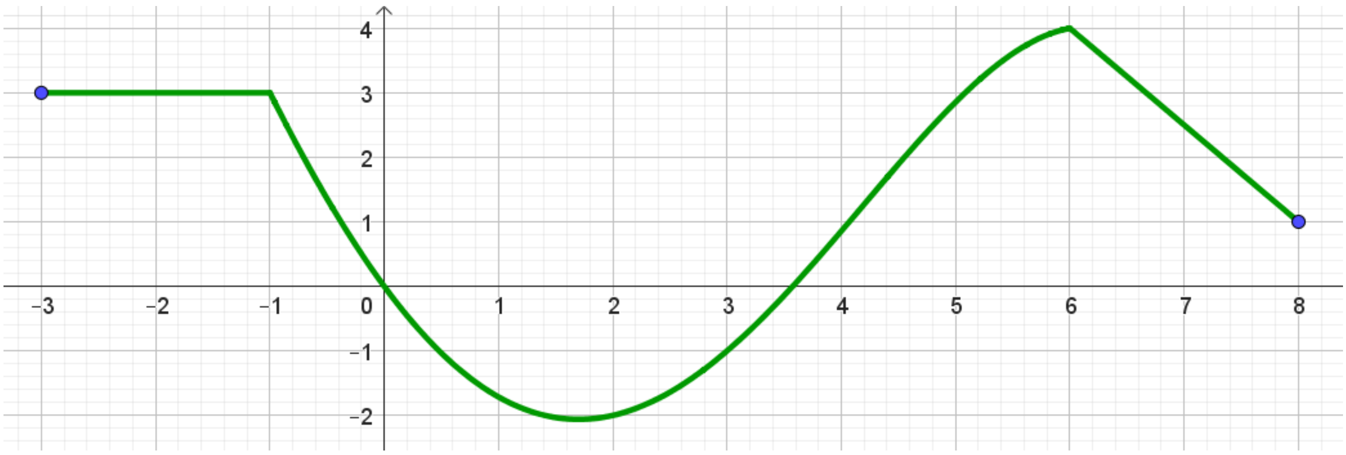
a) Analiza

- Dominio
- Conjunto imagen
- I. crecimiento
- I. decrecimiento
- C+
- C-
- Co
- Puntos de intersecciones con los ejes
- Puntos máximos y mínimos

b) Completa la tabla de valores

x	y
-4	
-2	
	-2
5	
8	
11	
	4

Grafico 4



a) Analiza

- Dominio
- Conjunto imagen
- I. crecimiento
- I. decrecimiento
- C+
- C-
- Co
- Puntos de intersecciones con los ejes
- Puntos máximos y mínimos

b) Completa la tabla de valores

x	y
-3	
-1	
	0
4	
	4
8	