

# Física

para ciencias e ingeniería

DÉCIMA EDICIÓN

Volumen 2



**SERWAY | JEWETT**

# Carta pedagógica de colores

## Mecánica y termodinámica

Desplazamiento y vectores de posición	
Vectores desplazamiento y componentes de los vectores de posición	
Vectores de velocidad lineal ( $\vec{v}$ ) y angular ( $\vec{\omega}$ )	
Vectores componentes de la velocidad	
Vectores de fuerza ( $\vec{F}$ )	
Vectores componentes de fuerza	
Vectores aceleración ( $\vec{a}$ )	
Vectores componentes de aceleración	
Flechas de transferencia de energía	  
Flecha de proceso	

vectores cantidad de movimiento lineal ( $\vec{p}$ ) y cantidad de movimiento angular ( $\vec{L}$ )	
Vectores componentes de cantidad de movimiento lineal y angular	
Vectores de momento de fuerza ( $\vec{\tau}$ )	
Vectores componentes de momento de fuerza	
Direcciones de diagramas de movimiento lineal o rotacional	
Flecha de dimensión rotacional	
Flecha ampliada	
Resortes	
Poleas	

## Electricidad y magnetismo

Líneas de campo eléctrico	
Vectores de campo eléctrico	
Vectores componentes de campo eléctrico	
Líneas de campo magnético	
Vectores de campo magnético	
Vectores componentes de campo magnético	
Cargas positivas	
Cargas negativas	
Resistencias	
Baterías y otros Fuentes de alimentación de CC	
Interruptores	

Capacitores	
Inductores (bobinas)	
Voltímetros	
Amperímetros	
Fuentes de CA	
Lamparas	
Símbolo de tierra	
Corriente	

## Luz y óptica

Rayos de luz	
Extensión del rayo de luz	
Lente convergente	
Lente divergente	

Espejo plano	
Espejo curvo	
Objetos	
Imágenes	





# Física

2

## para ciencias e ingeniería

### DÉCIMA EDICIÓN

**Raymond A. Serway**

*Emeritus, James Madison University*

**John W. Jewett, Jr.**

*Emeritus, California State Polytechnic University, Pomona*

Con las contribuciones de Vahé Peroomian, University of Southern California

#### Traducción

Ana Elizabeth García Hernández

#### Revisión técnica

Carlos Rodríguez Mota

Jesús Álvarez Maldonado

Luis Hugo Castañeda

*Escuela Superior de Ingeniería*

*Mecánica y Eléctrica*

*Instituto Politécnico Nacional*

#### Revisión técnica

Luis González Urbán

*Instituto Politécnico Nacional*

Manuel Alejandro López Zepeda

*Instituto Politécnico Nacional*

Marcela Martha Villegas Garrido

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Estado de México*

Mario Alberto Montante Garza

*Instituto Tecnológico de Querétaro*

Miguel Ángel Alonzo Flores

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente*

Omar Olmos López

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Monterrey*

Oswaldo Monroy Nava

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca*

Raymundo Escamilla Sánchez

*Universidad Autónoma del Estado de México*

Roberto Armando Hernández Gómez

*Universidad Politécnica Metropolitana de Hidalgo*

Rodolfo Felix Acosta

*Universidad LaSalle del Noroeste*

Rodolfo Rodríguez y Masegosa

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Monterrey*

Samuel Rosalío Cuevas

*Universidad de Guadalajara*

Yoram Astudillo Baza

*Instituto Politécnico Nacional*

#### Costa Rica

Fernando Ureña Elizondo

*Universidad de Costa Rica*

Germán Vidaurre

*Universidad de Costa Rica*

#### México

Adrián Arreola Pérez

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Querétaro*

Alfonso Serrano Heredia

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Monterrey*

Aurelio Domínguez González

*Universidad Autónoma de Querétaro*

Carlos Alberto Pereyda Pierre

*Instituto Tecnológico de Hermosillo*

Claudia Camacho Zuñiga

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca*

Eric Gutiérrez García

*Instituto Tecnológico de Toluca*

Fredy Jiménez Rojas

*Instituto Tecnológico de Celaya*

Jaime Castillo Torres

*Universidad Iberoamericana*

Jaime Jiménez

*Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca*

José García Romero

*Universidad Autónoma del Estado de México*

José Luis Luna Segovia

*Instituto Tecnológico de Celaya*

Juan Javier Zapata Romano.

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente*

Juan Méndez Ramírez

*Tecnológico de Estudios Superiores de Jocotitlán*

Judith Pérez Morales

*Universidad Autónoma del Estado de México*

Lucio López Cavazos

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Querétaro*





**Física para ciencias e ingeniería 2****Décima edición**

Raymond A. Serway

John W. Jewett, Jr.

**Director Higher Education****Latinoamérica:**

Renzo Casapía Valencia

**Gerente editorial Latinoamérica:**

Jesús Mares Chacón

**Editor Senior Hardside:**

Pablo Miguel Guerrero Rosas

**Coordinador de manufactura:**

Rafael Pérez González

**Diseño de portada:**

Edgar Maldonado Hernández

**Imágenes de portada:**

Zhang Jian/Chengdu Economic Daily/

VCG/Getty Images

**Composición tipográfica:**

By Color Soluciones Gráficas

© D.R. 2018 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Carretera México-Toluca núm. 5420, oficina 2301. Col. El Yaqui. Del. Cuajimalpa. C.P. 05320. Ciudad de México.

Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial. Reg. 453

**Traducido del libro:**

Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics

Volume 2, Tenth Edition

Raymond A. Serway, John W. Jewett, Jr

© 2019

ISBN: 978-1-337-55358-2

**Datos para catalogación bibliográfica:**

Serway, Raymond A. y Jewett, John W

Física para ciencias e ingeniería 2,

Décima edición

ISBN: 978-607-526-672-5

Visite nuestro sitio web en:

<http://latinoamerica.cengage.com>

*Dedicamos este libro a nuestras esposas  
Elizabeth y Lisa,  
y a todos nuestros hijos y nietos,  
por su amorosa comprensión cuando  
pasamos tiempo escribiendo en lugar de estar con ellos.*



# Contenido Breve

## P A R T E 4 Electricidad y magnetismo 587

- 22 Campos eléctricos 588
- 23 Distribuciones continuas de carga y Ley de Gauss 615
- 24 Potencial eléctrico 636
- 25 Capacitancia y materiales dieléctricos 663
- 26 Corriente y resistencia 691
- 27 Circuitos de corriente directa 713
- 28 Campos magnéticos 742
- 29 Fuentes del campo magnético 771
- 30 Ley de Faraday 797
- 31 Inductancia 824
- 32 Circuitos de corriente alterna 847
- 33 Ondas electromagnéticas 873

## P A R T E 5 Luz y óptica 897

- 34 Naturaleza de la luz y leyes de óptica geométrica 898
- 35 Formación de las imágenes 925
- 36 Óptica ondulatoria 962
- 37 Patrones de difracción y polarización 983

## P A R T E 6 Física moderna 1011

- 38 Relatividad 1012
- 39 Introducción a la física cuántica 1048
- 40 Mecánica cuántica 1079
- 41 Física atómica 1105
- 42 Moléculas y sólidos 1144
- 43 Física nuclear 1177
- 44 Física de partículas y cosmología 1225



# Contenido

Acerca de los autores x  
Prefacio xi  
Al estudiante xxvi

## P A R T E 4 Electricidad y magnetismo 587

### 22 Campos eléctricos 588

- 22.1 Propiedades de las cargas eléctricas 589
- 22.2 Objetos cargados mediante inducción 591
- 22.3 Ley de Coulomb 593
- 22.4 Análisis de un modelo: Partícula en un campo (eléctrico) 598
- 22.5 Líneas de campo eléctrico 603
- 22.6 Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme 605

### 23 Campo eléctrico de una distribución continua de carga y Ley de Gauss 615

- 23.1 Campo eléctrico de una distribución continua de carga 616
- 23.2 Flujo eléctrico 620
- 23.3 Ley de Gauss 623
- 23.4 Aplicación de la ley de Gauss a varias distribuciones de carga 6252

### 24 Potencial eléctrico 636

- 24.1 Diferencia de potencial y potencial eléctrico 637
- 24.2 Diferencia de potencial en un campo eléctrico uniforme 639
- 24.3 Potencial eléctrico y energía potencial debidas a de cargas puntuales 642
- 24.4 Obtención del valor del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico 645
- 24.5 Potencial eléctrico debido a distribuciones de carga continua 646
- 24.6 Conductores en equilibrio electrostático 651

### 25 Capacitancia y materiales dieléctricos 663

- 25.1 Definición de capacitancia 664
- 25.2 Cálculo de la capacitancia 665
- 25.3 Combinaciones de capacitores 668
- 25.4 Energía almacenada en un capacitor cargado 672
- 25.5 Capacitores con material dieléctrico 676
- 25.6 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico 678
- 25.7 Una descripción atómica de los materiales dieléctricos 681

### 26 Corriente y resistencia 691

- 26.1 Corriente eléctrica 692
- 26.2 Resistencia 694
- 26.3 Un modelo para la conducción eléctrica 699
- 26.4 Resistencia y temperatura 701
- 26.5 Superconductores 702
- 26.6 Potencia eléctrica 703

### 27 Circuitos de corriente directa 713

- 27.1 Fuerza electromotriz 714
- 27.2 Resistores en serie y en paralelo 716
- 27.3 Leyes de Kirchhoff 723
- 27.4 Circuitos RC 726
- 27.5 Cableado doméstico y seguridad eléctrica 732

### 28 Campos magnéticos 742

- 28.1 Análisis de un modelo: Partícula en un campo (magnético) 743
- 28.2 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme 748
- 28.3 Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético 752
- 28.4 Fuerza magnética que actúa sobre un conductor que transporta corriente 755
- 28.5 Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme 757
- 28.6 El efecto Hall 761

### 29 Fuentes del campo magnético 771

- 29.1 Ley de Biot-Savart 772
- 29.2 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos 777
- 29.3 Ley de Ampère 779
- 29.4 Campo magnético de un solenoide 782
- 29.5 Ley de Gauss en magnetismo 784
- 29.6 Magnetismo en la materia 786

### 30 Ley de Faraday 797

- 30.1 Leyes de inducción de Faraday 798
- 30.2 Fem de movimiento 801
- 30.3 Ley de Lenz 805
- 30.4 Fem inducida y campos eléctricos 808
- 30.5 Generadores y motores 810
- 30.6 Corrientes de Eddy 814

### 31 Inductancia 824

- 31.1 Autoinducción e inductancia 825
- 31.2 Circuitos RL 827
- 31.3 Energía en un campo magnético 830
- 31.4 Inductancia mutua 832
- 31.5 Oscilaciones en un circuito LC 834
- 31.6 Circuito RLC 837



**32 Circuitos de corriente alterna 847**

- 32.1 Fuentes CA 848
- 32.2 Resistores en un circuito CA 848
- 32.3 Inductores en un circuito CA 851
- 32.4 Condensadores en un circuito CA 854
- 32.5 Circuito RLC en serie 856
- 32.6 Potencia en un circuito CA 859
- 32.7 Resonancia en un circuito RLC en serie 861
- 32.8 El transformador y la transmisión de potencia 863

**33 Ondas electromagnéticas 873**

- 33.1 Corriente de desplazamiento y la forma general de la ley de Ampère 874
- 33.2 Ecuaciones de Maxwell y los descubrimientos de Hertz 876
- 33.3 Ondas electromagnéticas planas 878
- 33.4 Energía transportada por ondas electromagnéticas 882
- 33.5 Cantidad de movimiento y presión de radiación 884
- 33.6 Producción de ondas electromagnéticas por una antena 886
- 33.7 El espectro de las ondas electromagnéticas 887

## P A R T E 5

# Luz y óptica 897

**34 Naturaleza de la luz y leyes de óptica geométrica 898**

- 34.1 Naturaleza de la luz 899
- 34.2 Aproximación de un rayo en óptica geométrica 901
- 34.3 Análisis de un modelo: La onda bajo reflexión 902
- 34.4 Análisis de un modelo: La onda bajo refracción 905
- 34.5 Principio de Huygens 911
- 34.6 Dispersión 912
- 34.7 Reflexión interna total 914

**35 Formación de imágenes 925**

- 35.1 Imágenes formadas por espejos planos 926
- 35.2 Imágenes formadas por espejos esféricos 928
- 35.3 Imágenes formadas por refracción 935
- 35.4 Imágenes formadas por lentes delgadas 939
- 35.5 Aberraciones de las lentes 947
- 35.6 Instrumentos ópticos 947

**36 Óptica ondulatoria 962**

- 36.1 Experimento de doble ranura de Young 963
- 36.2 Análisis de un modelo: Ondas en interferencia 965

- 36.3 Distribución de intensidad de patrones de interferencia de doble ranura 968
- 36.4 Cambio de fase debido a reflexión 969
- 36.5 Interferencia en películas delgadas 970
- 36.6 El interferómetro de Michelson 973

**37 Patrones de difracción y polarización 983**

- 37.1 Introducción a los patrones de difracción 984
- 37.2 Patrones de difracción provenientes de rendijas angostas 985
- 37.3 Resolución de una sola rendija y aberturas circulares 988
- 37.4 Rejilla de difracción 992
- 37.5 Difracción de los rayos X mediante cristales 996
- 37.6 Polarización de las ondas luminosas 998

## P A R T E 6

# Física moderna 1011

**38 Relatividad 1012**

- 38.1 Principio galileano de la relatividad 1013
- 38.2 Experimento de Michelson–Morley 1016
- 38.3 Principio de la relatividad de Einstein 1018
- 38.4 Consecuencias de la teoría especial de la relatividad 1019
- 38.5 Ecuaciones de transformación de Lorentz 1030
- 38.6 Ecuaciones de transformación de velocidad de Lorentz 1031
- 38.7 Cantidad de movimiento lineal relativista 1034
- 38.8 Energía relativista 1035
- 38.9 Teoría general de la relatividad 1038

**39 Introducción a la física cuántica 1048**

- 39.1 Radiación de cuerpo negro e hipótesis de Planck 1049
- 39.2 Efecto fotoeléctrico 1055
- 39.3 Efecto Compton 1061
- 39.4 Naturaleza de las ondas electromagnéticas 1063
- 39.5 Propiedades ondulatorias de las partículas 1064
- 39.6 Un nuevo modelo: Partícula cuántica 1067
- 39.7 Revisión del experimento de doble rejilla 1070
- 39.8 El principio de incertidumbre 1071

**40 Mecánica cuántica 1079**

- 40.1 La función de onda 1079
- 40.2 Análisis de un modelo: La partícula cuántica bajo condiciones frontera 1084
- 40.3 La ecuación de Schrödinger 1089
- 40.4 Una partícula en un pozo de altura finita 1091
- 40.5 Efecto túnel a través de una barrera de energía potencial 1093
- 40.6 Aplicaciones del efecto túnel 1095
- 40.7 El oscilador armónico simple 1096



**41 Física atómica 1105**

- 41.1 Espectros atómicos de los gases 1106
- 41.2 Los primeros modelos del átomo 1107
- 41.3 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno 1109
- 41.4 Modelo cuántico del átomo de hidrógeno 1114
- 41.5 Las funciones de onda para el hidrógeno 1117
- 41.6 Interpretación física de los números cuánticos 1120
- 41.7 El principio de exclusión y la tabla periódica 1126
- 41.8 Más sobre los espectros atómicos: el visible y el rayo X 1130
- 41.9 Transiciones espontáneas y estimuladas 1133
- 41.10 Láser 1135

**42 Moléculas y sólidos 1145**

- 42.1 Enlaces moleculares 1145
- 42.2 Estados de energía y espectros de moléculas 1148
- 42.3 Enlaces en sólidos 1156
- 42.4 Teoría de electrones libres en metales 1158
- 42.5 Teoría de banda en sólidos 1160
- 42.6 Conducción eléctrica en metales, aislantes y semiconductores 1162
- 42.7 Dispositivos semiconductores 1165

**43 Física nuclear 1177**

- 43.1 Algunas propiedades del núcleo 1178
- 43.2 Energía de enlace nuclear 1182
- 43.3 Modelos nucleares 1184
- 43.4 Radiactividad 1187
- 43.5 Los procesos de decaimiento 1190
- 43.6 Radiactividad natural 1200
- 43.7 Reacciones nucleares 1200
- 43.8 Fisión nuclear 1202
- 43.9 Reactores nucleares 1204
- 43.10 Fusión nuclear 1207
- 43.11 Daño biológico por radiación 1211
- 43.12 Usos de la radiación 1213
- 43.13 Resonancia magnética nuclear y formación de imágenes por resonancia magnética 1215

**44 Física de partículas y cosmología 1225**

- 44.1 Fuerzas fundamentales en la naturaleza 1226
- 44.2 Positrones y otras antipartículas 1227
- 44.3 Mesones y el principio de la física de partículas 1229
- 44.4 Clasificación de las partículas 1231
- 44.5 Leyes de conservación 1231
- 44.6 Partículas extrañas y extrañeza 1236
- 44.7 Determinación de patrones en las partículas 1238
- 44.8 Quarks 1240
- 44.9 Quarks multicolor 1242
- 44.10 El modelo estándar 1244
- 44.11 La conexión cósmica 1246
- 44.12 Problemas y perspectivas 1251

## Apéndices

**A Tablas A-1**

- A.1 Factores de conversión A-1
- A.2 Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas A-2

**B Repaso matemático A-4**

- B.1 Notación científica A-4
- B.2 Álgebra A-5
- B.3 Geometría A-10
- B.4 Trigonometría A-11
- B.5 Desarrollo de series A-13
- B.6 Cálculo diferencial A-13
- B.7 Cálculo integral A-16
- B.8 Propagación de incertidumbre A-20

**C Tabla periódica de los elementos A-22****D Unidades del SI A-24**

- D.1 Unidades del SI A-24
- D.2 Algunas unidades derivadas del SI A-24

**Respuestas a exámenes rápidos y problemas con numeración impar A-25****Índice I-1**



# Acerca de los autores



**Raymond A. Serway** recibió su doctorado en el Illinois Institute of Technology y es profesor emérito en la James Madison University. En 2011 fue galardonado con un doctorado honorario por parte de su alma mater, Utica College. En 1990 recibió el Madison Scholar Award en la James Madison University, donde enseñó durante 17 años. El doctor Serway comenzó su carrera docente en la Clarkson University, donde dirigió investigaciones y enseñó de 1967 a 1980. En 1977 recibió el Distinguished Teaching Award en la Clarkson University y el Alumni Achievement Award del Utica College en 1985. Como científico invitado en el IBM Research Laboratory en Zurich, Suiza, trabajó con K. Alex Muller, ganador del premio Nobel 1987. El doctor Serway también fue científico visitante en el Argonne National Laboratory, donde colaboró con su mentor y amigo, Sam Marshall. Además, el doctor Serway es coautor de *College Physics*, novena edición; *Principles of Physics*, quinta edición; *Essentials of College Physics*; *Modern Physics*, tercera edición. También es coautor del libro de bachillerato *Physics*, publicado por Holt, Rinehart y Winston. Además, el doctor Serway ha publicado más de 40 artículos de investigación en el campo de física de materia condensada y ha impartido más de 60 conferencias en reuniones profesionales. El doctor Serway y su esposa, Elizabeth, disfrutaban viajar, jugar al golf, pescar, acampar, cantar en un coro de iglesia y pasar tiempo de calidad con sus cuatro hijos y diez nietos, y recientemente, otro grandioso nieto.



**John W. Jewett, Jr.** obtuvo su licenciatura en Física en la Drexel University y su doctorado en la Ohio State University, con especialidad en las propiedades ópticas y magnéticas de la materia condensada. El doctor Jewett comenzó su carrera académica en el Richard Stockton College de Nueva Jersey, donde enseñó de 1974 a 1984. En la actualidad es profesor emérito de física en la California State Polytechnic University, en Pomona. A lo largo de su carrera docente, el doctor Jewett ha sido un activo promotor de la educación en ciencias físicas. Además de recibir cuatro becas National Science Foundation, ayudó a fundar y dirigir el Southern California Area Modern Physics Institute (SCAMPI) y el Science IMPACT (Institute of Modern Pedagogy and Creative Teaching), que trabaja con profesores y escuelas para desarrollar currículos efectivos en ciencia. Los premios del doctor Jewett incluyen el Stockton Merit Award en el Richard Stockton College en 1980, el Outstanding Professor Award en la California State Polytechnic University de 1991-1992 y el Excellence in Undergraduate Physics Teaching Award de la American Association of Physics Teachers (AAPT) en 1998. En 2010, recibió el Alumni Lifetime Achievement Award de la Drexel University en reconocimiento a sus contribuciones en la educación en física. Ha impartido más de 100 conferencias en reuniones profesionales, incluidas conferencias en la AAPT. También ha publicado 25 artículos sobre física de la materia condensada e investigaciones en la enseñanza de la física. Además, es autor de *The World of Physics: Mysteries, Magic and Myth*, el cual proporciona un gran número de conexiones entre la física y las experiencias cotidianas. Aparte de su trabajo en este libro, es coautor de *Principles of Physics*, quinta edición, así como de *Global Issues*, un conjunto de cuatro manuales de ciencia integral para educación secundaria. Al doctor Jewett le gusta tocar piano con su banda de físicos, viajar, la fotografía submarina, las lenguas extranjeras y coleccionar antigüedades que se puedan usar como aparatos de demostración en clases de física. Lo más importante, le gusta pasar el tiempo con su esposa, Lisa, su hijo y nieto.



# Prefacio

**A**l escribir esta décima edición de *Física para ciencias e ingeniería*, continuamos con nuestros esfuerzos por mejorar la claridad de la presentación e incluir nuevas características pedagógicas que ayudan a apoyar los procesos de aprendizaje y enseñanza. Al retroalimentar las sugerencias de los usuarios de la novena edición, información obtenida de los alumnos y profesores que utilizan WebAssign, así como de los revisores, hemos refinado el texto para satisfacer mejor las necesidades de los estudiantes y profesores.

Este libro está pensado para un curso introductorio de física para estudiantes que se especializan en ciencia o ingeniería. Todo el contenido del libro en su versión de 2 volúmenes podría cubrirse en un curso de tres semestres, pero es posible usar el material en secuencias más breves con la omisión de capítulos y secciones seleccionados. Los antecedentes matemáticos ideales de los estudiantes que tomen este curso deben incluir un semestre de cálculo. Si esto no es posible, el estudiante debe inscribirse en un curso simultáneo de introducción al cálculo.

## Contenido

El material en este libro cubre temas fundamentales de física clásica y proporciona una introducción a la física moderna. El libro se divide en seis partes. En el volumen 1, la parte 1 (capítulos 1 a 14) se relaciona con los fundamentos de la mecánica newtoniana y la física de fluidos; la parte 2 (capítulos 15 a 17) cubre oscilaciones, ondas mecánicas y sonido; la parte 3 (capítulos 18 a 21) aborda el calor y la termodinámica. En el volumen 2, la parte 4 (capítulos 22 a 33) trata la electricidad y el magnetismo; la parte 5 (capítulos 34 a 37) cubre luz y óptica; la parte 6 (capítulos 38 a 44) aborda la relatividad y la física moderna.

## Objetivos

Este libro de introducción a la física tiene tres objetivos principales: proporcionar al estudiante una presentación clara y lógica de los conceptos básicos y principios de la física, fortalecer la comprensión de los conceptos y principios a través de un amplio rango de interesantes aplicaciones al mundo real y desarrollar habilidades para resolver problemas por medio de un enfoque efectivamente organizado. Para alcanzar estos objetivos hemos enfatizado en argumentos físicos bien organizados y nos hemos concentrado en estrategias para resolver problemas. Al mismo tiempo hemos intentado motivar al estudiante mediante ejemplos prácticos que demuestren el papel de la física en otras disciplinas, incluidas ingeniería, química y medicina.

## Un método integrador de los materiales del curso

Esta nueva edición tiene un *enfoque integrador* del material del curso con una experiencia de problemas en línea optimizada y protegida, combinada con el contenido enriquecido del libro de texto diseñado para apoyar una experiencia de aula activa. Este nuevo conjunto optimizado de tareas en línea se basa en respuestas asignadas al azar contextualizadas dependientes de la corrección del estudiante para cada problema. En esta edición, tendrá un enfoque integrador que combina a la perfección el contenido depurado con el entorno de aprendizaje, desde la resolución de problemas grupales en clase a las tareas en línea que utilizan la retroalimentación dirigida. Este enfoque guía a los estudiantes donde están, ya sea que estén estudiando en línea o con el libro de texto. Los estudiantes a menudo se acercan a un problema de tarea en línea buscando en google para encontrar la ecuación o la explicación correcta del concepto importante; sin embargo, este enfoque ha desgastado el valor atribuido a la tarea en línea cuando los estudiantes dejan el apoyo del programa por la ayuda no relacionada de otro lugar y se encuentran con información poco precisa.



Los estudiantes no necesitan salir la herramienta en línea para obtener ayuda cuando están atascados, cada uno de los problemas tiene retroalimentación que aborda la idea errónea o el error que un estudiante hizo para llegar a la respuesta equivocada. Cada problema optimizado también ofrece amplias soluciones escritas, y muchos tienen soluciones de vídeo de apoyo que van a través de una variante contextual del problema paso a paso. Dado que el conjunto optimizado de problemas no está impreso, el contenido se protege de “proveedores de soluciones” y aumentará cada año con actualizaciones de retroalimentación dirigida con base en las respuestas reales de los estudiantes.

Trabajando en conjunto con la tarea en línea optimizada y el libro de texto impreso como una experiencia de aprendizaje activa que apoye las actividades en el aula, así como la práctica y revisión después de clase. El nuevo contenido incluye actividades de *Trabajo colaborativo*, problemas ricos en contexto, y un mayor énfasis en los problemas simbólicos y conceptuales. Todos los problemas del libro de texto impreso también estarán disponibles para asignar en la herramienta en línea WebAssign.

## Cambios en la décima edición

Para la décima edición se realizaron un gran número de cambios y mejoras. Algunas de las nuevas características se basan en nuestras experiencias y en las tendencias actuales en la educación científica. Se incorporaron otros cambios en respuesta a los comentarios y sugerencias ofrecidas por los usuarios de la novena edición y por los revisores del manuscrito. Las características que se presentan a continuación representan los cambios principales de la décima edición.



### WebAssign para Física en ciencia e ingeniería (disponible en inglés y se comercializa por separado)

WebAssign es una solución educacional en línea flexible y totalmente personalizable que pone herramientas poderosas en manos de los docentes, permitiéndoles asignar, y evaluar instantáneamente el desempeño individual del estudiante y de la clase, y ayudar a sus estudiantes a dominar los conceptos del curso. Con la poderosa plataforma digital de WebAssign y el contenido específico de *Física para ciencias e ingeniería*, puede adaptar su curso con una amplia gama de ajustes de tareas, agregar sus propias preguntas y contenido, y acceder al análisis de estudiantes, cursos y herramientas de comunicación. WebAssign de *Física para ciencias e ingeniería* incluye las siguientes nuevas características para esta edición.

**Problemas optimizados.** Sólo disponibles en línea a través de WebAssign, este conjunto de problemas combina nuevas evaluaciones con problemas clásicos de Física para ciencias e ingeniería que se han optimizado con las retroalimentaciones justo a tiempo diseñadas por las respuestas de los estudiantes y completamente enfocadas en las soluciones de los mismos. Al mover estos problemas para que sólo estén disponibles en línea le permite a los docentes hacer pleno uso de la capacidad de WebAssign para dar a sus estudiantes contenido dinámico de evaluación, y reduce la oportunidad de que los estudiantes encuentren soluciones en línea a través de motores de búsqueda en internet. Estos problemas reducen estas opciones tanto haciendo que el texto del problema no se encuentre fácilmente y dando asistencia inmediata a los estudiantes dentro de la plataforma de tareas.

**Viñetas de videos interactivos (IVV)** anime a los estudiantes a que dirijan sus conocimientos fuera del aula y puedan ser usados para actividades previas a la clase en las aulas de física tradicionales e incluso en talleres. Las viñetas de vídeo interactivas incluyen análisis de vídeo en línea y tutoriales individuales interactivos para abordar las dificultades de aprendizaje identificadas por PER (investigación en educación de física). Dentro de la plataforma WebAssign hay preguntas conceptuales adicionales inmediatamente después de cada IVV con el fin de evaluar el conocimiento del estudiante con el material y refuerzan el mensaje alrededor de estos conceptos erróneos típicos. En la siguiente página aparece una imagen de una de las viñetas de vídeo interactivas:

**Nuevos problemas de Ciencias de la vida.** Los problemas en línea establecidos para cada capítulo en WebAssign presentan dos nuevos problemas de Ciencias de la vida que destacan la relevancia de los principios físicos a los estudiantes que toman el curso y que se están especializando en Ciencias de la vida.



**Nuevas ampliaciones de problemas ¿Qué pasaría si?** Los problemas en línea establecidos para cada capítulo en WebAssign tienen 6 nuevas **extensiones** ¿Qué pasaría si? a los problemas existentes. Las extensiones ¿Qué pasaría si? amplían la comprensión de los conceptos de la física más allá del simple acto de obtener un resultado numérico.

**Exploraciones previas a la clase** Combinan simulaciones interactivas con análisis de preguntas conceptuales y analíticas que guían a los estudiantes a una comprensión más profunda y ayudan a promover una intuición física robusta.

**Una amplia oferta de nuevos tutoriales integrados.** Estos tutoriales integrados fortalecen las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes al guiarlos a través de los pasos en el proceso de resolución de problemas del libro e incluye retroalimentación importante en cada paso por lo que los estudiantes pueden practicar el proceso de resolución de problemas y mejorar sus habilidades. La retroalimentación también aborda las preconcepciones de los estudiantes y les ayuda a encontrar errores algebraicos y otros errores matemáticos. Las soluciones se llevan a cabo simbólicamente siempre que sea posible, con valores numéricos sustituidos al final. Esta característica promueve la comprensión por encima de la memorización, ayuda a los estudiantes a entender los efectos de cambiar los valores de cada variable en el problema, evita la repetición innecesaria de sustitución de los mismos números, y elimina los errores de redondeo. Mayor número de soluciones elaboradoras de problemas. Cientos de soluciones se han agregado recientemente a problemas de fin de capítulo en línea. Las soluciones de paso a paso a través de las estrategias de resolución de problemas conforme se aplican a problemas específicos.

**Preguntas objetivas y conceptuales ahora exclusivamente disponibles en WebAssign.** Las **preguntas objetivas** son de opción múltiple, verdadero/falso, clasificación u otro tipo de preguntas múltiples. Algunas requieren cálculos diseñados para facilitar la familiaridad de los estudiantes con las ecuaciones, las variables utilizadas, los conceptos que las variables representan, y las relaciones entre los conceptos. Otras son de naturaleza más conceptual y están diseñadas para motivar el pensamiento conceptual. Las preguntas objetivas también están escritas para dar una respuesta del sistema pensando en el sistema, y la mayoría de las preguntas podrían ser fácilmente utilizadas en estos sistemas. Las **preguntas conceptuales** son preguntas más tradicionales de respuesta corta y de tipo ensayo que requieren que los estudiantes piensen conceptualmente acerca de una situación física. Más de 900 preguntas objetivas y conceptuales están disponibles en WebAssign.



*Nueva guía de implementación de WebAssign de Física para ciencias e ingeniería.* La guía de implementación proporciona a los docentes de los diferentes problemas asignables, tutoriales, preguntas y actividades que están disponibles con cada capítulo de *Física para ciencias e ingeniería* en WebAssign. Los profesores pueden utilizar esta guía al tomar decisiones sobre cuál y cuántos elementos de evaluación asignar. Para facilitar esto, se incluye una visión general de cómo se integran los elementos asignables en el curso.

## Nuevos elementos de evaluación

*Nuevos problemas ricos en contexto de evaluación.* Problemas ricos en el contexto (identificados con un icono de CE) siempre sitúa a “usted” como el individuo en el problema para que tenga una conexión del mundo real en vez de discutir bloques en planos o bolas en cuerdas. Se estructuran como un cuento corto y no siempre se identifica explícitamente la variable que necesita ser evaluada. Los problemas ricos en contexto pueden relacionarse con la semblanza del capítulo, podría incluir escenarios de “testigo experto”, que permiten a los estudiantes ir más allá del manejo matemático mediante el diseño de un argumento basado en resultados matemáticos, o pedir que las decisiones sean hechos en situaciones reales. Los nuevos problemas contextuales seleccionados sólo aparecerán en línea en WebAssign. Un ejemplo de un nuevo problema rico en contexto se presenta a continuación:

**CE** 20. Hay la caminata 5K que tendrá lugar en su ciudad. Mientras habla con su abuela, que usa una motoneta eléctrica para moverse, ella le dice que le gustaría acompañarle con su motoneta mientras usted camina la distancia de 5.00 km. El manual que venía con su motoneta indica que con batería completamente cargada puede proporcionar 120 Wh de energía antes de que se agote. Para prepararse para la carrera, usted va para una “unidad de prueba”: comenzando con una batería completamente cargada, su abuela va a su lado mientras camina 5.00 km en terreno plano. Al final de la caminata, el indicador de uso de la batería muestra que permanece 40.0% de la carga original en la batería. Usted también sabe que el peso combinado de la motoneta y su abuela es de 890 N. Unos días más tarde, lleno de confianza de que la batería tiene suficiente energía, usted y su abuela se dirigen hacia el evento 5K. Usted no sabe, que la ruta 5K no es en terreno plano, sino que es toda cuesta arriba, terminando en un punto más alto que la línea de salida. Un funcionario de la carrera le dice que la cantidad total de desplazamiento vertical en la ruta es de 150 m. ¿Podría acompañarle su abuela en la caminata, o se quedará varado cuando la batería se agote? Suponga que la única diferencia entre su prueba en la unidad y el evento real es el desplazamiento vertical.

*Nuevos problemas y actividades de Trabajo Colaborativo; Piense, dialogue y comparta.* Los problemas y actividades de Trabajo Colaborativo son similares a los problemas ricos en contexto, pero tienden a beneficiarse más de las discusiones grupales porque la solución no es tan directa como para un problema de un sólo concepto. Algunos problemas de trabajo colaborativo requieren que el grupo discuta y tome decisiones; otros se hacen más desafiantes por el hecho de que alguna información no está y no se puede conocer. Todos los capítulos del texto tienen al menos un problema o actividad de trabajo colaborativo y más problemas o actividades por capítulo estarán disponibles sólo en WebAssign. En la siguiente página se presentan ejemplos de un problema de “Trabajo colaborativo” y una actividad de “Trabajo colaborativo”:

## Cambios de contenido

En el volumen 1, el *capítulo 16 fue reorganizado (movimiento ondulatorio)*. Esta combinación de los capítulos 16 y 17 de la última edición tiene todo el material fundamental sobre ondas mecánicas que viajan en cuerdas y ondas sonoras a través de materiales juntos en un capítulo. Esto permite comparaciones más cercanas entre las características de los dos tipos de ondas que son similares, tales como deducciones de la velocidad de la onda. La sección de reflexión





1. Usted está trabajando haciendo entregas para una tienda de lácteos. En la parte de atrás de su camioneta hay una caja de huevos. En la tienda de lácteos se han agotado las cuerdas elásticas, por lo que la caja no está atada. Se le ha dicho que conduzca con cuidado porque el coeficiente de fricción estática entre el cajón y la cama del camión es 0.600. No está preocupado, porque están viajando por una carretera que parece perfectamente recta. Debido a su confianza y falta de atención, su velocidad ha aumentado arriba de 45.0 mi/h. De repente, ve una curva adelante con un letrero de advertencia que dice, “Peligro: curva no peraltada con radio de curvatura de 35.0 m.” Usted está a 15.0 m de donde empieza la curva. ¿Qué puede hacer para salvar los huevos: (i) tomar la curva a 45.0 mi/h, (ii) frenar hasta detenerse antes de entrar en la curva para pensar en esto, o (iii) reducir la velocidad para tomar la curva a una velocidad más lenta? Discuta estas opciones con su grupo y determine si hay un mejor camino a seguir.

3. **ACTIVIDAD** (a) Coloque diez centavos en una regla graduada horizontal, con un centavo a 10 cm, 20 cm, 30 cm, etc., hasta 100 cm. Levante con cuidado la regla, manténgala horizontal, y haga que un miembro del grupo realice una grabación de video del siguiente evento, usando un teléfono inteligente u otro dispositivo. Mientras la grabación de video está en curso, suelte el extremo de 100 cm de la regla mientras que el extremo de 0 cm descansa en el dedo de alguien o en el borde de la mesa. Al pasar las imágenes de video o ver el video en cámara lenta, determine qué centavo primero pierde contacto con la regla mientras cae. (b) Haga una determinación teórica de qué centavos deberían primero perder contacto y compararlo con su resultado experimental.

y transmisión de ondas, cuyos detalles no son necesarios en un capítulo sobre ondas viajeras, se movió al capítulo 17 (Sobreposición y ondas estacionarias) para esta edición, que se ajusta más naturalmente en una discusión sobre los efectos de condiciones frontera en ondas.

**En el volumen 2, se reorganizaron los capítulos 22–24.** El movimiento del material de distribución continua de la carga se movió del capítulo 22 (Campos eléctricos) al capítulo 23 (Distribuciones continuas de carga y ley de Gauss) dio como resultado un capítulo que es una introducción más gradual para los estudiantes en el nuevo y desafiante tema de electricidad. El capítulo ahora implica solamente campos eléctricos debido a cargas puntuales y a campos eléctricos uniformes debido a placas paralelas.

El capítulo 23 antes incluía sólo el análisis de campos eléctricos debido a distribuciones continuas de la carga usando la ley de Gauss. El movimiento del material de la distribución continua de carga al capítulo 23 da como resultado un capítulo completo basado en el análisis de campos de distribuciones de carga continua, utilizando dos técnicas: la integración y la ley de Gauss.

El capítulo 23 antes contenía una discusión de las cuatro características de conductores cargados aislados. Tres de estas características fueron discutidas con argumentos de principios básicos, mientras que el estudiante era referido al material necesario del capítulo siguiente (Potencial eléctrico) para una discusión de la cuarta característica. Con el movimiento de esta discusión al capítulo 24 para esta edición, el estudiante ha aprendido todo el material básico necesario antes de la discusión de las características de los conductores cargados aislados, y pueden discutir las cuatro características a partir de principios básicos.

**Reorganización del capítulo 43 (física nuclear).** En esta edición se han combinado los capítulos 44 (estructura nuclear) y 45 (aplicaciones de la física nuclear) en la última edición. Este nuevo capítulo 43 permite estudiar todo el material sobre física nuclear. Como consecuencia, ahora tenemos una serie de los cinco capítulos finales del texto donde cada una de las portadas de un capítulo se centró en las aplicaciones de los principios fundamentales estudiados antes: Capítulo 40 (Mecánica cuántica), Capítulo 41 (Física atómica), Capítulo 42 (Moléculas y sólidos), Capítulo 43 (Física nuclear), y Capítulo 44 (Física de partículas).

**Nueva sección llamada “Imagine” como introducción al texto del capítulo.** Cada capítulo se abre con una sección de *Imagine*. Esta característica proporciona una historia continua a través de todo el libro de “usted” como un estudiante de física inquisitivo observando y analizando fenómenos que ve en la vida cotidiana. Esta sección en muchos capítulos implica medidas hechas con un teléfono inteligente, observaciones de videos de YouTube, o investigaciones en Internet.

**Nuevas conexiones de apertura de capítulos.** El inicio de cada capítulo también se incluye una sección de conexiones que muestra cómo el material del capítulo se conecta con el material previamente estudiado y con el material futuro. La sección de conexiones proporciona un “panorama general” de los conceptos, explica por qué este capítulo se coloca en este lugar en particular en relación con los otros capítulos, y muestra cómo la estructura de la física se basa en material previo.



## Características del texto

La mayoría de los profesores creen que el libro de texto seleccionado para un curso debe ser la guía principal del estudiante para entender y aprender el tema. Además, el libro de texto debe ser fácilmente accesible y debe ser estilizado y escrito para facilitar la instrucción y el aprendizaje. Con estos puntos en mente, hemos incluido muchas características pedagógicas, enumeradas a continuación, que están destinadas a mejorar su utilidad tanto para los estudiantes como para los docentes.

## Resolución de problemas y comprensión conceptual

**Enfoque del modelo de análisis para resolver problemas.** Los estudiantes se enfrentan a cientos de problemas durante sus cursos de física. Un número relativamente pequeño de principios fundamentales forman la base de estos problemas. Cuando se enfrenta a un nuevo problema, un físico forma un modelo del problema que se puede resolver de una manera sencilla identificando el principio fundamental que es aplicable en el problema. Por ejemplo, muchos problemas implican la conservación de la energía, la segunda ley de Newton, o las ecuaciones cinemáticas. Debido a que el físico ha estudiado estos principios y sus aplicaciones ampliamente, él o ella puede aplicar este conocimiento como un modelo para resolver un nuevo problema. Aunque sería ideal que los estudiantes siguieran este mismo proceso, la mayoría de los estudiantes tienen dificultades para familiarizarse con toda la paleta de principios fundamentales que están disponibles. Es más fácil que los estudiantes identifiquen una situación en lugar de un principio fundamental.

El *enfoque de modelo de análisis* establece un conjunto estándar de situaciones que aparecen en la mayoría de los problemas de la física. Estas situaciones se basan en una entidad en uno de los cuatro modelos de simplificación: partícula, sistema, objeto rígido y onda. Una vez que se identifica el modelo de simplificación, el estudiante piensa acerca de lo que la entidad está haciendo o cómo interactúa con su entorno. Esto conduce al estudiante a identificar un modelo de análisis específico para el problema. Por ejemplo, si un objeto está cayendo, el objeto se reconoce como una partícula que experimenta una aceleración debida a la gravedad que es constante. El estudiante ha aprendido que el modelo de análisis de una partícula bajo aceleración constante describe esta situación. Además, este modelo tiene un pequeño número de ecuaciones asociadas con él para su uso en el inicio de problemas, las ecuaciones cinemáticas presentadas en el capítulo 2. Por tanto, una comprensión de la situación ha llevado a un modelo de análisis, que luego identifica un número muy pequeño de ecuaciones para iniciar el problema, en lugar de las múltiples ecuaciones que los estudiantes ven en el libro. De esta manera, el uso de modelos de análisis lleva al estudiante a identificar el principio fundamental. A medida que el estudiante gane más experiencia, él o ella se recargará menos en el enfoque del modelo de análisis y comenzará a identificar los principios fundamentales directamente.

El enfoque del modelo de análisis para la resolución de problemas se presenta en su totalidad en el capítulo 2 (sección 2.4, páginas 30–32), y proporciona a los estudiantes un proceso estructurado para resolver problemas. En todos los capítulos restantes, la estrategia se emplea explícitamente en todos los ejemplos para que los alumnos aprendan cómo se aplica. Se motiva a los estudiantes a seguir esta estrategia cuando trabaje con problemas de fin de capítulo.

Los **cuadros descriptivos del modelo de análisis** se presentan al final de cualquier sección que introduce un nuevo modelo de análisis. Esta característica recapitula el modelo de análisis introducido en la sección y proporciona ejemplos de los tipos de problemas que un estudiante podría resolver utilizando el modelo de análisis. Estas cajas funcionan como un “repaso” antes de que los estudiantes vean los modelos de análisis en uso en los ejemplos trabajados para una sección dada. El enfoque se refuerza en el resumen de final de capítulo bajo el encabezado de los *Modelos de análisis para la resolución de problemas*, y a través de **Tutoriales del modelo de análisis** que se basan en los problemas de fin de capítulo seleccionados y que se presentan en webAssign.

**Tutoriales del modelo de análisis.** John Jewett desarrolló 165 tutoriales (que aparecen en los conjuntos de problemas del texto impreso están indicados por un icono **AMT**) que fortalecen las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes al guiarlos a través de los pasos en el proceso de resolución de problemas. Los primeros pasos importantes incluyen hacer predicciones y enfocarse en conceptos de física antes de resolver el pro-



blema cuantitativamente. Un componente crítico de estos tutoriales es la selección de un modelo de análisis apropiado para describir lo que está sucediendo en el problema. Este paso permite a los estudiantes hacer el importante vínculo entre la situación en el problema y la representación matemática de la situación. Los tutoriales del modelo de análisis incluyen retroalimentación significativa en cada paso para ayudar a los estudiantes a practicar el proceso de resolución de problemas y mejorar sus habilidades. Además, la retroalimentación se refiere a los conceptos erróneos de los estudiantes y les ayuda a detectar otros errores algebraicos y matemáticos. Las soluciones se llevan a cabo simbólicamente cada vez que sea posible, sustituyendo valores numéricos al final. Esta función ayuda a los estudiantes a comprender los efectos de cambiar los valores de cada variable en el problema, evita la sustitución repetitiva innecesaria de los mismos números y elimina los errores de redondeo. Los comentarios al final del tutorial motivan a los estudiantes a comparar la respuesta final con sus predicciones originales.

**Ejemplos trabajados.** Todos los ejemplos trabajados en el libro se presentan en un formato de dos columnas para reforzar mejor los conceptos físicos. La columna de la izquierda muestra información textual que describe los pasos para resolver el problema. La columna derecha muestra las manipulaciones matemáticas y los resultados al seguir estos pasos. Esta disposición facilita la relación del concepto con su ejecución matemática y ayuda a los alumnos a organizar su trabajo. Los ejemplos siguen de cerca el enfoque del modelo de análisis para la resolución de problemas introducidos en la sección 2.4 para reforzar los hábitos eficaces de resolución de problemas. Todos los ejemplos trabajados en el texto se pueden asignar para la tarea en WebAssign. Una muestra de un ejemplo trabajado se puede encontrar en la página siguiente.

Los ejemplos consisten en dos tipos. El primer tipo (y más común) de ejemplo presenta un problema y una respuesta numérica. El segundo tipo de ejemplo es de naturaleza conceptual. Para dar cabida a un mayor énfasis en la comprensión de los conceptos físicos, los muchos ejemplos conceptuales están etiquetados como tales y están diseñados para ayudar a los estudiantes a centrarse en la situación física en el problema. Las soluciones de los ejemplos trabajados se presentan simbólicamente en la medida de lo posible, con valores numéricos sustituidos al final. Este enfoque ayudará a los estudiantes a pensar simbólicamente cuando se resuelven problemas en lugar de insertar innecesariamente números en ecuaciones intermedias.

**¿Qué pasaría si?** Aproximadamente un tercio de los ejemplos trabajados en el libro tienen una característica ¿qué pasaría si? Al final de la solución del ejemplo, ¿qué pasaría si? la pregunta ofrece una variación de la situación planteada en el ejemplo del libro. Esta característica motiva a los estudiantes a pensar en los resultados del ejemplo, y también ayuda a la comprensión conceptual de los principios. ¿Qué pasaría si? las preguntas también preparan a los estudiantes para encontrar problemas novedosos que se pueden incluir en los exámenes. Los problemas de fin de capítulo seleccionados también incluyen esta característica.

**Cuestionarios rápidos.** Se les proporcionan a los estudiantes una oportunidad de probar su comprensión de los conceptos físicos presentados a través de cuestionarios rápidos. Las preguntas requieren que los estudiantes tomen decisiones con base en el razonamiento sólido, y se han escrito algunas de preguntas para ayudar a los estudiantes a superar los conceptos erróneos comunes. Los cuestionarios rápidos se han escrito en un formato objetivo, incluyendo opción múltiple, verdadero-falso y clasificación. Las respuestas a todas las preguntas del cuestionario rápido se encuentran al final del libro. Muchos docentes optan por usar estas preguntas en un estilo de enseñanza de “Instrucción peer” o con el uso del sistema de respuesta personal “contador”, pero también se pueden usar en formato de cuestionario estándar. A continuación, se presenta un ejemplo de un cuestionario rápido.

- E XAMEN RÁPIDO 7.5** Un dardo se carga en una pistola de resorte al comprimir a éste por una distancia  $x$ . En la segunda carga, al resorte se le comprime una distancia  $2x$ . ¿Qué tan rápido, comparado con el primero, el segundo dardo abandona la pistola? (a) cuatro veces más, (b) dos veces más, (c) igual, (d) la mitad, (e) la cuarta parte.





Todos los problemas trabajados están también disponibles para asignarse como ejemplos interactivos en WebAssign.

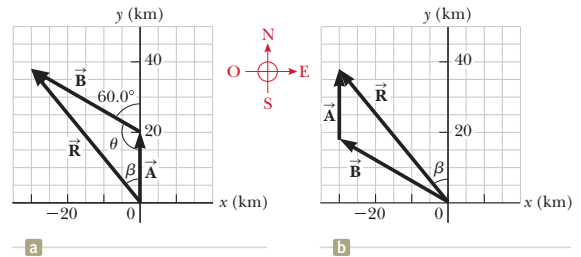
**Ejemplo 3.2 Un viaje de vacaciones**

Un automóvil viaja 20.0 km al norte y luego a 35.0 km en una dirección 60.0° al noroeste, como se muestra en la figura 3.11a. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dibujados en la figura 3.11a ayudan conceptualizar el problema. También se ha dibujado el vector resultante  $\vec{R}$ . Esperamos que su magnitud sea de unas pocas decenas de kilómetros. El ángulo  $\beta$  que hace que el vector resultante con el eje y se espera que sea menos de 60°, el ángulo que el vector  $\vec{B}$  hace con el eje y.

**Categorizar** Este ejemplo se puede clasificar como un simple problema de análisis acerca de suma vectorial. El desplazamiento  $\vec{R}$  es la resultante cuando se añaden los dos desplazamientos individuales  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Además, se puede clasificar como un problema acerca del análisis de triángulos, así que se acude a la experiencia en geometría y trigonometría.



**Figura 3.11** (Ejemplo 3.2) (a) Método gráfico para encontrar el vector de desplazamiento resultante  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ . (b) Sumando los vectores en orden inverso ( $\vec{B} + \vec{A}$ ) da el mismo resultado para  $\vec{R}$ .

**Analizar** En este ejemplo se muestran dos formas para analizar el problema de encontrar la resultante de dos vectores. La primera es resolver el problema mediante la geometría, con el uso de papel graficado y un transportador para medir la magnitud de  $\vec{R}$  y su dirección en la figura 3.11a. (De hecho, aun cuando sepa que va a realizar un cálculo, debe bosquejar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador ordinarios, típicamente un buen diagrama da respuestas con dos dígitos pero no con una precisión de tres dígitos. ¡Intente usar estas herramientas en  $\vec{R}$  en la figura 3.11a y compare con el análisis trigonométrico que se muestra a continuación!

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo con álgebra. La magnitud de  $\vec{R}$  se obtiene a partir de la ley de cosenos, tal como se aplica al triángulo en la figura 3.11a (véase el apéndice B.4).

Aplique  $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$  de la ley de cosenos para encontrar R:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}$$

Sustituya valores numéricos y Note que  $\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ :

$$R = \sqrt{(20.0 \text{ km})^2 + (35.0 \text{ km})^2 - 2(20.0 \text{ km})(35.0 \text{ km}) \cos 120^\circ} = 48.2 \text{ km}$$

Aplique la ley de senos (apéndice B.4) para encontrar la dirección de  $\vec{R}$  medida desde la dirección norte:

$$\frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \theta}{R}$$

$$\sin \beta = \frac{B}{R} \sin \theta = \frac{35.0 \text{ km}}{48.2 \text{ km}} \sin 120^\circ = 0.629$$

$$\beta = 38.9^\circ$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km con una dirección de 38.9° al noroeste.

**Finalizar** ¿El ángulo  $\beta$ , que se calculó, concuerda con una estimación realizada al observar la figura 3.11a o con un ángulo medido del diagrama con el uso del método de la poligonal? ¿Es razonable que la magnitud de  $\vec{R}$  sea mayor que la de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ ? ¿Las unidades de  $\vec{R}$  son correctas?

encuentran abrumador el uso de las leyes de cosenos y senos. Segunda, sólo resulta un triángulo si suma dos vectores. Si suma tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 se explora un nuevo método para sumar vectores que abordará estas dos desventajas.

Aunque el método de la poligonal para sumar vectores funciona bien, tiene dos desventajas. Primera, algunas personas

**¿QUÉ PASARÍA SI?**

Suponga que el viaje se realiza considerando los dos vectores en orden inverso: 35.0 km con dirección 60.0° al noroeste primero y después 20.0 km al norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y dirección del vector resultante?

**Respuesta** No cambiarían. La ley conmutativa para la suma vectorial dice que el orden de los vectores en una suma es irrelevante. Gráficamente, la figura 3.11b muestra que los vectores Añadidos en orden inverso proporcionan el mismo vector resultante.

Cada solución se ha escrito para seguir de cerca el enfoque de modelo de análisis para resolver problemas cómo se describe en la sección 2.4 (páginas 30–32), para reforzar buenos hábitos para resolver problemas.

Cada paso de la solución se detalla en un formato de dos columnas. La columna izquierda proporciona una explicación para cada paso matemático en la columna derecha, para mejorar el reforzamiento de los conceptos físicos.

Las expresiones ¿Qué pasaría si? se presentan en aproximadamente un tercio de los ejemplos trabajados y ofrecen una variación en la situación de lo que se plantea en el texto del ejemplo. Por ejemplo, esta característica podría explorar los efectos de cambiar las condiciones de la situación, determinar qué sucede cuando una cantidad se lleva a un valor limitador particular, o pregunta si se puede determinar información adicional sobre la situación del problema. Esta característica motiva a los estudiantes a pensar en los resultados del ejemplo y ayuda a la comprensión conceptual de los principios.



**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.2**

**Dos clases de rapidez/velocidad**

No confunda  $v$ , la rapidez de la onda a medida que se propaga a lo largo de la cuerda, con  $v_y$ , la velocidad transversal de un punto en la cuerda. La rapidez  $v$  es constante para un medio uniforme, mientras que  $v_y$  varía en forma senoidal.

**Prevencciones de riesgos ocultos.** Se proporcionan más de 200 prevencciones de riesgos (como la de la derecha) para ayudar a los estudiantes a evitar errores comunes y desacuerdos. Estas características, que se colocan en los márgenes del texto, abordan los conceptos erróneos comunes de los estudiantes y las situaciones en las que los estudiantes suelen seguir caminos improductivos.

**Resúmenes.** Cada capítulo contiene un resumen que revisa los conceptos y ecuaciones importantes que se discuten en ese capítulo. El resumen se divide en tres secciones: definiciones, conceptos y principios, y modelos de análisis para la resolución de problemas. En cada sección, recuadros tipo ficha de estudio se enfocan en cada definición, concepto, principio o análisis del modelo por separado.

**Conjunto de problemas.** Para la décima edición, los autores revisaron cada pregunta y problema e incorporaron revisiones diseñadas para mejorar la legibilidad y la asignación.

**Problemas.** Al final de cada capítulo se incluye un extenso conjunto de problemas; en total, el libro de texto impreso contiene más de 2 000 problemas, además de otros 1 500 problemas optimizados están disponibles sólo en WebAssign. Las respuestas para problemas con números impares en el texto impreso se proporcionan al final del libro, y las soluciones para todos los problemas de texto impreso se encuentran en el *Manual de soluciones del profesor*.

Los problemas de fin de capítulo están organizados por las secciones de cada capítulo (aproximadamente dos tercios de los problemas están codificados en secciones específicas del capítulo). Dentro de cada sección, los problemas ahora están en la “plataforma” de los estudiantes ordenados en forma ascendente de pensamiento en la presentación de todos los problemas sencillos en la primera sección, seguida por los problemas intermedios. (Los números de problema para problemas sencillos se imprimen en negro; los problemas de nivel intermedio están en azul.) La sección de *Problemas adicionales* contiene problemas que no están codificados en secciones específicas. Al final de cada capítulo está la sección de *Problemas de desafío*, que reúne los problemas más difíciles de un capítulo en un lugar dado. (Los problemas de desafío tienen números de problema marcados en rojo).

Hay varios tipos de problemas que aparecen en este texto:

**V** Vea las soluciones de vídeo disponibles en WebAssign explican las estrategias fundamentales de resolución de problemas para ayudar a los estudiantes a superar los problemas seleccionados.

**C/C** Los *Problemas cuantitativos/conceptuales* tienen partes que le piden a los estudiantes que piensen cuantitativa y conceptualmente. Un ejemplo de un problema cuantitativo/conceptual se presenta a continuación:

**35.** Un resorte horizontal unido a una pared tiene una constante elástica  $k = 850 \text{ N/m}$ . Un bloque de masa  $m = 1.00 \text{ kg}$  se une al resorte y descansa sobre una superficie horizontal sin fricción como en la figura P8.35. (a) El bloque se jala a una posición  $x_i = 6.00 \text{ cm}$  desde la posición de equilibrio y se suelta. Encuentre la energía potencial elástica almacenada en el resorte cuando el bloque está  $6.00 \text{ cm}$  de la posición de equilibrio y cuando el bloque pasa por la posición de equilibrio. (b) Encuentre la rapidez del bloque cuando pasa por el punto de equilibrio. (c) ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando está en una posición  $x_i/2 = 3.00 \text{ cm}$ ? (d) ¿Por qué no es la respuesta al inciso (c) la mitad de la respuesta del inciso (b).

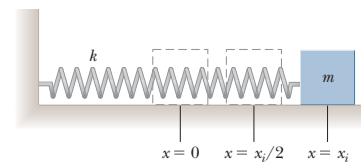


Figura P8.35

La parte d) le pide contestar una pregunta conceptual acerca de la situación.

El problema se identifica con un icono **C/C**

Los incisos a)-c) del problema le piden cálculos cuantitativos a.

**S** Los *problemas simbólicos* le piden a los estudiantes resolver un problema usando solamente la manipulación simbólica. Los revisores de la novena edición (así como la mayoría de los encuestados de una gran muestra) pidieron específicamente un aumento en el número de problemas simbólicos encontrados en el libro porque refleja mejor la forma en que los docentes quieren que sus estudiantes piensen cuando resuelven problemas de física. Un ejemplo de un problema simbólico se presenta en la siguiente página:



El problema se identifica con un icono **S**

No aparece ningún número en el enunciado del problema

**36.** Un camión se mueve con aceleración constante  $a$  en una colina que hace un ángulo  $\phi$  con la horizontal como en la figura P6.36. Una pequeña esfera de masa  $m$  está suspendida desde el techo de la camioneta por un cable ligero. Si el péndulo hace un ángulo constante  $\theta$  con la perpendicular al techo, ¿a qué es igual  $a$ ?

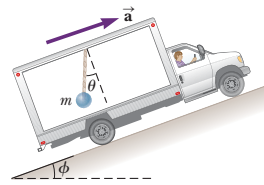


Figura P6.36

La figura muestra sólo cantidades simbólicas

La respuesta al problema es totalmente simbólica

**36.**  $g(\cos \phi \tan \theta - \sin \phi)$

**PG** Los problemas guiados ayudan a los estudiantes a descomponer los problemas. Un problema de la física generalmente pide una cantidad física en un contexto dado. Sin embargo, con frecuencia, se deben utilizar varios conceptos y se requieren una serie de cálculos para obtener esa respuesta final. Muchos estudiantes no están acostumbrados a este nivel de complejidad y a menudo no saben por dónde empezar. Un problema guiado descompone un problema común en pasos más pequeños, permitiendo a los estudiantes comprender todos los conceptos y estrategias requeridas para llegar a una solución correcta. A diferencia de los problemas comunes de física, la orientación se incorpora a menudo en el enunciado del problema. Los problemas guiados son una reminiscencia de cómo un estudiante podría interactuar con un profesor en una visita a su oficina. Estos problemas (hay uno en cada capítulo del texto) ayudan a entrenar a los estudiantes a descomponer problemas complejos en una serie de problemas más simples, una habilidad esencial para resolver problemas. A continuación, se presenta un ejemplo de un problema guiado:

El problema se identifica con **PG**

**24.** Una viga uniforme que descansa sobre dos pivotes tiene una longitud  $L = 6.00$  m y una masa  $M = 90.0$  kg. El pivote bajo el extremo izquierdo ejerce una fuerza normal  $n_1$  sobre la viga, y el segundo pivote ubicado a una distancia  $\ell = 4.00$  m del extremo izquierdo ejerce una fuerza normal  $n_2$ . Una mujer de masa  $m = 55.0$  kg se para en el extremo izquierdo de la viga y comienza a caminar hacia la derecha, como se indica en la figura P12.24. El objetivo es encontrar la posición de la mujer cuando la viga se empieza a inclinar. (a) ¿Cuál es el análisis de modelo apropiado para la viga antes de que se incline? (b) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga, marque las fuerzas gravitacionales y las normales que actúan sobre la viga y coloque a la mujer a una distancia  $x$  hacia la derecha del primer pivote, el cual es el origen. (c) ¿Dónde está la mujer cuando la fuerza normal  $n_1$  es máxima? (d) ¿Cuánto vale  $n_1$  cuando la viga está por inclinarse? (e) Utilice la ecuación 12.1 para encontrar el valor de  $n_2$  cuando la viga está a punto de inclinarse. (f) Empleando el resultado del inciso (d) y la ecuación 12.2, con los momentos de torsión calculados en torno al segundo pivote, determine la posición  $x$  de la mujer cuando la viga tiende a inclinarse. (g) Verifique la respuesta al inciso (a) mediante el cálculo de momentos de torsión alrededor del primer punto pivote.

Se identifica el objetivo

El análisis comienza al identificar cual es el modelo de análisis apropiado

Al estudiante se le dan sugerencias de los pasos a seguir para resolver el problema

Se pide el cálculo asociado con el objetivo

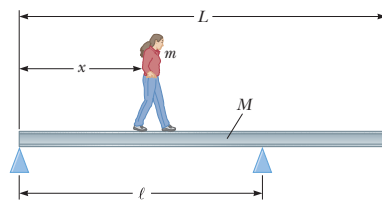


Figura P12.24

**Problemas biomédicos.** Estos problemas (indicados con un icono **BIO**) resaltan la relevancia de los principios de la física para los estudiantes que toman este curso que se especializan en una de las Ciencias de la vida.

**T** Los *tutoriales Master it* disponibles en WebAssign ayudan a los estudiantes a resolver problemas al hacerlos trabajar a través de una solución por pasos.



**Problemas de imposibilidad.** La investigación en física se ha centrado en gran medida en las habilidades de los estudiantes para la resolución de problemas. Aunque la mayoría de los problemas en este libro están estructurados en forma de proporcionar datos y pedir el cálculo de un resultado, dos problemas por cada capítulo, en promedio, se estructuran como problemas de imposibilidad. Comienzan con la frase *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Seguida de la descripción de una situación. El aspecto sorprendente de estos problemas es que no se hace una pregunta a los estudiantes, excepto la que aparece en cursivas al inicio. El estudiante debe determinar las preguntas que se tienen que hacer y que cálculos se deben realizar. Con base en los resultados de estos cálculos, el estudiante debe determinar por qué la situación descrita no es posible. Esta determinación puede requerir información de la experiencia personal, sentido común, de Internet o de investigación impresa, la medición, las habilidades matemáticas, el conocimiento de las normas humanas o el pensamiento científico.

Estos problemas se pueden asignar para desarrollar habilidades de pensamiento crítico en los estudiantes. También son divertidos, tienen el aspecto de “misterios” de la física que hay que resolver por parte de los alumnos de forma individual o en grupos. Un ejemplo de problema de imposibilidad se presenta a continuación:

39. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Albert Pujols hace un jonrón, de forma que la pelota libra la fila superior de las gradas, 24.0 m de altura, situada a 130 m de la base de home. La bola es golpeada a 41.7 m/s en un ángulo de 35.0° con la horizontal, y la resistencia del aire es despreciable.

**Problemas dobles.** Estos problemas son idénticos, uno pidiendo una solución numérica y otro una deducción simbólica. Hay al menos tres pares de estos problemas en la mayoría de los capítulos indicados por un sombreado azul claro, en los conjuntos de problemas de fin de capítulo.

**Problemas de repaso.** Muchos capítulos incluyen problemas de repaso que requieren que el estudiante combine conceptos cubiertos en el capítulo con los que se explicaron en capítulos anteriores. Estos problemas (indicados como problemas de **repaso**) reflejan la naturaleza cohesiva de los principios en el libro y verifican que la física no es un conjunto de ideas dispersas. Cuando se observan problemas del mundo real como el calentamiento global o las armas nucleares, puede ser necesario invocar ideas físicas de varias partes de un libro como este.

**Problemas “Fermi” o que parecen imposibles.** En la mayoría de los capítulos se plantea al estudiante uno o más problemas donde debe razonar en términos de orden y magnitud.

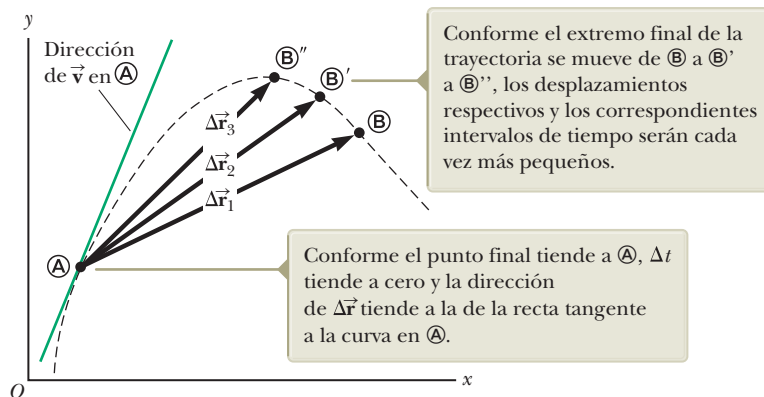
**Problemas de diseño.** Varios capítulos contienen problemas que le solicitan al estudiante determinar parámetros de diseño para un dispositivo práctico, de modo que pueda funcionar como se requiere.

**Problemas basados en cálculo.** Todos los capítulos contienen al menos un problema que aplica ideas y métodos del cálculo diferencial y un problema que usa cálculo integral.

**Ilustraciones.** Cada ilustración en la Décima edición es de estilo moderno que ayuda a expresar los principios de la física en el trabajo de una manera clara y precisa. Se incluyen *punteros de enfoque* en muchas figuras del texto; estos señalan aspectos importantes de una figura o guían a los estudiantes a través de un proceso ilustrado por la fotografía o las ilustraciones. Este formato ayuda a los estudiantes que están aprendiendo de forma más visual. Un ejemplo de figura con un puntero de enfoque se presenta en la figura siguiente.







**Figura 4.2** A medida que una partícula se mueve entre dos puntos, su velocidad promedio está en la dirección del vector desplazamiento  $\Delta\vec{r}$ . Por definición, la velocidad instantánea en  $\textcircled{A}$  se dirige a lo largo de la recta tangente a la curva en  $\textcircled{A}$ .

**Apéndice matemático.** El apéndice matemático (Apéndice B), una valiosa herramienta para los estudiantes se actualizó para mostrar las herramientas matemáticas en un contexto físico. Este recurso es ideal para los estudiantes que necesitan un repaso rápido acerca de temas tales como álgebra, trigonometría y cálculo.

## Características útiles

**Estilo.** Para facilitar la rápida comprensión, hemos escrito el libro en un estilo claro, lógico y atractivo. Elegimos un estilo de escritura que es un poco informal y relajado, de modo que los estudiantes encontraran el texto atractivo y agradable para leer. Los nuevos términos se definen cuidadosamente y hemos evitado el uso de vocabulario especial.

**Definiciones y ecuaciones importantes.** Las definiciones más importantes se ponen en **negritas** o se resaltan con una pantalla de fondo para dar más énfasis y facilitar la revisión.

De igual modo, las ecuaciones importantes se resaltan con una pantalla para facilitar su ubicación.

**Notas al margen.** Los comentarios y notas que aparecen en el margen con un icono ► se pueden usar para ubicar enunciados, ecuaciones y conceptos importantes en el texto.

**Uso pedagógico del color.** Los lectores deben consultar la **carta pedagógica de color** (al inicio del libro) para una lista de los símbolos en color que se usan en los diagramas del texto. Este sistema se usa consistentemente en todas las partes del texto.

**Nivel matemático.** Introducimos el cálculo de manera gradual, teniendo en mente que los estudiantes con frecuencia toman cursos introductorios de cálculo y física simultáneamente. La mayoría de las etapas se muestra cuando se desarrollan ecuaciones básicas, y con frecuencia se hace referencia a los apéndices matemáticos cerca del final del texto. Aunque los vectores son analizados en el capítulo 3, los productos vectoriales se introducen más adelante en el texto, donde se necesitan en aplicaciones físicas. El producto punto se introduce en el capítulo 7, que aborda la energía de un sistema; el producto cruz se introduce en el capítulo 11, que se relaciona con cantidad de movimiento angular.

**Cifras significativas.** Las cifras significativas, tanto en los ejemplos trabajados como en los problemas de fin de capítulo, se manejaron con cuidado. La mayoría de los ejemplos numéricos se trabaja a dos o a tres cifras significativas, dependiendo de la precisión de los datos proporcionados. Los problemas de fin de capítulo por lo regular establecen datos y respuestas a tres dígitos de precisión. En la realización de los cálculos de estimación se suele trabajar con una sola cifra significativa. (Se puede encontrar más acerca del análisis de cifras significativas en el capítulo 1, páginas 13-15.)



**Unidades.** A lo largo del texto se usa el sistema internacional de unidades (SI). El sistema estadounidense de unidades usuales sólo se usa en una medida limitada en los capítulos sobre mecánica y termodinámica.

**Apéndices y Notas finales.** Casi al final del texto se proporcionan varios apéndices. La mayoría del material de los apéndices representa un repaso de conceptos y técnicas matemáticas aplicadas en el texto, incluidos notación científica, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo diferencial y cálculo integral. En todas las partes del texto se hace referencia a estos apéndices. La mayor parte de las secciones de repaso matemático en los apéndices incluyen ejemplos y ejercicios con respuestas. Además de los repasos matemáticos, los apéndices contienen tablas de datos físicos, factores de conversión y las unidades del SI de cantidades físicas, así como una tabla periódica de los elementos. Otra información útil (constantes fundamentales y datos físicos, datos planetarios, una lista de prefijos estándar, símbolos matemáticos, el alfabeto griego y abreviaturas estándar de unidades de medición) aparecen en las páginas finales del libro.

## Soluciones al curso que se adaptan a sus metas de enseñanza y a las necesidades de aprendizaje de sus alumnos

Los avances recientes en tecnología educativa han hecho que los sistemas de gestión de la tarea y los sistemas de respuesta de la audiencia potentes y asequibles herramientas para mejorar la forma de enseñar su curso. Si usted ofrece un curso más tradicional basado en libro, está interesado en utilizar o está utilizando actualmente un sistema de gestión de tareas en línea como WebAssign, o está listo para convertir su clase en un entorno de aprendizaje interactivo, usted puede estar seguro de que el contenido probado del libro proporciona la base para todos y cada uno de los componentes de nuestra tecnología y paquete auxiliar.

## Recursos de presentaciones de clases para docentes (en inglés)

**Sitio web de recursos del profesor para Física para ciencias e ingeniería Serway/Jewett, décima edición.** El sitio web de recursos del profesor tiene una variedad de recursos para ayudarle a preparar y presentar material de texto de una manera que satisfaga sus preferencias personales y necesidades del curso. El *Manual de soluciones del profesor* publicado presenta soluciones completas trabajadas para todos los problemas de fin de capítulo del libro impreso y respuestas para todos los problemas con números pares. Se encuentran disponibles clases robustas esquematizadas en PowerPoint que han sido diseñadas para un aula activa, con preguntas de comprobación de lectura y preguntas de trabajo colaborativo, así como el esquema tradicional de sección por sección. Las imágenes del libro de texto se pueden utilizar para personalizar sus propias presentaciones. Disponible en línea en [www.cengage.com/login](http://www.cengage.com/login).

Para mayor información acerca de estos recursos, consulte a su representante local de Cengage Learning.

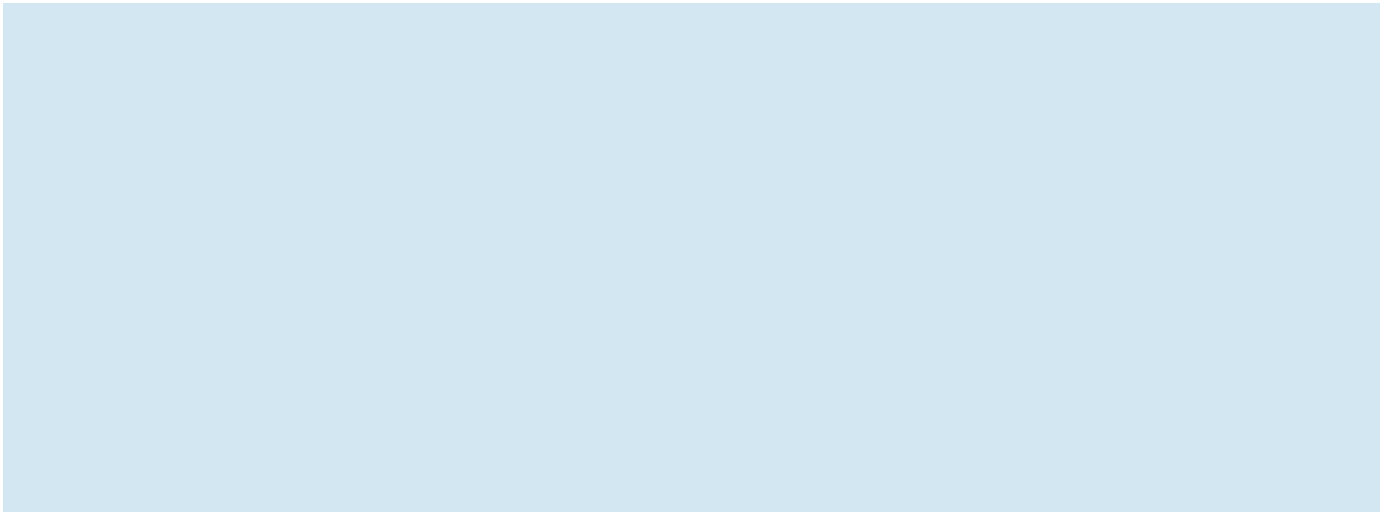
## Recursos del estudiante

El sitio web de recursos del estudiante tiene una variedad de recursos para ayudarle a preparar material de texto de una manera que satisfaga sus preferencias personales y necesidades del curso. Entre los recursos destacan Figuras activas, Videos y Cuestionarios interactivos.

El material se encuentra disponible en el sitio <http://latam-cm.cengage.com/moodle/course/view.php?id=53>



CÓDIGO DE ACCESO:



## Reconocimientos

Esta Décima edición de *Física para ciencias e ingeniería* se preparó con la guía y asistencia de muchos profesores que revisaron selecciones del manuscrito, la revisión previa del texto o ambos. Queremos agradecer a los siguientes académicos y expresar nuestro sincero aprecio por sus sugerencias, críticas y aliento:

John F. DiTusa, *Louisiana State University*; Hani Dulli, *Texas Tech University*; Eric Hudson, *Pennsylvania State University*; David Joffe, *Kennesaw State University*; Yibin Pan, *University of Wisconsin-Madison*; Mark Rzechowski, *University of Wisconsin-Madison*; Joseph Scanio, *University of Cincinnati*; Brian Utter, *Bucknell University*

Durante nuestro trabajo en esta revisión, trabajamos con socios de desarrollo para ayudarnos a determinar el curso de la revisión; Quisiéramos agradecerles:

Tom Barrett, *The Ohio State University*; Ken Bolland, *The Ohio State University*; Colleen Countryman, *North Carolina State University*; Dawn Hollenbeck, *Rochester Institute of Technology*; Kathleen Koenig, *University of Cincinnati*; David Lamp, *Texas Tech University*; Rafael Lopez-Mobilia, *The University of Texas at San Antonio*; Yibin Pan, *University of Wisconsin-Madison*; Chandralekha Singh, *University of Pittsburgh*; Michael Thackston, *Kennesaw State University*; Michael Ziegler, *The Ohio State University*

Antes de nuestro trabajo en esta revisión, realizamos una encuesta de profesores; su retroalimentación y sugerencias ayudaron a dar forma a esta revisión, por lo que quisiéramos agradecer a los participantes de la encuesta:

Steve Alexander, *Southwestern University*; Sanjeev Arora, *Fort Valley State University*; Erik Aver, *Gonzaga University*; David Berube, *Loyola Marymount University*; Muhammad Bhatti, *The University of Texas Rio Grande Valley*; Jeffrey Bierman, *Gonzaga University*; Ken Bolland, *The Ohio State University*; John Bulman, *Loyola Marymount University*; Hani Dulli, *Texas Tech University*; Eric Hudson, *Pennsylvania State University*; Satyanaraya Kachiraju, *The University of Texas Rio Grande Valley*; Brent McDaniel, *Kennesaw State University*; Lisa Paulius, *Western Michigan University*; Linh Pham, *University of San Diego*; Charles Ruggiero, *The Ohio State University at Marion*; Mackay Salley, *Wofford College*; Jeff Sanny, *Loyola Marymount University*; Joseph Scanio, *University of Cincinnati*; Jeffrey Schwartz, *University of California en Los Angeles*; Amit Sharma, *Wright State University*; Mark Spraker, *University of North Georgia*; Anthony Teate, *James Madison University*; Lih-Sin The, *Clemson University*.

Este título fue cuidadosamente revisado por la precisión de Michael faux, Universidad de SUNY en Oneonta. Le agradecemos por sus diligentes esfuerzos bajo la presión del programa.

Belal Abas, Zinoviy Akkerman, Eric Boyd, Hal Falk, Melanie Martin, Steve McCauley, y Glenn Stracher correcciones a problemas tomados de ediciones anteriores. Harvey Leff proporcionó una orientación inestimable sobre la reestructuración de la discusión de la entropía en el capítulo 21. Estamos agradecidos a Vahé Peroomian para preparar un excelente manual de soluciones para profesores. Matt Kohlmyer (desarrollador Senior de contenido instruccional en Cengage), Marllin L. Simon (Profesor emérito, Auburn University), y Susan English todos trabajaron arduamente en la optimización de los problemas de tarea en línea, y les agradecemos. Linnea Cookson proporcionó una comprobación excelente de la exactitud de los tutoriales del modelo del análisis.

Agradecimiento especial y reconocimiento ir al staff profesional en Cengage en particular, Rebecca Berardy Schwartz, Michael Jacobs, Ed Dodd, Tanya Nigh, Teresa Trego, Lorreen Towle, Tom Ziolkowski, Cate Barr, y Caitlin Ghegan por su buen trabajo durante el desarrollo, producción y promoción de este libro de texto. Reconocemos el servicio de producción calificado y las ilustraciones excelentes proporcionadas por Ed Dionne y el personal en MPS limitado y la investigación dedicada de la imagen y del texto de Cheryl Du Bois y Ragu Veeraragavan, respectivamente.

Por último, estamos profundamente en deuda con nuestras esposas, hijos y nietos por su amor, apoyo y sacrificios a largo plazo.

**Raymond A. Serway**  
*St. Petersburg, Florida*

**John W. Jewett, Jr.**  
*Anaheim, California*



# Al estudiante

**E**s apropiado ofrecer algunas palabras de consejo que deben ser de beneficio para el estudiante. Antes de hacerlo, suponemos que ha leído el Prefacio, que describe las diferentes características del texto y materiales de apoyo que le ayudaran a lo largo del curso.

## Cómo estudiar

Con frecuencia preguntan a los docentes: “¿Cómo debo estudiar física y prepararme para los exámenes?” No hay una respuesta simple a esta pregunta, pero podemos ofrecer algunas sugerencias de acuerdo con nuestra experiencia en el aprendizaje y enseñanza a través de los años.

Ante todo, mantenga una actitud positiva hacia el tema de estudio, considerando que la física es la más esencial de todas las ciencias naturales. Otros cursos de ciencia que siguen usaran los mismos principios físicos, de modo que es importante que entienda y sea capaz de aplicar los diversos conceptos y teorías explicadas en el libro.

## Conceptos y principios

Es esencial que entienda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver los problemas asignados. Esta meta la puede lograr al leer con cuidado el texto antes de asistir a su clase acerca del material cubierto. Cuando lea el texto, debe anotar aquellos puntos que no sean claros. También haga un intento diligente por responder los Exámenes rápidos, conforme los encuentra en su lectura. Hemos trabajado duro para preparar preguntas que le ayuden a juzgar por sí mismo que tan bien entiende el material. Estudie cuidadosamente las preguntas **¿Qué pasaría si?** que aparecen en muchos de los ejemplos trabajados. Ellas le ayudaran a extender su comprensión más allá del simple acto de llegar a un resultado numérico. Las Previsiones de riesgos ocultos también le ayudaran a alejarse de las malas interpretaciones comunes con respecto a la física. Durante la clase tome notas y pregunte acerca de aquellas ideas que no le sean claras. Considere que pocas personas son capaces de absorber todo el significado del material científico después de sólo una lectura; pueden ser necesarias muchas lecturas del texto y sus notas. Sus clases y trabajo de laboratorio complementan la lectura del libro y deben clarificar algo del material más difícil. Debe minimizar su memorización del material. La memorización exitosa de pasajes del texto, ecuaciones y deducciones no necesariamente indican que comprende el material. Su comprensión del material mejorará mediante la combinación de hábitos eficientes de estudio, discusiones con otros estudiantes y con docentes, y su habilidad para resolver los problemas que se presentan en el libro. Pregunte siempre que crea que es necesario aclarar un concepto.

## Agenda de estudio

Es importante que configure una agenda de estudio regular, de preferencia que sea diaria. Asegúrese de leer el programa de estudio del curso y que este coincide con el calendario establecido por el instructor. Las clases tendrán mucho más sentido si lee el texto correspondiente antes de asistir a ellas. Como regla general, debe dedicar aproximadamente dos horas de tiempo de estudio por cada hora que esté en clase. Si tiene problemas con el curso, busque el consejo del instructor u otros estudiantes que hayan tomado el curso. Puede ser necesario buscar más instrucción de estudiantes experimentados. Con mucha frecuencia, los docentes ofrecen sesiones de repaso, además de los periodos de clase regulares. Evite la práctica de demorar el estudio hasta un día o dos antes de un examen.

Por lo general, este enfoque tiene resultados desastrosos. En lugar de emprender una sesión de estudio de toda la noche antes del examen, repase brevemente los conceptos y ecuaciones básicos, y luego tenga una buena noche de descanso.



Usted puede comprar cualquier producto Cengage Learning en inglés en nuestra tienda online **CengageBrain.com**.

## Use las características

Debe usar por completo las diferentes características del texto explicadas en el Prefacio. Por ejemplo, las notas al margen son útiles para localizar y describir ecuaciones y conceptos importantes, y las **negritas** indican enunciados y definiciones importantes. En los apéndices hay muchas tablas útiles, pero la mayoría se incorpora al texto, donde su referencia es útil. El Apéndice B es un repaso conveniente de técnicas matemáticas.

Las respuestas a los exámenes rápidos y a los problemas con número impar se proporcionan al final del libro, las respuestas a los exámenes rápidos se ubican al final de cada capítulo. La tabla de contenido proporciona un panorama de todo el texto y el índice le permite ubicar rápidamente material específico. En ocasiones se usan notas a pie de página para complementar el texto o citar otras referencias acerca del tema explicado. Después de leer un capítulo debe ser capaz de definir cualquier cantidad nueva introducida en dicho capítulo y explicar los principios y suposiciones que se usaron para llegar a ciertas relaciones clave. Los resúmenes de capítulo y las secciones de repaso le ayudan a este respecto. En algunos casos puede encontrar necesario remitirse al índice del libro para ubicar ciertos temas. Debe ser capaz de asociar a cada cantidad física el símbolo correcto para representar dicha cantidad y la unidad en que se especifica la cantidad. Además, debe ser capaz de expresar cada ecuación importante en prosa concisa y exacta.

## Resolución de problemas

R. P. Feynman, laureado Nobel en física, dijo una vez: “No sabes nada hasta que lo has practicado.” Para estar de acuerdo con este enunciado, le recomendamos encarecidamente que desarrolle las habilidades necesarias para resolver una amplia serie de problemas. Su habilidad para resolver problemas será una de las principales pruebas de su conocimiento en física; por lo tanto, debe intentar resolver tantos problemas como sea posible. Es esencial que comprenda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver problemas. Es buena práctica intentar encontrar soluciones alternas al mismo problema. Por ejemplo, puede resolver problemas en mecánica usando las leyes de Newton, pero con mucha frecuencia un método alternativo que se apoye en consideraciones sobre la energía es más directo. No debe engañarse y creer que entiende un problema simplemente porque ha visto como se resolvió en clase. Debe ser capaz de resolver el problema y problemas similares por cuenta propia.

El enfoque para resolver problemas se debe planear cuidadosamente. Un plan sistemático es especialmente importante cuando un problema involucra muchos conceptos. Primero, lea el problema muchas veces hasta que este seguro de que entiende que se pide. Busque palabras clave que le ayuden a interpretar el problema y tal vez le posibiliten la formulación de ciertas suposiciones. Su habilidad para interpretar adecuadamente una pregunta es una parte integral de la resolución del problema. Segundo, debe adquirir el hábito de escribir la información conocida en un problema y aquellas cantidades que necesite encontrar; por ejemplo, puede construir una tabla que mencione tanto las cantidades conocidas como las cantidades a encontrar. Este procedimiento se usa a veces en los ejemplos trabajados del libro. Por último, después de decidir el método que considere apropiado para un problema determinado, proceda con su solución. La Estrategia General para Resolver Problemas le guiará a través de problemas complejos. Si sigue las etapas de este procedimiento (*Conceptualizar*, *Categorizar*, *Analizar*, *Finalizar*), le será más fácil llegar a una solución y ganará más por sus esfuerzos. Dicha estrategia, en la sección 2.4 (páginas 30–32), se usa en todos los ejemplos en los capítulos restantes, de modo que puede aprender cómo aplicarla. En el texto se incluyen estrategias específicas para resolución de problemas para ciertos tipos de situaciones y aparecen con un encabezado especial. Dichas estrategias específicas siguen el esbozo del enfoque del Modelo de análisis para resolver problemas.

Con frecuencia los estudiantes fracasan en el reconocimiento de las limitaciones de ciertas ecuaciones o leyes físicas en una situación particular. Es muy importante que entienda y recuerde las suposiciones que subyacen a una teoría o formalismo particular.





Por ejemplo, ciertas ecuaciones en cinemática sólo se aplican a una partícula en movimiento con aceleración constante. Estas ecuaciones no son válidas para describir el movimiento cuya aceleración no sea constante, como el movimiento de un objeto conectado a un resorte o el movimiento de un objeto a través de un fluido. Estudie cuidadosamente los modelos de análisis para resolver problemas en los resúmenes de capítulo, de modo que sepa cómo se aplica cada modelo a una situación específica. Los modelos de análisis le proporcionan una estructura lógica para resolver problemas y ayudan a desarrollar sus habilidades de pensamiento para ser más como los de un físico. Utilice el enfoque del modelo de análisis para ahorrar horas de búsqueda de la ecuación correcta y para hacer de usted un solucionador de problemas más rápido y más eficiente.

## Experimentos

La física es una ciencia que se apoya en observaciones experimentales. Por lo tanto, recomendamos que intente complementar el texto, realizando varios tipos de experimentos “prácticos”, en casa o en el laboratorio. Estos experimentos se pueden usar para poner a prueba ideas y modelos explicados en clase o en el libro. Por ejemplo, el juguete común Slinky es excelente para estudiar ondas viajeras, una bola que se balancea en el extremo de una cuerda larga se puede usar para investigar el movimiento pendular, diferentes masas unidas al extremo de un resorte o banda de goma vertical se pueden usar para determinar su naturaleza elástica, un viejo par de lentes de sol y algunos lentes de desecho y una lupa son los componentes de diferentes experimentos en óptica, y una medida aproximada de la aceleración en caída libre se puede determinar simplemente al medir con un cronómetro el tiempo que una bola tarda en caer desde una altura conocida. La lista de tales experimentos es interminable. Cuando no estén disponibles los modelos físicos, sea imaginativo e intente desarrollar los suyos por cuenta propia.

## Nuevos medios (en inglés y se comercializa por separada)



Le recomendamos enormemente usar el producto WebAssign que está disponible con este libro. Es mucho más fácil comprender la física si la ve en acción, y estos nuevos materiales le permitirán volverse parte de dicha acción.

Es nuestro sincero deseo que encuentre en la física una experiencia excitante y agradable, y que se beneficie de esta experiencia sin importar la profesión que elija. Bienvenido al excitante mundo de la física!

*El científico no estudia la naturaleza porque sea útil; la estudia porque se deleita en ella, y se deleita en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocer la naturaleza, no valdría la pena vivir la vida.*

—Henri Poincaré



# Física

2

## para ciencias e ingeniería

DÉCIMA EDICIÓN

### Acerca de la portada

La portada muestra un dron de seis hélices que transporta un cable piloto de casi 5 kilómetros a través de un profundo cañón por el cual fluye el río Dadu durante el proyecto de construcción del puente Xingkang en la provincia China de Sichuan. Este método evita la necesidad de utilizar barcos en el río de aguas turbulentas u otros métodos como helicópteros tripulados y pequeños cohetes. También reduce el costo de tendido del cable aproximadamente al 20% del que tienen los métodos tradicionales. Una vez que se coloca el cable piloto, puede ser usado para jalar cables más pesados a través del desfiladero.





# Electricidad y magnetismo

**Ahora estudiará la rama de la física que se ocupa de los fenómenos eléctricos y magnéticos.** En esta parte del libro, nos centraremos en el término  $T_{ET}$ , que representa la transferencia de energía por transmisión eléctrica en la ecuación 8.2. En el último capítulo de esta parte, presentaremos la física detrás del término  $T_{ER}$  para la radiación electromagnética. Las leyes de la electricidad y del magnetismo desempeñan un papel muy importante en el funcionamiento de dispositivos como teléfonos inteligentes, televisiones, motores eléctricos, computadoras, aceleradores de alta energía y otros aparatos electrónicos. Incluso, en su forma más básica, las fuerzas interatómicas e intermoleculares responsables de la formación de sólidos y líquidos son, en su origen, eléctricas. A su vez, las fuerzas eléctricas son la base de la ciencia de la química y son responsables del desarrollo de los organismos biológicos. Por tanto, la gravedad juega un papel en la naturaleza al permitir que los planetas existan, ¡pero la vida en ese planeta se debe a la electricidad!

No fue sino hasta principios del siglo XIX que los científicos llegaron a la conclusión de que la electricidad y el magnetismo son fenómenos relacionados. En 1819, Hans Oersted descubrió que la aguja de la brújula se desvía si se coloca cerca de un circuito por el que se conduce una corriente eléctrica. En 1831, Michael Faraday y, en forma simultánea, Joseph Henry, demostraron que cuando se pone en movimiento un alambre cerca de un imán (o, de manera equivalente, cuando un imán se mueve cerca de un alambre), se establece una corriente eléctrica en dicho alambre. En 1873, James Clerk Maxwell aprovechó estas observaciones junto con otros experimentos para sustentar las leyes del electromagnetismo como se conocen hoy día. (*Electromagnetismo* es el nombre que se le da al estudio conjunto de la electricidad y del magnetismo.)

La contribución de Maxwell en el campo del electromagnetismo fue de especial relevancia, porque las leyes que formuló son fundamentales para explicar todas las formas de fenómenos electromagnéticos. Su trabajo tiene tanta importancia como las leyes del movimiento y la teoría de la gravitación universal. ■

Un tren de maglev *Transrapid* se detiene en una estación en Shanghai, China. La palabra *maglev* es una forma abreviada de *levitación magnética*. Este tren no tiene contacto físico con sus rieles, y su peso está totalmente apoyado por las fuerzas electromagnéticas. En esta parte del libro, estudiaremos estas fuerzas. (Lee Prince/Shutterstock)





1XY11010  
0101101X

Un huevo tiene impresos números sobre él. ¿Cómo imprimirías sobre un huevo? (Starstuff/Shutterstock)

- 22.1 Propiedades de las cargas eléctricas
- 22.2 Objetos cargados mediante inducción
- 22.3 Ley de Coulomb
- 22.4 Análisis del modelo: Partícula en un campo eléctrico
- 22.5 Líneas de campo eléctrico
- 22.6 Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme

### **IMAGINE** Aprovechando una visita de fin de semana a la familia, usted

ha lavado y secado su ropa y está retirando la ropa de la secadora. Nota que sus calcetines parecen estar pegados a sus camisas. Incluso sacudir la camisa no sacará los calcetines. Cuando quite los calcetines de la camisa, se desprenden con un crujido. Mientras lleva su ropa seca a tu habitación, se pregunta por qué ocurrieron esos efectos. Todavía está intrigado mientras se peina en el baño. Abre la llave e involuntariamente sostiene el peine que acaba de usar junto a la corriente de agua. ¡La corriente de agua se dobla hacia un lado, hacia el peine! Mueve el peine a diferentes posiciones y observa que la corriente de agua se desvía hacia el lado en diferentes valores. Su padre deambula mientras hace esto y dice: “Esa es exactamente la técnica que utilizamos en el diseño de nuestras impresoras de fabricación de alta velocidad. Ve a ver las latas de comida en la cocina. ¿Cómo crees que las fechas de vencimiento están impresas en las latas? Aún más fascinante, ¿cómo imprimimos números de código en los huevos? “Nunca entendió lo que hace su padre para ganarse la vida, pero ahora está bastante intrigado. Sabe que diseña algún tipo de impresora industrial. Le pregunta qué significa el experimento del baño. Él le dice que investigue en línea sobre la impresión continua de inyección de tinta.

**CONEXIONES** En nuestros capítulos anteriores sobre mecánica, identificamos varios tipos de fuerzas: fuerzas normales perpendiculares a las superficies, fuerzas de fricción paralelas a las superficies, fuerzas de tensión a lo largo de las cuerdas, fuerzas gravitatorias en los planetas, etc. Entre ellas, la fuerza de gravedad, que estudiamos con detalle en el capítulo 13 es única, ya que es una fuerza fundamental en la naturaleza. Resulta que las otras fuerzas en esta lista se deben a un segundo tipo de fuerza fundamental, la fuerza electromagnética. En este capítulo, comenzaremos nuestro estudio de una manifestación de esta fuerza, la fuerza eléctrica.

Nuestra comprensión de la fuerza gravitacional desarrollada de acuerdo con una estructura conceptual que construimos: aprendimos que la fuerza existe entre los objetos con masa. Luego desarrollamos una ley matemática, la ley de gravitación universal de Newton, para describir la magnitud de la fuerza. Luego presentamos la noción de un campo gravitacional y estudiamos la energía potencial gravitacional en un sistema de dos o más objetos masivos. Seguiremos un desarrollo conceptual similar en nuestro estudio de la fuerza eléctrica. Aprenderemos que la fuerza existe entre objetos con carga eléctrica. Desarrollaremos una ley matemática, la ley de Coulomb, para describir la magnitud de la fuerza. Introduciremos la noción de un campo eléctrico y discutiremos la energía potencial eléctrica en un sistema de dos o más objetos cargados. A medida que continuemos estudiando la fuerza eléctrica en los próximos capítulos, descubriremos que tenemos mucho más control sobre esta fuerza que sobre la gravedad. Las fuentes de gravedad se restringen a una forma: la forma esférica de los planetas y las estrellas (con la excepción de pequeños asteroides y lunas que pueden desviarse ligeramente de las esferas). Por otro lado, podemos formular diversas formas para situaciones eléctricas: esferas, placas, cables y cosas por el estilo. Los objetos que se mueven en campos gravitacionales son enormes y masivos; no podemos controlar su movimiento. Los objetos que se mueven en campos eléctricos pueden ser tan pequeños como los electrones; ¡podemos cambiar su movimiento fácilmente! No tenemos control sobre la gravedad; siempre está ahí. ¡Pero podemos encender y apagar la electricidad! No podemos ajustar la fuerza del campo gravedad de la Tierra. ¡Pero podemos girar fácilmente un selector para cambiar la fuerza de un campo eléctrico! La gravedad está en todas partes, dentro y fuera de todo. ¡Pero algunos materiales conducen electricidad y otros no! ¡Y podemos crear regiones de espacio libres de campos eléctricos con bastante facilidad! Este tipo de control que tenemos sobre la electricidad lo convierte en la base de nuestra sociedad tecnológica. Los fenómenos asociados con las cargas eléctricas aparecerán repetidamente en la mayoría de los capítulos restantes de este libro.

## 22.1 Propiedades de las cargas eléctricas

Hay una variedad de experimentos simples para demostrar la existencia de fuerzas eléctricas. Por ejemplo, después de frotar un globo contra el cabello en un día seco, observará que el globo atrae pequeños pedazos de papel. Con frecuencia la fuerza de atracción es lo suficientemente intensa que los pedazos de papel quedan suspendidos. La figura 22.1a muestra otro efecto de la fuerza eléctrica. El cuerpo de la mujer se carga, y, en este caso, hay una fuerza repulsiva entre todos los pelos de su cabeza. La figura 22.1b muestra otra situación atractiva. Un gato frotó su cuerpo contra los cacahuates de poliestireno mientras jugaba en una caja de embalaje. Al salir de la caja, los cacahuates de espuma de poliestireno se pegan a su cuerpo.



JENS SCHLUETER/Getty Images

a



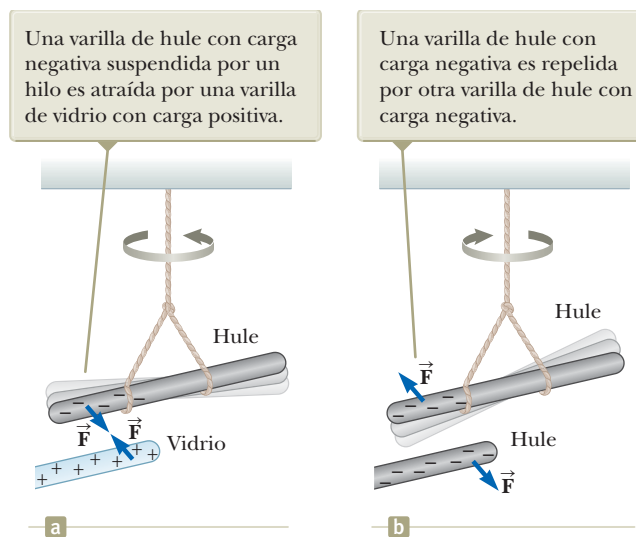
Sean McGrath/Flickr

b

**Figura 22.1** (a) Esta joven está disfrutando los efectos de cargar eléctricamente su cuerpo. Cada cabello individual en su cabeza se carga y ejerce una fuerza repulsiva sobre los otros cabellos, lo que resulta en el peinado “parado” que se ve aquí. (b) Una fuerza eléctrica atractiva es demostrada por un gato que se metió en una caja de cacahuates de poliestireno.







**Figura 22.2** Fuerza eléctrica entre (a) objetos con cargas opuestas y (b) objetos con cargas iguales.

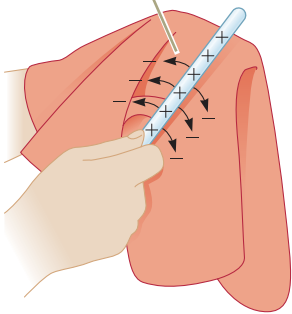
Cuando los materiales se comportan de esta manera, se dice que están *electrificados*, o que se han **cargado eléctricamente**. Usted puede electrificar su cuerpo con facilidad si frota con fuerza sus zapatos sobre una alfombra de lana; detectará la carga eléctrica de su cuerpo al tocar ligeramente (y sobresaltar) a un amigo. Bajo condiciones adecuadas, verá una chispa al momento de tocarlo y ambos sentirán una ligera descarga. (Este tipo de experimentos funcionan mejor durante días secos, porque el exceso de humedad en el aire hace que cualquier carga que usted acumule en su cuerpo se “fugue” hacia la tierra.)

A partir de una serie de sencillos experimentos, Benjamín Franklin (1706-1790) descubrió que existen dos tipos de cargas eléctricas, a las que dio el nombre de **positiva** y **negativa**. Los electrones tienen carga negativa y los protones positiva. Para comprobar la existencia de ambos tipos de carga, imagine una varilla rígida de hule o caucho que ha sido frotada contra un trozo de piel y que está suspendida de un hilo, como puede observar en la figura 22.2. Cuando acerca una varilla de vidrio que ha sido frotada con seda a una varilla de hule, ambas se *atraen* (figura 22.2a). Por otra parte, si acerca dos varillas de hule con carga (o dos varillas de vidrio con carga), como se observa en la figura 22.2b, ambas se *repelen*. Esta observación demuestra que el hule y el vidrio tienen dos tipos diferentes de carga. Con base en estas observaciones, se puede concluir que **cargas de un mismo signo se repelen y cargas de signos opuestos se atraen**.

Utilizando la convención sugerida por Franklin, a la carga eléctrica en la varilla de vidrio se le denominó positiva y a la varilla de hule, negativa. Por tanto, cualquier objeto cargado que sea atraído por una varilla de hule con carga (o repelido por una varilla de vidrio con carga), deberá tener una carga positiva, y cualquier objeto con carga repelido por una varilla de hule con carga (o atraído por una varilla de vidrio con carga), deberá tener una carga negativa.

Otro aspecto importante de la electricidad que surge de la observación experimental es que en un sistema aislado la **carga eléctrica siempre se conserva**. Es decir, cuando se frota un objeto contra otro, no se crea carga en este proceso. El estado de electrificación se debe a una *transferencia* de carga de uno de los objetos hacia el otro. Uno adquiere parte de la carga negativa en tanto que el otro adquiere la misma cantidad de carga, pero positiva. Por ejemplo, cuando una barra de vidrio es frotada con seda, como se aprecia en la figura 22.3, la seda adquiere una carga negativa igual en magnitud a la carga positiva de la barra de vidrio. Hoy día se sabe, gracias a la comprensión de la estructura del átomo, que en el proceso de frotación se transfieren electrones del vidrio a la seda. De manera similar, cuando el hule es frotado contra la piel, los electrones se transfieren al hule dándole una carga negativa neta y a la piel una carga positiva neta. Este proceso es consistente con el hecho de que la materia, neutra y sin carga, contiene tantas cargas positivas (protones en los núcleos de los átomos) como negativas (electrones). La conservación de la carga eléctrica de un sistema

Para la conservación de la carga, cada electrón añade cargas negativas a la seda, e igual carga positiva se queda en la varilla.



**Figura 22.3** Cuando una varilla de vidrio es frotada con seda, se transfieren electrones del vidrio a la seda.

La carga eléctrica se conserva ►





aislado es como la conservación de la energía, del impulso y del momento angular, pero no se identifica un modelo de análisis para este principio de conservación, ya que no se utiliza con bastante frecuencia en la solución matemática a los problemas.

En 1909, Robert Millikan (1868-1953), descubrió que las cargas eléctricas siempre se presentan como un entero múltiplo de una cantidad básica de carga  $e$  (véase la sección 22.3). En términos actuales se dice que la carga eléctrica  $q$  está **cuantizada**, y  $q$  es el símbolo de la variable para la carga; en otras palabras, la carga eléctrica existe en forma de “paquetes” discretos y se escribe  $q = \pm Ne$ , donde  $N$  es algún número entero. Otros experimentos en el mismo periodo demostraron que el electrón tiene una carga  $-e$  y el protón una carga de igual magnitud, pero de signo contrario,  $+e$ . Algunas partículas, como el neutrón, no poseen carga.

- E XAMEN RÁPIDO 22.1** Se colocan tres objetos, muy cerca uno del otro, dos al mismo tiempo. Cuando se juntan los objetos A y B, se repelen. Cuando se acercan los objetos B y C, también se repelen. De los siguientes enunciados, ¿cuál es el verdadero? **(a)** Los objetos A y C tienen cargas del mismo signo. **(b)** Los objetos A y C poseen cargas de signos opuestos. **(c)** Los tres objetos tienen cargas del mismo signo. **(d)** Uno de los objetos es neutro. **(e)** Es necesario llevar a cabo experimentos adicionales para determinar los signos de las cargas.

## 22.2 Objetos cargados mediante inducción

Es conveniente clasificar los materiales en función de la capacidad con que los electrones se mueven a través del material:

Los **conductores** eléctricos son aquellos materiales en los cuales algunos de los electrones son libres,<sup>1</sup> no están unidos a átomos y pueden moverse con libertad a través del material. Los **aislantes** eléctricos son aquellos materiales en los cuales todos los electrones están unidos a átomos y no pueden moverse libremente a través del material.

Materiales como el vidrio, el hule y la madera seca se incluyen en la categoría de aislantes eléctricos. Cuando estos materiales son frotados sólo la zona frotada se carga, y las partículas con carga no pueden moverse hacia otras zonas del material.

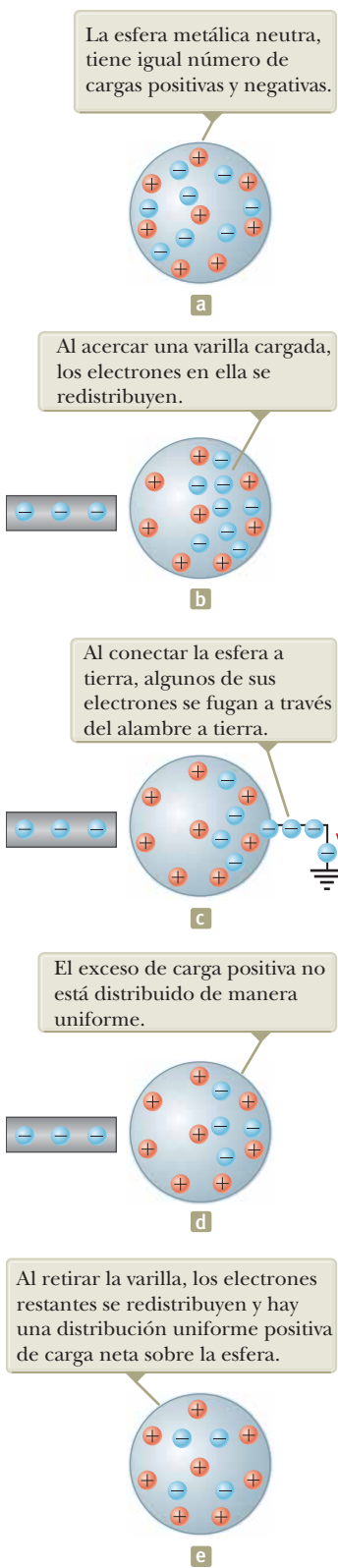
En contraste, materiales como el cobre, el aluminio y la plata son buenos conductores eléctricos. Cuando están con carga en alguna pequeña zona, la carga se distribuye de inmediato en toda la superficie del material.

Una tercera clase de materiales son los **semiconductores**, cuyas propiedades eléctricas se ubican entre las correspondientes a los aislantes y a los conductores. El silicio y el germanio son ejemplos muy conocidos de materiales semiconductores de uso común en la fabricación de una gran diversidad de chips electrónicos utilizados en computadoras, teléfonos celulares y estéreos. Las propiedades eléctricas de los semiconductores cambian, en varios órdenes de magnitud, a partir de la adición de cantidades controladas de ciertos átomos.

Para comprender cómo se carga un conductor por un proceso conocido como **inducción**, considere una esfera conductora neutra (sin carga) aislada de la tierra, como se muestra en la figura 22.4a (página 592). Los electrones se mueven libremente dentro del conductor. Estos electrones originalmente pertenecían a los átomos metálicos antes de que los átomos se combinaran en una muestra macroscópica. Por tanto, hay un enrejado de átomos bloqueados en su lugar en el conductor, cada uno perdiendo un electrón. Los átomos ahora se llaman iones porque están cargados, positivamente en este caso debido al electrón faltante. Suponemos que cada átomo libera un electrón, por lo que hay una cantidad igual de iones libres y electrones en la esfera si la carga en ella es exactamente cero. Cuando se le acerca una varilla de hule

<sup>1</sup>Un átomo de metal contiene uno o más electrones externos, que están débilmente unidos al núcleo. Cuando muchos átomos se combinan para formar un metal, los electrones libres son estos electrones externos, que no están unidos a ningún átomo. Estos electrones se mueven sobre el metal de manera similar a las moléculas de gas que se mueven en un contenedor.



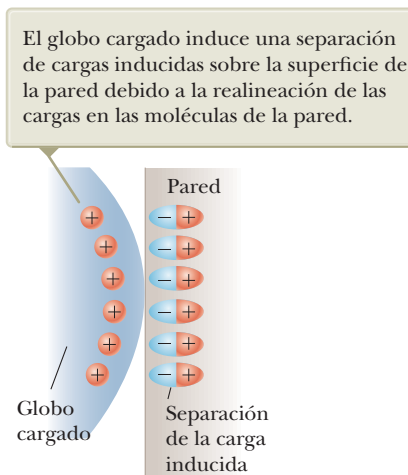


con carga negativa, los electrones en la región más cercana a la varilla experimentan una fuerza de repulsión y emigran al lado opuesto de la esfera. Esto provoca que la región de la esfera cercana a la varilla se quede con carga positiva a causa del menor número de electrones, como se observa en la figura 22.4b. (El lado izquierdo de la esfera de la figura 22.4b queda con carga positiva, como si se hubieran trasladado a dicha región cargas positivas, pero recuerde que sólo los electrones tienen la libertad para moverse.) Esto se presenta aun cuando la varilla no toque la esfera. Si el mismo experimento se realiza con un alambre conductor conectado de la esfera a la tierra (figura 22.4c) algunos de los electrones en el conductor son repelidos con tal fuerza, por la presencia de la carga negativa de la varilla, que salen de la esfera a través del alambre hacia la tierra. El símbolo  $\equiv$  al extremo en la figura 22.4c indica que el alambre está conectado a **tierra**, como un depósito, tal como la Tierra, que puede aceptar o proveer de electrones con libertad sin que se produzca un efecto significativo sobre sus características eléctricas. Si el alambre a tierra se retira (figura 22.4d), la esfera conductora se queda con un exceso de carga positiva *inducida*, ya que tiene menos electrones de los que necesita para cancelar la carga positiva de los protones. Cuando la varilla de hule se aleja de la esfera (figura 22.4e), esta carga positiva inducida se queda en la esfera desconectada de la tierra. Observe que durante este proceso, la varilla de hule no pierde su carga negativa.

Para cargar un objeto por inducción no es necesario que tenga contacto con el objeto que induce la carga, a diferencia de cuando un objeto se carga por frotamiento (por *conducción*), en donde sí se requiere el contacto entre ambos objetos.

Un proceso similar a la inducción en los conductores se presenta en los materiales aislantes. En la mayoría de las moléculas neutras, el centro de la carga positiva coincide con el centro de la carga negativa. Sin embargo, en presencia de un objeto con carga, estos centros en el interior de cada molécula, en un material aislante, se desplazan ligeramente, lo que resulta en que un lado de la molécula tenga una carga más positiva que el otro. Este realineamiento de la carga en el interior de las moléculas produce una capa de carga sobre la superficie del material aislante, como observa en la figura 22.5. La proximidad de las cargas positivas en la superficie del objeto y las cargas negativas en la superficie del aislante resulta en una fuerza de atracción entre el objeto y el aislante. Su conocimiento de inducción en los materiales aislantes, le ayuda a explicar por qué los cacahuates de poliestireno se pegan al gato en la figura 22.1b.

- EJERCICIO RÁPIDO 22.2** Se colocan tres objetos, muy cerca uno del otro, dos al mismo tiempo. Cuando se juntan los objetos A y B, se atraen. Cuando se acercan los objetos B y C, se repelen. ¿Cuál de las siguientes opciones es necesariamente una verdad?: (a) Los objetos A y C tienen cargas del mismo signo. (b) Los objetos A y C tienen cargas de signo opuesto. (c) Los tres objetos tienen cargas del mismo signo. (d) Uno de los objetos es neutro. (e) Es necesario llevar a cabo experimentos adicionales para determinar las cargas de los objetos.



**Figura 22.4** Carga de un objeto metálico mediante *inducción* (a) Esfera metálica neutra (b) Una varilla de hule cargada se coloca cerca de la esfera (c) la esfera es conectada a tierra (d) la conexión a tierra es removida (e) la varilla es removida.

**Figura 22.5** Un globo cargado es colocado cerca de una pared aislada.

## 22.3 Ley de Coulomb

Charles Coulomb midió las magnitudes de las fuerzas eléctricas entre objetos cargados; para hacerlo usó la balanza de torsión, que él mismo inventó (figura 22.6). El principio de operación de la balanza de torsión es el mismo que el del aparato usado por Cavendish para medir la constante de gravitación (véase la sección 13.1), con esferas eléctricamente neutras remplazadas por esferas con carga. La fuerza eléctrica entre las esferas A y B de la figura 22.6 causa que se atraigan o se repelan, y el movimiento resultante provoca que la fibra suspendida se tuerza. Gracias a que el momento de torsión de recuperación de la fibra torcida es proporcional al ángulo de rotación de la fibra, una lectura de este ángulo da una medida cuantitativa de la fuerza eléctrica de atracción o de repulsión. Una vez cargadas las esferas por fricción, la fuerza eléctrica entre ambas se vuelve muy grande en comparación con la atracción gravitacional y, por tanto, esta última fuerza se puede ignorar.

A partir de los experimentos de Coulomb, se generalizan las propiedades de la fuerza eléctrica (algunas veces llamada *fuerza electrostática*) entre dos partículas cargadas estacionarias. Para ello se usa el término **carga puntual** que hace referencia a una partícula con carga de prueba. El comportamiento eléctrico de electrones y protones queda muy bien descrito si se representan como cargas puntuales. Debido a observaciones experimentales es posible encontrar que la magnitud de una fuerza eléctrica (a veces llamada *fuerza de Coulomb*) entre dos cargas puntuales está dada por la **ley de Coulomb**:

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (22.1)$$

donde  $k_e$  es una constante conocida como **constante de Coulomb**. En sus experimentos, Coulomb demostró que el valor del exponente de  $r$  era 2, con una incertidumbre de unos cuantos puntos porcentuales. Experimentos recientes han comprobado que el exponente es 2, con una incertidumbre de unas cuantas partes en  $10^{16}$ . Los experimentos también muestran que la fuerza eléctrica, como la fuerza gravitacional, es conservativa.

El valor de la constante de Coulomb depende de la elección de las unidades. En el SI la unidad de carga es el **coulomb** (C). La constante de Coulomb  $k_e$  en unidades del SI tiene el valor

$$k_e = 8.987\ 6 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (22.2)$$

Además esta constante se expresa como

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (22.3)$$

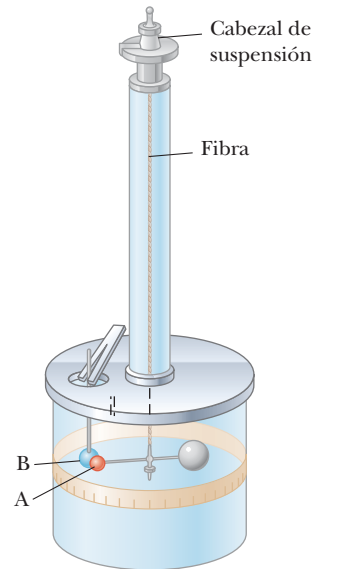
donde la constante  $\epsilon_0$  (griega minúscula épsilon) se conoce como la **permitividad del vacío**, cuyo valor es

$$\epsilon_0 = 8.854\ 2 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (22.4)$$

La unidad de carga más pequeña  $e$  conocida en la naturaleza,<sup>2</sup> es la carga de un electrón ( $-e$ ) o de un protón ( $+e$ ), con una magnitud de

$$e = 1.602\ 18 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (22.5)$$

Por tanto, una carga igual a 1 C es aproximadamente igual a la carga de  $6.24 \times 10^{18}$  electrones o protones. Esta cantidad es muy pequeña en comparación con el número de electrones libres presentes en 1 cm<sup>3</sup> de cobre, que es del orden de  $10^{23}$ . Aun así, 1 C es una cantidad de carga sustancial. En los experimentos en que se carga por fricción una varilla de hule o de vidrio,



**Figura 22.6** Balanza de torsión de Coulomb, utilizada para determinar la ley del cuadrado inverso para una fuerza eléctrica entre dos cargas.

◀ Ley de Coulomb

◀ Constante de Coulomb



**Charles Coulomb**  
Físico francés (1736-1806)

Las principales aportaciones a la ciencia de Charles Coulomb fueron en los campos de la electrostática y del magnetismo. En el transcurso de su vida, también investigó la resistencia de los materiales y determinó las fuerzas que afectan a objetos sobre vigas; así contribuyó al campo de la mecánica estructural. En el campo de la ergonomía, sus investigaciones lograron un discernimiento básico sobre las condiciones en que las personas y los animales pueden trabajar mejor.

<sup>2</sup>En una partícula libre no ha sido posible detectar ninguna unidad de carga menor que  $e$ ; sin embargo, las teorías actuales proponen la existencia de partículas de nombre *quarks* con cargas iguales a  $-e/3$  y  $2e/3$ . Aunque existen muchas evidencias experimentales de estas partículas en el interior de materia nuclear, jamás se han detectado quarks libres. En el capítulo 44 se explican otras propiedades de los quarks.

**TABLA 22.1** Carga y masa de electrones, protones y neutrones

Partícula	Carga (C)	Masa (kg)
Electrón (e)	$-1.602\,176\,5 \times 10^{-19}$	$9.109\,4 \times 10^{-31}$
Protón (p)	$+1.602\,176\,5 \times 10^{-19}$	$1.672\,62 \times 10^{-27}$
Neutrón (n)	0	$1.674\,93 \times 10^{-27}$

se obtiene una carga neta del orden de  $10^{-6}$  C. En otras palabras, sólo una fracción muy pequeña de la carga total disponible se ha transferido entre la varilla y el material contra el que se frota.

Las cargas y masas del electrón, el protón y el neutrón aparecen en la tabla 22.1. Tenga en cuenta que el electrón y el protón son idénticos en la magnitud de su carga, pero muy diferentes en la masa. Por otra parte, el protón y el neutrón son similares en masa, pero muy diferentes en carga. El capítulo 44 le ayudará a comprender estas interesantes propiedades.

### Ejemplo 22.1 El átomo de hidrógeno

El electrón y el protón de un átomo de hidrógeno están separados (en promedio) por una distancia de aproximadamente  $5.3 \times 10^{-11}$  m. Encuentre las magnitudes de la fuerza eléctrica y la fuerza gravitacional entre las dos partículas.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Considere que las dos partículas están separadas por la muy pequeña distancia dada en el enunciado del problema. Debido a que las partículas tienen tanto carga eléctrica como masa, habrá una fuerza eléctrica y una fuerza gravitacional entre ellas.

**Categorizar** Las fuerzas eléctrica y gravitacional se evaluarán a partir de leyes de fuerza universales, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ley de Coulomb para encontrar la magnitud de la fuerza eléctrica:

$$F_e = k_e \frac{|e||-e|}{r^2} = (8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$= 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

Use la ley de gravitación universal de Newton y la tabla 22.1 (para las masas de las partículas) para encontrar la magnitud de la fuerza gravitacional:

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2}$$

$$= (6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$= 3.6 \times 10^{-47} \text{ N}$$

La razón  $F_e/F_g \approx 2 \times 10^{39}$ . Por tanto, la fuerza gravitacional entre partículas atómicas con carga es despreciable cuando se compara con la fuerza eléctrica. Observe las similitudes entre la ley de Newton de gravitación universal y la ley de Coulomb de fuerzas eléctricas. Aparte de la magnitud de fuerzas entre partículas elementales, ¿cuál es la diferencia fundamental entre las dos fuerzas?

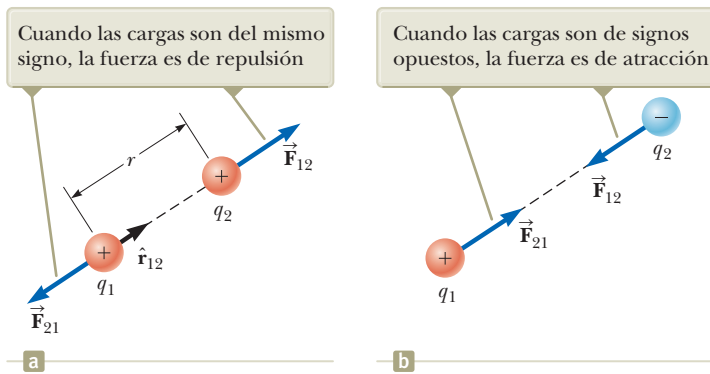
Cuando se relaciona con la ley de Coulomb, es necesario recordar que la fuerza es una cantidad vectorial que deberá ser tratada como corresponde. La ley de Coulomb, expresada en forma vectorial para una fuerza eléctrica ejercida por una carga  $q_1$  sobre una segunda carga  $q_2$ , rescrita como  $\vec{F}_{12}$ , es

Forma vectorial de la ley de Coulomb ▶

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (22.6)$$

donde  $\hat{r}_{12}$  es un vector unitario dirigido de  $q_1$  hacia  $q_2$ , como se puede observar en la figura 22.7a. Ya que la fuerza eléctrica obedece a la tercera ley de Newton, la fuerza eléctrica ejercida por  $q_2$  sobre  $q_1$  es igual en magnitud pero en sentido opuesto a la fuerza ejercida por  $q_1$  sobre  $q_2$ ; es decir,  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ . Por último, en la ecuación 22.6,





**Figura 22.7** Dos cargas puntuales separadas por una distancia  $r$  ejercen una fuerza sobre la otra que se da por la ley de Coulomb. La fuerza  $\vec{F}_{21}$  ejercida por  $q_2$  sobre  $q_1$  es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza  $\vec{F}_{12}$  ejercida por  $q_1$  sobre  $q_2$ .

es claro que si  $q_1$  y  $q_2$  son del mismo signo, como se observa en la figura 22.7a, el producto  $q_1q_2$  es positivo y la fuerza eléctrica sobre una partícula está dirigida lejos de la otra. Si  $q_1$  y  $q_2$  son de signos opuestos, como se muestra en la figura 22.7b, el producto  $q_1q_2$  es negativo y la fuerza eléctrica de una partícula está dirigida hacia la otra. Estos signos indican la dirección *relativa* de la fuerza, pero no la dirección *absoluta*. Un producto negativo indica que se trata de una fuerza de atracción y un producto positivo indica una fuerza de repulsión. La dirección *absoluta* de la fuerza sobre una carga depende de la posición de la otra carga. Por ejemplo, si el eje de las  $x$  está a lo largo de las dos cargas en la figura 22.7a, el producto  $q_1q_2$  será positivo, pero  $\vec{F}_{12}$  apunta en la dirección positiva de  $x$  y  $\vec{F}_{21}$  en la dirección negativa de  $x$ .

Cuando hay más de dos cargas presentes, la fuerza que se ejerce entre cualquier par de cargas está dada por la ecuación 22.6. Debido a eso, la fuerza resultante de cualquiera de ellas está dada por un principio de superposición y es igual a la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por las otras cargas individuales. Por ejemplo, si están presentes cuatro cargas, la fuerza resultante ejercida por las partículas 2, 3 y 4 sobre la partícula 1 es de

$$\sum \vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41}$$

- EJAMEN RÁPIDO 22.3** El objeto A tiene una carga igual a  $+2 \mu\text{C}$  y el objeto B una carga de  $+16 \mu\text{C}$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto a las fuerzas eléctricas ejercidas sobre los objetos?
- (a)  $\vec{F}_{AB} = -3\vec{F}_{BA}$  (b)  $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$  (c)  $3\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$  (d)  $\vec{F}_{AB} = 3\vec{F}_{BA}$
  - (e)  $\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{BA}$  (f)  $3\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{BA}$

**Ejemplo 22.2 Encuentre la fuerza resultante**

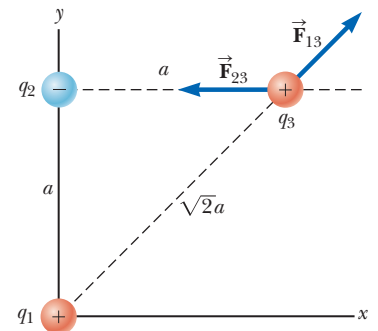
Considere tres cargas puntuales ubicadas en las esquinas de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 22.8, donde  $q_1 = q_3 = 5.0 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = -2.0 \mu\text{C}$  y  $a = 0.100 \text{ m}$ . Encuentre la fuerza resultante que se ejerce sobre  $q_3$ .

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Piense en la fuerza neta sobre  $q_3$ . Ya que la carga  $q_3$  está cerca de otras dos cargas, experimentará dos fuerzas eléctricas. Estas fuerzas se ejercen en diferentes direcciones como se ve en la figura 22.8. Basado en las fuerzas mostradas en la figura, estime la dirección del vector fuerza neta.

**Categorizar** Ya que sobre la carga  $q_3$  se ejercen dos fuerzas, este ejemplo se clasifica como un problema de suma vectorial.

**Analizar** Las direcciones de las fuerzas individuales ejercidas por  $q_1$  y  $q_2$  sobre  $q_3$  se muestran en la figura 22.8. La fuerza  $\vec{F}_{23}$  que  $q_2$  ejerce sobre  $q_3$  es de atracción porque  $q_2$  y  $q_3$  tienen signos opuestos. En el sistema coordenado que se muestra en la figura 22.8, la fuerza de atracción  $\vec{F}_{23}$  es hacia la izquierda (en la dirección  $x$  negativa).



**Figura 22.8** (Ejemplo 22.2) La fuerza que ejerce  $q_1$  sobre  $q_3$  es  $\vec{F}_{13}$ . La fuerza que ejerce  $q_2$  sobre  $q_3$  es  $\vec{F}_{23}$ . La fuerza resultante  $\vec{F}_3$  que se ejerce sobre  $q_3$  es la suma vectorial  $\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$ .

continúa



22.2 continuación

La fuerza  $\vec{F}_{13}$  que  $q_1$  ejerce sobre  $q_3$  es de repulsión porque ambas cargas son positivas. La fuerza de repulsión  $\vec{F}_{13}$  forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$ . Las magnitudes de las fuerzas  $\vec{F}_{13}$  y  $\vec{F}_{23}$  se determinan usando las magnitudes absolutas de las cargas en la Ecuación 22.1.

Use la ecuación 22.1 para encontrar la magnitud de  $\vec{F}_{23}$ :

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{a^2} = (8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(2.00 \times 10^{-6} \text{ C})(5.00 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.100 \text{ m})^2} = 8.99 \text{ N}$$

Encuentre la magnitud de la fuerza  $\vec{F}_{13}$ :

$$F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(\sqrt{2} a)^2} = (8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(5.00 \times 10^{-6} \text{ C})(5.00 \times 10^{-6} \text{ C})}{2(0.100 \text{ m})^2} = 11.2 \text{ N}$$

Encuentre las componentes  $x$  y  $y$  de la fuerza  $\vec{F}_{13}$ .

$$F_{13x} = (11.2 \text{ N}) \cos 45.0^\circ = 7.94 \text{ N}$$

$$F_{13y} = (11.2 \text{ N}) \sin 45.0^\circ = 7.94 \text{ N}$$

Halle las componentes de la fuerza resultante que actúa sobre  $q_3$ :

$$F_{3x} = F_{13x} + F_{23x} = 7.94 \text{ N} + (-8.99 \text{ N}) = -1.04 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_{13y} + F_{23y} = 7.94 \text{ N} + 0 = 7.94 \text{ N}$$

Expresar la fuerza resultante que actúa sobre  $q_3$  en forma de vectores unitarios:

$$\vec{F}_3 = (-1.04\hat{i} + 7.94\hat{j}) \text{ N}$$

**Finalizar** La fuerza neta sobre  $q_3$  es hacia arriba y a la izquierda en la figura 22.8. Si  $q_3$  se mueve en respuesta a la fuerza neta, cambian las distancias entre  $q_3$  y las otras cargas, de modo que la fuerza neta cambia. En consecuencia, si  $q_3$  se mueve libremente se puede modelar como una partícula bajo una fuerza neta en tanto se reconozca que la fuerza que se ejerce sobre  $q_3$  no es constante. Como un refuerzo a la memoria, si aumentamos los valores numéricos a tres cifras significativas, nos conducirá a operaciones como  $7.94 \text{ N} + (-8.99 \text{ N}) = -1.04 \text{ N}$  por arriba. Si usted lleva todos los resultados intermedios a más cifras significativas verá que esta operación es correcta.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si los signos de las tres cargas cambiaran a los signos opuestos? ¿Cómo afectaría al resultado para  $\vec{F}_3$ ?

**Respuesta** La carga  $q_3$  todavía sería atraída hacia  $q_2$  y repelida de  $q_1$ , con fuerzas de la misma magnitud. En consecuencia, el resultado final para  $\vec{F}_3$  sería el mismo.

**Ejemplo 22.3 ¿Dónde es cero la fuerza neta?**

Tres cargas puntuales se encuentran a lo largo del eje  $x$ , como se muestra en la figura 22.9. La carga positiva  $q_1 = 15.0 \mu\text{C}$  está en  $x = 2.00 \text{ m}$ , la carga positiva  $q_2 = 6.00 \mu\text{C}$  está en el origen y la fuerza neta que actúa sobre  $q_3$  es cero. ¿Cuál es la coordenada  $x$  de  $q_3$ ?

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Ya que  $q_3$  está cerca de otras dos cargas, experimenta dos fuerzas eléctricas. Sin embargo, a diferencia del ejemplo anterior, en este problema las fuerzas se encuentran a lo largo de la misma recta, como se indica en la figura 22.9. Como  $q_3$  es negativa, mientras que  $q_1$  y  $q_2$  son positivas, las fuerzas  $\vec{F}_{13}$  y  $\vec{F}_{23}$  son de atracción. Debido a que  $q_2$  es la carga más pequeña, la posición de  $q_3$  en la que la fuerza es cero debería estar más cerca de  $q_2$  que de  $q_1$ .

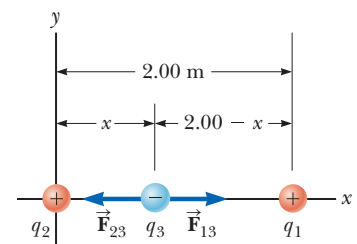
**Categorizar** Ya que la fuerza neta sobre  $q_3$  es cero, la carga puntual se modela como una partícula en equilibrio.

**Analizar** Escriba una expresión para la fuerza neta sobre la carga  $q_3$  cuando está en equilibrio:

$$\sum \vec{F}_3 = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = -k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} \hat{i} + k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00 - x)^2} \hat{i} = 0$$

Mueva el segundo término a la derecha de la ecuación e iguale los coeficientes del vector unitario  $\hat{i}$ :

$$k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00 - x)^2}$$



**Figura 22.9** (Ejemplo 22.3) Tres cargas puntuales se colocan a lo largo del eje  $x$ . Si la fuerza resultante que actúa sobre  $q_3$  es cero, la fuerza  $\vec{F}_{13}$  que ejerce  $q_1$  sobre  $q_3$  debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza  $\vec{F}_{23}$  que  $q_2$  ejerce sobre  $q_3$ .



22.3 continuación

Elimine  $k_e$  y  $|q_3|$  y reordene la ecuación:

$$(2.00 - x)^2 |q_2| = x^2 |q_1|$$

Tome la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación:

$$(2.00 - x) \sqrt{|q_2|} = \pm x \sqrt{|q_1|}$$

Resuelva la ecuación para  $x$ :

$$(1) \quad x = \frac{2.00 \sqrt{|q_2|}}{\sqrt{|q_2|} \pm \sqrt{|q_1|}}$$

Sustituya valores numéricos, eligiendo el signo positivo:

$$x = \frac{2.00 \sqrt{6.00 \times 10^{-6} \text{ C}}}{\sqrt{6.00 \times 10^{-6} \text{ C}} + \sqrt{15.0 \times 10^{-6} \text{ C}}} = 0.775 \text{ m}$$

**Finalizar** Tenga en cuenta que la carga móvil de hecho está más cerca de  $q_2$  como predijimos en el paso de conceptualizar. Observe que el resultado en la ecuación (1) es independiente tanto de la magnitud como del signo de carga  $q_3$ . Si  $q_3$  aumenta, ambas fuerzas en la figura 22.9 aumentan en magnitud pero aún se cancelan. Si  $q_3$  cambia de signo, ambas fuerzas cambian de dirección pero aún se cancelan. La segunda raíz de la ecuación es (si elegimos el signo negativo)  $x = -3.44 \text{ m}$ . Esta es otra posición donde las magnitudes de las fuerzas sobre  $q_3$  son iguales, aunque dichas fuerzas están en la misma dirección, por lo que no se anulan.

¿QUÉ PASARÍA SI?

Suponga que  $q_3$  se restringe a moverse sólo a lo largo del eje  $x$ . Desde su posición inicial en  $x = 0.775 \text{ m}$ , se jala una pequeña distancia a lo largo del eje  $x$ . Cuando se libera, ¿regresa al equilibrio o se jala aún más desde el equilibrio? Es decir, ¿el equilibrio es estable o inestable?

**Respuesta** Si  $q_3$  se mueve hacia la derecha,  $\vec{F}_{13}$  se vuelve mayor y  $\vec{F}_{23}$  menor. El resultado es una fuerza neta hacia la derecha, en la misma dirección que el desplazamiento. Por tanto, la carga  $q_3$  continuaría moviéndose hacia la derecha y el equilibrio es inestable. (Véase la sección 7.9 para un repaso de los equilibrios estable e inestable.)

Si  $q_3$  se restringe a permanecer en una coordenada  $x$  fija pero se le permite moverse arriba y abajo en la figura 22.9, el equilibrio es estable. En este caso, si la carga se jala hacia arriba (o hacia abajo) y se libera, se mueve de regreso hacia la posición de equilibrio y oscila en torno a este punto. ¿La oscilación es armónica simple?

Ejemplo 22.4 Encuentre la carga sobre las esferas

Dos pequeñas esferas idénticas cargadas, cada una con una masa de  $3.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$ , cuelgan en equilibrio como se muestra en la figura 22.10a. La longitud de cada cuerda es  $0.150 \text{ m}$  y el ángulo  $\theta$  es  $5.0^\circ$ . Encuentre la magnitud de la carga sobre cada esfera.

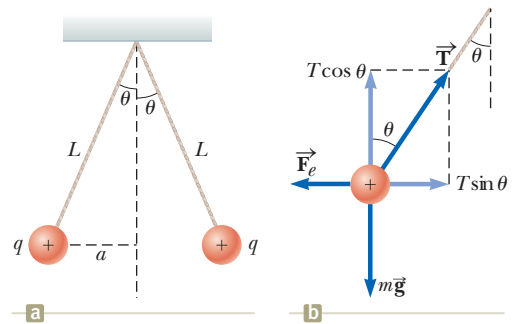
SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 22.10a ayuda a formar ideas de este ejemplo. Las dos esferas ejercen fuerzas de repulsión una sobre la otra. Si se mantienen cerca y se liberan, se mueven hacia afuera desde el centro y se establecen en la configuración de la figura 22.10a después de que las oscilaciones desaparecen debido a la resistencia del aire.

**Categorizar** La frase clave “en equilibrio” ayuda a modelar cada esfera como una *partícula en equilibrio*. Este ejemplo es similar a los problemas de partícula en equilibrio del capítulo 5, con la característica agregada de que una de las fuerzas sobre una esfera es una fuerza eléctrica.

**Analizar** En la figura 22.10b se muestra el diagrama de cuerpo libre para la esfera de la izquierda. La esfera está en equilibrio bajo la aplicación de las fuerza  $\vec{T}$  de la cuerda, la fuerza eléctrica  $\vec{F}_e$  de la otra esfera y la fuerza gravitacional  $m\vec{g}$ .

A partir del modelo de la partícula en equilibrio, iguale a cero la fuerza neta en la esfera de la izquierda para cada componente:



**Figura 22.10** (Ejemplo 22.4) a) Dos esferas idénticas, cada una con la misma carga  $q$ , suspendidas en equilibrio. b) Diagrama de cuerpo libre para la esfera a la izquierda del inciso a).

$$(1) \quad \sum F_x = T \sin \theta - F_e = 0 \rightarrow T \sin \theta = F_e$$

$$(2) \quad \sum F_y = T \cos \theta - mg = 0 \rightarrow T \cos \theta = mg$$

$$(3) \quad \tan \theta = \frac{F_e}{mg} \rightarrow F_e = mg \tan \theta$$

Divida la ecuación 1) entre la ecuación 2) para encontrar  $F_e$ :  
 Evalúe numéricamente la fuerza eléctrica:

continúa

## 22.4 continuación

Use la geometría del triángulo rectángulo en la figura 22.10a para encontrar la correspondencia entre  $a$ ,  $L$  y  $\theta$ :

$$(4) \quad \sin \theta = \frac{a}{L} \rightarrow a = L \sin \theta$$

Resuelva la ley de Coulomb (ecuación 22.1) para la carga  $|q|$  en cada esfera y sustituya de las ecuaciones 3 y 4:

$$|q| = \sqrt{\frac{F_e r^2}{k_e}} = \sqrt{\frac{F_e (2a)^2}{k_e}} = \sqrt{\frac{mg \tan \theta (2L \sin \theta)^2}{k_e}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$|q| = \sqrt{\frac{(3.00 \times 10^{-2} \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) \tan(5.00^\circ) [2(0.150 \text{ m}) \sin(5.00^\circ)]^2}{8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}} \\ = 4.42 \times 10^{-8} \text{ C}$$

**Finalizar** Si el signo de las cargas no se proporciona en la figura 22.10 no es posible determinarlo. De hecho, el signo de la carga no es importante. La situación es la misma ya sea que ambas esferas tengan carga positiva o carga negativa.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que su compañera de cuarto le propone resolver este problema sin la suposición de que las cargas son de igual magnitud. Ella afirma que la simetría del problema se destruye si las cargas no son iguales, de modo que las cuerdas formarían dos ángulos diferentes con la vertical y el problema sería mucho más complicado. ¿Cómo respondería?

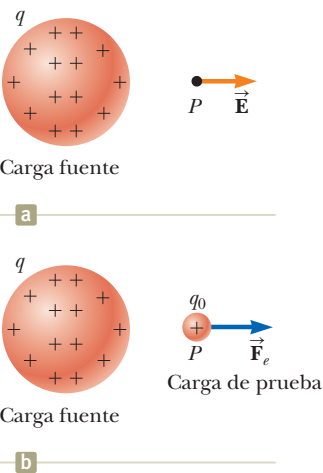
**Respuesta** La simetría no se destruye y los ángulos no son diferentes. La tercera ley de Newton requiere que las magnitudes de las fuerzas eléctricas sobre las dos cargas sean iguales, sin importar la igualdad o desigualdad de las cargas. La solución al ejemplo aún es la misma: el valor de  $|q|$  en la solución se sustituye por  $\sqrt{|q_1 q_2|}$  en la nueva situación, donde  $q_1$  y  $q_2$  son los valores de las cargas en las dos esferas. La simetría del problema se destruiría si las *masas* de las esferas no fueran iguales. En este caso, las cuerdas formarían diferentes ángulos con la vertical y el problema sería más complicado.

## 22.4 Modelo de análisis: Partícula en un campo (eléctrico)

En la sección 5.1, analizamos las diferencias entre fuerzas de contacto y fuerzas de campo. Hasta ahora se ha hablado de dos fuerzas de campo: la fuerza gravitacional en el capítulo 13 y la fuerza eléctrica en el presente capítulo. Como se dijo antes, las fuerzas de campo actúan a través del espacio y producen algún efecto, aun cuando no exista contacto físico entre los objetos que interactúan. Tal interacción puede ser modelada como un proceso de dos pasos: una partícula fuente establece un campo y luego una partícula cargada interactúa con el campo y experimenta una fuerza. El campo gravitacional  $\vec{g}$  en un punto en el espacio debido a una fuente particular fue definido en la sección 13.3, como igual a la fuerza gravitacional  $\vec{F}_g$  que actúa sobre una partícula de prueba de masa  $m$  dividida entre esa masa:  $\vec{g} \equiv \vec{F}_g/m_0$ . Entonces, la fuerza ejercida por el campo es  $\vec{F} = m\vec{g}$  (Ecuación 5.5)

El concepto de campo fue desarrollado por Michael Faraday (1791-1867) en el contexto de las fuerzas eléctricas y es de un valor tan práctico que en los siguientes capítulos se le da mucha atención. En este enfoque, se dice que existe un **campo eléctrico** en la región del espacio que rodea al objeto cargado: la **carga fuente**. La figura 22.11a muestra la carga fuente y el campo eléctrico resultante en un punto  $P$  en el espacio externo a la carga fuente. La presencia del campo eléctrico se puede detectar colocando una **carga de prueba** en el campo y anotando la fuerza eléctrica sobre ella, como se muestra en la figura 22.11b. Definimos el campo eléctrico debido a la carga fuente en la ubicación de la carga de prueba la fuerza eléctrica sobre la carga de prueba *por unidad de carga*, o, para mayor claridad, **el vector del campo eléctrico  $\vec{E}$**  en un punto en el espacio se define como la fuerza eléctrica  $\vec{F}_e$ , que actúa sobre una carga de prueba positiva  $q_0$  colocada en ese punto, dividida entre la carga de prueba:<sup>3</sup>

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_e}{q_0} \quad (22.7)$$



**Figura 22.11** Una fuerza eléctrica entre dos partículas es un proceso de dos pasos: (a) Una carga fuente  $q$  crea un campo eléctrico en un punto  $P$  en el espacio. (b) Cuando se coloca otra carga  $q_0$  en  $P$ , se siente el efecto de ese campo eléctrico como una fuerza eléctrica.

Definición de campo eléctrico ►

<sup>3</sup> Cuando use la ecuación 22.7, debe suponer que la carga de prueba  $q_0$  es lo suficientemente pequeña como para no perturbar la distribución de cargas responsable por el campo eléctrico. Si la carga de prueba es suficientemente grande, la carga sobre la esfera metálica se redistribuye y el campo eléctrico que establece es diferente del campo que se establece en ausencia de la carga de prueba mucho menor.

El vector  $\vec{E}$  está en unidades del SI, newtons por coulomb (N/C). La dirección de  $\vec{E}$  como se ve en la figura 22.11a está en la dirección de la fuerza que experimenta una carga positiva de prueba cuando es colocada en el campo como se muestra en la figura 22.11b. Observe que  $\vec{E}$  es el campo producido por una carga o distribución de carga separada de la carga de prueba; no es el campo producido por la propia carga de prueba, además observe que la existencia de un campo eléctrico es una propiedad de su fuente; la presencia de una carga de prueba no es necesaria para que el campo exista. La carga de prueba sirve como *detector* del campo eléctrico: existe un campo eléctrico en un punto si una carga de prueba en dicho punto experimenta una fuerza eléctrica.

Ahora, imagine que hemos establecido un campo eléctrico con una carga fuente y han revisado su valor en cada punto del espacio usando la ecuación 22.7.

Si se coloca una carga arbitraria  $q$  en un campo eléctrico  $\vec{E}$ , éste experimenta una fuerza eléctrica dada por

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad (22.8)$$

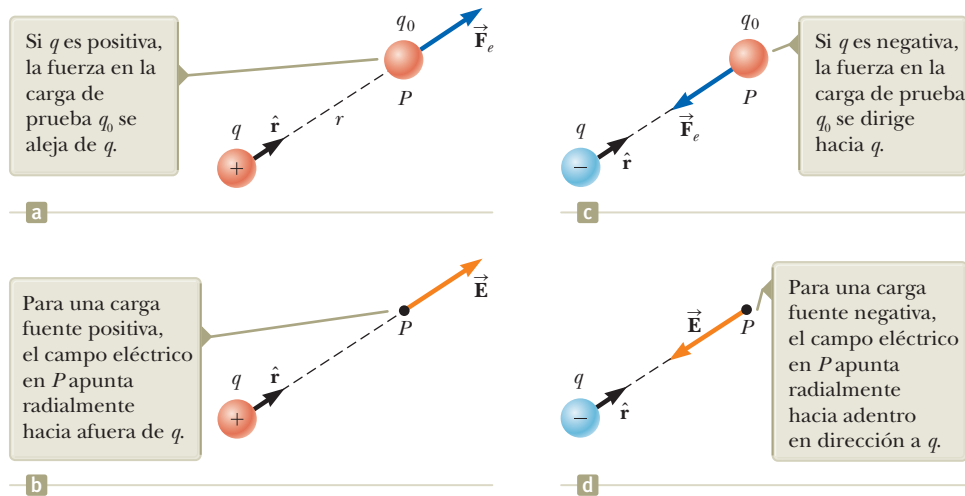
Esta ecuación es la representación matemática de la versión eléctrica del análisis del modelo de **partícula en un campo**. Si  $q$  es positiva, la fuerza tiene la misma dirección que el campo. Si  $q$  es negativa, la fuerza y el campo tienen direcciones opuestas. Observe la similitud entre la ecuación 22.8 y la ecuación correspondiente a la versión gravitacional de la partícula en un modelo de campo,  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  (sección 5.5). Una vez que conoce la magnitud y la dirección del campo eléctrico en un punto determinado, puede calcular la fuerza eléctrica ejercida sobre *cualquier* partícula cargada ubicada en ese punto mediante la ecuación 22.8.

Para determinar la forma del vector de un campo eléctrico, se coloca una carga de prueba  $q_0$  en el punto  $P$ , a una distancia  $r$  de la carga fuente  $q$ , como se observa en la figura 22.12a. Imagine el uso de la carga de prueba para determinar la dirección de la fuerza eléctrica y, por tanto, la dirección del campo eléctrico. De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza ejercida por  $q$  sobre la carga de prueba es

$$\vec{F}_e = k_e \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario con dirección de  $q$  hacia  $q_0$ . En la figura 22.12a esta fuerza se aleja de la carga fuente  $q$ . Ya que el campo eléctrico en  $P$ , que es la posición de la carga de prueba, queda definido por la ecuación 22.7  $\vec{E} = \vec{F}_e/q_0$ , el campo eléctrico en  $P$  establecido por  $q$  es

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (22.9)$$



► Fuerza eléctrica sobre una carga en un campo eléctrico

**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 22.1**

**Sólo partículas** La ecuación 22.8 sólo es válida para una *partícula* de carga  $q$ , es decir para un objeto de tamaño cero. Para un *objeto cargado* de tamaño finito en un campo eléctrico, el campo puede variar en magnitud y dirección de acuerdo con el tamaño del objeto, por lo que la ecuación de fuerza correspondiente puede ser más complicada.

**Figura 22.12** (a), (c) Cuando una carga de prueba  $q_0$  se coloca cerca de una fuente de carga  $q$ , la carga de prueba experimenta una fuerza. (b), (d) en un punto  $P$  cerca de una fuente de carga  $q$ , existe un campo eléctrico.

En esta sección, hemos discutido las similitudes entre el campo eléctrico y el campo gravitacional introducido en la sección 13.3. Es importante observar una diferencia sutil entre las notaciones usadas para estos dos campos. El campo gravitacional, expresado en la ecuación 13.7 en términos de una masa fuente, generalmente se configura por un objeto cuya masa es enorme en comparación con la de un objeto colocado en el campo. Por tanto, en la ecuación 13.8, usamos el símbolo  $M_e$  para la fuente, mientras que en la ecuación 5.5, usamos un símbolo separado  $m$  para la masa del objeto colocado en el campo. Sin embargo, en un campo eléctrico, la carga de la fuente del campo es a menudo similar en magnitud a la carga colocada en el campo. Por tanto, tendemos a usar el mismo símbolo  $q$  para ambos. En la figura 22.11 y la ecuación 22.9,  $q$  representa la carga fuente que configura el campo eléctrico. Sin embargo, en la ecuación 22.8,  $q$  representa la carga colocada en el campo eléctrico. Siempre que haya una posibilidad de confusión, usamos subíndices para diferenciar las cargas, como  $q_1$  y  $q_2$ . Si la carga fuente  $q$  es positiva, la figura 22.12b muestra la situación al eliminar la carga de prueba: la carga fuente establece un campo eléctrico en el punto  $P$ , alejándose de  $q$ . Si  $q$  es negativa, como en el caso de la figura 22.12c, la fuerza sobre la carga de prueba está dirigida hacia la carga fuente, por lo que el campo eléctrico en  $P$  está dirigido hacia la carga fuente, como en la figura 22.12d.

Para calcular el campo eléctrico en un punto  $P$  debido a un pequeño número de cargas puntuales, primero determine los vectores del campo eléctrico en  $P$ , uno por uno usando la ecuación 22.9 y en seguida súmelos en forma vectorial. En otras palabras, en cualquier punto  $P$ , el campo eléctrico total debido a un grupo de cargas fuente es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos de todas las cargas. Este principio de superposición aplicado a los campos se deduce de la suma vectorial de las fuerzas eléctricas. Por tanto, el campo eléctrico en el punto  $P$  debido a un grupo de cargas fuente se expresa como la suma vectorial

Campo eléctrico debido a un número finito de cargas puntuales ▶

$$\vec{\mathbf{E}} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (22.10)$$

donde  $r_i$  es la distancia desde la  $i$ -ésima carga fuente  $q_i$  hasta el punto  $P$  y  $\hat{\mathbf{r}}_i$  es un vector unitario dirigido de  $q_i$  hacia  $P$ .

En el ejemplo 22.6 se explora el campo eléctrico debido a dos cargas a partir del principio de superposición. El inciso (B) del ejemplo se concentra en un **dipolo eléctrico**, que se define como una carga positiva  $q$  y una carga negativa  $-q$  separadas por una distancia  $2a$ . El dipolo eléctrico es un buen modelo de muchas moléculas, como el ácido clorhídrico (HCl). Los átomos y moléculas neutros se comportan como dipolos cuando se colocan en un campo eléctrico externo. Además, muchas moléculas, como HCl, son dipolos permanentes. En el capítulo 25 se explica el efecto de tales dipolos sobre el comportamiento de los materiales sujetos a campos eléctricos.

La fuerza eléctrica es la responsable de los tres fenómenos mencionados en la semblanza introductoria. A medida que los elementos de su ropa se frotan en la secadora giratoria, la carga eléctrica se transfiere de un elemento a otro y los elementos se unen cuando los saca de la secadora. Cuando se peina, el roce del peine contra el cabello hace que el peine se cargue. Cuando el peine cargado se coloca cerca de una corriente de agua, hay una fuerza atractiva entre el peine y los iones en el agua. En la impresión de inyección de tinta, ya sea en un centro industrial o en su impresora doméstica, las gotas de tinta reciben una carga y luego se proyectan hacia abajo, hacia la superficie que se va a imprimir. Cuando las gotas de tinta se mueven hacia un sitio que se va a imprimir, pasan libremente a través de una región libre de campos. Cuando las gotas de tinta se mueven hacia un sitio que no se va a imprimir, se enciende un campo eléctrico y la fuerza eléctrica sobre las gotas de tinta las desvía a un canal donde no contribuyen a la imagen impresa.

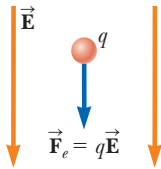


- E XAMEN RÁPIDO 22.4** Una carga de prueba de valor  $+3 \mu\text{C}$  está en un punto  $P$  donde un campo eléctrico externo es dirigido hacia la derecha con una magnitud de  $4 \times 10^6 \text{ N/C}$ . Si la carga de prueba se reemplaza con otra de magnitud  $-3 \mu\text{C}$ , ¿qué le sucede al campo eléctrico externo en  $P$ ? (a) no se ve afectado, (b) invierte su dirección, (c) cambia de un modo que no puede ser determinado.

## MODELO DE ANÁLISIS de partícula en un campo (eléctrico)

Imagine un objeto cargado que llamamos *carga fuente*. La fuente de carga establece un **campo eléctrico**  $\vec{E}$  a través del espacio. Ahora imaginemos que una partícula con carga  $q$  se coloca en ese campo. La partícula interactúa con el campo eléctrico de manera que la partícula experimenta una fuerza eléctrica dada por

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad (22.8)$$



### Ejemplos:

- un electrón se mueve entre las placas de deflexión de un osciloscopio de rayos catódicos y se desvía de su ruta original
- iones cargados experimentan una fuerza eléctrica desde el campo eléctrico en un selector de velocidad antes de entrar en un espectrómetro de masas (Capítulo 28)
- un electrón se mueve alrededor del núcleo en el campo eléctrico establecido por el protón de un átomo de hidrógeno como el modelado por la teoría de Bohr (Capítulo 41)
- un agujero en un material semiconductor se mueve en respuesta al campo eléctrico establecido mediante la aplicación de un voltaje al material (Capítulo 42)

### Ejemplo 22.5 Una gota de agua suspendida

Una gota de agua de masa de  $3.00 \times 10^{-12} \text{ kg}$  se encuentra en el aire cerca del suelo durante un día de tormenta. Un campo eléctrico atmosférico de magnitud  $6.00 \times 10^3 \text{ N/C}$  apunta verticalmente hacia abajo en la proximidad de la gota de agua. La gota permanece suspendida en reposo en el aire. ¿Cuál es la carga eléctrica de la gota?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagínese la gota de agua flotando en reposo en el aire. Esta situación no es lo que se observa normalmente, así que algo debe mantener a la gota de agua suspendida.

**Categorizar** La gota puede ser modelada como una partícula y se describe por dos análisis de modelos asociados a los campos: *la partícula en un campo (gravitacional)* y *la partícula en un campo (eléctrico)*. Además, debido a que la gota está sujeta a las fuerzas, pero permanece en reposo, se describe también por el modelo de *partícula en equilibrio*.

**Analizar** Escriba la segunda ley de Newton de la partícula en el modelo de equilibrio en la dirección vertical:

$$(1) \sum F_y = 0 \rightarrow F_e - F_g = 0$$

Usando las dos partículas en los modelos de campo mencionados en el paso Categorizar, sustituya para las fuerzas en la ecuación (1), reconociendo que la componente vertical del campo eléctrico es negativa:

$$q(-E) - mg = 0$$

Resuelva para la carga de la gota de agua:

$$q = -\frac{mg}{E}$$

Sustituya los valores numéricos:

$$q = -\frac{(3.00 \times 10^{-12} \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{6.00 \times 10^3 \text{ N/C}} = -4.90 \times 10^{-15} \text{ C}$$

**Finalizar** Tomando nota de la unidad más pequeña de la carga libre en la ecuación 22.5, la carga de la gota de agua es un gran número de estas unidades. Observe que la *fuerza* eléctrica es hacia arriba para equilibrar la fuerza gravitacional hacia abajo. El planteamiento del problema afirma que el campo eléctrico es en dirección hacia abajo. Por tanto, la carga que se encuentra por encima es negativa de modo que la fuerza eléctrica es opuesta a la dirección del campo eléctrico.



## Ejemplo 22.6 Campo eléctrico debido a dos cargas

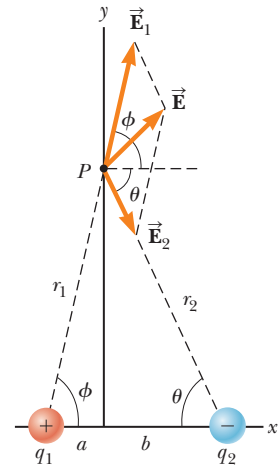
Las cargas  $q_1$  y  $q_2$  se ubican en el eje  $x$ , a distancias  $a$  y  $b$ , respectivamente, del origen, como se muestra en la figura 22.13.

(A) Encuentre las componentes del campo eléctrico neto en el punto  $P$ , que está en la posición  $(0, y)$ .

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Compare este ejemplo con el ejemplo 22.2. Ahí, sumó los vectores fuerza para encontrar la fuerza neta sobre una partícula cargada. En este caso, sume los vectores de campo eléctrico para encontrar el campo eléctrico neto en un punto en el espacio. Si una partícula cargada se coloca en  $P$ , podría usar la partícula en un modelo de campo para encontrar la fuerza eléctrica sobre la partícula.

**Figura 22.13** (Ejemplo 22.6) El campo eléctrico total en  $P$  es igual a la suma vectorial  $\vec{E}$ , donde  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$  donde  $\vec{E}_1$  es el campo debido a la carga positiva  $q_1$  y  $\vec{E}_2$  es el campo debido a la carga negativa  $q_2$ .



**Categorizar** Tenemos dos cargas fuente y deseamos encontrar el campo eléctrico resultante, de modo que se puede clasificar este ejemplo como uno en el que se puede usar el principio de superposición representado por la ecuación 22.10.

**Analizar** Encuentre la magnitud del campo eléctrico en  $P$  debido a la carga  $q_1$ :

$$E_1 = k_e \frac{|q_1|}{r_1^2} = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2}$$

Encuentre la magnitud del campo eléctrico en  $P$  debido a la carga  $q_2$ :

$$E_2 = k_e \frac{|q_2|}{r_2^2} = k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2}$$

Escriba los vectores de campo eléctrico para cada carga en forma de vector unitario:

$$\vec{E}_1 = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos \phi \hat{i} + k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin \phi \hat{j}$$

$$\vec{E}_2 = k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \cos \theta \hat{i} - k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \sin \theta \hat{j}$$

Escriba las componentes del vector de campo eléctrico neto:

$$(1) E_x = E_{1x} + E_{2x} = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos \phi + k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \cos \theta$$

$$(2) E_y = E_{1y} + E_{2y} = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin \phi - k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \sin \theta$$

(B) Evalúe el campo eléctrico en el punto  $P$  en el caso especial de que  $|q_1| = |q_2|$  y  $a = b$ .

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 22.14 muestra la situación en este caso especial. Observe la simetría en la situación y que la distribución de carga ahora es un dipolo eléctrico.

**Categorizar** Ya que la figura 22.14 es un caso especial del caso general que se muestra en la figura 22.13, este ejemplo se clasifica como uno en el que se puede tomar el resultado de la parte (A) y sustituir los valores apropiados de las variables.

**Analizar** En función de la simetría de la figura 22.14, evalúe las ecuaciones (1) y (2) de la parte (A) con  $a = b$ ,  $|q_1| = |q_2| = q$ , y  $\phi = \theta$ :

$$(3) E_x = k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos \theta + k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos \theta = 2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos \theta$$

$$E_y = k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \sin \theta - k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \sin \theta = 0$$

De la geometría en la figura 22.14, evalúe  $\cos \theta$ :

$$(4) \cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{(a^2 + y^2)^{1/2}}$$

Sustituya la ecuación (4) en la ecuación (3):

$$E_x = 2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \left[ \frac{a}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \right] = k_e \frac{2aq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$



22.4 continuación

(C) Encuentre el campo eléctrico debido al dipolo eléctrico cuando el punto  $P$  está a una distancia  $y \gg a$  desde el origen.

SOLUCIÓN

En la solución a la parte (B), ya que  $y \gg a$ , ignore  $a^2$  en comparación con  $y^2$  y escriba la expresión para  $E$  en este caso:

$$(5) \quad E \approx k_e \frac{2aq}{y^3}$$

**Finalizar** De la ecuación (5) se ve que, en los puntos alejados de un dipolo, pero a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que une las dos cargas, la magnitud del campo eléctrico producido por el dipolo varía como  $1/r^3$ , mientras que el campo que varía más lentamente de una carga puntual lo hace como  $1/r^2$  (vea la ecuación 22.9). Esto es porque en puntos distantes los campos de las dos cargas de igual magnitud y signo opuesto casi se cancelan mutuamente. La variación  $1/r^3$  en  $E$  para el dipolo también se obtiene para un punto distante a lo largo del eje  $x$  y para cualquier punto distante en general. En ambas partes (A) y (B), si se coloca una nueva carga  $q_1$  en el punto  $P$ , la ecuación 22.8 puede usarse para encontrar la fuerza eléctrica sobre la carga:  $\vec{F} = q_1 \vec{E} = q_1 E_x \hat{i} + q_1 E_y \hat{j}$

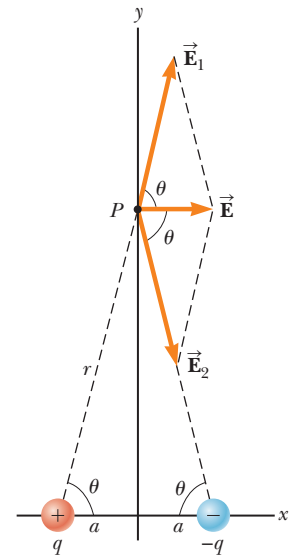


Figura 22.14 (Ejemplo 22.6) Cuando las cargas en la figura 22.13 son de igual magnitud y equidistantes del origen, la situación se vuelve simétrica, como se muestra en este caso.

## 22.5 Líneas de campo eléctrico

Con aplicación de la ecuación 22.7 se ha definido matemáticamente el campo eléctrico. Ahora debe explorar un medio para darle una representación gráfica. Una forma conveniente de visualizar los patrones de los campos eléctricos es el trazo de líneas conocidas como **líneas de campo eléctrico**, establecidas por primera vez por Faraday, las cuales relacionan el campo eléctrico con una región del espacio de la manera siguiente:

- El vector  $\vec{E}$  del campo eléctrico es tangente a la línea del campo eléctrico en cada punto. La dirección de la línea, indicada por una punta de flecha, es igual al vector del campo eléctrico. La dirección de la línea es la de la fuerza sobre una carga de prueba positiva colocada en el campo de acuerdo a la partícula en un modelo de campo.
- El número de líneas por unidad de área que pasan a través de una superficie perpendicular a dichas líneas es proporcional a la magnitud del campo eléctrico en dicha región. En consecuencia, las líneas de campo estarán cercanas donde el campo eléctrico sea intenso y separadas donde el campo sea débil.

Estas propiedades se ilustran en la figura 22.15. La densidad de las líneas de campo a través de la superficie A es mayor que la densidad de las líneas a través de la superficie B. Debido a eso, la magnitud del campo eléctrico es más grande en la superficie A que en la superficie B. Además, si las líneas en diferentes ubicaciones apuntan en distintas direcciones el campo no es uniforme.

¿La correspondencia entre la intensidad del campo eléctrico y la densidad de las líneas de campo es consistente con la ecuación 22.9, la expresión que obtuvo para el valor  $E$  mediante la ley de Coulomb? Para responder esta pregunta, piense en una superficie esférica imaginaria de radio  $r$  concéntrica con una carga puntual. Por simetría, la magnitud del campo eléctrico será la misma en cualquier parte de la superficie de la esfera. El número de líneas  $N$  que emergen de la carga es igual al número que penetra en la superficie esférica. Por tanto, el número de líneas por cada unidad de área sobre la esfera es  $N/4\pi r^2$  (donde el área de la superficie de la esfera es  $4\pi r^2$ ). Ya que  $E$  es proporcional al número de líneas por unidad de área,  $E$  varía de la forma  $1/r^2$ ; este resultado es consistente con la ecuación 22.9.

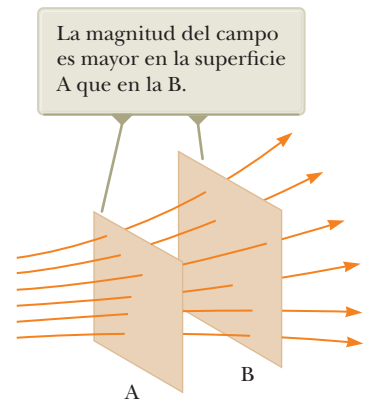


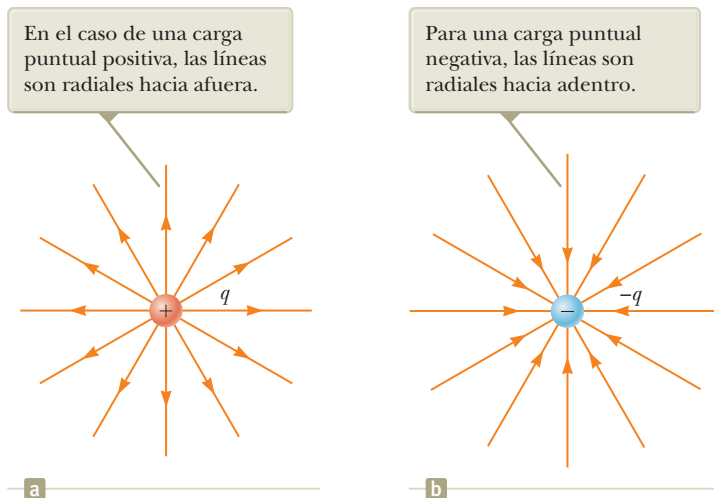
Figura 22.15 Líneas de campo eléctrico que atraviesan dos superficies.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 22.2

**¡Las líneas de campo eléctrico no representan las trayectorias de las partículas!** Las líneas de campo eléctrico representan el campo en diferentes ubicaciones. Con excepción de casos muy especiales, *no* representan la trayectoria de una partícula con carga que se mueve en un campo eléctrico.



**Figura 22.16** Líneas de campo eléctrico para una carga puntual. Observe que las figuras sólo muestran aquellas líneas que están en el plano de la página.



### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 22.3

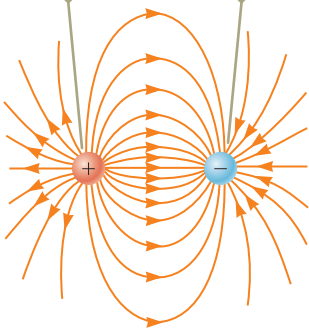
**Las líneas de campo eléctrico no son reales** Las líneas de campo eléctrico no son objetos materiales. Son una representación gráfica para tener una descripción cualitativa del campo eléctrico. Puesto que sólo se puede dibujar un número finito de líneas que parten de cada carga, parecería que el campo fuera cuantizado y que sólo existe en ciertas partes del espacio. De hecho el campo es continuo existiendo en todos los puntos. Debe evitar obtener una impresión equivocada de líneas de campo que parten de un dibujo bidimensional cuya finalidad sólo es describir una situación tridimensional.

En la figura 22.16a se muestran las líneas de campo eléctrico causadas por el campo creado por una sola carga puntual positiva. Este dibujo en dos dimensiones sólo muestra las líneas de campo que están en el plano que contiene a la carga puntual. De hecho, las líneas están dirigidas radialmente alejándose de la carga en todas las direcciones; por tanto, en lugar de una “rueda” plana de líneas, como la que se muestra, es necesario imaginar toda una distribución esférica de líneas. Si se colocara una carga de prueba positiva en este campo sería repelida por la carga fuente positiva, las líneas se alejarían radialmente de la carga fuente. Las líneas de campo eléctrico que representan al campo generado por una sola carga puntual negativa están dirigidas hacia la carga (figura 22.16b). En ambos casos las líneas siguen una dirección radial y se extienden hasta el infinito. Observe que las líneas se acercan entre sí conforme se aproximan a la carga; ello indica que la fuerza del campo se incrementa conforme se acercan hacia la carga fuente.

Las reglas para dibujar las líneas de un campo eléctrico son las siguientes:

- Las líneas deben empezar en una carga positiva y terminar en una carga negativa. En caso de que haya un exceso en cualquier carga, algunas líneas empezarán o terminarán en el infinito.
- El número de líneas dibujadas que salen de una carga positiva o se acercan a una carga negativa será proporcional a la magnitud de dicha carga.
- Dos líneas de campo no se pueden cruzar.

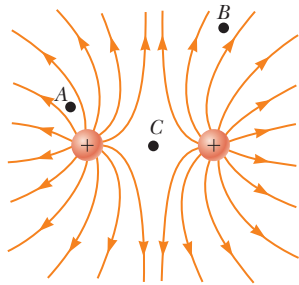
El número de líneas que salen de la carga positiva es igual al número que termina en la carga negativa.



**Figura 22.17** a) Líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales de igual magnitud y de signo opuesto (un dipolo eléctrico)

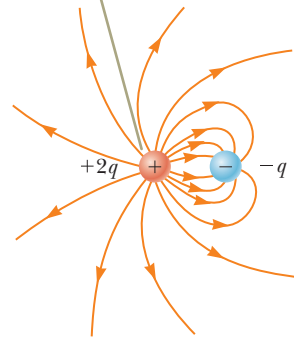
Elegimos el número de líneas de campo partiendo de cualquier objeto con carga positiva  $q_+$  y  $C|q_-|$  el número de líneas de campo que terminan en cualquier objeto con carga negativa  $q_-$ , donde  $C$  es una constante de proporcionalidad arbitraria. Una vez seleccionada  $C$ , queda fijo el número de líneas. Por ejemplo, en un sistema de dos cargas, si el objeto 1 tiene una carga  $Q_1$  y el objeto 2 tiene una carga  $Q_2$ , la razón del número de líneas en contacto con las cargas es  $N_2/N_1 = |Q_2/Q_1|$ . Las líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales de igual magnitud pero de signos opuestos (un dipolo eléctrico) se muestran en la figura 22.17. Ya que las cargas son de igual magnitud, el número de líneas que empiezan en la carga positiva debe ser igual al número que termina en la carga negativa. En lugares muy cercanos a las cargas, las líneas son prácticamente radiales como en el caso de una carga aislada. La elevada densidad de líneas entre las cargas indica una región con un campo eléctrico intenso.

La figura 22.18 muestra las líneas de campo eléctrico alrededor de dos cargas puntuales positivas iguales. De nuevo, las líneas son prácticamente radiales en puntos cercanos a cada carga, y el mismo número de líneas emerge de cada carga pues son de igual magnitud. Debido a que no hay cargas negativas disponibles, las líneas de campo eléctrico se alejan infinitamente. A una distancia considerable de las cargas, el campo es casi igual al de una sola carga puntual de magnitud  $2q$ .



**Figura 22.18** Líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales positivas. (Las ubicaciones A, B y C han sido analizadas en el Examen rápido 22.5.)

Dos líneas salen de +2q por cada una que termina en -q.



**Figura 22.19** Líneas de campo eléctrico para una carga puntual +2q y una segunda carga puntual -q.

Por último, en la figura 22.19 aparece el esbozo de las líneas de campo eléctrico asociadas con una carga positiva +2q y una carga negativa -q. En este caso, el número de líneas que salen de +2q es el doble de las que terminan en -q. En consecuencia, sólo la mitad de las líneas que abandonan la carga positiva llega a la carga negativa. La mitad restante termina en una carga negativa que se supone está en el infinito. Para distancias mucho mayores a la separación entre cargas, las líneas de campo eléctrico son equivalentes a las de una carga +q única.

**EXAMEN RÁPIDO 22.5** Clasifique las magnitudes del campo eléctrico en los puntos A, B y C de la figura 22.18 (empiece por la magnitud mayor).

## 22.6 Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme

Cuando una partícula con carga  $q$  y masa  $m$  se coloca en un campo eléctrico  $\vec{E}$ , la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga es  $q\vec{E}$ , de acuerdo con la ecuación 22.8 en la partícula en un modelo de campo. Si esta es la única fuerza ejercida sobre la partícula, es muy posible que se trate de la fuerza neta, la cual provoca que la partícula se acelere de acuerdo con el modelo de partícula bajo una fuerza neta. Por tanto,

$$\sum \vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

y la aceleración de la partícula es,

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \tag{22.11}$$

Si  $\vec{E}$  es uniforme (esto es, constante en magnitud y dirección) y la partícula se mueve libremente, la fuerza eléctrica sobre la partícula es constante y se puede aplicar el modelo de partícula bajo aceleración constante. Por tanto, la partícula en esta situación se describe bajo tres análisis de modelos: partícula en un campo, partícula bajo una fuerza neta y las partículas ¡en aceleración constante! Si la partícula tiene carga positiva, su aceleración está en dirección del campo eléctrico. Si la partícula tiene carga negativa, su aceleración será en dirección opuesta al campo eléctrico.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 22.4

**Sólo se trata de otra fuerza** Las fuerzas y los campos eléctricos podrán parecerle conceptos abstractos. Sin embargo, una vez que se evalúa  $\vec{F}_e$ , es lo que provoca que una partícula se mueva, de acuerdo con los modelos de fuerzas y movimiento establecidos comprendido en los capítulos 2 a 6 del volumen I. Teniendo esto presente podrá resolver los problemas de este capítulo.



### Ejemplo 22.7 Aceleración de una carga positiva: Dos modelos

Un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  se dirige a lo largo del eje  $x$  entre placas paralelas de carga separadas una distancia  $d$ , como se muestra en la figura 22.20. Una carga puntual positiva  $q$  de masa  $m$  se libera desde el reposo en un punto  $\textcircled{A}$  junto a la placa positiva y acelera a un punto  $\textcircled{B}$  junto a la placa negativa.

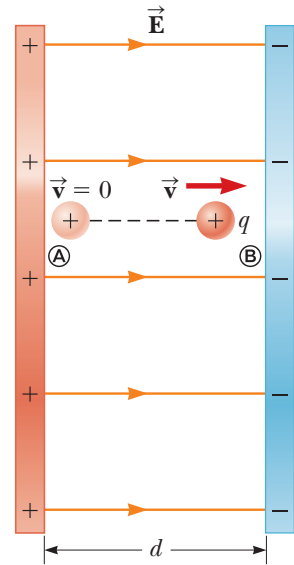
**(A)** Encuentre la rapidez de la partícula en  $\textcircled{B}$  al modelarla como una partícula bajo aceleración constante.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Cuando la carga positiva se coloca en  $\textcircled{A}$ , experimenta una fuerza eléctrica hacia la derecha en la figura 22.20 debido al campo eléctrico dirigido hacia la derecha. Como resultado, se acelerará a la derecha y llegará a  $\textcircled{B}$  alguna rapidez.

**Categorizar** Ya que el campo eléctrico es uniforme, una fuerza eléctrica constante actúa sobre la carga. Por tanto, como se sugirió en el análisis precedente al ejemplo y al enunciado del problema, la carga puntual puede ser modelada como una *partícula cargada bajo aceleración constante*.

**Figura 22.20** (Ejemplo 22.7) Una carga puntual positiva  $q$  en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  experimenta aceleración constante en la dirección del campo.



**Analizar** Use la ecuación 2.17 para expresar la velocidad de la partícula como función de la posición:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) = 0 + 2a(d - 0) = 2ad$$

Resuelva para  $v_f$  y sustituya para la magnitud de la aceleración a partir de la ecuación 22.11:

$$v_f = \sqrt{2ad} = \sqrt{2 \left( \frac{qE}{m} \right) d} = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

**(B)** Encuentre la rapidez de la partícula en  $\textcircled{B}$  al modelarla como un sistema no aislado en términos de energía.

#### SOLUCIÓN

**Categorizar** El enunciado del problema dice que la carga es un *sistema no aislado* para la *energía*. La fuerza eléctrica, como cualquier otra, puede realizar trabajo sobre el sistema. A esta carga se le transfiere energía mediante el trabajo realizado por la fuerza eléctrica que se ejerce sobre la carga. La configuración inicial del sistema es cuando la partícula está en reposo en  $\textcircled{A}$  y la configuración final es cuando está moviéndose con alguna rapidez en  $\textcircled{B}$ .

**Analizar** Escriba la reducción adecuada de la ecuación de conservación de energía, ecuación 8.2, para el sistema de la partícula cargada:

$$W = \Delta K$$

Sustituya el trabajo y las energías cinéticas con los valores adecuados para esta situación:

$$F_e \Delta x = K_{\textcircled{B}} - K_{\textcircled{A}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2F_e \Delta x}{m}}$$

Sustituya para la magnitud de la fuerza eléctrica  $F_e$  del modelo de partícula en un campo y el desplazamiento  $\Delta x$ :

$$v_f = \sqrt{\frac{2(qE)(d)}{m}} = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

**Finalizar** La respuesta a la parte (B) es la misma que la de la parte (A), como se esperaba. Este problema puede ser resuelto con diferentes enfoques. Vimos las mismas posibilidades con problemas mecánicos.

### Ejemplo 22.8 Un electrón acelerado

Un electrón entra a la región de un campo eléctrico uniforme, como se muestra en la figura 22.21, con  $v_i = 3.00 \times 10^6$  m/s y  $E = 200$  N/C. La longitud horizontal de las placas es  $\ell = 0.100$  m.

**(A)** Encuentre la aceleración del electrón mientras está en el campo eléctrico.



22.8 continuación

SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Este ejemplo difiere del precedente porque la velocidad de la partícula cargada es inicialmente perpendicular a las líneas de campo eléctrico. En el ejemplo 22.7, la velocidad de la partícula con carga siempre es paralela a las líneas de campo eléctrico. Como resultado, el electrón en este ejemplo sigue una trayectoria curva, como se muestra en la figura 22.21. El movimiento del electrón es el mismo que la de una partícula masiva proyectada horizontalmente en un campo gravitacional cerca de la superficie de la Tierra.

**Categorizar** El electrón es una *partícula en un campo (eléctrico)*. Dado que el campo eléctrico es uniforme, se ejerce una fuerza eléctrica constante sobre el electrón. Para encontrar la aceleración del electrón, se le modela como una *partícula bajo una fuerza neta*.

**Analizar** A partir del modelo de partícula en un campo, sabemos que la dirección de la fuerza eléctrica sobre el electrón es hacia abajo en la figura 22.21, opuesta a la dirección de las líneas de campo eléctrico. Por tanto, del modelo de partícula bajo una fuerza neta, la aceleración del electrón es hacia abajo.

La partícula bajo un modelo de fuerza neta que se utilizó para desarrollar la ecuación 22.11 en el caso en el que la fuerza eléctrica sobre una partícula es la única fuerza. Use esta ecuación para encontrar la componente  $y$  de la aceleración del electrón:

$$a_y = -\frac{eE}{m_e}$$

Sustituya valores numéricos:

$$a_y = -\frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(200 \text{ N/C})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} = -3.51 \times 10^{13} \text{ m/s}^2$$

**(B)** Si supone que el electrón entra al campo en el tiempo  $t = 0$ , encuentre el tiempo cuando abandona el campo.

SOLUCIÓN

**Categorizar** Como la fuerza eléctrica sólo actúa en la dirección vertical en la figura 22.21, el movimiento de la partícula en la dirección horizontal se puede analizar si la modela como una *partícula bajo velocidad constante*.

**Analizar** Resuelva la ecuación 2.7 para el tiempo en el que el electrón llega a los bordes derechos de las placas:

$$x_f = x_i + v_x t \rightarrow t = \frac{x_f - x_i}{v_x}$$

Sustituya valores numéricos:

$$t = \frac{\ell - 0}{v_x} = \frac{0.100 \text{ m}}{3.00 \times 10^6 \text{ m/s}} = 3.33 \times 10^{-8} \text{ s}$$

**(C)** Si supone que la posición vertical del electrón cuando entra al campo es  $y_i = 0$ , ¿cuál es la posición vertical cuando abandona el campo?

SOLUCIÓN

**Categorizar** Ya que la fuerza eléctrica es constante en la figura 22.21, el movimiento de la partícula en la dirección vertical se analiza al modelarla como una *partícula bajo aceleración constante*.

**Analizar** Use la ecuación 2.16 para describir la posición de la partícula en cualquier tiempo  $t$ :

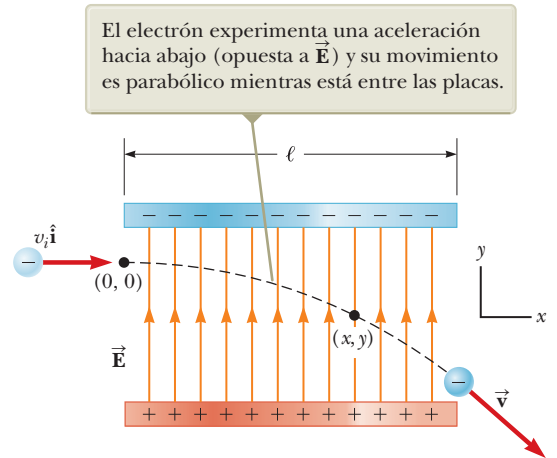
$$y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Sustituya valores numéricos:

$$y_f = 0 + 0 + \frac{1}{2}(-3.51 \times 10^{13} \text{ m/s}^2)(3.33 \times 10^{-8} \text{ s})^2 = -0.0195 \text{ m} = -1.95 \text{ cm}$$

**Finalizar** Si el electrón entra justo abajo de la placa negativa en la figura 22.21, y la separación entre las placas es menor que el valor recién calculado, el electrón golpeará la placa positiva.

Observe que hemos utilizado *cuatro* análisis de modelos para describir al electrón en varias partes de este problema. Hemos ignorado la fuerza gravitacional que actúa sobre el electrón, lo que representa una buena aproximación cuando se trata con partículas atómicas. Para un campo eléctrico de 200 N/C, la razón de la magnitud de la fuerza eléctrica  $eE$  a la magnitud de la fuerza gravitacional  $mg$  es del orden de  $10^{12}$  para un electrón y del orden de  $10^9$  para un protón.



**Figura 22.21** (Ejemplo 22.8) Un electrón se proyecta horizontalmente en un campo eléctrico uniforme producido por dos placas cargadas.



## Resumen

### Definiciones

El **campo eléctrico**  $\vec{E}$  en algún punto del espacio se define como la fuerza eléctrica  $\vec{F}_e$  que actúa sobre una pequeña carga de prueba positiva colocada en dicho punto, dividida entre la magnitud  $q_0$  de la carga de prueba:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_e}{q_0} \quad (22.7)$$

### Conceptos y principios

Las **cargas eléctricas** tienen las siguientes importantes propiedades:

- Cargas de signos opuestos se atraen, y cargas del mismo signo se repelen.
- La carga total en un sistema aislado se conserva.
- La carga está cuantizada.

Los **conductores** son materiales donde los electrones se mueven libremente.

Los **aisladores** son materiales donde los electrones no se mueven con libertad.

La **ley de Coulomb** establece que la fuerza eléctrica que ejerce una carga puntual  $q_1$  sobre una segunda carga puntual  $q_2$  es

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (22.6)$$

donde  $r$  es la distancia entre las dos cargas y  $\hat{r}_{12}$  es un vector unitario dirigido de  $q_1$  hacia  $q_2$ . La constante  $k_e$ , que se llama **constante de Coulomb**, tiene el valor  $k_e = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$ .

A una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$ , el campo eléctrico generado por la carga es

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (22.9)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario dirigido desde la carga hacia el punto en cuestión. El campo eléctrico se dirige radialmente hacia afuera desde una carga positiva y radialmente hacia adentro hacia una carga negativa.

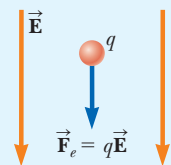
El campo eléctrico generado por un grupo de cargas puntuales se puede calcular usando el principio de superposición. Esto es el campo eléctrico total en algún punto es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos de todas las cargas:

$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (22.10)$$


### Análisis de modelos para la resolución de problemas

**Partícula en un campo (eléctrico)** Una partícula fuente con alguna carga eléctrica establece un campo eléctrico  $\vec{E}$  a través del espacio. Cuando se coloca una partícula con carga  $q$  en ese campo, experimenta una fuerza eléctrica dada por

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad (22.8)$$



## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

1. Usted y sus compañeros forman un grupo de practicantes en una compañía de nanotecnología. La empresa tiene problemas para fabricar nanopartículas de masa uniforme y se le ha pedido a su grupo que diseñe un sistema que determine la masa de una nanopartícula cargada haciéndola pasar a través de un campo eléctrico uniforme entre placas paralelas

de manera idéntica a la del electrón en la figura 22.21. Todo el sistema está ubicado en una cámara de vidrio vacía, por lo que la resistencia del aire no es un factor. La masa puede ser determinada por la cantidad de desviación de la nanopartícula a medida que atraviesa el campo después de haber sido proyectada en el campo justo debajo del borde izquierdo de la placa superior con una velocidad inicial en una dirección paralela a las placas. Su grupo trabaja bien juntos y diseña un par de placas paralelas de longitud,  $\ell = 1.00 \text{ m}$ , con la placa negativa situada a una distancia  $d = 8.00 \text{ mm}$  vertical-



mente por encima de la placa positiva, con un campo eléctrico uniforme de magnitud  $E = 2.00 \times 10^4 \text{ N/C}$  entre ellos dirigidos perpendicularmente a las placas. Usted dispone que las nanopartículas con una masa  $m = 6.50 \times 10^{-13} \text{ g}$ , con una carga de  $-e$ , se proyecten en el campo a una velocidad de  $v = 30.0 \text{ m/s}$ . Su fecha límite se acerca a medida que termina la construcción del dispositivo y no tiene tiempo para probarlo antes de que lo llamen para mostrar el dispositivo a los líderes del grupo de investigación. Cuando demuestra el dispositivo, ¿por qué su grupo está desconcertado?

2. **ACTIVIDAD** La figura TP22.2 muestra la *serie triboeléctrica*. Se usa con respecto a los experimentos de frotamiento descritos en la sección 22.1. Si un material de la parte superior de la lista se frota contra un material de una parte inferior, cada material se cargará eléctricamente de acuerdo con los signos arriba y abajo de la lista. Mientras más alejados estén dos materiales en la lista, mayor será la cantidad de carga eléctrica cuando se froten entre sí. Como ejemplo, considere la varilla de vidrio frotada con seda en la figura 22.3. Con base en la serie triboeléctrica que se muestra, ¿esperamos que la seda se cargue negativamente y el vidrio se carguen positivamente? Aunque ambos están en el lado positivo de la serie, el vidrio está mucho más arriba, por lo que toma una carga positiva y la seda se carga negativamente.

Para los objetos frotados debajo, identifique el signo de la carga en la varilla, tubería, tenedor o globo después de frotarlo con el otro material:

- Se frota una varilla de vidrio con un paño de lana.
- Se frota una varilla de vidrio con pelo de gato.
- Se frota un tubo de PVC con una toalla de papel.
- Se frota un tenedor de plata con un paño de nylon.
- Se frota una varilla de silicón con un paño de algodón.
- Se frota una varilla de hule o caucho rígido con una toalla de papel.
- Se frota un tubo de cobre con pelo de gato.
- Se frota una varilla de aluminio con una camisa de poliéster.

- Se frota un tubo de plomo con una toalla de papel.
- Se frota un globo de goma en su cabello.
- De las diez opciones (a)–(j), ¿cuál cree que representa la mayor transferencia de carga?



Figura TP22.2

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN From Cengage

### SECCIÓN 22.1 Propiedades de las cargas eléctricas

- Determine con una precisión de tres dígitos significativos la carga y la masa de las siguientes partículas. *Sugerencia:* primero busque la masa de un átomo neutro en la tabla periódica de los elementos en el apéndice C. a) Un átomo de hidrógeno ionizado, representado como  $\text{H}^+$  (b) un átomo de sodio ionizado  $\text{Na}^+$  (c) un ion de cloro  $\text{Cl}^-$  (d) un átomo de calcio doblemente ionizado  $\text{Ca}^{++} = \text{Ca}^{2+}$  (e) el centro de una molécula de amoníaco modelada como un ion  $\text{N}^{3-}$  (f) átomos de nitrógeno ionizados al cuádruplo,  $\text{N}^{4+}$  encontrados en el plasma de una estrella caliente (g) el núcleo del átomo de nitrógeno (h) el ion molecular  $\text{H}_2\text{O}^+$ .

### SECCIÓN 22.3 Ley de Coulomb

- (a) Calcule la magnitud de la fuerza eléctrica entre un ion  $\text{Na}^+$  y uno de  $\text{Cl}^-$  separados por  $0.50 \text{ nm}$ . (b) ¿La respuesta

cambia si el ion de sodio fuera remplazado por  $\text{Li}^+$  y el ion cloruro por  $\text{Br}^-$ ? Explique.

- En una nube de tormenta, puede haber cargas eléctricas de  $+40.0 \text{ C}$  cerca de la parte superior y  $-40.0 \text{ C}$  cerca de la parte inferior de la nube. Estas cargas están separadas por  $2.00 \text{ kilómetros}$ . ¿Cuál es la fuerza eléctrica sobre la carga de la parte superior?
- El premio Nobel, Richard Feynman (1918-1988), dijo en alguna ocasión que si dos personas se colocaban a la distancia de sus brazos una de la otra y cada una de ellas tuviera  $1\%$  más electrones que protones, la fuerza de repulsión entre ambos sería suficiente para levantar un “peso” equivalente al de toda la Tierra. Efectúe un cálculo de magnitudes para sustentar esta afirmación.
- Una carga puntual  $7.50 \text{ nC}$  se encuentra a  $1.80 \text{ m}$  de una carga puntual de  $4.20 \text{ nC}$ . (a) Calcule la magnitud de la fuerza eléctrica que una partícula ejerce sobre la otra. (b) ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?



**6.** Esta tarde, tiene un simposio en la clase de física y es el orador. Presentará un tema a estudiantes de física y docentes. Ha estado tan ocupado que no ha tenido tiempo para prepararse y ni siquiera tiene una idea para un tema. Está leyendo frenéticamente su libro de texto de física en busca de una idea. En su lectura, ha aprendido que la Tierra tiene una carga en su superficie de aproximadamente  $10^5$  C, lo que da como resultado campos eléctricos en la atmósfera. Esto lo pone muy entusiasmado con una nueva teoría. ¡Supongamos que la Luna también lleva una carga del orden de  $10^5$  C, con el signo opuesto! ¡Tal vez la órbita de la Luna alrededor de la Tierra se deba a la atracción eléctrica entre la Luna y la Tierra! ¡Hay una idea para su presentación en el simposio! Rápidamente toma algunas notas y corre hacia su simposio. Mientras habla, observa a uno de los profesores haciendo algunos cálculos en un trozo de papel. ¡Oh oh! Acaba de levantar la mano con una pregunta. ¿Por qué está desconcertado?

**7.** Dos pequeñas esferas que tienen cargas positivas  $q_1 = 3q$  y  $q_2 = q$  se fijan en los extremos opuestos de una barra aislante horizontal de longitud  $d = 1.50$  m. La esfera con carga  $q_1$  está en el origen. Como se muestra en la figura P22.13, una tercera esfera pequeña, cargada es libre para deslizarse sobre la varilla. (a) ¿En qué posición  $x$  está en equilibrio la tercera esfera? (b) ¿Puede el equilibrio ser estable?

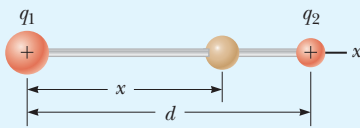


Figura P22.7 Problemas 7 y 8.

**8.** Dos pequeñas esferas que tienen cargas  $q_1$  y  $q_2$  del mismo signo se fijan en los extremos opuestos de una barra aislante horizontal de longitud  $d$ . La esfera con carga  $q_1$  está en el origen. Como se muestra en la figura P22.7, una tercera esfera pequeña cargada es libre para deslizarse sobre la varilla. (a) ¿En qué posición  $x$  la tercera esfera está en equilibrio? (b) ¿Puede el equilibrio ser estable?

**9. Problema de repaso.** En la teoría de Bohr sobre el átomo de hidrógeno, un electrón se mueve en una órbita circular alrededor de un protón, donde el radio de la órbita es  $5.29 \times 10^{-11}$  m. (a) Encuentre el valor de la fuerza eléctrica ejercida entre ambos. (b) Si esta fuerza es la que causa la aceleración centrípeta del electrón, ¿cuál es su rapidez?

**10.** Tres cargas puntuales se encuentran a lo largo de una línea recta como se muestra en la figura P22.10, donde  $q_1 = 6.00 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 1.50 \mu\text{C}$  y  $q_3 = -2.00 \mu\text{C}$ . Las distancias de separación son  $d_1 = 3.00$  cm y  $d_2 = 2.00$  cm. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica neta en (a)  $q_1$ , (b)  $q_2$  y (c)  $q_3$ .

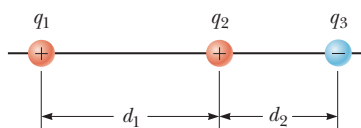


Figura P22.10

**11.** Una carga puntual  $+2Q$  está en el origen y la carga puntual  $-Q$  se encuentra a lo largo del eje  $x$  en  $x = d$  como en la figura P22.11. Encuentre una expresión simbólica de la

fuerza neta sobre una tercera carga puntual  $+Q$  situada a lo largo del eje  $y$  en  $y = d$ .

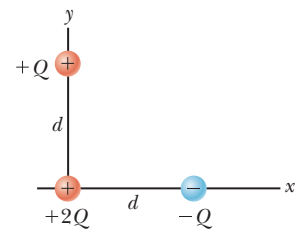


Figura P22.11

**12.** Una partícula A de carga  $3.00 \times 10^{-4}$  C está en el origen, la partícula B de carga  $-6.00 \times 10^{-4}$  C está en  $(4.00$  m,  $0)$  y la partícula C de carga  $1.00 \times 10^{-4}$  C está en  $(0, 3.00$  m). Queremos encontrar la fuerza eléctrica neta sobre C. (a) ¿Cuál es el componente  $x$  de la fuerza eléctrica ejercida por A sobre C? (b) ¿Cuál es el componente  $y$  de la fuerza que ejerce A sobre C? (c) Determinar la magnitud de la fuerza ejercida por B sobre C. (d) Calcular la componente  $x$  de la fuerza ejercida por B sobre C. (e) Calcular la componente  $y$  de la fuerza ejercida por B sobre C. (f) Sumar las dos componentes  $x$  de los incisos (a) y (d) para obtener el componente  $x$  resultante de la fuerza eléctrica que actúa sobre C. (g) Del mismo modo, encontrar la componente  $y$  del vector de fuerza resultante que actúa sobre C (h) encontrar la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica resultante que actúa sobre C.

**13. Problema de repaso.** Dos partículas idénticas, cada una de ellas con un carga  $+q$ , están fijas en el espacio y separadas por una distancia  $d$ . Una tercera carga puntual  $-Q$  tiene libertad de movimiento y en un principio está en reposo sobre la bisectriz perpendicular de ambas cargas fijas, a una distancia  $x$  del punto medio entre las dos cargas fijas (figura P22.13). (a) Demuestre que si  $x$  es pequeña en comparación con  $d$ , el movimiento de  $-Q$  será armónico simple a lo largo de la bisectriz perpendicular. (b) Determine el periodo de dicho movimiento. (c) ¿Qué tan rápido se moverá la carga  $-Q$  cuando llegue al punto medio entre las dos cargas fijas, si fue liberada inicialmente a una distancia  $a \ll d$  del punto medio?

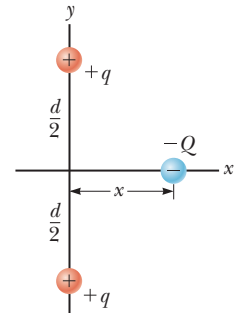


Figura P22.13

**14.** Dos partículas de polvo idénticas con masa de  $1.00 \mu\text{g}$  están flotando en el espacio vacío, lejos de cualquier fuente externa de grandes campos gravitacionales o eléctricos, y en reposo con una respecto a la otra. Ambas partículas llevan cargas eléctricas que son idénticas en magnitud y signo. Las fuerzas gravitacional y eléctrica entre las partículas tienen la misma magnitud, por lo que cada partícula experimenta fuerza neta cero y la distancia entre las partículas se mantiene constante.

### SECCIÓN 22.4 Análisis del modelo: partícula en un campo (eléctrico)

**15.** ¿Cuál será la magnitud y la dirección del campo eléctrico que equilibre el peso de a) un electrón y b) un protón? (Use los datos de la tabla 22.1.)

**16.** Considere  $n$  partículas con la misma carga positiva cada una de magnitud  $Q/n$  colocadas simétricamente alrededor de un círculo de radio  $a$ . Calcule la magnitud del campo eléctrico en un punto una distancia  $x$  desde el centro del círculo y en la línea que pasa por el centro y perpendicular al plano del círculo.

17. Dos partículas iguales y cargadas positivamente están en las esquinas opuestas de un trapecio, como se muestra en la figura P22.17. Encuentre expresiones simbólicas para el campo eléctrico total en (a) el punto  $P$  y (b) el punto  $P'$ .

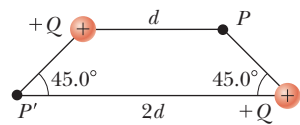


Figura P22.17

18. Dos partículas cargadas se encuentran sobre el eje  $x$ . La primera es una carga  $+Q$  en  $x = -a$ . La segunda es una carga desconocida ubicada en  $x = +3a$ . El campo eléctrico neto que estas cargas producen en el origen tiene un valor de  $2keQ/a^2$ . Explique cuántos valores son posibles para la carga desconocida y encuentre los valores posibles.

19. Tres cargas puntuales están situadas en un arco circular como se muestra en la figura P22.19. (a) ¿Cuál es el campo eléctrico total en  $P$ , el centro del arco? (b) Hallar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre una carga puntual  $-5.00$  nC situada en  $P$ .

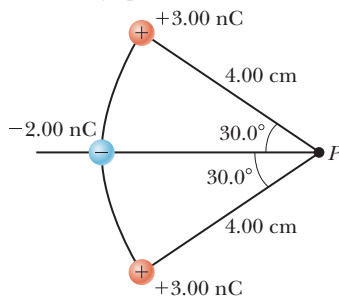


Figura P22.19

20. Dos cargas puntuales de  $2.00 \mu\text{C}$  están localizadas sobre el eje  $x$ . Una está en  $x = 1.00$  m y la otra en  $x = -1.00$  m. (a) Determine el campo eléctrico sobre el eje  $y$  en  $y = 0.500$  m. (b) Calcule la fuerza eléctrica ejercida sobre una carga de  $-3.00 \mu\text{C}$  colocada sobre el eje de las  $y$  en  $y = 0.500$  m.
21. Tres cargas puntuales están dispuestas como se muestra en la figura P22.21. (a) Encuentre el vector de campo eléctrico que las cargas  $6.00$  nC y  $-3.00$  nC juntas crean en el origen. (b) Hallar el vector fuerzas obre la carga de  $5.00$  nC.

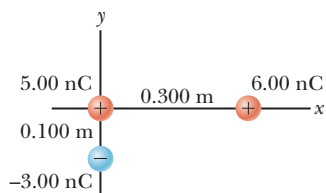


Figura P22.21

22. Considere el dipolo eléctrico que se ilustra en la figura P22.22. Demuestre que el campo eléctrico en un punto *distante* sobre el eje  $+x$  es  $E_x \approx 4k_qa/x^3$ .

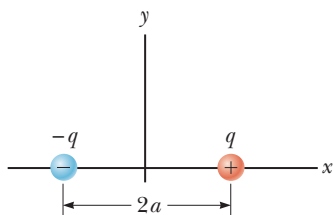


Figura P22.22

SECCIÓN 22.5 Líneas de campo eléctrico

23. Tres cargas  $q$  positivas idénticas están ubicadas en las esquinas de un triángulo equilátero de lado  $a$ , como se muestra en la figura P22.23. Suponga que las tres cargas juntas producen un campo eléctrico. (a) Dibuje las líneas de campo en el plano de las cargas. (b) Determine la localización de un punto (distinto de  $\infty$ ) donde el campo eléctrico es igual a cero. ¿Cuál es (c) la magnitud y (d) la dirección del campo eléctrico en  $P$  debido a las dos cargas ubicadas en la base?

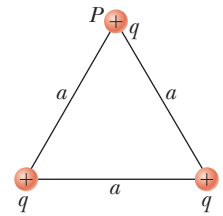


Figura P22.23

SECCIÓN 22.6 Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme

24. Un protón se acelera a partir del reposo en un campo eléctrico uniforme de  $640$  N/C. Poco tiempo después su rapidez es de  $1.20$  Mm/s (no relativista, ya que  $v$  es mucho menor que la rapidez de la luz) (a) Determine la aceleración del protón. (b) ¿En qué intervalo de tiempo el protón alcanza esta rapidez? (c) ¿Qué distancia recorre en ese intervalo de tiempo? (d) ¿Cuál es su energía cinética al final de este intervalo?
25. Un protón se mueve a  $4.50 \times 10^5$  m/s en dirección horizontal, y entra en un campo eléctrico vertical uniforme con una magnitud de  $9.60 \times 10^3$  N/C. Si ignora cualquier efecto gravitacional, determine (a) el intervalo de tiempo requerido para que el protón recorra  $5.00$  cm horizontalmente, (b) su desplazamiento vertical durante el intervalo de tiempo que viaja los  $5.00$  cm horizontalmente y (c) las componentes horizontales y verticales de su velocidad después de haber recorrido  $5.00$  cm horizontalmente.
26. Se proyectan varios protones con una rapidez inicial  $v_i = 9.55$  km/s en una región donde está presente un campo eléctrico uniforme  $\vec{E} = -720\hat{j}$  N/C, como se muestra en la figura P22.26. El vector de velocidad inicial de los protones forma un ángulo  $\theta$  con el plano. Los protones deben alcanzar un objetivo que se encuentra a una distancia horizontal de  $R = 1.27$  mm del punto por donde los protones atraviesan el plano y entran en el campo eléctrico. Queremos encontrar el ángulo  $\theta$  con el que los protones deben pasar a través del plano para dar en el blanco. (a) ¿Qué análisis del modelo describe el movimiento horizontal de los protones por encima del plano? (b) ¿Qué análisis del modelo describe el movimiento vertical de los protones por encima del plano? (c) Argumente por qué la ecuación 4.20 se aplicaría a los protones en esta situación. (d) Utilice la ecuación 4.20 para escribir una expresión para  $R$  en términos de  $v_i$ ,  $E$ , la carga y la masa del protón y el ángulo  $\theta$ . (e) Hallar los dos valores posibles del ángulo  $\theta$ . (f) Encontrar el intervalo de tiempo durante el cual el protón está por encima del plano en la figura P22.26 para cada uno de los dos valores posibles de  $\theta$ .

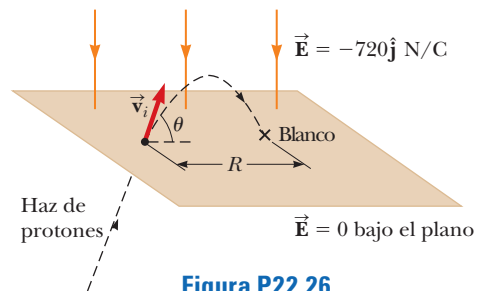


Figura P22.26

**27. CE** Todavía está fascinado con el proceso de impresión de inyección de tinta, como se describe en la semblanza de apertura de este capítulo. Usted convence a su padre de que lo lleve a su fábrica para ver las máquinas que imprimen fechas de caducidad en los huevos. Entabla una conversación con el técnico que opera la máquina. Él le dice que las gotas de tinta se crean usando un cristal piezoeléctrico, ondas acústicas y la inestabilidad Plateau-Rayleigh, que crea gotas uniformes de masa  $m = 1.25 \times 10^{-8}$  g. Si bien no entiende las palabras elegantes, sí reconoce la masa. El técnico también le dice que las gotas se cargan a un valor controlable de  $q$  y luego se proyectan verticalmente hacia abajo entre las placas de desviación paralelas a una velocidad de terminal constante de 18.5 m/s. Las placas tienen  $\ell = 2.25$  cm de largo y tienen un campo eléctrico uniforme de magnitud  $E = 6.35 \times 10^4$  N/C entre ellas. Al observar su interés en el proceso, el técnico le pregunta: "Si la posición en el huevo donde se va a depositar la gota requiere que su deflexión en el extremo inferior de las placas sea de 0.17 mm, ¿cuál es la carga requerida en la gota?" Trabaje rápidamente para encontrar la respuesta.

**28. CE** Está trabajando en un proyecto de investigación en el que debe controlar la dirección de desplazamiento de los electrones utilizando placas deflectoras. Usted ha ideado el aparato que se muestra en la figura P22.28. Las placas son de longitud,  $\ell = 0.500$  m y están separadas por una distancia  $d = 3.00$  cm. Los electrones se disparan a  $v_i = 5.00 \times 10^6$  m/s en un campo eléctrico uniforme desde el borde izquierdo de la placa positiva inferior, dirigida directamente hacia el borde derecho de la placa negativa superior. Por tanto, si no hay campo eléctrico entre las placas, los electrones seguirán la línea discontinua en la figura. Con un campo eléctrico existente entre las placas, los electrones seguirán una trayectoria curva, doblándose hacia abajo. Debe determinar (a) el rango de ángulos sobre los que el electrón puede abandonar el aparato y (b) el campo eléctrico requerido para obtener el ángulo de desviación máximo posible.

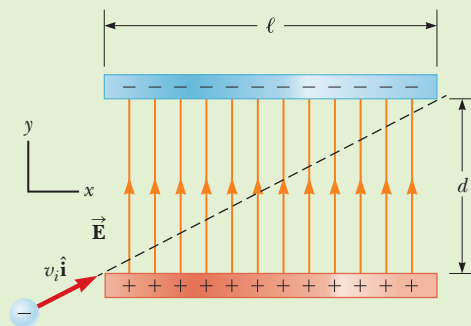


Figura P22.28

### PROBLEMAS ADICIONALES

**29. S** Considere un número infinito de partículas idénticas, cada una con carga  $q$ , colocadas a lo largo del eje  $x$  a distancias  $a, 2a, 3a, 4a, \dots$ , desde el origen. ¿Cuál es el campo eléctrico en el origen debido a esta distribución? *Sugerencia:* use el hecho de que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

**30.** Una partícula con carga  $-3.00$  nC está en el origen y una partícula con carga negativa de magnitud  $Q$  está a  $x = 50.0$  cm. Una tercera partícula con carga positiva está en equilibrio en  $x = 20.9$  cm. ¿Cuál es la magnitud de  $Q$ ?

**31. AMT** Un pequeño bloque de masa  $m$  y carga  $Q$  se coloca en un plano inclinado aislado, sin fricción con un ángulo  $\theta$  como en la figura P22.31. Se aplica un campo eléctrico paralelo a la rampa. (a) Encuentre una expresión para la magnitud del campo eléctrico que permite que el bloque permanezca en reposo. (b) Si  $m = 5.40$  g,  $Q = -7.00$   $\mu$ C, y  $\theta = 25.0^\circ$ , determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico que permite que el bloque permanezca en reposo sobre la rampa.

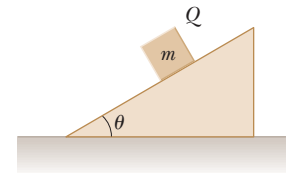


Figura P22.31

**32.** Una pequeña esfera de carga  $q_1 = 0.800$   $\mu$ C cuelga del extremo de un resorte como en la figura P22.32a. Cuando otra pequeña esfera de carga  $q_2 = -0.600$   $\mu$ C se coloca por debajo de la primera esfera como en la figura P22.32b, el resorte se extiende  $d = 3.50$  cm de su longitud original y se llega a una nueva posición de equilibrio con una separación entre las cargas de  $r = 5.00$  cm. ¿Cuál es la fuerza constante del resorte?

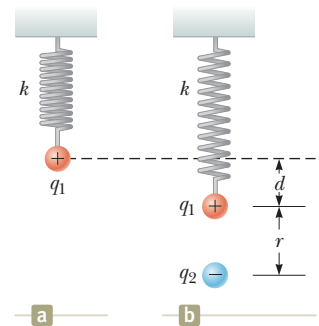
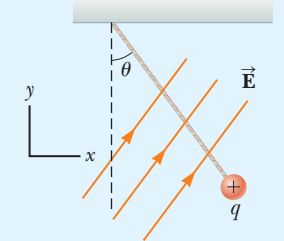


Figura P22.32

**33. T** Una pelota de corcho cargada con 1.00 g de masa está suspendida de una cuerda muy ligera en un campo eléctrico uniforme, como se observa en la figura P22.33. Cuando  $\vec{E} = (3.00\hat{i} + 5.00\hat{j}) \times 10^5$  N/C, la pelota está en equilibrio en  $\theta = 37.0^\circ$ . Determine (a) la carga sobre la pelota y (b) la tensión en la cuerda.

Figura P22.33  
Problemas 33 y 34

**34. S** Una pelota de corcho cargada de masa  $m$  está suspendida de una cuerda muy ligera en un campo eléctrico uniforme, como se observa en la figura P22.33. Cuando  $\vec{E} = A\hat{i} + B\hat{j}$ , donde  $A$  y  $B$  son números positivos, la pelota está en equilibrio cuando el ángulo es igual a  $\theta$ . Determine (a) la carga sobre la pelota y (b) la tensión en la cuerda.

**35.** Tres partículas cargadas están alineadas a lo largo del eje  $x$ , según se muestra en la figura P22.35. Determine el campo eléctrico en (a) la posición (2.00 m, 0) y (b) la posición (0, 2.00 m).

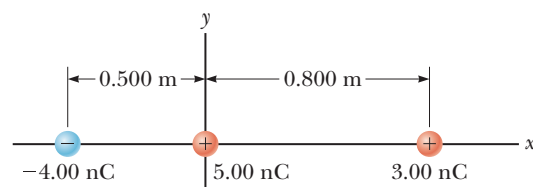


Figura P22.35



**36. CIC** Dos cargas puntuales,  $q_A = 12.0 \mu\text{C}$  y  $q_B = 45.0 \mu\text{C}$ , así como una tercera partícula con carga desconocida  $q_C$ , se encuentran en el eje  $x$ . La partícula  $q_A$  está ubicada en el origen y la partícula  $q_B$  está en  $x = 15.0 \text{ cm}$ . La tercera partícula debe ser colocada de tal forma que cada carga quede en equilibrio bajo la acción de las fuerzas eléctricas ejercidas por las otras dos partículas. (a) ¿Es posible esta situación? Si es así, ¿Es posible de alguna otra forma? Explique. Encuentre (b) la ubicación requerida, (c) la magnitud y signo de la tercera partícula.

**37.** Dos pequeñas esferas cuelgan en equilibrio en los extremos inferiores de hilos de  $40.0 \text{ cm}$  de longitud, que tienen sus extremos superiores amarrados al mismo punto fijo. Una esfera tiene  $2.40 \text{ g}$  de masa y  $+300 \text{ nC}$  de carga. La otra esfera tiene la misma masa y una carga de  $+200 \text{ nC}$ . Encuentre la distancia entre los centros de las esferas.

**38.** En las esquinas de un rectángulo, según se muestra en la figura P22.38, se localizan cuatro cargas puntuales idénticas ( $q = +10.0 \mu\text{C}$ ). Las dimensiones del rectángulo son  $L = 60.0 \text{ cm}$  y  $W = 15.0 \text{ cm}$ . Calcule (a) la magnitud y (b) la dirección de la fuerza eléctrica total ejercida por las otras tres cargas sobre la carga en la esquina inferior izquierda.

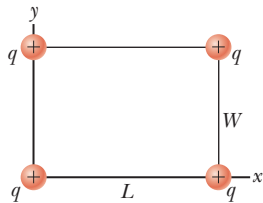


Figura P22.38

**39. Problema de repaso.** Dos bloques idénticos que descansan sobre una superficie horizontal sin fricción, están conectados por un ligero resorte que tiene una constante de resorte  $k = 100 \text{ N/m}$  y una longitud no estirada  $L_i = 0.400 \text{ m}$ , como se muestra en la figura P22.39a. Una carga  $Q$  se coloca lentamente en cada bloque, haciendo que el resorte se estire a una longitud del equilibrio  $L = 0.500 \text{ m}$ , como se muestra en la figura P22.39b. Determine el valor de  $Q$ , modelando los bloques como partículas cargadas.

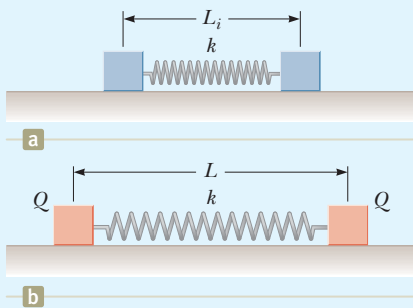


Figura P22.39 Problemas 39 y 40

**40. Problema de repaso. S** Dos bloques idénticos que descansan sobre una superficie horizontal sin fricción, están conectados por un ligero resorte que tiene una constante de resorte  $k$  y una longitud no estirada  $L_i$  como se muestra en la figura P22.39a. Una carga  $Q$  se coloca lentamente en cada bloque, haciendo que el resorte se estire a una longitud del equilibrio  $L$  como se muestra en la figura P22.39b. Determine el valor de  $Q$ , modelando los bloques como partículas cargadas.

**41.** Tres cargas puntuales idénticas, cada una de masa  $m = 0.100 \text{ kg}$ , cuelgan de tres cuerdas como se muestra en la figura P22.41. Si las longitudes de las cuerdas izquierda y derecha son cada una  $L = 30.0 \text{ cm}$  y el ángulo  $\theta$  es  $45.0^\circ$ , determine el valor de  $q$ .

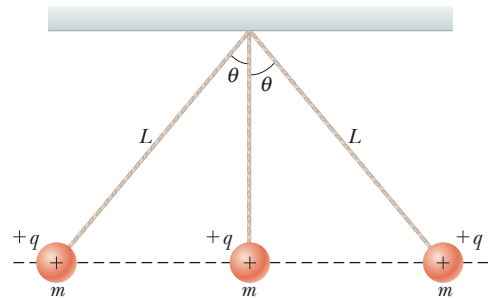


Figura P22.41

**42.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un electrón entra en una región de campo eléctrico uniforme entre dos placas paralelas. Las placas se utilizan en un tubo de rayos catódicos para ajustar la posición de un haz de electrones sobre una pantalla fluorescente distante. La magnitud del campo eléctrico entre las placas es de  $200 \text{ N/C}$ . Las placas son de  $0.200 \text{ m}$  de longitud y están separadas por  $1.50 \text{ cm}$ . El electrón entra en la región con una rapidez de  $3.00 \times 10^6 \text{ m/s}$ , desplazándose paralelo al plano de las placas en la dirección de su longitud. Abandona las placas dirigiéndose a su posición correcta en la pantalla fluorescente.

**43.** Dos esferas de goma dura, cada una de masa  $m = 15.0 \text{ g}$ , se frota con piel en un día seco y después se suspenden con dos cuerdas de aislantes de longitud  $L = 5.00 \text{ cm}$  cuyos puntos de apoyo están a una distancia  $d = 3.00 \text{ cm}$  uno de otro como se muestra en la figura P22.43. Durante el proceso de frotamiento, una esfera recibe exactamente el doble de la carga de la otra. Se colocan para estar en equilibrio, cada una en un ángulo de  $\theta = 10.0^\circ$  con la vertical. Encontrar la cantidad de carga en cada esfera.

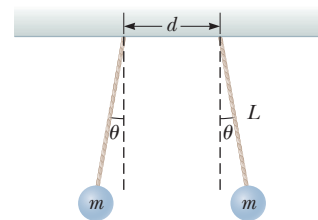


Figura P22.43

**44. S** Dos esferas pequeñas idénticas tienen una masa  $m$  y una carga  $q$ . Cuando se les coloca en un tazón hemisférico de radio  $R$  y de paredes no conductoras y libres de fricción, las esferas se mueven, y cuando están en equilibrio se encuentran a una distancia  $d$  (figura p22.44). (a) Determine la carga  $q$  sobre cada esfera (b) determine la carga requerida por  $d$  para que sea igual a  $2R$ .

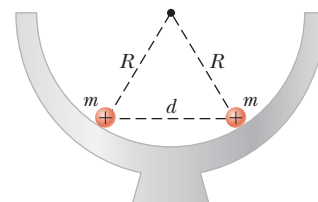


Figura P22.44

45. Dos pequeñas esferas de masa  $m$  están suspendidas de cuerdas de longitud  $\ell$  que están conectadas en un punto común.
- CIC** Una de las esferas tiene una carga  $Q$ , la otra una carga  $2Q$ . Las cuerdas forman ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con la vertical. (a) Explique la relación existente entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . (b) Suponga que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son pequeños. Demuestre que la distancia  $r$  entre las esferas es aproximadamente

$$r \approx \left( \frac{4k_e Q^2 \ell}{mg} \right)^{1/3}$$

46. Usted está trabajando como testigo experto para un inventor. El inventor ideó un sistema que permite a un humano de 85.0 kg sobrevolar el suelo en la superficie de la Tierra debido a la fuerza de repulsión entre una carga  $q$  aplicada a su cuerpo y la carga eléctrica normal en la Tierra. La carga normal en la Tierra es tal que el campo eléctrico es uniforme cerca de la superficie de la Tierra, dirigido hacia abajo hacia la superficie, y es de una magnitud de 130 N/C en el lugar de los experimentos del ingeniero. Todo fue bien hasta que el ingeniero intentó un nuevo experimento. Intentó transferir la misma cantidad de carga  $q$  a cada uno de los dos sujetos experimentales que se encontraban uno al lado del otro, de modo que podían flotar y trabajar juntos en una tarea. Los sujetos experimentales, volando y cargados, se repelían mutuamente y se lastimaban cuando volaban en direcciones opuestas. Ambos sujetos experimentales ahora están demandando al inventor por sus lesiones. El inventor afirma que no es su culpa si los sujetos encontraron repulsión entre ellos. Para saber si el inventor tiene una buena defensa, determine la aceleración inicial de cada sujeto si están trabajando a 1.00 m de distancia.

47. **Problema de repaso.** Una pelota de corcho de 1.00 g con una carga de  $2.00 \mu\text{C}$  está suspendida verticalmente de una ligera cuerda de 0.500 m de largo en un campo eléctrico uniforme dirigido hacia abajo, de magnitud  $E = 1.00 \times 10^5 \text{ N/C}$ . Si se desplaza ligeramente de la vertical, la pelota oscila como un péndulo simple. (a) Determine el periodo de esta oscilación. (b) ¿Deberán incluirse los efectos de la gravitación en el cálculo del inciso (a)? Explique.

### PROBLEMAS DE DESAFÍO

48. Ocho partículas con carga, cada una de magnitud  $q$ , están situadas en las esquinas de un cubo de arista  $s$ , como se observa en la figura P22.48. (a) Determine las componentes en  $x, y$  y  $z$  de la fuerza total ejercida por las demás cargas sobre la carga ubicada en el punto A. (b) ¿Cuáles son la magnitud y (c) la dirección de esta fuerza total?

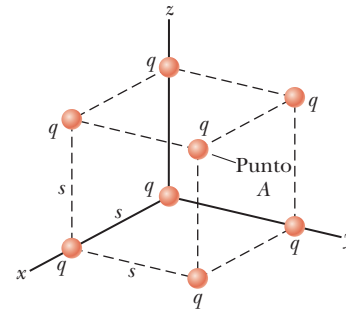


Figura P22.48

49. **CIC** Dos partículas, cada una con 52.0 nC de carga, se ubican en el eje  $y$  en  $y = 25.0 \text{ cm}$  y  $y = -25.0 \text{ cm}$ . (a) Encuentre el vector de campo eléctrico en un punto sobre el eje  $x$ , como función de  $x$ . (b) Encuentre el campo en  $x = 36.0 \text{ cm}$ . (c) ¿En qué posición el campo es  $1.00 \hat{i} \text{ kN/C}$ ? Es posible que necesite resolver numéricamente una ecuación. (d) ¿En qué posición el campo es  $16.0 \hat{i} \text{ kN/C}$ ?
50. **S** **Problema de repaso.** Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, como se observa en la figura P22.50, donde  $\theta$  es pequeña. La separación entre cargas es  $2a$ , y cada una de las dos partículas tiene masa  $m$ . (a) Suponiendo que el dipolo es liberado de su posición, demuestre que su orientación angular exhibe un movimiento armónico simple con una frecuencia

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{qE}{ma}}$$

- ¿Qué pasaría si? (b) Suponga que las masas de las dos partículas cargadas en el dipolo no son iguales a pesar de que cada partícula sigue teniendo carga  $q$ . Sean  $m_1$  y  $m_2$  las masas de las partículas. Demuestre que la frecuencia de la oscilación en este caso es

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{qE(m_1 + m_2)}{2am_1m_2}}$$

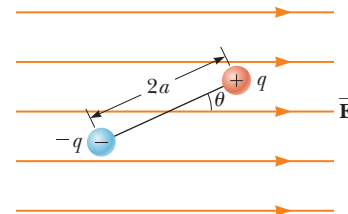


Figura P22.50







## Distribuciones continuas de carga y ley de Gauss

**IMAGINE** ¡Son las vacaciones de primavera! Ha organizado viajar

a Florida con algunos compañeros para una escapada de vacaciones. Cuando aterriza su avión, nota algunas nubes de tormenta en la distancia y luego ve algún rayo. Debido a que los relámpagos son relativamente raros en el sur de California, le fascina ver los destellos brillantes, y tal vez se preocupa un poco. Después de instalarse en su alojamiento, está caminando alrededor de un gran parque cuando la tormenta eléctrica se acerca al lugar en el que se encuentra usted. Desea volver corriendo a la entrada del parque para evitar el rayo, pero debe pasar por un “portal lunar” circular como se muestra en la fotografía. Usted ha leído que el suelo obtiene una gran carga durante una tormenta eléctrica y le preocupa que el portal metálico también tenga carga, ya que está conectado al suelo. Si el portal tiene una carga en él, esa carga creará un campo eléctrico. ¿Podría ser peligroso? ¿Qué sería lo más seguro para usted? ¿Debe atravesar el portal o intentar evitarlo?

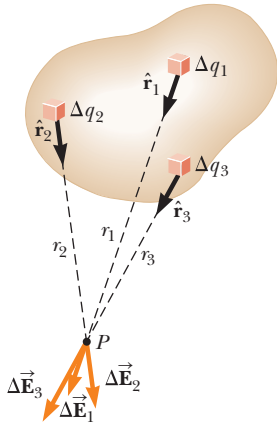
**CONEXIONES** En el capítulo 22, mostramos cómo evaluar el campo eléctrico debido a una carga puntual o a una colección de un número relativamente pequeño de cargas puntuales. En este capítulo, imaginamos una distribución continua de cargas: una cantidad de cargas tan grande que la distribución puede considerarse continua, como la distribución de cargas en el portal lunar en la fotografía de apertura. Descubrimos en este capítulo dos formas de evaluar el campo eléctrico debido a una distribución continua de carga. Una forma es usar el principio de superposición de la ecuación 22.10. La suma en esa ecuación se convertirá en una integral sobre la distribución. El segundo medio para encontrar el campo eléctrico para ciertos tipos de

El relámpago es un ejemplo dramático de electricidad en la naturaleza. Si estás en una tormenta eléctrica, ¿deberías caminar a través de la puerta circular de metal? (Cortesía de [straysparks.com](http://straysparks.com))

- 23.1 Campo eléctrico de una distribución continua de carga
- 23.2 Flujo eléctrico
- 23.3 Ley de Gauss
- 23.4 Aplicación de la ley de Gauss a varias distribuciones de carga



distribuciones continuas de carga es usar la ley de Gauss. La ley de Gauss se basa en el comportamiento del cuadrado inverso de la fuerza eléctrica entre cargas puntuales. Aunque la ley de Gauss es una consecuencia directa de la ley de Coulomb, es más conveniente para calcular los campos eléctricos de distribuciones de carga altamente simétricas y permite tratar problemas complicados utilizando el razonamiento cualitativo. Esta nueva herramienta se agregará a nuestro conjunto de técnicas para usar en la evaluación de campos eléctricos y se puede usar en capítulos futuros cada vez que nos encontremos con el campo eléctrico debido a una distribución simétrica continua de carga.



**Figura 23.1** El campo eléctrico en  $P$  debido a una distribución de carga continua es la suma vectorial de los campos  $\Delta\vec{E}_i$  debido a todos los elementos  $\Delta q_i$  de la distribución de carga. Se muestran tres elementos de muestra.

## 23.1 Campo eléctrico de una distribución de carga continua

En el capítulo 22, investigamos los campos eléctricos debido a las cargas puntuales y los efectos de los campos eléctricos externos en las cargas puntuales. La ecuación 22.10 es útil para calcular el campo eléctrico debido a un pequeño número de cargas. En muchos casos, tenemos una distribución continua de carga en vez de una colección de cargas discretas. En esta situación, la carga puede ser descrita como continuamente distribuida a lo largo de alguna recta, sobre alguna superficie, o por todo un volumen.

Para establecer el proceso de evaluación del campo eléctrico producido por una distribución de carga continua, utilice el siguiente procedimiento: primero, divida la distribución de cargas en pequeños elementos, cada uno con una pequeña carga  $\Delta q$ , como se observa en la figura 23.1. Después, aplique la ecuación 22.9 para calcular el campo eléctrico debido a uno de estos elementos en el punto  $P$ . Por último, evalúe el campo eléctrico total en  $P$  debido a la distribución de carga sumando las contribuciones de todos los elementos de carga (es decir, aplicando el principio de superposición).

El campo eléctrico en  $P$  debido a un elemento de carga con una carga  $\Delta q$  es

$$\Delta\vec{E} = k_e \frac{\Delta q}{r^2} \hat{r}$$

donde  $r$  es la distancia desde el elemento de carga hasta el punto  $P$  y  $\hat{r}$  es el vector unitario dirigido desde el elemento de carga hasta  $P$ . El campo eléctrico total en  $P$  debido a todos los elementos en la distribución de carga es aproximadamente

$$\vec{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

donde el índice  $i$  se refiere al  $i$ -ésimo elemento de orden  $i$  en la distribución. Ya que el número de elementos es muy grande y la distribución de carga ha sido modelada como continua, el campo total en  $P$  en el límite  $\Delta q_i \rightarrow 0$  es

$$\vec{E} = k_e \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (23.1)$$

donde la integración es sobre toda la distribución de carga. La integración en la ecuación 23.1 es una operación vectorial y debe ser tratada en forma apropiada.

Este tipo de cálculo se ilustra con varios ejemplos en los que la carga está distribuida a lo largo de una recta, sobre una superficie, o en un volumen. Cuando realice estos cálculos es conveniente que use el concepto de *densidad de carga* junto con las siguientes observaciones:

- Si una carga  $Q$  está uniformemente distribuida en un volumen  $V$ , la **densidad de carga volumétrica**  $\rho$  se define como

$$\rho \equiv \frac{Q}{V}$$

donde  $\rho$  está en coulombs por metro cúbico ( $C/m^3$ ).

Campo eléctrico debido a una distribución continua de carga

Densidad de carga volumétrica



- Si una carga  $Q$  está uniformemente distribuida sobre una superficie de área  $A$ , la **densidad de carga superficial**  $\sigma$  (griega minúscula sigma) se define como

$$\sigma \equiv \frac{Q}{A}$$

◀ Densidad de carga superficial

donde  $\sigma$  está en coulombs por metro cuadrado ( $C/m^2$ ).

- Si una carga  $Q$  está uniformemente distribuida a lo largo de una recta de longitud  $\ell$ , la **densidad de carga lineal**  $\lambda$  se define como

$$\lambda \equiv \frac{Q}{\ell}$$

◀ Densidad de carga lineal

donde  $\lambda$  está en coulombs por metro ( $C/m$ ).

- Si la carga no está uniformemente distribuida en un volumen, superficie o línea, las cantidades de cargas  $dq$  en un elemento pequeño de volumen, superficie o longitud son

$$dq = \rho dV \quad dq = \sigma dA \quad dq = \lambda d\ell$$

## ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Cálculo del campo eléctrico**

Se le recomienda el siguiente procedimiento para resolver problemas que incluyen la determinación de un campo eléctrico debido a cargas individuales o una distribución de carga:

**1. Conceptualizar.** Establezca una representación mental del problema: piense cuidadosamente en las cargas individuales o en la distribución de carga e imagine qué tipo de campo eléctrico produciría. Recorra a cualquier simetría en el arreglo de cargas para ayudarse a visualizar el campo eléctrico.

**2. Categorizar.** ¿Analice un grupo de cargas individuales o una distribución continua de carga? La respuesta a esta pregunta le dice cómo proceder en la etapa Analizar.

**3. Analizar.**

(a) Si analiza un grupo de cargas individuales use el principio de superposición: cuando están presentes varias cargas puntuales, el campo resultante en un punto en el espacio es la *suma vectorial* de los campos individuales debidos a las cargas individuales (ecuación 23.1). Tenga mucho cuidado con la manipulación de las cantidades vectoriales. Puede serle útil revisar la suma vectorial en el capítulo 3. El ejemplo 22.6 del capítulo anterior demuestra este procedimiento.

(b) Si analiza una distribución continua de carga se utiliza el principio de superposición sustituyendo las sumas vectoriales para el campo eléctrico total de las cargas individuales mediante integrales vectoriales. La distribución de carga se divide en piezas infinitesimales, y la suma vectorial se realiza al integrar sobre toda la distribución de carga (ecuación 23.1). Los ejemplos del 23.1 al 23.3 demuestran estos procedimientos.

Considere que hay simetría cuando trate con una distribución de cargas puntuales o con una distribución de carga continua. Saque ventaja de cualquier simetría en el sistema que observe la etapa Conceptualizar para simplificar sus cálculos. La cancelación de las componentes de campo perpendiculares al eje en el ejemplo 23.2 es un ejemplo de la aplicación de simetría.

**4. Finalizar.** Compruebe para ver si su expresión de campo eléctrico es consistente con su representación mental y si refleja alguna simetría que notara anteriormente. Imagine parámetros variables como la distancia del punto de observación desde las cargas o el radio de cualquier objeto circular para ver si el resultado matemático cambia en una forma razonable.



### Ejemplo 23.1 Campo eléctrico debido a una barra cargada

Una barra de longitud  $\ell$  tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud  $\lambda$  y una carga total  $Q$ . Calcule el campo eléctrico en un punto  $P$  que se ubica a lo largo del eje largo de la barra y a una distancia  $a$  desde un extremo (figura 23.2).

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El campo  $d\vec{E}$  en  $P$  debido a cada segmento de carga sobre la barra está en la dirección  $x$  negativa, porque cada segmento porta una carga positiva. La figura 23.2 muestra la geometría apropiada. En nuestro resultado, esperamos que el campo eléctrico se vuelva menor a medida que la distancia  $a$  se hace más grande porque el punto  $P$  está más lejos de la distribución de carga.

**Categorizar** Ya que la barra es continua, se evalúa el campo debido a una distribución de carga continua en lugar de hacia un grupo de cargas individuales. Ya que cada segmento de la barra produce un campo eléctrico en la dirección  $x$  negativa, el vector suma de sus aportaciones es fácil de determinar.

**Analizar** Suponga que la barra se encuentra a lo largo del eje  $x$ ,  $dx$  es la longitud de un segmento pequeño y  $dq$  es la carga sobre dicho segmento. Como la barra tiene una carga por unidad de longitud  $\lambda$ , la carga  $dq$  sobre el pequeño segmento es  $dq = \lambda dx$ .

Encuentre la magnitud del campo eléctrico en  $P$  debido a un segmento de la barra que tenga una carga  $dq$ :

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2} = k_e \frac{\lambda dx}{x^2}$$

Encuentre el campo total en  $P$  usando la ecuación 23.1:

$$E = \int_a^{\ell+a} k_e \lambda \frac{dx}{x^2}$$

Observe que  $k_e$  y  $\lambda = Q/\ell$  son constantes y se pueden verificar de la integral; evalúe la integral:

$$E = k_e \lambda \int_a^{\ell+a} \frac{dx}{x^2} = k_e \lambda \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^{\ell+a}$$

$$(1) \quad E = k_e \frac{Q}{\ell} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\ell + a} \right) = \frac{k_e Q}{a(\ell + a)}$$

**Finalizar** Vemos que nuestra predicción es correcta; si  $a$  se hace más grande, el denominador de la fracción se hace más grande, y  $E$  se hace más pequeño. Por otro lado, si  $a \rightarrow 0$ , que corresponde a la barra deslizante a la izquierda hasta que su extremo izquierdo está en el origen, entonces  $E \rightarrow \infty$ . Esto representa la condición en la que el punto de observación  $P$  está en cero la distancia de la carga al final de la varilla, por lo que el campo se hace infinito. A continuación exploramos grandes valores de  $a$ .

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que el punto  $P$  está muy lejos de la barra. ¿Cuál es la naturaleza del campo eléctrico en tal punto?

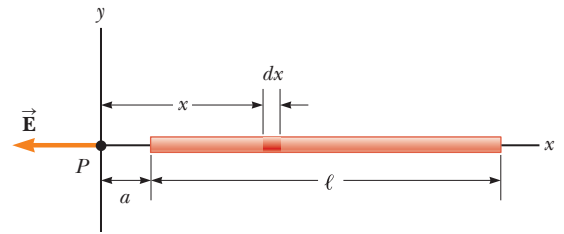
**Respuesta** Si  $P$  está lejos de la barra ( $a \gg \ell$ ), entonces se puede ignorar  $\ell$  en el denominador de la ecuación 1) y  $E \approx k_e Q/a^2$ . Ésta es exactamente la forma que esperaría para una carga puntual. Por tanto, a valores grandes de  $a/\ell$ , la distribución de carga parece ser una carga puntual de magnitud  $Q$ ; el punto  $P$  está tan lejos de la barra que no es posible distinguir si tiene un tamaño. El uso de la técnica límite ( $a/\ell \rightarrow \infty$ ) con frecuencia es un buen método para comprobar una expresión matemática.

### Ejemplo 23.2 Campo eléctrico de un anillo de carga uniforme

Un anillo de radio  $a$  porta una carga total positiva uniformemente distribuida. Calcule el campo eléctrico debido al anillo en un punto  $P$  que se encuentra a una distancia  $x$  de su centro, a lo largo del eje central perpendicular al plano del anillo (figura 23.3a).

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 23.3a muestra la contribución del campo eléctrico  $d\vec{E}$  en  $P$  debido a un solo segmento de carga en lo alto del anillo. Este vector de campo se puede resolver en sus componentes  $dE_x$  paralelas al eje del anillo y  $dE_{\perp}$  perpendicular al eje.



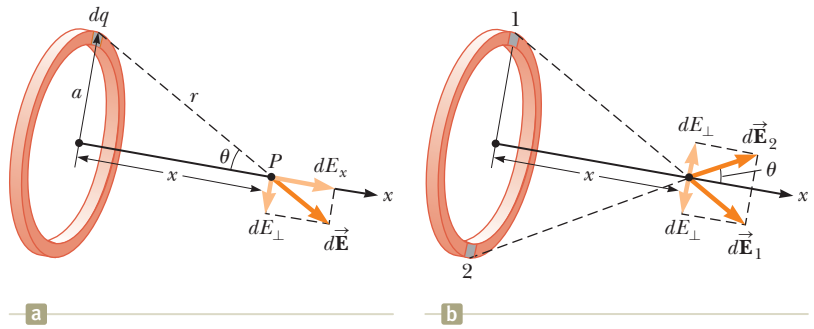
**Figura 23.2** (Ejemplo 23.1) El campo eléctrico en  $P$  debido a una varilla con carga uniforme que se extiende a lo largo del eje  $x$ . Elegimos la ubicación del punto  $P$  como el origen.

<sup>1</sup>Para realizar integraciones de este tipo, primero exprese el elemento de carga  $dq$  en términos de las otras variables en la integral. (En este ejemplo, hay una variable,  $x$ , así que se hace el cambio  $dq = \lambda dx$ .) La integral debe ser sobre cantidades escalares; por tanto, exprese el campo eléctrico en términos de componentes, si es necesario. (En este ejemplo, el campo sólo tiene una componente  $x$ , así que ese detalle no es preocupante.) Luego, reduzca su expresión a una integral sobre una sola variable (o multiplique integrales, cada una sobre una sola variable). En los ejemplos que tienen simetría esférica o cilíndrica, la única variable es una coordenada radial.

## 23.2 continuación

La figura 23.3b muestra las aportaciones del campo eléctrico de dos segmentos en lados opuestos del anillo. Debido a la simetría de la situación, las componentes perpendiculares  $dE_{\perp}$  del campo se cancelan. Esto es cierto para todos los pares de segmentos alrededor del anillo, así que puede ignorar la componente perpendicular del campo y concentrarse en las componentes paralelas  $dE_x$ , que simplemente se suman.

**Categorizar** Ya que el anillo es continuo, se evalúa el campo debido a una distribución de carga continua en lugar de un grupo de cargas individuales.



**Figura 23.3** (Ejemplo 23.2) Anillo uniformemente cargado con radio  $a$ . (a) El campo en  $P$  sobre el eje de las  $x$  se debe a un elemento de carga  $dq$ . (b) El campo eléctrico total en  $P$  se encuentra a lo largo del eje de las  $x$ . La componente perpendicular del campo en  $P$  debida al segmento 1 es cancelada por la componente perpendicular correspondiente debida al segmento 2.

**Analizar** Evalúe la componente paralela de una contribución de campo eléctrico de un segmento de carga  $dq$  sobre el anillo:

A partir de la geometría en la figura 23.3a, evalúe  $\cos \theta$ :

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1):

Todos los segmentos del anillo realizan la misma aportación al campo en  $P$  porque todos son equidistantes a este punto. Integre para obtener el campo total en  $P$ :

$$(1) \quad dE_x = k_e \frac{dq}{r^2} \cos \theta = k_e \frac{dq}{a^2 + x^2} \cos \theta$$

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$dE_x = k_e \frac{dq}{a^2 + x^2} \left[ \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \right] = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dq$$

$$E_x = \int \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dq = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int dq$$

$$(3) \quad E = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} Q$$

**Finalizar** El campo eléctrico en  $P$  es de esta magnitud y se dirige a lo largo del eje  $x$ , lejos del anillo. Este resultado muestra que el campo es cero en  $x = 0$ . ¿Esto es consistente con la simetría del problema? Además, observe que la ecuación (3) se reduce a  $k_e Q/x^2$  si  $x \gg a$ , de modo que el anillo actúa como una carga puntual para posiciones alejadas del anillo. Desde un punto lejano, no podemos distinguir la forma del anillo de la carga.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que coloca una carga negativa en el centro del anillo en la figura 23.3 y la desplaza ligeramente una distancia  $x \ll a$  a lo largo del eje  $x$ . Cuando libera la carga, ¿qué tipo de movimiento muestra?

**Respuesta** En la expresión para el campo debido a un anillo de carga, sea  $x \ll a$ , lo que resulta en

$$E_x = \frac{k_e Q}{a^3} x$$

Por tanto, de la ecuación 22.8, la fuerza sobre la carga  $-q$  colocada cerca del centro del anillo es

$$F_x = -\frac{k_e q Q}{a^3} x$$

Ya que esta fuerza tiene la forma de la ley de Hooke (ecuación 15.1), ¿el movimiento de la carga negativa se describe con el modelo de una partícula en un movimiento armónico simple!

El ejemplo 23.2 se relaciona con nuestra historia de apertura. Queríamos saber si la región dentro del portal lunar circular estaría a salvo si se cargara el metal del portal. La ecuación (3) en el ejemplo 23.2 muestra que el campo eléctrico es cero en el centro exacto de un anillo del portal lunar. ¡La fotografía de apertura muestra dos anillos en el portal lunar, por lo que puede experimentar un campo cero en el centro de uno, pero experimentará un campo distinto de cero del otro! También experimentará un campo radial en puntos distintos al centro exacto del portal, pero estos campos serán pequeños en magnitud. Al acercarse al portal lunar, experimentará un valor máximo del campo eléctrico en el eje del anillo en un punto a una distancia  $a/2^{1/2}$  del centro del anillo, como se muestra en el problema 40. Por tanto, para llegar al campo cero dentro del anillo, tiene que pasar por un valor máximo. ¡Tal vez la mejor opción es tomarse un poco más de tiempo y correr alrededor del portal!



### Ejemplo 23.3 Campo eléctrico de un disco uniformemente cargado

Un disco de radio  $R$  tiene una densidad de carga superficial uniforme  $\sigma$ . Calcule el campo eléctrico en un punto  $P$  que se encuentra a lo largo del eje perpendicular central del disco y a una distancia  $x$  del centro del disco (figura 23.4).

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Si considera al disco como un conjunto de anillos concéntricos, puede usar el resultado del ejemplo 23.2, que da el campo producido por un anillo de radio  $a$  y sumar las aportaciones de todos los anillos que constituyen el disco. Por simetría, el campo en un punto axial debe estar a lo largo del eje central.

**Categorizar** Dado que el disco es continuo, se evalúa el campo debido a una distribución de carga continua en vez de un grupo de cargas individuales.

**Analizar** Encuentre la cantidad de carga  $dq$  sobre el área superficial de un anillo de radio  $r$  y ancho  $dr$ , como se muestra en la figura 23.4:

Use este resultado en la ecuación dada para  $E_x$  en el ejemplo 23.2 (sustituya  $a$  con  $r$  y  $Q$  con  $dq$ ) para encontrar el campo debido al anillo:

Para obtener el campo total en  $P$ , integre esta expresión en los límites  $r = 0$  a  $r = R$ , y note que  $x$  es una constante en esta situación:

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr) = 2\pi\sigma r dr$$

$$dE_x = \frac{k_e x}{(r^2 + x^2)^{3/2}} (2\pi\sigma r dr)$$

$$E_x = k_e x \pi \sigma \int_0^R \frac{2r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$= k_e x \pi \sigma \int_0^R (r^2 + x^2)^{-3/2} d(r^2)$$

$$= k_e x \pi \sigma \left[ \frac{(r^2 + x^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_0^R = 2\pi k_e \sigma \left[ 1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right]$$

**Finalizar** Este resultado es válido para todos los valores  $x > 0$ . Para grandes valores de  $x$ , el resultado anterior se puede evaluar con un desarrollo en series y mostrar la equivalencia con el campo eléctrico de una carga puntual. Es posible calcular el campo cerca del disco a lo largo del eje al suponer que  $x \ll R$ ; debido a eso, la expresión entre corchetes se reduce a la unidad para dar la aproximación cercana al campo

$$E = 2\pi k_e \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre.

#### ¿QUÉ PASARÍA SI?

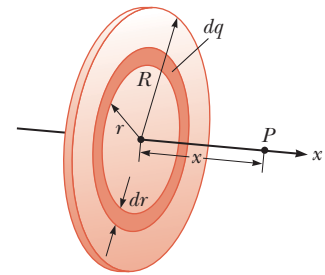
¿Y si hacemos que el radio del disco crezca para que el disco se convierta en un plano infinito de carga?

**Respuesta** El resultado de hacer que  $R \rightarrow \infty$  en el resultado final de este ejemplo es que la magnitud del campo eléctrico resulta

$$E = 2\pi k_e \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Esta es la misma expresión que hemos obtenido para  $x \ll R$ . Si  $R \rightarrow \infty$ , en *todas partes* del campo cercano —el resultado es independiente de la posición en la que se mide el campo eléctrico. Por tanto, el campo eléctrico debido a un plano infinito de carga es uniforme en todo el espacio.

Un plano infinito de carga es imposible en la práctica. Sin embargo, si dos planos de carga se colocan cerca uno del otro, con un plano cargado positivamente y el otro negativamente, el campo eléctrico entre las placas está muy cerca de ser uniforme en puntos alejados de los bordes. Tal configuración se investigará en el capítulo 25.



**Figura 23.4** (Ejemplo 23.3) Un disco de radio  $R$  uniformemente cargado. El campo eléctrico en un punto axial  $P$  se dirige a lo largo del eje central, perpendicular al plano del disco.

## 23.2 Flujo eléctrico

En el capítulo 22 se describe de manera cualitativa el concepto de líneas de campo eléctrico. Ahora conviene ocuparse de las líneas de campo eléctrico con un enfoque más cuantitativo.

Considere un campo eléctrico que es uniforme tanto en magnitud como en dirección, similar al que se muestra en la figura 23.5. Las líneas de campo penetran en una





superficie rectangular de área  $A$ , cuyo plano tiene una orientación perpendicular al campo. Recuerde de la sección 22.5 que el número de líneas por unidad de área (la *densidad de líneas*) es proporcional a la magnitud del campo eléctrico. Por tanto, el número total de líneas que penetran en la superficie es proporcional al producto  $EA$ . A este producto de la magnitud del campo eléctrico  $E$  y al área superficial  $A$ , perpendicular al campo, se le conoce como **flujo eléctrico**  $\Phi_E$  (phi mayúscula):

$$\Phi_E = EA \tag{23.2}$$

Con base en las unidades del SI correspondientes a  $E$  y  $A$ , vemos que  $\Phi_E$  se expresa en newtons por metros al cuadrado entre coulomb ( $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ ).

Si la superficie en cuestión no es perpendicular al campo, el flujo que pasa a través de él debe ser menor que el resultante si se utiliza la ecuación 23.2. Considere la figura 23.6, donde la normal en relación con la superficie  $A$  forma un ángulo  $\theta$  con el campo eléctrico uniforme. Observe que el número de líneas que atraviesan el área  $A$  es igual al número de líneas que atraviesa el área  $A_\perp$ , la cual es una proyección del área  $A$  a un plano con orientación perpendicular al campo. El área  $A$  es el producto del largo y el ancho de la superficie:  $A = \ell w$ . En el borde izquierdo de la figura, vemos que el ancho de las superficies están relacionados por  $w_\perp = w \cos \theta$ . El área  $A_\perp$  está dada por  $A_\perp = \ell w_\perp = \ell w \cos \theta$ , entonces vemos que ambas áreas están relacionadas por la fórmula  $A_\perp = A \cos \theta$ . Dado que el flujo que atraviesa  $A$  es igual al flujo que atraviesa  $A_\perp$ , entonces el flujo que pasa a través de  $A$  es

$$\Phi_E = EA_\perp = EA \cos \theta \tag{23.3}$$

A partir de este resultado, se observa que el flujo que atraviesa una superficie de área fija tiene un valor máximo  $EA$  cuando la superficie es perpendicular al campo (cuando la normal de la superficie es paralela al campo,  $\theta = 0^\circ$  en la figura 23.6); el flujo es cero si la superficie es paralela al campo (cuando la normal de la superficie es perpendicular al campo,  $\theta = 90^\circ$ ).

En esta discusión, el ángulo  $\theta$  se utiliza para describir la orientación de la superficie de área  $A$ . También podemos interpretarlo como el ángulo entre el vector de campo eléctrico y la normal a la superficie. En este caso, el producto  $E \cos \theta$  en la ecuación 23.3 es el componente del campo eléctrico perpendicular a la superficie. A continuación, el flujo a través de la superficie se puede escribir  $\Phi_E = (E \cos \theta)A = E_n A$ , donde utilizamos  $E_n$  como el componente del campo eléctrico normal a la superficie.

En la explicación anterior se ha supuesto un campo eléctrico uniforme. En situaciones más generales, el campo eléctrico varía a lo largo de una superficie. Por tanto, la definición de flujo dada en la ecuación 23.3 tiene significado sólo para un elemento de área pequeño sobre el cual el campo es casi constante. Considere una superficie general dividida en un gran número de elementos pequeños, cada uno de área  $\Delta A_i$ . Es conveniente definir un vector  $\Delta \vec{A}_i$  cuya magnitud representa el área del  $i$ -ésimo elemento de la gran superficie y cuya dirección está definida como *perpendicular* al elemento de superficie, como se muestra en la figura 23.7. El campo eléctrico  $\vec{E}_i$  en la ubicación de este elemento forma un ángulo  $\theta_i$  con el vector  $\Delta \vec{A}_i$ . El flujo eléctrico  $\Phi_{E_i}$  a través de este elemento es

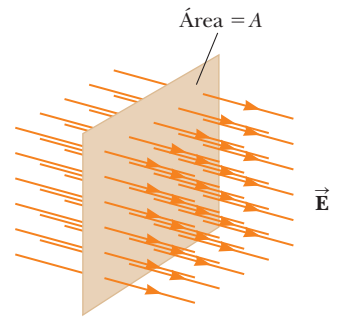
$$\Phi_{E_i} = E_i \Delta A_i \cos \theta_i = \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$$

donde se ha utilizado la definición de producto escalar de dos vectores ( $\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB \cos \theta$ , véase la sección 7.3). Al sumar las contribuciones de todos los elementos, se obtiene una aproximación del flujo total a través de la superficie.

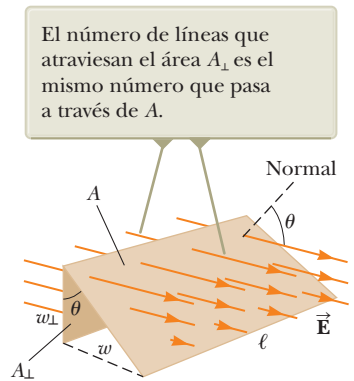
$$\Phi_E \approx \sum \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$$

Si el área de cada elemento se acerca a cero, el número de elementos se acercaría al infinito y la suma se reemplaza por una integral. Por tanto, la definición general del flujo eléctrico es

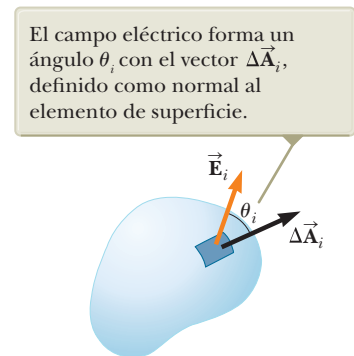
$$\Phi_E \equiv \int_{\text{Superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \tag{23.4}$$



**Figura 23.5** Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme que penetra en un plano de área  $A$  perpendicular al campo



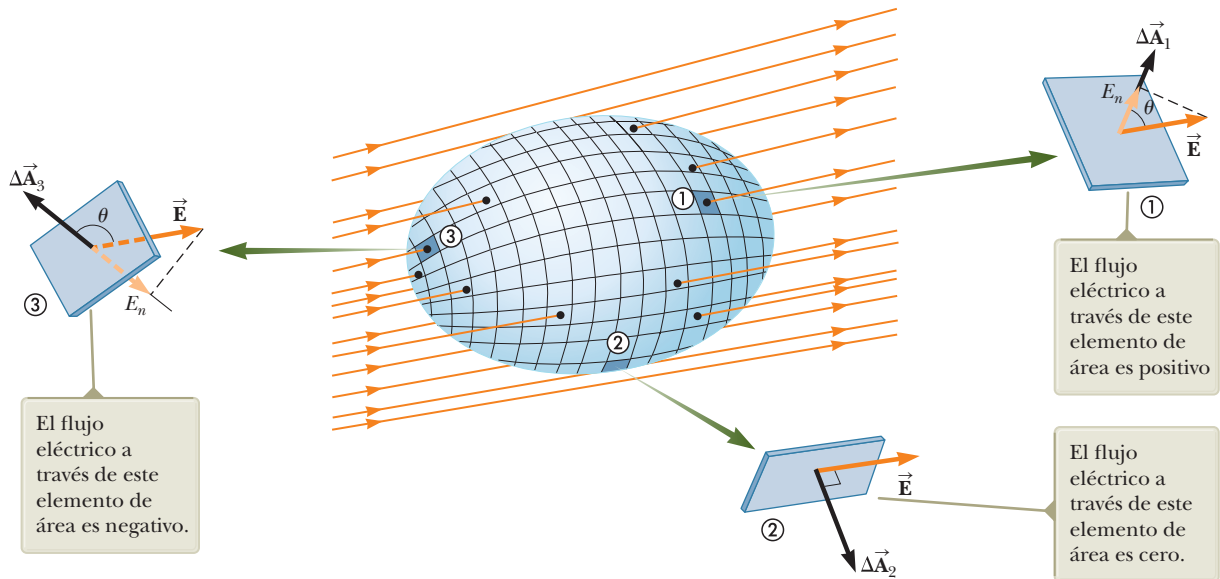
**Figura 23.6** Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme que penetra en un área  $A$  cuya normal forma un ángulo  $\theta$  en relación con el campo.



**Figura 23.7** Pequeño elemento de área superficial  $\Delta A_i$  en un campo eléctrico.

◀ Definición de flujo eléctrico





**Figura 23.8** Superficie cerrada dentro de un campo eléctrico. Los vectores de área son, por convención, normales a la superficie y apuntan hacia afuera.

La ecuación 23.4 es una *integral de superficie*, lo que significa que debe ser evaluada sobre la superficie en cuestión. En general, el valor de  $\Phi_E$  depende tanto del patrón de campo como de la superficie.

A menudo es de interés la evaluación del flujo que pasa a través de una *superficie cerrada*, misma que se define como aquella que divide el espacio en una región exterior y una interior, de manera que no es posible pasar de una región a la otra sin atravesarla. Por ejemplo, la superficie de una esfera tiene una superficie cerrada. Por convención, si el elemento de área en la ecuación 23.4 es parte de una superficie cerrada, la dirección del vector de área es elegida de tal manera que el vector apunte hacia afuera de la superficie. Si el elemento de área no es parte de una superficie cerrada, la dirección del vector de área es elegida de tal manera que el ángulo entre el vector de área y el campo eléctrico sea menor o igual a  $90^\circ$ .

Considere la superficie cerrada de la figura 23.8. Los vectores  $\Delta\vec{A}_i$  apuntan en direcciones diferentes para diferentes elementos de superficies, pero cada uno de ellos es normal a la superficie y siempre apuntan hacia afuera. En el elemento etiquetado como ①, las líneas de campo cruzan la superficie del lado interno al externo y  $\theta < 90^\circ$ ; por tanto, el flujo  $\Phi_{E,1} = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_1$  a través de este elemento es positivo. Por lo que se refiere al elemento ②, las líneas de campo rozan la superficie (perpendicular al vector  $\Delta\vec{A}_2$ ); por tanto  $\theta = 90^\circ$  y el flujo es igual a cero. Para elementos como el ③, donde las líneas de campo atraviesan la superficie del exterior al interior,  $180^\circ > \theta > 90^\circ$  y el flujo es negativo porque el  $\cos \theta$  también es negativo. El flujo *neto* a través de la superficie es proporcional al número neto de líneas que salen de la superficie, donde número neto significa *el número de líneas que salen de la superficie menos el número de líneas que entran*. Si salen más líneas de las que entran, el flujo neto es positivo. Si entran más líneas de las que salen, el flujo neto es negativo. Utilizando el símbolo  $\oint$  para representar una integral sobre una superficie cerrada, puede decir que el flujo neto  $\Phi_E$  a través de una superficie cerrada como

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA \quad (23.5)$$

donde  $E_n$  representa la componente del campo eléctrico normal a la superficie.

- E XAMEN RÁPIDO 23.1** Suponga que una carga puntual se ubica en el centro de una superficie esférica y que están determinados el campo eléctrico en la superficie de la esfera y el flujo total a través de la esfera. Ahora el radio de la esfera se reduce a la mitad. ¿Qué sucede con el flujo a través de la esfera y la magnitud del campo eléctrico en la superficie de la esfera? (a) El flujo y el campo aumentan. (b) El flujo y el campo disminuyen. (c) El flujo aumenta y el campo disminuye. (d) El flujo disminuye y el campo aumenta. (e) El flujo permanece igual y el campo aumenta. (f) El flujo disminuye y el campo permanece igual.

**Ejemplo 23.4** Flujo a través de un cubo

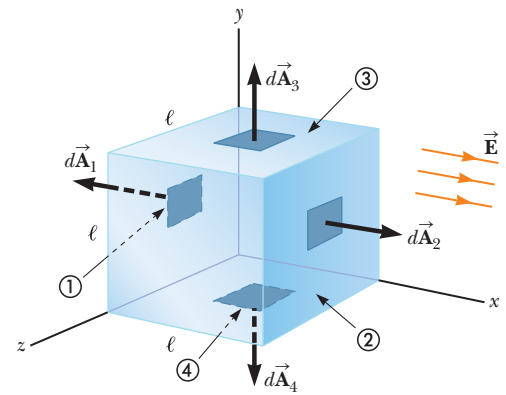
Considere un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  orientado en la dirección  $x$  en el espacio vacío. Un cubo con arista  $\ell$  es colocado en el campo, orientado como se muestra en la figura 23.9. Encuentre el flujo eléctrico neto a través de la superficie del cubo.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Examine con cuidado la figura 23.9. Observe que las líneas de campo eléctrico pasan perpendiculares a través de dos caras y son paralelas a las cuatro caras restantes del cubo.

**Categorizar** Evalúe el flujo a partir de su definición, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

El flujo a través de cuatro de las caras (③, ④ y las no numeradas) es cero porque  $\vec{E}$  es paralelo a las cuatro caras y por tanto perpendicular a  $d\vec{A}$  sobre estas caras.



**Figura 23.9** (Ejemplo 23.4) Superficie cerrada con forma de cubo en un campo eléctrico uniforme con orientación paralela al eje  $x$ . El lado ④, es la parte baja del cubo, y el lado ①, es el lado opuesto a ②.

Escriba las integrales para el flujo neto a través de las caras ① y ②:

$$\Phi_E = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Para la cara ①,  $\vec{E}$  es constante y se dirige hacia adentro, pero  $d\vec{A}_1$  se dirige hacia afuera ( $\theta = 180^\circ$ ). Encuentre el flujo a través de esta cara:

$$\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_1 E(\cos 180^\circ) dA = -E \int_1 dA = -EA = -E\ell^2$$

Para la cara ②,  $\vec{E}$  es constante y hacia afuera en la misma dirección que  $d\vec{A}_2$  ( $\theta = 0^\circ$ ). Encuentre el flujo a través de esta cara:

$$\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_2 E(\cos 0^\circ) dA = E \int_2 dA = +EA = E\ell^2$$

Encuentre el flujo neto al sumar el flujo sobre las seis caras:

$$\Phi_E = -E\ell^2 + E\ell^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

En la siguiente sección, generamos un principio fundamental que explica este valor cero.

**23.3 Ley de Gauss**

En esta sección se describe una relación general entre el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada (con frecuencia llamada *superficie gaussiana*) y la carga encerrada en la superficie. Esta relación, conocida como *ley de Gauss*, es de importancia fundamental en el estudio de los campos eléctricos.

Suponga una carga puntual positiva  $q$  ubicada en el centro de una esfera de radio  $r$ , como se observa en la figura 23.10. De la ecuación 22.9, se sabe que la magnitud del campo eléctrico sobre todos los puntos de la superficie de la esfera es  $E = k_e q/r^2$ . Las líneas de campo están dirigidas radialmente hacia afuera y por tanto son perpendiculares a la superficie en todos sus puntos. Es decir, en cada punto de la superficie,  $\Delta\vec{A}_i$  es paralelo al vector  $\vec{E}$  que representa un elemento de área local  $\Delta A_i$  que rodea al punto en la superficie. Por tanto,

$$\vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_i = E \Delta A_i$$

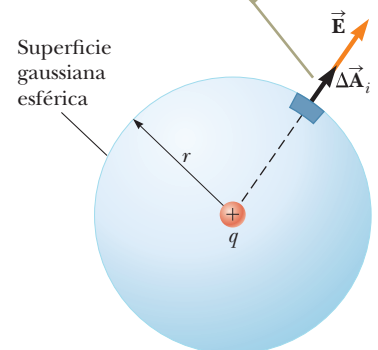
y por la ecuación 23.5 encuentra que el flujo neto a través de la superficie gaussiana es igual a

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA$$

donde se ha retirado  $E$  afuera de la integral ya que, por simetría,  $E$  es constante en la superficie y se conoce por  $E = k_e q/r^2$ . Además, en vista de que la superficie es esférica,  $\oint dA = A = 4\pi r^2$ . Por tanto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi_E = k_e \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi k_e q$$

Cuando la carga está en el centro de la esfera, el campo eléctrico es normal a la superficie en todos los puntos y de magnitud constante.



**Figura 23.10** Superficie gaussiana esférica de radio  $r$  que rodea una carga puntual  $q$ .





Photo Researchers/Alamy

**Karl Friedrich Gauss**  
Matemático y astrónomo alemán (1777-1855)

En 1799 Karl Friedrich Gauss obtuvo un doctorado en matemáticas por la Universidad de Helmstedt. Además de su trabajo en el área del electromagnetismo, contribuyó en los campos de las matemáticas y la ciencia en la teoría de números, la estadística, la geometría no euclidiana y en la mecánica orbital de los cometas. Fue uno de los fundadores de la German Magnetic Union, la cual estudia en forma continua el campo magnético de la Tierra.

Recuerde de la sección 22.3 que  $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$ , lo que permite escribir esta ecuación de la forma

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{23.6}$$

Observe en la ecuación 23.6 que el flujo neto a través de la superficie esférica es proporcional a la carga existente en el interior. El flujo es independiente del radio  $r$  porque el área de la superficie esférica es proporcional a  $r^2$ , mientras que el campo eléctrico es proporcional a  $1/r^2$ . En consecuencia, en el producto del área y el campo eléctrico, se elimina la dependencia con  $r$ .

Ahora considere varias superficies cerradas que rodean una carga  $q$ , como se muestra en la figura 23.11. La superficie  $S_1$  es esférica pero las superficies  $S_2$  y  $S_3$  no lo son. Por la ecuación 23.6, el flujo que pasa a través de  $S_1$  tiene un valor de  $q/\epsilon_0$ . Como se explicó en la sección anterior, el flujo es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que atraviesan dicha superficie. La construcción de la figura 23.11 muestra que el número de líneas a través de  $S_1$  es igual al número de líneas que pasan a través de las superficies no esféricas  $S_2$  y  $S_3$ . Por tanto,

el flujo neto a través de *cualquier* superficie cerrada que rodea a una carga puntual  $q$  está dado por  $q/\epsilon_0$  y es independiente de la forma de la superficie.

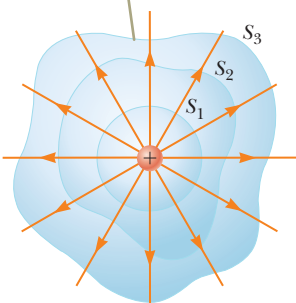
Ahora considere una carga puntual localizada en el *exterior* de una superficie cerrada con forma arbitraria, como se observa en la figura 23.11. Como puede ver, cualquier línea de campo eléctrico que entre en la superficie saldrá de la misma en algún otro punto. El número de líneas de campo eléctrico que entran en la superficie es igual al número de líneas que salen. Por tanto, el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada que no rodea a ninguna carga es igual a cero. Si aplica este resultado al ejemplo 23.4, es fácil constatar que el flujo neto a través del cubo es cero, porque no existe ninguna carga en su interior.

Despliegue estos argumentos a dos casos generalizados: (1) el correspondiente a muchas cargas puntuales y (2) el de una distribución continua de carga. Utilice otra vez el principio de superposición, que dice que el campo eléctrico debido a muchas cargas es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos producidos por cada una de las cargas individuales. Por tanto, puede expresar el flujo a través de cualquier superficie cerrada de la forma

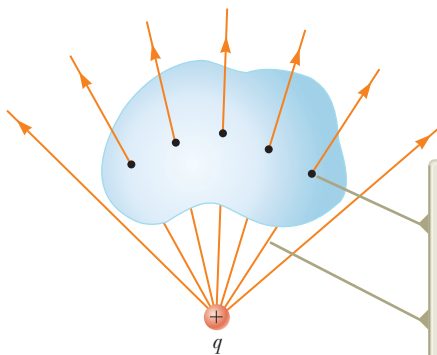
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots) \cdot d\vec{A}$$

donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico total en cualquier punto sobre la superficie, producido por la suma vectorial de los campos eléctricos en dicho punto, debido a las cargas individuales. Considere el sistema de cargas que se muestra en la figura 23.13. La superficie  $S$  rodea únicamente una carga,  $q_1$ ; por lo que el flujo neto a través de  $S$  es  $q_1/\epsilon_0$ . El flujo a través de  $S$  debido a las cargas  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$  exteriores a  $S$  es igual a cero

El flujo eléctrico neto es el mismo a través de todas las superficies.



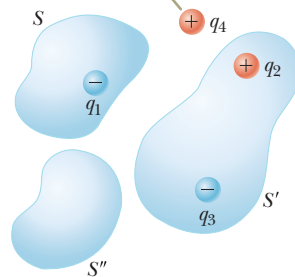
**Figura 23.11** Superficies cerradas de diversas formas que rodean una carga positiva.



El número de líneas que entran a la superficie es igual al número de líneas que salen de la misma.

**Figura 23.12** Carga puntual localizada *fuera* de una superficie cerrada.

La carga  $q_4$  no contribuye al flujo por las superficies, ya que está en el exterior de todas ellas.



**Figura 23.13** El flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada depende sólo de la carga en el *interior* de dicha superficie. El flujo neto a través de la superficie  $S$  es  $q_1/\epsilon_0$ , el flujo neto a través de  $S'$  es  $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$ , y el flujo neto a través de la superficie  $S''$  es igual a cero.

porque cada una de las líneas de campo eléctrico que entran en  $S$  en algún punto salen por otro. La superficie  $S'$  rodea a las cargas  $q_2$  y  $q_3$ ; de ahí que el flujo neto sea igual a  $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$ . Por último, el flujo neto a través de la superficie  $S''$  es igual a cero, ya que no existe carga alguna en su interior. Esto es, *todas* las líneas de campo eléctrico que entran en  $S''$  en algún punto salen por otro. Observe que la carga  $q_4$  no contribuye al flujo neto a través de ninguna de las superficies.

La forma matemática de **ley de Gauss**, es una generalización de lo anterior y establece que el flujo neto a través de *cualquier* superficie cerrada es

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (23.7)$$

donde  $\vec{E}$  representa el campo eléctrico en cualquier punto de la misma y  $q_{\text{int}}$  la carga neta en el interior de la superficie.

Al utilizar la ecuación 23.7, es necesario observar que a pesar de que la carga  $q_{\text{int}}$  es la carga neta en el interior de la superficie gaussiana,  $\vec{E}$  representa el *campo eléctrico total*, que incluye contribuciones de ambas cargas tanto del interior como del exterior de la superficie.

En teoría, la ley de Gauss puede ser resuelta para  $\vec{E}$  para determinar el campo eléctrico debido a un sistema de cargas o a una distribución continua de las mismas, sin embargo, en la práctica, este tipo de solución sólo es aplicable a un número limitado de situaciones muy simétricas. En la siguiente sección se aplica la ley de Gauss para evaluar el campo eléctrico para distribuciones de carga con simetrías esféricas, cilíndricas o planas. Si es posible elegir con cuidado la superficie gaussiana que rodea a la distribución de cargas, la integral de la ecuación 23.7 se puede simplificar y determinar el campo eléctrico.

- E XAMEN RÁPIDO 23.2** Si el flujo neto que pasa a través de una superficie gaussiana es cero, las cuatro declaraciones siguientes *podrían ser verdaderas*. ¿Cuál de ellas es *cierta*? (a) No hay cargas dentro de la superficie. (b) La carga neta dentro de la superficie es cero. (c) El campo eléctrico es cero en cualquier lugar de la superficie. (d) El número de líneas del campo eléctrico que entra a la superficie es igual al número que sale de ella.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 23.1

**Un flujo nulo no significa un campo nulo** Considere dos situaciones en las cuales a través de una superficie cerrada el flujo es cero, ya sea (1) porque no hay partículas cargadas rodeadas por la superficie, o (2) porque existen partículas cargadas rodeadas por la superficie, pero la carga neta interior es cero. En cualquiera de estas situaciones, es *incorrecto* concluir que el campo eléctrico sobre la superficie es igual a cero. La ley de Gauss dice que el *flujo* eléctrico es proporcional a la carga encerrada, no al *campo* eléctrico.

### Ejemplo conceptual 23.5 Flujo debido a una carga puntual

Una superficie gaussiana esférica rodea a una carga puntual  $q$ . Describa qué le sucede al flujo total a través de la superficie, si (A) la carga se triplica, (B) se duplica el radio de la esfera, (C) la superficie se cambia a la forma de un cubo, y (D) la carga se mueve a otro punto dentro de la superficie.

#### SOLUCIÓN

- (A) El flujo que pasa a través de la superficie se triplica ya que el flujo es proporcional a la cantidad de carga dentro de la superficie.
- (B) El flujo no cambia, ya que todas las líneas de campo eléctrico pasan a través de la esfera, cualquiera que sea su radio.
- (C) El flujo no cambia, aun cuando la forma de la superficie gaussiana cambie, ya que todas las líneas de campo eléctrico de la carga pasan a través de la superficie, sin importar su forma.
- (D) El flujo no cambia cuando la carga se pasa a otra ubicación dentro de la superficie, ya que la ley de Gauss se refiere a la carga total encerrada, sin considerar la ubicación de la carga dentro de la superficie.

## 23.4 Aplicación de la ley de Gauss a varias distribuciones de carga

Como se mencionó, la ley de Gauss es útil para determinar campos eléctricos cuando la distribución de carga está caracterizada por un alto grado de simetría. Los ejemplos siguientes muestran cómo escoger la superficie gaussiana que permita simplificar la





### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 23.2

**Las superficies gaussianas no son reales** La superficie gaussiana es una superficie imaginaria que se elige para satisfacer las condiciones mencionadas en este caso. No tiene que coincidir con una superficie física en una situación determinada.

integral de superficie dada por la ecuación 23.7 y determinar el campo eléctrico. Al seleccionar la superficie, siempre debe aprovechar la simetría de la distribución de la carga de manera que retire a  $E$  de la integral y la resuelva. El objetivo en este tipo de cálculo es encontrar una superficie para la que cada parte de la superficie satisfaga una o más de las condiciones siguientes:

1. Demostrar por simetría que el valor del campo eléctrico es constante sobre la porción de superficie.
2. Que el producto punto de la ecuación 23.7 se expresa como un producto algebraico simple  $E dA$ , ya que  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  son paralelos entre sí.
3. Que el producto punto de la ecuación 23.7 es cero, ya que  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  son perpendiculares entre sí.
4. Que el campo eléctrico es igual a cero sobre la porción de superficie.

Diferentes porciones de la superficie gaussiana pueden satisfacer varias condiciones en tanto que cada porción satisfaga al menos una condición. Estas cuatro condiciones son utilizadas en los ejemplos del resto de este capítulo y serán identificadas por su número. Si la distribución de carga no tiene simetría suficiente para que una superficie gaussiana que satisfaga estas condiciones se pueda encontrar, la ley de Gauss sigue siendo cierta, pero no es útil para determinar el campo eléctrico para esta distribución de carga.

### Ejemplo 23.6 Distribución de carga para una simetría esférica

Una esfera sólida aislante con radio  $a$  tiene una densidad de carga volumétrica uniforme  $\rho$  y tiene una carga positiva total  $Q$  (figura 23.14).

**(A)** Calcule la magnitud del campo eléctrico en un punto fuera de la esfera.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El campo eléctrico debido a cargas puntuales se explicó en la sección 22.4. Ahora se considera el campo eléctrico debido a una distribución de carga. En la sección 23.1 encontró el campo para varias distribuciones, al integrar sobre la distribución. Este ejemplo muestra una diferencia con nuestra discusión en la sección 23.1. En esta sección debe encontrar el campo eléctrico mediante la ley de Gauss.

**Categorizar** Puesto que la distribución de la carga es uniforme en toda la esfera, la distribución de carga tiene simetría esférica y se puede aplicar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico.

**Analizar** Para reflejar la simetría esférica, elija una superficie gaussiana esférica de radio  $r$ , concéntrica con la esfera, como se muestra en la figura 23.14a. Para esta elección, la condición (2) se satisface en cualquier parte sobre la superficie y  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$ .

Sustituya  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  en la ley de Gauss con  $E dA$ :

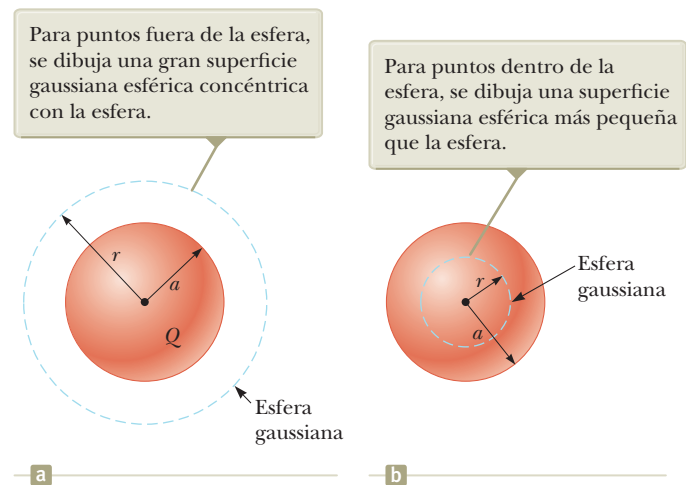
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Por simetría,  $E$  es constante en todas partes sobre la superficie, lo que satisface la condición (1), de modo que se puede retirar  $E$  de la integral:

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Al resolver para  $E$ :

$$(1) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{for } r > a)$$



**Figura 23.14** (Ejemplo 23.6) Esfera aislante con carga uniforme de radio  $a$  y carga total  $Q$ . En diagramas como éste, la línea discontinua representa la intersección de la superficie gaussiana con el plano de la página.



23.6 continuación

**Finalizar** Este campo es idéntico al de una carga puntual. Por tanto, el campo eléctrico debido a una esfera con carga uniforme en la región externa a la esfera es equivalente a una carga puntual ubicada en el centro de la esfera.

(B) Encuentre la magnitud del campo eléctrico en un punto dentro de la esfera.

SOLUCIÓN

**Analizar** En este caso, elija una superficie gaussiana esférica que tenga radio  $r < a$ , concéntrica con la esfera aislante (figura 23.14b). Sea  $V'$  el volumen de esta esfera más pequeña. Para aplicar la ley de Gauss en esta situación, considere que la carga  $q_{\text{int}}$  dentro de la superficie gaussiana de volumen  $V'$  es menor que  $Q$ .

Calcule  $q_{\text{int}}$  usando  $q_{\text{int}} = \rho V'$ :

$$q_{\text{int}} = \rho V' = \rho \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Observe que las condiciones (1) y (2) se satisfacen en todas partes sobre la superficie gaussiana en la figura 23.14b. Aplique la ley de Gauss en la región  $r < a$ :

$$\oint E \, dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Resuelva para  $E$  y sustituya para  $q_{\text{int}}$ :

$$E = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Sustituya  $\rho = Q/\frac{4}{3}\pi a^3$  y  $\epsilon_0 = 1/4\pi k_e$ :

$$(2) \quad E = \frac{Q/\frac{4}{3}\pi a^3}{3(1/4\pi k_e)} r = k_e \frac{Q}{a^3} r \quad (\text{para } r < a)$$

**Finalizar** Este resultado para  $E$  difiere del obtenido en la parte (A). Muestra que  $E \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Por tanto, el resultado elimina el problema que existiría en  $r = 0$  si  $E$  variara como  $1/r^2$  dentro de la esfera como lo hace afuera de la esfera. Es decir: si  $E \propto 1/r^2$  para  $r < a$ , el campo sería infinito en  $r = 0$ , lo que es físicamente imposible.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que la posición radial  $r = a$  se alcanza desde adentro de la esfera y desde el exterior. ¿Se obtiene el mismo valor del campo eléctrico desde ambas direcciones?

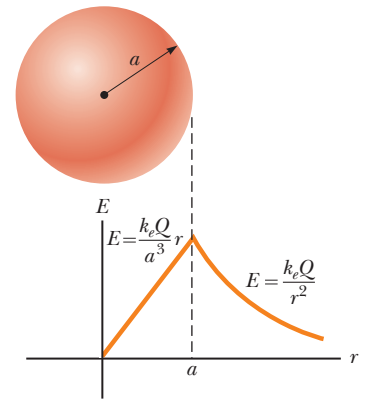
**Respuesta** La ecuación (1) muestra que el campo eléctrico se aproxima a un valor desde el exterior dado por

$$E = \lim_{r \rightarrow a} \left( k_e \frac{Q}{r^2} \right) = k_e \frac{Q}{a^2}$$

Desde el interior, la ecuación (2) da

$$E = \lim_{r \rightarrow a} \left( k_e \frac{Q}{a^3} r \right) = k_e \frac{Q}{a^3} a = k_e \frac{Q}{a^2}$$

Por tanto, el valor del campo es el mismo, aunque se llegue a la superficie desde ambas direcciones. En la figura 23.15 se muestra una gráfica de  $E$  en función de  $r$ . Observe que la magnitud del campo es continua.



**Figura 23.15** (Ejemplo 23.6) Gráfica de  $E$  en función de  $r$  para una esfera aislante con carga uniforme. El campo eléctrico dentro de la esfera ( $r < a$ ) varía linealmente con  $r$ . El campo afuera de la esfera ( $r > a$ ) es el mismo que el de una carga puntual  $Q$  ubicada en  $r = 0$ .

**Ejemplo 23.7 Distribución de carga con simetría cilíndrica**

Encuentre el campo eléctrico a una distancia  $r$  de una línea de carga positiva de longitud infinita y carga constante por unidad de longitud  $\lambda$  (figura 23.16a, página 628).

SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La línea de carga es infinitamente larga. Por consiguiente, el campo es el mismo en todos los puntos equidistantes de la línea, sin importar la posición vertical del punto en la figura 23.16a. Esperamos que el campo sea más débil a medida que nos alejamos de la línea de carga.

continúa

## 23.7 continuación

**Categorizar** Ya que la carga está distribuida uniformemente a lo largo de la línea, la distribución de carga tiene simetría cilíndrica y se puede aplicar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico.

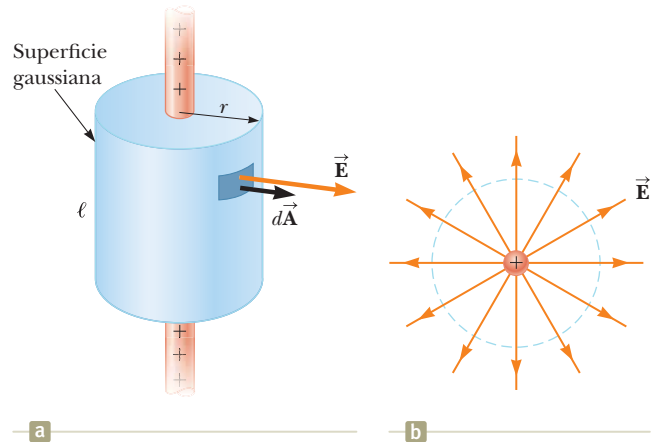
**Analizar** La simetría de la distribución de carga requiere que  $\vec{E}$  sea perpendicular a la línea de carga y dirigida hacia afuera, como se muestra en la figura 23.16b. Para reflejar la simetría de la distribución de carga, elija una superficie gaussiana cilíndrica de radio  $r$  y longitud  $\ell$  que sea coaxial con la línea de carga. Para la parte curva de esta superficie,  $\vec{E}$  es constante en magnitud y perpendicular a la superficie en cada punto, lo que satisface las condiciones (1) y (2). Además, el flujo a través de los extremos del cilindro gaussiano es cero porque  $\vec{E}$  es paralelo a estas superficies. Esta es la primera aplicación de la condición (3).

Debe tomar la integral de superficie en la ley de Gauss sobre toda la superficie gaussiana. Sin embargo, ya que  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  es cero para los extremos planos del cilindro, restrinja la atención sólo a la superficie curva del cilindro.

Aplique la ley de Gauss y las condiciones (1) y (2) para la superficie curva, y note que la carga total dentro de la superficie gaussiana es  $\lambda\ell$ :

Sustituya el área  $A = 2\pi r\ell$  de la superficie curva:

Resuelva para la magnitud del campo eléctrico:



**Figura 23.16** (Ejemplo 23.7) (a) Línea infinita de carga rodeada por una superficie gaussiana cilíndrica concéntrica con la línea. (b) Una vista lateral muestra que el campo eléctrico en la superficie cilíndrica es constante en magnitud y perpendicular a la superficie.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}$$

$$E(2\pi r\ell) = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r} \quad (23.8)$$

**Finalizar** Este resultado muestra que el campo eléctrico debido a una distribución de carga con simetría cilíndrica varía como  $1/r$ , mientras que el campo externo a una distribución de carga con simetría esférica varía como  $1/r^2$ . La ecuación 23.8 también se puede deducir mediante integración directa sobre la distribución de carga. (Véase el problema 8)

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si el segmento de línea en este ejemplo no fuese infinitamente largo?

**Respuesta** Si la línea de carga de este ejemplo tuviese longitud finita, el campo eléctrico no se conocería por la ecuación 23.8. Una línea de carga finita no tiene suficiente simetría para utilizar la ley de Gauss, porque la magnitud del campo eléctrico ya no es constante sobre la superficie del cilindro gaussiano: el campo cerca de los extremos de la línea sería diferente de los que se encuentren lejos de los extremos. Por tanto, la condición (1) no se satisfaría en esta situación. Además,  $\vec{E}$  no es perpendicular a la superficie cilíndrica en todos los puntos: los vectores de campo cerca de los extremos tendrían un componente paralelo a la línea. Por consiguiente, la condición (2) no se satisfaría. Para puntos cerca de una línea de carga finita y lejos de los extremos, la ecuación 23.8 da una buena aproximación del valor del campo.

Se le deja demostrar (véase el problema 31) que el campo eléctrico dentro de una barra de radio finito y longitud infinita, con carga uniforme, es proporcional a  $r$ .

## Ejemplo 23.8 Un plano de carga

Encuentre el campo eléctrico debido a un plano infinito de carga positiva con densidad de carga superficial uniforme  $\sigma$ .

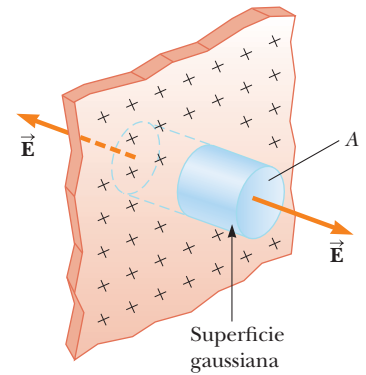
## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Observe que el plano de carga es *infinitamente* largo. Por tanto, el campo eléctrico debe ser el mismo en todos los puntos equidistantes al plano. ¿Cómo esperaría que el campo eléctrico dependa de la distancia al plano?

23.8 continuación

**Categorizar** Ya que la carga se distribuye de manera uniforme sobre el plano, la distribución de carga es simétrica; en consecuencia, se puede usar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico.

**Analizar** Por simetría,  $\vec{E}$  debe ser perpendicular al plano en todos los puntos. La dirección de  $\vec{E}$  se aleja de las cargas positivas, lo que indica que la dirección de  $\vec{E}$  en un lado del plano debe ser opuesta a su dirección sobre el otro lado, como se muestra en la figura 23.17. Una superficie gaussiana que refleja la simetría es un pequeño cilindro cuyo eje es perpendicular al plano y cada uno de sus extremos tiene un área  $A$  y son equidistantes del plano. Ya que  $\vec{E}$  es paralelo a la superficie curva, y debido a eso perpendicular a  $d\vec{A}$  en todos los puntos sobre la superficie, la condición (3) se satisface y no hay aportación a la integral de superficie por parte de esta superficie. Para los extremos planos del cilindro, se satisfacen las condiciones (1) y (2). El flujo a través de cada extremo del cilindro es  $EA$ ; por esto, el flujo total a través de toda la superficie gaussiana es justo la que atraviesa los extremos,  $\Phi_E = 2EA$ .



**Figura 23.17** (Ejemplo 23.8) Superficie gaussiana cilíndrica que penetra un plano infinito de carga. El flujo es  $EA$  a través de cada extremo de la superficie gaussiana y cero a través de su superficie curva.

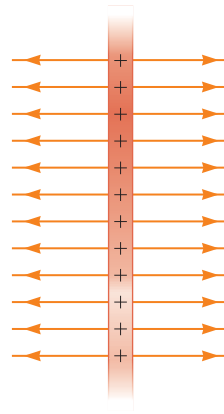
Escriba la ley de Gauss para esta superficie y observe que la carga encerrada es  $q_{in} = \sigma A$ :

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Resuelva para  $E$ :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (23.9)$$

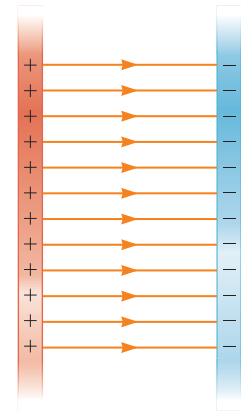
**Finalizar** Ya que la distancia desde cada extremo plano del cilindro al plano no aparece en la ecuación 23.9, se concluye que  $E = \sigma/2\epsilon_0$  en *cualquier* distancia desde el plano. Es decir: el campo es uniforme en todas partes. Observe que este es el mismo resultado que el obtenido en el ejemplo 23.3, donde permitimos que el radio de un disco de carga se vuelva infinito. La figura 23.18 muestra un campo eléctrico uniforme debido a un plano infinito de carga, visto de perfil.



**Figura 23.18** (Ejemplo 23.8) Líneas de campo eléctrico debido a un plano infinito de carga positiva.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que dos planos infinitos de carga son mutuamente paralelos, uno con carga positiva y el otro con carga negativa. Ambos planos tienen la misma densidad de carga superficial. ¿En esta situación a qué se parece el campo eléctrico?

**Respuesta** En primer lugar, abordamos esta configuración en la sección **¿Qué pasaría si?** del Ejemplo 23.3. Los campos eléctricos debidos a los dos planos se suman en la región entre los planos, lo que resulta en un campo uniforme de magnitud  $\sigma/\epsilon_0$ , y se cancela en otra parte para dar un campo de cero. La figura 23.19 muestra las líneas de campo para tal configuración. Este método es una forma práctica de lograr campos eléctricos uniformes con planos de tamaño finito colocados uno cerca del otro.



**Figura 23.19** (Ejemplo 23.8) Líneas de campo eléctrico entre dos planos infinitos de carga, uno positivo y otro negativo. En la práctica, las líneas de campo cerca de los bordes de las hojas de tamaño finito de carga se curvan hacia afuera.

**Ejemplo conceptual 23.9 ¡En este caso no utilice la ley de Gauss!**

Explique por qué no es posible utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico cercano a un dipolo eléctrico, a un disco con carga o a un triángulo con una carga puntual en cada vértice.

**SOLUCIÓN**

Las distribuciones de carga de todas estas configuraciones no tienen una simetría suficiente que haga práctico el uso de la ley gaussiana. En este caso no es posible encontrar una superficie cerrada que rodee a cualquiera de las distribuciones y satisfaga una o más de las cuatro condiciones mencionadas al principio de esta sección.



## Resumen

### Definiciones

El **flujo eléctrico** es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que penetran una superficie. Si el campo eléctrico es uniforme y forma un ángulo  $\theta$  con la normal a una superficie de área  $A$ , el flujo eléctrico a través de la superficie es

$$\Phi_E = EA \cos \theta \quad (23.3)$$

En general, el flujo eléctrico a través de una superficie es

$$\Phi_E \equiv \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (23.4)$$

### Conceptos y principios

La **ley de Gauss** dice que el flujo eléctrico neto  $\Phi_E$  a través de cualquier superficie gaussiana cerrada es igual a la carga *neta*  $q_{\text{int}}$  dentro de la superficie, dividida por  $\epsilon_0$ :

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (23.7)$$

Al usar la ley de Gauss, se puede calcular el campo eléctrico debido a varias distribuciones de carga simétricas.

El campo eléctrico en algún punto debido a una distribución de carga continua es

$$\vec{E} = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (23.1)$$

donde  $dq$  es la carga en un elemento de la distribución de carga y  $r$  es la distancia desde el elemento al punto en cuestión.

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

- Un primer modelo (incorrecto) del átomo de hidrógeno, sugerido por J.J. Thomson, propuso que una nube positiva de carga  $+e$  estaba uniformemente distribuida en todo el volumen de una esfera de radio  $a$ , con el electrón (una partícula de tamaño cero y carga  $-e$ ) en el centro. Imagine que el electrón se desplaza una pequeña distancia  $r$  desde el centro de la nube de carga positiva. La parte (B) del ejemplo 23.6 da la magnitud del campo eléctrico de la nube a una distancia  $r$  del centro. (a) Discuta en su grupo un método para demostrar matemáticamente que el electrón desplazado exhibiría un movimiento armónico simple a través del centro de la nube si se liberara y llevara a cabo su método. (b) Encuentre una expresión para la frecuencia  $f$  de oscilaciones armónicas simples que haría un electrón de masa. (c) Calcule un valor numérico para  $a$  que resultaría en una frecuencia de  $2.47 \times 10^{15}$  Hz, la frecuencia de la luz radiada en la línea más intensa en el espectro de hidrógeno. (d) ¿Es este valor coherente con el tamaño estimado de un átomo de hidrógeno?
- ACTIVIDAD** Supongamos que se encuentra en órbita alrededor de la Tierra en la Estación Espacial Internacional. Ha terminado de leer los libros que trajo y está buscando algo que lo ayude a pasar el tiempo. Conecta un tubo al suministro de agua en su cabina y monta el extremo abierto del tubo en una posición fija en el aire en el medio de su cabina. En el extremo abierto del tubo, coloca una pequeña esponja

esférica que hará que el agua que sale del extremo del tubo se extienda con simetría esférica en todas las direcciones. Abre el flujo del agua a un caudal volumétrico bajo  $I_V$  (vea la sección 14.7), de modo que el agua salga de la esponja en el extremo abierto y se una al agua que ya ha salido del extremo del tubo. Debido a que está en caída libre, se encuentra en un marco de referencia en el que no hay gravedad efectiva, por lo que el agua se acumula en el extremo del tubo en una esfera expansiva centrada en el extremo del tubo. Toda el agua en la esfera se mueve radialmente hacia afuera. La velocidad del agua tiene un valor en cada punto dentro de la esfera, por lo que la velocidad se puede representar como un campo vectorial. (a) Demuestre que la magnitud del campo de velocidad del agua cae como  $1/r^2$ . (b) Imagine una superficie cerrada no esférica en el agua y que rodea el extremo del tubo. Dibuje un diagrama que muestre una versión bidimensional del tubo que suministra el agua, la superficie exterior de la esfera, la superficie esférica en la parte (a), la superficie cerrada no esférica que se sugiere aquí y los vectores  $\vec{v}$  y  $d\vec{A}$  en algún punto del superficie no esférica, donde está el campo de vector de velocidad, y  $d\vec{A}$  es un elemento de área pequeña en la superficie cerrada no esférica. (c) Demuestre que

$$I_V = \oint \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

donde  $I_V$  es la velocidad de flujo del agua que proviene del extremo del tubo. (d) Discuta las similitudes entre esta ecuación y la ley de Gauss. ¿Cuál es el análogo al campo eléctrico? ¿Cuál es el análogo a la carga encerrada?



# Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

## SECCIÓN 23.1 Campo eléctrico de una distribución continua de carga

- Una varilla con carga negativa de longitud finita está cargada de manera uniforme por unidad de longitud. Dibuje las líneas del campo eléctrico en un plano que contenga la varilla.
- Un disco tiene una carga positiva y está uniformemente cargado por unidad de área  $\sigma$  como se describe en el ejemplo 23.3. Dibuje las líneas de campo eléctrico en un plano perpendicular al plano del disco pasando a través de su centro.
- Un anillo con un radio de 10.0 cm uniformemente cargado tiene una carga total de  $75.0 \mu\text{C}$ . Determine el campo eléctrico sobre el eje del anillo a las siguientes distancias del centro del mismo: (a) 1.00 cm, (b) 5.00 cm, (c) 30.0 cm y (d) 100 cm.
- El campo eléctrico a lo largo del eje de un disco de radio  $R$  uniformemente cargado y carga total  $Q$  fue calculado en el Ejemplo 23.9. Demuestre que el campo eléctrico a distancias  $x$  que son grandes en comparación con  $R$  se aproxima al de una partícula con carga  $Q = \sigma\pi R^2$ . *Sugerencia:* Primero demuestre que  $x/(x^2 + R^2)^{1/2} = (1 + R^2/x^2)^{-1/2}$  y use la expansión binomial  $(1 + \delta)^n \approx 1 + n\delta$ , cuando  $\delta \ll 1$ .
- En el ejemplo 23.3 se dedujo la expresión exacta del campo eléctrico en un punto en el eje de un disco con carga uniforme. Considere un disco con un radio de  $R = 3.00$  cm y una carga uniformemente distribuida de  $+5.20 \mu\text{C}$ . (a) Utilice el resultado del ejemplo 23.9, calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje a 3.00 mm del centro. (b) **¿Qué pasaría si?** Explique cómo se compara esta respuesta con el campo que se calculó con la aproximación al campo cercano  $E = \sigma/2\epsilon_0$  (esta expresión se obtuvo en el ejemplo 23.9) (c) Utilice el resultado del ejemplo 23.3 y calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje a 30.0 cm del centro del disco. (d) **¿Qué pasaría si?** Explique cómo se compara la respuesta al inciso c) con el campo eléctrico obtenido al tratar al disco como una partícula cargada con  $+5.20 \mu\text{C}$  a una distancia de 30.0 cm.

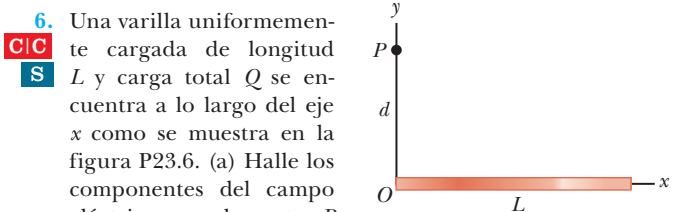


Figura P23.6

- A lo largo del eje  $x$  existe una línea de carga continua que se extiende desde  $x = +x_0$  hasta el infinito positivo. La línea transporta una carga positiva con una densidad de carga lineal uniforme  $\lambda_0$ . **¿Cuál es** (a) la magnitud y (b) la dirección del campo eléctrico en el origen?

- Una varilla delgada de longitud  $\ell$  y uniformemente cargada por unidad de longitud  $\lambda$  yace a lo largo del eje  $x$ , como se muestra en la figura P23.8. (a) Demuestre que el campo eléctrico en  $P$ , a una distancia  $d$  de la varilla a lo largo de su bisectriz perpendicular, no tiene componente en  $x$  y está dado por  $E = 2k_e\lambda \sin \theta_0/d$ . (b) **¿Qué pasaría si?** Usando el resultado obtenido en el inciso (a), demuestre que el campo de una varilla de longitud infinita es igual a  $E = 2k_e\lambda d$ .

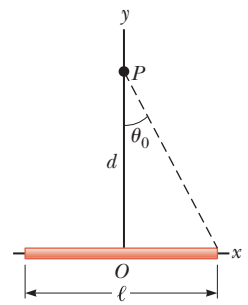


Figura P23.8

- (a) Considere un cilindro con una pared delgada uniformemente cargada con una carga total  $Q$ , radio  $R$  y una longitud  $\ell$ . Determine el campo eléctrico en un punto a una distancia  $d$  del lado derecho del cilindro, como se muestra en la figura P23.9. *Sugerencia:* use el resultado del ejemplo 23.2 y considere el cilindro como si lo formara un conjunto de anillos con carga. (b) **¿Qué pasaría si?** Piense ahora en un cilindro sólido de las mismas dimensiones y con la misma carga distribuida uniformemente en su volumen. Use el resultado del ejemplo 23.3 para calcular el campo que genera en el mismo punto.

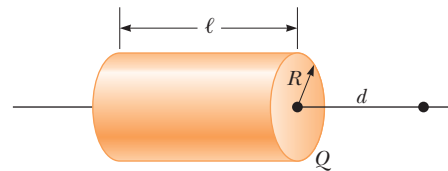


Figura P23.9

## SECCIÓN 23.2 Flujo eléctrico

- Existe un campo eléctrico vertical, de  $2.00 \times 10^4 \text{ N/C}$  de magnitud, sobre la superficie de la Tierra en un día con tormenta eléctrica. Un automóvil, con dimensión rectangular de 6.00 m por 3.00 m, viaja a lo largo de un camino de grava seca que se inclina hacia abajo a  $10.0^\circ$ . Determine el flujo eléctrico en el chasis del automóvil.
- Una superficie plana de área de  $3.20 \text{ m}^2$  se hace girar en un campo eléctrico uniforme de magnitud  $E = 6.20 \times 10^5 \text{ N/C}$ . Determine el flujo eléctrico a través de esta área (a) cuando el campo eléctrico es perpendicular a la superficie y (b) cuando el campo eléctrico es paralelo a la superficie.
- Un campo eléctrico no uniforme está dado por la expresión

$$\vec{E} = ay \hat{i} + bz \hat{j} + cx \hat{k}$$

donde  $a, b$  y  $c$  son constantes. Determine el flujo eléctrico a través de una superficie rectangular en el plano  $xy$ , que se extiende desde  $x = 0$  hasta  $x = w$  y desde  $y = 0$  hasta  $y = h$ .

## SECCIÓN 23.3 Ley de Gauss

- Una esfera hueca no conductora sin carga, con un radio de 10.0 cm, rodea una carga de  $10.0 \mu\text{C}$  localizada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas. Una broca de radio 1.00 mm es alineada a lo largo del eje de las  $z$  y se hace una perforación en la esfera. Calcule el flujo eléctrico a través de la perforación.



14. Encontrar el flujo eléctrico neto a través de la superficie esférica cerrada que se muestra en la figura P23.14. Las dos cargas de la derecha están en el interior de la superficie esférica.

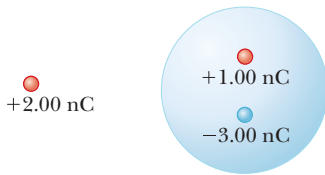


Figura P23.14

15. En la figura P23.15 se muestran cuatro superficies cerradas,  $S_1$  a  $S_4$ , así como las cargas  $-2Q$ ,  $Q$  y  $-Q$ . (Las líneas de color son las intersecciones de las superficies con el plano de la página.) Determine el flujo eléctrico a través de cada superficie.

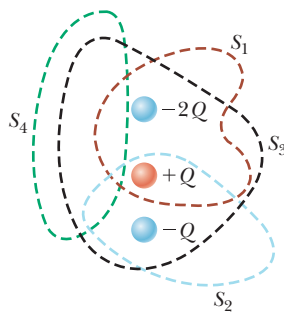


Figura P23.15

16. Una carga de  $170 \mu\text{C}$  está en el centro de un cubo con una arista de  $80.0 \text{ cm}$ . Sin cargas en los alrededores (a) Determine el flujo a través de cada una de las caras del cubo. (b) Encuentre el flujo a través de la superficie total del cubo. (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cambiarían sus respuestas a los incisos (a) y (b) en caso de que la carga no estuviera ubicada en el centro? Explique por qué.
17. (a) Encuentre el flujo eléctrico neto a través del cubo mostrado en la figura P23.17. (b) ¿Se puede utilizar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico sobre la superficie de este cubo? Explique.

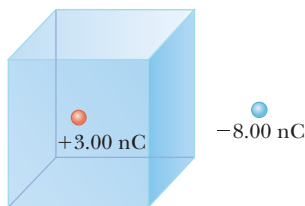


Figura P23.17

18. Una carga de  $12.0 \mu\text{C}$  está colocada en el centro de una cubierta esférica de  $22.0 \text{ cm}$  de radio. ¿Cuál es el flujo eléctrico total que pasa a través de (a) la superficie del cascarón y (b) cualquier superficie hemisférica de la misma? ¿Los resultados dependen del radio? Explique.

19. Una carga puntual con carga  $Q = 5.00 \mu\text{C}$  se localiza en el centro de un cubo de arista  $L = 0.100 \text{ m}$ . Además, simétricamente alrededor de  $Q$ , como se muestra en la figura P23.19, existen otras seis partículas cargadas idénticas  $q = -1.00 \mu\text{C}$ .

Determine el flujo eléctrico a través de una de las caras del cubo.

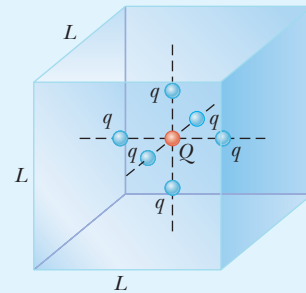


Figura P23.19

Problemas 19 y 20.

20. Una partícula con carga  $Q$  está en el centro de un cubo de arista  $L$ . Además, otras seis partículas cargadas idénticas  $q$  están colocadas simétricamente alrededor de  $Q$  como se muestra en la figura P23.19. Para cada una de estas partículas  $q$  es un número negativo. Determine el flujo eléctrico a través de una de las caras del cubo.

21. (a) A una distancia  $d$  de un plano infinito está ubicada una partícula con carga  $q$ . Determine el flujo eléctrico a través del plano debido a la partícula cargada. (b) **¿Qué pasaría si?** Una partícula con carga puntual  $q$  está ubicada *muy cerca* del centro de un cuadrado *muy grande* sobre la línea perpendicular a dicho cuadrado y que pasa por su centro. Determine el flujo eléctrico aproximado que pasa a través del cuadrado debido a la partícula cargada. (c) ¿Cómo se comparan las respuestas a los incisos (a) y (b)? Explique.

22. Encuentre el flujo eléctrico neto a través de (a) la superficie esférica cerrada en un campo eléctrico uniforme como se muestra en la figura P23.22a y (b) la superficie cilíndrica cerrada que se muestra en la figura P23.22b. (c) ¿Qué se puede concluir acerca de las cargas, si cualquiera está, dentro de la superficie cilíndrica?

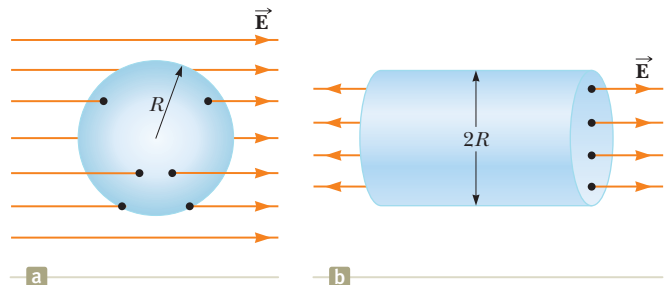


Figura P23.22

23. La figura P23.23 representa la vista superior de una superficie gaussiana cúbica en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  orientado de forma paralela a las caras superior e inferior del cubo. El campo hace un ángulo  $\theta$  con el lado ①, y el área de cada cara es  $A$ . En for-

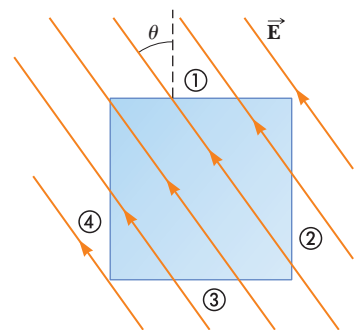


Figura P23.23



ma simbólica, encuentre el flujo eléctrico a través de (a) la cara ①, (b) la cara ②, (c) la cara ③, (d) la cara ④, y (e) las caras superior e inferior del cubo. (f) ¿Cuál es el flujo eléctrico neto a través del cubo? (g) ¿Cuánta carga está encerrada dentro de la superficie gaussiana?

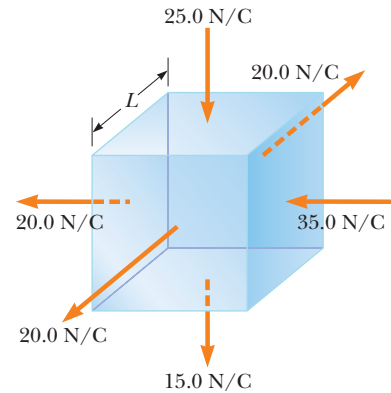
**SECCIÓN 23.4 Aplicación de la ley de Gauss a varias distribuciones de carga**

- 24. Determine la magnitud del campo eléctrico en la superficie de un núcleo de plomo 208, que contiene 82 protones y 126 neutrones. Suponga que el núcleo de plomo tiene un volumen igual a 208 veces el volumen de un protón, considere al protón como una esfera de radio  $1.20 \times 10^{-15}$  m.
- 25. En la fisión nuclear, un núcleo de uranio 238 que contiene 92 protones puede dividirse en dos esferas más pequeñas, cada una con 46 protones y con un radio de  $5.90 \times 10^{-15}$  m. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza eléctrica de repulsión que separa las dos esferas?
- 26. Suponga que llena dos globos de hule con aire sujetándolos a los extremos de las cuerdas de la misma longitud desde el mismo punto, con los otros extremos unidos a los globos. Frote cada uno de ellos con lana o con su cabello, de forma que cuelguen separados por un espacio visible entre ambos. Haga estimaciones de orden de magnitud de (a) la fuerza sobre cada uno, (b) la carga de cada globo, (c) el campo que cada uno de ellos genera en el centro del otro y (d) el flujo total de campo eléctrico creado por cada globo. En su solución, establezca las cantidades que ha considerado como datos y los valores medidos o estimados para los mismos.
- 27. Una hoja grande horizontal y plana tiene una carga por unidad de superficie de  $9.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Determine el campo eléctrico justo por encima del centro de la hoja.
- 28. Un muro no conductor tiene una carga con densidad uniforme de  $8.60 \mu\text{C}/\text{cm}^2$ . (a) ¿Cuál es el campo eléctrico a 7.00 cm del muro si esta distancia es pequeña comparada con las dimensiones del muro? (b) ¿El resultado cambia si se modifica la distancia a la pared? Explique.
- 29. Un filamento recto con carga uniforme de 7.00 m de longitud tiene una carga positiva total de  $2.00 \mu\text{C}$ . Un cilindro de cartón sin carga de 2.00 cm de longitud y 10.0 cm de radio, rodea el filamento en su parte central, y lo tiene como el eje del cilindro. A partir de aproximaciones razonables, determine (a) el campo eléctrico en la superficie del cilindro y (b) el flujo eléctrico total a través de dicho cilindro.

30. Está trabajando en un dispositivo de laboratorio que incluye una pequeña esfera con una gran carga eléctrica  $Q$ . Debido a esta esfera cargada, hay un campo eléctrico fuerte alrededor de su dispositivo. Otros investigadores en su laboratorio se quejan de que su campo eléctrico está afectando a su equipo. Piensa en cómo puede obtener el gran campo eléctrico que necesita cerca de la esfera, pero evitando que el campo llegue a sus colegas. Usted decide rodear su dispositivo con una carcasa esférica de plástico transparente. La carcasa no conductora recibe una distribución de carga uniforme. (a) La carcasa se coloca de modo que la esfera pequeña se encuentre en el centro exacto la cubierta. Determine la carga que debe colocarse en la carcasa para eliminar por completo el campo eléctrico fuera de ella. (b) ¿Qué pasa si la carcasa se mueve? ¿La pequeña esfera debe estar en el centro de la carcasa para que este esquema funcione?

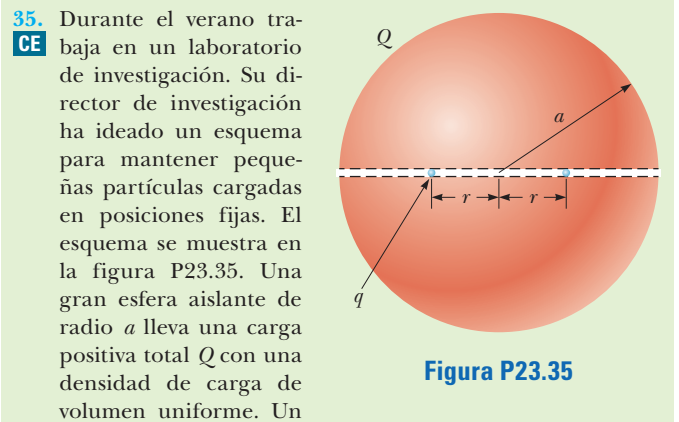
31. Considere una distribución de carga cilíndrica larga de radio  $R$  con una densidad de carga uniforme  $\rho$ . Encuentre el campo eléctrico a una distancia  $r$  del eje, cuando  $r < R$ .

32. Suponga que la magnitud del campo eléctrico sobre cada cara del cubo de arista  $L = 1.00$  m en la figura P23.32 es uniforme y las direcciones de los campos en cada cara son las indicadas. Encuentre (a) el flujo eléctrico a través del cubo y (b) la carga neta en el interior del cubo. (c) ¿Podría la carga neta ser la carga de una carga puntual?



**Figura P23.32**

- 33. Una esfera sólida con un radio 40.0 cm tiene una carga positiva total de  $26.0 \mu\text{C}$  uniformemente distribuida en su volumen. Calcule la magnitud del campo eléctrico a las siguientes distancias del centro de la esfera: (a) 0 cm, (b) 10.0 cm, (c) 40.0 cm y (d) 60.0 cm.
- 34. Una cubierta cilíndrica con un radio de 7.00 cm y longitud de 2.40 m tiene una carga con distribución uniforme sobre su superficie curva. La magnitud del campo eléctrico en un punto que está a 19.0 cm radialmente hacia afuera de su eje (medido a partir del punto medio de la cubierta) es de 36.0 kN/C. Determine (a) la carga neta sobre la cubierta y (b) el campo eléctrico que existe en un punto a 4.00 cm del eje, medido radialmente hacia afuera del punto medio de la cubierta.



**Figura P23.35**

extender el sistema de la siguiente manera. Determine si es posible agregar tubos de plástico transparentes como extensiones del túnel y hacer que las esferas pequeñas estén en equilibrio en una posición para la cual  $r > a$ .

**36. CE** Durante el verano trabaja en un laboratorio de investigación. Su director de investigación ha ideado un esquema para mantener pequeñas partículas cargadas en posiciones fijas. El esquema se muestra en la figura P23.36. Un cilindro aislante de radio  $a$  y longitud  $L \gg a$  está cargado positivamente y tiene una densidad de carga de volumen uniforme  $\rho$ . Un túnel muy delgado se perfora a través del diámetro del cilindro y dos pequeñas esferas con carga  $q$  se colocan en el túnel. Estas esferas están representadas por los puntos azules en la figura y encuentran posiciones de equilibrio a una distancia de  $r$  en lados opuestos del eje del cilindro. Su director de investigación ha tenido un gran éxito con este esquema. (a) Determine el valor específico de  $r$  en el cual existe equilibrio. (b) Su director de investigación le pregunta si puede extender el sistema de la siguiente manera. Determine si es posible agregar tubos de plástico transparentes como extensiones del túnel y hacer que las esferas pequeñas estén en equilibrio en una posición para la cual  $r > a$ .

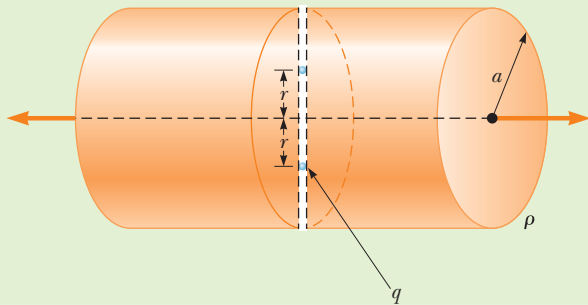


Figura P23.36

**PROBLEMAS ADICIONALES**

**37.** Encuentre el flujo eléctrico a través de la superficie plana que se muestra en la figura P23.37 si  $\theta = 60.0^\circ$ ,  $E = 350 \text{ N/C}$ , y  $d = 5.00 \text{ cm}$ . El campo eléctrico es uniforme sobre toda el área de la superficie.

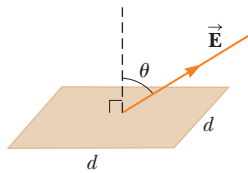


Figura P23.37

**38.** Tres cilindros de plástico macizo tienen un radio de 2.50 cm y una longitud de 6.00 cm. Encuentre la carga de cada cilindro con la siguiente información adicional sobre cada uno. El cilindro (a) lleva carga con una densidad uniforme de  $15.0 \text{ nC/m}^2$  en todas partes de su superficie. El cilindro (b) lleva carga con una densidad uniforme de  $15.0 \text{ nC/m}^2$  solo en su superficie lateral curva. El cilindro (c) lleva carga con una densidad uniforme de  $500 \text{ nC/m}^3$  en todo el plástico.

**39. S** Una línea de carga comienza en  $x = +x_0$  y se extiende hasta infinito positivo. La densidad de carga lineal es  $\lambda = \lambda_0 x_0 / x$ , donde  $\lambda_0$  es una constante. Determine el campo eléctrico en el origen.

**40. S** Demuestre que la magnitud máxima  $E_{\text{máx}}$  del campo eléctrico a lo largo del eje de un anillo cargado uniformemente ocurre cuando  $x = a/\sqrt{2}$  (véase la figura P23.3) y tiene el valor  $Q/(6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2)$ .

**41.** Una línea de carga positiva se forma en un semicírculo de radio  $R = 60.0 \text{ cm}$  como se muestra en la figura P23.41. La carga por unidad de longitud a lo largo del semicírculo viene dada por la expresión  $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$ . La carga total en el semicírculo es de  $12.0 \mu\text{C}$ . Calcule la fuerza total con una carga de  $3.00 \mu\text{C}$  colocada en el centro de curvatura  $P$ .

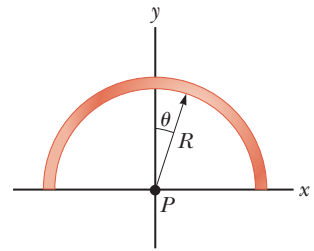


Figura P23.41

**42. S** Una gran placa conductora situada en el plano  $xy$  tiene una carga por unidad de superficie de  $\sigma$ . Una segunda placa situada por encima de la primera en  $z = z_0$  y orientada paralela al plano  $xy$  lleva una carga por unidad de área de  $-2\sigma$ . Encuentre el campo eléctrico para (a)  $z < 0$ , (b)  $0 < z < z_0$ , y (c)  $z > z_0$ .

**43.** Una esfera de radio  $R = 1.00 \text{ m}$  rodea una partícula cargada  $Q = 50.0 \mu\text{C}$  situada en su centro, como se muestra en la figura P23.43. Encuentre el flujo eléctrico a través de una tapa circular de medido ángulo  $\theta = 45.0^\circ$ .

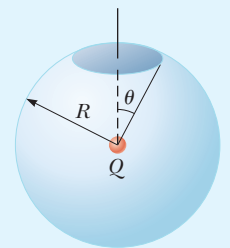


Figura P23.43

Problemas 43 y 44.

**44. S** Una esfera de radio  $R$  rodea una partícula con carga  $Q$  situada en su centro, como se muestra en la figura P23.43. Encuentre el flujo eléctrico a través de una tapa circular de la mitad del ángulo  $\theta$ .

**PROBLEMAS DE DESAFÍO**

**45. S** Una placa de material aislante tiene una densidad de carga positiva no uniforme  $\rho = Cx^2$ , donde  $x$  se mide a partir del centro de la placa como se muestra en la figura P23.45, y  $C$  es constante. La placa es infinita en las direcciones  $y$  y  $z$ . Deduzca expresiones para el campo eléctrico en (a) las regiones externas ( $|x| > d/2$ ) y (b) la región interna de la placa ( $-d/2 < x < d/2$ ).

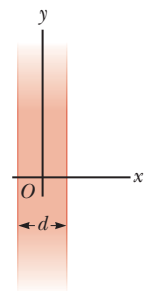


Figura P23.45

Problemas 45 y 49.

**46. S** Una esfera de radio  $2a$  está hecha de un material no conductor con una densidad de carga volumétrica uniforme  $\rho$ . Suponga que el material no afecta al campo eléctrico. Se efectúa en seguida una cavidad de radio  $a$  en la esfera, como se muestra en la figura P23.46. Demuestre que el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y está dado por  $E_x = 0$  y  $E_y = \rho a / 3\epsilon_0$ .

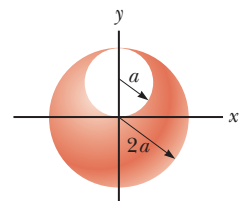


Figura P23.46

- 47.** Un cilindro aislante de longitud infinita y de radio  $R$  tiene una densidad de carga volumétrica que varía en función del radio de la forma siguiente:

$$\rho = \rho_0 \left( a - \frac{r}{b} \right)$$

donde  $\rho_0$ ,  $a$  y  $b$  son constantes positivas y  $r$  la distancia al eje del cilindro. Utilice la ley de Gauss para determinar la magnitud del campo eléctrico a las siguientes distancias radiales (a)  $r < R$  y (b)  $r > R$ .

- 48.** Una partícula cargada  $Q$  está localizada sobre el eje de un disco de radio  $R$  a una distancia  $b$  del plano del disco (figura P23.48). Demuestre que en el caso de que una cuarta parte del flujo eléctrico de la carga pasara a través del disco, entonces  $R = \sqrt{3}b$ .

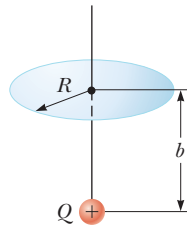


Figura P23.48

- 49. Problema de repaso.** Una placa de material aislante (infinita en las direcciones  $y$  y  $z$ ) tiene un grosor y una densidad de carga uniforme positiva  $\rho$ . Una vista lateral de la placa se muestra en la figura P23.48. (a) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico a una distancia  $x$  de su centro y en el interior de la placa es  $E = \rho x / \epsilon_0$ . (b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que un electrón de carga  $-e$  y de masa  $m_e$  puede moverse con libertad en el interior de la placa. Si le libera del reposo a una distancia  $x$  del centro, demuestre que el electrón despliega un movimiento armónico simple con una frecuencia

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho e}{m_e \epsilon_0}}$$

- 50.** Barras delgadas idénticas de longitud  $2a$  llevan cargas iguales  $+Q$  uniformemente distribuidas a lo largo de sus longitudes. Las barras yacen a lo largo del eje  $x$  con sus centros separados por una distancia  $b > 2a$  (figura P23.50). Demuestre que la magnitud de la fuerza ejercida por la barra izquierda sobre la derecha es

$$F = \left( \frac{k_e Q^2}{4a^2} \right) \ln \left( \frac{b^2}{b^2 - 4a^2} \right)$$

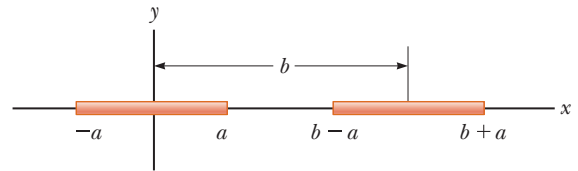


Figura P23.50

- 51.** Una esfera aislante y sólida de radio  $R$  tiene una densidad de carga no uniforme que varía en función de  $r$  de acuerdo con la expresión  $\rho = Ar^2$ , donde  $A$  es una constante y  $r < R$  está medido desde el centro de la esfera. (a) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico exterior de la esfera ( $r > R$ ) es  $E = AR^3/5\epsilon_0 r^2$ . (b) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico interior de la esfera ( $r < R$ ) es  $E = Ar^3/5\epsilon_0$ . Nota: El elemento de volumen  $dV$  para una cubierta esférica de radio  $r$  y de espesor  $dr$  es igual a  $4\pi r^2 dr$ .





Los procesos que suceden durante las tormentas eléctricas generan grandes diferencias de potencial eléctrico entre una nube y la tierra. El resultado son las descargas eléctricas conocidas como relámpagos, igual como aparecen aquí. Observe a la izquierda que un canal descendente de rayos (una guía escalonada) está a punto de entrar en contacto con un canal que sube de la tierra (un retorno fulminante). (Costazzurra / Shutterstock.com)

- 24.1 Potencial eléctrico y diferencia de potencial
- 24.2 Diferencias de potencial en un campo eléctrico uniforme
- 24.3 Potencial eléctrico y energía potencial debido a cargas puntuales
- 24.4 Obtención del valor del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico
- 24.5 Potencial eléctrico debido a distribuciones continuas de carga
- 24.6 Conductores en equilibrio electrostático

### **IMAGINE** Todavía está en Florida durante sus vacaciones de primavera.

Ha visitado algunas áreas abiertas y ha observado varios relámpagos, como se describe en la semblanza en el capítulo anterior. Capturó un par de flashes en el video de su teléfono inteligente y los mira con fascinación. Esa noche, en su habitación de hotel, hace una investigación en línea en su teléfono inteligente y descubre que cuando se producen rayos, hay una diferencia potencial de cientos de miles de volts entre una nube y el suelo. No está familiarizado con la frase *diferencia de potencial* y se pregunta qué significa eso. Ha oído hablar de volts porque sabe que sus dispositivos eléctricos en el hogar tienen una clasificación de 120 volts y su secadora de ropa eléctrica tiene una clasificación de 240 volts. El enchufe del cargador del teléfono inteligente funcionará a 120 volts o 240 volts. Pero, ¿qué es exactamente un volt?

**CONEXIONES** En el capítulo 22, vinculamos nuestro nuevo estudio del electromagnetismo a nuestros estudios anteriores de *fuerza*. Ahora hacemos un nuevo enlace a nuestras investigaciones anteriores en *energía*. El concepto de energía potencial fue analizado en el capítulo 7 en relación con algunas fuerzas conservativas como la fuerza gravitacional y la fuerza elástica ejercidas por un resorte. Al aplicar la ley de conservación de energía, es posible evitar el trabajar directamente con fuerzas al resolver diferentes problemas de mecánica. Además el concepto de energía potencial es de gran valor para el estudio de la electricidad. Ya que la fuerza electrostática es conservativa, los fenómenos de esta clase pueden describirse de manera conveniente en términos de una energía *potencial eléctrica*. Esta idea permite definir una cantidad escalar conocida como *potencial eléctrico*. Ya que el potencial eléctrico en un punto cualquiera de un campo eléctrico es una cantidad escalar, es posible aplicar esto para describir los fenómenos electrostáticos de una manera más simple que si tuviera que depender sólo del campo eléctrico y las fuerzas eléctricas. El concepto de

potencial eléctrico tiene un gran valor práctico en la operación de circuitos eléctricos y aparatos que estudiará en capítulos posteriores.

## 24.1 Potencial eléctrico y diferencia de potencial

Cuando se coloca una carga  $q$  en un campo eléctrico  $\vec{E}$  producido por alguna distribución de carga fuente el modelo de una partícula en un campo nos dice que hay una fuerza eléctrica  $q\vec{E}$  que actúa sobre la carga. Esta fuerza es conservativa, ya que la fuerza entre cargas descrita por la ley de Coulomb es conservativa. Vamos a identificar la carga y el campo como un sistema. Si la carga está libre para moverse, lo hará en respuesta a la fuerza eléctrica. Por tanto, el campo eléctrico va a hacer el trabajo sobre la carga. Este trabajo es *interno* al sistema. Esta situación es similar a la de un sistema gravitatorio: Cuando un objeto es liberado cerca de la superficie de la Tierra, la fuerza de la gravedad actúa sobre el objeto. Este trabajo es interno al sistema objeto-Tierra como se analizó en la sección 7.8.

Al analizar los campos eléctricos y magnéticos, es común utilizar la notación  $d\vec{s}$  para representar un vector de desplazamiento infinitesimal que tiene una orientación tangente a una trayectoria a través del espacio. Esta trayectoria puede ser recta o curva, y la integral calculada a lo largo de esta trayectoria se conoce como *integral sobre la trayectoria* o bien, *integral de línea* (los dos términos son sinónimos).

Para un desplazamiento infinitesimal  $d\vec{s}$  de una carga puntual  $q$  inmersa en un campo eléctrico, el trabajo realizado por un campo eléctrico sobre la misma es  $W_{\text{int}} = \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q\vec{E} \cdot d\vec{s}$ . Recordemos que a partir de la ecuación 7.26  $W_{\text{int}} = -\Delta U_E$  el trabajo interno hecho en un sistema es igual al negativo de la variación de la energía potencial del sistema:  $W_{\text{int}} = -\Delta U_g$ . Por tanto, como la carga  $q$  se desplaza, la energía potencial del sistema carga-campo cambia en una cantidad  $dU_E = -W_{\text{int}} = -q\vec{E} \cdot d\vec{s}$ . Para un desplazamiento finito de la carga desde el punto  $\textcircled{A}$  al punto  $\textcircled{B}$ , el cambio en energía potencial del sistema es

$$\Delta U_E = -q \int_{\textcircled{A}}^{\textcircled{B}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (24.1)$$

◀ Cambio en la energía potencial de un sistema

La integración se lleva a cabo a lo largo de la trayectoria que  $q$  sigue al pasar de  $\textcircled{A}$  a  $\textcircled{B}$ . Ya que la fuerza  $\vec{E}$  es conservativa, la integral de línea no depende de la trayectoria de  $\textcircled{A}$  a  $\textcircled{B}$ .

Para una posición conocida de la carga de prueba en el campo, el sistema carga-campo tiene una energía potencial  $U$  relativa a la configuración del sistema definido como  $U_E = 0$ . Al dividir la energía potencial entre la carga se obtiene una cantidad física que depende sólo de la distribución de carga fuente y tiene un valor en cada uno de los puntos de un campo eléctrico. Esta cantidad se conoce como **potencial eléctrico** (o simplemente **potencial**)  $V$ :

$$V = \frac{U_E}{q} \quad (24.2)$$

Debido a que la energía potencial es una cantidad escalar el potencial eléctrico también es una cantidad escalar.

La **diferencia de potencial**  $\Delta V = V_{\textcircled{B}} - V_{\textcircled{A}}$  entre los puntos  $\textcircled{A}$  y  $\textcircled{B}$  de un campo eléctrico se define como el cambio en energía potencial en el sistema al mover una carga  $q$  entre los puntos, dividido entre la carga:

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U_E}{q} = - \int_{\textcircled{A}}^{\textcircled{B}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (24.3)$$

◀ Diferencia de potencial entre dos puntos

En esta definición, el desplazamiento infinitesimal  $d\vec{s}$  se interpreta como el desplazamiento entre dos puntos en el espacio, en vez del desplazamiento de una carga puntual como en la ecuación 24.1.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 24.1

**Potencial y energía potencial** El *potencial* es sólo una característica del campo sin importar que una partícula cargada pueda estar colocada en el campo. La *energía potencial* es característica del sistema carga-campo debido a la interacción del campo con una partícula con carga colocada en el mismo.





### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 24.2

**Voltaje** Para describir la diferencia de potencial entre dos puntos se utiliza una gran variedad de términos; el más común es **voltaje**, que surge de la unidad utilizada para el potencial. Un voltaje *aplicado* a un aparato, como una televisión, o *a las terminales* de un aparato, es lo mismo que la diferencia de potencial aplicada a las terminales del dispositivo. A pesar del lenguaje popular, el voltaje *no* es algo que se mueva a través del dispositivo.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 24.3

**El electrón volt** El electrón volt es una unidad de *energía*, NO de potencial. La energía de cualquier sistema puede expresarse en eV, pero esta unidad es la más conveniente para describir la emisión y absorción de la luz visible de los átomos. A menudo las energías en los procesos nucleares se expresan en MeV.

Al igual que en el caso de la energía potencial, sólo las *diferencias* en el potencial eléctrico tienen significado. A menudo conviene hacer que en algún punto del campo eléctrico el valor del potencial eléctrico sea igual a cero.

La diferencia de potencial no debe confundirse con la diferencia en energía potencial. La *diferencia* de potencial entre  $\textcircled{A}$  y  $\textcircled{B}$  existe únicamente por una carga fuente y depende sólo de la distribución de carga fuente (considere los puntos  $\textcircled{A}$  y  $\textcircled{B}$  *sin* la presencia de la carga  $q$ ). Para que exista una *energía* potencial, debemos tener un sistema de dos o más cargas. La energía potencial pertenece al sistema y cambia sólo si una carga se mueve en relación con el resto del sistema. Esta situación es similar a la del campo eléctrico. Un *campo* eléctrico existe solamente debido a una carga fuente. Una *fuerza* eléctrica requiere dos cargas: la carga fuente para establecer el campo y otra carga colocada dentro de ese campo.

Consideremos ahora la situación en la que un agente externo mueve la carga en el campo. Si un agente externo traslada una carga de  $\textcircled{A}$  a  $\textcircled{B}$  sin modificar la energía cinética de ésta, el agente realiza un trabajo que modifica la energía potencial del sistema:  $W = \Delta U_E$ . Por la ecuación 24.3, el trabajo realizado por un agente externo al desplazar una carga  $q$  a través de un campo eléctrico con una velocidad constante es

$$W = q \Delta V \quad (24.4)$$

Ya que el potencial eléctrico es una medida de la energía potencial por unidad de carga, la unidad del SI, tanto del potencial eléctrico como de la diferencia de potencial, es joules por cada coulomb, que se define como un **volt** (V):

$$1 \text{ V} \equiv 1 \text{ J/C}$$

Es decir, de la ecuación 24.4 se deberá realizar 1 J de trabajo para trasladar 1 C de carga a causa de una diferencia de potencial de 1 V.

La ecuación 24.3 muestra que la diferencia de potencial tiene unidades de campo eléctrico multiplicadas por la distancia. De esto se concluye que la unidad del SI del campo eléctrico (N/C) también puede expresarse en volts por cada metro:

$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$$

Por tanto, se puede establecer una nueva interpretación del campo eléctrico:

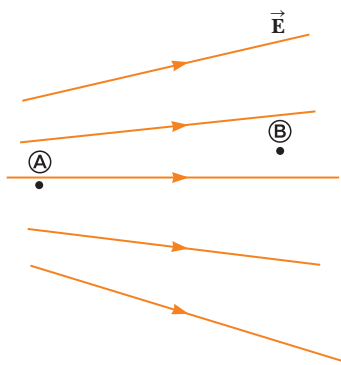
El campo eléctrico es una medida de la relación de cambio del potencial eléctrico en función de la posición.

Una unidad de energía comúnmente utilizada en física atómica y nuclear es el **electrón volt** (eV), que se define como la energía que un sistema carga-campo gana o pierde cuando se desplaza una carga de magnitud  $e$  (un electrón o un protón) a causa de una diferencia de potencial de 1 V. Podemos encontrar la relación entre electrón volts y joules imaginando que 1 eV de trabajo se hace en la ecuación 24.4 y usando la ecuación 22.5 para  $e$ :

$$1 \text{ eV} = (1.602 \ 18 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1.602 \ 18 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (24.5)$$

Por ejemplo, un electrón en el haz de una máquina dental de rayos X típica alcanza una rapidez de  $1.4 \times 10^8$  m/s. Esto corresponde a la energía cinética de  $1.1 \times 10^{-14}$  J (usando cálculos relativistas como se verá en el capítulo 39), es equivalente a  $6.7 \times 10^4$  eV. Para alcanzar esta rapidez, el electrón tendrá que ser acelerado desde el reposo por medio de una diferencia de potencial de 67 kV para alcanzar esta rapidez.

**E XAMEN RÁPIDO 24.1** En la figura 24.1, dos puntos,  $\textcircled{A}$  y  $\textcircled{B}$ , se ubican dentro de una región en la que hay un campo eléctrico. (i) ¿Cómo describiría la diferencia de potencial  $\Delta V = V_{\textcircled{B}} - V_{\textcircled{A}}$ ? (a) Es positiva. (b) Es negativa. (c) Es cero. (ii) Se coloca una carga negativa en  $\textcircled{A}$  y luego se mueve hacia  $\textcircled{B}$ . ¿Cómo describiría el cambio en energía potencial del sistema carga-campo para este proceso? Elija entre las mismas posibilidades.



**Figura 24.1** (Examen rápido 24.1)

Dos puntos en un campo eléctrico.



La definición del volt anterior responde de alguna manera a nuestra pregunta en la semblanza inicial. Pero aún no puede sentirse completamente cómodo con el concepto de potencial eléctrico. Una razón de esta incomodidad es que, a pesar de las muchas similitudes entre la fuerza gravitatoria y la fuerza eléctrica, no definimos un potencial gravitatorio:  $V_{grav} = U_g/m$ , con una unidad de J/kg. No hacemos eso porque no hay beneficio en ello. Definir un potencial gravitatorio no nos permite resolver más problemas gravitatorios. Una gran *diferencia* entre la gravedad y la electricidad hace que la definición de potencial eléctrico sea muy beneficiosa: podemos cambiar la forma de las situaciones eléctricas e incluso construir circuitos eléctricos con diferentes tipos de elementos de circuito. Nada como eso es posible para la gravedad. Nos encontraremos utilizando el potencial eléctrico continuamente en nuestras discusiones sobre circuitos eléctricos.

## 24.2 Diferencias de potencial en un campo eléctrico uniforme

Las ecuaciones 24.1 y 24.3 son válidas en todos los campos eléctricos, sean uniformes o variables, pero estas ecuaciones se simplifican si el campo es uniforme. Primero, imagine un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje negativo y, como se muestra en la figura 24.2a. Calcule la diferencia de potencial entre dos puntos A y B separados por una distancia  $d$ , donde el desplazamiento  $\vec{s}$  apunta de A hacia B y es paralelo a las líneas de campo. La ecuación 24.3 da

$$V_B - V_A = \Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B E ds (\cos 0^\circ) = - \int_A^B E ds$$

Dado que  $E$  es constante, puede retirarla de la integral; esto lo conduce a

$$\Delta V = -E \int_A^B ds$$

$$\Delta V = -Ed$$

(24.6)

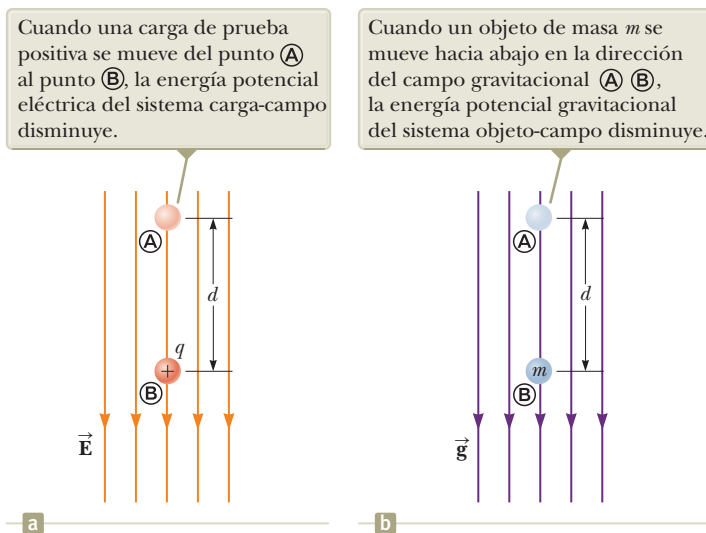
◀ Diferencia de potencial entre dos puntos en un campo eléctrico uniforme

El signo negativo indica que el potencial eléctrico en el punto B es inferior al del punto A; es decir,  $V_B < V_A$ . Las líneas de campo eléctrico *siempre* apuntan en dirección del potencial eléctrico decreciente, como se muestra en la figura 24.2a.

Ahora suponga que una carga  $q$  se mueve desde A hacia B; se puede calcular el cambio en la energía potencial del sistema carga-campo con las ecuaciones 24.3 y 24.6:

$$\Delta U_E = q\Delta V = -qEd \quad (24.7)$$

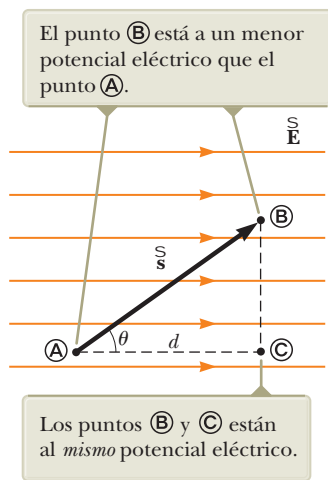
Este resultado muestra que si  $q$  es positiva, entonces  $\Delta U_E$  es negativa. Por tanto, un sistema consistente de una carga positiva y un campo eléctrico, pierde energía potencial



### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 24.4

**El signo  $\Delta V$ .** El signo negativo en la ecuación 24.6 se debe al hecho de que empezamos en el punto A y nos movimos a un nuevo punto en la *misma* dirección que las líneas de campo eléctrico. Si partimos de B y nos cambiamos a A, la diferencia de potencial sería  $+Ed$ . En un campo eléctrico uniforme, la magnitud de la diferencia de potenciales  $Ed$  y el signo puede ser determinado por la dirección de desplazamiento.

**Figura 24.2** (a) Cuando el campo eléctrico  $\vec{E}$  se dirige hacia abajo, el punto B está en un potencial eléctrico menor que el punto A. (b) Situación gravitatoria análoga a la presentada en (a).



**Figura 24.3** Un campo eléctrico uniforme en dirección  $x$  positiva. Tres puntos de este campo están marcados.

eléctrica cuando la carga se mueve en la dirección del campo. Si una carga positiva es liberada desde el reposo en este campo eléctrico, experimenta una fuerza eléctrica  $q\vec{E}$  en la dirección de  $\vec{E}$  (hacia abajo en la figura 24.2a.). En consecuencia, se acelerará hacia abajo, adquiriendo energía cinética. Conforme esta partícula con carga adquiere energía cinética, el sistema carga-campo pierde una cantidad igual de energía potencial. Esto no debe sorprenderle, simplemente es la conservación de la energía mecánica en un sistema aislado, como se vio en el capítulo 8.

La figura 24.2b muestra una situación análoga con un campo gravitatorio. Cuando una partícula de masa  $m$  se libera en un campo gravitacional, acelera hacia abajo, ganando energía cinética. Al mismo tiempo, la energía potencial gravitatoria del sistema objeto-campo disminuye.

La comparación entre un sistema de una carga positiva que reside en un campo eléctrico y un objeto con masa que reside en un campo gravitatorio en la figura 24.2 es útil para conceptualizar el comportamiento eléctrico. La situación eléctrica, sin embargo, tiene una característica que la situación gravitacional no: la carga puede ser negativa. Si  $q$  es negativa, entonces  $\Delta U_E$  en la ecuación 24.7 es positiva y la situación se invierte. Un sistema formado por una carga negativa y un campo eléctrico *adquiere* energía potencial eléctrica cuando la carga se mueve en la dirección del campo. Si se libera una carga negativa desde el reposo en un campo eléctrico, se acelera en la dirección *opuesta* a la dirección del campo. Para que una carga negativa se mueva en la dirección del campo, deberá existir un agente externo que aplique una fuerza y realice un trabajo positivo sobre la carga.

Ahora considere el caso más general de una partícula con carga que se mueve entre A y B en un campo eléctrico uniforme, en el cual el vector  $\vec{s}$  *no* es paralelo a las líneas de campo, como se muestra en la figura 24.3. En este caso, la ecuación 24.3 da

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s} \quad (24.8)$$

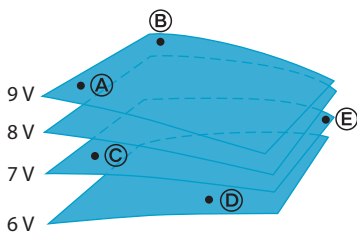
donde una vez más se retira  $\vec{E}$  de la integral ya que es una constante. El cambio en la energía potencial del sistema carga-campo es

$$\Delta U_E = q\Delta V = -q\vec{E} \cdot \vec{s} \quad (24.9)$$

Por último, se concluye por la ecuación 24.8 que todos los puntos en un plano perpendicular a un campo eléctrico uniforme tienen el mismo potencial eléctrico. Se puede reconocer en la figura 24.3, donde la diferencia de potencial  $V_B - V_A$  es equivalente a la diferencia de potencial  $V_C - V_A$ . (Puede comprobarlo si resuelve el producto punto  $\vec{E} \cdot \vec{s}$  para  $\vec{s}_{A \rightarrow B}$ , donde el ángulo  $\theta$  entre  $\vec{E}$  y  $\vec{s}$  es arbitrario, como se muestra en la figura 24.3, y el producto punto en el caso de  $\vec{s}_{A \rightarrow C}$ , donde  $\theta = 0$ .) Por lo tanto,  $V_B = V_C$ . A cualquier superficie formada por una distribución continua de puntos con el mismo potencial eléctrico se le denomina **superficie equipotencial**.

Las superficies equipotenciales asociadas con un campo eléctrico uniforme consisten en una familia de planos paralelos, todos ellos perpendiculares al campo. En secciones posteriores se describen superficies equipotenciales asociadas con campos que tienen otras simetrías.

**EJAMEN RÁPIDO 24.2** Los puntos marcados en figura 24.4 están sobre una serie de superficies equipotenciales asociadas con un campo eléctrico. Clasifique (del mayor al menor) el trabajo realizado por el campo eléctrico en una partícula con carga positiva que se mueve desde A hasta B; de B a C; de C a D; de D a E.

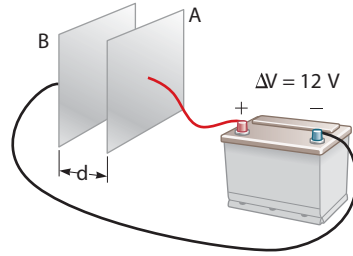


**Figura 24.4** (Examen rápido 24.2) Cuatro superficies equipotenciales.

**Ejemplo 24.1 Campo eléctrico entre dos placas paralelas de carga opuesta**

Una batería tiene una diferencia de potencial específica  $\Delta V$  entre sus terminales y se establece dicha diferencia de potencial entre los conductores unidos a las terminales. Una batería de 12 V se conecta entre dos placas paralelas, como se muestra en la figura 24.5. La separación entre las placas es  $d = 0.30$  cm y se supone que el campo eléctrico entre las placas es uniforme. (Esta suposición es razonable si la separación de las placas es pequeña en relación con las dimensiones de las placas y no se consideran ubicaciones cerca de los bordes de las placas.) Encuentre la magnitud del campo eléctrico entre las placas.

24.2 continuación



**Figura 24.5** (Ejemplo 24.1) Una batería de 12 V conectada a dos placas paralelas. El campo eléctrico entre las placas tiene una magnitud determinada por la diferencia de potencial  $\Delta V$  dividida entre la separación de placa  $d$ .

SOLUCIÓN

**Conceptualizar** En el ejemplo 23.8, se ilustró el campo eléctrico uniforme entre placas paralelas. La nueva característica a este problema es que el campo eléctrico se relaciona con el concepto reciente de potencial eléctrico.

**Categorizar** El campo eléctrico se evalúa a partir de una relación entre campo y potencial dado en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 24.6 para evaluar la magnitud del campo eléctrico entre las placas:

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12 \text{ V}}{0.30 \times 10^{-2} \text{ m}} = 4.0 \times 10^3 \text{ V/m}$$

La configuración de las placas en la figura 24.5 se llama *capacitor de placas paralelas* y se examina con mayor detalle en el capítulo 25.

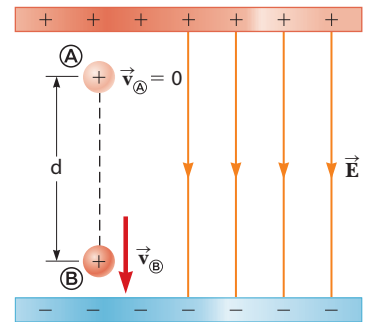
**Ejemplo 24.2** Movimiento de un protón en un campo eléctrico uniforme

Un protón se libera desde el reposo en el punto A en un campo eléctrico uniforme que tiene una magnitud de  $8.0 \times 10^4 \text{ V/m}$  (figura 24.6). El protón se somete a un desplazamiento de magnitud  $d = 0.50 \text{ m}$  al punto B en la dirección de  $\vec{E}$ . Encuentre la rapidez del protón después de completar el desplazamiento.

SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Visualice el protón en la figura 24.6 en movimiento hacia abajo a causa de la diferencia de potencial. La situación es análoga a un objeto que cae libre a través de un campo gravitacional. También compare este ejemplo con el ejemplo 22.7, donde una carga positiva se mueve en un campo eléctrico uniforme. En este ejemplo, se aplicaron los modelos de partícula bajo aceleración constante y de sistemas no aislados. Ahora que hemos investigado la energía potencial eléctrica, ¿qué modelo podemos usar aquí?

**Categorizar** El sistema del protón y las dos placas en la figura 24.6 no interactúa con el ambiente, así que se le modela como un *sistema aislado* para la *energía*.



**Figura 24.6** (Ejemplo 24.2) Un protón acelera de A a B en la dirección del campo eléctrico.

**Analizar** Escriba la reducción adecuada de la ecuación 8.2, la ecuación de conservación de la energía, para el sistema aislado de la carga y el campo eléctrico:

$$\Delta K + \Delta U_E = 0$$

Sustituya los cambios en energía para ambos términos:

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) + e\Delta V = 0$$

Resuelva para la rapidez final del protón y sustituya para  $\Delta V$  de la ecuación 24.6:

$$v = \sqrt{\frac{-2e\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{-2e(-Ed)}{m}} = \sqrt{\frac{2eEd}{m}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v = \sqrt{\frac{2(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(8.0 \times 10^4 \text{ V})(0.50 \text{ m})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}} = 2.8 \times 10^6 \text{ m/s}$$

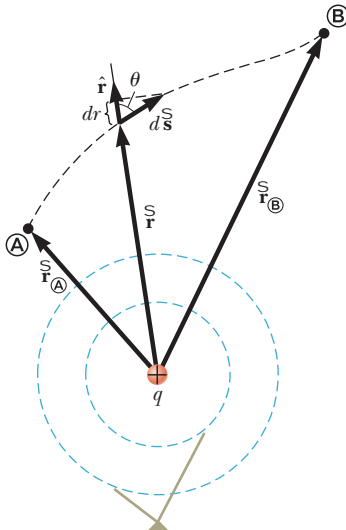
**Finalizar** Ya que  $\Delta V$  es negativa para el campo,  $\Delta U_E$  también es negativa para el sistema protón-campo. El valor negativo de  $\Delta U_E$  significa que la energía potencial del sistema disminuye conforme el protón se mueve en la dirección del campo eléctrico. Conforme el protón acelera en la dirección del campo, adquiere energía cinética y el sistema pierde energía potencial eléctrica al mismo tiempo.

continúa



## 24.2 continuación

La figura 24.6 se orienta de modo que el protón se mueve hacia abajo. El movimiento del protón es análogo al de un objeto que cae en un campo gravitacional. Aunque el campo gravitacional siempre es hacia abajo en la superficie de la Tierra, un campo eléctrico puede estar en cualquier dirección, dependería de la orientación de las placas que producen el campo. Por tanto, la figura 24.6 podría girarse 90 o 180°, y el protón caería horizontalmente o iría hacia arriba en el campo eléctrico!



Los dos círculos discontinuos representan las intersecciones de las superficies equipotenciales esféricas con la página.

**Figura 24.7** La diferencia de potencial entre los puntos A y B a causa de una carga puntual  $q$  depende sólo de las coordenadas radiales  $r_A$  y  $r_B$  inicial y final.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 24.5

**Advertencia respecto a ecuaciones similares** No confunda la ecuación 24.11, para el potencial eléctrico de una carga puntual, con la ecuación 22.9, relativa al campo eléctrico de una carga puntual. El potencial es proporcional a  $1/r$ , en tanto que el campo es proporcional a  $1/r^2$ . El efecto de una carga sobre el espacio que la rodea puede describirse de dos maneras: la carga establece un vector de campo eléctrico  $\vec{E}$ , relacionado con la fuerza que experimenta una carga de prueba colocada en el campo, y establece también un potencial escalar  $V$ , que se relaciona con la energía potencial del sistema de dos cargas, cuando en el campo se coloca una carga de prueba.

## 24.3 Potencial eléctrico y energía potencia debida a cargas puntuales

En la sección 22.4 se explicó el hecho de que una carga puntual positiva  $q$  produce un campo eléctrico que está dirigido radialmente alejándose de la carga. Para determinar el potencial eléctrico en un punto ubicado a una distancia  $r$  de la carga, inicie con la expresión general para la diferencia de potencial, ecuación 24.3

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

donde A y B son los dos puntos arbitrarios que se muestran en la figura 24.7. En cualquier punto en el espacio, el campo eléctrico a causa de la carga puntual es  $\vec{E} = (k_e q/r^2)\hat{r}$  (ecuación 22.9), donde  $\hat{r}$  es un vector unitario radialmente hacia fuera de la carga. Por tanto, la cantidad  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  puede expresarse como

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

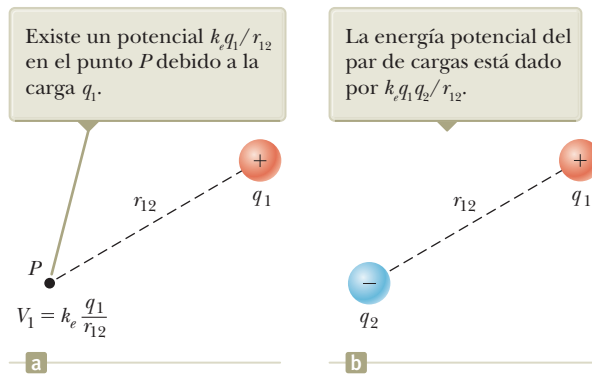
Porque la magnitud de  $\hat{r}$  es 1, el producto punto  $\hat{r} \cdot d\vec{s} = ds \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\hat{r}$  y  $d\vec{s}$ . Además,  $ds \cos \theta$  es la proyección de  $d\vec{s}$  sobre  $\hat{r}$ ; debido a eso  $ds \cos \theta = dr$ . Es decir, cualquier desplazamiento  $d\vec{s}$  a lo largo de la trayectoria del punto A al punto B produce un cambio  $dr$  en la magnitud de  $\vec{r}$ , el vector de posición del punto en relación con la carga que crea el campo. Con estas sustituciones,  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = (k_e q/r^2) dr$ ; en consecuencia, la expresión de la diferencia de potencial se convierte en

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = k_e \frac{q}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} \\ V_B - V_A &= k_e q \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \end{aligned} \quad (24.10)$$

La ecuación 24.10 muestra que la integral de  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  es *independiente* de la trayectoria entre los puntos A y B. Al multiplicar por una carga  $q_0$  que se mueve entre los puntos A y B, se ve que la integral de  $q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$  también es independiente de la trayectoria. Esta última integral que representa el trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre la carga  $q_0$ , que señala que la fuerza eléctrica es conservativa (véase la sección 7.7). Al campo que se relaciona con una fuerza conservativa se le define como **campo conservativo**. Debido a eso, la ecuación 24.10 indica que el campo eléctrico de una carga puntual fija es conservativo. Además, la ecuación 24.10 expresa el resultado importante de que la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera A y B en un campo producido por una carga puntual depende sólo de las coordenadas radiales  $r_A$  y  $r_B$ . Por lo común se elige la referencia del potencial eléctrico de una carga puntual, de forma que sea  $V_A = 0$  en  $r_A = \infty$ . Con esta referencia, el potencial eléctrico establecido por una carga puntual a cualquier distancia  $r$  de la carga es

$$V = k_e \frac{q}{r} \quad (24.11)$$

El potencial eléctrico resultante de dos o más cargas puntuales se obtiene mediante la aplicación del principio de superposición. Es decir, el potencial eléctrico total en algún punto  $P$  debido a varias cargas puntuales es la suma de los potenciales debi-



**Figura 24.8** a) La carga  $q_1$  establece un potencial eléctrico en el punto  $P$ . b) la carga  $q_2$  es traída desde el infinito al punto  $P$ .

dos a las cargas individuales. Para un grupo de cargas puntuales, puede expresar el potencial eléctrico total en  $P$  como

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (24.12)$$

◀ Potencial eléctrico debido a varias cargas puntuales

La figura 24.8 muestra una carga  $q_1$ , que establece un campo eléctrico a través del espacio. La carga también establece un potencial eléctrico en todos los puntos, incluyendo el punto  $P$ , donde el potencial eléctrico es  $V_1$ . Ahora imagine que un agente externo trae una carga  $q_2$  desde el infinito hasta el punto  $P$ . El trabajo que hay que hacer para hacer esto se da por la ecuación 24.4,  $W = q_2 \Delta V$ . Este trabajo representa una transferencia de energía hacia el interior del sistema y aparece en éste como energía potencial  $U_E$  cuando las partículas están separadas una distancia  $r_{12}$  (figura 24.8b). De la ecuación 8.2, tenemos que  $W = \Delta U_E$ . Por lo tanto, la **energía potencial eléctrica** de un par de cargas<sup>1</sup> puntuales puede determinarse de la siguiente forma:

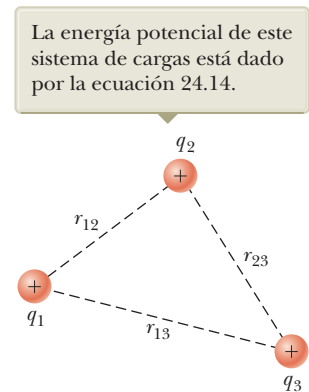
$$\begin{aligned} \Delta U_E = W = q_2 \Delta V &\rightarrow U_E - 0 = q_2 \left( k_e \frac{q_1}{r_{12}} - 0 \right) \\ U_E &= k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \end{aligned} \quad (24.13)$$

Si las cargas son del mismo signo,  $U_E$  es positiva. Un agente externo debe realizar un trabajo positivo sobre un sistema para acercar las dos cargas (ya que cargas del mismo signo se repelen). Si las cargas son de signos opuestos como en la figura 24.8b, entonces,  $U_E$  es negativa. Un agente externo deberá realizar un trabajo negativo en contra de la fuerza de atracción entre cargas de signo opuesto al acercar la una a la otra; debe aplicarse una fuerza opuesta al desplazamiento para impedir que  $q_2$  se acelere hacia  $q_1$ .

Si el sistema consiste en más de dos partículas con carga, se obtiene la energía potencial total si calcula  $U_E$  para cada *par* de cargas y suma los términos algebraicamente. Como un ejemplo, la energía potencial total del sistema de tres cargas que se muestra en la figura 24.9 es

$$U_E = k_e \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \quad (24.14)$$

Físicamente, puede interpretar el resultado como sigue: imagine que  $q_1$  está fija en la posición que se muestra en la figura 24.9. No es necesario el trabajo de un agente externo para realizar esto ya que  $V = 0$  debido a otras cargas y a que no hay más cargas en las cercanías. Ahora, el trabajo que debe hacer un agente externo para traer



**Figura 24.9** Tres cargas puntuales están fijas en las posiciones que se muestran.

<sup>1</sup>La expresión de la energía potencial eléctrica de un sistema formado por dos cargas puntuales, ecuación 24.13, es de la *misma* estructura que la ecuación de la energía potencial gravitacional de un sistema formado por dos masas puntuales:  $-Gm_1 m_2 / r$  (véase el capítulo 13). La similitud no es sorprendente en vista de que ambas expresiones se deducen de una ley de fuerzas del cuadrado inverso.

a  $q_2$  del infinito a una posición cerca de  $q_1$  es  $k_e q_1 q_2 / r_{12}$ , que es el primer término de la ecuación 24.14. Los dos últimos términos representan el trabajo requerido para mover a  $q_3$  del infinito a una posición cerca de  $q_1$  y  $q_2$ . (El resultado es independiente del orden en el cual se transporten las cargas.)

- EJERCICIO RÁPIDO 24.3** En la figura 24.8b, considere  $q_2$  como la fuente de carga negativa y  $q_1$  como la segunda carga a la que se le puede cambiar el signo. (i) Si  $q_1$  inicialmente es positiva y cambia a una carga de la misma magnitud, pero negativa, ¿qué ocurre con el potencial en la posición de  $q_1$  debido a  $q_2$ ? (a) Aumenta. (b) Disminuye. (c) Permanece igual. (ii) Cuando  $q_1$  cambia de positiva a negativa, ¿qué ocurre con la energía potencial del sistema de dos cargas? Elija entre las mismas posibilidades.

### Ejemplo 24.3 Potencial eléctrico debido a dos cargas puntuales

Como se muestra en la figura 24.10a, una carga  $q_1 = 2.00 \mu\text{C}$  se ubica en el origen y una carga  $q_2 = -6.00 \mu\text{C}$  se ubica en  $(0, 3.00)$  m.

(A) Encuentre el potencial eléctrico total debido a estas cargas en el punto  $P$ , cuyas coordenadas son  $(4.00, 0)$  m.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Reconozca que las cargas de  $2.00 \mu\text{C}$  y de  $-6.00 \mu\text{C}$  son cargas fuente y establecen un campo eléctrico así como un potencial en todos los puntos del espacio, incluido el punto  $P$ .

**Categorizar** El potencial se evalúa con una ecuación desarrollada en este capítulo, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 24.12 para el sistema de dos cargas fuente:

$$V_P = k_e \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

Sustituya valores numéricos:

$$\begin{aligned} V_P &= (8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \left( \frac{2.00 \times 10^{-6} \text{ C}}{4.00 \text{ m}} + \frac{-6.00 \times 10^{-6} \text{ C}}{5.00 \text{ m}} \right) \\ &= -6.29 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned}$$

(B) Encuentre el cambio en energía potencial del sistema de dos cargas más una tercera carga  $q_3 = 3.00 \mu\text{C}$  conforme la última carga se mueve del infinito al punto  $P$  (figura 24.10b).

#### SOLUCIÓN

Asigne  $U_i = 0$  para el sistema en una configuración en que la carga  $q_3$  está en el infinito. Use la ecuación 24.2 para evaluar la energía potencial para la configuración en que la carga está en  $P$ :

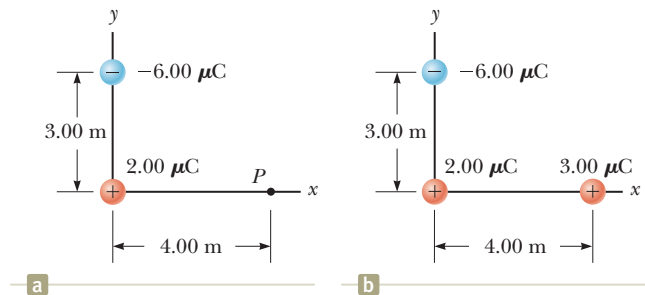
$$U_f = q_3 V_P$$

Sustituya valores numéricos para evaluar  $\Delta U_E$ :

$$\begin{aligned} \Delta U_E &= U_f - U_i = q_3 V_P - 0 = (3.00 \times 10^{-6} \text{ C})(-6.29 \times 10^3 \text{ V}) \\ &= -1.89 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

Por tanto, ya que la energía potencial del sistema disminuyó, un agente externo tiene que hacer trabajo positivo para retirar la carga del punto  $P$  de regreso al infinito.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Trabaja este ejemplo con una compañera de clase y ella le dice: “¡Espera un minuto! En la parte (B) se ignoró la energía potencial asociada con el par de cargas  $q_1$  y  $q_2$ !”. ¿Cómo respondería?



**Figura 24.10** (Ejemplo 24.3) (a) El potencial eléctrico en  $P$  debido a las dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  es la suma algebraica de los potenciales debidos a las cargas individuales. (b) Una tercera carga  $q_3 = 3.00 \mu\text{C}$  se lleva desde el infinito al punto  $P$ .





## 24.3 continuación

**Respuesta** Dado el enunciado del problema, no es necesario incluir esta energía potencial porque en el inciso B) pide el cambio en energía potencial del sistema conforme  $q_3$  se lleva desde el infinito. Ya que la configuración de las cargas  $q_1$  y  $q_2$  no cambia en el proceso, no hay  $\Delta U_E$  asociada con estas cargas. Sin embargo, si la parte (B) hubiese pedido encontrar el cambio en energía potencial cuando las tres cargas inician separadas desde el infinito y después se llevan a las posiciones en la figura 24.10b, tendría que calcular el cambio usando la ecuación 24.14.

## 24.4 Obtención del valor del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico

El campo eléctrico  $\vec{E}$  y el potencial eléctrico  $V$  están relacionados, como se mostró en la ecuación 24.3 que se usa para encontrar  $\Delta V$  si el campo eléctrico  $\vec{E}$  se conoce. ¿Qué pasa si la situación se invierte? ¿Cómo se calcula el valor del campo eléctrico si el potencial eléctrico se conoce en una determinada región?

A partir de la ecuación 24.3 la diferencia de potencial  $dV$  entre dos puntos separados una distancia  $ds$  puede expresarse como

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (24.15)$$

Si el campo eléctrico tiene sólo una componente  $E_x$ , entonces  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx$ . Por tanto, la ecuación 24.15 se convierte en  $dV = -E_x dx$ , o

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \quad (24.16)$$

Es decir, la componente en  $x$  del campo eléctrico es igual al negativo de la derivada del potencial eléctrico respecto a  $x$ . Pueden hacerse enunciados similares acerca de las componentes en  $y$  y en  $z$ . La ecuación 24.16 es la afirmación matemática del hecho de que el campo eléctrico es una medida de la rapidez de cambio del potencial eléctrico con suposición, como se mencionó en la sección 24.1.

Experimentalmente, el potencial eléctrico y la posición se pueden medir con facilidad si utiliza un voltímetro (dispositivo para medir la diferencia de potencial) y una cinta métrica. En consecuencia, un campo eléctrico se determina al medir el potencial eléctrico en varias posiciones en el campo y dibujando una gráfica de los resultados. De acuerdo con la ecuación 24.16, la pendiente de la gráfica de  $V$  en función de  $x$  en un punto determinado nos proporciona la magnitud del campo eléctrico en ese punto.

Imagine que inicia en un punto y se somete a un desplazamiento  $d\vec{s}$  a lo largo de una superficie equipotencial, entonces  $dV = 0$  ya que el potencial es constante en una superficie equipotencial. Por la ecuación 24.15, se reconoce que  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ ; por tanto, ya que el producto punto es cero,  $\vec{E}$  debe ser perpendicular al desplazamiento a lo largo de la superficie equipotencial. Esto demuestra que las superficies equipotenciales siempre deben ser perpendiculares a las líneas de campo eléctrico que pasan a través de ellas.

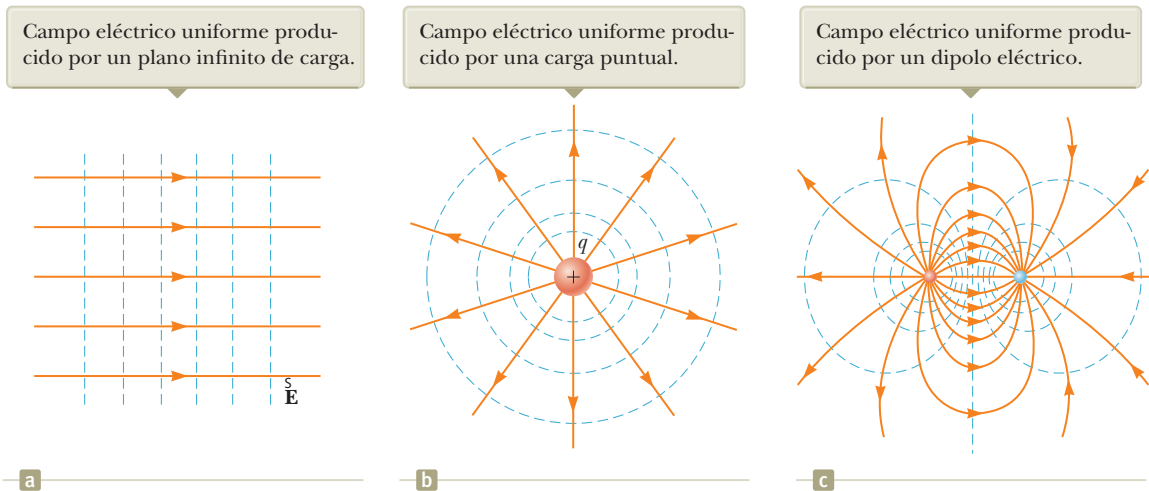
Como se mencionó al final de la sección 24.2, las superficies equipotenciales asociadas con un campo eléctrico uniforme están constituidas en una familia de planos perpendiculares a las líneas de campo. La figura 24.11a (página 646) muestra algunas superficies equipotenciales representativas de esta situación.

Si la distribución de carga que origina un campo eléctrico tiene simetría esférica tal que la densidad de carga volumétrica depende sólo de la distancia radial  $r$ , el campo eléctrico es radial. En este caso,  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_r dr$ , y se puede expresar  $dV$  en la forma  $dV = -E_r dr$ . Por tanto,

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad (24.17)$$

Por ejemplo, el potencial eléctrico de una carga puntual es  $V = k_e q/r$ . Debido a que  $V$  es sólo función de  $r$ , la función potencial tiene simetría esférica. Al aplicar la ecuación 24.17, encuentra que la magnitud del campo eléctrico debido a la carga





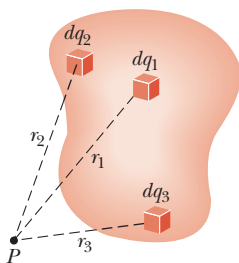
**Figura 24.11** Superficies equipotenciales (las líneas azules punteadas son las intersecciones de estas superficies con la página) y las líneas de campo eléctrico. En todos los casos, las superficies equipotenciales son *perpendiculares* a las líneas de campo eléctrico en todos los puntos.

puntual es  $E_r = k_e q/r^2$ , un resultado familiar. Observe que el potencial sólo cambia en dirección radial, no en cualquier dirección perpendicular a  $r$ . Por tanto,  $V$  (igual que  $E$ ) sólo es función de  $r$ , lo cual es consistente con la idea de que las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo. En este caso, las superficies equipotenciales forman una familia de esferas concéntricas con la distribución de carga de simetría esférica (figura 24.11b). Las superficies equipotenciales para un dipolo eléctrico se trazan en la figura 24.11c.

En general, el potencial eléctrico es una función de las tres coordenadas espaciales. Si  $V(r)$  se da en coordenadas cartesianas, las componentes  $E_x$ ,  $E_y$  y  $E_z$  del campo eléctrico pueden ser determinadas fácilmente a partir de  $V(x, y, z)$  como derivadas parciales<sup>2</sup>

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (24.18)$$

Determinación del campo eléctrico a partir del potencial ▶



**Figura 24.12** Es posible calcular el potencial eléctrico en el punto  $P$  debido a una distribución de carga continua, al dividir la distribución de carga en los elementos de carga  $dq$  y sumar las contribuciones del potencial eléctrico de todos ellos. Se muestran tres ejemplos de elementos de carga.

- E XAMEN RÁPIDO 24.4** En cierta región del espacio el potencial eléctrico es igual a cero en todos los puntos a lo largo del eje  $x$ . (i) De ello es posible concluir que en esta región la componente en  $x$  del campo eléctrico es: (a) cero, (b) en la dirección positiva de  $x$ , o (c) en la dirección negativa de  $x$ . (ii) Suponga que el potencial eléctrico es de  $+2$  V en todas partes a lo largo del eje  $x$ . De las mismas opciones, ¿qué se puede concluir sobre el componente  $x$  del campo eléctrico ahora?

## 25.5 Potencial eléctrico debido a distribuciones continuas de carga

En la sección 24.3, encontramos la forma de determinar el potencial eléctrico debido a un pequeño número de cargas. ¿Qué pasa si queremos encontrar el potencial debido a una distribución continua de carga? El potencial eléctrico en esta situación se puede calcular utilizando dos métodos diferentes. El primer método es el siguiente. Si conoce la distribución de carga, considere el potencial debido a un elemento de carga  $dq$  pequeño y trate a este elemento como una carga puntual (figura 24.12). Por la ecuación 24.11 el potencial eléctrico  $dV$

<sup>2</sup>En notación vectorial, a menudo  $\vec{E}$  se escribe en los sistemas de coordenadas cartesianas de la forma

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

donde  $\nabla$  es conocido como el *operador gradiente*.

en algún punto  $P$ , debido al elemento de carga  $dq$ , es

$$dV = k_e \frac{dq}{r} \quad (24.19)$$

donde  $r$  es la distancia desde el elemento de carga al punto  $P$ . Para tener el potencial total en el punto  $P$ , integre la ecuación 24.19 a fin de incluir las contribuciones de todos los elementos de la distribución de carga. Ya que cada elemento está, por lo general, a una distancia diferente del punto  $P$ , y  $k_e$  es constante, podemos expresar  $V$  como

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \quad (24.20) \quad \blacktriangleleft \text{Potencial eléctrico debido a una distribución continua de carga}$$

En efecto, se ha remplazado la suma en la ecuación 24.12 por una integral. En esta expresión para  $V$  el potencial eléctrico se supone igual a cero cuando el punto  $P$  se encuentra infinitamente lejos de la distribución de carga.

El segundo método para calcular el potencial eléctrico se utiliza si el campo eléctrico es ya conocido a partir de otras consideraciones como la ley de Gauss. Si la distribución de la carga tiene suficiente simetría, primero, mediante la ley de Gauss, evalúe  $\vec{E}$  y después sustituya el valor obtenido en la ecuación 24.3, para determinar la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre dos puntos cualesquiera. A continuación se elige el valor del potencial eléctrico  $V$  de cero en algún punto conveniente.

### ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Cálculo del potencial eléctrico

Se recomienda el siguiente procedimiento para resolver problemas que involucren la determinación de un potencial eléctrico debido a una distribución de carga.

**1. Conceptualizar.** Piense cuidadosamente en las cargas individuales o en la distribución de carga que plantea el problema e imagine qué tipo de potencial sería establecido. Recorra a cualquier simetría en el ordenamiento de cargas para ayudarse a visualizar el potencial.

**2. Categorizar.** ¿Se analiza un grupo de cargas individuales o una distribución continua de carga? La respuesta a esta pregunta le dirá cómo proceder en la etapa *Analizar*.

**3. Analizar.** Cuando trabaje problemas que involucren potencial eléctrico, recuerde que es una *cantidad escalar*, de modo que no hay componentes a considerar. Por tanto, cuando use el principio de superposición para evaluar el potencial eléctrico en un punto, simplemente tome la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga. Sin embargo, debe acordarse de los signos.

Igual que con la energía potencial en mecánica, sólo son significativos los *cambios* en el potencial eléctrico; por ende, el punto donde el potencial se establece en cero es arbitrario. Cuando se trata con cargas puntuales o una distribución de carga de tamaño finito, por lo general se define  $V = 0$  como un punto infinitamente alejado de las cargas. No obstante, si la distribución de carga en sí se extiende hasta el infinito, se debe seleccionar algún otro punto cercano como el punto de referencia.

(a) *Si analiza un grupo de cargas individuales:* use el principio de superposición, que afirma que cuando están presentes varias cargas puntuales, el potencial resultante en un punto en el espacio es la *suma algebraica* de los potenciales individuales debidos a las cargas individuales (ecuación 24.12). El ejemplo 24.4 demostró este procedimiento.

(b) *Si analiza una distribución de carga continua:* sustituya las sumas para evaluar el potencial total en algún punto  $P$  a partir de cargas individuales mediante integrales (ecuación 24.20). El potencial total en  $P$  se obtiene al integrar sobre toda la distribución de carga. Para muchos problemas es posible, al realizar la integración, expresar  $dq$  y  $r$  en términos de una sola variable. Para simplificar la integración tenga especial cuidado con la geometría involucrada en el problema. Los ejemplos del 24.5 al 24.7 demuestran tal procedimiento.

*Para obtener el potencial a partir del campo eléctrico:* otro método utilizado para obtener el potencial es comenzar con la definición de la diferencia de potencial dada por la ecuación 24.3. Si conoce  $\vec{E}$  o lo puede obtener fácilmente (como a partir de la ley de Gauss), se puede evaluar la integral de línea de  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ .

**4. Finalizar.** Compruebe para ver si su expresión para el potencial es consistente con la representación mental y refleja cualquier simetría notada previamente. Imagine variar parámetros como la distancia del punto de observación desde las cargas o el radio de cualquier objeto circular para saber si el resultado matemático cambia en una forma razonable.



## Ejemplo 24.4 Potencial eléctrico debido a un dipolo

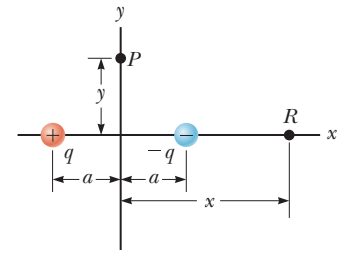
Un dipolo eléctrico consiste de dos cargas de igual magnitud y signo opuesto separadas por una distancia  $2a$  como se muestra en la figura 24.13. El dipolo está a lo largo del eje  $x$  y tiene centro en el origen.

(A) Calcule el potencial eléctrico en el punto  $P$  sobre el eje  $y$ .

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Compare esta situación con la del inciso B) del ejemplo 22.6. Es la misma situación, pero en este caso se busca el potencial eléctrico en lugar del campo eléctrico.

**Categorizar** Clasificamos el problema como uno en el que tenemos un pequeño número de partículas en lugar de una distribución continua de carga. El potencial eléctrico se puede evaluar al sumar los potenciales debidos a las cargas individuales.



**Figura 24.13** (Ejemplo 24.4) Dipolo eléctrico ubicado sobre el eje  $x$ .

**Analizar** Use la ecuación 24.12 para hallar el potencial eléctrico en  $P$  debido a las dos cargas:

$$V_P = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left( \frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right) = 0$$

(B) Calcule el potencial eléctrico en el punto  $R$  sobre el eje  $x$  positivo.

## SOLUCIÓN

Use la ecuación 24.12 para encontrar el potencial eléctrico en  $R$  debido a las dos cargas:

$$V_R = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left( \frac{-q}{x-a} + \frac{q}{x+a} \right) = -\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

(C) Calcule  $V_y$  y  $E_x$  en un punto sobre el eje  $x$  lejos del dipolo.

## SOLUCIÓN

Para el punto  $R$  lejos del dipolo tal que  $x \gg a$ , ignore  $a^2$  en el denominador de la respuesta de la parte (B) y escriba  $V$  en este límite:

$$V_R = \lim_{x \gg a} \left( -\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2} \right) \approx -\frac{2k_e qa}{x^2} \quad (x \gg a)$$

Use la ecuación 24.16 y este resultado para calcular la componente  $x$  del campo eléctrico en un punto sobre el eje  $x$  lejos del dipolo:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( -\frac{2k_e qa}{x^2} \right) \\ &= 2k_e qa \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{4k_e qa}{x^3} \quad (x \gg a) \end{aligned}$$

**Finalizar** Los potenciales en las partes (B) y (C) son negativos, porque los puntos sobre el eje  $x$  positivo están más cerca de la carga negativa que de la carga positiva. Por la misma razón, la componente  $x$  del campo eléctrico es negativa. Observe que tenemos una caída de  $1/r^3$  del campo eléctrico con la distancia lejos del dipolo, similar al comportamiento del campo eléctrico en el eje  $y$  en el ejemplo 22.6.

## ¿QUÉ PASARÍA SI?

Suponga que quiere encontrar el campo eléctrico en un punto  $P$  sobre el eje  $y$ . En la parte (A), se encontró que el potencial eléctrico es cero para todos los valores de  $y$ . El campo eléctrico, ¿es cero en todos los puntos sobre el eje  $y$ ?

**Respuesta** No. Que no haya cambio en el potencial a lo largo del eje  $y$  sólo dice que la componente  $y$  del campo eléctrico es cero. Vea de nuevo la figura 22.13 en el ejemplo 22.6. Se demostró que el campo eléctrico de un dipolo sobre el eje  $y$  sólo tiene una componente  $x$ . No se puede encontrar la componente  $x$  en el ejemplo actual porque no se tiene una expresión para el potencial cerca del eje  $y$  como función de  $x$ .



**Ejemplo 24.5** Potencial eléctrico debido a un anillo con carga uniforme

**(A)** Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en un punto  $P$  ubicado sobre el eje central perpendicular de un anillo con carga uniforme de radio  $a$  y carga total  $Q$ .

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Estudie la figura 24.14, en la que el anillo se orienta de modo que su plano es perpendicular al eje  $x$  y su centro está en el origen. Tenga en cuenta que la simetría de la situación significa que todas las cargas en el anillo están a la misma distancia del punto  $P$ . Compare este ejemplo con el Ejemplo 23.2. Observe que las consideraciones vectoriales no son necesarias aquí, porque el potencial eléctrico es una magnitud escalar.

**Categorizar** Ya que el anillo consiste en una distribución continua de carga en lugar de un conjunto de cargas discretas, en este ejemplo debe usar la técnica de integración representada por la ecuación 24.20.

**Analizar** Tome el punto  $P$  a una distancia  $x$  desde el centro del anillo, como se muestra en la figura 24.14.

Aplique la ecuación 24.20 para expresar  $V$  en términos de la geometría:

Note que  $a$  y  $x$  no varían para la integración sobre el anillo, así que pase  $\sqrt{a^2 + x^2}$  al frente de la integral e integre sobre el anillo:

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (24.21)$$

**(B)** Determine una expresión para la magnitud del campo eléctrico en el punto  $P$ .

**SOLUCIÓN**

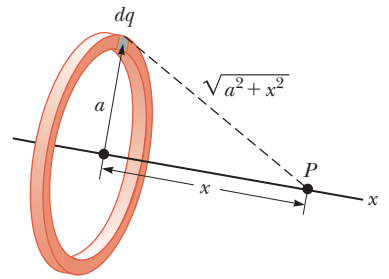
A partir de la simetría, observe que a lo largo del eje  $x$ ,  $\vec{E}$  puede tener sólo una componente  $x$ . Por lo tanto, aplique la ecuación 24.16 a la ecuación 24.21:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e Q \frac{d}{dx} (a^2 + x^2)^{-1/2}$$

$$= -k_e Q \left(-\frac{1}{2}\right) (a^2 + x^2)^{-3/2} (2x)$$

$$E_x = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} Q \quad (24.22)$$

**Finalizar** La única variable en las expresiones para  $V$  y  $E_x$  es  $x$ . Esto no es de sorprender porque los cálculos son válidos sólo para puntos a lo largo del eje  $x$ , donde  $y$  y  $z$  son cero. Este resultado para el campo eléctrico concuerda con el obtenido mediante integración directa (véase el ejemplo 23.2). En la práctica, utilice el resultado de la parte (B) en la ecuación 24.3 para verificar que el potencial está dado por la expresión en la parte (A).



**Figura 24.14** (Ejemplo 24.5) Un anillo de radio  $a$  con carga uniforme, yace en un plano perpendicular al eje  $x$ . Todos los elementos  $dq$  del anillo están a la misma distancia de un punto  $P$  que se encuentra sobre el eje  $x$ .

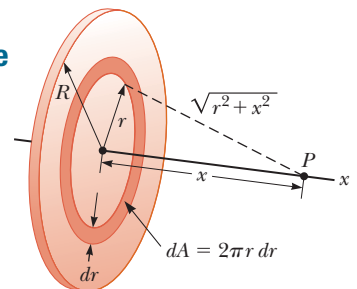
**Ejemplo 24.6** Potencial eléctrico debido a un disco con carga uniforme

Un disco con carga uniforme tiene radio  $R$  y densidad de carga superficial  $\sigma$ .

**(A)** Encuentre el potencial eléctrico en un punto  $P$  a lo largo del eje central perpendicular del disco.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Si considera que el disco es un conjunto de anillos concéntricos, es posible usar el resultado del ejemplo 24.5 que da el potencial establecido por un anillo de radio  $a$  y sumar las aportaciones de todos los anillos que conforman el disco. La figura 24.15 muestra uno de estos anillos. Debido a que el punto  $P$  está en el eje central del disco, la simetría de nuevo nos dice que todos los puntos en un anillo tienen la misma distancia a  $P$ .



**Figura 24.15** (Ejemplo 24.6) Un disco de radio  $R$ , con carga uniforme, yace en un plano perpendicular al eje  $x$ . El cálculo del potencial eléctrico en cualquier punto  $P$  sobre el eje  $x$  se simplifica al dividir el disco en muchos anillos de radio  $r$  y ancho  $dr$ , con área  $2\pi r dr$ .

continúa



## 24.6 continuación

**Categorizar** Ya que el disco es continuo, se evalúa el potencial debido a una distribución de carga continua en lugar de un grupo de cargas individuales.

**Analizar** Encuentre la cantidad de carga  $dq$  en un anillo de radio  $r$  y ancho  $dr$ , como se muestra en la figura 24.15:

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr) = 2\pi\sigma r dr$$

Use este resultado en la ecuación 24.21 en el ejemplo 24.5 (con  $r$  en lugar de  $a$  y  $dq$  en lugar de  $Q$ ) para encontrar el potencial debido al anillo:

$$dV = \frac{k_e dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k_e (2\pi\sigma r dr)}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Para obtener el potencial total en  $P$ , integre esta expresión sobre los límites  $r = 0$  a  $r = R$ , y observe que  $x$  es una constante:

$$V = \pi k_e \sigma \int_0^R \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \pi k_e \sigma \int_0^R (r^2 + x^2)^{-1/2} d(r^2)$$

$$V = 2\pi k_e \sigma [(R^2 + x^2)^{1/2} - x] \quad (24.23)$$

Esta integral es de la forma común  $\int u^n du$ , donde  $n = -\frac{1}{2}$  y  $u = r^2 + x^2$  y tiene el valor  $u^{n+1}/(n+1)$ . Use este resultado para evaluar la integral:

**(B)** Encuentre la componente  $x$  del campo eléctrico en un punto  $P$  a lo largo del eje central perpendicular del disco.

## SOLUCIÓN

Como en el ejemplo 24.5, use la ecuación 24.16 para encontrar el campo eléctrico en cualquier punto axial:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k_e \sigma \left[ 1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \quad (24.24)$$

**Finalizar** Compare la ecuación 24.24 con el resultado del ejemplo 23.3. El cálculo de  $V$  y  $\vec{E}$  para un punto arbitrario fuera del eje  $x$  es más difícil de realizar y en este libro no se trata dicha situación.

## Ejemplo 24.7 Potencial eléctrico debido a una línea de carga finita

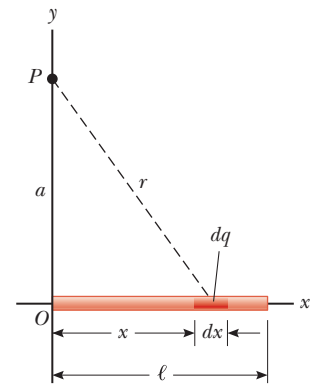
Una barra de longitud  $\ell$  ubicada a lo largo del eje  $x$  tiene una carga total  $Q$  y una densidad de carga lineal uniforme  $\lambda$ . Encuentre el potencial eléctrico en un punto  $P$  ubicado sobre el eje  $y$  a una distancia  $a$  del origen (figura 24.16).

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El potencial en  $P$  debido a cada segmento de carga sobre la barra es positivo porque cada segmento tiene una carga positiva. Note que, a pesar de no haber simetría, la geometría elemental puede evidenciar claramente el problema.

**Categorizar** Ya que la barra es continua, evalúe el potencial debido a una distribución de carga continua en lugar de un grupo de cargas individuales.

**Figura 24.16** (Ejemplo 24.7) Línea de carga uniforme, de longitud  $\ell$ , ubicada a lo largo del eje  $x$ . Para calcular el potencial eléctrico en  $P$ , la línea de carga se divide en segmentos, cada uno de longitud  $dx$  y carga  $dq = \lambda dx$ .



**Analizar** En la figura 24.16, la barra se encuentra a lo largo del eje  $x$ ,  $dx$  es la longitud de un segmento pequeño y  $dq$  es la carga en dicho segmento. Ya que la barra tiene una carga por cada unidad de longitud  $\lambda$ , la carga  $dq$  sobre el segmento pequeño es  $dq = \lambda dx$ .

Encuentre el potencial en  $P$  debido a un segmento de la barra en una posición arbitraria  $x$ :

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Encuentre el potencial total en  $P$  al integrar esta expresión sobre los límites  $x = 0$  a  $x = \ell$ :

$$V = \int_0^\ell k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

## 24.7 continuación

Observe que  $k_e \lambda$  y  $\lambda = Q/\ell$  son constantes y se pueden retirar de la integral, evalúe la integral con la ayuda del apéndice B:

$$V = k_e \lambda \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{Q}{\ell} \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) \Big|_0^\ell$$

Evalúe el resultado entre los límites:  $V = k_e \frac{Q}{\ell} [\ln(\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}) - \ln a] = k_e \frac{Q}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a}\right)$  (24.25)

**Finalizar** Si  $\ell \ll a$ , el potencial en P debe acercarse a la de una carga puntual debido a que la varilla es muy corta en comparación con la distancia de la varilla a P. Usando la serie para el logaritmo natural del apéndice B.5, es fácil demostrar que la ecuación 24.25 se convierte en  $V = k_e Q/a$ .

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si se le pide encontrar el campo eléctrico en el punto P? ¿Sería un cálculo simple?

**Respuesta** Calcular el campo eléctrico mediante la ecuación 23.1 sería un poco engorroso. No hay simetría que se pueda usar y la integración sobre la línea de carga representaría una suma vectorial de campos eléctricos en el punto P. Al usar la ecuación 24.18 podría encontrar  $E_y$  al sustituir  $a$  con  $y$  en la ecuación 24.25 y realizar la derivación respecto a  $y$ . Puesto que la barra con carga de la figura 24.16 yace

por completo a la derecha de  $x = 0$ , el campo eléctrico en el punto P tendría una componente  $x$  a la izquierda si la barra está cargada positivamente. Sin embargo, no puede usar la ecuación 24.18 para encontrar la componente  $x$  del campo, porque el potencial debido a la barra se evaluó en un valor específico de  $x$  ( $x = 0$ ) en lugar de un valor general de  $x$ . Tendría que encontrar el potencial como función tanto de  $x$  como de  $y$  para ser capaz de encontrar las componentes  $x$  y  $y$  del campo eléctrico con la ecuación 24.18.

## 24.6 Conductores en equilibrio electrostático

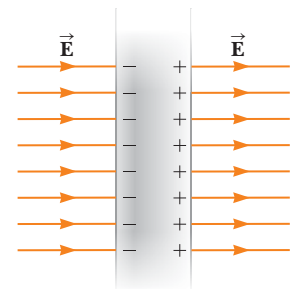
Como aprendió en la sección 22.2, un buen conductor eléctrico contiene cargas (electrones) que no se encuentran unidas a ningún átomo y debido a eso tienen la libertad de moverse en el interior del material. Cuando dentro de un conductor no existe ningún movimiento neto de carga, el conductor está en **equilibrio electrostático**. Un conductor en equilibrio electrostático tiene las siguientes propiedades:

1. En el interior del conductor el campo eléctrico es cero, si el conductor es sólido o hueco.
2. Si un conductor aislado tiene carga, ésta reside en su superficie.
3. El campo eléctrico justo fuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud  $\sigma/\epsilon_0$ , donde  $\sigma$  es la densidad de carga superficial en ese punto.
4. En un conductor de forma irregular, la densidad de carga superficial es máxima en aquellos puntos donde el radio de curvatura de la superficie es menor.

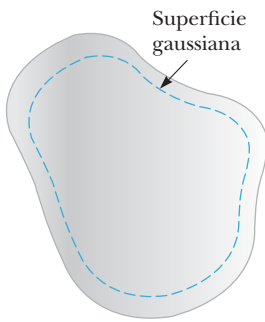
◀ Propiedades de un conductor electrostático en equilibrio

Es posible comprender la primera propiedad considerando una placa conductora colocada en un campo eléctrico externo  $\vec{E}$  (figura 24.17). El campo eléctrico en el interior del conductor *debe ser* igual a cero bajo la hipótesis de que existe equilibrio electrostático. En caso de que el campo no sea cero, los electrones libres en el interior del conductor experimentarían una fuerza eléctrica  $\vec{F} = q\vec{E}$  y, debido a ella, se acelerarían. Sin embargo, este movimiento de electrones, significaría que el conductor no está en equilibrio electrostático. Por tanto, la existencia de un equilibrio electrostático es consistente solamente cuando se tiene un campo cero dentro del conductor.

Veamos cómo se da este campo cero. Antes de aplicar el campo externo, en todo el volumen del conductor están distribuidos electrones libres de manera uniforme. Al aplicar el campo externo, los electrones libres se aceleran hacia la izquierda, como se ve en la figura 24.17, lo que genera un plano con carga negativa que se acumula en la superficie izquierda. El movimiento de los electrones hacia la izquierda causa un plano de carga positiva en la superficie derecha. Estos planos de carga crean un campo eléctrico adicional en el interior del conductor que se opone al campo externo. Conforme se mueven los electrones, las densidades de carga superficial de las superficies izquierda y derecha se incrementan hasta que la magnitud del campo interno



**Figura 24.17** Placa conductora en un campo eléctrico externo  $\vec{E}$ . Las cargas inducidas sobre las dos superficies de la placa producen un campo eléctrico que se opone al campo externo, lo que produce en el interior de la placa un campo eléctrico resultante igual a cero.



**Figura 24.18** Conductor con forma arbitraria. La línea discontinua representa una superficie gaussiana que puede acercarse a la superficie del conductor tanto como uno lo desee.

es igual a la magnitud del externo, lo que resulta en un campo eléctrico cero en el interior del conductor. El tiempo que necesita un buen conductor para alcanzar el equilibrio es del orden de  $10^{-16}$  s, lo que para la mayor parte de los efectos se considera instantáneo.

Es posible utilizar la ley de Gauss para verificar la segunda propiedad de un conductor en equilibrio electrostático. La figura 24.18 muestra un conductor de forma arbitraria. Se ha dibujado una superficie gaussiana en el interior del conductor, que quede muy cerca de la superficie del conductor. Como acaba de ver, el campo eléctrico en todos los puntos del interior del conductor es igual a cero cuando se encuentra en equilibrio electrostático. Por tanto, el campo eléctrico debe ser cero en todos los puntos de la superficie gaussiana, en cumplimiento de la condición (4) de la sección 23.4 y el flujo neto que pasa a través de la superficie gaussiana es cero. De este resultado y de la ley de Gauss se concluye que la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es cero. Ya que no puede existir ninguna carga neta en el interior de la superficie gaussiana (que colocó de manera arbitraria muy cerca de la superficie del conductor), cualquier carga neta en el conductor deberá residir sobre su superficie. La ley de Gauss no indica la forma en que esta carga excesiva se distribuye sobre la superficie del conductor; dice, exclusivamente, que reside sobre la superficie.

Para verificar la tercera propiedad, comencemos con la perpendicularidad del campo a la superficie. Si el vector de campo  $\vec{E}$  tuviera algún componente paralelo a la superficie del conductor, los electrones libres estarían sujetos a una fuerza eléctrica y se moverían a lo largo de la superficie; en este caso, el conductor no estaría en equilibrio, por lo que el vector de campo debe ser perpendicular a la superficie.

Para determinar la magnitud del campo eléctrico se dibujará una superficie gaussiana en forma de un pequeño cilindro cuyas caras extremas queden paralelas al conductor (figura 24.19). Parte del cilindro queda justo fuera del conductor y parte está en el interior. El campo es perpendicular a la superficie del conductor si parte de la condición de equilibrio electrostático. Por tanto, ha satisfecho la condición (3) de la sección 23.4 en lo que se refiere a la parte curva de la superficie gaussiana cilíndrica: no existe flujo a través de esta parte de la superficie gaussiana, ya que  $\vec{E}$  es paralelo a la superficie. A través de la cara plana del cilindro en el interior del conductor no existe flujo porque en este caso  $\vec{E} = 0$ ; con ello se satisface la condición (4). Por esto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana corresponde al flujo a través de la cara plana en la parte exterior del conductor, donde el campo es perpendicular a la superficie gaussiana. Si para esta cara utiliza las condiciones (1) y (2), el flujo es igual a  $EA$ , siendo  $E$  el campo eléctrico justo fuera del conductor y  $A$  el área de la cara del cilindro. Al aplicar la ley de Gauss a esta superficie, se obtiene

$$\Phi_E = \oint E dA = EA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

donde aprovecha que  $q_{\text{int}} = \sigma A$ . Si resuelve para  $E$  obtiene el campo eléctrico justo afuera de un conductor con carga:

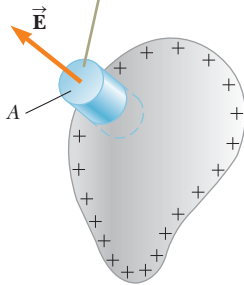
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (24.26)$$

Vamos a verificar ahora la propiedad 4 enumerada al comienzo de esta sección para un conductor cargado en equilibrio electrostático. Considere dos puntos  $\textcircled{A}$  y  $\textcircled{B}$  en la superficie de un conductor cargado como se muestra en la figura 24.20. A lo largo de un camino de superficie que conecta estos puntos,  $\vec{E}$  es siempre perpendicular al desplazamiento  $d\vec{s}$ ; por tanto,  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ . Utilizando este resultado y la ecuación 24.3, concluimos que la diferencia de potencial entre  $\textcircled{A}$  y  $\textcircled{B}$  es necesariamente cero:

$$V_{\textcircled{B}} - V_{\textcircled{A}} = - \int_{\textcircled{A}}^{\textcircled{B}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Este resultado aplica a dos puntos en la superficie. Por tanto,  $V$  es constante

El flujo a través de la superficie gaussiana es  $EA$ .



**Figura 24.19** A fin de calcular el campo eléctrico que existe justo afuera de un conductor con carga se utiliza una superficie gaussiana con forma de un cilindro pequeño.

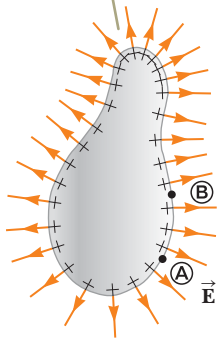
### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 24.6

#### El potencial puede no ser igual a cero

En la figura 24.20 el potencial eléctrico en el interior del conductor no necesariamente es igual a cero, a pesar de que el campo eléctrico es cero. La ecuación 24.15, muestra que un valor cero del campo da como resultado un potencial sin cambio de un punto a otro en el interior del conductor. Por tanto, el potencial en todo el interior del conductor, incluso en la superficie, tiene el mismo valor, que puede o no ser cero, dependiendo de dónde se ha definido el cero del potencial.



Del espaciamiento de los signos positivos se observa que la densidad de carga superficial no es uniforme.



**Figura 24.20** Conductor de forma arbitraria que transporta una carga positiva. Cuando el conductor se encuentra en equilibrio electrostático, la totalidad de la carga reside en la superficie,  $\vec{E} = 0$  en el interior del conductor, y la dirección de  $\vec{E}$  justo afuera del conductor es perpendicular a la superficie. El potencial eléctrico es constante en el interior del conductor y es igual al potencial en la superficie.

en cualquier punto de la superficie de un conductor con carga en equilibrio. Es decir,

la superficie de cualquier conductor con carga en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial: cada punto de la superficie de un conductor cargado en equilibrio está en el mismo potencial eléctrico. Además, ya que el campo eléctrico es igual a cero en el interior del conductor, el potencial eléctrico es constante en cualquier punto en el interior del conductor y en la superficie es equivalente a su valor.

El valor constante del potencial, no requiere ningún trabajo para mover una carga del interior de un conductor con carga a su superficie.

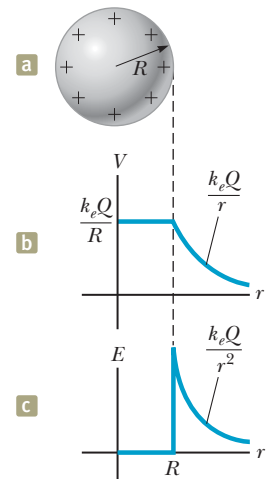
Considere una esfera conductora metálica sólida de radio  $R$  con una carga total positiva  $Q$ , como se muestra en la figura 24.21a. Como se determinó en el inicio A) del ejemplo 23.6, el campo eléctrico en el exterior de esta esfera es  $k_e Q/r^2$  y apunta radialmente hacia afuera ya que el campo exterior de una distribución de carga con simetría esférica es idéntico al de una carga puntual, debe esperar que el potencial también sea de una carga puntual,  $k_e Q/r$ . En la superficie de la esfera conductora de la figura 24.21a, el potencial debe ser  $k_e Q/R$ . Porque existe el mismo potencial en toda la esfera, el potencial en cualquier punto dentro de la esfera debe ser  $k_e Q/R$ . La figura 24.21b es una gráfica del potencial eléctrico como una función de  $r$ , y la figura 24.21c muestra la forma en que el campo eléctrico varía en función de  $r$ .

Cuando se coloca una carga neta en un conductor esférico, la densidad de carga superficial es uniforme, como se indica en la figura 24.21a. Sin embargo, si el conductor no es esférico, como en la figura 24.20, la densidad de carga superficial es elevada donde el radio de curvatura es pequeño y es reducida donde el radio de curvatura es grande. Demostremos teóricamente por qué esto es cierto. Considere las dos esferas en la figura 24.22, conectadas por un cable. Si imaginamos que las esferas están muy separadas, una esfera no afectará la distribución de carga de la otra, y podemos expresar el potencial en la superficie de cada esfera usando la ecuación 24.11:

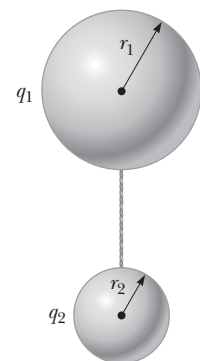
$$V = k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2}$$

donde hemos establecido los potenciales iguales porque el cable de conexión asegura que todo el sistema es un solo conductor. Ahora configure la relación de los campos eléctricos en las superficies de las dos esferas:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{k_e \frac{q_1}{r_1^2}}{k_e \frac{q_2}{r_2^2}} = \frac{\frac{1}{r_1} V}{\frac{1}{r_2} V} = \frac{r_2}{r_1}$$



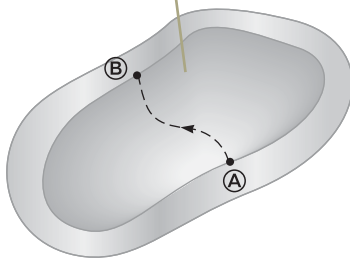
**Figura 24.21** (a) La carga excedente en una esfera conductora de radio  $R$  está uniformemente distribuida sobre su superficie. (b) Potencial eléctrico en función de la distancia  $r$  desde el centro de la esfera conductora con carga. (c) Magnitud del campo eléctrico en función de la distancia  $r$  desde el centro de la esfera conductora con carga.



**Figura 24.22** Dos conductores esféricos con carga están conectados por un alambre conductor. Las esferas están al mismo potencial eléctrico  $V$ .



El campo eléctrico en el interior de la cavidad es igual a cero, sin importar la carga en el conductor.



**Figura 24.23** Un conductor en equilibrio electrostático con una cavidad.

La relación de las magnitudes del campo eléctrico es igual a la relación inversa de los radios de las esferas. Por lo tanto, el campo es fuerte cuando el radio es pequeño, y el campo es más débil cuando el radio es más grande. El campo eléctrico alcanza valores muy altos en puntos agudos. A su vez, la ecuación 24.26 nos dice que la densidad de carga superficial es alta cuando el radio es pequeño.

### Una cavidad dentro de un conductor

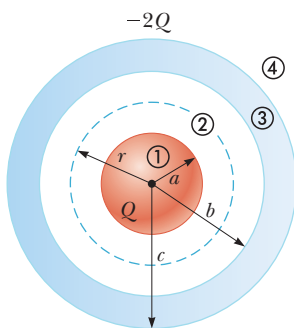
Ahora considere que un conductor de forma arbitraria contiene una cavidad como se muestra en la figura 24.23. Suponga que no hay cargas en el interior de la cavidad. En este caso, el campo eléctrico en el interior de la cavidad debe ser igual a *cero*, sin importar la distribución de la carga en la superficie exterior del conductor. Además, el campo en la cavidad es igual a cero aun si existe un campo eléctrico en el exterior del conductor.

Para probarlo, recuerde que todos los puntos del conductor tienen el mismo potencial eléctrico y, por tanto, dos puntos cualesquiera A y B en la superficie de la cavidad deben de estar al mismo potencial. Ahora imagine que existe un campo  $\vec{E}$  en la cavidad y evalúe la diferencia de potencial  $V_B - V_A$  definida en la ecuación 24.3:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Debido a que  $V_B - V_A = 0$ , la integral de  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  debe ser cero para todas las trayectorias entre dos puntos cualesquiera A y B en el conductor. La única manera de que esto pueda ser válido para *todas* las trayectorias es si  $\vec{E}$  es igual a cero *en cualquier sitio* de la cavidad. Por tanto, una cavidad rodeada por paredes conductoras es una región libre de campo eléctrico, siempre y cuando no existan cargas en el interior de la misma.

Este fenómeno se usa en una *jaula de Faraday*, que es un material conductor, ya sea sólido o de malla, que rodea un espacio interior. Una jaula de Faraday se usa para proteger equipos electrónicos sensibles, y lo protege si se encuentra dentro de un automóvil durante una tormenta eléctrica. El cuerpo de metal del carro actúa como una jaula de Faraday; cualquier carga en el automóvil debido a los campos eléctricos fuertes en el coche está en la superficie externa del mismo, y el campo eléctrico dentro de éste debe ser cero. Las jaulas de Faraday a menudo tienen un efecto negativo, como la pérdida del servicio de teléfono celular dentro de una cabina de ascensor de metal.



**Figura 24.24** (Ejemplo 24.8) Una esfera aislante de radio  $a$  que lleva una carga  $Q$  rodeada por una carcasa esférica conductora que lleva una carga  $-2Q$ .

- EJEMPLO RÁPIDO 24.5** Su hermano pequeño gusta de frotar sus pies sobre la alfombra para después tocarlo y darle una descarga. Mientras usted intenta escapar, descubre en el sótano un cilindro hueco de metal, lo suficientemente grande como para introducirse en su interior. ¿En qué casos *no* sufrirá descarga alguna?
- (a) Si se encuentra en el interior del cilindro, y hace contacto con la superficie interior y su hermano con carga toca la superficie metálica exterior del cilindro;
  - (b) Si su hermano con carga está en el interior y toca la superficie interior de metal y usted está en el exterior y toca la superficie exterior del cilindro; (c) Si
  - ambos están en el exterior del cilindro y tocan la superficie exterior de metal,
  - pero sin tocarse directamente entre ustedes.

### Ejemplo 24.8 Una esfera dentro de un cascarón esférico

Una esfera aislante sólida, de radio  $a$ , tiene una carga positiva neta  $Q$  uniformemente distribuida por todo su volumen. Un cascarón esférico conductor, con radio interior  $b$  y radio exterior  $c$ , es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga neta  $-2Q$ . Con la aplicación de la ley de Gauss, encuentre el campo eléctrico en las regiones marcadas ①, ②, ③ y ④ en la figura 24.24 y la distribución de carga en el cascarón, cuando todo el sistema está en equilibrio electrostático.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Observe cómo este problema difiere del ejemplo 23.6 en el capítulo anterior. La esfera cargada de la figura 23.14 aparece en la figura 24.24, pero ahora está rodeada por un cascarón que tiene una carga de  $-2Q$ . Piense en cómo la presencia del cascarón puede afectar el campo eléctrico de la esfera.



## 24.8 continuación

**Categorizar** La carga está distribuida uniformemente en toda la esfera y se sabe que la carga en el cascarón conductor se distribuye de manera uniforme sobre las superficies. Por tanto, el sistema tiene simetría esférica y la ley de Gauss es aplicable para encontrar el campo eléctrico en varias regiones.

**Analizar** En la región ②, entre la superficie de la esfera sólida y la superficie interna del cascarón, se construye una superficie gaussiana esférica de radio  $r$ , donde  $a < r < b$ , y observe que la carga dentro de esta superficie es  $+Q$  (la carga en la esfera sólida). Debido a la simetría esférica, las líneas de campo eléctrico se deben dirigir radialmente hacia afuera y ser constantes en magnitud sobre la superficie gaussiana.

La carga sobre el cascarón conductor crea campo eléctrico cero en la región  $r < b$ , así que el cascarón no tiene efecto sobre el campo en la región ② debido a la esfera. Por tanto, escriba una expresión para el campo en la región ② como si se debiera a la esfera de la parte (A) del ejemplo 23.6:

$$E_2 = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{para } a < r < b)$$

Puesto que el cascarón conductor crea un campo cero en su interior, tampoco tiene efecto sobre el campo adentro de la esfera. Por tanto, escriba una expresión para el campo en la región ① como si se debiera a la esfera de la parte (B) del ejemplo 23.6:

$$E_1 = k_e \frac{Q}{a^3} r \quad (\text{para } r < a)$$

En la región ④, donde  $r > c$ , construya una superficie gaussiana esférica; esta superficie rodea una carga total de  $q_{\text{int}} = Q + (-2Q) = -Q$ . Por tanto, modele la distribución de carga como una esfera con carga  $-Q$  y escriba una expresión para el campo en la región ④ de la parte (A) del ejemplo 23.6:

$$E_4 = -k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{para } r > c)$$

En la región ③, el campo eléctrico debe ser cero porque el cascarón esférico es un conductor en equilibrio:

$$E_3 = 0 \quad (\text{para } b < r < c)$$

Construya una superficie gaussiana de radio  $r$  en la región ③, donde  $b < r < c$ , y observe que  $q_{\text{int}}$  debe ser cero porque  $E_3 = 0$ . Encuentre la cantidad de carga  $q_{\text{int}}$  sobre la superficie interior del cascarón:

$$q_{\text{int}} = q_{\text{esfera}} + q_{\text{int}}$$

$$q_{\text{int}} = q_{\text{int}} - q_{\text{esfera}} = 0 - Q = -Q$$

**Finalizar** La carga sobre la superficie interior del cascarón esférico debe ser  $-Q$  para cancelar la carga  $+Q$  sobre la esfera sólida y dar un campo eléctrico cero en el material del cascarón. Ya que la carga neta sobre el cascarón es  $-2Q$ , su superficie exterior debe tener una carga  $-Q$ .

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Cómo diferirían los resultados de este problema si la esfera fuese conductora en lugar de aisladora?

**Respuesta** El único cambio sería en la región ①, donde  $r < a$ . Puesto que no puede haber carga dentro de un conductor en equilibrio electrostático,  $q_{\text{int}} = 0$  para una superficie gaussiana de radio  $r < a$ ; por tanto, sobre la base de la ley de Gauss y simetría,  $E_1 = 0$ . En las regiones ②, ③ y ④, no habría forma de determinar si la esfera es conductora o aislante.

## Resumen

### Definiciones

La **diferencia de potencial**  $\Delta V$  entre los puntos ① y ② en un campo eléctrico  $\vec{E}$  se define como

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U_E}{q} = - \int_{\text{①}}^{\text{②}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (24.3)$$

donde  $\Delta U$  está dada por la ecuación 24.1 en la página 637. El **potencial eléctrico**  $V = U/q$  es una cantidad escalar y tiene las unidades de joules por cada coulomb, donde  $J/C \equiv 1 \text{ V}$ .

Una **superficie equipotencial** es aquella donde todos los puntos tienen el mismo potencial eléctrico. Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico.

continúa



## Conceptos y principios

Cuando una carga positiva  $q$  se mueve entre los puntos  $\textcircled{A}$  y  $\textcircled{B}$  en un campo eléctrico  $\vec{E}$ , el cambio en la energía potencial del sistema carga-campo es

$$\Delta U_E = -q \int_{\textcircled{A}}^{\textcircled{B}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (24.1)$$

La diferencia de potencial entre dos puntos separados una distancia  $d$  en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ , es

$$\Delta V = -Ed \quad (24.6)$$

si la dirección de traslado entre los puntos está en la misma dirección que el campo eléctrico.

La **energía potencial eléctrica** asociada con un par de cargas puntuales separadas una distancia  $r_{12}$  es

$$U_E = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (24.13)$$

La energía potencial de una distribución de cargas puntuales se obtiene al sumar los términos como en la ecuación 24.13 sobre todos los pares de partículas.

El potencial eléctrico debido a una distribución continua de carga es

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \quad (24.20)$$

Cada punto en la superficie de un conductor cargado en equilibrio electrostático tiene el mismo potencial eléctrico. El potencial es constante en todas partes dentro del conductor e igual a su valor en la superficie.

Un conductor en **equilibrio electrostático** tiene las siguientes propiedades:

1. El campo eléctrico es cero en todas partes dentro del conductor, ya sea que el conductor sea sólido o hueco.
2. Si el conductor está aislado y lleva una carga, la carga reside en su superficie.
3. El campo eléctrico en un punto justo afuera de un conductor cargado es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud  $\sigma/\epsilon_0$ , donde  $\sigma$  es la densidad de carga superficial en ese punto.
4. En un conductor de forma irregular, la densidad de carga superficial es mayor en lugares donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeño.

Si se define  $V = 0$  en  $r = \infty$ , el potencial eléctrico debido a una carga puntual a cualquier distancia  $r$  desde la carga es

$$V = k_e \frac{q}{r} \quad (24.11)$$

El potencial eléctrico asociado con un grupo de cargas puntuales se obtiene al sumar los potenciales debidos a las cargas individuales.

Si conoce el potencial eléctrico como función de las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , puede obtener las componentes del campo eléctrico al tomar la derivada negativa del potencial eléctrico respecto a las coordenadas. Por ejemplo, la componente  $x$  del campo eléctrico es

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \quad (24.16)$$

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

1. Robert Millikan realizó un brillante conjunto de experimentos de 1909 a 1913 en los que midió  $e$ , la magnitud de la carga elemental en un electrón, y demostró la naturaleza cuantificada de esta carga. Debido a que la carga de un electrón es negativa, expresamos su carga como  $-e$ . Su aparato, diagramado en la figura TP24.1, contiene dos placas metálicas paralelas separadas por una distancia  $d$ . Las gotas de aceite se rocían desde un atomizador sobre la placa superior. Algunas de estas gotas de aceite pasan a través de un pequeño orificio en la placa superior. Millikan usó rayos X para ionizar el aire en la cámara, de modo que los electrones liberados se adhirieran a las gotas de aceite, dándoles una carga negativa  $-q$ . Un haz de luz dirigido horizontalmente se usa para iluminar las gotas de aceite, que se ven a través de un telescopio cuyo eje mayor también es horizontal pero

perpendicular al haz de luz. También visible a través del telescopio es una escala calibrada que muestra la posición

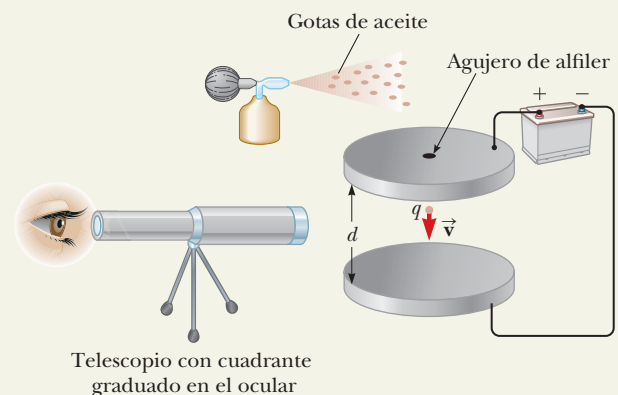


Figura TP24.1

vertical de la gota de aceite en cualquier momento. Discuta este experimento en su grupo y realice las siguientes tareas. (a) Si se establece un campo eléctrico descendente entre las placas, una gota de aceite dada puede suspenderse en reposo entre la fuerza eléctrica ascendente y la fuerza gravitacional descendente sobre la gota. Demuestre que la diferencia de potencial requerida entre las placas para mantener suspendida una gota de aceite en reposo viene dada por

$$\Delta V_{\text{rep}} = \frac{4\pi\rho_{\text{aceite}}gd}{3q} r^3$$

donde  $\rho_{\text{aceite}}$  es la densidad del aceite,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad, y  $r$  es el radio de la gota de aceite. (b) Para determinar  $q$  a partir de la ecuación en la parte (a), necesitamos conocer todas las demás cantidades, lo cual hacemos, excepto para  $r$ . El radio de las gotas de aceite es demasiado pequeño para medirlo directamente. Por tanto, Millikan realizó una segunda medición. Con el campo eléctrico eliminado, las gotas de aceite se desplazan hacia abajo a la velocidad terminal debido a la fuerza de resistencia sobre ellas, dada por la ecuación 6.2. Para una esfera que se mueve lentamente a través de un fluido viscoso, la ecuación 6.2 puede modificarse para convertirse en lo que se conoce como la *ley de Stokes*:

$$\vec{R} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

donde  $\eta$  es la viscosidad del fluido, dado en unidades de  $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ . Además, las gotas de aceite experimentan una fuerza de flotación hacia arriba debido al aire circundante, dada por la ecuación 14.5:

$$B = \rho_{\text{aire}}gV_{\text{desp}}$$

donde  $V_{\text{desp}}$  es el volumen de aire desplazado por una gota de aceite o, de forma equivalente, el volumen de la gota de aceite. La caída de la gota de aceite se basa en la gravedad, la fuerza de resistencia del aire y la fuerza de flotación. Demuestre a partir de la partícula en el modelo de equilibrio aplicado a la gota de aceite que el radio de la gota es

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v_T}{2g(\rho_{\text{aceite}} - \rho_{\text{aire}})}}$$

(c) Combine la primera y la última ecuación para encontrar una expresión para la carga  $q$  en una gota de aceite en términos de cantidades, las cuales todas pueden medirse con los dos experimentos descritos.

2. **ACTIVIDAD** Un campo eléctrico en una región del espacio es paralelo al eje  $x$ . El potencial eléctrico varía con la posición como se muestra en la figura TP24.2. Analice en su grupo cómo el campo eléctrico podría variar con la posición

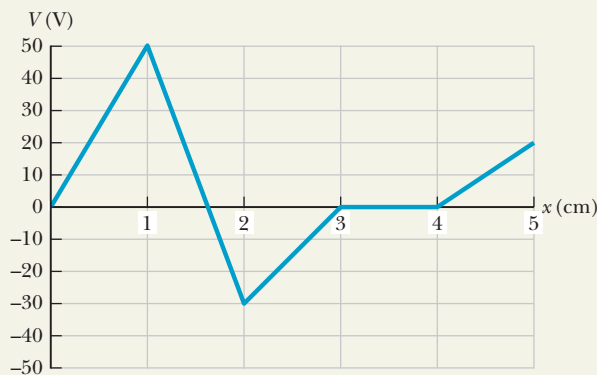


Figura TP24.2

$x$  y luego grafique el componente  $x$  del campo eléctrico con respecto a la posición en esta región del espacio.

3. **ACTIVIDAD** Robert Millikan realizó un brillante conjunto de experimentos de 1909 a 1913 en los que midió  $e$ , la magnitud de la carga elemental en un electrón, y demostró la naturaleza cuantificada de esta carga. Debido a que la carga de un electrón es negativa, expresamos su carga como  $-e$ . Su aparato, diagramado en la figura TP24.1, contiene dos placas metálicas paralelas separadas por una distancia  $d$ . Las gotas de aceite se rocían desde un atomizador sobre la placa superior. Algunas de estas gotas de aceite pasan a través de un pequeño orificio en la placa superior. Millikan usó rayos X para ionizar el aire en la cámara, de modo que los electrones liberados se adhirieran a las gotas de aceite, dándoles una carga negativa  $-q$ . Un haz de luz dirigido horizontalmente se usa para iluminar las gotas de aceite, que se ven a través de un telescopio cuyo eje mayor también es horizontal pero perpendicular al haz de luz. También es visible a través del telescopio una escala calibrada que muestra la posición vertical de la gota de aceite en cualquier momento.

En su experimento, se hicieron dos tipos de mediciones. En primer lugar, se permitió que las gotas de aceite se precipitaran libremente mientras se medía el intervalo de tiempo para que cayeran a una distancia de  $\Delta y = 1.00 \text{ mm}$  frente a una escala calibrada. A partir de estos datos, se puede medir la velocidad terminal  $v_T$  de una gota. Conocer la velocidad terminal nos permite encontrar el radio  $r$  de la gota de aceite a partir de la siguiente ecuación:

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v_T}{2g\rho_{\text{aceite}}}}$$

donde  $\eta$  es la viscosidad del aire,  $\eta = 1.81 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ ,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad, y  $\rho_{\text{aceite}}$  es la densidad del aceite utilizado en el experimento,  $\rho_{\text{aceite}} = 824 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

En otro experimento, se aplica un voltaje entre las placas separadas por  $d = 1.00 \text{ mm}$  en la figura TP24.1 y se ajusta a un valor  $\Delta V_{\text{rep}}$  en el que la misma gota del primer experimento está suspendida en el reposo. Esta medida permite un cálculo de la magnitud  $q$  de la carga en la gota de aceite:

$$q = \frac{4\pi\rho_{\text{aceite}}gd}{3\Delta V_{\text{rep}}} r^3$$

A continuación hay diez conjuntos de datos para diferentes gotas medidos en este experimento. (a) Encuentre la carga en cada gota. Haga un histograma de los valores de las diez cargas encontradas y determine el valor  $e$  de la carga elemental a partir de estos datos. (b) El fabricante del atomizador afirma que debe proporcionar gotas de aceite con un radio relativamente constante, que oscila entre  $0.1$  y  $1 \mu\text{m}$ . ¿Las diez gotas a continuación son consistentes con esta afirmación?

Gota	$\Delta t$ al caer 1.00 mm (s)	$\Delta V_{\text{rep}}$ (V)
1	40.0	8.95
2	31.8	9.44
3	22.7	12.55
4	40.3	26.65
5	64.1	13.32
6	38.3	14.25
7	31.6	7.65
8	49.2	19.62
9	112	5.70
10	27.3	23.7

# Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

## SECCIÓN 24.1 Diferencia de potencial y potencial eléctrico

- V** ¿Cuánto trabajo realiza (una batería, un generador o alguna otra fuente de diferencia de potencial), al mover el número de Avogadro de electrones desde un punto inicial, donde el potencial eléctrico es 9.00 V a un punto donde el potencial es de -5.00 V? (En cada caso el potencial se mide en relación con un punto de referencia común.)
- (a) Determine la diferencia potencial eléctrico  $\Delta V_e$  necesaria para de tener un electrón (llamada "potencial de frenado") que se mueve con una rapidez inicial de  $2.85 \times 10^7$  m/s. (b) ¿Un protón viajando a la misma rapidez requeriría una mayor o menor magnitud de diferencia de potencial eléctrico? Explique. (c) Halle una expresión simbólica de la relación entre el potencial de frenado del protón y el potencial de frenado de un electrón,  $\Delta V_p/\Delta V_e$ .

## SECCIÓN 24.2 Diferencias de potencial en un campo eléctrico uniforme

- T** Placas paralelas cargadas de manera opuesta están separadas por 5.33 mm. Entre las placas existe una diferencia de potencial de 600 V. (a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas? (b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de un electrón entre las placas? (c) ¿Cuánto trabajo se debe hacer sobre el electrón para moverlo a la placa negativa si se coloca inicialmente 2.90 mm de la placa positiva?

- CIC** A partir de la definición de trabajo, demuestre que en todos los puntos de una superficie equipotencial, ésta debe ser perpendicular al campo eléctrico existente en ese punto.

- CIC** Una varilla aislante con una densidad de carga lineal  $\lambda = 40.0 \mu\text{C/m}$  y densidad de masa lineal  $\mu = 0.100 \text{ kg/m}$  se libera del reposo en un campo eléctrico uniforme  $E = 100 \text{ V/m}$  dirigido perpendicularmente a la varilla (figura P24.5). (a) Determine la rapidez de la varilla después de que ha recorrido 2.00 m. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿De qué manera cambiaría su respuesta al inciso (a) si el campo eléctrico no fuera perpendicular a la varilla? Explique.

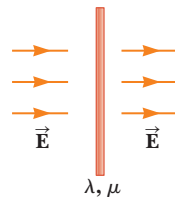


Figura P24.5

- PG** **CIC** **Problema de repaso.** Un bloque de masa  $m$  y carga  $+Q$  está conectado a un resorte que tiene una constante  $k$ . El bloque se encuentra en una pista horizontal aislada libre de fricción, y el sistema está dentro de un campo eléctrico uniforme de magnitud  $E$ , dirigido como se muestra en la figura

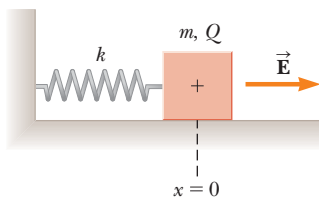


Figura P24.6

- P24.6. Si el bloque se libera del reposo cuando el resorte no está estirado (en  $x = 0$ ). Queremos demostrar que el movimiento subsiguiente del bloque es armónico simple. (a) Considere el sistema del bloque, el resorte y el campo eléctrico. ¿Este sistema es aislado o no aislado? (b) ¿Qué tipo de energía potencial existe dentro de este sistema? (c) Recuerde que en la configuración inicial del sistema el bloque se libera desde el reposo. La configuración final es cuando el bloque momentáneamente viene de nuevo al reposo. ¿Cuál es el valor de  $x$  cuando el bloque se detiene momentáneamente? (d) En algún valor de  $x$  que llamaremos  $x = x_0$ , el bloque tiene fuerza neta cero en él. ¿Qué análisis de modelo describe la partícula en esta situación? (e) ¿Cuál es el valor de  $x_0$ ? (f) Definir un nuevo sistema de coordenadas tal que  $x' = x - x_0$ . Demuestre que  $x'$  satisface una ecuación diferencial de movimiento armónico simple. (g) Determine el periodo del movimiento armónico simple. (h) ¿El funcionamiento del periodo depende de la magnitud del campo eléctrico?

## SECCIÓN 24.3 Potencial eléctrico y energía potencial debidos a cargas puntuales

*Nota:* A no ser que se exprese de otra manera, se supone que el nivel de referencia del potencial es  $V = 0$  en  $r = \infty$ .

- S** Tres cargas positivas se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero, como en la figura P24.7. Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en el centro del triángulo.

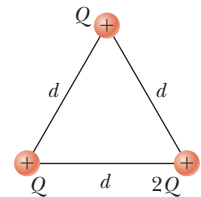


Figura P24.7

- CIC** **T** Dos partículas cargadas,  $Q_1 = +5.00 \text{ nC}$  y  $Q_2 = -3.00 \text{ nC}$ , están separadas 35.0 cm. (a) ¿Cuál es el potencial eléctrico en un punto a medio camino entre las partículas con carga? (b) ¿Cuál es la energía potencial del par? ¿Cuál es el significado del signo algebraico en su respuesta?

- CE** Está trabajando en un dispositivo de laboratorio que incluye una pequeña esfera con una gran carga eléctrica  $Q$ . Debido a esta esfera cargada, hay un campo eléctrico fuerte alrededor de su dispositivo. Otros investigadores en su laboratorio se quejan de que su campo eléctrico está afectando a su equipo. Piensa en cómo puede obtener el gran campo eléctrico que necesita cerca de la esfera, pero evitando que el campo llegue a sus colegas. Usted decide rodear su dispositivo con una carcasa de plástico transparente esférica de radio  $R$ . El plástico tiene una capa muy delgada de material conductor en el exterior que solo reduce al mínimo la transparencia del material. La carcasa se coloca de modo que la esfera pequeña esté en el centro exacto de ella. Determine a qué potencial eléctrico debe elevarse la carcasa exterior para eliminar completamente el campo eléctrico fuera de ella.

- CE** Su compañero de cuarto tiene problemas para entender por qué se forman sólidos. Él pregunta: "¿Por qué los átomos se unirían en sólidos en lugar de flotar libremente unos con respecto a los otros?". Para ayudarlo a comprender al menos un tipo de unión en sólidos, decide embarcarse en una explicación energética. Le muestra un dibujo de una célula primitiva de un cristal de cloruro de sodio, NaCl o sal de mesa simple. El dibujo se muestra en la figura P24.10, donde las es-

feras naranjas son iones  $\text{Na}^+$  y las esferas azules son iones  $\text{Cl}^-$ . Cada ion tiene una carga de magnitud igual a la carga elemental  $e$ . Los iones se encuentran en las esquinas de un cubo de lado  $d$ . Usted le explica a su compañero de habitación que la energía potencial eléctrica se define como cero cuando las ocho cargas están infinitamente separadas una de la otra. Luego los reúne para formar la estructura de cristal que se muestra. (a) Evalúe la energía potencial eléctrica del cristal como se muestra y (b) demuestre que es energéticamente favorable para la formación de dichos cristales.

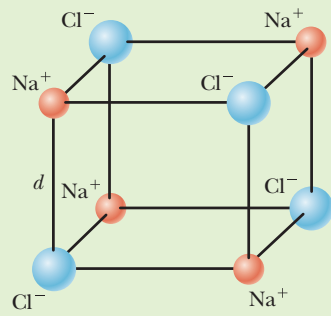


Figura P24.10

11. Cuatro cargas puntuales  $Q$  se encuentran en las esquinas de un cuadrado con lados de longitud  $a$ . Encuentre expresiones para (a) el potencial eléctrico total en el centro del cuadrado debido a las cuatro cargas y (b) el trabajo necesario para llevar una quinta carga  $q$  desde el infinito hasta el centro del cuadrado.
12. Las dos cargas en la figura P24.12 están separadas por una distancia  $d = 2.00 \text{ cm}$  y  $Q = 15.00 \text{ nC}$ . Determine (a) el potencial eléctrico en A, (b) el potencial eléctrico en B, y (c) la diferencia de potencial eléctrico entre B y A.

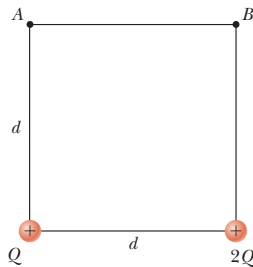


Figura P24.12

13. Demuestre que la cantidad de trabajo requerida para colocar cuatro partículas con carga idénticas de magnitud  $Q$  en las esquinas de un cuadrado de lado  $s$  es igual a  $5.41 k_e Q^2/s$ .
14. Dos cargas puntuales de igual magnitud están localizadas a lo largo del eje de las  $y$  a iguales distancias por encima y por debajo del eje de las  $x$ , como se muestra en la figura P24.14. (a) Trace una gráfica del potencial en puntos a lo largo del eje de las  $x$  en el intervalo  $-3a < x < 3a$ . Debe trazar el potencial en unidades de  $k_e Q/a$ . (b) Permita que la carga localizada en  $y = -a$  sea negativa y trace el potencial a lo largo del eje de las  $y$  en el intervalo  $-4a < y < 4a$ .

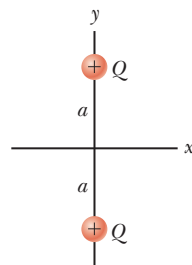


Figura P24.14

15. Tres partículas con cargas positivas iguales  $q$  se encuentran en las esquinas de un triángulo equilátero de lado  $a$ , como se muestra en la figura P24.15. (a) ¿En qué punto, si es que hay uno, del plano de las cargas, existe un potencial eléctrico igual a cero? (b) ¿Cuál es el potencial eléctrico en la posición de una de las partículas debido a las otras dos cargas que se encuentran en la base del triángulo?

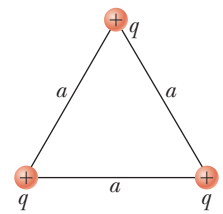


Figura P24.15

16. **Problema de repaso.** Un resorte ligero sin tensar tiene una longitud  $d$ . Dos partículas idénticas, cada una con carga  $q$ , están conectadas a los extremos opuestos del resorte. Las partículas se mantienen inmóviles separadas una distancia  $d$ , y luego son liberadas simultáneamente. El sistema, entonces, oscila en una mesa horizontal libre de fricción. El resorte tiene un poco de fricción cinética interna, por lo que su oscilación es amortiguada. Las partículas al final dejan de vibrar cuando están separadas una distancia  $3d$ . Suponga que el sistema del resorte y de las dos partículas cargadas es un sistema aislado. Determine el aumento en la energía interna que aparece en el resorte durante las oscilaciones.

17. **Problema de repaso.** Dos esferas aislantes tienen radios de  $0.300 \text{ cm}$  y  $0.500 \text{ cm}$ , con masas de  $0.100 \text{ kg}$  y  $0.700 \text{ kg}$ , y cargas uniformemente distribuidas de  $-2.00 \mu\text{C}$  y  $3.00 \mu\text{C}$ . Cuando sus centros están separados una distancia de  $1 \text{ m}$ , estas esferas se liberan partiendo del reposo. (a) ¿Cuáles serán sus velocidades cuando entren en colisión? (b) **¿Qué pasaría si?** Si las esferas fueran conductoras, ¿las velocidades serían mayores o menores que las calculadas en el inciso a)? Explique.

18. **Problema de repaso.** Dos esferas aislantes tienen radios  $r_1$  y  $r_2$ , masas  $m_1$  y  $m_2$ , y cargas uniformemente distribuidas  $-q_1$  y  $q_2$ . Cuando sus centros están separados por una distancia  $d$ , son liberadas del reposo. (a) ¿Qué tan rápida se moverá cada una cuando entren en colisión? (b) **¿Qué pasaría si?** Si las esferas fueran conductoras, ¿sus magnitudes de velocidad serían mayores o menores que las calculadas en el inciso (a)? Explique.

19. ¿Cuánto trabajo se requiere para colocar ocho partículas con cargas idénticas, cada una de ellas de magnitud  $q$ , en las esquinas de un cubo de lado  $s$ ?
20. Cuatro partículas idénticas cada una tienen una carga  $q$  y una masa  $m$ . Son liberadas del reposo desde los vértices de un cuadrado de lado  $L$ . ¿Qué tan rápido se mueve cada carga cuando se duplica su distancia al centro del cuadrado?

**SECCIÓN 24.4 Obtención del valor del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico**

21. En el ejemplo 24.7 se demuestra que el potencial en un punto  $P$  a una distancia  $a$  por encima de un extremo de una varilla uniformemente cargada de longitud  $\ell$  que está a lo largo del eje  $x$  es

$$V = k_e \frac{Q}{\ell} \ln \left( \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} \right)$$

Utilice este resultado para obtener una expresión para la componente en  $y$  del campo eléctrico en  $P$ .

22. La figura P24.22 representa una gráfica del potencial eléctrico en una región del espacio en función de la posición  $x$ , donde el campo eléctrico es paralelo al eje  $x$ . Dibuje una gráfica de la componente  $x$  del campo eléctrico en función de  $x$  en esta región.

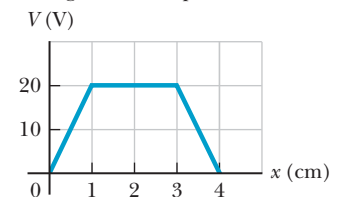
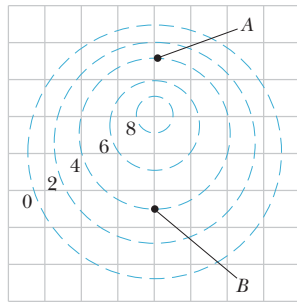


Figura P24.22

- 23.** La figura P24.23 muestra varias líneas equipotenciales cada una de ellas marcadas por su potencial en volts. La distancia entre líneas de la rejilla cuadrícula representa 1.00 cm. (a) ¿La magnitud del campo es mayor en A o en B? Explique su razonamiento. (b) Explique lo que puede establecer respecto a  $\vec{E}$  en B? (c) Represente la forma en que se vería el campo al dibujar por lo menos ocho líneas de campo.



Los valores numéricos están en volts

Figura P24.23

- 24.** Un campo eléctrico en una región del espacio es paralelo al eje  $x$ . El potencial eléctrico varía con la posición como se muestra en la figura P24.24. Represente gráficamente la componente  $x$  del campo eléctrico en función de la posición en esta región del espacio.

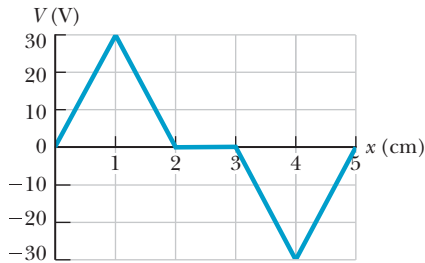


Figura P24.24

**SECCIÓN 24.5 Potencial eléctrico debido a distribuciones continuas de carga**

- 25.** Una varilla de longitud  $L$  (figura P24.25) yace a lo largo del eje de las  $x$ , con su extremo izquierdo en el origen. Además tiene una densidad de carga no uniforme  $\lambda = \alpha x$ , donde  $\alpha$  es una constante positiva. (a) ¿Cuáles son las unidades de  $\alpha$ ? (b) Calcule el potencial eléctrico en A.

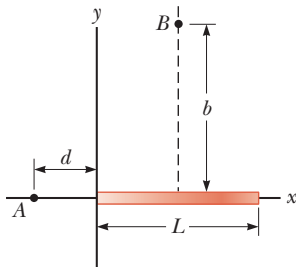


Figura P24.25 Problemas 25 y 26.

- 26.** Para el arreglo descrito en el problema 25, calcule el potencial eléctrico en el punto B, que está en la bisectriz perpendicular de la varilla, a una distancia  $b$  por encima del eje de las  $x$ .
- 27.** Un alambre con una densidad de carga lineal uniforme  $\lambda$  se dobla como se muestra en la figura P24.27. Determine el potencial eléctrico en el punto O.

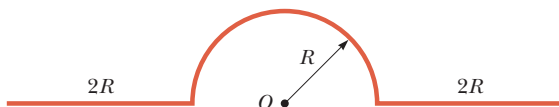


Figura P24.27

- 28.** Usted es el entrenador del equipo de Olimpiadas de Física que participa en una competencia en el extranjero. Se le presenta el siguiente problema de muestra para presentar a su equipo de estudiantes, que debe resolver muy rápidamente: Una persona está de pie en la línea media de un campo de fútbol. En un extremo del campo, como se muestra en la figura P24.28, se encuentra una letra D, que consiste en un anillo metálico semicircular de radio  $R$  y una varilla recta de metal de longitud  $2R$ , el diámetro del anillo. El plano del anillo es perpendicular al suelo y perpendicular a la línea media del campo mostrado por la línea discontinua en la figura P24.28. Debido a una tormenta eléctrica que se aproxima, el anillo semicircular y la varilla se cargan. El anillo y la varilla alcanzan una carga  $Q$ . ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto P, que está en una posición  $x$  a lo largo de la línea media del campo, medida desde el centro de la varilla, debido a la letra D? Piense rápidamente y use todos los recursos disponibles para usted, que incluyen su libro de texto de física: ¡usted está en competencia!

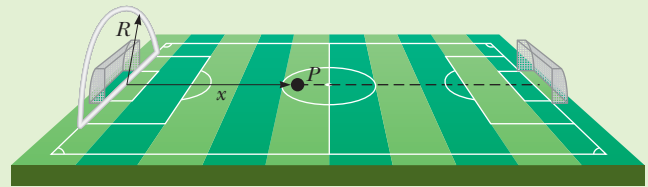


Figura P24.28

**SECCIÓN 24.6 Conductores en equilibrio electrostático**

- 29.** La magnitud del campo eléctrico en la superficie de un conductor de forma irregular varía de  $56.0 \text{ kN/C}$  a  $28.0 \text{ kN/C}$ . ¿Puede evaluar el potencial eléctrico en el conductor? Si es así, encuentre su valor. Si no, explique por qué no.
- 30.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Una esfera de cobre sólida de radio de  $15.0 \text{ cm}$  está en equilibrio electrostático y lleva una carga de  $40.0 \text{ nC}$ . La figura P24.38 muestra la magnitud del campo eléctrico como una función de la posición radial  $r$  medida desde el centro de la esfera.

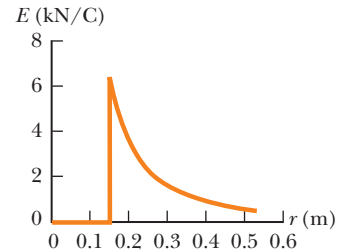


Figura P24.30

- 31.** Una esfera metálica sólida, de radio  $a$ , tiene carga total  $Q$  sin otra carga en los alrededores. El campo eléctrico justo afuera de su superficie es  $k_e Q/a^2$  radialmente hacia afuera. En la cercanía de este punto, la superficie uniformemente cargada se comporta como una hoja plana de carga uniforme ¿El campo eléctrico en este caso también está dado por  $\sigma/\epsilon_0$ ? ¿Por  $\sigma/2\epsilon_0$ ?
- 32.** Una carga puntual positiva se encuentra a una distancia  $R/2$  del centro de una cubierta esférica conductora delgada, sin carga y de radio  $R$ . Dibuje las líneas de campo eléctrico que se establecen debido a este sistema tanto adentro como afuera de la cubierta.
- 33.** Una placa muy grande delgada y plana de aluminio con área  $A$  tiene una carga total  $Q$ , uniformemente distribuida sobre sus superficies.



Suponiendo la misma carga uniformemente distribuida sobre la superficie superior de una placa de vidrio idéntica en todo, compare los campos eléctricos justo por encima del centro de la cara superior de cada una de las placas.

- 34. T** Una esfera conductora sólida de radio de 2.00 cm tiene una carga de  $8.00 \mu\text{C}$ . Un cascarón esférico de radio interior y exterior de 4.00 cm y 5.00 cm respectivamente, es concéntrica con la esfera sólida y tiene una carga de  $-4.00 \mu\text{C}$ . Determine el campo eléctrico en (a)  $r = 1.00$  cm, (b)  $r = 3.00$  cm, (c)  $r = 4.50$  cm, y (d)  $r = 7.00$  cm desde el centro de esta configuración de carga.
- 35. T** Un conductor esférico tiene un radio de 14.0 cm y una carga de  $26.0 \mu\text{C}$ . Calcule el campo eléctrico y el potencial eléctrico en (a)  $r = 10.0$  cm, (b)  $r = 20.0$  cm, y (c)  $r = 14.0$  cm desde el centro.
- 36. S** Un alambre largo y recto, rodeado por un cilindro de metal hueco cuyo eje coincide con el suyo, tiene una carga por unidad de longitud  $\lambda$ , y el cilindro una carga neta por unidad de longitud  $2\lambda$ . Con esta información, utilice la ley de Gauss para determinar (a) la carga por unidad de longitud sobre las superficies interna del cilindro, (b) la carga por unidad de longitud sobre la superficie externa del cilindro y (c) el campo eléctrico exterior al cilindro a una distancia  $r$  de su eje.

**PROBLEMAS ADICIONALES**

- 37.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, un electrón se mueve en una órbita circular alrededor de un protón. El modelo indica que el electrón puede existir solamente en ciertas órbitas permitidas alrededor del protón: aquellas cuyo radio  $r$  satisface  $r = n^2(0.0529 \text{ nm})$ , donde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Para uno de los posibles estados permitidos del átomo, la energía potencial eléctrica del sistema es  $-13.6\text{eV}$ .
- 38.** En un día seco de invierno frota las suelas de sus zapatos contra una alfombra y recibe una descarga cuando extiende la punta de uno de sus dedos en dirección a la perilla de una puerta metálica. Si la habitación está oscura, podrá ver una chispa de aproximadamente 5 mm de largo. Haga estimaciones de orden de magnitud (a) del potencial eléctrico del cuerpo y (b) de la carga en el cuerpo antes de tocar el metal. Explique su razonamiento.
- 39. C I C** (a) Use el resultado exacto del ejemplo 24.4 para encontrar el potencial eléctrico establecido por el dipolo descrito en el punto  $(3a, 0)$ . (b) Explique cómo se compara esta respuesta con el resultado de la expresión aproximada que es válida cuando  $x$  es mucho mayor que  $a$ .

- 40.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Se configura un aparato en su laboratorio de la siguiente manera. El eje  $x$  es el eje de simetría de un anillo estacionario, uniformemente cargado de radio  $R = 0.500$  m y carga  $Q = 50.0 \mu\text{C}$  (figura P24.40). Se coloca una partícula con carga  $q = 50.0 \mu\text{C}$  y masa  $m = 0.100$  kg en el centro del anillo y se restringirá a moverse sólo a lo largo del eje  $x$ . Cuando se desplaza ligeramente, la partícula es repelida por el anillo y se acelera a lo largo del eje  $x$ . La partícula se mue-

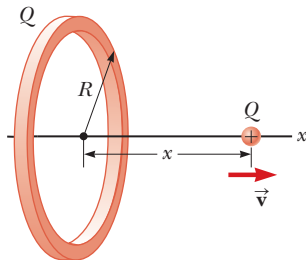


Figura P24.40

ve más rápido de lo que esperaba y golpea la pared opuesta a su laboratorio a  $40.0$  m/s.

- 41. S** La varilla delgada con carga uniforme que se muestra en la figura P24.41 tiene una densidad de carga lineal  $\lambda$ . Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en el punto  $P$ .

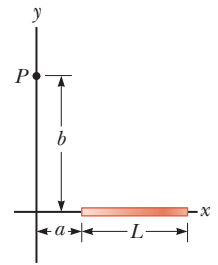


Figura P24.41

- 42. S** Un tubo Geiger-Mueller es un detector de radiación que consiste en un cilindro metálico cerrado y hueco (el cátodo) de radio interior  $r_a$  y un alambre cilíndrico coaxial (el ánodo) de radio  $r_b$  (figura P24.42a). La carga por cada unidad de longitud sobre el ánodo es  $\lambda$ , y la carga por cada unidad de longitud sobre el cátodo es  $-\lambda$ . Entonces un gas llena el espacio entre los electrodos. Cuando el tubo está en uso (por ejemplo, al medir la radioactividad de la fruta en la figura P24.42b), una partícula elemental de alta energía pasa a través de este espacio, ioniza un átomo del gas. La intensidad del campo eléctrico hace que el ion y electrón resultantes aceleren en direcciones opuestas; golpean otras moléculas del gas y las ionizan, lo que produce una avalancha de descarga eléctrica. El pulso de la corriente eléctrica entre el alambre y el cilindro se cuenta mediante un circuito externo.

(a) Demuestre que la magnitud de la diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro es

$$\Delta V = 2k_e \lambda \ln \left( \frac{r_a}{r_b} \right)$$

(b) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre cátodo y ánodo es

$$E = \frac{\Delta V}{\ln(r_a/r_b)} \left( \frac{1}{r} \right)$$

donde  $r$  es la distancia desde el eje del ánodo al punto donde se calcula el campo.

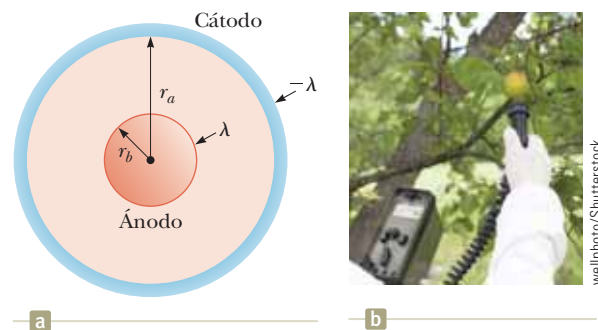


Figura P24.42

- 43. Problema de repaso.** Dos placas paralelas con cargas de igual magnitud pero de signo opuesto están separadas 12.0 cm. Cada placa tiene una densidad de carga superficial de  $36.0 \text{ nC/m}^2$ . De la placa positiva se libera un protón que parte del reposo. Determine (a) la magnitud del campo eléctrico a partir de la densidad de carga, (b) la diferencia de potencial entre las placas, (c) la energía cinética del protón cuando se impacte en la placa negativa, (d) la rapidez del protón justo antes de impactar la placa negativa, (e) la aceleración del protón, (f) la fuerza ejercida sobre el protón. (g) A partir de la fuerza, determine la magnitud del campo eléc-



trico (h) ¿Cómo es el valor del campo eléctrico que obtuvo comparado con el valor obtenido en el inciso (a)?

- 44. S** Cuando una esfera conductora sin carga de radio se coloca en el origen de un sistema de coordenadas  $xyz$  que se encuentra en un campo eléctrico inicialmente uniforme  $\vec{E} = E_0 \hat{k}$ , el potencial eléctrico resultante es  $V(x, y, z) = V_0$ , para puntos en el interior de la esfera, y

$$V(x, y, z) = V_0 - E_0 z + \frac{E_0 a^3 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

para los puntos fuera de la esfera, donde  $V_0$  es el potencial eléctrico (constante) en el conductor. Utilice esta ecuación para determinar las componentes  $x$ ,  $y$ , y  $z$  del campo eléctrico resultante (a) en el interior de la esfera y (b) fuera de la esfera.

- 45. PG S** Una esfera aislante y sólida, de radio  $a$ , tiene una densidad de carga uniforme en todo su volumen y una carga total  $Q$ . Colocada a esta esfera existe otra esfera hueca, conductora pero descargada, de radios interno y externo  $b$  y  $c$ , respectivamente, como se observa en la figura P24.45. Deseamos entender completamente las cargas y los campos eléctricos en todas las ubicaciones. (a) Determine la carga contenida dentro de una esfera de radio  $r < a$ . (b) A partir de este valor, encontrar la magnitud del campo eléctrico para  $r < a$ . (c) ¿Qué carga está contenida dentro de una esfera de radio  $r$  cuando  $a < r < b$ ? (d) A partir de este valor, encuentre la magnitud del campo eléctrico para  $r$  cuando  $a < r < b$ . (e) Ahora considere  $r$  cuando  $b < r < c$ . ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico para esta gama de valores de  $r$ ? (f) A partir de este valor, ¿cómo debe ser la carga en la superficie interior de la esfera hueca? (g) a partir del inciso (f), ¿cómo debe ser la carga en la superficie externa de la esfera hueca? (h) Considere las tres superficies esféricas de radios  $a$ ,  $b$ , y  $c$ . ¿Cuál de estas superficies tiene la mayor magnitud de densidad de carga superficial?

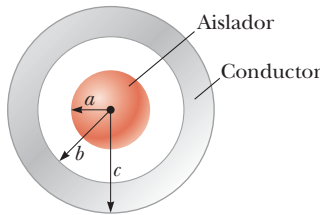


Figura P24.45

Problemas 45 y 47.

- 46. C/C** Una cubierta esférica metálica y hueca tiene radio exterior de 0.750 m, sin carga neta y está apoyado sobre una base aislante. El campo eléctrico en todas partes justo afuera de la superficie es 890 N/C radialmente hacia el centro de la esfera. Explique qué puede concluir acerca de (a) la cantidad de carga sobre la superficie exterior de la esfera y sobre la distribución de esta carga. (b) la cantidad de carga sobre la superficie interior de la esfera y su distribución. (c) la cantidad de carga dentro de la cubierta y su distribución.

- 47. V** Para la configuración mostrada en la figura P24.54, suponga que  $a = 5.00$  cm,  $b = 20.0$  cm, y  $c = 25.0$  cm. Además, suponga que el campo eléctrico en un punto a 10.0 cm desde el centro es  $3.60 \times 10^3$  N/C radialmente hacia el interior y el campo eléctrico en un punto de 50.0 cm desde el centro es de magnitud 200 N/C y apunta radialmente hacia el exterior. A partir de esta información, encuentre (a) la carga sobre la esfera aislante, (b) la carga neta sobre la esfera conductora hueca, (c) la carga sobre la superficie interior de la esfera conductora hueca y (d) la carga sobre la superficie exterior de la esfera conductora hueca.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

- 48. S** Un dipolo eléctrico se ubica a lo largo del eje de las  $y$ , como se muestra en la figura 24.48. La magnitud del momento eléctrico del dipolo se define como  $p = 2aq$ . (a) En el punto  $P$ , que está lejos del dipolo ( $r \gg a$ ), demuestre que el potencial eléctrico es igual a

$$V = \frac{k_e p \cos \theta}{r^2}$$

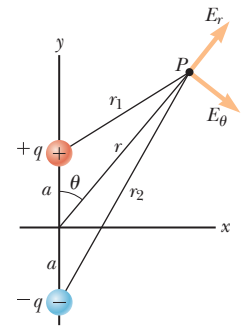


Figura P24.48

- (b) Calcular el componente  $E_r$  radial y la perpendicular  $E_\theta$  del campo eléctrico asociado. Tenga en cuenta que  $-(1/r)(\partial V/\partial \theta)$ . ¿Estos resultados parecen razonables para (c)  $\theta = 90^\circ$  y  $0^\circ$ ? (d) Para  $r = 0$ ? (e) Para la disposición de dipolo se muestra en la figura P24.48, exprese  $V$  en términos de coordenadas cartesianas utilizando  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  y

$$\cos \theta = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

- (f) Usando estos resultados y de nuevo teniendo  $r \gg a$ , calcular las componentes del campo  $E_x$  y  $E_y$ .

- 49. S** Un disco de radio  $R$  (figura 24.49) tiene una densidad de carga superficial no uniforme  $\sigma = Cr$ , donde  $C$  es una constante y  $r$  se mide a partir del centro del disco a un punto en la superficie del disco. Determine (por integración directa) el potencial en  $P$ .

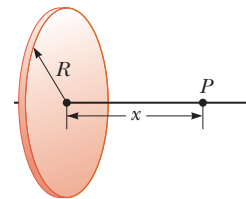


Figura P24.49

- 50. S** Una partícula con carga  $q$  se encuentra en  $x = -R$ , y una partícula con carga  $-2q$  se encuentra en el origen. Demuestre que la superficie equipotencial que tiene potencial cero es una esfera centrada en  $(-4R/3, 0, 0)$  y que tiene un radio  $r = \frac{2}{3}R$ .

- 51. S** (a) Un cascarón cilíndrico con carga uniforme tiene una carga total  $Q$ , radio  $R$  y altura  $h$ . Determine el potencial eléctrico en un punto a una distancia  $d$  del extremo derecho del cilindro, como se muestra en la figura P24.51. (Sugerencia: utilice el resultado del ejemplo 24.5 que considera el cilindro como si fuera un conjunto de anillos con carga.) (b) ¿Qué pasaría si? Utilice el resultado del ejemplo 24.6 para resolver el mismo problema, pero con un cilindro sólido.

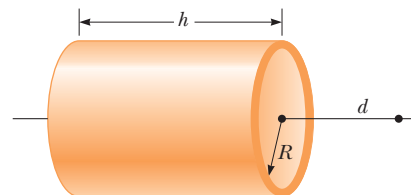


Figura P24.51

# Capacitancia y materiales dieléctricos

# 25



Cuando un paciente recibe una descarga desde un desfibrilador, la energía que recibe el paciente estaba inicialmente almacenada en un capacitor. En este capítulo estudiaremos la capacitancia y los capacitores. (Andrew Olney/Getty Images)

## IMAGINE Su viaje de vacaciones de primavera a Florida con sus

compañeros continúa. ¡Ha estado allí varios días y todos han notado que hay muchos rayos en Florida! Uno de sus amigos sugiere llamar a su tío el ingeniero eléctrico y preguntarle sobre los rayos. Usted llama a su tío y le menciona su observación sobre la cantidad de rayos en Florida. Él está de acuerdo y menciona que hizo modelado atmosférico cuando era más joven y le dice: "¿Sabías que el rayo puede analizarse modelando toda la atmósfera de la Tierra como un capacitor gigante con una capacidad de aproximadamente 1 *farad*? ¡Esa es una gran capacidad! ¡Por ejemplo, un desfibrilador usado en una situación de emergencia para enviar una sacudida poderosa a un paciente podría tener una capacidad máxima de solo un par de cientos de *microfarads*!" Después de un embarazoso momento de silencio, usted hace lo que cree que es una respuesta apropiada y se excusa. Ignorando las miradas inquisitivas de sus amigos, se dirige a otra habitación, extrae el teléfono inteligente de su bolsillo y, antes de que se le olviden las palabras, comienza a investigar en línea las palabras *capacitor*, *capacitancia*, *desfibrilador* y *farad*.

**CONEXIONES** En la introducción al capítulo anterior, mencionamos los circuitos eléctricos. Éstos consisten en varios elementos de circuito que están conectados por cables. En este capítulo, presentamos el primero de los tres elementos simples del circuito que estudiaremos. Los circuitos eléctricos son la base de la gran mayoría de los dispositivos utilizados en nuestra sociedad. Aquí estudiaremos los *capacitores*, dispositivos que almacenan carga eléctrica. Este análisis es seguido por el estudio de resistencias en el capítulo 26 e *inductores* en el capítulo 31. En capítulos posteriores, estudiaremos elementos de circuitos más sofisticados como *transformadores*

- 25.1 Definición de capacitancia
- 25.2 Cálculo de la capacitancia
- 25.3 Combinaciones de capacitores
- 25.4 Energía almacenada en un capacitor con carga
- 25.5 Capacitores con material dieléctrico
- 25.6 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico
- 25.7 Descripción atómica de los materiales dieléctricos



### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.1

**La capacitancia es una capacidad** A fin de comprender mejor la capacitancia, piense en conceptos similares que usan una palabra parecida. La *capacidad* de un cartón de leche es el volumen de leche que almacena. La *capacidad térmica* de un objeto es la cantidad de energía que el objeto almacena por unidad de diferencia de temperatura. La *capacitancia* de un capacitor es la carga que éste almacena por unidad de diferencia de potencial.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.2

**La diferencia de potenciales  $\Delta V$ , no  $V$ .** Para identificar la diferencia de potencial presente en un elemento de circuito o en un dispositivo utilice el símbolo  $\Delta V$ , ya que es consistente con la definición de diferencia de potencial, así como con el significado de la letra  $\Delta$ . Es común utilizar el símbolo  $V$  sin la letra delta para representar tanto la potencia como la diferencia de potencial; no obstante, esto origina confusiones. Téngalo en cuenta cuando consulte otros libros.

#### Definición de capacitancia ►

y *transistores*. Los capacitores se utilizan comúnmente en una variedad de circuitos eléctricos. Por ejemplo, se usan para ajustar la frecuencia de los receptores de radio, como filtros en fuentes de alimentación, como dispositivos de almacenamiento de energía para desfibriladores cardiacos y como acelerómetros en teléfonos inteligentes. Combinaremos capacitores con otros elementos del circuito en futuros capítulos.

## 25.1 Definición de capacitancia

Cualquier combinación de dos conductores separados puede actuar como elementos de un circuito eléctrico y se conoce como **capacitor**. Los conductores son las *placas*. Si los conductores llevan carga de igual magnitud y signo opuesto, como se muestra en la figura 25.1, existe una diferencia de potencial  $\Delta V$  entre ellos.

Parece razonable que el incrementar la cantidad de carga sobre los conductores, puede aumentar la diferencia de potencial entre ellos, pero, ¿cuál es la relación exacta entre carga y diferencia de potencial para un capacitor? Los experimentos han demostrado que la cantidad de carga  $Q$  en un capacitor<sup>1</sup> es linealmente proporcional a la diferencia de potencial entre los conductores; es decir,  $Q \propto \Delta V$ . La constante de proporcionalidad depende de la forma y separación de los conductores.<sup>2</sup> Debido a esta proporcionalidad, la relación de la carga a la diferencia de potencial es una constante definida de la siguiente manera:

La **capacitancia**  $C$  de un capacitor se define como la razón de la magnitud de la carga en cualquiera de los conductores a la magnitud de la diferencia de potencial entre dichos conductores:

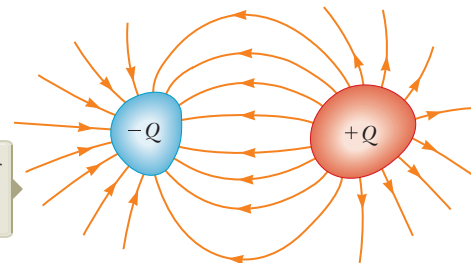
$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} \quad (25.1)$$

Por definición, la *capacitancia siempre es una cantidad positiva*. Además, la carga  $Q$  y la diferencia de potencial  $\Delta V$  siempre se expresan en la ecuación 25.1 como cantidades positivas.

Por la ecuación 25.1, es claro que en unidades del SI la capacitancia se expresa en coulombs por cada volt. La unidad del SI para capacitancia es el **farad** (F), nombre puesto en honor de Michael Faraday:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$$

El farad es una unidad de capacitancia muy grande. En la práctica, los dispositivos representativos tienen capacitancias con intervalos entre microfarads ( $10^{-6}$  F) a picofarads ( $10^{-12}$  F). Para representar los microfarads utilice el símbolo  $\mu\text{F}$ . A fin de evitar



Cuando está cargado, cada conductor tiene una carga de igual magnitud y de signos opuestos.

**Figura 25.1** Un capacitor está formado por dos conductores. Si el capacitor está cargado como se muestra, existe una diferencia de potencial  $\Delta V$  entre los conductores.

<sup>1</sup>Aunque la carga total en el capacitor sea cero (debido a que existe tanta carga positiva en exceso en un conductor como existe carga negativa en exceso en el otro), es común referirse a la magnitud de la carga de cualquiera de los conductores como “carga del capacitor”.

<sup>2</sup>Se puede comprobar la proporcionalidad entre  $\Delta V$  y  $Q$  a partir de la ley de Coulomb o con experimentos.

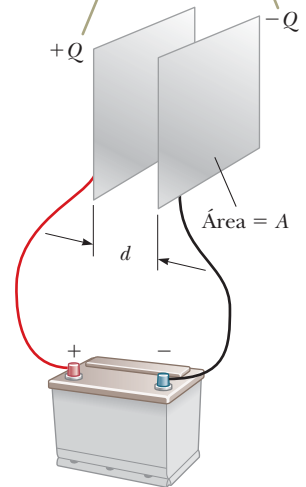
el uso de letras griegas, a menudo los capacitores se marcan como “mF” si se trata de microfarads y “mmF” si se trata de micromicrofarads, o su equivalente, “pF” para picofarads.

Piense en un capacitor formado por un par de placas paralelas, como se ilustra en la figura 25.2. Cada placa está conectada a una de las terminales de una batería, que actúa como fuente de diferencia de potencial. Si al inicio el capacitor no está cargado, la batería establece un campo eléctrico en los alambres de conexión cuando se cierra el circuito. Centre su atención en la placa conectada a la terminal negativa de la batería. El campo eléctrico aplica una fuerza sobre los electrones en el alambre justo en el exterior de esta placa; esta fuerza hace que los electrones se muevan sobre la placa. Dicho movimiento continúa hasta que la placa, el alambre y la terminal quedan a un mismo potencial eléctrico. Una vez alcanzada esta condición de equilibrio, ya no existirá diferencia de potencial entre la terminal y la placa; lo cual resulta en un campo eléctrico nulo en el alambre, y la detención del movimiento de los electrones. La placa tiene ahora una carga negativa. Un proceso similar se presenta en la otra placa del capacitor, donde los electrones se mueven de la placa hacia el alambre, dejando la placa con carga positiva. En esta configuración final, la diferencia de potencial entre las capas del capacitor es la misma que existe entre las terminales de la batería.

Ahora supongamos que desconectamos la batería de las placas. Las placas no están conectadas con un cable a nada ahora, por lo que las placas permanecen cargadas. El capacitor ha almacenado la carga. También ha almacenado energía, asociada con la separación de cargas. Exploraremos estas ideas y los usos de los capacitores después de realizar un poco más de análisis matemático.

- E XAMEN RÁPIDO 25.1** Un capacitor almacena carga  $Q$  con una diferencia de potencial  $\Delta V$ . ¿Qué pasa si el voltaje que suministra una batería al capacitor se duplica a  $2 \Delta V$ ? (a) La capacitancia disminuye hasta la mitad de su valor inicial y la carga se mantiene igual. (b) Tanto la capacitancia como la carga disminuyen hasta la mitad de sus valores iniciales. (c) Tanto la capacitancia como la carga se duplican. (d) La capacitancia permanece igual pero la carga se duplica.

Cuando se carga el capacitor al conectar las placas a las terminales de una batería, se transfieren electrones entre las placas y los cables quedando cargadas las placas.



**Figura 25.2** Un capacitor de placas paralelas consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con una superficie  $A$ , separadas una distancia  $d$ .

## 25.2 Cálculo de la capacitancia

Es posible deducir una expresión para la capacitancia producida por un par de conductores de cargas opuestas con una carga de magnitud  $Q$ , de la siguiente manera: primero calcule la diferencia de potencial utilizando las técnicas descritas en el capítulo 24. A continuación utilice la expresión ecuación 25.1 a fin de evaluar la capacitancia. Este cálculo es fácil si la geometría del capacitor es sencilla. Veamos algunos ejemplos.

Sin embargo, la situación más común es que de dos conductores, solo un conductor también tenga capacitancia. Por ejemplo, imagine un conductor esférico con carga. Las líneas del campo eléctrico alrededor de este conductor son exactamente las mismas que si se tratara de una cubierta conductora esférica de radio infinito, concéntrica con la esfera, y con una carga de la misma magnitud, pero de signo opuesto. Por tanto, identifique esta cubierta imaginaria como el segundo conductor de un capacitor de dos conductores. El potencial eléctrico de una esfera de radio  $a$  es simplemente  $k_e Q/a$ , y si  $V = 0$  en el caso de lva cubierta infinitamente grande, tiene

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{k_e Q/a} = \frac{a}{k_e} = 4\pi\epsilon_0 a \quad (25.2)$$

Esta expresión muestra que la capacitancia de una esfera con carga y aislada es proporcional a su radio y es independiente tanto de la carga de la esfera como de la diferencia de potencial. La ecuación 25.1 es la definición general de capacitancia en términos de parámetros eléctricos, pero la capacitancia de un capacitor dado dependerá sólo de la geometría de las placas.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.3

**Demasiadas letras C** No confunda la  $C$  cursiva que corresponde a la capacitancia con la  $C$  no cursiva que corresponde al coulomb.

◀ Capacitancia de una esfera con carga y aislada





Ahora imagine dos placas metálicas paralelas de igual área  $A$  están separadas por una distancia  $d$ , como se muestra en la figura 25.2. Una placa tiene una carga  $+Q$  y la otra tiene una carga  $-Q$ . La densidad de carga superficial en cada placa es  $\sigma = Q/A$ . Si las placas están muy juntas (en comparación con su longitud y ancho), se puede suponer que el campo eléctrico es uniforme entre las placas y cero en cualquier otra parte. De acuerdo con el apartado **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 23.8, el valor del campo eléctrico entre las placas es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Ya que el campo entre las placas es uniforme, la magnitud de la diferencia de potencial entre las placas es igual a  $Ed$  (véase la ecuación 24.6); por tanto,

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 25.1, se encuentra que la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Qd/\epsilon_0 A}$$

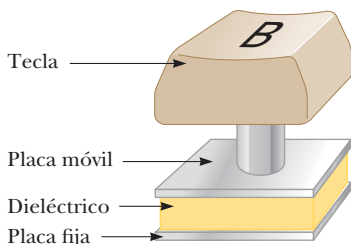
Capacitancia de placas paralelas ▶

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (25.3)$$

Es decir, la capacitancia de un capacitor de placas paralelas es proporcional al área de sus placas e inversamente proporcional a la separación de las placas.

Considere cómo la geometría de estos conductores influye en la capacidad del par de placas para almacenar carga. Conforme un capacitor adquiere carga mediante una batería, los electrones fluyen hacia la placa negativa y salen de la placa positiva. Si las placas del capacitor son grandes, las cargas acumuladas son capaces de distribuirse sobre un área sustancial y la cantidad de carga que se puede almacenar sobre una placa para una diferencia de potencial conocida aumenta conforme el área de placa aumenta. Por tanto, es razonable que la capacitancia sea proporcional al área de placa  $A$ , como en la ecuación 25.3.

Ahora considere la región que separa las placas. Imagine que acerca más las placas. Considere la situación antes de que cualquier carga haya tenido oportunidad de moverse en respuesta a este cambio. Ya que no se ha movido carga alguna, el campo eléctrico entre las placas tiene el mismo valor pero se extiende sobre una distancia reducida. En consecuencia, la magnitud de la diferencia de potencial entre las placas  $\Delta V = Ed$  (ecuación 24.6) es menor. La diferencia entre este nuevo voltaje de capacitor y el voltaje terminal de la batería aparece como una diferencia de potencial a través de los alambres que conectan la batería al capacitor, lo que resulta en un campo eléctrico en los alambres que impulsa más carga hacia las placas y aumenta la diferencia de potencial entre las placas. Cuando la diferencia de potencial entre las placas de nuevo coincide con la de la batería, el flujo de carga se detiene. En consecuencia, acercar más las placas hace que la carga sobre el capacitor aumente. Si  $d$  aumenta, la carga disminuye. Como resultado, la relación inversa entre  $C$  y  $d$  en la ecuación 25.3 es razonable.



**Figura 25.3** (Ejemplo 25.2) Un tipo de tecla en el teclado de una computadora.

- EJEMPLO RÁPIDO 25.2** Muchas piezas en el teclado de una computadora están fabricadas como capacitores, como se observa en la figura 25.3. Cuando oprime una tecla, se comprime el aislante blando colocado entre la placa móvil y la fija. Cuando la tecla es presionada, ¿qué le pasa a la capacitancia? (a) aumenta, (b) disminuye o (c) cambia de manera indeterminada, ya que el complejo circuito eléctrico conectado a la tecla puede causar un cambio en  $\Delta V$ .





### Ejemplo 25.1 Capacitor cilíndrico

Un conductor cilíndrico sólido, de radio  $a$  y carga  $Q$ , es coaxial con una cubierta cilíndrica de grosor despreciable, radio  $b > a$  (figura 25.4a). Encuentre la capacitancia de este capacitor cilíndrico si su longitud es  $\ell \gg b$ .

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Recuerde que cualquier par de conductores califica como capacitor, de modo que el sistema descrito en este ejemplo califica como tal. La figura 25.4b ayuda a visualizar el campo eléctrico entre los conductores si el capacitor retiene una carga  $Q$ . Se espera que la capacitancia dependa sólo de factores geométricos los cuales, en este caso, son  $a$ ,  $b$  y  $\ell$ .

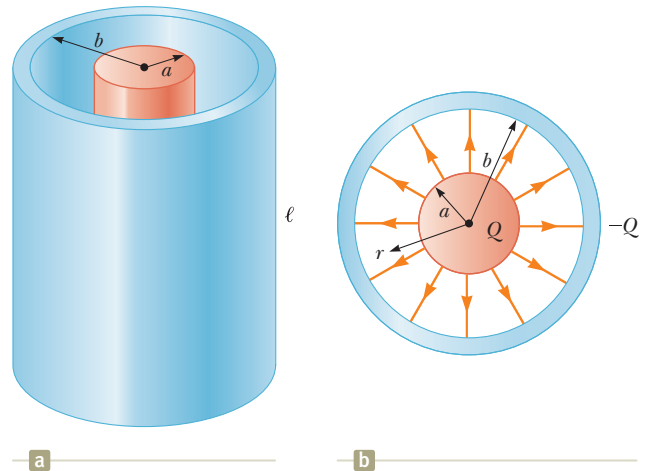
**Categorizar** Debido a la simetría cilíndrica del sistema, se pueden usar resultados de estudios previos de sistemas cilíndricos para encontrar la capacitancia.

**Analizar** Si supone que el capacitor lleva una carga  $Q$  y que  $\ell$  es mucho mayor que  $a$  y  $b$ , puede despreciar los efectos de borde. En este caso, el campo eléctrico es perpendicular al largo eje de los cilindros y está confinado a la región entre ellos (figura 25.4b).

Escriba una expresión para la diferencia de potencial entre los dos cilindros cargados de la ecuación 24.3:

Observe en la figura 25.4b que  $\vec{E}$  es paralelo a  $d\vec{s}$  a lo largo de una línea radial y aplique la ecuación 23.8 para el campo eléctrico afuera de una distribución de carga con simetría cilíndrica:

Sustituya el valor absoluto de  $\Delta V$  en la ecuación 25.1 y use  $\lambda = Q/\ell$ :



**Figura 25.4** (Ejemplo 25.1) (a) Un capacitor cilíndrico consiste en un conductor cilíndrico sólido de radio  $a$  y longitud  $\ell$  rodeado por un cascarón cilíndrico coaxial de radio  $b$ . (b) Vista superior de un extremo del capacitor si este tiene carga. Las líneas de campo eléctrico son radiales.

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$V_b - V_a = - \int_a^b E_r dr = -2k_e \lambda \int_a^b \frac{dr}{r} = -2k_e \lambda \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{(2k_e Q/\ell) \ln(b/a)} = \frac{\ell}{2k_e \ln(b/a)} \quad (25.4)$$

**Finalizar** La capacitancia depende de los radios  $a$  y  $b$ , y es proporcional a la longitud de los cilindros. La ecuación 25.4 muestra que la capacitancia por unidad de longitud de una combinación de conductores cilíndricos concéntricos es

$$\frac{C}{\ell} = \frac{1}{2k_e \ln(b/a)} \quad (25.5)$$

Un ejemplo de este tipo de arreglo geométrico es un *cable coaxial*, que consiste de dos conductores cilíndricos concéntricos separados por un aislador. Probablemente tenga un cable coaxial unido a su televisor si es suscriptor de televisión por cable. El cable coaxial es especialmente útil para blindar señales eléctricas de cualquier posible influencia externa.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que  $b = 2.00a$  para el capacitor cilíndrico. Le gustaría aumentar la capacitancia y puede hacerlo al elegir aumentar  $\ell$  en 10% o  $a$  en 10%. ¿Cuál elección es más efectiva para aumentar la capacitancia?

**Respuesta** De acuerdo con la ecuación 25.4,  $C$  es proporcional a  $\ell$ , así que aumentar  $\ell$  en 10% resulta en 10% de aumento en  $C$ . Para el resultado del cambio en  $a$ , use la ecuación 25.4 para establecer una razón de la capacitancia  $C'$  para el radio de cilindro alargado  $a'$  a la capacitancia original:

$$\frac{C'}{C} = \frac{\ell/2k_e \ln(b/a')}{\ell/2k_e \ln(b/a)} = \frac{\ln(b/a)}{\ln(b/a')}$$

Ahora sustituya  $b = 2.00a$  y  $a' = 1.10a$ , que representa un aumento de 10% en  $a$ :

$$\frac{C'}{C} = \frac{\ln(2.00a/a)}{\ln(2.00a/1.10a)} = \frac{\ln 2.00}{\ln 1.82} = 1.16$$

que corresponde a 16% de aumento en capacitancia. Por tanto, es más efectivo aumentar  $a$  que aumentar  $\ell$ .

Observe dos extensiones más de este problema. Primero, es ventajoso aumentar  $a$  sólo para un rango de relaciones entre  $a$  y  $b$ . Si  $b > 2.85a$ , aumentar  $\ell$  en 10% es más efectivo que aumentar  $a$  (véase el problema 44). Segundo, si  $b$  disminuye, la capacitancia aumenta. Aumentar  $a$  o disminuir  $b$  tiene el efecto de acercar más las placas, lo que aumenta la capacitancia.

### Ejemplo 25.2 Capacitor esférico

Un capacitor esférico consiste en una cubierta conductora esférica de radio  $b$  concéntrica con una esfera conductora más pequeña de radio  $a$  (figura 25.5). Encuentre la capacitancia de este dispositivo.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Como con el ejemplo 25.1, este sistema involucra un par de conductores y califica como capacitor. Se espera que la capacitancia dependa de los radios esféricos  $a$  y  $b$ .

**Categorizar** Debido a la simetría esférica del sistema, puede usar los resultados de estudios previos de sistemas esféricos para encontrar la capacitancia.

**Analizar** Imagine que el capacitor lleva una carga  $Q$  con la esfera interna positiva, como se muestra en la figura 25.5. Como se muestra en el capítulo 23, la magnitud del campo eléctrico afuera de una distribución de carga con simetría esférica es radial y está dada por la expresión  $E = k_e Q/r^2$ . En este caso, el resultado se aplica al campo *entre* las esferas ( $a < r < b$ ).

Escriba una expresión para la diferencia de potencial entre los dos conductores a partir de la ecuación 24.3:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Observe que  $\vec{E}$  es paralelo a  $d\vec{s}$  a lo largo de una línea radial y aplique el resultado del ejemplo 23.6 para el campo eléctrico afuera de una distribución de carga con simetría esférica:

$$V_b - V_a = - \int_a^b E_r dr = -k_e Q \int_a^b \frac{dr}{r^2} = k_e Q \left[ \frac{1}{r} \right]_a^b$$

$$(1) \quad V_b - V_a = k_e Q \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = k_e Q \frac{a - b}{ab}$$

Sustituya el valor absoluto de  $\Delta V$  en la ecuación 25.1:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{|V_b - V_a|} = \frac{ab}{k_e(b - a)} \quad (25.6)$$

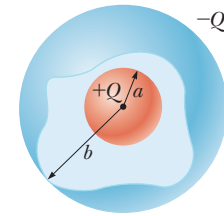
**Finalizar** La capacitancia depende de  $a$  y  $b$  como se esperaba. La diferencia de potencial entre las esferas en la ecuación (1) es negativa porque  $Q$  es negativa y  $b > a$ . Por tanto, en la ecuación 25.6, cuando se toma el valor absoluto,  $a - b$  cambia a  $b - a$ . El resultado es un número positivo.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Si el radio  $b$  de la esfera exterior tiende a infinito, ¿cuál es la capacitancia?

**Respuesta** En la ecuación 25.6, sea  $b \rightarrow \infty$ :

$$C = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{ab}{k_e(b - a)} = \frac{ab}{k_e(b)} = \frac{a}{k_e} = 4\pi\epsilon_0 a$$

Note que esta expresión es la misma que la ecuación 25.2, la capacitancia de un conductor esférico aislado.



**Figura 25.5** (Ejemplo 25.2) Un capacitor esférico consiste en una esfera interior de radio  $a$  rodeada por una cubierta esférica concéntrica de radio  $b$ . El diagrama muestra un capacitor llevando una carga  $Q$ . El campo eléctrico entre las esferas se dirige radialmente hacia afuera cuando la esfera interior tiene carga positiva.

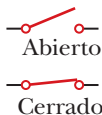
Símbolo para un capacitor



Símbolo para una batería



Símbolo para un interruptor



**Figura 25.6** Símbolos de los circuitos correspondientes a capacitores, baterías e interruptores. Observe que los capacitores están en color azul y que las baterías y los interruptores están en rojo. El interruptor cerrado lleva corriente y el abierto no.

## 25.3 Combinaciones de capacitores

En los circuitos eléctricos con frecuencia se combinan dos o más capacitores. Es posible calcular la capacitancia equivalente de ciertas combinaciones utilizando los métodos descritos en esta sección, en donde supondrá que los capacitores a combinar están inicialmente descargados.

Para el estudio de los circuitos eléctricos utilizará una representación gráfica simplificada que se conoce como **diagrama del circuito**. Este diagrama usa **símbolos de circuitos** para representar diversos elementos dentro de los circuitos. Los símbolos están conectados entre sí mediante líneas rectas que representan los alambres existentes entre los elementos del circuito. En la figura 25.6 aparecen los símbolos de circuito usados para capacitores, baterías e interruptores así como el código de colores que se utilizan en este libro para su representación. El símbolo correspondiente al capacitor es un reflejo de la geometría del modelo más común, un par de placas paralelas. La terminal positiva de la batería es el potencial más alto y se representa en el circuito simbólico más largo.

## Combinación en paralelo

Dos capacitores conectados como se muestra en la figura 25.7a se conocen como **combinación en paralelo** de capacitores. La figura 25.7b muestra un diagrama de circuito para esta combinación de capacitores. Las placas izquierdas de los capacitores se conectan a la terminal positiva de la batería mediante un alambre conductor y debido a eso están con el mismo potencial eléctrico que la terminal positiva. Del mismo modo, las placas derechas se conectan a la terminal negativa y por tanto están con el mismo potencial que la terminal negativa. En consecuencia, las diferencias de potencial individuales a través de capacitores conectados en paralelo son las mismas e iguales a la diferencia de potencial aplicada a través de la combinación. Es decir,

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V \quad (25.7)$$

donde  $\Delta V$  es el voltaje de terminal de la batería.

Después de que la batería se une al circuito, los capacitores rápidamente alcanzan su carga máxima. Sean las cargas máximas en los dos capacitores  $Q_1$  y  $Q_2$  donde  $Q_1 = \Delta V_1$  y  $Q_2 = \Delta V_2$ . La *carga total*  $Q_{\text{tot}}$  almacenada por los dos capacitores es la suma de las cargas individuales en los capacitores:

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2 \quad (25.8)$$

Suponga que quiere sustituir estos dos capacitores por un *capacitor equivalente* que tenga una capacitancia  $C_{\text{eq}}$ , como en la figura 25.7c. El efecto que este capacitor equivalente tiene sobre el circuito debe ser exactamente el mismo que el efecto de la combinación de los dos capacitores individuales. Es decir: el capacitor equivalente debe almacenar carga  $Q_{\text{tot}}$  cuando se conecte a la batería. La figura 25.7c muestra que el voltaje a través del capacitor equivalente es  $\Delta V$  porque el capacitor equivalente se conecta directamente a través de las terminales de la batería. Por tanto, para el capacitor equivalente,

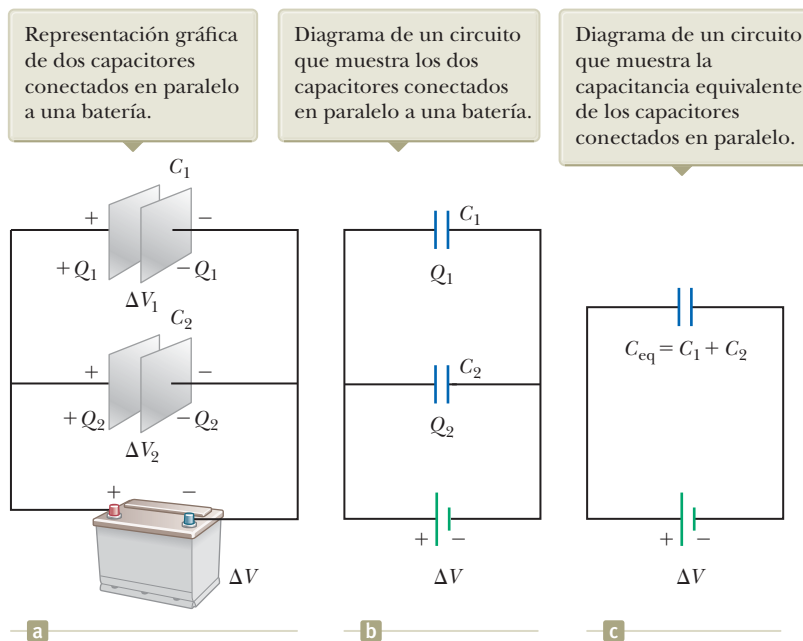
$$Q_{\text{tot}} = C_{\text{eq}} \Delta V$$

Al sustituir para las cargas en la ecuación 25.8 se obtiene

$$C_{\text{eq}} \Delta V = C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2$$

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 \quad (\text{combinación en paralelo})$$

donde se cancelan los voltajes porque todos son iguales (ecuación 25.7). Si este



**Figura 25.7** Dos capacitores conectados en paralelo. Los tres diagramas son equivalentes.

tratamiento se extiende a tres o más capacitores conectados en paralelo, se encuentra que la **capacitancia equivalente** es

Capacitancia equivalente para  
capacitores en paralelo ▶

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \quad (\text{combinación en paralelo}) \quad (25.9)$$

En consecuencia, la capacitancia equivalente de una combinación de capacitores en paralelo es (1) la suma algebraica de las capacitancias individuales y (2) mayor que cualquiera de las capacitancias individuales. El enunciado (2) tiene sentido porque en esencia se combinan las áreas de todas las placas del capacitor cuando se conectan con alambre conductor, y la capacitancia de placas paralelas es proporcional al área.

### Combinación en serie

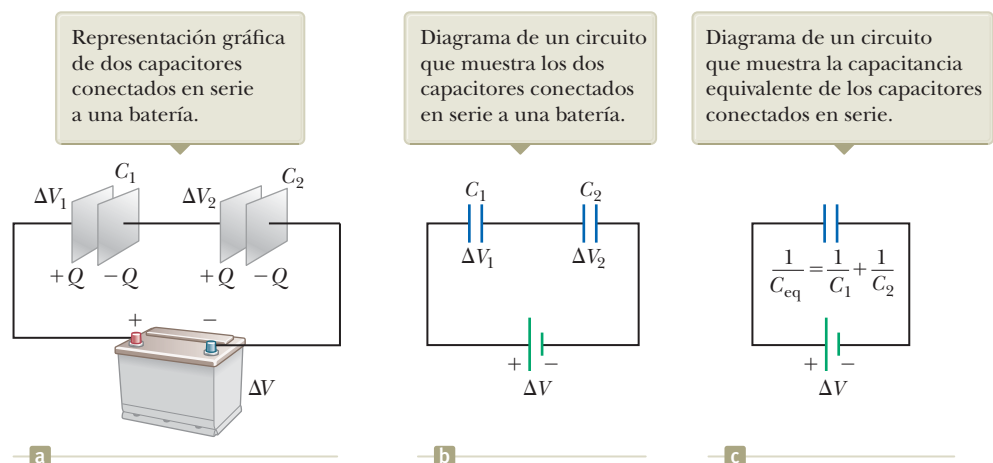
Dos capacitores conectados como se muestra en la figura 25.8a, así como el diagrama de circuito equivalente de la figura 25.8b, se conocen como **combinación en serie** de capacitores. La placa izquierda del capacitor 1 y la placa derecha del capacitor 2 están conectadas a las terminales de una batería. Las otras dos placas están conectadas entre sí y a nada más; por esto, forman un sistema aislado que inicialmente están sin carga y que debe seguir con una carga neta igual a cero. Para explicar esta combinación, primero considere los capacitores sin carga y vea lo que ocurre justo después de conectar la batería al circuito. Al conectar la batería, se transfieren electrones que salen de la placa izquierda de  $C_1$  y entran en la placa derecha de  $C_2$ . Conforme se acumula esta carga negativa en la placa derecha de  $C_2$ , una cantidad equivalente de carga negativa es expulsada de la placa izquierda de  $C_2$  y esta placa izquierda resulta con un exceso de carga positiva. La carga negativa que sale de la placa izquierda de  $C_2$  hace que se acumulen cargas negativas en la placa derecha de  $C_1$ . Como resultado, todas las placas derechas terminan con una carga  $-Q$  y las izquierdas con una carga  $+Q$ . Por tanto, las cargas de los capacitores conectados en serie son iguales.

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad (25.10)$$

donde  $Q$  es la carga que se movió entre un alambre y la placa exterior conectada de uno de los capacitores.

La figura 25.8a muestra los voltajes individuales  $\Delta V_1$  y  $\Delta V_2$  a través de los capacitores. Estos voltajes se suman para dar el voltaje total  $V_{\text{tot}}$  a través de la combinación:

$$\Delta V_{\text{tot}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \quad (25.11)$$



**Figura 25.8** Dos capacitores conectados en serie. Los tres diagramas son equivalentes.

En general, la diferencia de potencial total aplicada a cualquier cantidad de capacitores conectados en serie es la suma de las diferencias de potencial presentes entre cada uno de los capacitores individuales.

Suponga que el simple capacitor individual equivalente de la figura 25.8c ejerce un efecto idéntico sobre el circuito que la combinación en serie cuando está conectado a la batería. Una vez que está totalmente cargado, el capacitor equivalente deberá tener una carga igual a  $-Q$  en su placa derecha y una carga de  $+Q$  en su placa izquierda. Al aplicar la definición de capacitancia al circuito de la figura 25.8c, se tiene

$$\Delta V_{\text{tot}} = \frac{Q}{C_{\text{eq}}}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 25.11 se tiene

$$\frac{Q}{C_{\text{eq}}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

Cancelando las cargas porque son las mismas (ecuación 25.10) se tiene

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (\text{combinaciones en serie})$$

Cuando es aplicado este análisis a una combinación de tres o más capacitores conectados en serie, la relación para la **capacitancia equivalente** es

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (\text{combinaciones en serie}) \quad (25.12) \quad \leftarrow \text{Capacitancia equivalente para capacitores en serie}$$

Esto demuestra que (1) el inverso de la capacitancia equivalente es igual a la suma algebraica de los inversos de las capacitancias individuales y (2) la capacitancia equivalente de una combinación en serie siempre es menor que cualquiera de las capacitancias individuales incluidas en la combinación.

- EJEMPLO RÁPIDO 25.3** Dos capacitores idénticos pueden ser conectados en
- serie o en paralelo. Si lo que usted quiere es la capacitancia equivalente *más*
  - *pequeña* de la combinación, ¿Cómo los conectaría? (a) serie, (b) paralelo, o bien (c)
  - de cualquier forma, porque ambas combinaciones tienen la misma capacitancia

**Ejemplo 25.3 Capacitancia equivalente**

Encuentre la capacitancia equivalente entre  $a$  y  $b$  para la combinación de capacitores que se muestra en la figura 25.9a. Todas las capacitancias están en microfarads.

**SOLUCIÓN**

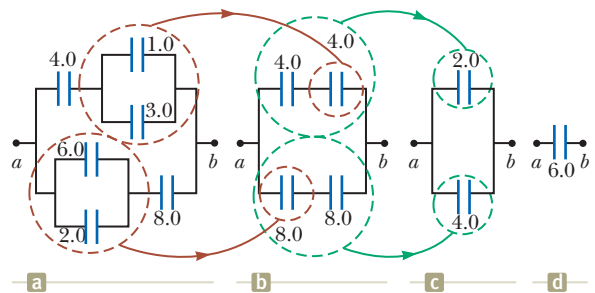
**Conceptualizar** Estudie cuidadosamente la figura 25.9a y asegúrese de entender cómo se conectan los capacitores. Verifique que sólo haya conexiones en serie y en paralelo entre los capacitores.

**Categorizar** La figura 25.9a muestra que el circuito contiene conexiones en serie y en paralelo, así que se usan las reglas para combinaciones en serie y en paralelo explicadas en esta sección.

**Analizar** Con las ecuaciones 25.9 y 25.12, reduzca la combinación etapa por etapa como se indica en la figura. Como notará a continuación, observe que en cada etapa reemplazamos la combinación de dos capacitores en el diagrama del circuito con un capacitor equivalente.

Los capacitores de  $1.0 \mu\text{F}$  y  $3.0 \mu\text{F}$  en la figura 25.9a (círculos superiores en marrón) están en paralelo. Encuentre la capacitancia equivalente a partir de la ecuación 25.9:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 = 4.0 \mu\text{F}$$



**Figura 25.9** (Ejemplo 25.3) Para encontrar la capacitancia equivalente de los capacitores en (a), se reducen las combinaciones en etapas, como se indica en (b), (c) y (d), mediante las reglas en serie y paralelo descritas en el texto. Todas las capacitancias están en microfarads.

*continúa*



## 25.3 continuación

Los capacitores de  $2.0 \mu\text{F}$  y  $6.0 \mu\text{F}$  en la figura 25.9a (círculos inferiores en verde en la figura 25.9b) también están en paralelo:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 = 8.0 \mu\text{F}$$

Ahora el circuito se parece a la figura 25.9b. Los dos capacitores de  $4.0 \mu\text{F}$  (círculos superiores en verde) están en serie. Encuentre la capacitancia equivalente a partir de la ecuación 25.12:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4.0 \mu\text{F}} + \frac{1}{4.0 \mu\text{F}} = \frac{1}{2.0 \mu\text{F}}$$

$$C_{\text{eq}} = 2.0 \mu\text{F}$$

Los dos capacitores de  $8.0 \mu\text{F}$  (círculos inferiores en marrón) también lo están. Encuentre la capacitancia equivalente a partir de la ecuación 25.12:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{8.0 \mu\text{F}} + \frac{1}{8.0 \mu\text{F}} = \frac{1}{4.0 \mu\text{F}}$$

$$C_{\text{eq}} = 4.0 \mu\text{F}$$

Ahora el circuito se parece a la figura 25.9b. Los capacitores de  $2.0 \mu\text{F}$  y  $4.0 \mu\text{F}$  están en paralelo:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 = 6.0 \mu\text{F}$$

**Finalizar** Este valor final es el del simple capacitor equivalente que se muestra en la figura 25.9d. Para mayor práctica en el tratamiento de circuitos con combinaciones de capacitores, imagine que una batería se conecta entre los puntos *a* y *b* en la figura 25.9a de modo que a través de la combinación se establece una diferencia de potencial  $\Delta V$ . ¿Puede encontrar el voltaje y la carga a través de cada capacitor?

## 25.4 Energía almacenada en un capacitor con carga

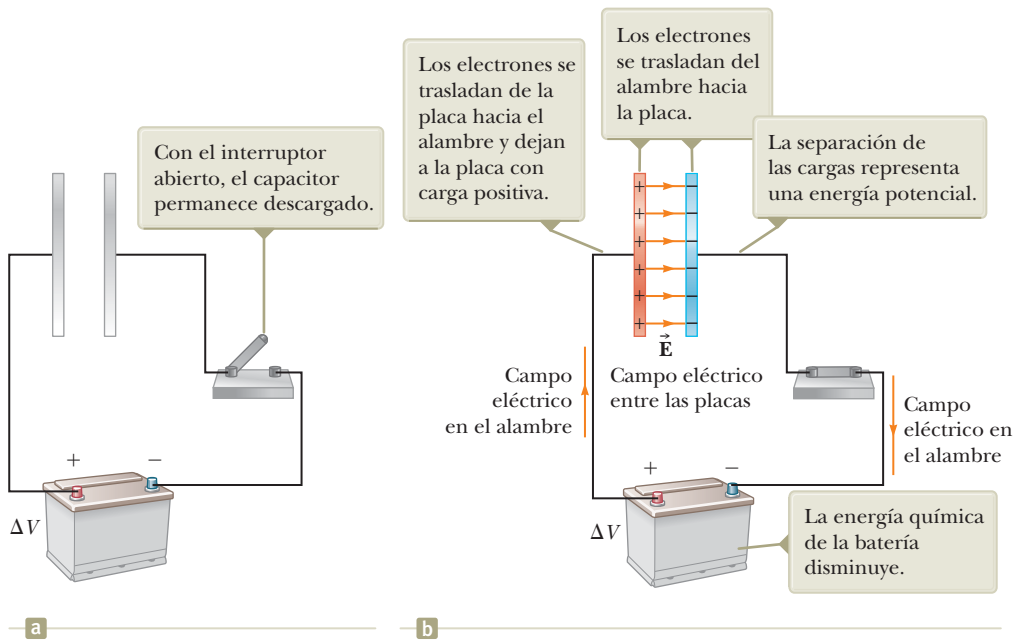
Ya que las cargas positiva y negativa están separadas en el sistema de dos conductores en un capacitor, en el sistema se almacena energía potencial eléctrica. Muchos de quienes trabajan con equipo electrónico alguna vez han verificado que un capacitor puede almacenar energía. Si las placas de un capacitor con carga se conectan mediante un conductor como un alambre, la carga se mueve entre cada placa y su alambre conector hasta que el capacitor se descarga. Con frecuencia, la descarga se observa como una chispa visible. Si por accidente toca las placas opuestas de un capacitor con carga, sus dedos actúan como ruta para descarga y el resultado es un choque eléctrico. El grado de choque que reciba dependerá de la capacitancia y el voltaje aplicados al capacitor. Tal choque podría muy peligroso si hay altos voltajes, como en la fuente de poder de un sistema de teatro en casa. Ya que las cargas se pueden almacenar en un capacitor aun cuando el sistema esté apagado, desconectar el sistema no lo hace seguro al abrir la cubierta y tocar los componentes internos.

La figura 25.10a muestra una batería conectada a un solo capacitor de placas paralelas, con un interruptor en el circuito. Identifique el circuito como un sistema. Cuando el interruptor se cierra (figura 25.10b), la batería establece un campo eléctrico en los alambres y la carga circula entre ellos y el capacitor. Conforme esto se presenta, existe una transformación de energía dentro del sistema. Antes de que el interruptor se cierre, la energía se almacena como energía química potencial en la batería. Esta energía se transforma durante la reacción química que se presenta dentro de la batería cuando funciona en un circuito eléctrico. Cuando el interruptor se cierra parte de la energía química potencial en la batería se convierte en energía potencial eléctrica asociada con la separación de cargas positivas y negativas en las placas.

Con el fin de calcular la energía almacenada en el capacitor, se considera un proceso de carga distinto del proceso real descrito en la sección 25.1, pero que logra el mismo resultado final. Esta suposición es posible porque la energía presente en la configuración final no depende del proceso real para la transferencia de la carga.<sup>3</sup> Imagine que las placas están desconectadas de la batería y que la carga se transfiere de manera mecánica a través del espacio existente entre las placas como sigue. Toma una pequeña cantidad de carga positiva de la placa conectada a la terminal negativa y

<sup>3</sup>Esta explicación es similar a las variables de estado en termodinámica. El cambio en una variable de estado, como la temperatura, es independiente de la trayectoria seguida entre el estado inicial y el final. La energía potencial de un capacitor (o de cualquier sistema) también es una variable de estado, así que no depende del proceso real seguido para cargar el capacitor.





**Figura 25.10** (a) Circuito que consiste en un capacitor, una batería y un interruptor. (b) Cuando el interruptor se cierra, la batería establece un campo eléctrico en el alambre y el capacitor se carga.

aplica una fuerza que hace que esta carga positiva se mueva hasta la placa conectada a la terminal positiva. Por tanto, realizó un trabajo sobre la carga al transferirla de una placa a la otra. En principio, no se requiere trabajo para transferir una pequeña cantidad de carga  $dq$  de una placa a la otra;<sup>4</sup> sin embargo, una vez transferida esta carga, aparecerá entre las placas una pequeña diferencia de potencial. Por tanto, deberá invertir algo de trabajo para mover una carga adicional a causa de esta diferencia de potencial. Conforme más y más carga sea transferida de una placa a la otra, la diferencia de potencial aumentará proporcionalmente y se requerirá más trabajo. El proceso general es descrito por el modelo del sistema no aislado para la energía. La ecuación 8.2 se reduce a  $W = \Delta U_E$ ; el trabajo realizado sobre el sistema por el agente externo aparece como un aumento en la energía potencial eléctrico en el sistema.

Suponga que  $q$  es la carga del capacitor en un determinado instante durante el proceso de carga. En ese mismo momento, la diferencia de potencial a través del capacitor es  $\Delta V = q/C$ . Esta relación se grafica en la figura 25.11. De la sección 24.1, se sabe que el trabajo necesario para transferir un incremento de carga  $dq$  de la placa que tiene una carga  $-q$  a la placa que tiene una carga  $q$  (que está con el potencial eléctrico más elevado) es

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

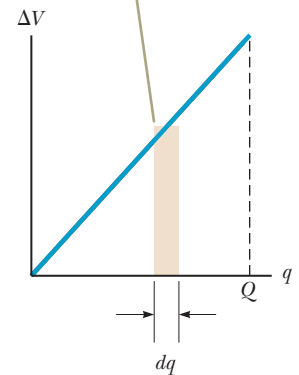
El trabajo requerido para transferir la carga  $dq$  es el área del rectángulo sombreado en la figura 25.11. Ya que  $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ , la unidad para el área es el joule. El trabajo total requerido para cargar el capacitor desde  $q = 0$  hasta una carga final  $q = Q$  es

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

El trabajo invertido al cargar el capacitor se presenta como una energía potencial eléctrica  $U_E$  almacenada en el mismo. Mediante el uso de la ecuación 25.1, es posible expresar la energía potencial almacenada en el capacitor con carga como:

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (25.13)$$

El trabajo requerido para mover la carga  $dq$  mediante la diferencia de potencial  $\Delta V$  a través de las placas del capacitor está dado aproximadamente por el área del rectángulo sombreado



**Figura 25.11** Una gráfica de diferencia de potencial contra carga para un capacitor es una línea recta con pendiente  $1/C$ .

◀ Energía almacenada en un capacitor cargado

<sup>4</sup>Utilice la  $q$  minúscula como la carga que varía con el tiempo del capacitor mientras éste se carga, a fin de distinguirla de la  $Q$  mayúscula, que es la carga total del capacitor una vez que está completamente cargado.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.4

**No se trata de un nuevo tipo de energía** La energía dada en la ecuación 25.14 no es un nuevo tipo de energía. La ecuación describe la familiar energía potencial eléctrica asociada con un sistema de cargas fuente separadas. La ecuación 25.14 proporciona una nueva *interpretación*, o una nueva forma de *modelar* la energía. Además la ecuación describe correctamente la energía asociada con *cualquier* campo eléctrico, sin importar la fuente.

Debido a que la curva de la figura 25.11 es una línea recta, el área total bajo la curva es la de un triángulo de base  $Q$  y altura  $\Delta V$ .

La ecuación 25.13 es aplicable a cualquier capacitor, sea cual fuere su geometría. Para una capacitancia dada, la energía almacenada aumenta al incrementarse la carga y la diferencia de potencial. En la práctica, existe un límite para la energía (o carga) máxima que se puede almacenar, ya que en un valor lo suficientemente grande de  $\Delta V$  ocurrirá finalmente una descarga entre las placas. Es por esta causa que los capacitores por lo general se marcan con un voltaje de operación máximo.

Considere la energía almacenada en un capacitor como si estuviera almacenada en el campo eléctrico producido entre las placas al cargar el capacitor. Esta descripción es aceptable porque el campo eléctrico es proporcional a la carga del capacitor. En el caso de un capacitor de placas paralelas, la diferencia de potencial está relacionada con el campo eléctrico mediante la relación  $\Delta V = Ed$ . Además, su capacitancia es  $C = \epsilon_0 A/d$  (ecuación 25.3). Si sustituye estas expresiones en la ecuación 25.13, obtiene

$$U_E = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} (\epsilon_0 Ad) E^2 \quad (25.14)$$

En vista de que el volumen ocupado por el campo eléctrico es  $Ad$ , la *energía por cada unidad de volumen*  $u_E = U_E/Ad$ , conocida como *densidad de energía*, es

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (25.15)$$

Densidad de energía en un campo eléctrico ►

Aunque la ecuación 25.15 fue deducida para un capacitor de placas paralelas, esta expresión es válida de manera general, independientemente de la fuente del campo eléctrico. Es decir, la densidad de energía en cualquier campo eléctrico en un punto dado es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico.

- EJEMPLO RÁPIDO 25.4** Considere tres capacitores y una batería. ¿En cuál de las siguientes combinaciones de tres capacitores se almacenará la máxima energía posible cuando la combinación esté conectada a la batería? (a) En serie, (b) en paralelo, o (c) no hay diferencia, porque ambas combinaciones almacenarán la misma cantidad de energía.

### Ejemplo 25.4 Rehacer el circuito de dos capacitores con carga

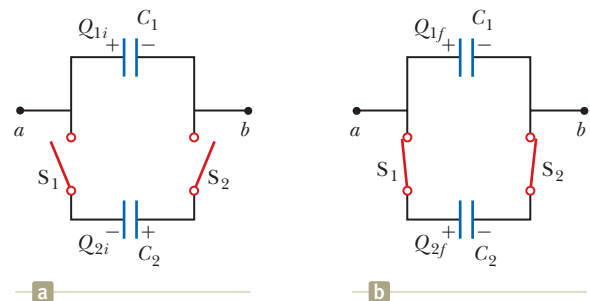
Dos capacitores,  $C_1$  y  $C_2$ , donde  $C_1 > C_2$ , están cargados con la misma diferencia de potencial inicial  $\Delta V_i$ . Los capacitores con carga se retiran de la batería y sus placas se conectan con polaridad opuesta, como en la figura 25.12a. Después los interruptores  $S_1$  y  $S_2$  se cierran como en la figura 25.12b.

**(A)** Hallar la diferencia de potencial final  $\Delta V_f$  entre  $a$  y  $b$  después de cerrar los interruptores.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 25.12 ayuda a entender las configuraciones inicial y final del sistema. Cuando los interruptores se cierran, la carga en el sistema se redistribuye entre los capacitores hasta que ambos tienen la misma diferencia de potencial. Debido a que  $C_1 > C_2$ , hay más carga en  $C_1$  que en  $C_2$ , así que la configuración final tendrá carga positiva a la izquierda de las placas como se muestra en la figura 25.12b.

**Categorizar** En la figura 25.12b, puede parecer como si los capacitores se conectaran en paralelo, pero no hay batería en este circuito para aplicar un voltaje a través de la combinación. Debido a eso, este problema *no se puede* clasificar como uno en el que los capacitores estén conectados en paralelo. Se le *puede* clasificar como un problema que involucra un sistema aislado para carga eléctrica. Las placas izquierdas de los capacitores forman un sistema aislado porque no se conectan a las placas derechas mediante conductores.



**Figura 25.12** (Ejemplo 25.4) (a) Dos capacitores se cargan con la misma diferencia de potencial inicial y se conectan uno con otro con las placas de signo opuesto en contacto cuando los interruptores se cierran. (b) Cuando los interruptores se cierran, las cargas se redistribuyen.

## 25.4 continuación

**Analizar** Escriba una expresión para la carga total sobre las placas izquierdas del sistema antes de que los interruptores se cierren, y observe que es necesario un signo negativo para  $Q_{2i}$ , porque la carga en la placa izquierda del capacitor  $C_2$  es negativa:

$$(1) \quad Q_i = Q_{1i} + Q_{2i} = C_1 \Delta V_i - C_2 \Delta V_i = (C_1 - C_2) \Delta V_i$$

Después de que los interruptores se cierran, las cargas en los capacitores individuales cambian a nuevos valores  $Q_{1f}$  y  $Q_{2f}$  de modo tal que la diferencia de potencial de nuevo es la misma a través de ambos capacitores,  $\Delta V_f$ . Escriba una expresión para la carga total en las placas izquierdas del sistema después de que los interruptores se cierran:

$$(2) \quad Q_f = Q_{1f} + Q_{2f} = C_1 \Delta V_f + C_2 \Delta V_f = (C_1 + C_2) \Delta V_f$$

Ya que el sistema está aislado, las cargas inicial y final del sistema deben ser las mismas. Use esta condición y las ecuaciones (1) y (2) para resolver para  $\Delta V_f$ :

$$Q_f = Q_i \rightarrow (C_1 + C_2) \Delta V_f = (C_1 - C_2) \Delta V_i$$

$$(3) \quad \Delta V_f = \left( \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right) \Delta V_i$$

**(B)** Encuentre la energía total almacenada en los capacitores antes y después de que los interruptores se cierran y determine la razón de la energía final a la energía inicial.

## SOLUCIÓN

Use la ecuación 25.13 para encontrar una expresión para la energía total almacenada en los capacitores antes de que los interruptores se cierren:

$$(4) \quad U_i = \frac{1}{2} C_1 (\Delta V_i)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\Delta V_i)^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) (\Delta V_i)^2$$

Escriba una expresión para la energía total almacenada en los capacitores después de cerrar los interruptores:

$$U_f = \frac{1}{2} C_1 (\Delta V_f)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\Delta V_f)^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) (\Delta V_f)^2$$

Use los resultados de la parte (A) para reescribir esta expresión en términos de  $\Delta V_i$ :

$$(5) \quad U_f = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left[ \left( \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right) \Delta V_i \right]^2 = \frac{1}{2} \frac{(C_1 - C_2)^2 (\Delta V_i)^2}{C_1 + C_2}$$

Divida la ecuación (5) entre la ecuación (4) para obtener la razón de las energías almacenadas en el sistema:

$$\frac{U_f}{U_i} = \frac{\frac{1}{2} (C_1 - C_2)^2 (\Delta V_i)^2 / (C_1 + C_2)}{\frac{1}{2} (C_1 + C_2) (\Delta V_i)^2}$$

$$(6) \quad \frac{U_f}{U_i} = \left( \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)^2$$

**Finalizar** La razón de energías es *menor* que la unidad, lo que indica que la energía final es *menor* que la energía inicial. Al principio, puede pensar que se violó la ley de conservación de la energía, pero este no es el caso. La energía “perdida” se transfiere afuera del sistema mediante el mecanismo de ondas electromagnéticas ( $T_{RE}$  en la ecuación 8.2), como se verá en el capítulo 33. Por tanto, el sistema es aislado para la carga eléctrica, pero no aislado para la energía.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si los dos capacitores tienen la misma capacitancia? ¿Qué ocurrirá cuando se cierren los interruptores?

**Respuesta** Ya que ambos capacitores tienen la misma diferencia de potencial inicial aplicada a ellos, las cargas en los capacitores tienen la misma magnitud. Cuando los capacitores con polaridades opuestas se conectan uno con otro, las cargas de igual magnitud se deben cancelar mutuamente, lo que deja los capacitores sin carga.

Pruebe los resultados para ver si este es el caso matemáticamente. En la ecuación (1), dado que las capacitancias son iguales, la carga inicial  $Q_i$  en el sistema de las placas izquierdas es cero. La ecuación (3) muestra que  $\Delta V_f = 0$ , que es consistente con capacitores sin carga. Por último, la ecuación (5) muestra que  $U_f = 0$ , lo que también es consistente con capacitores sin carga.



Un dispositivo en el cual los capacitores desempeñan un papel importante es el *desfibrilador* portátil estudiado en la semblanza de apertura. Cuando la fibrilación cardíaca (contracciones aleatorias) se presenta, el corazón produce un patrón rápido e irregular de contracciones. Una rápida descarga de energía a través del corazón puede devolverle a éste su patrón normal de contracciones. Los equipos médicos de emergencia utilizan desfibriladores portátiles con baterías capaces de cargar un capacitor a un voltaje elevado. (El circuito eléctrico está organizado para que el capacitor se cargue a un voltaje mucho más elevado que el de la batería.) En un desfibrilador totalmente cargado es posible almacenar hasta 360 J en el campo eléctrico de su enorme capacitor. La energía almacenada se libera a través del corazón mediante electrodos conductores, conocidos como paletas, que se colocan en los costados del tórax de la víctima. El desfibrilador puede suministrar toda esta energía a un paciente en aproximadamente 2 ms (¡esto es más o menos equivalente a 3000 veces la energía suministrada a un foco de 60 W!). Los paramédicos deben esperar entre cada aplicación de la energía, debido al tiempo que se necesita para que los capacitores se carguen por completo. En estas aplicaciones y otras (las unidades de destello de las cámaras, así como los láser para experimentos de fusión), los capacitores sirven como depósitos de energía que se pueden cargar poco a poco para después descargarse rápidamente a fin de proporcionar grandes cantidades de energía en un pulso breve.

En la semblanza de apertura, su tío también mencionó el modelado de la atmósfera de la Tierra como un gran capacitor. La superficie de la Tierra es una placa, con carga negativa, y la otra placa es una capa esférica que representa la posición promedio de las cargas positivas ubicadas en el aire. Debido a que hay partículas cargadas que se mueven libremente en el aire entre las placas de este capacitor, hay una fuga eléctrica entre las placas, que tiende a reducir continuamente la carga en el capacitor, pero el proceso del rayo libera carga negativa al suelo y recarga el capacitor. Se alcanza una situación de equilibrio en la que la velocidad de fuga a través del aire se equilibra con la velocidad de los rayos sobre la superficie del globo.

## 25.5 Capacitores con material dieléctrico

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 25.5

**¿El capacitor está conectado o no a una batería?** En aquellos problemas en los que se modifica un capacitor (mediante la inserción de un material dieléctrico, por ejemplo), debe advertir si estas modificaciones se llevan a cabo mientras el capacitor está conectado a una batería o cuando el capacitor está desconectado. Si el capacitor se ha mantenido conectado a la batería, se conserva, por necesidad, el mismo voltaje aplicado al capacitor. Si lo desconecta antes de efectuar cualquier modificación, el capacitor forma un sistema aislado y conserva su misma carga.

Un **dieléctrico** es un material no conductor, como el hule, el vidrio o el papel encebado. El siguiente experimento muestra el efecto que causa un dieléctrico en un capacitor. Consideremos un capacitor de placas paralelas que, sin dieléctrico, tiene una carga  $Q_0$  y una capacitancia  $C_0$ . La diferencia de potencial en las terminales del capacitor es  $V_0 = Q_0/C_0$ . Esta situación se ilustra en la figura 25.13a. La diferencia de potencial se mide con un *voltímetro*. Observe que en la figura no hay batería; también, debe suponer que a través de un voltímetro ideal no puede fluir carga alguna. De lo anterior, se concluye que no existe trayectoria por la cual pueda fluir la carga y modificar la misma en el capacitor. Si ahora se inserta un material dieléctrico entre las placas, como se observa en la figura 25.13b, el voltímetro indica que el voltaje entre las placas disminuye un valor  $\Delta V$ . Los voltajes con y sin dieléctrico están relacionados mediante el factor  $\kappa$  como sigue:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\kappa}$$

Ya que  $\Delta V < \Delta V_0$ , se ve que  $\kappa > 1$ . El factor adimensional  $\kappa$  se llama **constante dieléctrica** del material. La constante dieléctrica varía de un material a otro. En esta sección se explica este cambio en capacitancia en términos de parámetros eléctricos como carga eléctrica, campo eléctrico y diferencia de potencial; la sección 25.7 describe el origen microscópico de estos cambios.

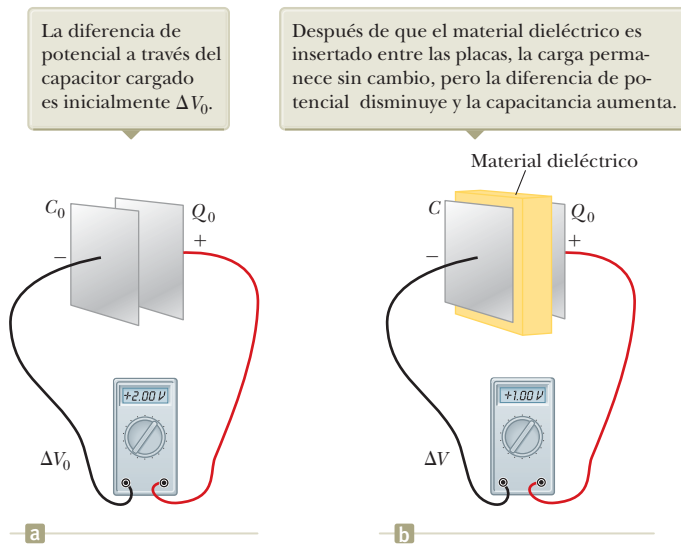
Ya que la carga  $Q_0$  en el capacitor en la figura 25.13 no cambia, la capacitancia debe cambiar al valor

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\Delta V_0/\kappa} = \kappa \frac{Q_0}{\Delta V_0} = \kappa C_0 \quad (25.16)$$

Capacitancia de un capacitor  
lleno con un material que tiene  
una constante dieléctrica  $\kappa$







**Figura 25.13** Un capacitor cargado (a) antes y (b) después de haber insertado un material dieléctrico entre las placas.

Es decir, la capacitancia *aumenta* en un factor  $\kappa$  cuando el material dieléctrico llena por completo la región entre placas.<sup>5</sup> En el caso de un capacitor de placas paralelas, donde  $C_0 = \epsilon_0 A/d$  (ecuación 25.3), se expresa la capacitancia cuando el capacitor está lleno de material dieléctrico como sigue:

$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{25.17}$$

En la figura 25.13a, las placas se cargaron con una batería al voltaje  $\Delta V_0$ . Luego, se quitó la batería y se reemplazó con un voltímetro. Supongamos que la batería permanece conectada a las placas cuando insertamos el dieléctrico. En este caso, la batería fija el voltaje entre las placas y no puede cambiar. Lo que encontramos es que las cargas fluyen entre la batería y las placas para mantener el voltaje constante. Encontramos que la carga en el capacitor cambia a  $Q = \kappa Q_0$  después de insertar el dieléctrico. La evaluación de la capacitancia en esta situación da el mismo resultado que en la ecuación 25.16.

De la ecuación 25.17, parece posible obtener un capacitor muy grande al reducir  $d$ , que es la distancia entre las placas. En la práctica, el valor más pequeño de  $d$  se encuentra limitado por la descarga eléctrica que puede presentarse a través del medio dieléctrico que separa las placas. Para cualquier separación dada  $d$ , el voltaje máximo que puede aplicarse a un capacitor sin causar una descarga depende de la **resistencia dieléctrica** (campo eléctrico máximo) del dieléctrico. Si la magnitud del campo eléctrico en el dieléctrico excede la resistencia dieléctrica, las propiedades aislantes fallan, y el dieléctrico empieza a conducir.

Los capacitores físicos tienen una especificación que se conoce mediante una gran diversidad de nombres, incluyendo *voltaje de servicio*, *voltaje de ruptura* y *tensión nominal*. Este parámetro representa el voltaje más elevado que se puede aplicar al capacitor sin exceder la resistencia dieléctrica del material dieléctrico en el capacitor. En consecuencia, cuando seleccione un capacitor para una aplicación determinada, es necesario considerar la capacitancia así como el voltaje esperado a través del capacitor en el circuito y asegurarse de que el voltaje esperado sea inferior que el voltaje nominal del capacitor.

Los materiales aislantes tienen valores de  $\kappa$  superiores a la unidad y resistencias dieléctricas mayores que la del aire, como se indica en la tabla 25.1. Entonces, un dieléctrico tiene las siguientes ventajas:

- Incrementa la capacitancia.
- Incrementa el voltaje máximo de operación.
- Proporciona un posible soporte mecánico entre las placas, lo que permite que estén cerca una de la otra sin tocarse, así reduce  $d$  y aumenta  $C$ .

**TABLA 25.1** Constantes dieléctricas y resistencias dieléctricas aproximadas de diversos materiales a temperatura ambiente

Material	Constante dieléctrica k	Resistencia dieléctrica <sup>a</sup> (10 <sup>6</sup> V/m)
Aceite de silicón	2.5	15
Agua	4.9	24
Aire (seco)	1.000 59	3
Baquelita	4.9	24
Cloruro de polivinilo	3.4	40
Cuarzo fundido	3.78	8
Hule de neopreno	6.7	12
Mylar	3.2	7
Nylon	3.4	14
Papel	3.7	16
Papel impregnado en parafina	3.5	11
Poliestireno	2.30	18
Porcelana	6	12
Teflón	2.1	60
Titanato de estroncio	233	8
Vacío	1.000 00	—
Vidrio pírex	5.6	14

<sup>a</sup>La resistencia dieléctrica es igual al campo eléctrico máximo que puede existir en un dieléctrico sin que se rompa el aislamiento. Estos valores dependen totalmente de la presencia de impurezas y defectos en los materiales.

### Ejemplo 25.5 Energía almacenada antes y después

Un capacitor de placas paralelas se carga con una batería y adquiere una carga  $Q_0$ . Después se retira la batería y entre las placas se inserta una lámina de material que tiene una constante dieléctrica  $\kappa$ . Identifique el sistema como el capacitor y el dieléctrico. Encuentre la energía almacenada en el sistema antes y después de insertar el dieléctrico.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Piense en lo que ocurre cuando se inserta el dieléctrico entre las placas. Ya que la batería se retiró, la carga en el capacitor debe permanecer igual. Sin embargo ya sabe, por la explicación anterior, que la capacitancia debe cambiar. Debido a eso, se espera un cambio en la energía del sistema.

**Categorizar** Ya que se espera que la energía del sistema cambie, se le modela como un sistema *no aislado* para la *energía* que involucra a un capacitor y a un dieléctrico.

**Analizar** A partir de la ecuación 25.13, encuentre la energía almacenada en ausencia del dieléctrico:

$$U_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0}$$

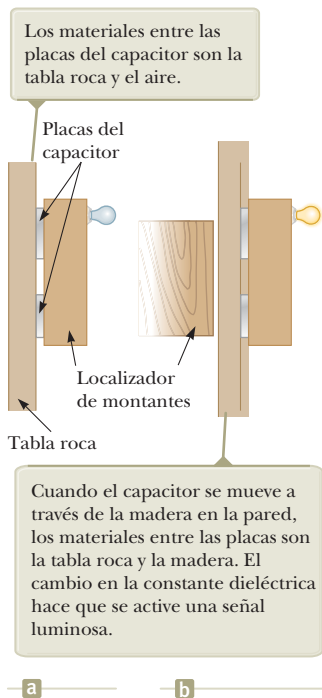
Encuentre la energía almacenada en el capacitor después de que el dieléctrico se inserta entre las placas:

$$U_E = \frac{Q_0^2}{2C}$$

Use la ecuación 25.16 para sustituir la capacitancia  $C$ :

$$U_E = \frac{Q_0^2}{2\kappa C_0} = \frac{U_0}{\kappa}$$

**Finalizar** Ya que  $\kappa > 1$ , la energía final es menor que la energía inicial. Podemos tener en cuenta la disminución de la energía del sistema mediante la realización de un experimento al notar que el dieléctrico, cuando se inserta, se jala hacia el dispositivo. Para evitar que el dieléctrico acelere, un agente externo debe realizar trabajo negativo sobre el dieléctrico. La ecuación 8.2 se convierte simplemente en la diferencia  $\Delta U_E = W$  donde ambos lados de la ecuación son negativos.



**Figura 25.14** (Examen rápido 25.5) Localizador de montantes.

- EXAMEN RÁPIDO 25.5** Si ha intentado alguna vez colgar un cuadro o un espejo, sabrá que es difícil localizar los montantes de madera sobre los que hay que fijar el clavo o el tornillo. Un localizador de montantes de carpintero es básicamente un capacitor que tiene sus placas una al lado de la otra en vez de una enfrente de la otra, como se puede observar en la figura 25.14. Cuando el dispositivo pasa frente a un montante, ¿la capacitancia (a) aumenta o (b) disminuye?

## 25.6 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico

Ya se explicó el efecto de la capacitancia en la colocación de un dieléctrico entre las placas de un capacitor. En la sección 25.7, se describirá el origen microscópico de este efecto. Sin embargo, antes de hacerlo, necesita ampliar la explicación del dipolo eléctrico, que inició en la sección 22.4 (véase el ejemplo 22.6). El dipolo eléctrico está constituido por dos cargas de igual magnitud y de signo opuesto separadas por una distancia  $2a$ , como se observa en la figura 25.15. El **momento del dipolo eléctrico** de esta configuración está definido por el vector  $\vec{p}$ , dirigido desde  $-q$  hacia  $+q$  a lo largo de la línea que une a las cargas, y con una magnitud:

$$p \equiv 2aq \quad (25.18)$$

Ahora considere que el dipolo eléctrico colocado en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  y forma un ángulo  $\theta$  con el campo como se ve en la figura 25.16. Identifique  $\vec{E}$  como el campo *externo* al dipolo, establecida por alguna otra distribución de carga, para distinguirlo del campo *debido* al dipolo, que se explicó en la sección 22.4.

Cada una de las cargas es modelada como una partícula en un campo eléctrico. Las fuerzas eléctricas que actúan sobre las dos cargas son de igual magnitud ( $F = qE$ ) y de dirección opuesta, como se muestra en la figura 25.16. Por tanto, la fuerza neta sobre el dipolo es igual a cero. Sin embargo, las dos fuerzas producen un momento de torsión neto en el dipolo; éste es descrito entonces como un objeto rígido por el modelo de momento de torsión neto. Como resultado, el dipolo gira en la dirección

que lleve el vector del momento del dipolo a una mejor alineación con el campo. El momento de torsión debido a la fuerza sobre la carga positiva en relación con un eje a través de  $O$  de la figura 25.16 tiene una magnitud  $Fa \text{ sen } \theta$ , donde  $a \text{ sen } \theta$  es el brazo del momento de  $F$  en  $O$ . Esta fuerza tiende a producir una rotación en el sentido de las manecillas del reloj. El momento de torsión en relación con  $O$  sobre la carga negativa también tiene como magnitud  $Fa \text{ sen } \theta$ ; una vez más en este caso la fuerza tiende a producir el mismo tipo de rotación, por lo que la magnitud del momento de torsión neto alrededor de  $O$  es

$$\tau = 2Fa \text{ sen } \theta$$

Ya que  $F = qE$  y  $p = 2aq$ , se expresa  $\tau$  de la forma

$$\tau = 2aqE \text{ sen } \theta = pE \text{ sen } \theta \tag{25.19}$$

Basado en esta expresión, es conveniente expresar el momento de torsión del vector en forma de producto cruz de los vectores  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$ :

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{25.20}$$

También podemos modelar el sistema del dipolo y el campo eléctrico externo como un sistema aislado para la energía. Es posible determinar la energía potencial del sistema, como una función de la orientación del dipolo en relación con el campo. Para ello debe reconocer que un agente externo deberá efectuar trabajo para girar el dipolo un cierto ángulo y conseguir que el vector del momento del dipolo quede menos alineado con el campo. A continuación el trabajo efectuado se almacena como energía potencial en el sistema. Observe que esta energía potencial se asocia con una configuración de *rotación* del sistema. Anteriormente, hemos visto las energías potenciales asociadas con las configuraciones de *traslación*: un objeto con masa se mueve en un campo gravitatorio, una carga que fue trasladada en un campo eléctrico, o un resorte se extiende. El trabajo  $dW$  requerido para girar el dipolo un ángulo  $d\theta$  es  $dW = \tau d\theta$  (ecuación 10.25). En vista de que  $\tau = pE \text{ sen } \theta$  y debido a que el trabajo resulta de un incremento en la energía potencial  $U_E$ , tenemos que para una rotación de  $\theta_i$  hasta  $\theta_f$  el cambio en la energía potencial del sistema es

$$\begin{aligned} U_f - U_i &= \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} pE \text{ sen } \theta \, d\theta = pE \int_{\theta_i}^{\theta_f} \text{sen } \theta \, d\theta \\ &= pE[-\cos \theta]_{\theta_i}^{\theta_f} = pE(\cos \theta_i - \cos \theta_f) \end{aligned}$$

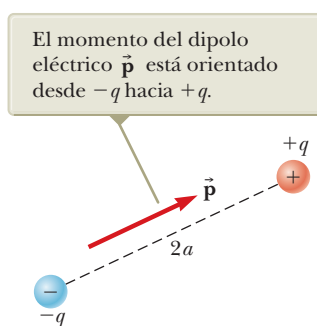
El término que contiene a  $\cos \theta_i$  es una constante que depende de la orientación inicial del dipolo. Resulta conveniente que elija un ángulo de referencia  $\theta_i = 90^\circ$ , por lo que  $\cos \theta_i = \cos 90^\circ = 0$ . Además, seleccione  $U_i = 0$  en  $\theta_i = 90^\circ$  como la energía potencial de referencia. Por tanto se puede expresar un valor general de  $U_E = U_f$  de la forma

$$U_E = -pE \cos \theta \tag{25.21}$$

Escriba esta expresión para la energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico como el producto punto de los vectores  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$ :

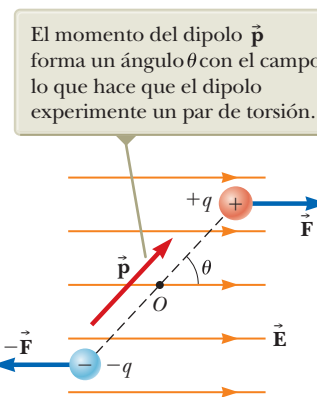
$$U_E = -\vec{p} \cdot \vec{E} \tag{25.22}$$

A fin de comprender conceptualmente la ecuación 25.21, compare esta expresión con la correspondiente para la energía potencial de un sistema de un objeto en el campo gravitacional de la Tierra,  $U_g = mgh$  (ecuación 7.19). En primer lugar, ambas expresiones contienen un parámetro de la entidad colocado en el campo: masa para el objeto, momento dipolar para el dipolo. En segundo lugar, ambas expresiones contienen el campo,  $g$  para el objeto,  $E$  para el dipolo. Por último, ambas expresiones contienen una descripción de la configuración: la posición traslacional y del objeto y la posición de giro  $\theta$  para el dipolo. En ambos casos, una vez que se cambia la configuración, el sistema tiende a volver a la configuración original cuando se libera el objeto: el objeto de masa  $m$  cae hacia el suelo, y el dipolo comienza a girar de nuevo hacia la configuración en la que está alineado con el campo.



**Figura 25.15** Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas de magnitudes iguales y signos opuestos separados por una distancia  $2a$ .

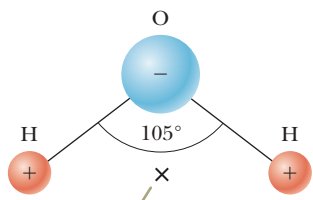
◀ Par de torsión sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo



**Figura 25.16** Dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme.

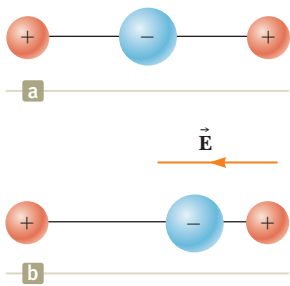
◀ Energía potencial del sistema de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo





El centro de la distribución de la carga positiva está en el punto X.

**Figura 25.17** La molécula de agua,  $\text{H}_2\text{O}$ , tiene una polarización permanente debido a su geometría no lineal.



**Figura 25.18** (a) Una molécula lineal simétrica no tiene una polarización permanente. (b) Un campo eléctrico externo induce una polarización en la molécula.

Se dice que las moléculas están *polarizadas* cuando existe una separación entre la posición promedio de las cargas negativas y la posición promedio de las cargas positivas dentro de la molécula. En algunas moléculas, como el agua, dicha condición siempre está presente; a estas moléculas se les llama **moléculas polares**. Las moléculas que no poseen una polarización permanente se les conoce como **moléculas no polares**.

La polarización permanente del agua será más comprensible al estudiar la geometría de su molécula. En la molécula de agua, el átomo de oxígeno está enlazado a los átomos de hidrógeno de forma tal que entre los dos enlaces se forma un ángulo de  $105^\circ$  (figura 25.17). El centro de la distribución de carga negativa está cerca del átomo de oxígeno, y el centro de la distribución de carga positiva está en algún punto a mitad de camino a lo largo de la línea que une a los átomos de hidrógeno (punto X en la figura 25.17). Es posible representar o modelar la molécula de agua, así como otras moléculas polares, como dipolos, ya que las posiciones promedio de las cargas positivas y negativas actúan como cargas puntuales. Como resultado, puede aplicar este análisis sobre los dipolos al comportamiento de las moléculas polares.

Otra forma común de aprovechar la estructura dipolar del agua en la casa es cuando lava con agua y jabón. La grasa y el aceite están formados por moléculas no polares, que generalmente no son atraídas por el agua. El agua simple no es muy útil para eliminar este tipo de grasas. El jabón contiene moléculas largas conocidas como *surfactantes*. En una molécula larga, las características de polaridad de un extremo de la molécula pueden ser diferentes de las del otro extremo. En una molécula surfactante, un extremo actúa como una molécula no polar y el otro como una molécula polar. El extremo no polar puede fijarse a una molécula de grasa o de aceite, y el extremo polar puede hacerlo a una molécula de agua. Por tanto, el jabón sirve de puente, enlazando las moléculas de grasa y de agua. Al enjuagar, la grasa y el aceite se van con el agua.

Una molécula simétrica (figura 25.18a) no tiene una polarización permanente pero puede ser inducida colocando la molécula en un campo eléctrico. Un campo que se dirige hacia la izquierda, como se muestra en la figura 25.18b, haría que el centro de la distribución de cargas positivas se desplazara hacia la izquierda en relación con su posición inicial, y que el centro de la distribución de cargas negativas se desplazara hacia la derecha. Esta *polarización inducida* es el efecto predominante en la mayor parte de los materiales que se utilizan como dieléctricos en los capacitores.

### Ejemplo 25.6 La molécula de $\text{H}_2\text{O}$

La molécula de agua ( $\text{H}_2\text{O}$ ) tiene un momento de dipolo eléctrico de  $6.3 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ . Una muestra contiene  $10^{21}$  moléculas de agua, con todos los momentos de dipolo orientados en la dirección de un campo eléctrico de  $2.5 \times 10^5 \text{ N/C}$  de magnitud. ¿Cuánto trabajo se requiere para girar los dipolos de esta orientación ( $\theta = 0^\circ$ ) a una en la que todos los momentos sean perpendiculares al campo ( $\theta = 90^\circ$ )?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Cuando todos los dipolos se alinean con el campo eléctrico, el sistema dipolos-campo eléctrico tiene la energía potencial mínima. Esta energía tiene un valor negativo dado por el producto del lado derecho de la ecuación 25.21, evaluada en  $0^\circ$ , y el número  $N$  de dipolos.

**Categorizar** La combinación de los dipolos y el campo eléctrico se identifica como un sistema. Utilizamos el modelo del *sistema no aislado* por un agente externo que realiza trabajo sobre el sistema para cambiar su energía potencial.

**Analizar** Escriba la reducción adecuada de la ecuación de conservación de la energía, ecuación 8.2, para esta situación:

$$(1) \quad \Delta U_E = W$$

Use la ecuación 25.21 para evaluar las energías potenciales inicial y final del sistema y la ecuación 1) para calcular el trabajo requerido para rotar los dipolos:

$$\begin{aligned} W &= U_{90^\circ} - U_{0^\circ} = (-NpE \cos 90^\circ) - (-NpE \cos 0^\circ) \\ &= NpE = (10^{21})(6.3 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})(2.5 \times 10^5 \text{ N/C}) \\ &= 1.6 \times 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

**Finalizar** Note que el trabajo realizado sobre el sistema es positivo porque la energía potencial del sistema se ha elevado de un valor negativo a un valor de cero.

## 25.7 Descripción atómica de los materiales dieléctricos

En la sección 25.5 encontré que la diferencia de potencial  $\Delta V_0$  entre las placas de un capacitor queda reducida a  $\Delta V_0/\kappa$  al insertar un material dieléctrico. Esta diferencia de potencial disminuye porque se reduce la magnitud del campo eléctrico entre las placas. En particular, si  $\vec{E}$  es el campo eléctrico que existe sin dieléctrico, el campo en presencia de un dieléctrico es

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\kappa} \quad (25.23)$$

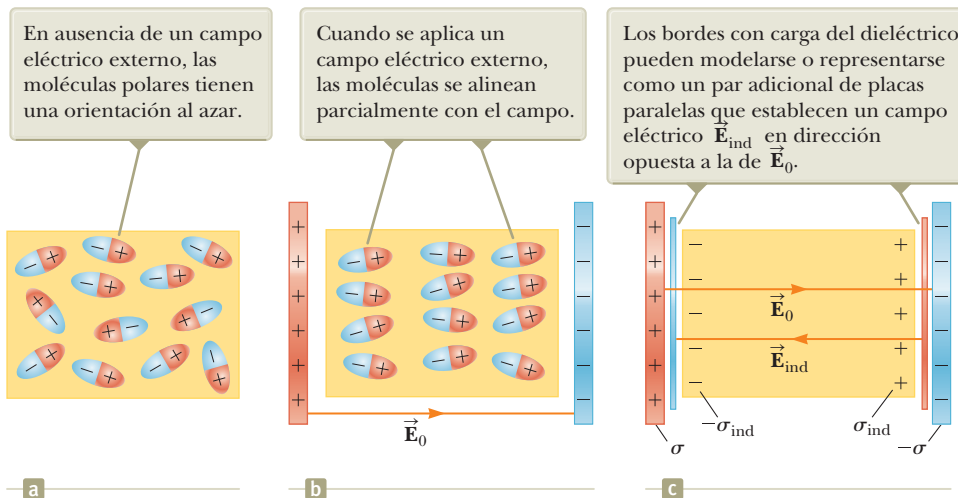
Considere primero un dieléctrico compuesto de moléculas polares colocadas en el campo eléctrico entre las placas de un capacitor. Los dipolos (es decir, las moléculas polares que constituyen el dieléctrico) tienen una orientación al azar en ausencia de un campo eléctrico, como se puede ver en la figura 25.19a. Cuando se aplica un campo eléctrico  $\vec{E}_0$  debido a las cargas sobre las placas del capacitor, se ejerce un momento de torsión sobre los dipolos, lo que provoca que se alineen parcialmente con el campo, como se observa en la figura 25.19b. Ahora el dieléctrico es un material polarizado. El grado de alineación de las moléculas en relación con el campo eléctrico depende de la temperatura y de la magnitud del mismo. En general, la alineación aumentará al reducirse la temperatura e incrementarse el campo eléctrico.

Si las moléculas del material dieléctrico no son polares, el campo eléctrico debido a las placas produce una polarización inducida en la molécula. Estos momentos de dipolo inducido tienden a alinearse con el campo externo, y el dieléctrico se polariza. Debido a eso, es posible polarizar un dieléctrico mediante un campo externo, independientemente de que las moléculas en el dieléctrico sean polares o no polares.

Con esto en mente, considere una lámina de material dieléctrico colocada entre las placas de un capacitor, con cada placa transportando una densidad de carga con magnitud  $\sigma$ . Esto da como resultado un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}_0$ , como se observa en la figura 25.19c. El campo eléctrico debido a las placas está dirigido hacia la derecha, lo cual polariza al dieléctrico. El efecto neto sobre el dieléctrico es la formación de una densidad de carga superficial positiva *inducida*  $\sigma_{\text{ind}}$  sobre la cara derecha y una densidad de carga superficial negativa de igual magnitud  $-\sigma_{\text{ind}}$  sobre la cara izquierda, como se puede ver en la figura 25.19c. Ya que es posible modelar estas distribuciones de carga superficial como debidas a placas paralelas, las cargas superficiales inducidas en el dieléctrico originan un campo eléctrico inducido  $\vec{E}_{\text{ind}}$ , con dirección opuesta al campo externo  $\vec{E}_0$ . Por tanto, el campo eléctrico neto  $\vec{E}$  en el dieléctrico tiene una magnitud

$$E = E_0 - E_{\text{ind}} \quad (25.24)$$

En el capacitor de placas paralelas de la figura 25.19c, el campo externo  $E_0$  está relacionado con la densidad de carga  $\sigma$  sobre las placas mediante la relación  $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ .



**Figura 25.19** (a) Las moléculas polares en un dieléctrico. (b) Un campo eléctrico se aplica al dieléctrico. (c) Acercamiento al campo eléctrico en el interior del dieléctrico.



El campo eléctrico inducido en el dieléctrico está relacionado con la densidad de carga inducida  $\sigma_{\text{ind}}$  mediante la relación  $E_{\text{ind}} = \sigma_{\text{ind}}/\epsilon_0$ . En vista de que  $E = E_0/\kappa = \sigma/\kappa\epsilon_0$ , al sustituir estos valores en la ecuación 25.24 se obtiene

$$\frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{ind}}}{\epsilon_0}$$

$$\sigma_{\text{ind}} = \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) \sigma \quad (25.25)$$

Ya que  $\kappa > 1$ , esta expresión muestra que la densidad de carga  $\sigma_{\text{ind}}$  inducida sobre el dieléctrico es inferior a la densidad de carga  $\sigma$  de las placas. Por ejemplo, si  $\kappa = 3$  la densidad de carga inducida es igual a dos tercios de la densidad de carga sobre las placas. Si no existe ningún dieléctrico, entonces  $\kappa = 1$  y  $\sigma_{\text{ind}} = 0$ , como era de esperarse. Sin embargo, si se reemplaza el dieléctrico por un conductor eléctrico, para el cual  $E = 0$ , la ecuación 25.24 dice que  $E_0 = E_{\text{ind}}$ ; esto corresponde a  $\sigma_{\text{ind}} = \sigma$ . Es decir, la carga superficial inducida sobre el conductor es igual en magnitud pero de signo opuesto a la de las placas, lo que resulta en un campo eléctrico neto de valor cero en el conductor (véase la figura 24.17).

### Ejemplo 25.7 Efecto de una lámina metálica

Un capacitor de placas paralelas tiene una separación de placas  $d$  y área de placa  $A$ . Una lámina metálica sin carga, de grosor  $a$ , se inserta a medio camino entre las placas.

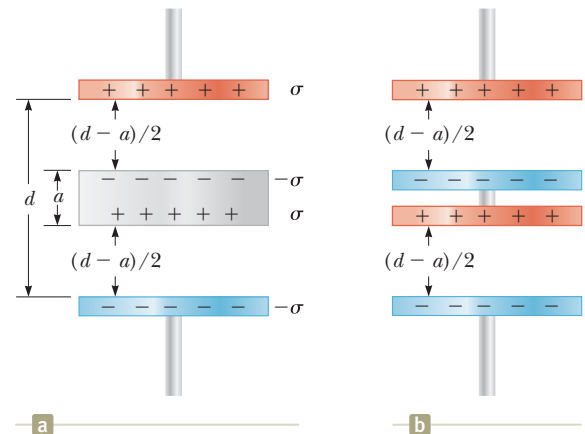
**(A)** Encuentre la capacitancia del dispositivo.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 25.20a muestra la lámina metálica entre las placas del capacitor. Cualquier carga que aparezca en una placa del capacitor debe inducir una carga de igual magnitud y signo opuesto sobre el lado cercano de la lámina, como se muestra en la figura 25.20a. En consecuencia, la carga neta sobre la lámina sigue siendo cero y el campo eléctrico dentro de la lámina es cero.

**Categorizar** Los planos de carga en los extremos superior e inferior de la lámina metálica son idénticos a la distribución de cargas sobre las placas de un capacitor. El metal entre los bordes de la lámina sirve sólo para hacer una conexión eléctrica entre los bordes. Por tanto, los bordes de la lámina se pueden modelar como planos conductores y el volumen de la lámina como un alambre. Como resultado, el capacitor de la figura 25.20a es equivalente a dos capacitores en serie, cada uno con una separación de placa  $(d - a)/2$ , como se muestra en la figura 25.20b.

**Analizar** Use la ecuación 25.3 y la regla para sumar dos capacitores en serie (ecuación 25.12) para encontrar la capacitancia equivalente en la figura 25.20b:



**Figura 25.20** (Ejemplo 25.7) a) Un capacitor de placas paralelas, con separación de placa  $d$ , parcialmente lleno con una losa metálica de grosor  $a$ . b) El circuito equivalente del dispositivo en a) consiste en dos capacitores en serie, cada uno con una separación de placa  $(d - a)/2$ .

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{(d - a)/2}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{(d - a)/2}}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d - a}$$

**(B)** Demuestre que la capacitancia del capacitor original no es afectada por la inserción de la lámina metálica, si la lámina es infinitesimalmente delgada.

#### SOLUCIÓN

En el resultado para el inciso A), sea  $a \rightarrow 0$ :

$$C = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{\epsilon_0 A}{d - a} \right) = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

25.7 continuación

**Finalizar** El resultado de la parte B) es la capacitancia original antes de insertar la lámina, lo que significa que se puede insertar una hoja metálica infinitesimalmente delgada entre las placas de un capacitor sin afectar la capacitancia. Este hecho se usa en el siguiente ejemplo.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si la lámina metálica de la parte A) no está a la mitad entre las placas? ¿Cómo afectaría esto la capacitancia?

**Respuesta** Imagine mover la lámina de la figura 25.20a hacia arriba, de modo que la distancia entre el borde superior de la lámina y la placa superior es  $b$ . Por tanto la distancia entre el borde inferior de la lámina y la placa inferior es  $d - b - a$ . Como en la parte (A), encuentre la capacitancia total de la combinación en serie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\epsilon_0 A/b} + \frac{1}{\epsilon_0 A/(d-b-a)} \\ &= \frac{b}{\epsilon_0 A} + \frac{d-b-a}{\epsilon_0 A} = \frac{d-a}{\epsilon_0 A} \rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d-a} \end{aligned}$$

que es el mismo resultado que se encontró en la parte (A). La capacitancia es independiente del valor de  $b$ , así que no importa dónde se ubique la lámina. En la figura 25.20b, cuando la estructura central se sube o se baja, la reducción en separación de placa de un capacitor se compensa con el aumento en la separación de otro.

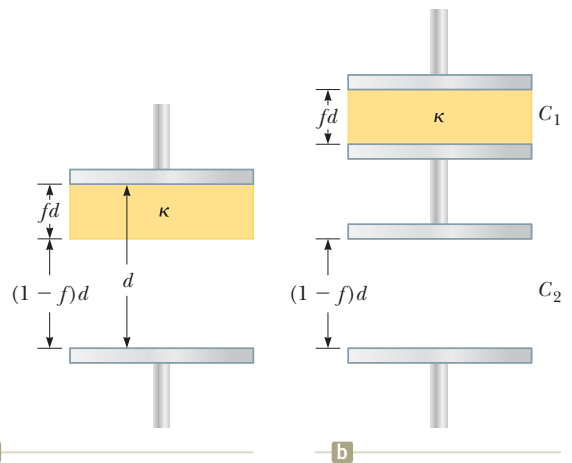
**Ejemplo 25.8 Capacitor parcialmente lleno**

Un capacitor de placas paralelas, con una separación de placas  $d$ , tiene una capacitancia  $C_0$  en ausencia de un dieléctrico. ¿Cuál es la capacitancia cuando entre las placas se inserta una lámina de material dieléctrico con constante dieléctrica  $\kappa$  y grosor  $fd$  (figura 25.21a), donde  $f$  es una fracción entre 0 y 1?

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** En explicaciones anteriores de dieléctricos entre las placas de un capacitor, el dieléctrico llenaba el volumen entre las placas. En este ejemplo, sólo parte del volumen entre las placas contiene el material dieléctrico.

**Categorizar** En el ejemplo 25.7 encontró que una lámina metálica infinitesimalmente delgada, insertada entre las placas de un capacitor, no afecta la capacitancia. Imagine deslizar una lámina metálica infinitesimalmente delgada a lo largo de la cara inferior del dieléctrico, como se muestra en la figura 25.21a. Este sistema se puede modelar como una combinación en serie de dos capacitores, como se muestra en la figura 25.21b. Un capacitor tiene una separación de placa  $fd$  y se llena con un dieléctrico; el otro tiene una separación de placa  $(1-f)d$  y tiene aire entre sus placas.



**Figura 25.21** (Ejemplo 25.8) (a) Capacitor de placas paralelas, con separación de placas  $d$ , parcialmente lleno con un dieléctrico con grosor  $fd$ . (b) El circuito equivalente del capacitor consiste en dos capacitores conectados en serie.

**Analizar** Evalúe las dos capacitancias en la figura 25.21 a partir de la ecuación 25.17:

$$C_1 = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{fd} \quad \text{and} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{(1-f)d}$$

Encuentre la capacitancia equivalente  $C$  de la ecuación 25.12 para dos capacitores combinados en serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{fd}{\kappa \epsilon_0 A} + \frac{(1-f)d}{\epsilon_0 A}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{fd}{\kappa \epsilon_0 A} + \frac{\kappa(1-f)d}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{f + \kappa(1-f)}{\kappa} \frac{d}{\epsilon_0 A}$$

Invierta y sustituya para la capacitancia sin el dieléctrico,  $C_0 = \epsilon_0 A/d$ :

$$C = \frac{\kappa}{f + \kappa(1-f)} \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\kappa}{f + \kappa(1-f)} C_0$$

**Finalizar** Pruebe este resultado para algunos límites conocidos. Si  $f \rightarrow 0$ , el dieléctrico debe desaparecer. En este límite,  $C \rightarrow C_0$ , lo que es consistente con un capacitor con aire entre las placas. Si  $f \rightarrow 1$ , el dieléctrico llena el volumen entre las placas. En este límite,  $C \rightarrow \kappa C_0$ , lo que es consistente con la ecuación 25.16.

## Resumen

### Definiciones

Un **capacitor** consiste en dos conductores llamados *placas*. Si el condensador está cargado, las placas que portan cargas de igual magnitud y signo opuesto. La **capacitancia**  $C$  de cualquier capacitor es la razón de la carga  $Q$  sobre cualquier conductor, a la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre ellos:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} \quad (25.1)$$

La capacitancia sólo depende de la geometría de los conductores y no de una fuente externa de carga o diferencia de potencial. La unidad del SI para capacitancia es coulomb por cada volt, o **farad** (F):  $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$ .

### Conceptos y principios

Si dos o más capacitores se conectan en paralelo, la diferencia de potencial es la misma a través de todos los capacitores. La capacitancia equivalente de una **combinación en paralelo** de capacitores es

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (25.9)$$

Si dos o más capacitores se conectan en serie, la carga es la misma en todos los capacitores, y la capacitancia equivalente de la **combinación en serie** está dada por

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (25.12)$$

Estas dos ecuaciones le permiten simplificar muchos circuitos eléctricos al sustituir múltiples capacitores con una sola capacitancia equivalente.

Cuando un material dieléctrico se inserta entre las placas de un capacitor, la capacitancia aumenta por un factor adimensional  $\kappa$ , llamado **constante dieléctrica**:

$$C = \kappa C_0 \quad (25.16)$$

donde  $C_0$  es la capacitancia en ausencia del dieléctrico.

El **momento de dipolo eléctrico**  $\vec{p}$ , de un dipolo eléctrico tiene una magnitud

$$p \equiv 2aq \quad (25.18)$$

donde  $2a$  es la distancia entre las cargas  $q$  y  $-q$ . La dirección del vector momento de dipolo eléctrico es desde la carga negativa hacia la carga positiva.

En un capacitor se almacena energía porque el proceso de carga es equivalente a la transferencia de cargas de un conductor con un potencial eléctrico más bajo, a otro conductor con un potencial más alto. La energía almacenada en un capacitor de capacitancia  $C$  con carga  $Q$  y diferencia de potencial  $\Delta V$  es

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 \quad (25.13)$$

El momento de torsión que actúa sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  es

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (25.20)$$

La energía potencial del sistema de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme  $\vec{E}$  es

$$U_E = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (25.22)$$

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

1. Su grupo es un equipo de asistentes de enseñanza para un profesor de física. El profesor le pide a su grupo que configure y pruebe el aparato que se muestra en la figura TP25.1 para una demostración en el aula que muestra la fuerza entre las placas en un capacitor. La placa negativa del capacitor a la derecha de la figura se fija en su lugar. La placa superior positiva se puede mover libremente hacia arriba y hacia abajo. Ambas placas son de área  $A$ . Se aplica una diferencia de potencial  $\Delta V$  a través del capacitor. (a) ¿Cuál es la distancia de separación  $d$  entre las placas del capacitor cuando la

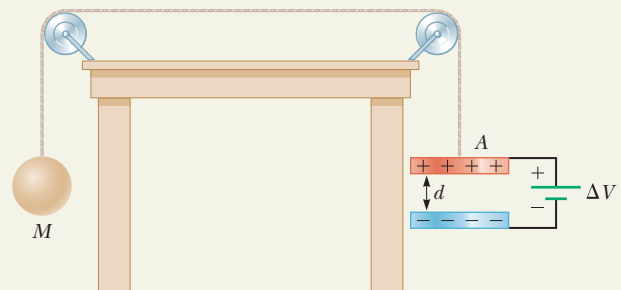


Figura TP25.1



fuerza de gravedad sobre la bola colgante de la izquierda se equilibra con la fuerza eléctrica en la placa superior de la derecha? (b) ¿Es este equilibrio estable o inestable?

2. **ACTIVIDAD** Su grupo está realizando experimentos eléctricos en su laboratorio de física. Su suministro de capacitores en el almacén se ha agotado y solo tiene dos valores diferentes de capacitancia disponibles:  $20\ \mu\text{F}$  y  $50\ \mu\text{F}$ . Usted tiene una gran cantidad de cada uno de estos capacitores. (a) Sus

experimentos requieren un capacitor de  $45\ \mu\text{F}$  y un capacitor de  $35\ \mu\text{F}$ . Divida su grupo en dos mitades. El grupo (i) determinará cómo formar un capacitor de  $45\ \mu\text{F}$  a partir de su suministro, mientras que el grupo (ii) hará lo mismo con un capacitor de  $35\ \mu\text{F}$ . (b) Después de trabajar en el experimento por un tiempo, se da cuenta de que ahora necesita un capacitor de  $105\ \mu\text{F}$ . Haga que todo su grupo trabaje en conjunto para encontrar al menos tres formas de combinar los capacitores de su almacén para generar  $105\ \mu\text{F}$ .

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

### SECCIÓN 25.1 Definición de capacitancia

- (a) Cuando una batería está conectada a las placas de un capacitor de  $3.00\ \mu\text{F}$ , almacena una carga de  $27.0\ \mu\text{C}$ . ¿Cuál es el voltaje de la batería? (b) Si el mismo capacitor está conectado a otra batería y se almacenan  $36.0\ \mu\text{C}$  de carga en el capacitor, ¿cuáles el voltaje de la batería?
- V** Dos conductores con cargas netas de  $+10\ \mu\text{C}$  y  $-10\ \mu\text{C}$  tienen una diferencia de potencial de  $10\ \text{V}$  entre ellas. (a) Determine la capacitancia del sistema. (b) ¿Cuál será la diferencia de potencial entre los dos conductores si las cargas en cada uno de ellos se incrementan hasta  $+100\ \mu\text{C}$  y  $-100\ \mu\text{C}$ ?

### SECCIÓN 25.2 Cálculo de la capacitancia

- Cuando se le aplica una diferencia de potencial de  $150\ \text{V}$  a las placas paralelas de un capacitor, éstas tienen una densidad de carga superficial de  $30.0\ \text{nC}/\text{cm}^2$ . ¿Cuál es el espaciamiento entre ellas?
- Un capacitor de placas paralelas lleno de aire tiene placas de superficie  $2.30\ \text{cm}^2$  separadas  $1.50\ \text{mm}$ . (a) Encuentre el valor de su capacitancia. El capacitor está conectado a una batería de  $12.0\ \text{V}$ . (b) ¿Cuál es la carga en el capacitor? (c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico uniforme entre las placas?

- S** Un capacitor de aire variable utilizado en un circuito sintonizador de radio está hecho de  $N$  placas semicirculares, cada una de radio  $R$  y colocadas entre sí a una distancia  $d$ , y conectadas eléctricamente. Como puede observar en la figura 25.5. Un segundo conjunto de placas idénticas, está intercalado con el primer conjunto. Cada placa en el segundo juego está a la mitad de las del primer conjunto. El segundo conjunto puede girar como una sola unidad. Determine la capacitancia como una función del ángulo de rotación  $\theta$ , en donde  $\theta = 0$  corresponde a la posición de máxima capacitancia.

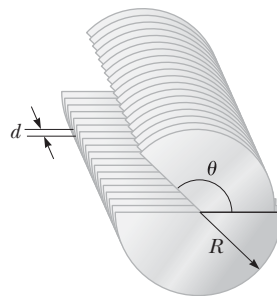


Figura P25.5

- S** **Problema de repaso** Un objeto pequeño de masa  $m$  tiene una carga  $q$  y está suspendido por un hilo entre las placas verticales de un capacitor de placas paralelas. La separación entre las placas es  $d$ . Si el hilo forma un ángulo  $\theta$  con la vertical, ¿cuál sería la diferencia de potencial entre las placas?

### SECCIÓN 25.3 Combinaciones de capacitores

- Encontrar la capacitancia equivalente de un capacitor de  $4.20\ \mu\text{F}$  y un capacitor de  $8.50\ \mu\text{F}$  cuando están conectados (a) en serie y (b) en paralelo.
- T** ¿Por qué *no es posible la siguiente situación*? Un técnico está probando un circuito que contiene una capacitancia  $C$ . Se da cuenta de que un mejor diseño para el circuito incluiría una capacitancia de  $\frac{7}{3}C$  en lugar de  $C$ . Tiene tres capacitores adicionales, cada uno con capacidad  $C$ . Mediante la combinación de estos capacitores adicionales en una forma determinada y colocándola a continuación en paralelo con el capacitor original, logra la capacitancia deseada.
- T** Un grupo de capacitores idénticos se conecta primero en serie y después en paralelo. La capacitancia combinada en paralelo es 100 veces mayor que la correspondiente a la conexión en serie. ¿Cuántos capacitores existen en este grupo?
- CIC S** Tres capacitores están conectados a una batería como se muestra en la figura P25.10. Sus capacitancias son  $C_1 = 3C$ ,  $C_2 = C$  y  $C_3 = 5C$ . (a) ¿Cuál es la capacitancia equivalente de este conjunto de capacitores? (b) Clasifique los capacitores de acuerdo con la carga que almacenan, de la más grande a la más pequeña. (c) Clasifique los capacitores con base en las diferencias de potencial entre sus terminales, de la más grande a la más pequeña. (d) **¿Qué pasaría si?** Si se incrementa  $C_3$ , Explique qué pasa con la carga almacenada en cada uno de los capacitores.
- T** Cuatro capacitores están conectados como se muestra en la figura P25.11. (a) Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$ . (b) Calcule la carga de cada uno de los capacitores si  $\Delta V_{ab} = 15.0\ \text{V}$ .

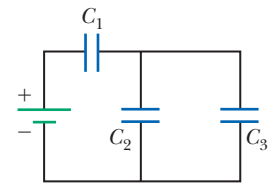


Figura P25.10

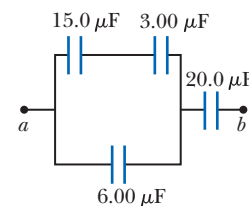


Figura P25.11

- V** (a) Determine la capacitancia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$  para el grupo de capacitores conectados como se mues-

tra en la figura P25.12 (página 686). Utilice los valores  $C_1 = 5.00 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 10.00 \mu\text{F}$  y  $C_3 = 2.00 \mu\text{F}$ . (b) ¿Qué carga es almacenada en el capacitor  $C_3$  si la diferencia de potencial entre  $a$  y  $b$  es  $60.0 \text{ V}$ ?

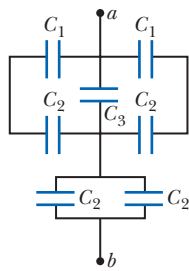


Figura P25.12

13. Determine la capacitancia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$  en la combinación de capacitores que se muestra en la figura P25.13.

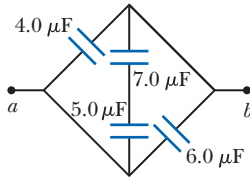


Figura P25.13

14. **CE** Usted está trabajando en una tienda de fabricación de productos electrónicos. Su proyecto actual está en el equipo que produce capacitores para el circuito de temporizador que retrasa el cierre de la puerta de un elevador. De acuerdo con su especificación de diseño, el circuito del temporizador debe tener una capacitancia de  $32.0 \mu\text{F}$  entre dos puntos  $A$  y  $B$ . A medida que sus capacitores salen de la línea de ensamblaje, se encuentra que tienen una variación de  $\pm 5.00\%$  de este valor. Después de una reunión del equipo para evaluar esta situación, el equipo decide que las capacitancias en el rango  $32.0 \pm 0.5 \mu\text{F}$  son aceptables y no necesitan modificación. Para capacitancias fuera de este rango, el director no desea descartar los capacitores, sino agregar capacitores adicionales en serie o en paralelo con el capacitor principal para llevar la capacitancia equivalente total al valor de diseño exacto de  $32.0 \mu\text{F}$ . Usted se pone a cargo de la adquisición de los capacitores adicionales. ¿Qué rango de capacitancias para estos capacitores adicionales necesita para cubrir todo el rango de variación de  $\pm 5.00\%$ ? Todas las capacitancias se pueden medir a tres cifras decimales significativas.

15. Si se conectan dos capacitores en paralelo, se obtiene una capacitancia equivalente de  $9.00 \text{ pF}$ , y cuando se conectan en serie se obtiene una capacitancia equivalente de  $2.00 \text{ pF}$ . ¿Cuáles la capacitancia de cada uno de ellos?
16. **S** Si se conectan dos capacitores en paralelo, se obtiene una capacitancia equivalente de  $C_p$  y cuando se conectan en serie se obtiene una capacitancia equivalente de  $C_s$ . ¿Cuál es la capacitancia de cada uno de ellos?

### SECCIÓN 25.4 Energía almacenada en un capacitor con carga

17. **V** (a) Un capacitor de  $3.00 \mu\text{F}$  se conecta a una batería de  $12 \text{ V}$ . ¿Cuánta energía se almacena en el capacitor? (b) Si el capacitor hubiera estado conectado a una batería de  $6.00 \text{ V}$ , ¿cuánta energía habría almacenado?
18. **C/C** Dos capacitores  $C_1 = 18.0 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 36.0 \mu\text{F}$ , están conectados en serie, y una batería de  $12.0 \text{ V}$  se conecta a través de los dos capacitores. Determine (a) la capacitancia equivalente y (b) la energía almacenada en esta capacitancia equivalente. (c) Determine la energía almacenada en cada capacitor individual. (d) Demuestre que la suma de estas dos energías es la misma que la energía que se encuentra en el inciso (b). (e)

¿Esta igualdad siempre será verdad o depende del número de capacitores y sus capacitancias? (f) Si los mismos capacitores se conectan en paralelo, ¿qué diferencia de potencial se requeriría entre ellos de modo que la combinación almacene la misma energía que en el inciso (a)? (g) ¿Qué capacitor almacena más energía en esta situación,  $C_1$  o  $C_2$ ?

19. **C/C** Dos capacitores de placas paralelas idénticas, cada una con capacitancia  $10.0 \mu\text{F}$ , se cargan a la diferencia de potencial de  $50.0 \text{ V}$  y a continuación, son desconectados de la batería. En seguida, se conectan uno con el otro en paralelo con placas del mismo signo conectadas. Por último, la separación de la placa en uno de los capacitores se duplica. (a) Determine la energía total del sistema de dos capacitores *antes* de que se duplicara la separación de la placa. (b) Encuentre la diferencia de potencial en cada capacitor *después* de que se duplica la separación de placa. (c) Determine la energía total del sistema después de que se duplica la separación de la placa. (d) Compare de la diferencia en las respuestas a los incisos (a) y (c) con la ley de la conservación de la energía.

20. **C/C** **S** Dos capacitores de placas paralelas idénticas, cada una con capacidad  $C$ , se cargan con una diferencia de potencial  $\Delta V$  luego se desconectan de la batería. A continuación, se conectan el uno al otro en paralelo con placas del mismo signo conectadas. Por último, la separación de la placa en uno de los capacitores se duplica. (a) Determine la energía total del sistema de dos capacitores *antes* de que se duplicara la separación de la placa. (b) Encuentre la diferencia de potencial en cada capacitor *después* de que se duplica la separación de la placa. (c) Determine la energía total del sistema *después* de que se duplicó la separación de la placa. (d) Compare la diferencia en las respuestas a los incisos (a) y (c) con la ley de la conservación de la energía.

21. Dos capacitores,  $C_1 = 25.0 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 5.00 \mu\text{F}$ , están conectados en paralelo y cargados mediante una fuente de energía de  $100 \text{ V}$ . (a) Dibuje una diagrama de circuito y (b) calcule la energía total almacenada en ambos capacitores. (c) ¿Qué pasaría si? ¿Qué diferencia de potencial se requeriría en las terminales de los dos capacitores conectados en serie, a fin de que esta combinación almacene la misma cantidad de energía que en el inciso (b)? (d) Dibuje el diagrama de circuito descrito en el inciso (c).

22. **S** Un capacitor de placas paralelas tiene una carga  $Q$  y placas de área  $A$ . ¿Cuál es la fuerza que actúa en una placa para que sea atraída por la otra? En vista de que el campo eléctrico entre las placas es  $E = Q/A\epsilon_0$ , podría pensar que la fuerza es igual a  $F = QE = Q^2/A\epsilon_0$ . Esto es incorrecto, ya que el campo  $E$  incluye la contribución proveniente de ambas placas, y el campo creado por la placa positiva no puede ejercer ninguna fuerza sobre la placa positiva. Demuestre que, de hecho, la fuerza que se aplica sobre cada placa es  $F = Q^2/2\epsilon_0 A$ . (Sugerencia: Considere  $C = \epsilon_0 A/x$  para el caso de una separación arbitraria entre placas  $x$  y observe que el trabajo efectuado en la separación de las dos placas cargadas es igual a  $W = \int F dx$ ).

23. **PG** **S** Considere dos esferas conductoras de radio  $R_1$  y  $R_2$ , separadas una distancia mucho mayor que cualquiera de sus radios. La carga total compartida entre las esferas es  $Q$ . Se desea demostrar que cuando la energía potencial del sistema tiene un mínimo, la diferencia de potencial entre las esferas es cero. La carga total  $Q$  es igual a  $q_1 + q_2$ , donde  $q_1$  representa la carga de la primera esfera y  $q_2$  la de la segunda. Ya que las esferas están muy alejadas entre sí, puede suponer que la



carga de cada una está distribuida de manera uniforme en su superficie. (a) Demuestre que la energía asociada a una única esfera conductora de radio  $R$  y carga  $q$  rodeada de un vacío es  $U_E = k_c q^2 / 2R$ . (b) Determine la energía total del sistema de dos esferas en términos de  $q_1$ , la carga total  $Q$ , y los radios  $R_1$  y  $R_2$ . (c) Para minimizar la energía, derive el resultado del inciso (b) con respecto a  $q_1$  y haga la derivada igual a cero. Resuelva para  $q_1$  en términos de  $Q$  y los radios. (d) A partir del resultado del inciso (c), determine la carga  $q_2$ . (e) Encuentre el potencial de cada esfera. (f) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las esferas?

**SECCIÓN 25.5 Capacitores con material dieléctrico**

- 24. En el supermercado venden rollos de aluminio, de envoltura plástica y de papel encerado. (a) Describa un capacitor fabricado con este tipo de materiales. Calcule con estimaciones en orden de magnitud (b) su capacitancia y (c) su voltaje de ruptura.
- 25. Determine (a) la capacitancia y (b) la máxima diferencia de potencial aplicable a un capacitor de placas paralelas con dieléctrico de teflón, con una superficie de placa de  $1.75 \text{ cm}^2$  y una separación de  $0.040 \text{ mm}$  entre placas.
- 26. El voltaje a través de un capacitor de placas paralelas lleno de aire se mide a  $85.0 \text{ V}$ . Cuando se inserta un dieléctrico y llena completamente el espacio entre las placas como en la figura P25.26a, el voltaje cae a  $25.0 \text{ V}$ . (a) ¿Cuál es la constante del material dieléctrico insertado? (b) ¿Puede identificar el dieléctrico? Si es así, ¿cuál es? (c) Si el dieléctrico no llena completamente el espacio entre las placas, ¿qué podría concluir acerca del voltaje entre las placas?

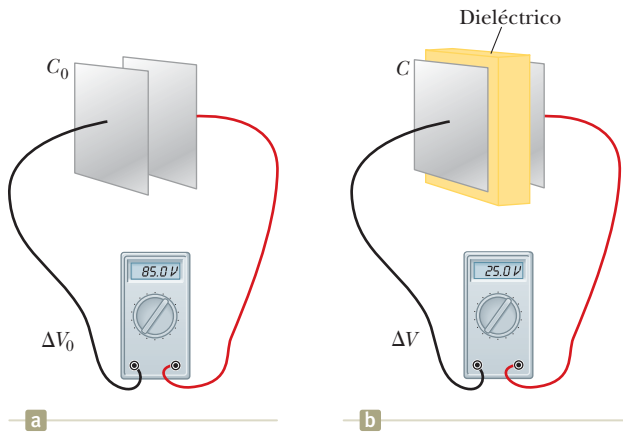


Figura P25.26

- 27. Un capacitor comercial debe fabricarse como se muestra en la figura 25.27. Este capacitor se hace a partir de dos tiras de aluminio separadas por una tira de papel parafinado. Cada tira de aluminio y de papel tiene un ancho de  $7.00 \text{ cm}$ . El aluminio tiene un espesor de  $0.004 \text{ mm}$ , y el papel de  $0.025 \text{ mm}$ , con una constante dieléctrica igual a  $3.70$ . ¿Cuál es la longitud que deberán tener las tiras, si se desea obtener una capacitancia de  $9.50 \times 10^{-8} \text{ F}$  antes de enro-

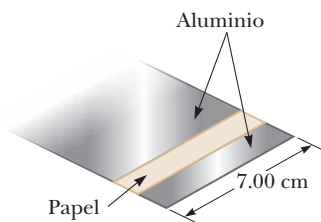


Figura P25.27

llar el capacitor? (Si se agrega una segunda tira de papel y se enrolla el capacitor, su capacitancia, efectivamente se duplica al conseguir almacenamiento de carga en cada una de las caras de cada tira de aluminio).

- 28. Cada capacitor de la combinación que se muestra en la figura P25.28 tiene un voltaje de ruptura de  $15.0 \text{ V}$ . ¿Cuál es el voltaje de ruptura de la combinación entre los puntos a y b?

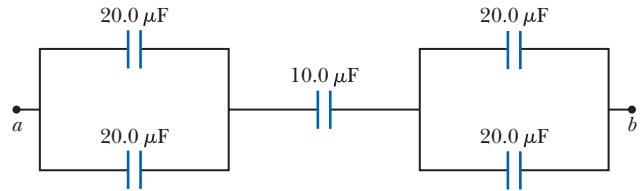


Figura P25.28

- 29. Un capacitor de placas paralelas de  $2.00 \text{ nF}$  se carga a una primera diferencia de potencial  $\Delta V_i = 100 \text{ V}$  y se aísla a continuación. El material dieléctrico entre las placas es mica, con una constante dieléctrica de  $5.00$ . (a) ¿Cuánto trabajo se requiere para retirar la hoja de mica? (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través del capacitor después de que se ha retirado la mica?

**SECCIÓN 25.6 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico**

- 30. Una línea infinita de carga positiva se encuentra a lo largo del eje  $y$ , con densidad de carga  $\lambda = 2.00 \mu\text{C}/\text{m}$ . Un dipolo se coloca con su centro a lo largo del eje  $x$  en  $x = 25.0 \text{ cm}$ . El dipolo se compone de dos cargas de  $\pm 10.0 \mu\text{C}$  separadas por  $2.00 \text{ cm}$ . El eje del dipolo forma un ángulo de  $35.0^\circ$  con el eje  $x$ , y la carga positiva está más lejos de la línea de carga de la carga negativa. Encontrar la fuerza neta ejercida sobre el dipolo.
- 31. Un objeto pequeño con un momento de dipolo eléctrico  $\vec{p}$  se coloca en un campo eléctrico no uniforme  $\vec{E} = E(x)\hat{i}$ . Es decir, el campo está orientado en la dirección  $x$  y su magnitud depende de la coordenada  $x$ . Suponga que  $\theta$  representa el ángulo entre el momento del dipolo y la dirección  $x$ . Demuestre que el dipolo experimenta una fuerza neta

$$F = p \left( \frac{dE}{dx} \right) \cos \theta$$

que actúa en la dirección hacia la cual se incrementa el campo.

**SECCIÓN 25.7 Descripción atómica de los materiales dieléctricos**

- 32. La expresión general de la ley de Gauss describe la forma en que una carga produce un campo eléctrico en un material, así como en el vacío. Se trata de

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{ent}}}{\epsilon}$$

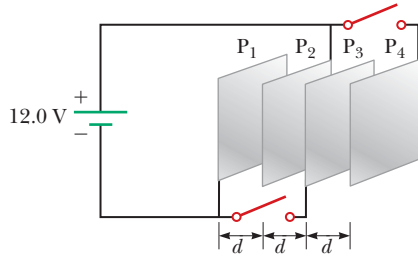
donde  $\epsilon = \kappa\epsilon_0$  es la permitividad del material. (a) Una lámina de carga  $Q$ , distribuida uniformemente en su área  $A$ , está rodeada por un material dieléctrico. Demuestre que la hoja produce un campo eléctrico uniforme en puntos cercanos, de magnitud  $E = Q/2A\epsilon$ . (b) Dos hojas grandes de área  $A$ , con cargas opuestas de igual magnitud  $Q$ , están separadas una pequeña distancia  $d$ . Demuestre que éstas generan un campo eléctrico uniforme en el espacio que las separa, de magnitud  $E = Q/A\epsilon$ . (c) Suponga que la placa negativa está

con un potencial igual a cero. Demuestre que la placa positiva está con potencial  $Qd/A\epsilon$ . (d) Demuestre que la capacitancia del par de placas es  $C = A\epsilon/d = \kappa A\epsilon_0/d$ .

**PROBLEMAS ADICIONALES**

**33.** Está trabajando en un laboratorio, usando un equipo de medición muy sensible. Su supervisora ha explicado que el equipo también es muy sensible a la descarga eléctrica de los operadores humanos. Las tablas de especificaciones para el equipo indican que una descarga eléctrica que proporciona incluso una cantidad muy pequeña de energía de  $250 \mu\text{J}$  es suficiente para dañar el equipo. Su supervisora quiere instalar un aparato que se utilizará para eliminar la carga eléctrica del cuerpo de las personas antes de que toquen el equipo. Para hacer esto, ella le pide que calcule (a) la capacitancia del cuerpo humano, determine (b) la carga en el cuerpo y (c) el potencial eléctrico del cuerpo, relativo a un punto infinitamente lejano, correspondiente a la transferencia de energía que dañará el equipo.

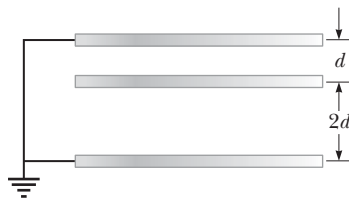
**34.** Cuatro placas metálicas paralelas  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ , cada una con una superficie de  $7.50 \text{ cm}^2$ , están separadas sucesivamente por una distancia  $d = 1.19 \text{ mm}$ , como se observa en la figura P25.34. La placa  $P_1$  está conectada a la terminal negativa de una batería y  $P_2$  a la terminal positiva. La batería mantiene una diferencia de potencial de  $12.0 \text{ V}$ . (a) Si  $P_3$  se conecta a la terminal negativa, ¿cuál es la capacitancia del sistema de placas  $P_1P_2P_3$ ? (b) ¿Cuál es la carga de  $P_3$ ? (c) Si se conecta  $P_4$  a la terminal positiva de la batería, ¿cuál será la capacitancia del sistema de cuatro placas  $P_1P_2P_3P_4$ ? (d) ¿Cuál es la carga de  $P_4$ ?



**Figura P25.34**

**35.** Un campo eléctrico uniforme  $E = 3\,000 \text{ V/m}$  existe dentro de una determinada región. ¿Qué volumen de espacio contiene una energía igual a  $1.00 \times 10^{-7} \text{ J}$ ? Expresé su respuesta en metros cúbicos y en litros.

**36.** Dos grandes placas metálicas paralelas, cada una de área  $A$ , están orientadas en sentido horizontal y están separadas una distancia  $3d$ . Están unidas mediante un alambre a tierra, e inicialmente las placas no tienen carga. Ahora se inserta entre las placas una tercera placa idéntica de carga  $Q$ , paralelamente a las anteriores y localizada a una distancia  $d$  de la placa superior, como se observa en la figura P25.36. (a) ¿Cuál es la carga inducida que aparece en cada una de las dos placas originales? (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial que aparece entre la placa intermedia y cada una de las demás placas?

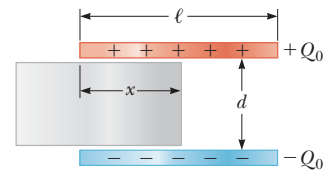


**Figura P25.36**

**37.** Un capacitor horizontal de placas paralelas, con vacío entre sus placas, tiene una capacitancia de  $25.0 \mu\text{F}$ . Un líquido no conductor, con constante dieléctrica  $6.50$ , se vierte en el espacio entre las placas, y llena una fracción  $f$  de su volumen. (a) Encuentre la nueva capacitancia como función de  $f$ . (b) ¿Cuál espera que sea la capacitancia cuando  $f = 0$ ? La expresión de la parte a) coincide con su respuesta. (c) ¿Qué capacitancia debe esperar cuando  $f = 1$ ? ¿La expresión del inciso (a) coincide con su respuesta?

**38.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un capacitor  $10.0 \mu\text{F}$  tiene placas con vacío entre ellas. El capacitor está cargado de manera que almacena  $0.050 \text{ J}$  de energía. Una partícula con carga de  $-3.00 \mu\text{C}$  es despedida de la placa positiva hacia la placa negativa con una energía cinética inicial igual a  $1.00 \times 10^{-4} \text{ J}$ . La partícula llega a la placa negativa con una energía cinética reducida.

**39.** Dos placas cuadradas de lado  $\ell$  se colocan paralelas entre sí con una separación  $d$ , como sugiere la figura P25.39. Puede suponer que  $d$  es mucho menor que  $\ell$ . Las placas tienen cargas estáticas distribuidas uniformemente  $+Q_0$  y  $-Q_0$ . Dentro del capacitor se inserta un bloque de metal de ancho  $\ell$ , longitud  $\ell$  y un espesor ligeramente inferior a  $d$ , una distancia  $x$  dentro del espacio entre las placas. Las cargas en las placas permanecen uniformemente distribuidas conforme se desliza el bloque en su interior. En una situación estática, un metal impide que un campo eléctrico penetre en su interior. El metal puede considerarse un dieléctrico perfecto, con  $\kappa \rightarrow \infty$ . (a) Calcule la energía almacenada como una función de  $x$ . (b) Determine la dirección y la magnitud de la fuerza que actúa sobre el bloque metálico. (c) El área de la cara frontal que avanza en el bloque, es esencialmente igual a  $\ell d$ . Si considera que la fuerza sobre el bloque actúa sobre esta cara, determine el esfuerzo (fuerza por cada área) que actúa sobre el bloque. (d) Expresé la densidad de energía en el campo eléctrico entre las placas con carga en función de  $Q_0, \ell, d$  y  $\epsilon_0$ . (e) Explique cómo sus respuestas a los incisos (c) y d) son comparables con las otras.



**Figura P25.39**

**40.** (a) Dos esferas de radios  $a$  y  $b$  tienen sus centros separados una distancia  $d$ . Demuestre que la capacitancia de este sistema es

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

siempre y cuando  $d$  sea grande en comparación con  $a$  y  $b$ . *Sugerencia:* Ya que las esferas están lejos una de la otra, puede suponer que el potencial de cada una es igual a la suma de los potenciales debidos a cada una de las esferas (b) Demuestre que conforme  $d$  se aproxima al infinito, el resultado arriba obtenido se reduce al que se obtiene para dos capacitores esféricos en serie.

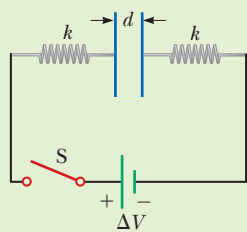
**41.** Suponga que el diámetro interno del tubo Geiger-Mueller descrito en el problema 42 del capítulo 24 es  $2.50 \text{ cm}$  y que el cable a lo largo del eje tiene un diámetro de  $0.200 \text{ mm}$ . La resistencia dieléctrica del gas entre el hilo central y el cilindro es  $1.20 \times 10^6 \text{ V/m}$ . Utilice el resultado de ese problema para calcular la diferencia de potencial máxima que se puede aplicar entre el alambre y el cilindro antes de que ocurra una ruptura en el gas.

**42.** Un capacitor de placas paralelas con una separación  $d$  entre sus placas está cargado a una diferencia de potencial  $\Delta V_0$ . Mientras está conectado a la batería, entre sus placas se introduce una placa dieléctrica de espesor  $d$  y constante dieléctrica  $\kappa$ . (a) Demuestre que la razón de la energía almacenada después de haber introducido el dieléctrico y la energía almacenada en un capacitor sin dieléctrico, es  $U_E/U_0 = \kappa$ . (b) Dé una explicación física de este incremento en la energía almacenada. (c) ¿Qué le ocurre a la carga en el capacitor? *Nota:* Observe que esta situación no es la misma que en el ejemplo 25.5, en el que la batería fue desconectada del circuito antes de introducir el dieléctrico.

**43.** Con la finalidad de reparar una fuente de energía para un amplificador estereofónico, un técnico en electrónica necesita un capacitor de  $100 \mu\text{F}$  capaz de soportar una diferencia de potencial de  $90 \text{ V}$  entre placas. El único suministro disponible es una caja de 5 capacitores de  $100 \mu\text{F}$ , cada uno con una capacidad máxima de voltaje de  $50 \text{ V}$ . (a) ¿Qué combinación de estos capacitores tiene las características eléctricas adecuadas? ¿El técnico podrá usar todos los capacitores de la caja? Explique sus respuestas. (b) En la combinación de capacitores obtenidos en el inciso (a), ¿cuál será el voltaje máximo en cada uno de los capacitores usados?

**44.** En el ejemplo 25.1 se exploró un capacitor cilíndrico de longitud  $\ell$ , con radios  $a$  y  $b$  respectivamente, en los dos conductores. En la sección **¿Qué pasaría si?** de este ejemplo, se afirmó que era más efectivo, en función del incremento en la capacitancia, aumentar  $\ell$  10% que aumentar  $a$  en 10%, siempre que  $b > 2.85a$ . Verifique esta afirmación matemáticamente.

**45.** Usted es parte de un equipo que trabaja en una tienda de partes mecánicas para maquinaria. Un cliente importante le ha pedido a su empresa que proporcione resortes con una constante de fuerza muy precisa  $k$ . Usted diseña el circuito eléctrico que se muestra en la figura P25.45 para medir la constante de resorte de cada uno de los resortes que se le proporcionarán al cliente. El circuito consta de dos placas de metal idénticas, paralelas y libres de movimiento, que no están conectadas a resortes metálicos idénticos, un interruptor y una batería con voltaje de terminal  $\Delta V$ . Con el interruptor abierto, las placas no están cargadas, están separadas por una distancia  $d$ , y tienen una capacitancia  $C$ . Cuando el interruptor está cerrado, las placas se cargan y se atraen entre sí. La distancia entre las placas cambia por un factor  $f$ , después del cual las placas están en equilibrio entre las fuerzas de resorte y la fuerza eléctrica atractiva entre las placas. Para evitar que las placas oscilen, sostenga cada placa con guantes aislantes cuando el interruptor esté cerrado y aplique una fuerza sobre las placas que les permita moverse juntas a una velocidad lenta y constante hasta que estén en la separación de equilibrio, en cuyo punto puede soltar las placas. Determine una expresión para la constante de resorte en términos de  $C$ ,  $d$ ,  $\Delta V$  y  $f$ .



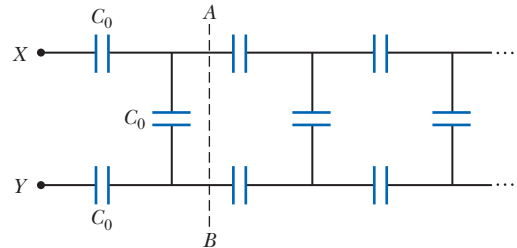
**Figura P25.45** Problemas 45 y 50.

**PROBLEMAS DE DESAFÍO**

**46.** Considere dos alambres largos, paralelos y de carga opuesta de radio  $r$  con sus centros separados por una distancia  $D$  que es mucho mayor que  $r$ . Suponiendo que la carga se distribuye uniformemente sobre la superficie de cada alambre, demuestre que la capacitancia por unidad de longitud de este par de alambres es

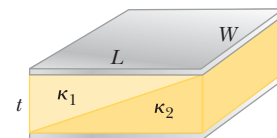
$$\frac{C}{\ell} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(D/r)}$$

**47.** Algunos sistemas físicos que poseen capacitancia distribuida continuamente en el espacio pueden ser modelados como una serie infinita de elementos de circuito discretos. Ejemplos de ello son una guía de ondas de microondas y el axón de una célula nerviosa. Para practicar el análisis de una matriz infinita, determine la capacidad equivalente  $C$  entre las terminales  $X$  y  $Y$  del conjunto infinito de capacitores representados en la figura P25.47. Cada capacitor tiene capacitancia  $C_0$ . *Sugerencias:* Imagine que la escalera se corta en la línea  $AB$  y considere que la capacidad equivalente de la sección infinita a la derecha de  $AB$  también es  $C$ .



**Figura P25.47**

**48.** Un capacitor de placas paralelas, con placas de área  $LW$  y separación de placa  $t$ , tiene la región entre sus placas llena con cuñas de dos materiales dieléctricos, como se muestra en la figura P25.48. Suponga que  $t$  es mucho menor que  $L$  y  $W$ . (a) Determine su capacitancia. (b) ¿La capacitancia debe ser la misma si se intercambian las etiquetas  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ ? Demuestre que su expresión tiene o no esta propiedad. (c) Demuestre que, si  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  tienden igualmente a un valor común  $\kappa$ , su resultado se vuelve el mismo que la capacitancia de un capacitor que contiene un solo dieléctrico:  $C = \kappa\epsilon_0 LW/t$ .



**Figura P25.48**

**49.** Se fabrica un capacitor a partir de dos placas cuadradas de lados  $\ell$  y separación  $d$ . Las placas  $+Q$  y  $-Q$  son colocadas en las placas y después se retira la fuente de energía. En el interior del capacitor se inserta un material de constante dieléctrica  $\kappa$ , a cierta distancia  $x$  como se muestra en la figura P26.78. Suponga que  $d$  es mucho más pequeña que  $x$ . (a) Determine la capacitancia equivalente del dispositivo. (b) Calcule la energía almacenada en el capacitor. (c) Determine la dirección y la magnitud de la fuerza ejercida sobre el dieléctrico. (d) Obtenga un valor numérico para la fuerza cuando  $x = \ell/2$ , si  $\ell = 5.00 \text{ cm}$ ,  $d = 2.00 \text{ mm}$ , el material dieléctrico es de vidrio ( $\kappa = 4.50$ ) y el capacitor fue cargado a  $2.00 \times 10^3 \text{ V}$  antes de insertar el dieléctrico. *Sugerencia:*

puede considerar el sistema como dos capacitores conectados en paralelo.

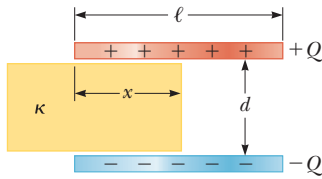


Figura P25.49

**50.** Este problema es una continuación del problema 45. Usted es parte de un equipo que trabaja en una tienda de partes mecánicas para maquinaria. Un cliente importante le ha pedido a su empresa que proporcione resortes con una constante de fuerza muy precisa  $k$ . Usted diseña el circuito eléctrico que se muestra en la figura P25.45 para medir la constante de resorte de cada uno de los resortes que se le proporcionarán al cliente.

El circuito consta de dos placas de metal paralelas idénticas conectadas a muelles metálicos idénticos, un interruptor y una batería con fem (fuerza electromotriz)  $\Delta V$ . Con el interruptor abierto, las placas no están cargadas, están separadas por una distancia  $d$ , y tienen una capacitancia  $C$ .

Para proporcionar un valor de comparación para la constante de resorte que encontró en el problema 45, deslice una lámina de material con constante dieléctrica  $\kappa$  y espesor  $t$  entre las placas, de modo que esté en contacto con una de las placas, como se muestra en la figura P25.50. Cuando el interruptor está cerrado, las placas se cargan y se atraen entre sí. La distancia entre las placas cambia por un factor  $f$ , después del cual las placas están en equilibrio entre las fuerzas de resorte y la fuerza eléctrica atractiva entre las placas. Para evitar que las placas oscilen, sostenga cada placa con guantes aislantes cuando el interruptor esté cerrado y aplique una fuerza sobre las placas que les permita moverse juntas a una velocidad lenta y constante hasta que estén en la separación de equilibrio, en cuyo punto puedes soltar los platos. Determine una expresión para la constante de resorte en términos de  $C$ ,  $d$ ,  $\Delta V$  y  $f$ .

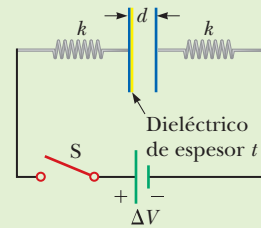


Figura P25.50







Una subestación eléctrica, en la que los altos voltajes se convierten en bajos voltajes. Si bien el concepto de voltaje ya se ha discutido en el capítulo 24, el concepto de corriente en este capítulo nos permite comprender por qué la energía se transfiere a altos voltajes en la red eléctrica. (emel82/Shutterstock)

**IMAGINE** Ha regresado de sus vacaciones de primavera en Florida y vuelve a clases. Mientras conduce un día hacia el campus, pasa una subestación eléctrica y comienza a preguntarse qué sucede allí. Estaciona y camina hacia la valla que rodea la subestación. Un cartel dice: “¡Peligro! ¡Alto voltaje! ¡Aléjese!”. Esto lo lleva a preguntarse sobre el alto voltaje. El voltaje en su hogar, usted sabe, es alimentado a 240 volts. ¿Por qué el voltaje en la subestación sería más alto? Saca su teléfono inteligente y hace una pequeña búsqueda en línea. Encuentra que las subestaciones están diseñadas para cambiar el voltaje de valores altos a valores bajos. ¡También descubre que la energía es enviada a través de líneas de energía eléctrica desde su generación con diferencias de potencial tan altas como 765 *kilovolts*! Usted dice: “¡Espera un minuto! ¿Para qué se necesita eso? ¿Por qué no simplemente transferimos electricidad a 240 volts y así no necesitamos todas estas subestaciones?”.

**CONEXIONES** Hasta ahora en nuestro estudio de la electricidad, hemos considerado principalmente situaciones que involucran distribuciones estacionarias de carga eléctrica, que resultan en campos eléctricos en una región del espacio y fuerzas eléctricas en partículas cargadas (capítulo 22), diferencias potenciales entre puntos en el espacio (capítulo 24) y capacitancia asociada con un par de conductores (capítulo 25). En este capítulo, consideramos situaciones que involucran cargas eléctricas que están en movimiento a través de alguna región del espacio. Usamos el término *corriente eléctrica*, o simplemente *corriente*, para describir la tasa de flujo de carga. La mayoría de las aplicaciones prácticas de la electricidad se ocupan de las corrientes eléctricas, incluida una variedad de electrodomésticos. Por ejemplo, el voltaje de un enchufe de pared produce una corriente en las bobinas de un tostador cuando se enciende. En estas situaciones comunes, la corriente existe en un conductor como un cable de cobre. Las corrientes también pueden existir fuera de un conductor. Por ejemplo, un haz de electrones en un acelerador de partículas constituye una corriente. Nuestro estudio de

- 26.1 Corriente eléctrica
- 26.2 Resistencia
- 26.3 Modelo de conducción eléctrica
- 26.4 Resistencia y temperatura
- 26.5 Superconductores
- 26.6 Potencia eléctrica





la corriente nos permitirá definir la *resistencia* eléctrica e introducir un nuevo elemento de circuito, *el resistor*. Concluimos el capítulo volviendo al concepto de energía y discutiendo la velocidad a la que la energía se transfiere a un dispositivo en un circuito eléctrico. El mecanismo de transferencia de energía en la ecuación 8.2 que corresponde a este proceso es la transmisión eléctrica  $T_{ET}$ . Nuestras discusiones en este capítulo nos prepararán para diseñar circuitos eléctricos en el capítulo 27 y más adelante.

## 26.1 Corriente eléctrica

En esta primera sección se estudia el comportamiento básico del flujo de las cargas eléctricas a través de una región del espacio. El flujo de cargas entre dos puntos en el espacio es producida por una diferencia de potencial entre los puntos. Siempre que hay un flujo neto de carga a través de alguna región, se dice que existe una *corriente* eléctrica. La cantidad de flujo depende del material a través del cual pasan las cargas y de la diferencia de potencial que existe entre los extremos del material.

Resulta ilustrativo comparar la corriente eléctrica con el flujo de fluidos viscosos en tuberías estudiado en la sección 14.7. Por ejemplo, el flujo de agua en un tubo de fontanería está determinado por la diferencia de presión y puede ser cuantificado mediante la especificación del volumen de flujo a menudo medido en litros por minuto. La corriente de un río puede ser cuantificada para describir la cantidad de agua que pasa por una determinada ubicación; por ejemplo, el flujo sobre el borde en las cataratas del Niágara se mantiene entre  $1\,400\text{ m}^3/\text{s}$  y  $2\,800\text{ m}^3/\text{s}$ .

Existe también una analogía entre la conducción térmica y la corriente. En la sección 19.6 se explicó el flujo de energía por calor a través de una muestra de material; la rapidez de flujo de energía está determinada por el material, así como por la diferencia de temperatura de un extremo al otro del material, como se describe en la ecuación 19.17. Otra analogía es la *difusión*, por ejemplo, cuando se coloca una gota de colorante de comida en una taza de agua y se extiende para llenar finalmente la taza. El flujo de átomos o moléculas en difusión es impulsado por una diferencia de concentración.

Para definir la corriente con mayor precisión, suponga que las cargas tienen un movimiento perpendicular a una superficie  $A$ , según se observa en la figura 26.1 (esta área podría corresponder al área de sección transversal de un alambre, por ejemplo). La **corriente** se define como la cantidad a la cual circula la carga a través de esta superficie. Si  $\Delta Q$  es la cantidad de carga que pasa a través de esta superficie en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la **corriente promedio**  $I_{\text{promedio}}$  es igual a la carga que pasa a través de  $A$  por unidad de tiempo:

$$I_{\text{avg}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (26.1)$$

Si la tasa a la que circula la carga varía con el tiempo, entonces, la corriente también varía en el tiempo; se define la **corriente instantánea**  $I$  como el límite de la corriente promedio cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ :

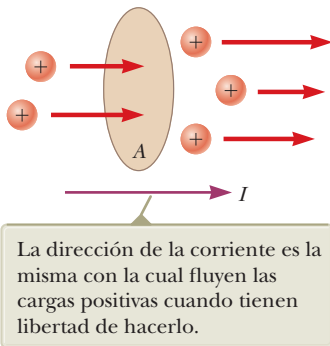
$$I \equiv \frac{dQ}{dt} \quad (26.2)$$

La unidad del SI para la corriente es el **ampere** (A):

$$1\text{A} = 1\text{C}/\text{s} \quad (26.3)$$

Es decir, 1 A de corriente es equivalente a 1 C de carga que pasa a través de una superficie en 1 s.

Las partículas con carga que pasan a través de la superficie de la figura 26.1 pueden ser positivas, negativas, o ambas. Es una regla convencional asignar a la corriente la misma dirección que la del flujo de la carga positiva. En los conductores eléctricos, como cobre o aluminio, la corriente es ocasionada por el movimiento de electrones con carga negativa. Por tanto, en cualquier conductor, la dirección de la corriente es la opuesta a la dirección del flujo de los electrones. Sin embargo, si considera un acelerador de protones con carga positiva, la corriente estará en la dirección del movimiento de los protones. En algunos casos, como los que involucran gases y



**Figura 26.1** Cargas en movimiento a través de un área  $A$ . La rapidez con la cual fluye la carga a través del área se define como corriente  $I$ .

### Corriente eléctrica ►

#### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.1

**“Flujo de corriente” es una redundancia** La frase *flujo de corriente* es comúnmente utilizada, aunque sea, en estricto sentido, incorrecta, ya que la corriente *es* un flujo (de carga). Esto es parecido a la frase *transferencia de calor*, que también es redundante, ya que el calor *es* una transferencia (de energía). Aquí se evita esta frase y se usa *flujo de carga* o *carga de flujo*.



electrolitos, la corriente es el resultado del flujo tanto de las cargas positivas como de las negativas. Es común referirse a una carga en movimiento (positiva o negativa) como un portador de **carga móvil**.

### Modelo microscópico de la corriente

Mediante la descripción de un modelo microscópico de la conducción en un metal, se puede relacionar la corriente con el movimiento de los portadores de carga. Considere la corriente en un conductor cilíndrico de área de sección transversal  $A$  (figura 26.2). El volumen de un segmento del conductor de longitud  $\Delta x$  (entre las dos secciones transversales circulares mostradas en la figura 26.2)  $\Delta x$ . Si  $n$  representa el número de portadores de carga móviles por cada unidad de volumen (en otras palabras, la densidad de portadores de carga), el número de portadores en el segmento gris es  $nA \Delta x$ . Por tanto, la carga total  $\Delta Q$  de esta sección es igual a

$$\Delta Q = (nA \Delta x)q$$

donde  $q$  es la carga de cada portador. Si los portadores se mueven con una rapidez  $\vec{v}_d$  paralelos al eje del cilindro, la magnitud del desplazamiento que experimentan en la dirección  $x$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es  $\Delta x = v_d \Delta t$ . Sea  $\Delta t$  el intervalo de tiempo requerido para que las cargas portadoras en el cilindro se muevan por un desplazamiento cuya magnitud sea igual que la longitud del segmento. Este intervalo de tiempo es también el que se requiere para que todos los portadores de carga del cilindro atraviesen el área circular de uno de los extremos. Con esta consideración,  $\Delta Q$  se escribe de la forma

$$\Delta Q = (nAv_d \Delta t)q$$

Si divide ambos lados de esta ecuación por  $\Delta t$ , observará que la corriente promedio en el conductor es

$$I_{\text{prom}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_d A \tag{26.4}$$

En realidad, la rapidez de los portadores de carga  $v_d$  es una rapidez promedio que se conoce como **rapidez de arrastre**. Para comprender el significado de este concepto, considere un conductor en donde los portadores de carga son electrones libres. Si el conductor está aislado, es decir, si la diferencia de potencial entre los extremos es igual a cero, estos electrones se someten a movimiento aleatorio que es similar al movimiento de las moléculas de gas. Los electrones colisionan repetidamente con los átomos metálicos, y su movimiento es complicado y en zigzag (figura 26.3a). Como se explicó anteriormente, cuando se aplica una diferencia de potencial a un conductor (por ejemplo mediante una batería), se establece un campo eléctrico en dicho conductor; este campo ejerce una fuerza eléctrica sobre los electrones, lo que produce una corriente. Además del movimiento zigzag producido por las colisiones con los átomos metálicos, los electrones se trasladan despacio a lo largo del conductor (en dirección opuesta a  $\vec{E}$ ) con la **velocidad de arrastre**  $\vec{v}_d$  como muestra la figura 26.3b.

Se puede pensar en las colisiones entre átomos y electrones en un conductor como si se tratara de una fricción interna efectiva (o fuerza de arrastre) similar a la que experimentan las moléculas de un líquido al fluir a través de una tubería rellena de viruta de acero. La energía que se transfiere de los electrones a los átomos metálicos durante las colisiones, ocasiona un incremento en la energía vibratoria de dichos átomos y un incremento correspondiente en la temperatura del conductor.

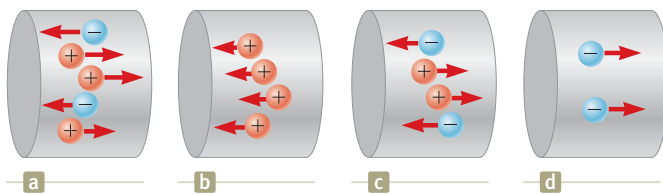


Figura 26.4 (Examen rápido 26.1) Las cargas se mueven a través de cuatro regiones.

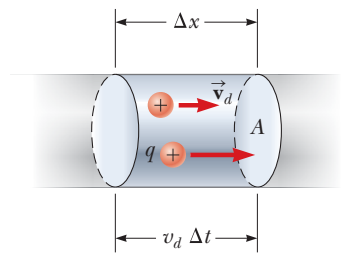
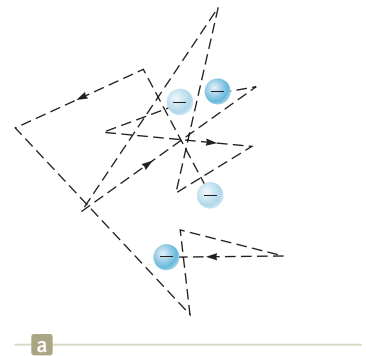


Figura 26.2 Segmento de un conductor uniforme de área transversal  $A$ .



El movimiento aleatorio modificado por el campo y los portadores de carga tienen una velocidad de arrastre opuesta a la dirección del campo eléctrico.

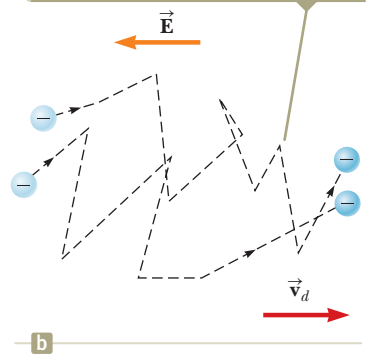


Figura 26.3 (a) Diagrama del movimiento aleatorio de dos portadores de carga en un conductor en ausencia de un campo eléctrico. La velocidad de arrastre es cero. (b) Movimiento de los portadores de carga en un conductor en presencia de un campo eléctrico. Puesto que la aceleración de los portadores de carga se debe a la fuerza eléctrica, las trayectorias en realidad son parabólicas. Sin embargo, la rapidez de arrastre es mucho menor que la rapidez promedio, de modo que la forma parabólica no es visible en esta escala.

- EJEMPLO RÁPIDO 26.1** Imagine cargas positivas y negativas en movimiento
- horizontal a través de las cuatro regiones que se muestran en la figura 26.4. Clasifique de menor a mayor la corriente en las cuatro regiones.

### Ejemplo 26.1 Rapidez de arrastre en un alambre de cobre

Un alambre de cobre calibre 12 en una típica construcción residencial tiene una área de sección transversal de  $3.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2$  y soporta una corriente constante de 10.0 A. ¿Cuál es la rapidez de arrastre de los electrones en el alambre? Suponga que cada átomo de cobre aporta un electrón libre a la corriente. La densidad del cobre es  $8.92 \text{ g/cm}^3$ .

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine que los electrones siguen un movimiento en zigzag, como en la figura 26.3a, con una velocidad de arrastre paralelo al alambre sobre impuesto al movimiento, como en la figura 26.3b. Como se mencionó anteriormente, la rapidez de arrastre es pequeña, y este ejemplo ayuda a cuantificar la rapidez.

**Categorizar** Evalúe la rapidez de arrastre con la ecuación 26.4. Ya que la corriente es constante, la corriente promedio durante cualquier intervalo de tiempo es la misma que la corriente constante:  $I_{\text{promedio}} = I$ .

**Analizar** La tabla periódica de los elementos en el apéndice C muestra que la masa molar del cobre es  $M = 63.5 \text{ g/mol}$ . Recuerde que 1 mol de cualquier sustancia contiene un número de Avogadro de átomos ( $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ).

Use la masa molar y la densidad del cobre para encontrar el volumen de 1 mol de cobre:

$$V = \frac{M}{\rho}$$

A partir de la suposición de que cada átomo de cobre aporta un electrón libre a la corriente, encuentre la densidad de electrones en el cobre:

$$n = \frac{N_A}{V} = \frac{N_A \rho}{M}$$

Resuelva la ecuación 26.4 para la rapidez de arrastre y sustituya para la densidad electrónica:

$$v_d = \frac{I_{\text{avg}}}{nqA} = \frac{I}{nqA} = \frac{IM}{qAN_A\rho}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{(10.0 \text{ A})(0.0635 \text{ kg/mol})}{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(3.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(8920 \text{ kg/m}^3)} \\ &= 2.23 \times 10^{-4} \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Finalizar** Este resultado muestra que las magnitudes de rapidez de arrastre representativas son muy pequeñas. Por ejemplo, ¡los electrones que viajan con una rapidez de  $2.23 \times 10^{-4} \text{ m/s}$  tardarían aproximadamente 75 minutos en recorrer 1 m! Por tanto, puede preguntarse por qué una luz se enciende casi instantáneamente cuando se activa el interruptor. En un con-

ductor, los cambios en el campo eléctrico que impulsan los electrones libres viajan a través del conductor con una rapidez cercana a la de la luz. De este modo, cuando activa un interruptor de luz, los electrones *ya presentes* en el filamento del foco experimentan fuerzas eléctricas y comienzan a moverse después de un intervalo de tiempo del orden de nanosegundos.

## 26.2 Resistencia

En la sección 24.6, argumentamos que el campo eléctrico en el interior de un conductor es igual a cero. Sin embargo, esta afirmación *sólo* es cierta si el conductor está en equilibrio estático. Si un cable está conectado a través de las terminales de una batería, el conductor *no* está en equilibrio estático. En este caso, hay un campo eléctrico distinto de cero en el conductor, y existe una corriente en el cable.

Considere en un conductor de área de sección transversal  $A$  que transporta una corriente  $I$ . La **densidad de corriente**  $J$  en el conductor se define como la corriente por unidad de área. Dado que la corriente es  $I = nqv_d A$ , la densidad de corriente es igual a

Densidad de corriente ►

$$J \equiv \frac{I}{A} = nqv_d \quad (26.5)$$

donde  $J$  tiene unidades en el SI de amperes por cada metro cuadrado. Esta expresión es válida sólo si la densidad de corriente es uniforme y sólo si la superficie del área



de sección transversal  $A$  es perpendicular a la dirección de la corriente. Tan pronto como se mantiene una diferencia de potencial a través del conductor se establece una densidad de corriente y un campo eléctrico. En algunos materiales, la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico:

$$J = \sigma E \quad (26.6)$$

donde la constante de proporcionalidad  $\sigma$  se conoce como **conductividad** del conductor.<sup>1</sup> Los materiales que obedecen la ecuación 26.6, siguen **la ley de Ohm**, así llamada en honor a Georg Simon Ohm. De una manera más específica, la ley de Ohm afirma que

para muchos materiales (incluyendo la mayor parte de los metales) la razón de la densidad de corriente al campo eléctrico es una constante  $\sigma$  que es independiente del campo eléctrico que produce la corriente.

Los materiales y dispositivos que obedecen la ley de Ohm y por tanto cumplen esta simple relación entre  $E$  y  $J$ , se conocen como materiales *óhmicos*. Sin embargo, se ha encontrado experimentalmente que no todos los materiales tienen esta propiedad. Aquellos materiales y dispositivos que no obedecen la ley de Ohm se dice que son materiales *no óhmicos*. La ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza, sino más bien una relación empírica válida únicamente para ciertas situaciones.

Si considera un segmento de alambre recto de área de sección transversal uniforme  $A$  y de longitud  $\ell$ , como se muestra en la figura 26.5 obtendrá una ecuación que resulte útil en aplicaciones prácticas. De un extremo al otro del alambre se mantiene una diferencia de potencial  $\Delta V = V_b - V_a$ , lo que genera en el alambre un campo eléctrico y una corriente. Si supone que el campo es uniforme, la magnitud de la diferencia de potencial a través del alambre está relacionada con el campo dentro del alambre mediante la ecuación 24.6,

$$\Delta V = E\ell$$

Por lo tanto, utilizando la ecuación 26.6 podemos expresar la diferencia de potencial a través del alambre como

$$\Delta V = \frac{\ell J}{\sigma}$$

Ya que  $J = I/A$ , la diferencia de potencial a través del alambre es

$$\Delta V = \left( \frac{\ell}{\sigma A} \right) I = RI$$

La cantidad  $R = \ell/\sigma A$  se conoce como **resistencia** del conductor y se define como la razón de la diferencia de potencial aplicada a un conductor a la corriente que pasa por el mismo:

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I} \quad (26.7)$$

Al estudiar los circuitos eléctricos utilizará esta ecuación una y otra vez. Con este resultado se observa que la resistencia tiene unidades del SI de volts por ampere. Un volt por ampere se define como un **ohm** ( $\Omega$ ):

$$1 \Omega \equiv 1 \text{ V/A} \quad (26.8)$$

La ecuación 26.7 indica que si una diferencia de potencial de 1 V a través de un conductor origina una corriente de 1 A, la resistencia del conductor será de 1  $\Omega$ . Por ejemplo, si un aparato doméstico conectado a una fuente de 120 V de diferencia de potencial conduce una corriente de 6 A, su resistencia es de 20  $\Omega$ .

La mayoría de los circuitos eléctricos usan elementos llamados **resistores** para controlar la corriente en las diferentes partes del circuito. Al igual que con los capacitores en el capítulo 25, muchos resistores están integrados en chips de circuitos integrados (sección 42.7), pero resistores independientes están todavía disponibles y son amplia-

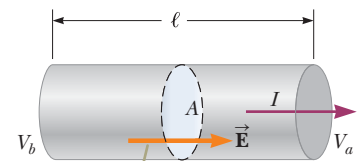


Science History Images/Alamy

### Georg Simon Ohm

Físico alemán (1789-1854)

Ohm, un profesor de secundaria y posteriormente profesor en la Universidad de Múnich, formuló el concepto de resistencia y descubrió las proporcionalidades expresadas en las ecuaciones 26.6 y 26.7



La diferencia de potencial  $\Delta V = V_b - V_a$  que se mantiene de un extremo al otro del conductor establece un campo eléctrico  $\vec{E}$  y este campo produce una corriente  $I$  que es proporcional a la diferencia de potencial.

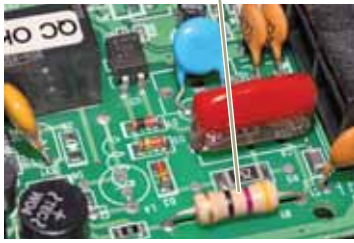
**Figura 26.5** Conductor uniforme de longitud  $\ell$  y un área de sección transversal  $A$ .

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.2

**La ecuación 26.7 no es la ley de Ohm** Muchas personas llaman a la ecuación 26.7 la ley de Ohm, pero esto no es correcto. Esta ecuación es simplemente la definición de la resistencia, la cual proporciona una relación importante entre el voltaje, la corriente y la resistencia. La ley de Ohm está relacionada con una proporcionalidad de  $J$  a  $E$  (ecuación 26.6) o, de manera equivalente, de  $I$  a  $\Delta V$ , las cuales, por la ecuación 26.7, establecen que la resistencia es constante e independiente del voltaje aplicado. Veremos algunos de los dispositivos para los que la ecuación 26.7 describe correctamente su resistencia, pero que no obedecen la ley de Ohm. La ecuación 26.7 puede escribirse como  $\Delta V = IR$ . Compárela con la ecuación 14.4.

<sup>1</sup>No debe confundir la conductividad  $\sigma$  con la densidad de carga superficial, para la cual se utiliza el mismo símbolo.

Las bandas de color en esta resistencia son de color amarillo, violeta, negro y oro.



dexis/Shutterstock

**Figura 26.6** Una vista de cerca de una placa de circuito muestra el código de colores de una resistencia. La banda dorada de la izquierda nos dice que la resistencia se orienta "hacia atrás" en este punto de vista y tenemos que leer los colores de derecha a izquierda.

**TABLA 26.1** Códigos de color para los resistores

Color	Número	Multiplicador	Tolerancia
Negro	0	1	
Café	1	10 <sup>1</sup>	
Rojo	2	10 <sup>2</sup>	
Naranja	3	10 <sup>3</sup>	
Amarillo	4	10 <sup>4</sup>	
Verde	5	10 <sup>5</sup>	
Azul	6	10 <sup>6</sup>	
Violeta	7	10 <sup>7</sup>	
Gris	8	10 <sup>8</sup>	
Blanco	9	10 <sup>9</sup>	
Oro		10 <sup>-1</sup>	5%
Plata		10 <sup>-2</sup>	10%
Sin color			20%

mente utilizadas. Dos tipos comunes son la *resistencia de material aglomerado*, que contiene carbono, y la *resistencia bobinada*, que consiste en una bobina de alambre. Los valores de los resistores en ohms, por lo general se indican mediante código de colores, como se muestra en la figura 26.6 y la tabla 26.1. Los primeros dos colores en un resistor dan los dos primeros dígitos en el valor de la misma, con el lugar decimal a la derecha del segundo dígito. El tercer color representa la potencia de 10 para el multiplicador del valor de la resistencia. El último color es la tolerancia del valor de la resistencia. Como un ejemplo, los cuatro colores sobre la resistencia en la parte inferior de la figura 26.6 son amarillo (= 4), violeta (= 7), negro (= 10<sup>0</sup>) y oro (= 5%) por lo que el valor de la resistencia es  $47 \times 10^0 = 47 \Omega$  con un valor de tolerancia de  $5\% = 2\Omega$ .

El inverso de la conductividad es la **resistividad**<sup>2</sup>  $\rho$ :

La resistividad es el recíproco de la conductividad ▶

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{26.9}$$

donde  $\rho$  está en ohms-metros ( $\Omega \cdot m$ ). Ya que  $R = \ell/\sigma A$ , es posible expresar la resistencia a lo largo de la longitud  $\ell$  de un bloque uniforme de material de la forma

Resistencia de un material uniforme a lo largo de la longitud  $\ell$  ▶

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \tag{26.10}$$

**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.3**

**Resistencia y resistividad** La resistividad es una propiedad de una *sustancia*, en tanto que la resistencia es la propiedad de un *objeto*. Ya ha visto antes pares similares de variables. Por ejemplo, la densidad es una propiedad de una sustancia, en tanto que la masa es la propiedad de un objeto. La ecuación 26.10 relaciona la resistencia con la resistividad y la ecuación 1.1 relaciona la masa con la densidad. De manera similar, el calor específico, que estudiamos en el capítulo 19, es una propiedad de una sustancia, mientras que la capacidad de calor es una propiedad de un objeto.

Todo material óhmico tiene una resistividad característica que depende de las propiedades del material y de la temperatura. Adicionalmente, como se puede observar por la ecuación 26.10, la resistencia de una muestra del material depende tanto de su geometría como de su resistividad. La tabla 26.2 presenta las resistividades de una diversidad de materiales a 20 °C. Observe el enorme intervalo existente, desde valores muy reducidos para buenos conductores, como el cobre y la plata, hasta valores muy elevados para los buenos aislantes como el vidrio y el hule. Un conductor ideal debería tener una resistividad igual a cero y un aislador ideal una resistividad infinita.

La ecuación 26.10 muestra que la resistencia de un conductor cilíndrico dado, como un alambre, es proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área de sección transversal. Si se duplica la longitud de un alambre, su resistencia se duplica. Si se duplica su área de sección transversal, su resistencia disminuye a la mitad. Esta situación es similar al flujo de un líquido por una tubería. Conforme se incrementa la longitud de la tubería, aumenta la resistencia al flujo. Conforme aumenta el área de sección transversal de la tubería, pasará más líquido a través de una sección transversal determinada de la tubería en un intervalo unitario de tiempo. Por esta razón, fluirán más líquido para un mismo diferencial de presión aplicado a la tubería, y se reducirá la resistencia al flujo.

<sup>2</sup>No hay que confundir la resistividad  $\rho$  con la densidad de masa o densidad de carga, para lo cual se utiliza el mismo símbolo.



**TABLA 26.2** Resistividades y coeficientes de temperatura de resistividad para diversos materiales

Material	Resistividad <sup>a</sup> ( $\Omega \cdot \text{m}$ )	Coefficiente de temperatura <sup>b</sup> $\alpha$ [ $(^\circ\text{C})^{-1}$ ]
Plata	$1.59 \times 10^{-8}$	$3.8 \times 10^{-3}$
Cobre	$1.7 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Oro	$2.44 \times 10^{-8}$	$3.4 \times 10^{-3}$
Aluminio	$2.82 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Tungsteno	$5.6 \times 10^{-8}$	$4.5 \times 10^{-3}$
Hierro	$10 \times 10^{-8}$	$5.0 \times 10^{-3}$
Platino	$11 \times 10^{-8}$	$3.92 \times 10^{-3}$
Plomo	$22 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Nicromo <sup>c</sup>	$1.00 \times 10^{-6}$	$0.4 \times 10^{-3}$
Carbono	$3.5 \times 10^{-5}$	$-0.5 \times 10^{-3}$
Germanio	0.46	$-48 \times 10^{-3}$
Silicio <sup>d</sup>	$2.3 \times 10^3$	$-75 \times 10^{-3}$
Vidrio	$10^{10}$ a $10^{14}$	
Hule	$\sim 10^{13}$	
Azufre	$10^{15}$	
Cuarzo (fundido)	$75 \times 10^{16}$	

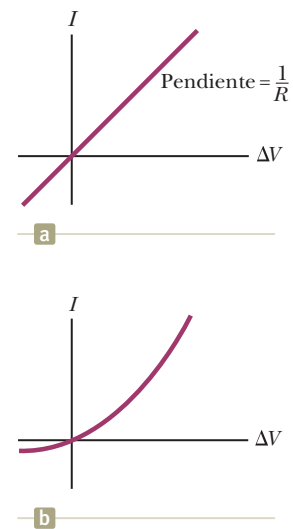
<sup>a</sup> Todos los valores están a  $20^\circ\text{C}$ . Los elementos de la tabla se consideran libres de impurezas.

<sup>b</sup> Ve a la sección 26.4.

<sup>c</sup> Aleación de níquel y cromo usada comúnmente en elementos calefactores.

<sup>d</sup> La resistividad del silicio es muy sensible a la pureza.

El valor puede cambiar en varios órdenes de magnitud cuando es dopado con otros átomos



**Figura 26.7** (a) Curva corriente-diferencia de potencial para un material óhmico. La curva es lineal y la pendiente es igual al inverso de la resistencia del conductor. (b) Curva no lineal corriente-diferencia de potencial correspondiente a un diodo de unión. Este dispositivo no sigue la ley de Ohm.

Los materiales y otros dispositivos óhmicos tienen una relación lineal corriente-diferencia de potencial en un amplio intervalo de diferencias de potencial aplicadas (figura 26.7a). La pendiente de la curva  $I$  en función de  $\Delta V$  en la región lineal, tiene un valor  $1/R$ . Los materiales no óhmicos tienen una correspondencia no lineal de corriente-diferencia de potencial. Un dispositivo semiconductor común con características  $I$  en función de  $\Delta V$  no lineales, es el *diodo de unión* (figura 26.7b). La resistencia de este dispositivo es baja para corrientes en una dirección ( $\Delta V$  positiva) y elevada para corriente en la dirección opuesta ( $\Delta V$  negativa). De hecho, la mayor parte de los dispositivos electrónicos modernos, como los transistores, tienen correspondencias no lineales de corriente-diferencia de potencial; su operación correcta depende de la forma en que violan la ley de Ohm.

**E XAMEN RÁPIDO 26.2** Un alambre cilíndrico tiene un radio  $r$  y una longitud  $\ell$ . Si tanto  $r$  como  $\ell$  se duplican, la resistencia en el alambre: (a) aumenta, (b) disminuye, o (c) no se modifica.

**E XAMEN RÁPIDO 26.3** En la figura 26.7b, conforme aumenta el voltaje aplicado, la resistencia del diodo: (a) aumenta, (b) disminuye o (c) no se modifica.

### Ejemplo 26.2 Resistencia del alambre de Nicromo

El radio del alambre de Nicromo calibre 22 es de 0.32 mm.

(A) Calcule la resistencia por unidad de longitud de este alambre.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La tabla 26.2 muestra que el Nicromo tiene una resistividad dos órdenes de magnitud más grandes que los mejores conductores en la tabla. Por tanto, se espera que tenga algunas aplicaciones prácticas que los mejores conductores no pueden tener.

**Categorizar** El alambre se modela como un cilindro, de modo que se aplica un simple análisis geométrico para encontrar la resistencia.

continúa

## 26.2 continuación

**Analizar** Use la ecuación 26.10 y la resistividad del Nicromo de la tabla 26.2 para encontrar la resistencia por unidad de longitud:

$$\frac{R}{\ell} = \frac{\rho}{A} = \frac{\rho}{\pi r^2} = \frac{1.0 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}}{\pi (0.32 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 3.1 \Omega/\text{m}$$

**(B)** Si una diferencia de potencial de 10 V se mantiene a través de una longitud de 1.0 m de alambre de Nicromo, ¿cuál es la corriente en el alambre?

## SOLUCIÓN

**Analizar** Use la ecuación 26.7 para encontrar la corriente:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{(R/\ell)\ell} = \frac{10 \text{ V}}{(3.1 \Omega/\text{m})(1.0 \text{ m})} = 3.2 \text{ A}$$

**Finalizar** Debido a su alta resistividad y resistencia a la oxidación, el Nicromo se usa con frecuencia para elementos calefactores en tostadores, planchas y calentadores eléctricos.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Qué pasa si el alambre se compone de cobre en lugar de Nicromo? ¿Cómo cambiarían los valores de la resistencia por unidad de longitud y de corriente?

**Respuesta** La tabla 26.2 muestra que el cobre tiene una resistencia de dos órdenes de magnitud menor que el de nicromo. Por tanto, esperamos que la respuesta a la parte (A) sea más pequeña y la respuesta a la parte (B) sea más grande. Los cálculos muestran que un alambre de cobre del mismo radio tendría una resistencia por unidad de longitud de sólo 0.053  $\Omega/\text{m}$ . Una longitud de 1.0 m de cable de cobre del mismo radio llevaría una corriente de 190 A con una diferencia de potencial aplicada de 10 V.

## Ejemplo 26.3 Resistencia radial de un cable coaxial

Los cables coaxiales son muy utilizados en televisión por cable y otras aplicaciones electrónicas. Un cable coaxial consiste en dos conductores cilíndricos concéntricos. La región entre los conductores está completamente llena con polietileno, como se muestra en la figura 26.8a. Las fugas de corriente a través del polietileno, con dirección *radial*, son indeseables. (El cable se diseña para conducir corriente a lo largo de su longitud, pero esta *no* es la corriente que se considera aquí.) El radio del conductor interior es  $a = 0.500$  cm, el radio del conductor exterior es  $b = 1.75$  cm, y la longitud es  $L = 15.0$  cm. La resistividad del polietileno es  $1.0 \times 10^{13} \Omega \cdot \text{m}$ . Calcule la resistencia del polietileno entre los dos conductores.

## SOLUCIÓN

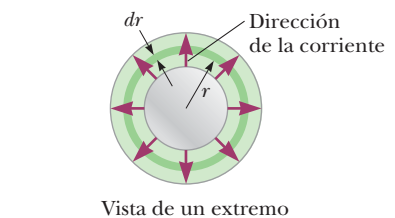
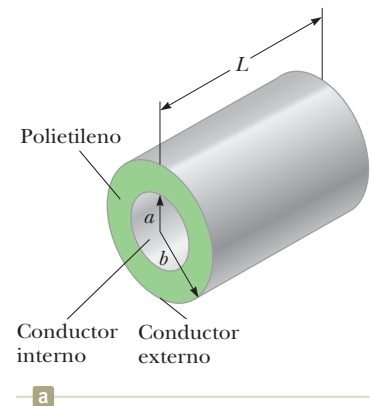
**Conceptualizar** Imagine dos corrientes, como sugiere el texto del problema. La corriente deseada fluye a lo largo del cable, dentro de los conductores. La corriente indeseada corresponde a fuga de carga a través del polietileno y su dirección es radial.

**Categorizar** Ya que se conocen la resistividad y la geometría del polietileno, este problema se clasifica como uno en el que se encuentra la resistencia del polietileno a partir de estos parámetros. Sin embargo, la ecuación 26.10 representa la resistencia de un bloque del material. En esta situación, la geometría es más complicada. Ya que el área a través de la cual pasan las cargas depende de la posición radial, debe usar cálculo integral para determinar la respuesta.

**Analizar** Divida el polietileno en elementos concéntricos de grosor infinitesimal  $dr$  (figura 26.8b). Cualquier carga que pase desde el conductor interior al exterior debe moverse radialmente a través de este elemento concéntrico. Use la forma diferencial de la ecuación 26.10 y sustituya  $\ell$  con  $dr$  para la distancia variable:  $dR = \rho dr/A$ , donde  $dR$  es la resistencia de un elemento de polietileno de grosor  $dr$  y área superficial  $A$ .

Escriba una expresión para la resistencia del cilindro hueco de polietileno representando el área como la superficie de área del elemento:

$$dR = \frac{\rho dr}{A} = \frac{\rho}{2\pi r L} dr$$



**Figura 26.8** (Ejemplo 26.3) Un cable coaxial. (a) El polietileno llena el espacio entre los dos conductores. (b) Vista de un extremo que muestra la fuga de corriente.

## 26.3 continuación

Integre esta expresión de  $r = a$  a  $r = b$ :

$$(1) \quad R = \int dR = \frac{\rho}{2\pi L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Sustituya los valores conocidos:

$$R = \frac{1.0 \times 10^{13} \Omega \cdot \text{m}}{2\pi(0.150 \text{ m})} \ln\left(\frac{1.75 \text{ cm}}{0.500 \text{ cm}}\right) = 1.33 \times 10^{13} \Omega$$

**Finalizar** Compare esta resistencia con la del conductor de cobre interno del cable a lo largo de la longitud de 15.0 cm.

Use la ecuación 26.10 para encontrar la resistencia del cilindro de cobre:

$$R_{\text{Cu}} = \rho \frac{\ell}{A} = (1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}) \left[ \frac{0.150 \text{ m}}{\pi(5.00 \times 10^{-3} \text{ m})^2} \right] \\ = 3.2 \times 10^{-5} \Omega$$

Esta resistencia tiene 18 órdenes de magnitud menor que la resistencia radial. Por tanto, casi toda la corriente corresponde a la carga que se mueve a lo largo de la longitud del cable, con una fracción muy pequeña que se fuga en la dirección radial.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que el cable coaxial se alarga al doble del diámetro global con dos posibles opciones: (1) la razón  $b/a$  se mantiene fija o (2) la diferencia  $b - a$  se mantiene fija. ¿Para cuál opción la fuga de corriente entre los conductores interior y exterior aumenta cuando el voltaje es aplicado entre ellos?

**Respuesta** Para que la corriente aumente, la resistencia debe disminuir. Para la opción (1), en la que  $b/a$  se mantiene

fija, la ecuación (1) muestra que la resistencia no se afecta. Para la opción (2), no se tiene una ecuación que involucre la diferencia  $b - a$  a inspeccionar. No obstante, al observar la figura 26.8b, se ve que aumentan  $b$  y  $a$  mientras se mantiene constante el voltaje resulta en carga que fluye a través del mismo grosor de plástico, pero a través de un área perpendicular más grande, al flujo. Esta área más grande resulta en menor resistencia y mayor corriente.

## 26.3 Modelo de conducción eléctrica

Esta sección describe un modelo clásico de conducción eléctrica en los metales que fue propuesto por primera vez por Paul Drude (1863-1906) en el año 1900. (Vea las secciones 1.2 y 20.1 para un repaso de modelos estructurales.) Este modelo conduce a la ley de Ohm y muestra que la resistividad en los metales se relaciona con el movimiento de los electrones. Aunque el modelo Drude descrito en este caso tiene limitaciones, introduce conceptos que todavía se aplican en tratamientos más complejos.

Siguiendo el esquema de modelos estructurales de la sección 20.1, el modelo de Drude para la conducción eléctrica tiene las siguientes propiedades:

### 1. Componentes físicos:

Piense en un conductor como un arreglo regular de átomos más un conjunto de electrones libres, que a veces se conocen como electrones de *conducción*.

Los electrones de conducción, aunque están unidos a sus átomos respectivos cuando éstos no forman parte de un sólido, obtienen movilidad cuando los átomos libres se condensan en un sólido.

### 2. Comportamiento de los componentes:

(a) En ausencia de un campo eléctrico, los electrones de conducción se mueven al azar a través del conductor (figura 26.3a). Esta situación es similar al movimiento de las moléculas de un gas confinado en un recipiente. En realidad algunos científicos, se refieren a los electrones de conducción en un metal como un *gas de electrones*.

(b) Cuando es aplicado un campo eléctrico, los electrones libres se arrastran lentamente en una dirección opuesta a la del campo eléctrico (figura 26.3b), con una rapidez de arrastre promedio  $v_d$  que es mucho más pequeña (típicamente  $10^{-4}$  m/s) que su rapidez promedio  $v_{\text{promedio}}$  entre colisiones (típicamente  $10^6$  m/s).

(c) El movimiento del electrón después de una colisión es independiente de su movimiento antes de la colisión.



En cuanto a la anterior propiedad 2(c), la energía transferida a los átomos causa la energía interna del sistema, lo que hace que la temperatura del conductor aumente.

Ahora se está en posición de deducir una expresión para la velocidad de arrastre recurriendo a varias muestras de análisis de modelos. Cuando un electrón libre de masa  $m_e$  y carga  $q (= -e)$  se somete a un campo eléctrico  $\vec{E}$ , se describe por medio del modelo de una partícula en un campo y experimenta una fuerza  $\vec{F} = q\vec{E}$ . El electrón es una partícula bajo una fuerza neta y para calcular su aceleración se utiliza la segunda ley de Newton,  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ :

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m_e} \quad (26.11)$$

Ya que el campo eléctrico es uniforme, la aceleración del electrón es constante, de modo que el electrón se modela como una partícula bajo aceleración constante. Si  $\vec{v}_i$  es la velocidad inicial del electrón en el instante posterior a una colisión (que se presenta en un tiempo definido como  $t = 0$ ), la velocidad del electrón en un tiempo muy breve  $t$  posterior (inmediatamente antes de que se presente la siguiente colisión) es, a partir de la ecuación 4.8,

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t = \vec{v}_i + \frac{q\vec{E}}{m_e} t \quad (26.12)$$

Ahora tome el valor promedio de  $\vec{v}_f$  para todos los posibles tiempos de colisión  $t$  y todos los posibles valores de  $\vec{v}_i$  de los electrones en el alambre. Si supone que las velocidades iniciales están distribuidas aleatoriamente sobre todas las posibles direcciones (propiedad 2a), el valor promedio de  $\vec{v}_i$  es cero. El valor promedio del segundo término de la ecuación 26.12 es  $(q\vec{E}/m_e)\tau$ , donde  $\tau$  es el *intervalo de tiempo promedio entre colisiones sucesivas*. Ya que el valor promedio de  $\vec{v}_f$  es igual a la velocidad de arrastre,

Velocidad de arrastre en términos de cantidades microscópicas ►

$$\vec{v}_{f\text{promedio}} = \vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m_e} \tau \quad (26.13)$$

El valor de  $\tau$  depende del tamaño de los átomos del metal y el número de electrones por unidad de volumen. Esta expresión para la velocidad de arrastre en la ecuación 26.13 se relaciona con la corriente en el conductor. Al sustituir la magnitud de la velocidad a partir de la ecuación 26.13 en la ecuación 26.4, la corriente promedio en el conductor está dada por

$$I_{\text{promedio}} = nq \left( \frac{qE}{m_e} \tau \right) A = \frac{nq^2\tau A}{m_e} E \quad (26.14)$$

Debido a que la densidad de corriente  $J$  es la corriente dividida por el área  $A$

Densidad de corriente en términos de cantidades microscópicas ►

$$J = \frac{nq^2\tau}{m_e} E$$

donde  $n$  es el número de electrones por unidad de volumen. Al comparar esta expresión con la ley de Ohm,  $J = \sigma E$ , se obtienen las siguientes relaciones para la conductividad y la resistividad de un conductor:

Conductividad en términos de cantidades microscópicas ►

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m_e} \quad (26.15)$$

Resistividad en términos de cantidades microscópicas ►

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{nq^2\tau} \quad (26.16)$$

De acuerdo con este modelo clásico, ni la conductividad ni la resistividad dependen de la intensidad del campo eléctrico. Esta cualidad es característica de un conductor que obedece la ley de Ohm.

El modelo muestra que la resistividad se puede calcular a partir del conocimiento de la densidad de los electrones, la carga y la masa, y el intervalo de tiempo promedio



$\tau$  entre colisiones. Este intervalo está relacionado con la distancia promedio entre colisiones  $\ell_{\text{promedio}}$  (la *trayectoria libre media*) y la velocidad media  $v_{\text{promedio}}$  a través de la expresión<sup>3</sup>

$$\tau = \frac{\ell_{\text{promedio}}}{v_{\text{promedio}}} \quad (26.17)$$

Aunque este modelo estructural de conducción es consistente con la ley de Ohm, no predice correctamente los valores de resistividad o el comportamiento de la resistividad con la temperatura. Por ejemplo, los resultados de los cálculos clásicos para  $v_{\text{promedio}}$  usando el modelo de gas ideal para los electrones son alrededor de un factor de diez menor que los valores reales, lo que resulta en predicciones incorrectas de los valores de la resistividad de la ecuación 26.16. Además, de acuerdo con las ecuaciones 26.16 y 26.17, se prevé que la resistividad variará con la temperatura no como  $v_{\text{promedio}}$ , que, de acuerdo con un modelo de gas ideal (capítulo 20, ecuación 20.44), es proporcional a  $\sqrt{T}$ . Este comportamiento está en desacuerdo con la dependencia lineal observada experimentalmente de la resistividad con la temperatura de los metales puros. (Vea la sección 26.4.) Debido a estas predicciones incorrectas, debemos modificar nuestro modelo estructural. Al modelo que hemos desarrollado hasta ahora, lo llamaremos modelo *clásico* para la conducción eléctrica. Para tener en cuenta las predicciones incorrectas del modelo clásico, se desarrolla aún más en un modelo de la *mecánica cuántica*, el cual podemos encontrar en textos avanzados.

## 26.4 Resistencia y temperatura

En un intervalo limitado de temperatura, la resistividad de un conductor varía prácticamente de manera lineal con la temperatura, de acuerdo con la expresión

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (26.18)$$

donde  $\rho$  es la resistividad a cierta temperatura  $T$  (en grados Celsius),  $\rho_0$  la resistividad en alguna temperatura de referencia  $T_0$  (por lo general 20 °C), y  $\alpha$  el **coeficiente de temperatura de resistividad**. A partir de la ecuación 26.18, el coeficiente de temperatura de resistividad se expresa como

$$\alpha = \frac{\Delta\rho/\rho_0}{\Delta T} \quad (26.19)$$

donde  $\Delta\rho = \rho - \rho_0$  es el cambio en resistividad durante el intervalo de temperatura  $\Delta T = T - T_0$ . Compare la forma de la ecuación 26.19 con la ecuación 18.4 para el coeficiente de expansión térmica.

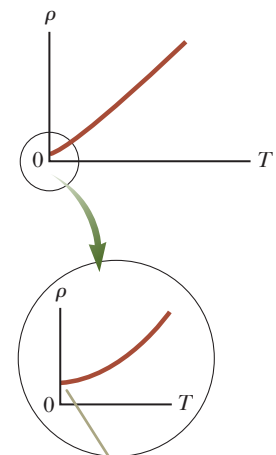
Los coeficientes de temperatura de resistividad correspondientes a diferentes materiales aparecen en la tabla 26.2. Observe que la unidad de  $\alpha$  es en grados Celsius<sup>-1</sup> [(°C)<sup>-1</sup>]. Ya que la resistencia es proporcional a la resistividad (ecuación 26.10), la variación en la resistencia de una muestra es

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (26.20)$$

donde  $R_0$  es la resistencia a la temperatura  $T_0$ . El uso de esta propiedad permite mediciones de temperatura precisas a través del monitoreo cuidadoso de la resistencia de una sonda hecha de un material particular.

Para algunos metales, como el cobre, la resistividad casi es proporcional a la temperatura, como se muestra en la figura 26.9. Sin embargo, a temperaturas muy bajas siempre existe una región no lineal, y la resistividad usualmente alcanza algún valor finito conforme la temperatura tiende al cero absoluto. Esta resistividad residual cerca del cero absoluto se debe principalmente a la colisión de los electrones con impurezas e imperfecciones en el metal. En contraste, la resistividad de alta temperatura (la región lineal) se caracteriza predominantemente por colisiones entre electrones y átomos del metal.

◀ Variación de  $\rho$  en función de la temperatura



Conforme  $T$  se acerca al cero absoluto, la resistividad se acerca a un valor diferente de cero.

**Figura 26.9** Resistividad en función de la temperatura para un metal como el cobre. La curva es lineal en una amplia gama de temperaturas, y  $\rho$  aumenta al incrementarse la temperatura.

<sup>3</sup>Recuerde que la velocidad promedio de un grupo de partículas depende de la temperatura del grupo (capítulo 20) y no es la misma que la velocidad de arrastre  $v_d$ .



Observe que tres de los valores  $\alpha$  en la tabla 26.2 son negativos, lo que indica que la resistividad de estos materiales disminuye con el aumento de temperatura. Este comportamiento indica una clase de materiales llamada *semiconductores*, introducidos por primera vez en la sección 22.2, y se debe a un aumento en la densidad de portadores de carga a temperaturas más altas.

- E XAMEN RÁPIDO 26.4** ¿Cuándo lleva más corriente una lámpara: (a) justo inmediatamente después de haberla sido encendido y la brillantez del filamento metálico está en incremento o (b) una vez que esté encendida durante unos cuantos milisegundos y la brillantez se haya estabilizado?

## 26.5 Superconductores

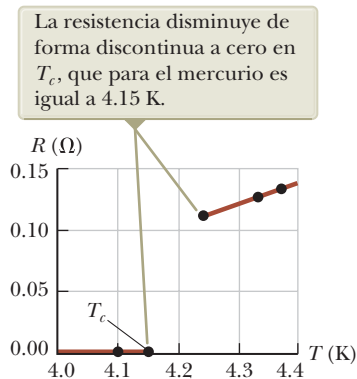
Existe una clase de metales y de compuestos cuya resistencia disminuye hasta cero cuando llegan a una cierta temperatura  $T_c$ , conocida como temperatura crítica. Estos materiales se conocen como superconductores. La gráfica resistencia-temperatura para un superconductor es similar a la de un metal normal cuando su temperatura está por arriba de  $T_c$  (figura 26.10). Cuando la temperatura es  $T_c$  o inferior, la resistividad súbitamente cae hasta cero. Este fenómeno fue descubierto en 1911 por el físico holandés Heike Kamerlingh-Onnes (1853-1926) mientras trabajaba con mercurio, que es un superconductor a temperaturas inferiores a 4.2 K. Mediciones recientes han demostrado que las resistividades de los superconductores por debajo de sus valores  $T_c$  son inferiores a  $4 \times 10^{-25} \Omega \cdot \text{m}$ , es decir, alrededor de  $10^{17}$  veces menores que la resistividad del cobre y que en la práctica se consideran igual a cero.

Hoy día se conocen miles de superconductores y como lo muestra la tabla 26.3, las temperaturas críticas de los superconductores recién descubiertos son mucho más elevadas de lo que se consideraba posible en un principio. Se reconocen dos tipos de superconductores, los más recientemente identificados son, en esencia, materiales cerámicos a elevadas temperaturas críticas; en tanto que los materiales superconductores, como los observados por Kamerlingh-Onnes, son metales. Si llegara a identificarse un superconductor a la temperatura ambiente, su impacto sobre la tecnología sería tremendo.

El valor de  $T_c$  es sensible a la composición química, a la presión y a la estructura molecular. Es interesante hacer notar que el cobre, la plata y el oro, que son excelentes conductores, no exhiben características de superconductividad.

Una de las características verdaderamente notables de los superconductores es que una vez que se ha establecido en ellos una corriente, persiste *sin necesidad de una diferencia de potencial aplicada* (ya que  $R = 0$ ). Se han observado corrientes estables que persisten en circuitos superconductores durante varios años ¡sin un decaimiento!

Una aplicación importante y útil de la superconductividad es el desarrollo de imanes superconductores, en los cuales las magnitudes del campo magnético son aproximadamente diez veces mayores a las producidas por los mejores electroimanes normales. Es posible utilizar estos imanes superconductores como medio para almacenar



**Figura 26.10** Resistencia en función de la temperatura para una muestra de mercurio (Hg). La gráfica es similar al trazo de un metal normal por encima de la temperatura crítica  $T_c$ .

**TABLA 26.3** Temperaturas críticas de varios superconductores

Material	$T_c$ (K)
HgBa <sub>2</sub> Ca <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>8</sub>	134
Tl—Ba—Ca—Cu—O	125
Bi—Sr—Ca—Cu—O	105
YBa <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>7</sub>	92
Nb <sub>3</sub> Ge	23.2
Nb <sub>3</sub> Sn	18.05
Nb	9.46
Pb	7.18
Hg	4.15
Sn	3.72
Al	1.19
Zn	0.88

energía. Los imanes superconductores están siendo utilizados actualmente en unidades para la obtención de imágenes por resonancia magnética en el campo de la medicina (MRI, *magnetic resonance imaging*), que producen imágenes de alta calidad de los órganos internos sin necesidad de una excesiva exposición de los pacientes a los rayos X o a otras radiaciones dañinas.

Una teoría exitosa para la superconductividad en metales fue publicada en 1957 por John Bardeen (1908-1991), L. N. Cooper (nacido en 1930) y J. R. Schrieffer (nacido en 1931); generalmente se llama teoría BCS, basada en las primeras letras de sus apellidos. Esta teoría condujo a un Premio Nobel de Física para los tres científicos en 1972.

Un desarrollo importante en la física que suscitó mucho entusiasmo en la comunidad científica fue el descubrimiento de superconductores a base de óxido de cobre de alta temperatura. La emoción comenzó con una publicación de 1986 de J. Georg Bednorz (nacido en 1950) y K. Alex Müller (nacido en 1927), científicos del Laboratorio de Investigación de IBM Zurich en Suiza. En su artículo seminal,<sup>4</sup> Bednorz y Müller informaron una fuerte evidencia de superconductividad a 30 K en un óxido de bario, lantano y cobre. Fueron galardonados con el Premio Nobel de Física en 1987 por su notable descubrimiento. Más tarde ese año, equipos de científicos de Japón y Estados Unidos informaron superconductividad a 105 K en un óxido de bismuto, estroncio, calcio y cobre. Se informó sobre la superconductividad a temperaturas tan altas como 150 K en un óxido que contiene mercurio. La búsqueda de nuevos materiales superconductores continúa tanto por razones científicas como porque las aplicaciones prácticas se vuelven más probables y generalizadas a medida que aumenta la temperatura crítica.

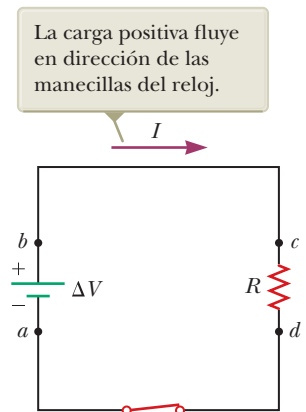
## 26.6 Potencia eléctrica

En los circuitos eléctricos típicos, la energía  $T_{ET}$  se transfiere de una fuente, como una batería, a algún dispositivo, como sería una lámpara o un receptor de radio. Por ello conviene determinar una expresión que permita calcular la rapidez de transferencia de esta energía. Primero, considere el circuito sencillo de la figura 26.11, donde se entrega energía a un resistor. (En los diagramas de circuito los resistores se representan mediante el símbolo  $\text{---}\text{---}\text{---}$ ). Ya que los alambres de conexión también tienen resistencia, parte de la energía es entregada a los alambres y parte al resistor. A menos que se especifique lo contrario, suponga que la resistencia de los alambres es tan reducida en comparación con la resistencia del elemento de circuito y que la energía suministrada a los alambres es despreciable.

Imagine la trayectoria de una carga  $Q$  positiva en dirección de las manecillas del reloj alrededor del circuito de la figura 26.11 desde el punto  $a$ , a través de la batería, del resistor y de regreso al punto  $a$ . Considere al circuito como un sistema. Conforme la carga se mueve de  $a$  a  $b$  a través de la batería, la energía potencial eléctrica del sistema *aumenta* en una cantidad  $Q\Delta V$ , en tanto que la energía potencial química de la batería *se reduce* en la misma cantidad. (Recuerde por la ecuación 24.3 que  $\Delta U = q\Delta V$ .) Sin embargo, conforme la carga se mueve de  $c$  a  $d$  a través del resistor el sistema *pierde* esta energía potencial eléctrica durante las colisiones de los electrones con los átomos del resistor. En este proceso, la energía potencial eléctrica se transforma en energía interna que corresponde a un incremento en el movimiento de vibración de los átomos en el resistor. Puesto que ha despreciado la resistencia de los alambres de conexión, no se presenta ninguna transformación de energía en las trayectorias  $bc$  y  $da$ . Cuando la carga regresa al punto  $a$ , el resultado neto es que parte de la energía potencial química de la batería ha sido entregada al resistor y está presente en este último en forma de energía interna  $E_{\text{int}}$  asociada con una vibración de las moléculas.

Analicemos la situación energética en la figura 26.11 en términos de la ecuación 8.2. Si elegimos la resistencia como el sistema, la ecuación 8.2 se convierte, durante un intervalo de tiempo después de que se cierra el interruptor,

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + T_{ET} + T_{ER}$$



**Figura 26.11** Circuito constituido por un resistor de resistencia  $R$  y una batería con una diferencia de potencial  $\Delta V$  entre sus terminales.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.4

**Las cargas no se mueven alrededor de todo el circuito en un breve periodo.** Para comprender la transferencia de energía en un circuito, resulta útil *imaginar* una carga moviéndose alrededor de todo el circuito, aunque a un electrón le tome horas hacer esto.

<sup>4</sup>J. G. Bednorz y K. A. Müller, *Z. Phys. B* 64:189, 1986.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.5

**Mala interpretación del concepto de corriente** En un circuito como el de la figura 26.11 se presentan varias malas interpretaciones comunes asociadas con el concepto de corriente. Una es que la corriente sale de una de las terminales de la batería y después es “consumida” conforme pasa por el resistor, dejando corriente sólo en una parte del circuito. La verdad es que la corriente es la misma en *cualquier sitio* en el circuito. Otra mala interpretación es que la corriente que sale del resistor es menor que la que entró, puesto que parte de la corriente fue “consumida”. La interpretación de que la corriente sale de ambas terminales de la batería, en sentidos opuestos, y después “choca” en el resistor, entregando así la energía es también incorrecta. El caso es que las cargas fluyen en el mismo sentido de rotación en *todos* los puntos del circuito.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 26.6

**La energía no se “disipa”** En algunos libros, se puede ver que la ecuación 26.22 se describe como la potencia “disipada” en un resistor, lo que sugiere que la energía desaparece. Lo correcto es decir que la energía “es entregada a” un resistor.

El lado izquierdo representa la temperatura creciente de la resistencia, ya que recibe energía  $T_{ET}$  de la batería e irradia energía  $T_{ER}$  a los alrededores. El calor  $Q$  es otro proceso mediante el cual la resistencia puede transferir energía porque está en contacto térmico con el aire y está más caliente que el aire. Una vez que la resistencia alcanza una temperatura de estado estable, el lado izquierdo de la ecuación se vuelve cero, y la energía eléctrica de entrada se equilibra con el calor y la radiación de salida. Si elegimos todo el circuito como el sistema, la ecuación 8.2 para este mismo intervalo de tiempo se convierte

$$\Delta U_c + \Delta E_{int} = Q + T_{ER}$$

El término  $\Delta U_c$  en el lado izquierdo representa la energía potencial química decreciente de la batería, ya que suministra energía a la resistencia. El lado derecho representa la conducción térmica de la energía  $Q$  en el aire y la energía  $T_{ER}$  que irradia hacia el entorno desde la resistencia. Una vez que la resistencia alcanza una temperatura de estado estable, el término  $\Delta E_{int}$  se convierte en cero. La ecuación representa el drenaje continuo de energía de la batería, con la energía que sale del circuito por el calor y la radiación, convirtiéndose eventualmente en energía interna en el entorno. Observe que  $T_{ET}$  no aparece en esta ecuación, porque la transferencia de energía por transmisión eléctrica ocurre *dentro* de este sistema.

Algunos dispositivos eléctricos incluyen *disipadores de calor*<sup>5</sup> conectados a ciertas partes del circuito, a fin de impedir que estas partes alcancen temperaturas peligrosamente altas. Estos disipadores son piezas metálicas con muchas aletas. La elevada conductividad térmica del metal causa una rápida transferencia de energía por calor lejos del componente caliente, y el gran número de aletas proporciona una gran superficie que entra en contacto con el aire, por lo que la energía se puede transferir al aire por radiación y por calor a gran rapidez.

Investiguemos ahora la rapidez a la cual el sistema pierde energía potencial eléctrica conforme la carga  $Q$  pasa a través del resistor, utilizando la primera parte de la ecuación 24.3:

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{d}{dt} (Q \Delta V) = \frac{dQ}{dt} \Delta V = I \Delta V$$

donde  $I$  es la corriente en el circuito. El sistema recupera su energía potencial cuando la carga pasa a través de la batería, a expensas de la energía química de la misma. La rapidez a la cual el sistema pierde energía potencial conforme la carga pasa a través del resistor es igual a la rapidez a la cual el sistema adquiere energía interna en el resistor. Por tanto, la potencia  $P$ , que representa la rapidez a la cual se entrega energía al resistor, es

$$P = I \Delta V \quad (26.21)$$

Este resultado se deduce si considera una batería que entrega energía a un resistor. Sin embargo, la ecuación 26.21 puede utilizarse para calcular la potencia entregada por una fuente de voltaje a *cualquier* dispositivo que tenga una corriente  $I$  y esté sujeto a una diferencia de potencial  $\Delta V$  entre sus terminales.

Con la ecuación 26.21, y a partir de que un resistor  $\Delta V = IR$ , la potencia entregada al resistor tiene una forma alternativa

$$P = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad (26.22)$$

Cuando  $I$  se expresa en amperes,  $\Delta V$  en volts y  $R$  en ohms, la unidad del SI para la potencia es el watt, como se estableció en el capítulo 8 en el análisis sobre la potencia mecánica. El proceso mediante el que se pierde potencia en forma de energía interna en un conductor de resistencia  $R$ , a menudo se llama *calentamiento joule*;<sup>6</sup> esta transfor-

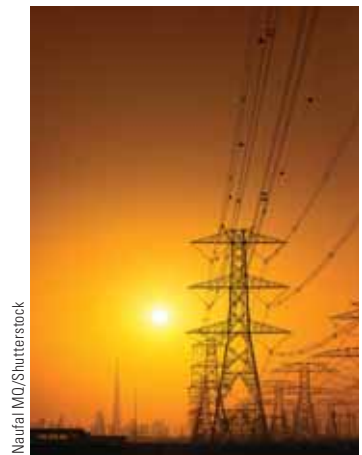
<sup>5</sup> Esta es otra mala interpretación de la palabra *calor*, que ya está profundamente arraigada en nuestro lenguaje cotidiano.

<sup>6</sup> Comúnmente se conoce como *calentamiento joule*, aun cuando en realidad no ocurre un proceso de calentamiento cuando la energía entregada a un resistor aparece como energía interna. Este es otro ejemplo del uso incorrecto de la palabra *calor* que se ha acuñado en el lenguaje.



mación también es conocida como una pérdida  $I^2R$ . Al evaluar la potencia eléctrica entregada a un dispositivo en un circuito, tenga en cuenta que la ecuación 26.21 se puede usar en general, pero la ecuación 26.22 solo se debe usar al evaluar la potencia entregada a una resistencia.

Vamos a abordar ahora la pregunta planteada en la semblanza de apertura: ¿Por qué se transporta la energía a través de cables eléctricos a voltajes muy altos? Cuando se transporta energía eléctrica a través de las líneas de transmisión (Figura 26.12), usted no debe suponer que las líneas no tienen resistencia. Las líneas de transmisión tienen resistencia y se entrega potencia a la resistencia de esos alambres. Las compañías eléctricas buscan minimizar la energía transformada a energía interna en las líneas y maximizar la energía entregada al consumidor. Ya que  $P = I \Delta V$ , la misma cantidad de energía puede ser transportada ya sea a corrientes intensas y bajas diferencias de potencial o corrientes débiles y elevadas diferencias de potencial. Las empresas eléctricas prefieren transportar la energía a corrientes débiles y elevadas diferencias de potencial principalmente por razones económicas. El alambre de cobre es muy costoso, por lo que resulta más económico utilizar un alambre de elevada resistencia (es decir, un alambre de un área de sección transversal reducida; vea la ecuación 26.10). Por esta razón, en la expresión de la potencia entregada a un resistor  $P = I^2R$ , la resistencia del alambre se fija en un valor relativamente alto debido a consideraciones de tipo económico. La pérdida  $I^2R$  puede reducirse manteniendo la corriente  $I$  tan pequeña como sea posible, lo que quiere decir que se deberá transferir la energía a un voltaje elevado. Una vez que la electricidad llega a su destino, la diferencia de potencial se reduce a 4 kV mediante un *transformador*. Naturalmente, cada vez que se reduce la diferencia de potencial, la corriente aumenta en el mismo factor, y conserva una misma energía. El análisis de los transformadores se da con mayor detalle en el capítulo 32.



Naufal IMD/Shutterstock

**Figura 26.12** Estas líneas de alimentación transfieren energía desde la compañía eléctrica a los hogares y negocios. La energía se transfiere a un voltaje muy alto, posiblemente cientos de miles de volts en algunos casos. A pesar de que esto hace a las líneas de energía muy peligrosas, el alto voltaje resulta en una menor pérdida de energía debido a la resistencia en los cables.

### Ejemplo 26.4 Energía en un calentador eléctrico

Un calentador eléctrico se construye al aplicar una diferencia de potencial de 120 V a través de un alambre de nicromo que tiene una resistencia total de  $8.00 \Omega$ . Encuentre la corriente conducida por el alambre y la potencia de especificación del calentador.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Como se analizó en el ejemplo 26.2, el alambre de nicromo tiene alta resistividad y se usa para elementos en calefactores en tostadores, planchas y calentadores eléctricos. Por tanto, se espera que la potencia entregada al alambre sea relativamente alta.

**Categorizar** Se evalúa la potencia a partir de la ecuación 26.22, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 26.7 para encontrar la corriente en el alambre: 
$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{120 \text{ V}}{8.00 \Omega} = 15.0 \text{ A}$$

Hallar la potencia nominal con la expresión  $P = I^2R$  de la ecuación 26.22: 
$$P = I^2R = (15.0 \text{ A})^2(8.00 \Omega) = 1.80 \times 10^3 \text{ W} = 1.80 \text{ kW}$$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si accidentalmente el calentador se conectara a una fuente de 240 V? (Difícil de hacerlo, porque la forma y orientación de los contactos metálicos en las clavijas de 240 V son diferentes en las clavijas de 120 V.) ¿Cómo afectaría esto a la corriente conducida por el calentador y a la potencia de especificación del calentador, suponiendo que la resistencia permanece constante?

**Respuesta** Al duplicar la diferencia de potencial aplicada, la ecuación 26.7 muestra que la corriente se duplicaría. De acuerdo con la ecuación 26.22,  $P = (\Delta V)^2/R$ , la potencia sería cuatro veces mayor.

### Ejemplo 26.5 Vinculación entre electricidad y termodinámica

Un calentador de inmersión debe aumentar la temperatura de 1.50 kg de agua de  $10.0^\circ\text{C}$  a  $50.0^\circ\text{C}$  en 10.0 minutos, mientras funciona a 110 V.

**(A)** ¿Cuál es la resistencia requerida del calentador?



## 26.5 continuación

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Un calentador de inmersión es un resistor que se inserta en un contenedor de agua. Conforme se entrega energía al calentador de inmersión, lo que eleva su temperatura, la energía deja la superficie del resistor por calor y va al agua. Cuando el calentador de inmersión alcanza una temperatura constante, la cantidad de energía entregada a la resistencia por transmisión eléctrica ( $T_{ET}$ ) es igual a la cantidad de energía entregada por calor ( $Q$ ) al agua.

**Categorizar** Este ejemplo permite vincular la nueva comprensión de la potencia en la electricidad con la experiencia con el calor específico de la termodinámica (capítulo 19). El agua es un *sistema no aislado* y su energía interna se eleva debido a la energía transferida al agua por calor proveniente del resistor, así que la ecuación 8.2 se reduce a  $\Delta E_{int} = Q$ . En el modelo, se supone que la energía que entra al agua desde el calentador permanece en el agua.

**Analizar** Para simplificar el análisis, ignore el periodo inicial durante el cual la temperatura del resistor aumenta e ignore también cualquier variación de la resistencia con la temperatura. En consecuencia, imagine una proporción constante de transferencia de energía durante los 10.0 minutos.

Igualé la tasa de energía entregada al resistor con la tasa de energía  $Q$  que entra al agua por calor:

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{Q}{\Delta t}$$

Use la ecuación 19.4,  $Q = mc\Delta T$ , para relacionar la entrada de energía por calor al cambio de temperatura resultante del agua y resuelva para la resistencia:

$$\frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{mc \Delta T}{\Delta t} \rightarrow R = \frac{(\Delta V)^2 \Delta t}{mc \Delta T}$$

Sustituya los valores conocidos en el enunciado del problema:

$$R = \frac{(110 \text{ V})^2(600 \text{ s})}{(1.50 \text{ kg})(4186 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(50.0^\circ\text{C} - 10.0^\circ\text{C})} = 28.9 \Omega$$

**(B)** Estime el costo de calentar el agua.

## SOLUCIÓN

Multiplique la potencia por el intervalo de tiempo para encontrar la cantidad de energía transferida al resistor:

$$\begin{aligned} T_{ET} = P \Delta t &= \frac{(\Delta V)^2}{R} \Delta t = \frac{(110 \text{ V})^2}{28.9 \Omega} (10.0 \text{ min}) \left( \frac{1 \text{ h}}{60.0 \text{ min}} \right) \\ &= 69.8 \text{ Wh} = 0.0698 \text{ kWh} \end{aligned}$$

Encuentre el costo al saber que la energía se compra a un precio estimado de 11¢ por kilowatt-hora:

$$\text{Cost} = (0.0698 \text{ kWh})(\$0.11/\text{kWh}) = \$0.008 = 0.8\text{¢}$$

**Finalizar** El costo de calentar el agua es muy bajo, menos de un centavo. En realidad, el costo es mayor porque parte de la energía se transfiere del agua a los alrededores mediante calor y radiación electromagnética mientras su temperatura aumenta. Si los aparatos eléctricos que tiene en casa tienen la potencia nominal en ellos, aplíquelas y establezca un intervalo de tiempo aproximado de uso para estimar el costo para uso del dispositivo.

## Resumen

## Definiciones

La **corriente eléctrica**  $I$  en un conductor se define como

$$I \equiv \frac{dQ}{dt} \quad (26.2)$$

donde  $dQ$  es la carga que pasa a través de una sección transversal del conductor en un intervalo de tiempo  $dt$ . La unidad del SI para corriente es el **ampere** (A), donde  $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$ .

La **densidad de corriente**  $J$  en un conductor es la corriente por unidad de área:

$$J \equiv \frac{I}{A} \quad (26.5)$$

La **resistencia**  $R$  de un conductor se define como

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I} \quad (26.7)$$

donde  $\Delta V$  es la diferencia de potencial a través del conductor e  $I$  es la corriente que conduce. La unidad del SI para resistencia es volts por ampere, que se define como 1 **ohm** ( $\Omega$ ); es decir:  $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$ .





## Conceptos y principios

La corriente promedio en un conductor se relaciona con el movimiento de los portadores de carga mediante la relación

$$I_{\text{avg}} = nqv_d A \quad (26.4)$$

donde  $n$  es la densidad de portadores de carga,  $q$  es la carga en cada portador,  $v_d$  es la rapidez de arrastre y  $A$  es el área de sección transversal del conductor.

Para un bloque uniforme de material, con área de sección transversal  $A$  y longitud  $\ell$ , la resistencia en toda la longitud  $\ell$  es

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (26.10)$$

donde  $\rho$  es la resistividad del material

La resistividad de un conductor varía de manera aproximadamente lineal con la temperatura, de acuerdo con la expresión

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (26.18)$$

donde  $\rho_0$  es la resistividad a cierta temperatura de referencia  $T_0$  y  $\alpha$  es el **coeficiente de temperatura de resistividad**.

La densidad de corriente en un conductor óhmico es proporcional al campo eléctrico de acuerdo con la expresión

$$J = \sigma E \quad (26.6)$$

La constante de proporcionalidad  $\sigma$  es la **conductividad** del material del conductor. El inverso de  $\sigma$  se conoce como **resistividad**  $\sigma$  (esto es,  $\rho = 1/\sigma$ ). La ecuación 26.6 se conoce como **ley de Ohm**, y un material obedece esta ley si la razón de su densidad de corriente a su campo eléctrico aplicado es una constante independiente del campo aplicado.

En un modelo clásico de conducción eléctrica en metales, los electrones se tratan como moléculas de un gas. En ausencia de un campo eléctrico, la velocidad promedio de los electrones es cero. Cuando se aplica un campo eléctrico, los electrones se mueven (en promedio) con una **velocidad de arrastre (entra)** que es opuesta al campo eléctrico. La velocidad de arrastre está dada por

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m_e} \tau \quad (26.13)$$

donde  $q$  es la carga del electrón,  $m_e$  es la masa del electrón y  $t$  es el intervalo de tiempo promedio entre colisiones electrón-átomo. De acuerdo con este modelo, la resistividad del metal es

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (26.16)$$

donde  $n$  es el número de electrones libres por unidad de volumen.

Si a través de un elemento de circuito se mantiene una diferencia de potencial  $\Delta V$ , la **potencia**, o rapidez a la que se suministra energía al elemento, es

$$P = I \Delta V \quad (26.21)$$

Ya que la diferencia de potencial a través de un resistor es conocido por  $\Delta V = IR$ , la potencia entregada al resistor se expresa como

$$P = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad (26.22)$$

La energía entregada a un resistor por transmisión eléctrica aparece en la forma de energía interna  $E_{\text{int}}$  en el resistor.

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN**  
From Cengage

1. Imagine un sistema operado por un motor de gasolina que opera una cinta transportadora. La cinta lleva pelotas de baloncesto a la cima de una colina. En la parte superior, las pelotas de baloncesto se tiran y ruedan cuesta abajo. Ruedan a una velocidad aproximadamente constante debido a las continuas colisiones que las pelotas hacen con los árboles, la hierba y los arbustos en el camino de descenso. La velocidad promedio de las pelotas cuesta abajo es la misma con la que se mueven en la cinta transportadora. En la parte inferior de la colina, las pelotas llegan a la cinta transportadora y son llevadas de nuevo a la parte superior. Imagine que este sistema es una analogía mecánica del circuito eléctrico en la figura 26.11. Discuta en su grupo lo siguiente: En

el sistema mecánico, ¿cuál es el análogo de (a) la resistencia, (b) la batería, (c) los electrones en los cables, (d) el campo eléctrico en los cables, y (e) el voltaje del terminal de la batería. (f) ¿Cuál es la analogía de la situación en la que la batería eventualmente se queda sin energía? (g) Escriba la reducción apropiada de la ecuación 8.2 para el sistema de la cinta transportadora, las pelotas de baloncesto y la Tierra (excluyendo la atmósfera) y un intervalo de tiempo desde antes de que se encienda el sistema (y todas las pelotas de baloncesto están en la parte inferior de la colina) hasta unos minutos después de que se enciende. Ignore la resistencia del aire en las pelotas de baloncesto. (h) Escriba la ecuación el inciso (g) para un intervalo de tiempo bien después de que el sistema se encienda y la temperatura del sistema se haya estabilizado. Compare la ecuación con la ecuación de energía análoga para el circuito en la figura 26.11 y comente sobre la comparación. (i) En el inciso (g),



se menciona que todas las pelotas de baloncesto comienzan en la parte inferior de la colina cuando el sistema se enciende por primera vez. ¿Cómo no es esto análogo al circuito en la figura 26.11?

2. **ACTIVIDAD** Con su grupo, considere la siguiente tabla que muestra datos de voltaje y corriente para dos dispositivos eléctricos diferentes. ¿Cuál de los dispositivos obedece la ley de Ohm?

Voltaje aplicado en el dispositivo (V)	Corriente en el dispositivo 1 (A)	Corriente en el dispositivo 2 (A)
1.00	0.123	0.123
2.00	0.249	0.250
3.00	0.365	0.389
4.00	0.486	0.545
5.00	0.621	0.701
6.00	0.745	0.909
7.00	0.854	1.230
8.00	0.984	1.550
9.00	1.102	1.719
10.0	1.241	1.747

3. La relación de la carga eléctrica a la masa de un electrón,  $e/m_e$ , se midió en 1897 por J.J. Thomson usando un tubo de rayos catódicos. (Consulte la sección 28.3.) Otra forma de encontrar esta relación es mediante el experimento de *Tolman-Stewart*. En este experimento, una bobina que consiste en un número  $N$  de vueltas circulares de alambre se hace girar a una velocidad angular constante  $\omega_0$  alrededor de un eje perpendicular al plano de la bobina y que pasa a través del centro común de las vueltas. Debido a que los electrones en la bobina se transportan alrededor de una trayectoria circular, hay una corriente  $I_0$  asociada con el movimiento de los electrones. A continuación, la bobina se detiene rápidamente y la cantidad de carga que pasa a través de una porción de la bobina que contiene todos los  $N$  giros durante la detención de la bobina se mide mediante un aparato especializado. Debido a que los electrones no están unidos a los átomos, seguirán girando durante un intervalo de tiempo muy corto después de detener la bobina hasta que hagan suficientes colisiones para que su movimiento sea aleatorio. Con su grupo, siga los pasos descritos aquí para encontrar una expresión de la relación carga/masa del electrón. (a) Suponga que la corriente disminuye exponencialmente con el tiempo cuando la bobina se detiene:  $I = I_0 e^{-bt}$ , donde  $b$  es un parámetro desconocido. Encuentre la carga total  $Q$ , en términos de  $I_0$  y  $b$ , que pasa a través de un dispositivo de medición ubicado en alguna posición alrededor del anillo circular desde  $t = 0$  cuando la rotación comienza a disminuir hasta  $t = \infty$ . (b) Encuentre el cambio  $\Delta E_{int}$  en energía interna de la bobina de  $N$  vueltas, debido a la corriente y la resistencia  $R$  en el anillo durante el proceso de ralentización desde  $t = 0$  a  $t = \infty$ . Expresé el cambio en términos de  $N$ ,  $I_0$ ,  $R$  y  $Q$ . (c) Encuentre el cambio en la energía cinética de todos los electrones en la bobina a medida que se ralentiza, en términos de  $m$ ,  $r$  y  $v_0$ , donde  $m$  es el masa de todos los electrones en la bobina y  $r$  es el radio de la bobina. (d) De la ecuación 8.2, la ecuación de energía para el sistema de la bobina de  $t = 0$  a  $t = \infty$  es  $\Delta K + \Delta E_{int} = 0$ , donde imaginamos que la bobina se detiene esencialmente de inmediato por un freno ubicado en algún punto del circunferencia de

la bobina. Aunque la bobina misma se detiene, solo nos interesan los electrones de la bobina. Al detener la bobina de inmediato, no trabajamos en la bobina que podría aumentar su energía interna más allá de eso debido a las colisiones de los electrones con los átomos reticulares. Sustituya sus resultados de los incisos (b) y (c) en esta forma reducida de la ecuación 8.2. Con la ayuda de la ecuación 26.4, resuelva la ecuación en el inciso (d) para hallar la relación  $e/m_e$  en términos de  $r$ ,  $v_0$ ,  $R$  y  $Q$ . Todas estas cantidades se pueden medir en el experimento.

4. **ACTIVIDAD** El alambre activo que se usará en edificios y hogares en Estados Unidos está estandarizado de acuerdo con el sistema AWG (American Wire Gauge). A los alambres se les asigna un número de calibre según su diámetro. La escala varía entre el calibre 0000 y el calibre 36. La tabla siguiente muestra una parte de la tabla de datos para calibres de cable. En un hogar, un circuito de 15 A generalmente se construye con alambre de cobre calibre 14, mientras que un circuito de 20 A usa un alambre de cobre calibre 12. Estos números están indicados por la columna titulada "Ampacidad", que es una versión abreviada de "capacidad de amperes", o la corriente segura más alta que puede transportarse mediante el cable.

Calibre del cable	Diámetro (mm)	(Alambre de cobre) Ampacidad (A)	(Alambre de cobre) Resistencia por unidad de longitud ( $m\Omega/m$ )
1	7.348	110	0.406 6
2	6.544	95	0.512 7
3	5.827	85	0.646 5
4	5.189	70	0.815 2
5	4.621		1.028
6	4.115	55	1.296
7	3.665		1.634
8	3.264	40	2.061
9	2.906		2.599
10	2.588	30	3.277
11	2.305		4.132
12	2.053	20	5.211
13	1.828		6.571
14	1.628	15	8.286
15	1.450		10.45

En su grupo, realice las siguientes actividades relacionadas con estos datos. (a) A partir de los datos, determine la resistividad del cobre. Compare con el valor en la tabla 26.2. (b) No hay una relación lineal entre el calibre del cable y el diámetro del cable. Encuentre una ecuación que relacione el calibre del cable con el logaritmo (base 10) del diámetro. (c) Un gráfico de ampacidad versus diámetro del cable es aproximadamente una línea recta. Pero una combinación de las ecuaciones 26.7 y 26.10 muestra que la corriente es proporcional al cuadrado del diámetro del cable. ¿Qué argumento puede hacer para que esta ecuación se pueda modificar de modo que la máxima corriente de seguridad sea proporcional al diámetro? Recuerde que la ampacidad es la mayor corriente de seguridad y la principal preocupación acerca de las altas corrientes en los cables en un aumento de su temperatura, lo que podría causar un incendio.



# Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

## SECCIÓN 26.1 Corriente eléctrica

- Una línea de transmisión de alto voltaje de 2.00 cm de diámetro y 200 km de largo transporta una corriente constante de 1000 A. Si el conductor es de cobre con una densidad de carga libre de  $8.50 \times 10^{28}$  electrones por metro cúbico, ¿cuántos años le toma a un electrón recorrer toda la longitud del cable?
- Una pequeña esfera que tiene una carga  $q$  se hace girar en círculo en el extremo de un hilo aislante. La frecuencia angular de rotación es  $f$ . ¿Qué corriente promedio representa esta carga en rotación?
- En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno (que se tratará en detalle en el capítulo 41), un electrón en el estado más bajo de energía se mueve a una velocidad de  $2.19 \times 10^6$  m/s en una trayectoria circular de radio  $5.29 \times 10^{-11}$  m. ¿Cuál es la corriente efectiva asociada con este electrón en órbita?
- Un alambre de cobre tiene una sección transversal circular con un radio de 1.25 mm. (a) Si el alambre transporta una corriente de 3.70 A, encuentre la rapidez de arrastre de los electrones en este alambre. (b) Todo lo demás es igual, ¿qué ocurre con la rapidez de arrastre en los alambres hechos de un metal que tiene un mayor número de electrones de conducción por átomo que el cobre? Explique.
- Suponga que la corriente que pasa por un conductor se reduce de manera exponencial en función del tiempo, de acuerdo con la ecuación  $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ , donde  $I_0$  es la corriente inicial (en  $t = 0$ ), y  $\tau$  es una constante que tiene dimensiones de tiempo. Considere un punto de observación fijo dentro del conductor. (a) ¿Cuánta carga pasa por este punto en el intervalo de tiempo entre  $t = 0$  y  $t = \tau$ ? (b) ¿Cuánta carga pasa por este punto en el intervalo de tiempo entre  $t = 0$  y  $t = 10\tau$ ? (c) ¿Qué pasaría si? ¿Cuánta carga pasa por este punto en el intervalo de tiempo entre  $t = 0$  y  $t = \infty$ ?
- La figura P26.6 representa una sección de un conductor circular de diámetro no uniforme que porta una corriente de  $I = 5.00$  A. El radio de la sección transversal  $A_1$  es  $r_1 = 0.400$  cm. (a) ¿Cuál es la magnitud de la densidad de corriente a través de  $A_1$ ? El radio  $r_2$  en  $A_2$  es mayor que el radio  $r_1$  en  $A_1$ . (b) ¿La corriente en  $A_2$  es mayor, menor o igual? (c) ¿La densidad de corriente en  $A_2$  es mayor, menor o la misma? Suponga  $A_2 = 4A_1$ . Especifique (d) el radio, (e) la corriente y (f) la densidad de corriente en  $A_2$ .

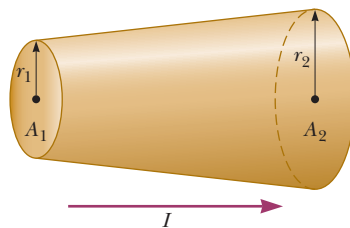


Figura P26.6

a través de la superficie en  $t = 1.00$  s? (b) ¿Cuál es el valor de la densidad de corriente?

- Un generador Van de Graaff (véase el problema 24) produce un haz de 2.00 MeV de deuterones, que son los núcleos pesados de hidrógeno que contienen un neutrón y un protón. (a) Si la corriente del haz es de  $10.0 \mu\text{A}$ , ¿cuál es la separación promedio de los deuterones? (b) ¿Es un factor significativo en la estabilidad del haz la fuerza de repulsión eléctrica presente entre ellos? Explique por qué.
- Una corriente eléctrica en un conductor varía con el tiempo de acuerdo con la expresión  $I(t) = 100 \sin(120\pi t)$ , donde  $I$  está en amperes y  $t$  en segundos. ¿Cuál es la carga total que genera esta corriente de  $t = 0$  hasta  $t = \frac{1}{240}$  s?

## SECCIÓN 26.2 Resistencia

- Un alambre de 50.0 m de longitud y 2.00 mm de diámetro está conectado a una fuente con una diferencia de potencial de 9.11 V y la corriente es 36.0 A. Suponga una temperatura de  $20.0^\circ\text{C}$  y, utilizando la tabla 26.2, identifique el metal que está hecho el alambre.
- Un calentador eléctrico lleva una corriente de 13.5 A cuando funciona a un voltaje de 120 V. ¿Cuál es la resistencia del calentador?
- Está trabajando en una empresa que fabrica cables eléctricos. El oro es el más dúctil de todos los metales: se puede estirar en alambres increíblemente largos y delgados. La compañía ha desarrollado una nueva técnica que estirará 1.00 g de oro en un cable de longitud  $L = 2.40$  km y diámetro uniforme. Su supervisor le da la tarea de determinar la resistencia de dicho cable a  $20.08^\circ\text{C}$ .
- Suponga que desea fabricar un alambre uniforme a partir de 1.00 g de cobre. Si el alambre debe tener una resistencia  $R = 0.500 \Omega$ , y si debe utilizarse todo el cobre disponible, ¿cuál será (a) la longitud y (b) el diámetro de este alambre?
- Suponga que desea fabricar un alambre uniforme de una masa  $m$  de un metal con densidad  $\rho_m$  y resistividad  $\rho$ . Si el alambre tiene una resistencia  $R$  y todo el metal se va a utilizar, ¿cuál debe ser (a) la longitud y (b) el diámetro de este alambre?

## SECCIÓN 26.3 Modelo de conducción eléctrica

- Una densidad de corriente de  $6.00 \times 10^{-13}$  A/m<sup>2</sup> existe en la atmósfera en una ubicación donde el campo eléctrico es 100 V/m. Calcule la conductividad eléctrica de la atmósfera de la Tierra en esta región.
- Un alambre de hierro tiene un área de sección transversal igual a  $5.00 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>. Ejecute los pasos siguientes para determinar la rapidez de arrastre de los electrones de conducción en el alambre si lleva una corriente de 30.0 A. (a) ¿Cuántos kilogramos hay en 1.00 mol de hierro? (b) A partir de la densidad del hierro y el resultado del inciso (a), calcule la densidad molar de hierro (el número de moles de hierro por metro cúbico). (c) Calcule la densidad del número de átomos de hierro utilizando el número de Avogadro. (d) Obtenga la densidad del número de electrones de conducción dado que hay dos electrones de conducción por átomo de hierro. (e) Calcule la rapidez de arrastre de los electrones de conducción en este alambre.



## SECCIÓN 26.4 Resistencia y temperatura

17. ¿Cuál es la razón de cambio en la resistencia de un filamento de hierro cuando su temperatura pasa de  $25.0\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $50.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?
18. Cierta foca tiene un filamento de tungsteno con una resistencia de  $19.0\ \Omega$  cuando está a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  y de  $140\ \Omega$  cuando está caliente. Suponga que la resistividad del tungsteno varía linealmente con la temperatura, incluso en el amplio intervalo de temperaturas que aquí se mencionan. Determine la temperatura del filamento caliente.
19. Un alambre de aluminio con un diámetro de  $0.100\text{ mm}$  tiene aplicado en toda su longitud un campo eléctrico uniforme de  $0.200\text{ V/m}$ . La temperatura del alambre es de  $50.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Suponga que sólo existe un electrón libre por cada átomo. (a) Utilice la información de la tabla 26.2 para determinar la resistividad del aluminio a esta temperatura. (b) ¿Cuál es la densidad de corriente en el alambre? (c) ¿Cuál es la corriente total en el alambre? (d) ¿Cuál es la rapidez de arrastre de los electrones de conducción? (e) ¿Cuál es la diferencia de potencial que debe existir entre los extremos de un alambre  $2.00\text{ m}$  de longitud para producir el campo eléctrico establecido?
20. Los Pletismógrafos son dispositivos utilizados para la medición de los cambios en el volumen de órganos o miembros internos. En una forma de este dispositivo, un tubo capilar de goma con un diámetro interior de  $1.00\text{ mm}$  se llena con mercurio a  $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . La resistencia del mercurio se mide con la ayuda de electrodos sellados en los extremos del tubo. Si  $100\text{ cm}$  del tubo se enrollan en una hélice alrededor del brazo superior de un paciente, el flujo de sangre durante un latido del corazón hace que el brazo se expanda, estirando la longitud del tubo por  $0.0400\text{ cm}$ . A partir de esta observación y suponiendo simetría cilíndrica, puede determinar el cambio en el volumen del brazo, lo que da una idea del flujo sanguíneo. Tomando la resistividad del mercurio como  $9.58 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot \text{m}$ , calcule (a) la resistencia del mercurio y (b) la fracción de cambio en la resistencia durante el latido del corazón. *Pista:* La fracción en la que el área de sección transversal de la columna de mercurio disminuye es la fracción por la cual la longitud aumenta debido a que el volumen de mercurio es constante.
21. ¿A qué temperatura el aluminio tiene una resistividad que es tres veces la resistividad del cobre a temperatura ambiente?
22. Está trabajando en un laboratorio que estudia los efectos de las corrientes en varios cristales. Uno de los experimentos implica un requisito para una corriente constante de  $I = 0.500\text{ A}$  en un cable que entrega la corriente al cristal. Tanto el cable como el cristal se encuentran en una cámara cuya temperatura interior  $T$  variará de  $240.08\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $1508\text{ }^{\circ}\text{C}$ . El cable está hecho de tungsteno y es de longitud  $L = 25.0\text{ cm}$  y radio  $r = 1.00\text{ mm}$ . Se está realizando una prueba antes de agregar el cristal al circuito. Su supervisor le pide que determine el rango de voltajes que debe suministrar al cable en la prueba para mantener su corriente a  $0.500\text{ A}$ .

## SECCIÓN 26.6 Energía eléctrica

23. Suponga que un relámpago global sobre la Tierra constituye una corriente constante de  $1.00\text{ kA}$  entre el suelo y una capa atmosférica a un potencial de  $300\text{ kV}$ . (a) Determine la potencia de los relámpagos terrestres. (b) Por comparación, encuentre la potencia de la luz solar que cae sobre la Tierra. La luz solar tiene una intensidad de  $1370\text{ W/m}^2$  por encima

de la atmósfera. La luz del sol cae perpendicularmente sobre el área circular proyectada que la Tierra presenta al sol.

24. Un generador Van de Graaff, diagramado en la figura 26.24, es un dispositivo electrostático que puede elevar el domo metálico a un alto voltaje. La cúpula de un generador de este tipo se ve a la izquierda en la figura 22.1a. En el dispositivo, la carga se entrega continuamente al domo de alto potencial por medio de una correa móvil de material aislante. La correa se carga en el punto A por medio de una descarga entre agujas metálicas tipo peine y una rejilla conectada a tierra. Las agujas se mantienen a un potencial eléctrico positivo de típicamente  $104\text{ V}$ . La carga positiva en la cinta en movimiento se transfiere a la cúpula mediante un segundo peine de agujas en el punto B. Debido a que el campo eléctrico dentro del domo es insignificante, la carga positiva en el cinturón se transfiere fácilmente al domo desde su interior, independientemente de su potencial. Suponga que el generador está funcionando de forma tal que la diferencia de potencial entre el electrodo de alto potencial B y las agujas de carga en A es de  $15.0\text{ kV}$ . Calcule la energía necesaria para impulsar la banda en contra de fuerzas eléctricas en un instante en el cual la corriente efectiva entregada al electrodo de alto potencial es de  $500\ \mu\text{A}$ .

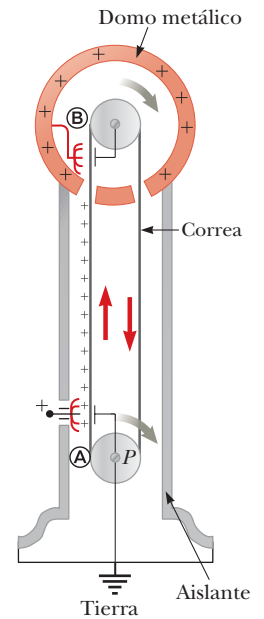


Figura P26.24

25. Un foco de  $100\text{ W}$  conectado a una fuente de  $120\text{ V}$  experimenta un aumento de voltaje que produce  $140\text{ V}$  por un momento. ¿En qué porcentaje aumenta su potencia? Asuma que su resistencia no cambia.
26. La diferencia de potencial a través de una neurona en reposo en el cuerpo humano es de aproximadamente  $75.0\text{ mV}$  y transporta una corriente de aproximadamente  $0.200\text{ mA}$ . ¿Cuánta potencia libera la neurona?
27. El costo de la energía suministrada a los hogares por transmisión eléctrica varía de  $\$0.070/\text{kWh}$  a  $\$0.258/\text{kWh}$  en Estados Unidos, siendo  $\$0.110/\text{kWh}$  el valor promedio. A este precio promedio, calcule el costo de (a) dejar encendida la luz de  $40.0\text{ W}$  del porche durante dos semanas mientras está de vacaciones, (b) hacer un pedazo de pan tostado oscuro con una tostadora de  $970\text{ W}$  durante  $3.00$  minutos, y (c) secar una carga de ropa en  $40.0$  minutos en un secador de  $5.20 \times 10^3\text{ W}$ .
28. Los reglamentos de construcción para residencias requieren el uso de alambre de cobre calibre 12 (diámetro  $0.205\text{ cm}$ ) para cablear los contactos de pared. Estos circuitos llevan corrientes de hasta  $20\text{ A}$ . Un alambre con un diámetro menor (de un calibre superior), podría llevar una corriente similar, pero el alambre se podría calentar a una temperatura elevada y causar un incendio. (a) Calcule la rapidez a la cual se produce energía interna en  $1.00\text{ m}$  de alambre de cobre calibre 12 que lleva una corriente de  $20.0\text{ A}$ . (b) ¿Qué pasaría si? Repita el cálculo, pero para un alambre de aluminio del mismo calibre. (c) Explique si un alambre de aluminio calibre 12 sería tan seguro como el de cobre.



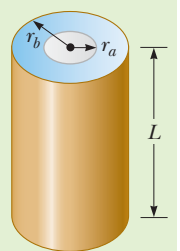
- 29.** Suponiendo que el costo de la energía de la compañía eléctrica es \$0.110/kWh, calcule el costo por día de operación de una lámpara que consume una corriente de 1.70 A a partir de una línea de 110 V.
- 30.** Una lámpara fluorescente ahorradora de energía de 11.0 W está diseñada para producir la misma iluminación que una lámpara incandescente convencional de 40 W. Suponiendo que la compañía eléctrica cobra \$0.110/kWh. ¿Cuánto ahorra el usuario de la lámpara ahorradora de energía durante 100 horas de uso?
- 31.** Una bobina calefactora de 500 W, diseñada para funcionar a 110 V, está hecha de alambre de nicromo de 0.500 mm de diámetro. (a) Si la resistividad del nicromo se mantiene constante a 20.0 °C, determine la longitud del alambre utilizado. (b) **¿Qué pasaría si?** Ahora considere la variación de la resistividad en función de la temperatura. ¿Cuál será la potencia que se da a la bobina del inciso (a) cuando se calienta a 1200 °C?
- 32.** *¿Por qué no es posible la siguiente situación?* Un político está denunciando usos despilfarradores de energía y decide centrarse en la energía utilizada para hacer funcionar relojes eléctricos en Estados Unidos. Se estima que hay 270 millones de estos relojes, aproximadamente un reloj para cada persona de la población. Los relojes transforman la energía tomada por transmisión eléctrica a la tasa promedio 2.50 W. El político da un discurso en el que se queja de que, con las tarifas eléctricas de hoy, la nación está perdiendo \$ 100 millones cada año por operar estos relojes.
- 33.** Hacer una estimación de orden de magnitud del costo de usar diario una secadora de pelo durante un año. Si usted no utiliza una secadora, observe o entreviste a alguien que la use. Enuncie las cantidades que estime y sus valores.

**PROBLEMAS ADICIONALES**

- 34.** Una lámpara A está marcada como “25 W 120 V” y otra lámpara B como “100 W 120 V”; esto significa que cuando cada lámpara esté conectada a una diferencia de potencial constante de 120 V, recibirá cada una la potencia que se indica. (a) Encuentre el valor de la resistencia de cada lámpara. (b) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que pase 1.00 C a través de la lámpara A? (c) ¿Ha cambiado la carga en alguna forma a su salida de la lámpara en comparación con su entrada? Explique (d) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que pase 1.00 J a través de la lámpara A? (e) ¿Mediante qué mecanismos entra y sale esta energía de la lámpara? Explique (f) Determine cuánto cuesta mantener encendida la lámpara A durante 30 días, si la empresa eléctrica vende su producto a \$0.110 0 por kWh.
- 35.** Un cable en una línea de transmisión de alto voltaje lleva 1 000 A iniciando en 700 kV por una distancia de 100 millas. Si la resistencia en el cable es 0.500 Ω/mi, ¿cuál es la pérdida de potencia debido a la resistencia del cable?

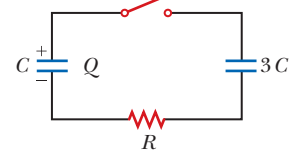
**36.** Está trabajando con una oceanógrafa que está estudiando cómo la concentración de iones en el agua de mar depende de la profundidad. Ella le muestra el dispositivo que usa para medir la resistividad del agua de un bote y que consiste en un par de cilindros metálicos concéntricos en el extremo de un cable (figura P26.36). El agua de mar fluye libremente entre las dos cubiertas cilíndricas. Ella realiza una medición bajando el dispositivo al agua y aplicando una diferencia de potencial ΔV entre los cilindros interno y externo. Esto produce una corriente radial hacia afuera I en el agua de

mar entre las conchas. Ella le muestra los datos actuales y de voltaje para el agua a una profundidad particular y luego los llama para responder una larga llamada en su teléfono celular sobre un problema de laboratorio en el continente. Cuando se marcha, dice: "Ten calculada la resistividad del agua para cuando regrese", pero olvidó mostrarle tablas o fórmulas para determinar la resistividad, por lo que está solo. ¡Rápido! ¡Encuentre una expresión para la resistividad en términos de I y ΔV antes de que termine su llamada telefónica!



**Figura P26.36**

- 37.** En un capacitor de capacitancia C se coloca una carga Q. El capacitor está conectado en el circuito que se muestra en la figura P26.37, junto con un interruptor abierto, un resistor y un capacitor inicialmente descargado con una capacitancia de 3C. Después se cierra el interruptor y el circuito se equilibra. Determine, en función de Q y de C, (a) la diferencia de potencial final entre las placas de cada capacitor, (b) la carga de cada capacitor, y (c) la energía final almacenada en cada capacitor. (d) Determine la energía interna que aparece en el resistor.



**Figura P26.37**

- 38.** Con la finalidad de medir la resistividad eléctrica del nicromo se lleva a cabo un experimento con alambres de diferentes longitudes y áreas de sección transversal. Para un conjunto de mediciones, el estudiante usa alambre de calibre 30, que tiene un área de sección transversal de  $7.30 \times 10^{-8} \text{ m}^2$ . El estudiante mide la diferencia de potencial de un extremo a otro del alambre, así como la corriente en el mismo, utilizando un voltímetro y un amperímetro, respectivamente. (a) Para cada una de las mediciones que aparecen en la tabla, calcule la resistencia de los alambres y los valores correspondientes de la resistividad. (b) ¿Cuál es el valor promedio de la resistividad?, (c) explique cómo se compara este valor con el valor incluido en la tabla 26.2.

L (m)	ΔV (V)	I (A)	R (Ω)	ρ (Ω · m)
0.540	5.22	0.72		
1.028	5.82	0.414		
1.543	5.94	0.281		

- 39.** Un alambre cilíndrico recto que yace a lo largo del eje x tiene una longitud de 0.500 m y un diámetro de 0.200 mm. Está fabricado de un material que obedece la ley de Ohm con una resistividad  $\rho = 4.00 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Suponga que se mantiene en  $x = 0$  un potencial de 4.00 V, y que en  $x = 0.500 \text{ m}$ ,  $V = 0$ . Determine (a) la magnitud y dirección del campo eléctrico en el alambre, (b) la resistencia del mismo, (c) la magnitud y la dirección de la corriente eléctrica que pasa por el alambre y (d) la densidad de corriente J en el alambre. (e) Demuestre que  $E = \rho j$ .
- 40.** Un alambre cilíndrico recto que yace a lo largo del eje x tiene una longitud L y un diámetro d. Está fabricado de un material que obedece la ley de Ohm y tiene una resistividad ρ. Suponga que en  $x = 0$  se mantiene un potencial V y que el potencial es igual a cero en  $x = L$ . Deduzca, en función de L, d, V y ρ, así como otras constantes físicas, expresiones para (a) la magnitud y dirección del campo eléctrico en el alambre, (b) la resistencia del mismo, (c) la magnitud y dirección de la





corriente eléctrica que pasa por el alambre y (d) la densidad de corriente en el alambre (e) Demuestre que  $E = \rho J$ .

41. **Problema de repaso.** Un oficinista usa un calentador de inmersión para calentar 250 g de agua en una taza aislada, cubierta y ligera de 20.0 °C a 100 °C en 4.00 minutos. En términos eléctricos, el calentador es un alambre de resistencia de nicromo conectado a una fuente de poder de 120 V. Puede suponer que el alambre está a 100 °C durante un intervalo de tiempo de 4.00 min. (a) Especifique una relación entre el diámetro y longitud que puede tener el alambre. (b) ¿Puede estar hecho con menos de 0.500 cm<sup>3</sup> de nicromo?

42. La deformación en un alambre puede ser monitoreada y calculada al medir la resistencia del alambre. Sea  $L_i$  la longitud original del alambre,  $A_i$  su área de sección transversal original,  $R_i = \rho L_i/A_i$  la resistencia original entre sus extremos, y  $\Delta = \Delta L/L_i = (L - L_i)/L_i$  la deformación resultante de la aplicación de voltaje. Suponga que la resistividad y el volumen del alambre no cambian conforme el alambre se estira. (a) Demuestre que la resistencia entre los extremos del alambre bajo deformación está dada por  $R = R_i (1 + 2\delta + \delta^2)$ . (b) Si las suposiciones son precisamente ciertas, ¿este resultado es exacto o aproximado? Explique su respuesta.

43. Existe una cercana analogía entre el flujo de energía por calor debido a una diferencia de temperaturas (vea la sección 19.6) y el flujo de cargas eléctricas debido a una diferencia de potencial. Tanto la energía  $dQ$  como la carga eléctrica  $dq$  pueden transportarse mediante electrones libres en el material conductor. En consecuencia, usualmente un buen conductor eléctrico es también un buen conductor térmico. Considere una placa conductora delgada de espesor  $dx$ , área  $A$  y de conductividad eléctrica  $\sigma$ , con a una diferencia de potencial  $dV$  entre sus caras opuestas. (a) Demuestre que la corriente  $I = dq/dt$  se conoce por la ecuación de la izquierda:

Conducción de carga      Conducción térmica

$$\frac{dq}{dt} = \sigma A \left| \frac{dV}{dx} \right| \qquad \frac{dQ}{dt} = kA \left| \frac{dT}{dx} \right|$$

En la ecuación de conducción térmica análoga de la derecha, (ecuación 19.17) la rapidez del flujo de energía  $dQ/dt$  (en unidades del SI es joules por segundo) se debe al gradiente de temperatura  $dT/dx$ , en un material de conductividad térmica  $k$ . (b) Establezca reglas similares que relacionen la dirección de la corriente eléctrica con el cambio en el potencial, y que relacionen la dirección del flujo de energía con el cambio en temperaturas.

44. El material dieléctrico que existe entre las placas de un capacitor de placas paralelas tiene siempre alguna conductividad  $\sigma$  diferente de cero. Suponga que  $A$  representa el área de cada placa y  $d$  la distancia entre ellas. Sea  $\kappa$  la constante dieléctrica del material. (a) Demuestre que la resistencia  $R$  y la capacitancia  $C$  del capacitor están interrelacionadas mediante

$$RC = \frac{\kappa \epsilon_0}{\sigma}$$

(b) Determine la resistencia entre las placas de un capacitor de 14.0 nF con un dieléctrico de cuarzo fundido.

45. **Problema de repaso.** Un capacitor de placas paralelas está constituido por placas cuadradas de bordes de longitud  $\ell$  separadas una distancia  $d$ , donde  $d \ll \ell$ . Entre las placas se mantiene una diferencia de potencial  $\Delta V$ . Un material de constante dieléctrica  $\kappa$  llena la mitad del espacio entre las placas. Ahora la placa dieléctrica se retira del capacitor,

como se observa en la figura P26.45. (a) Determine la capacitancia cuando el borde izquierdo del material dieléctrico esté a una distancia  $x$  del centro del capacitor. (b) Si se va retirando el dieléctrico a una rapidez constante  $v$ , ¿cuál será la corriente en el circuito conforme se retira el dieléctrico?

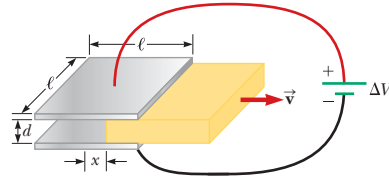


Figura P26.45

46. La curva característica corriente-voltaje de un diodo semiconductor en función de la temperatura  $T$  está dada por la ecuación

$$I = I_0 (e^{e\Delta V/k_B T} - 1)$$

En este caso, el primer símbolo  $e$  representa el número de Euler, es decir, la base de los logaritmos naturales, la segunda  $e$  es la magnitud de carga de un electrón;  $k_B$  representa la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura absoluta. (a) Disponga de una hoja de cálculo para calcular  $I$  y  $R = \Delta V/I$  para  $V = 0.400$  V a 0.600 V, en incrementos de 0.005 V. Suponga que  $I_0 = 1.00$  nA. (b) Grafique  $R$  en función de  $\Delta V$  para  $T = 280$  K, 300 K y 320 K.

47. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un inquisitivo estudiante de física retira un foco incandescente de 100 W de su enchufe y mide su resistencia con un óhmetro. La lectura es 10.5  $\Omega$ . El estudiante conecta un amperímetro en el enchufe del foco para medir correctamente la corriente consumida por éste durante su funcionamiento. Inserta de nuevo el foco en el enchufe y lo hace funcionar con una fuente de 120 V, midiendo una corriente de 11.4 A.

### PROBLEMAS DE DESAFÍO

48. Una definición más general del coeficiente de resistividad por temperatura es

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$$

donde  $\rho$  es la resistividad a la temperatura  $T$ . (a) Si  $\alpha$  es constante, demuestre que

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha(T - T_0)}$$

donde  $\rho_0$  es la resistividad a la temperatura  $T_0$ . (b) Utilizando la expansión en serie  $e^x \approx 1 + x$  para  $x \ll 1$ , demuestre que la resistividad está dada aproximadamente por la expresión

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \text{ para } \alpha(T - T_0) \ll 1$$

49. Un cascarón esférico, con radio interior  $r_a$  y radio exterior  $r_b$ , se forma a partir de un material de resistividad  $\rho$ . Portacorriente radialmente, con densidad uniforme en todas direcciones. Demuestre que su resistencia es

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

50. Un material con una resistividad uniforme  $\rho$  se modela en forma de cuña como se muestra en la figura P26.50. Demuestre que la resistencia entre la cara A y la cara B de esta cuña es igual a

$$R = \rho \frac{L}{w(y_2 - y_1)} \ln \frac{y_2}{y_1}$$

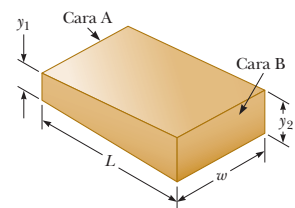


Figura P26.50



Un pájaro descansa posado en un cable de alto voltaje ¿por qué el ave está a salvo de una electrocución? (Hydromet/Shutterstock)

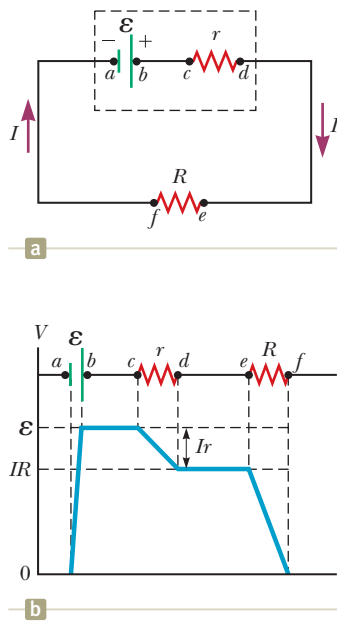
## **IMAGINE** Está haciendo su tarea un sábado y nota que el cielo se está

oscureciendo. Mira por la ventana y se sorprende de ver una rara exhibición de rayos en California. Llama con entusiasmo a su tío ingeniero eléctrico en Florida, con quien tuvo discusiones previas. Le dice que va a salir a un campo abierto y observar el rayo. Él le dice que es peligroso ser el punto más alto en un campo abierto porque podrías ser golpeado por un rayo. Usted explica que si el rayo se acerca, se acostará en el suelo para estar seguro. Él dice: "¡Oh, no, no hagas eso! ¡Después de todo, las vacas mueren por un rayo con más frecuencia que las gallinas! Desconcertado, comienza a preguntarse qué quiere decir, pero luego lo llama su tía y él debe colgar. ¿Qué significaba su comentario incomprensible? Mientras contempla esta pregunta, mira por la ventana y ve a un pájaro posado en una línea de alto voltaje. Ahora, ¿por qué no se electrocuta esa ave? ¿Debería pensar sobre eso, o salir al campo y mirar el rayo?

**CONEXIONES** En capítulos anteriores, hemos introducido dos tipos de elementos de circuito: condensadores y resistencias. Podemos combinar estos elementos con baterías para formar una variedad de circuitos eléctricos, que analizamos en este capítulo. Presentamos por primera vez los diagramas de circuitos en la sección 25.3. En este capítulo, haremos un uso frecuente de diagramas de circuitos para ayudarnos a comprender el comportamiento de circuitos más complejos. Algunos circuitos que contienen resistencias múltiples se pueden combinar usando reglas simples. El análisis de circuitos más complicados se simplifica utilizando las reglas de Kirchhoff, que se desprenden de las leyes de conservación de energía y conservación de carga eléctrica para sistemas aislados. Se supone que la mayoría de los circuitos analizados están en estado estable, lo que significa que las corrientes en el circuito son constantes en magnitud y dirección. Una corriente que es constante en la dirección se denomina *corriente directa* (CD). Estudiaremos la *corriente alterna* (CA), en la cual la corriente cambia de dirección periódicamente, en el capítulo 32.

- 27.1 Fuerza electromotriz
- 27.2 Resistores en serie y en paralelo
- 27.3 Leyes de Kirchhoff
- 27.4 Circuitos *RC*
- 27.5 Cableado doméstico y seguridad eléctrica





**Figura 27.1** (a) Diagrama de un circuito de una fuente de fem  $\mathcal{E}$  (en este caso, una batería), de resistencia interna  $r$ , conectada a un resistor externo, de resistencia  $R$ . (b) Representación gráfica que muestra cómo cambia el potencial eléctrico conforme recorremos el circuito en (a) en la dirección de las manecillas del reloj.

## 27.1 Fuerza electromotriz

Considere el circuito simple que se muestra en la figura 26.11 (página 703). Este circuito es fácil de analizar. Supongamos que ampliamos este circuito agregando otra resistencia, otra batería y, posiblemente, uno o más condensadores. Ahora puede no parecer tan fácil de analizar. Sigamos en nuestro viaje para ver cómo analizar este tipo de circuitos.

Por lo general, en esta explicación se utiliza una batería como fuente de energía. Ya que en un circuito particular la diferencia de potencial en las terminales de la batería es constante, la corriente en el circuito es constante en magnitud y dirección y recibe el nombre de **corriente directa**. A la batería se le conoce como *fuerza de fuerza electromotriz*, o más comúnmente, *fuerza de fem*. (Lo que se conoce como *fuerza electromotriz* es un desafortunado equívoco histórico, pues describe no una fuerza, sino una diferencia de potencial en volts.) La *fem*  $\mathcal{E}$  de una batería es el **voltaje máximo posible que ésta puede suministrar entre sus terminales**. Se puede pensar que una fuente de fem es como una “bomba de carga”. Cuando existe una diferencia de potencial entre dos puntos, la fuente mueve las cargas “hacia arriba”, del potencial más reducido al más elevado.

Debido a que la diferencia de potencial en los terminales de la batería es constante en un circuito particular, la corriente en el circuito es constante en magnitud y dirección y se denomina **corriente continua**. En forma general se considera que la conexión de alambres en un circuito no tiene resistencia. La terminal positiva de la batería se encuentra a un potencial más alto que la negativa.

Puesto que una batería está hecha de materia, existe una resistencia al flujo de las cargas dentro de la misma. Esta resistencia recibe el nombre de **resistencia interna**  $r$ . En el caso de una batería ideal con una resistencia interna igual a cero, la diferencia de potencial a través de la batería (conocida como *voltaje entre las terminales*) es igual a su fem. Sin embargo, en una batería, en un circuito donde exista corriente, el voltaje entre las terminales *no* es igual a la fem de la batería. Para entender esto, considere el diagrama del circuito de la figura 27.1a, donde se representa la batería como el rectángulo en línea discontinua que contiene una fem  $\mathcal{E}$ , ideal y libre de resistencia, en serie con una resistencia interna  $r$ . Un resistor de resistencia  $R$  es conectado en las terminales de la batería. Ahora imagine que pasa de  $a$  a  $d$  en la batería y mida el potencial eléctrico en diferentes ubicaciones. Conforme pasa de la terminal negativa a la positiva, el potencial *aumenta* en una cantidad  $\mathcal{E}$ . Sin embargo, conforme se mueve a través de la resistencia  $r$ , el potencial *disminuye* en una cantidad  $Ir$ , donde  $I$  es la corriente del circuito. Debido a eso, el voltaje entre las terminales de la batería  $\Delta V = V_d - V_a$  es

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir \quad (27.1)$$

La figura 27.1b es una representación gráfica de los cambios en el potencial eléctrico a medida que el circuito se recorre en el sentido de las manecillas del reloj. De la ecuación 27.1, observe que  $\mathcal{E}$  es equivalente al **voltaje en circuito abierto**, es decir, el voltaje entre las terminales cuando la corriente es igual a cero. La fem es el voltaje nominal de una batería; por ejemplo, la fem de una batería tamaño D es de 1.5 V. La diferencia de potencial real entre las terminales de la batería depende de la corriente en la misma, como se describe en la ecuación 27.1.

La figura 27.1a muestra que el voltaje entre las terminales  $\Delta V$  debe ser igual a la diferencia de potencial de un extremo a otro de la resistencia externa  $R$ , conocida como **resistencia de carga**. El resistor de carga puede ser un simple elemento de circuito resistivo, como el de la figura 27.1a, o podría ser la resistencia de algún aparato eléctrico (como un tostador, un calentador eléctrico o una lámpara) conectado a la batería (o, en el caso de aparatos domésticos, al contacto de pared). El resistor representa una *carga* en la batería porque ésta debe suministrar energía para que el aparato que contiene la resistencia funcione. La diferencia de potencial de un extremo a otro de la resistencia de carga es  $\Delta V = IR$ . Al combinar esta expresión con la ecuación 27.1, se observa que

$$\mathcal{E} = IR + Ir \quad (27.2)$$



Al resolver en función de la corriente,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (27.3)$$

La ecuación 27.3 muestra que la corriente en este circuito simple depende tanto de la resistencia de carga  $R$  externa a la batería como de la resistencia interna  $r$ . Si  $R$  es mucho mayor que  $r$ , como es el caso de muchos circuitos útiles en la vida cotidiana, puede ignorar  $r$ .

Si multiplica la ecuación 27.2 por la corriente  $I$

$$I\mathcal{E} = I^2R + I^2r \quad (27.4)$$

La ecuación 27.4 indica que debido a que la potencia es  $P = I\Delta V$  (vea la ecuación 26.21), la potencia total de salida  $I\mathcal{E}$  de la batería es entregada a la resistencia de carga externa con un valor  $I^2R$  y a la resistencia interna con un valor  $I^2r$ .

- E XAMEN RÁPIDO 27.1** Para maximizar el porcentaje de energía que una batería entrega a un aparato, ¿cómo debería ser la resistencia interna de la misma? (a) Tan baja como sea posible, (b) tan alta como sea posible, o (c) el porcentaje no depende de la resistencia interna.

### Ejemplo 27.1 Voltaje entre las terminales de una batería

Una batería tiene una fem de 12.0 V y una resistencia interna de 0.050  $\Omega$ . Sus terminales están conectadas a una resistencia de carga de 3.00  $\Omega$ .

**(A)** Encuentre la corriente en el circuito y el voltaje entre las terminales de la batería.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Estudie la figura 27.1a, que muestra un circuito consistente con el enunciado del problema. La batería entrega energía al resistor de carga.

**Categorizar** Este ejemplo involucra cálculos simples de esta sección, así que se le clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 27.3 para encontrar la corriente en el circuito:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12.0 \text{ V}}{3.00 \Omega + 0.050 \Omega} = 3.93 \text{ A}$$

Use la ecuación 27.1 para encontrar el voltaje entre las terminales:

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = 12.0 \text{ V} - (3.93 \text{ A})(0.050 \Omega) = 11.8 \text{ V}$$

Para comprobar este resultado, calcule el voltaje a través de la resistencia de carga  $R$ :

$$\Delta V = IR = (3.93 \text{ A})(3.00 \Omega) = 11.8 \text{ V}$$

**(B)** Calcule la potencia entregada al resistor de carga, la potencia entregada a la resistencia interna de la batería y la potencia entregada por la batería.

#### SOLUCIÓN

Use la ecuación 26.22 para encontrar la potencia entregada al resistor de carga:

$$P_R = I^2R = (3.93 \text{ A})^2(3.00 \Omega) = 46.3 \text{ W}$$

Encuentre la potencia entregada a la resistencia interna:

$$P_r = I^2r = (3.93 \text{ A})^2(0.050 \Omega) = 0.772 \text{ W}$$

Encuentre la potencia entregada por la batería al sumar estas cantidades  $P = P_R + P_r = 46.3 \text{ W} + 0.772 \text{ W} = 47.1 \text{ W}$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Conforme una batería envejece, su resistencia interna aumenta. Suponga que la resistencia interna de esta batería se eleva a 2.00  $\Omega$  hacia el final de su vida útil. ¿Cómo altera esto la habilidad de la batería para entregar energía?

**Respuesta** Conecte el mismo resistor de carga de 3.00  $\Omega$  a la batería.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.1

**Las baterías no suministran electrones** Una batería no suministra electrones al circuito. Establece el campo eléctrico que ejerce una fuerza sobre los electrones que ya están en los cables y elementos del circuito.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.2

**¿Qué es constante en una batería?** Una interpretación común pero equivocada es pensar que la batería es una fuente de corriente constante. La ecuación 27.3 muestra claramente que no es así. La corriente del circuito depende de la resistencia  $R$  conectada a la batería. Tampoco es verdad que la batería sea una fuente de voltaje constante entre las terminales, como se muestra en la figura 27.1. **Una batería es una fuente de fem constante.**

continúa

## 27.1 continuación

Encuentre la nueva corriente en la batería:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12.0 \text{ V}}{3.00 \Omega + 2.00 \Omega} = 2.40 \text{ A}$$

Encuentre el nuevo voltaje entre las terminales:

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = 12.0 \text{ V} - (2.40 \text{ A})(2.00 \Omega) = 7.2 \text{ V}$$

Encuentre las nuevas potencias entregadas al resistor de carga y la resistencia interna:

$$P_R = I^2 R = (2.40 \text{ A})^2 (3.00 \Omega) = 17.3 \text{ W}$$

$$P_r = I^2 r = (2.40 \text{ A})^2 (2.00 \Omega) = 11.5 \text{ W}$$

En esta situación, el voltaje entre las terminales sólo es 60% de la fem. Observe que 40% de la potencia de la batería se entrega a la resistencia interna cuando  $r$  es  $2.00 \Omega$ . Cuando  $r$  es  $0.050 \Omega$  como en la parte (B), este porcentaje sólo es 1.6%. En consecuencia, aun cuando la fem permanezca fija, el aumento en resistencia interna de la batería reduce significativamente la capacidad de ésta para entregar energía a una carga externa.

## Ejemplo 27.2 Igualación de carga

Encuentre la resistencia de carga  $R$  para la cual se entrega la potencia máxima a la resistencia de carga en la figura 27.1a.

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Piense en variar la resistencia de carga de la figura 27.1a y el efecto sobre la potencia entregada a la resistencia de carga. Cuando  $R$  es grande, hay muy poca corriente, de modo que la potencia  $I^2 R$  que se entrega al resistor de carga es pequeña. Cuando  $R$  es pequeña, digamos  $R \ll r$ , la corriente es grande y la energía entregada a la resistencia interna es  $I^2 r \gg I^2 R$ . Por tanto, la potencia entregada al resistor de carga es pequeña comparada con la que se entrega a la resistencia interna. Para algún valor intermedio de la resistencia  $R$ , la potencia se debe maximizar.

**Categorizar** Este ejemplo se categoriza como un problema de análisis ya que se debe emprender un procedimiento para maximizar la potencia. El circuito es el mismo que en el ejemplo 27.1. Sin embargo, en este caso, la resistencia de carga  $R$  es una variable.

**Analizar** Encuentre la potencia entregada a la resistencia de carga mediante la ecuación 26.22, con  $I$  dada por la ecuación 27.3:

Derive la potencia respecto a la resistencia de carga  $R$  e iguale la derivada a cero para maximizar la potencia:

Resuelva para  $R$ :

$$(1) \quad P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}$$

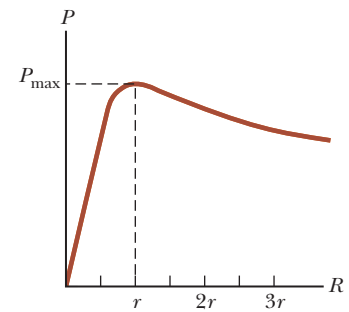
$$\frac{dP}{dR} = \frac{d}{dR} \left[ \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} \right] = \frac{d}{dR} [\mathcal{E}^2 R (R + r)^{-2}] = 0$$

$$[\mathcal{E}^2 (R + r)^{-2}] + [\mathcal{E}^2 R (-2)(R + r)^{-3}] = 0$$

$$\frac{\mathcal{E}^2 (R + r)}{(R + r)^3} - \frac{2\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^3} = \frac{\mathcal{E}^2 (r - R)}{(R + r)^3} = 0$$

$$R = r$$

**Finalizar** Para comprobar este resultado, grafique  $P$  en función de  $R$ , como en la figura 27.2. La gráfica muestra que alcanza un valor máximo en  $R = r$ . La ecuación (1) muestra que este valor máximo es  $P_{\text{máx}} = \mathcal{E}^2/4r$ .



**Figura 27.2** (Ejemplo 27.2) Gráfica de la potencia  $P$  entregada por una batería a un resistor de carga de resistencia  $R$  como función de  $R$ .

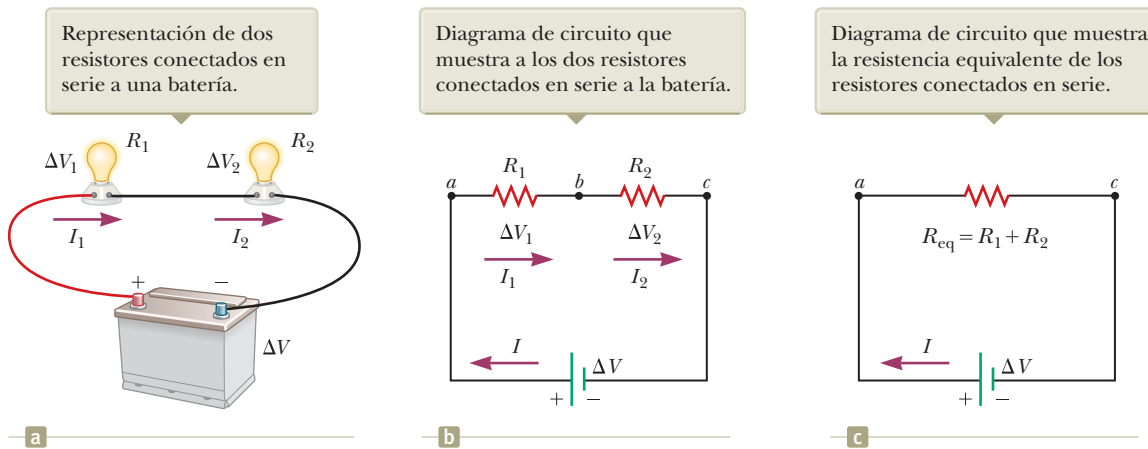
## 27.2 Resistores en serie y en paralelo

En la sección 25.3, estudiamos condensadores en serie y conexiones paralelas. En esta sección, conectamos resistencias en serie y en paralelo y analizamos los resultados. Haremos usos múltiples de la ecuación 26.7 en este proceso.

Cuando dos o más resistores están interconectados como los focos de la figura 27.3a, se dice que están en una **combinación en serie**. La figura 27.3b representa el diagrama de circuito de los focos, que aparecen como resistores y la batería. ¿Qué







**Figura 27.3** Dos lámparas con resistencias  $R_1$  y  $R_2$  conectadas en serie. Los tres diagramas son equivalentes.

pasa si usted quiere reemplazar la combinación en serie con una sola resistencia que conduzca la misma corriente de la batería? ¿Cuál sería su valor? En una conexión en serie, si una cantidad de carga  $Q$  sale de un resistor  $R_1$ , deberá también entrar en el segundo resistor  $R_2$ . De otra forma, la carga se acumularía en el alambre entre los resistores. Por tanto, en un intervalo determinado de tiempo, la misma cantidad de carga pasa a través de ambos resistores.

$$I = I_1 = I_2 \quad (27.5)$$

donde  $I$  es la corriente de la batería,  $I_1$  es la corriente en el resistor  $R_1$  e  $I_2$  es la corriente en el resistor  $R_2$ .

La diferencia de potencial que se aplica a una combinación en serie de resistores se dividirá entre éstos. En la figura 28.3b, ya que la caída de voltaje<sup>1</sup> de  $a$  a  $b$  es igual a  $I_1 R_1$  y la caída de voltaje de  $b$  a  $c$  es igual a  $I_2 R_2$ , la caída de voltaje de  $a$  a  $c$  es

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 \quad (27.6)$$

La diferencia de potencial entre las terminales de la batería también está aplicada a la **resistencia equivalente**  $R_{\text{eq}}$  en la figura 27.3c:

$$\Delta V = IR_{\text{eq}}$$

donde la resistencia equivalente tiene el mismo efecto en el circuito que en la combinación en serie porque resulta de la misma corriente  $I$  en la batería. Al combinar estas ecuaciones para  $\Delta V$  se obtiene:

$$IR_{\text{eq}} = I_1 R_1 + I_2 R_2 \rightarrow R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 \quad (27.7)$$

donde se cancelan las corrientes  $I$ ,  $I_1$  e  $I_2$ , porque son las mismas (ecuación 27.5). Vemos que podemos reemplazar los dos resistores en serie con una sola resistencia equivalente cuyo valor es la suma de las resistencias individuales.

La resistencia equivalente de tres o más resistores conectados en serie es

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (27.8)$$

◀ Resistencia equivalente de una combinación en serie de resistores

Esta relación indica que la resistencia equivalente de una combinación en serie de resistores es la suma de valores de las resistencias individuales y siempre es mayor que cualquier resistencia individual.

Regrese a la ecuación 27.3 y observe que el denominador es la simple suma algebraica de las resistencias externas e internas. Esto es consistente con el análisis en la figura 27.1a.

<sup>1</sup>El término *caída de voltaje* se refiere a la reducción en el potencial eléctrico entre las terminales de un resistor, y es utilizado con frecuencia por las personas que trabajan con circuitos eléctricos

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.3

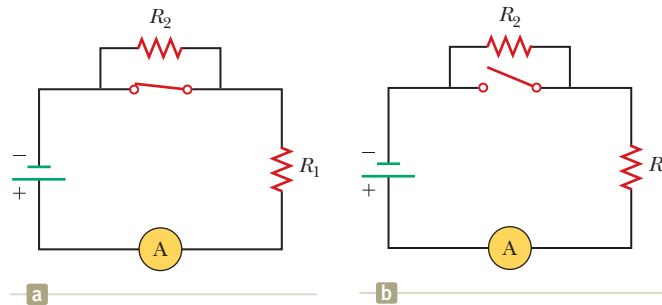
**Cambios locales y globales** Un cambio local en una parte del circuito da como resultado un cambio global en el circuito completo. Por ejemplo, si una sola resistencia se cambia en un circuito que contiene varios resistores y baterías, las corrientes en todos los resistores y baterías, los voltajes entre las terminales de todas las baterías, y los voltajes aplicados a todos los resistores pueden cambiar como consecuencia.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 27.4

**La corriente no sigue la trayectoria de menor resistencia** Es posible que haya escuchado la frase “la corriente sigue la trayectoria de menor resistencia” (o palabras similares), en referencia a la configuración en paralelo de las trayectorias de la corriente, ya que hay dos o más trayectorias que puede seguir la corriente. Esta frase es incorrecta. La corriente sigue *todas* las trayectorias. Aquellas trayectorias con una resistencia menor tendrán más corriente, pero incluso las trayectorias de muy alta resistencia tendrán *algo* de corriente. En teoría, si la corriente tiene una elección entre una trayectoria de resistencia cero y una trayectoria de resistencia finita, toda la corriente sigue la trayectoria de resistencia cero; no obstante, una trayectoria con resistencia cero, es una idealización.

Si en la figura 27.3 el filamento de un foco falla, el circuito no se completaría (el resultado es una condición de circuito abierto) y el segundo foco tampoco encendería. Esta es la característica general de un circuito en serie: si un dispositivo en serie crea un circuito abierto, todo el circuito es inoperante.

- EXAMEN RÁPIDO 27.2** Cuando se cierra el interruptor del circuito de la figura 27.4a, no hay corriente en  $R_2$ , porque la corriente encuentra una trayectoria alterna de resistencia cero a través del interruptor. Existe corriente en  $R_1$ , la cual se mide con un amperímetro (dispositivo para la medición de corriente) en la parte baja del circuito. Si se abre el interruptor (figura 27.4b), existe corriente en  $R_2$ . ¿Qué sucede con la lectura del amperímetro cuando se abre el interruptor? (a) La lectura sube; (b) la lectura baja; (c) la lectura no cambia.



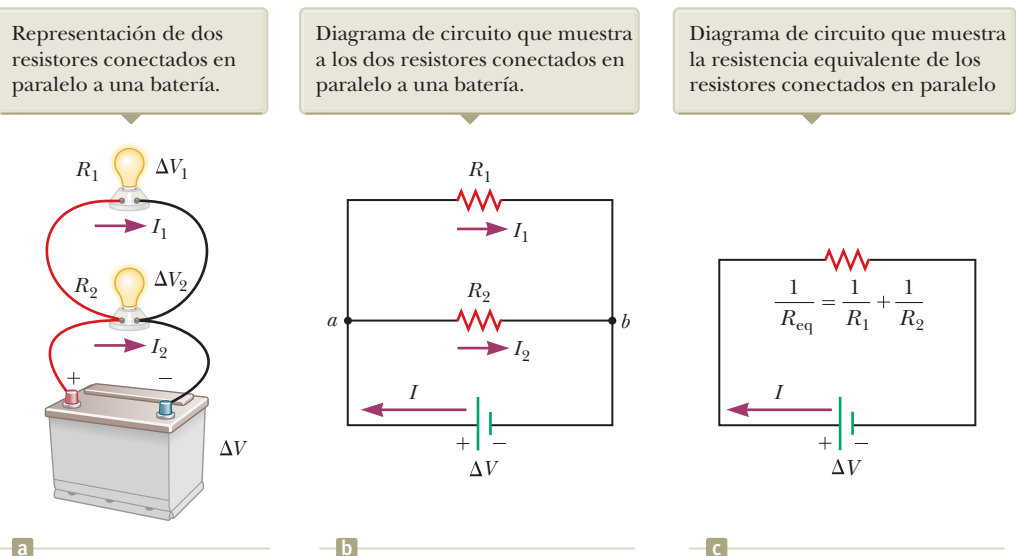
**Figura 27.4** (Examen rápido 27.2) ¿Qué sucede cuando se abre el interruptor?

Considere ahora dos resistores conectados en una **configuración en paralelo**, como se muestra en la figura 27.5. Como en la configuración en serie, ¿cuál es el valor de un único resistor que podría reemplazar la configuración y aprovechar la misma corriente de la batería? Observe que ambos resistores están conectados directamente a través de las terminales de la batería. Por tanto, las diferencias de potencial a través de los resistores son las mismas:

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 \quad (27.9)$$

donde  $\Delta V$  es el voltaje entre las terminales de la batería.

Cuando las cargas llegan al punto  $a$  en la figura 27.5b, se dividen en dos; una parte pasa a través de  $R_1$  y el resto a través de  $R_2$ . Una **unión** es cualquier punto en un circuito donde una corriente puede dividirse. Esta división resulta en menos corriente en cada resistor de la que sale de la batería. Debido a que la carga eléctrica se con-



**Figura 27.5** Dos lámparas con resistencias  $R_1$  y  $R_2$  conectadas en paralelo. Los tres diagramas son equivalentes.

serva, la corriente  $I$  que entra al punto  $a$  debe ser igual a la corriente total que sale del mismo:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} \quad (27.10)$$

donde  $I_1$  es la corriente en  $R_1$  e  $I_2$  es la corriente en  $R_2$ .

La corriente en la resistencia equivalente  $R_{\text{eq}}$  en la figura 27.5c es

$$I = \frac{\Delta V}{R_{\text{eq}}}$$

donde la resistencia equivalente tiene el mismo efecto en el circuito que las dos resistencias en paralelo; es decir, la resistencia equivalente consumirá la misma corriente  $I$  de la batería. Combinando estas ecuaciones para  $I$ , vemos que la resistencia equivalente de dos resistores en paralelo está dada por

$$\frac{\Delta V}{R_{\text{eq}}} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} \rightarrow \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (27.11)$$

donde se han eliminado  $\Delta V$ ,  $\Delta V_1$  y  $\Delta V_2$  porque todas son iguales (ecuación 27.9).

Una extensión de esta explicación a tres o más resistores en paralelo da:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (27.12)$$

◀ Resistencia equivalente de una configuración en paralelo de resistores

Esta expresión muestra que el inverso de la resistencia equivalente de dos o más resistores conectados en una configuración en paralelo es igual a la suma de los inversos de las resistencias individuales. Además, la resistencia equivalente siempre es menor que la resistencia más pequeña en el grupo.

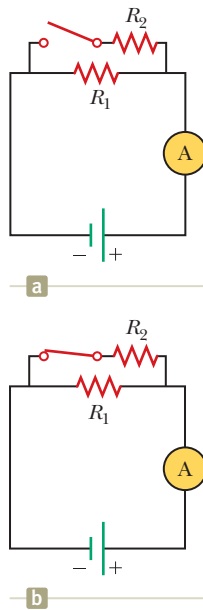
Los circuitos domésticos siempre están alambrados de manera que los aparatos queden conectados en paralelo. Cada aparato funciona de manera independiente de los demás, de modo que si un interruptor se cierra, los demás permanecerán abiertos. Además, en este tipo de conexiones todos los aparatos funcionan con el mismo voltaje.

Usemos los conceptos en esta sección para abordar nuestra semblanza de apertura de capítulo. Primero, ¿por qué no debe pararse en un campo abierto durante una tormenta eléctrica? El impacto fulminante de un relámpago comienza con una *ruta principal de paso* moviéndose hacia abajo desde una nube cargada. Esta es una columna de carga negativa que se mueve hacia el suelo a lo largo de un camino en zigzag a alta velocidad. La ruta principal de paso *no* es el destello de luz que asocia con un rayo. Desde el suelo, una columna de carga positiva, llamada *impacto de retorno*, comienza a moverse hacia arriba desde un punto del campo eléctrico grande. Cuando una ruta principal de paso y un impacto de retorno se encuentran en el aire, como está a punto de ocurrir en el lado izquierdo de la foto en la página 636, se abre un canal conductor entre la nube y el suelo, una gran corriente repentinamente existe y un destello brillante de luz se emite.

Si está parado en un campo abierto, su cabeza representa un punto afilado con respecto al campo plano. Por tanto, debido a que usted y el suelo están cargados, y como descubrimos en la sección 24.6, su cabeza como una punta afilada tiene un campo eléctrico muy fuerte en su superficie. Eso aumenta la probabilidad de que un golpe de retorno comience desde la cabeza en lugar de desde la superficie plana, poniendo en peligro su seguridad.

Entonces, ¿por qué no tirarse al suelo para evitar que su cabeza funcione como una punta afilada? Cuando cae un rayo, la corriente en el aire también existe en la superficie del suelo, extendiéndose radialmente desde el punto desde el cual comenzó la carrera de retorno. Si se tira en el suelo con su cuerpo a lo largo de una línea radial hasta el impacto de retorno, su cuerpo se coloca *en paralelo* con la corriente del rayo. Por tanto, algo de corriente podría atravesar su cuerpo, desde el punto de contacto en la parte superior del cuerpo hasta el punto de contacto en los pies. Esta es la razón





**Figura 27.6** (Examen rápido 27.3) ¿Qué ocurre cuando se cierra el interruptor?

por la cual a las vacas las mata un rayo. Tienen puntos de contacto en sus patas delanteras y también en sus patas traseras.

Si su cuerpo apunta al impacto de retorno, una cantidad significativa de corriente puede existir en él. Los pollos también tienen dos puntos de contacto, pero sus patas están muy juntas. Por tanto, la resistencia del suelo es menor entre sus patas que la de la vaca. Como resultado, la diferencia de potencial entre los dos puntos de contacto en el suelo es menor para el pollo, por lo que existe menos corriente en su cuerpo que en el cuerpo de las vacas.

Finalmente, ¿qué pasa con el pájaro en el cable? Puede ser que el cable esté aislado, manteniendo al ave segura. Sin embargo, incluso si el cable no está aislado, para los tipos de pájaros que aterrizan en los cables, sus patas están aún más juntas que las patas de los pollos. Además, es probable que el cable tenga una resistividad menor que el suelo. Ambos factores conducen a una diferencia de potencial muy pequeña entre las patas del ave cuando se conecta en paralelo con el cable. A su vez, hay muy poca corriente en el cuerpo del ave.

**E XAMEN RÁPIDO 27.3** Con el interruptor abierto del circuito de la figura 27.6a, no hay corriente en  $R_2$ . No obstante, hay corriente en  $R_1$ , y se mide con el amperímetro que está del lado derecho del circuito. Si se cierra el interruptor (figura 27.6b), existe corriente en  $R_2$ . ¿Qué ocurre con la lectura del amperímetro cuando el interruptor se cierra? (a) La lectura asciende, (b) la lectura desciende, o (c) la lectura no cambia.

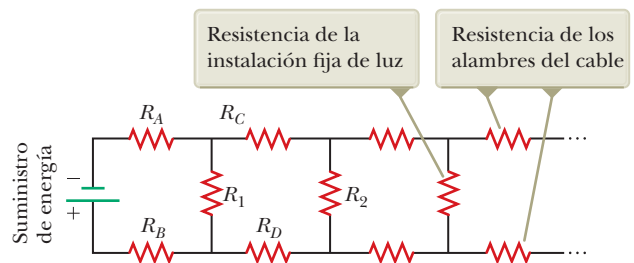
**E XAMEN RÁPIDO 27.4** Considere las siguientes opciones: (a) aumenta, (b) disminuye, (c) permanece igual. A partir de estas opciones, elija la mejor respuesta para las siguientes situaciones. (i) En la figura 27.3, se agrega un tercer resistor en serie con los primeros dos. ¿Qué ocurre con la corriente en la batería? (ii) ¿Qué ocurre con el voltaje entre las terminales de la batería? (iii) En la figura 27.5, se agrega un tercer resistor en paralelo con los dos primeros. ¿Qué ocurre con la corriente en la batería? (iv) ¿Qué ocurre con el voltaje entre las terminales de la batería?

### Ejemplo conceptual 27.3 Luces panorámicas

Una persona quiere instalar iluminación panorámica de bajo voltaje en su patio trasero. Para ahorrar dinero, compra cable barato calibre 18, que tiene una resistencia relativamente alta por unidad de longitud. Este cable consiste en dos alambres paralelos separados por un aislante, como el cordón de un electrodoméstico. La persona extiende 200 pies de cable desde la fuente de energía hasta el punto más alejado al que planea colocar una instalación fija de luz. Une la instalación fija de luz a través de los dos alambres en el cable a intervalos de 10 pies, de modo que la instalación fija de las luces está en paralelo. Debido a la resistencia del cable, la brillantez de los focos en la instalación fija no es la deseada. ¿Cuál de los siguientes problemas tiene la persona? (a) Todos los focos brillan menos de lo que deberían si se usara cable con menor resistencia. (b) La brillantez de los focos disminuye conforme se aleja de la fuente de energía.

#### SOLUCIÓN

En la figura 27.7 aparece un diagrama de circuito para el sistema. Los resistores horizontales con letras como subíndices (como  $R_A$ ) representan la resistencia de los alambres en el cable entre las instalaciones fijas de luces y los resistores verticales con números como subíndices (como  $R_1$ ) representan la resistencia de los portalámparas mismos. Parte del voltaje entre las terminales de la fuente de energía cae a través de los resistores  $R_A$  y  $R_B$ . En consecuencia, el voltaje a través de los portalámparas  $R_1$  es menor que el voltaje entre las terminales. Existe caída de voltaje adicional a través de los resistores  $R_C$  y  $R_D$ . En consecuencia, el voltaje a través de las montacargas  $R_2$  es menor de la que hay a través de  $R_1$ . Este patrón continúa por la línea de portalámparas, de modo que la opción correcta es (b). Cada portalámparas sucesivo tiene un voltaje menor a través de él y resplandece con menos brillo que el anterior.



**Figura 27.7** (Ejemplo conceptual 27.3) Diagrama de circuito para un conjunto de instalaciones fijas de luces panorámicas conectadas en paralelo a través de los dos alambres de un cable de dos alambres.

**Ejemplo 27.4 Encuentre la resistencia equivalente**

Cuatro resistores se conectan como se muestra en la figura 27.8a.

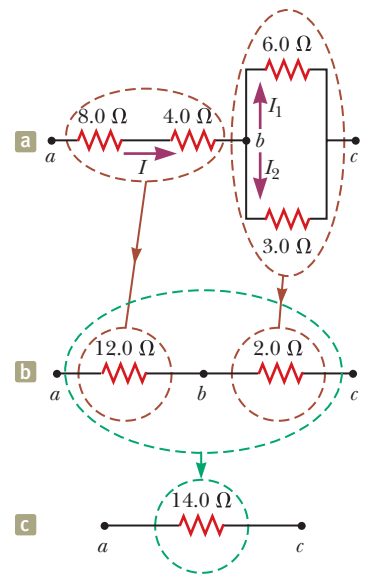
**(A)** Encuentre la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *c*.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Imagine que las cargas fluyen en esta combinación desde la izquierda. Todas las cargas deben pasar de *a* a *b* a través de los primeros dos resistores, pero las cargas se dividen en *b* en dos rutas diferentes cuando encuentran la combinación de los resistores de 6.0 Ω y 3.0 Ω.

**Categorizar** Debido a la naturaleza simple de la combinación de resistores en la figura 27.8, este ejemplo se clasifica para usar las reglas de combinaciones en serie y en paralelo de resistores.

**Analizar** La combinación de resistores se puede reducir en pasos como se muestra en la figura 27.8.



**Figura 27.8** (Ejemplo 27.4) La red original de resistores se reduce a una sola resistencia equivalente.

Encuentre la resistencia equivalente entre *a* y *b* de los resistores de 8.0 Ω y 4.0 Ω, que están en serie (círculos marrones a la izquierda):

$$R_{eq} = 8.0 \Omega + 4.0 \Omega = 12.0 \Omega$$

Encuentre la resistencia equivalente entre *b* y *c* de los resistores de 6.0 Ω y 3.0 Ω, que están en paralelo (círculos marrones a la derecha):

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6.0 \Omega} + \frac{1}{3.0 \Omega} = \frac{3}{6.0 \Omega}$$

$$R_{eq} = \frac{6.0 \Omega}{3} = 2.0 \Omega$$

El circuito de resistencias equivalentes ahora se parece a la figura 27.8b. Los resistores de 12.0 Ω y 2.0 Ω están conectados en serie (círculos verdes). Encuentre la resistencia equivalente de *a* a *c*:

$$R_{eq} = 12.0 \Omega + 2.0 \Omega = 14.0 \Omega$$

Esta resistencia es un resistor equivalente simple de la figura 27.8c.

**(B)** ¿Cuál es la corriente en cada resistor, si entre *a* y *c* se mantiene una diferencia de potencial de 42 V?

**SOLUCIÓN**

La corriente en los resistores de 8.0 Ω y 4.0 Ω es la misma porque están en serie. Además, circula la misma corriente que existiría en el resistor equivalente de 14.0 Ω conectado a la diferencia de potencial de 42 V.

Use la ecuación 26.7 ( $R = \Delta V/I$ ) y el resultado de la parte(A) para encontrar la corriente en los resistores de 8.0 Ω y 4.0 Ω:

$$I = \frac{\Delta V_{ac}}{R_{eq}} = \frac{42 \text{ V}}{14.0 \Omega} = 3.0 \text{ A}$$

Igualé los voltajes a través de los resistores en paralelo en la figura 28.10a para encontrar una relación entre las corrientes:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \rightarrow (6.0 \Omega)I_1 = (3.0 \Omega)I_2 \rightarrow I_2 = 2I_1$$

Use  $I_1 + I_2 = 3.0 \text{ A}$  para encontrar  $I_1$ :

$$I_1 + I_2 = 3.0 \text{ A} \rightarrow I_1 + 2I_1 = 3.0 \text{ A} \rightarrow I_1 = 1.0 \text{ A}$$

Encuentre  $I_2$ :

$$I_2 = 2I_1 = 2(1.0 \text{ A}) = 2.0 \text{ A}$$

**Finalizar** Como comprobación final de los resultados, observe que  $\Delta V_{bc} = (6.0 \Omega)I_1 = (3.0 \Omega)I_2 = 6.0 \text{ V}$ ; por tanto,  $\Delta V_{ab} = (12.0 \Omega)I = 36 \text{ V}$ , como debe ser.





## Ejemplo 27.5 Tres resistores en paralelo

Tres resistores están conectados en paralelo, como se muestra en la figura 27.9a. Entre los puntos  $a$  y  $b$  se mantiene una diferencia de potencial de 18.0 V.

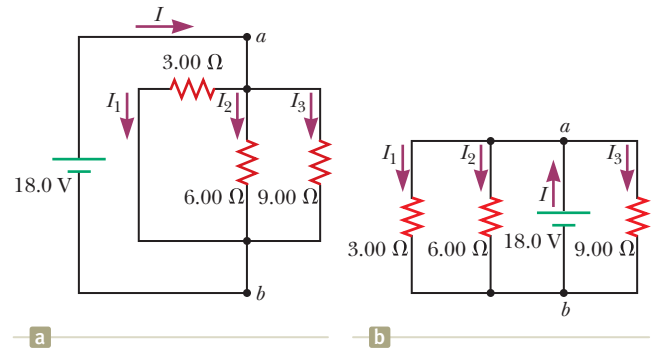
(A) Calcule la resistencia equivalente del circuito.

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** En la figura 27.9a, queda claro que las resistencias de 6.00  $\Omega$  y 9.00  $\Omega$  están conectadas en paralelo. ¿Qué pasa con la resistencia de 3.00  $\Omega$ ? Imagine deslizar esa resistencia hacia la izquierda, sin alterar las conexiones, alrededor de la esquina y hasta la mitad del cable vertical marcado con la corriente  $I_1$ . Esto no cambia las características eléctricas del circuito. Es claro ahora que se trata de una combinación paralela simple de tres resistencias. Observe que la corriente  $I$  se divide en tres corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  en los tres resistores.

**Categorizar** Este problema se puede resolver con las reglas examinadas en esta sección, por lo que el problema se clasifica como de sustitución. Puesto que los tres resistores están conectados en paralelo, se puede usar la ecuación 27.12 para evaluar la resistencia equivalente.

Use la ecuación 27.12 para encontrar  $R_{\text{eq}}$ :



**Figura 27.9** (Ejemplo 27.5) (a) Tres resistores conectados en paralelo. El voltaje a través de cada resistor es 18.0 V. (b) Otro circuito con tres resistores y una batería. ¿Es equivalente al circuito en (a)?

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{3.00 \Omega} + \frac{1}{6.00 \Omega} + \frac{1}{9.00 \Omega} = \frac{11}{18.0 \Omega}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{18.0 \Omega}{11} = 1.64 \Omega$$

(B) Encuentre la corriente en cada resistor.

## SOLUCIÓN

La diferencia de potencial a través de cada resistor es 18.0 V. Aplique la relación  $\Delta V = IR$  para encontrar las corrientes:

$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{18.0 \text{ V}}{3.00 \Omega} = 6.00 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{18.0 \text{ V}}{6.00 \Omega} = 3.00 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\Delta V}{R_3} = \frac{18.0 \text{ V}}{9.00 \Omega} = 2.00 \text{ A}$$

(C) Calcule la potencia entregada a cada resistor y la potencia total entregada a la combinación de resistores.

## SOLUCIÓN

Aplique la relación  $P = I^2R$  a cada resistor y use las corrientes calculadas en la parte (B):

$$3.00\text{-}\Omega: P_1 = I_1^2 R_1 = (6.00 \text{ A})^2 (3.00 \Omega) = 108 \text{ W}$$

$$6.00\text{-}\Omega: P_2 = I_2^2 R_2 = (3.00 \text{ A})^2 (6.00 \Omega) = 54 \text{ W}$$

$$9.00\text{-}\Omega: P_3 = I_3^2 R_3 = (2.00 \text{ A})^2 (9.00 \Omega) = 36 \text{ W}$$

Estos resultados muestran que el resistor más pequeño recibe más potencia. Al sumar las tres cantidades se obtiene una potencia total de 198 W. Este resultado final se pudo haber calculado a partir de la parte (A), al considerar la resistencia equivalente del modo siguiente:

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si el circuito fuese como se muestra en la figura 27.9b en lugar de como en la figura 27.9a? ¿Cómo afectaría esto el cálculo?

**Respuesta** No habría efecto sobre el cálculo. La colocación física de la batería no es importante. En la figura 27.9b la batería todavía mantiene una diferencia de potencial de 18.0 V entre los puntos  $a$  y  $b$ , así que los dos circuitos en la figura son eléctricamente idénticos.



## 27.3 Leyes de Kirchhoff

Se mencionó en la sección anterior, que es posible simplificar y explicar combinaciones de resistores aplicando la expresión  $\Delta V = IR$  y las reglas para las combinaciones en serie y en paralelo de los resistores. Muy a menudo, sin embargo, no es posible simplificar un circuito en una sola malla utilizando estas reglas. Por ejemplo, considere el circuito de la figura 27.10, que es el mismo que el de la figura 27.9b, pero con la adición de una batería. Este circuito no se puede reducir a una simple combinación de resistencias en serie y paralelo. El procedimiento para analizar circuitos más complejos se hace posible si se utilizan dos principios conocidos como **leyes de Kirchhoff**:

- 1. Ley de la unión o nodo:** En cualquier unión, la suma de las corrientes debe ser igual a cero:

$$\sum_{\text{unión}} I = 0 \quad (27.13)$$

- 1. Ley de la espira o malla:** La suma de las diferencias de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier espira de un circuito cerrado debe ser igual a cero:

$$\sum_{\text{circuito cerrado}} \Delta V = 0 \quad (27.14)$$

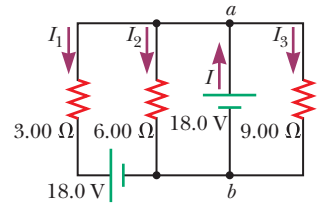
La primera ley de Kirchhoff es un enunciado de la conservación de la carga eléctrica. Todas las cargas que entran en un punto dado en un circuito deben abandonarlo porque la carga no puede acumularse en ese punto. Las corrientes dirigidas hacia dentro de la unión participan en la ley de la unión como  $+I$ , mientras que las corrientes que salen de una unión están participando con  $-I$ . Si aplica esta ley a la unión que se muestra en la figura 27.11a, obtiene

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

La figura 27.11b representa una analogía mecánica de esta situación, en la cual el agua fluye a través de una tubería ramificada sin fugas. Ya que el agua no se acumula en ningún sitio de la tubería, la cantidad de flujo en el tubo a la izquierda es igual al flujo total en las dos ramificaciones de la derecha.

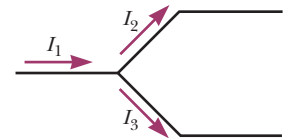
La regla de la espira de Kirchhoff surge porque la fuerza eléctrica es conservativa. El potencial eléctrico es similar a una variable de estado, como la energía interna, en termodinámica. Para un estado dado de un sistema termodinámico, la energía interna tiene un valor definido. En cualquier punto de un circuito, el potencial eléctrico tiene un valor definido. Ahora imagine comenzar en un punto determinado de un circuito y moverse por el circuito, midiendo el potencial. El potencial aumentará a medida que atravesase algunos elementos del circuito y caerá al pasar por otros. Cuando llegue al punto de partida, debe medir el mismo potencial que cuando comenzó. El análogo termodinámico es que cuando regresa al punto inicial en un diagrama  $PV$ , la energía interna del sistema debe tener el mismo valor que cuando comenzó.

La única forma en que puede llegar al mismo potencial cuando regrese al punto de partida es si la suma de los incrementos en el potencial en algunos elementos del circuito es igual a la suma de los decrementos a medida que atraviesa otros. Esta es la regla de la espira. Mire nuevamente la figura 27.1b como un ejemplo. El potencial se definió como cero en el punto  $a$ , y volvió a cero en el punto  $f$ , que está conectado al punto  $a$  con un cable libre de resistencia.



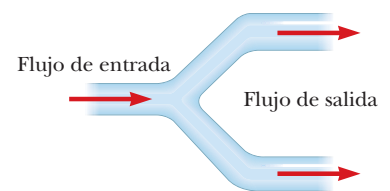
**Figura 27.10** El circuito de la figura 27.9 con una batería añadida en la rama izquierda.

La cantidad de agua que fluye de los ramales de la derecha debe ser igual a la cantidad que entra al ramal de la izquierda.



a

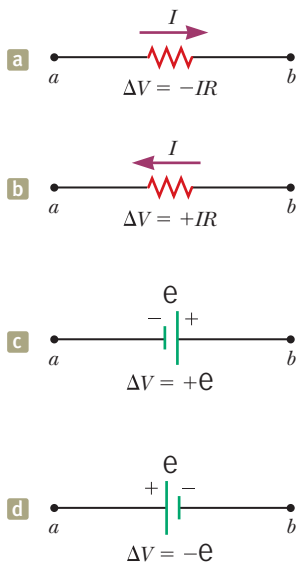
La cantidad de agua que fluye de los ramales de la derecha debe ser igual a la cantidad que entra al ramal de la izquierda.



b

**Figura 27.11** (a) Ley de la unión de Kirchhoff. (b) Analogía mecánica de la ley de la unión.

En cada diagrama,  $\Delta V = V_b - V_a$  y cada elemento del circuito se recorre de  $a$  hasta  $b$ , de izquierda a derecha.



**Figura 27.12** Reglas para determinar las diferencias de potencial a través de un resistor y de una batería. (El supuesto es que la batería no tiene resistencia interna.)

La figura 27.12 muestra las convenciones de signos para los cambios en el potencial eléctrico a medida que viaja a través de baterías y resistencias en circuitos multiespira:

- Las cargas se mueven del extremo de potencial alto de un resistor hacia el extremo de potencial bajo; si un resistor se atraviesa en la dirección de la corriente, la diferencia de potencial  $\Delta V$  a través del resistor es  $-IR$  (figura 27.12a).
- Si un resistor se recorre en la dirección *opuesta* a la corriente, la diferencia de potencial  $\Delta V$  a través del resistor es  $+IR$  (figura 27.12b).
- Si una fuente de fem (suponiendo que tenga una resistencia interna igual a cero) es recorrida en la dirección de la fem (de negativo a positivo), la diferencia de potencial  $\Delta V$  es  $+\mathcal{E}$  (figura 27.12c).
- Si una fuente de fem (suponiendo que tenga una resistencia interna igual a cero) es recorrida en la dirección opuesta a la fem (de positivo a negativo), la diferencia de potencial  $\Delta V$  es  $-\mathcal{E}$  (figura 27.12d).

Existen límites en el número de veces que puede aplicar con éxito las leyes de Kirchhoff al analizar un circuito. Puede utilizar la ley de la unión con tanta frecuencia como lo requiera, siempre y cuando cada vez que escriba una ecuación incluya en ella una corriente que no haya sido utilizada previamente en alguna ecuación de la regla de la unión. En general, el número de veces que puede utilizar la ley de la unión es una menos que el número de puntos de unión en el circuito. Puede aplicar la ley de la espira las veces que lo necesite, siempre que aparezca en cada nueva ecuación un nuevo elemento del circuito (un resistor o una batería) o una nueva corriente. En general, para resolver un problema de circuito en particular, el número de ecuaciones independientes que se necesitan para obtener las dos leyes es igual al número de corrientes desconocidas.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo usar las reglas de Kirchhoff. En todos los casos, se supone que los circuitos han alcanzado condiciones de estado estacionario; en otras palabras, las corrientes en las diversas ramas son constantes. Cualquier condensador actúa como una rama abierta en un circuito; es decir, la corriente en la rama que contiene el condensador es cero bajo condiciones de estado estable.

### ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Leyes de Kirchhoff

El siguiente procedimiento se recomienda para resolver problemas que involucran circuitos que no se pueden reducir por las reglas para combinar resistores en serie o en paralelo.

- 1. Conceptualizar.** Estudie el diagrama de circuito y asegúrese de que reconoce todos los elementos en el circuito. Identifique la polaridad de cada batería e intente imaginar las direcciones en las que existiría la corriente en las baterías.
- 2. Categorizar.** Determine si el circuito se puede reducir mediante la combinación de resistores en serie y en paralelo. Si es así, use las técnicas de la sección 27.2. Si no, aplique las leyes de Kirchhoff de acuerdo con la siguiente etapa: *analizar*.
- 3. Analizar.** Asigne etiquetas a todas las cantidades conocidas y símbolos a todas las cantidades desconocidas. Debe asignar *direcciones* a las corrientes en cada parte del circuito. Aunque la asignación de direcciones de corriente es arbitraria, debe seguirse *rigurosamente* a las direcciones que asigne cuando aplique leyes de Kirchhoff.

Aplique la ley de las uniones (primera regla de Kirchhoff) a todas las uniones en el circuito, excepto una. Ahora aplique la ley de la espira (segunda regla de Kirchhoff) a tantas espiras en el circuito como se necesite para obtener, en combinación con las ecuaciones de la ley de las uniones, tantas ecuaciones como incógnitas haya. Para aplicar esta ley, debe elegir una dirección en la cual viajar alrededor de la espira (ya sea en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario) e identificar correctamente el cambio en potencial conforme cruce cada elemento. ¡Tenga cuidado con los signos! Siga cuidadosamente las reglas en la figura 27.12.

Resuelva las ecuaciones simultáneamente para las cantidades desconocidas.

- 4. Finalizar.** Compruebe sus respuestas numéricas para consistencia. No se alarme si alguna de las corrientes resultantes tiene valor negativo. Esto sólo significa que supuso incorrectamente la dirección de dicha corriente, pero *su magnitud será correcta*.



Library of Congress, Prints & Photographs Division, Reproduction number LC-USZ62-133715 (b&w film copy neg.)

### Gustav Kirchhoff

Físico alemán (1824-1887)

Kirchhoff, un profesor de Heidelberg, y Robert Bunsen inventaron el espectroscopio e iniciaron la espectroscopia, la cual estudiará en el capítulo 41. Descubrieron el cesio y el rubidio e inventaron la espectroscopia astronómica.

### Ejemplo 27.6 Circuito de una sola espira

Un circuito de una sola espira contiene dos resistores y dos baterías, como se muestra en la figura 28.14. (Desprecie las resistencias internas de las baterías.) Encuentre la corriente en el circuito.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 27.13 muestra las polaridades de las baterías y una suposición de la dirección de la corriente. La batería de 12 V es la más fuerte de las dos, por lo que la corriente debe ser en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por tanto, esperamos que nuestra idea de la dirección de la corriente que esté mal, pero vamos a seguir y ver cómo esta suposición errónea está representada por una respuesta final.

**Categorizar** No se necesitan las leyes de Kirchhoff para analizar este circuito simple, pero úselas de cualquier forma, simplemente para ver cómo se aplican. No hay uniones en este circuito de espira simple; debido a eso, la corriente es la misma en todos los elementos.

**Analizar** Suponga que la corriente es en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 27.13. Al recorrer el circuito en la dirección de las manecillas del reloj, comenzando en  $a$ , se ve que  $a \rightarrow b$  representa una diferencia de potencial de  $+\mathcal{E}_1$ ,  $b \rightarrow c$  representa una diferencia de potencial de  $-IR_1$ ,  $c \rightarrow d$  representa una diferencia de potencial de  $-\mathcal{E}_2$ , y  $d \rightarrow a$  representa una diferencia de potencial de  $-IR_2$ .

Aplice la ley de la espira de Kirchhoff a la espira simple del circuito:

$$\sum \Delta V = 0 \rightarrow \mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 = 0$$

Resuelva para  $I$  y use los valores conocidos en la figura 27.13:

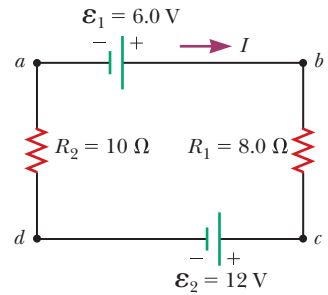
$$(1) \quad I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{6.0 \text{ V} - 12 \text{ V}}{8.0 \Omega + 10 \Omega} = -0.33 \text{ A}$$

**Finalizar** El signo negativo para  $I$  indica que la dirección de la corriente es opuesta a la dirección supuesta. Las fems en el numerador se restan porque las baterías en la figura 27.13 tienen polaridades opuestas. Las resistencias en el denominador se suman porque los dos resistores están en serie.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si invirtiera la polaridad de la batería de 12.0 V? ¿Cómo afectaría esto al circuito?

**Respuesta** Aunque podría repetir los cálculos con las leyes de Kirchhoff, en vez de ello examine la ecuación (1) y modifíquela en concordancia. Ya que las polaridades de las dos baterías ahora están en la misma dirección, los signos de  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  son iguales y la ecuación (1) se convierte en

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{6.0 \text{ V} + 12 \text{ V}}{8.0 \Omega + 10 \Omega} = 1.0 \text{ A}$$



**Figura 27.13** (Ejemplo 27.6) Circuito en serie que contiene dos baterías y dos resistores, donde las polaridades de las baterías son opuestas.

### Ejemplo 27.7 Un circuito de varias espiras

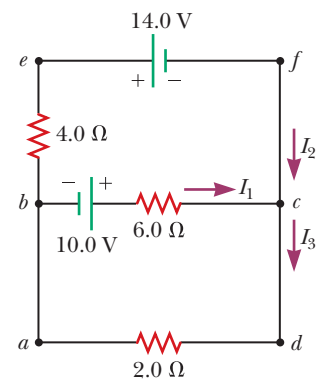
Encuentre las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  en el circuito que se muestra en la figura 27.14.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagínese reordenando físicamente el circuito mientras se mantiene eléctricamente igual. ¿Se puede reorganizar de forma que consista en combinaciones simples en serie o en paralelo de los resistores? Usted debe saber que no se puede. (Si la batería 10.0 V se retira y se sustituye por un alambre desde  $b$  a la resistencia de 6.0 Ω, el circuito puede consistir exclusivamente de combinaciones en serie y paralelo.)

**Categorizar** Ya que el circuito no se puede simplificar con las reglas asociadas a la combinación simple de resistencias en serie y en paralelo, este es un problema en el que debe usar las leyes de Kirchhoff.

**Analizar** Elija arbitrariamente las direcciones de las corrientes como se marcan en la figura 27.14.



**Figura 27.14** (Ejemplo 27.7) Circuito que contiene varias ramas.

*continúa*

## 27.7 continuación

Aplique la ley de la unión de Kirchhoff a la unión  $c$ :

$$(1) \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Ahora tiene una ecuación con tres incógnitas:  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Existen tres espiras en el circuito:  $abcd$ ,  $befcb$  y  $aefda$ . Sólo necesita dos ecuaciones de espira para determinar las corrientes desconocidas. (La tercera ecuación de espira no daría nueva información.) Elija recorrer estas espiras en la dirección de las manecillas del reloj. Aplique la ley de la espira de Kirchhoff a las espiras  $abcd$  y  $befcb$ :

$$abcd: (2) \quad 10.0 \text{ V} - (6.0 \, \Omega)I_1 - (2.0 \, \Omega)I_3 = 0$$

$$befcb: -(4.0 \, \Omega)I_2 - 14.0 \text{ V} + (6.0 \, \Omega)I_1 - 10.0 \text{ V} = 0$$

$$(3) \quad -24.0 \text{ V} + (6.0 \, \Omega)I_1 - (4.0 \, \Omega)I_2 = 0$$

Resuelva la ecuación (1) para  $I_3$  y sustituya en la ecuación (2):

$$10.0 \text{ V} - (6.0 \, \Omega)I_1 - (2.0 \, \Omega)(I_1 + I_2) = 0$$

$$(4) \quad 10.0 \text{ V} - (8.0 \, \Omega)I_1 - (2.0 \, \Omega)I_2 = 0$$

Multiplique cada término en la ecuación (3) por 4 y cada término en la ecuación (4) por 3:

$$(5) \quad -96.0 \text{ V} + (24.0 \, \Omega)I_1 - (16.0 \, \Omega)I_2 = 0$$

$$(6) \quad 30.0 \text{ V} - (24.0 \, \Omega)I_1 - (6.0 \, \Omega)I_2 = 0$$

Sume la ecuación (6) a la ecuación (5) para eliminar  $I_1$  y encontrar  $I_2$ :

$$-66.0 \text{ V} - (22.0 \, \Omega)I_2 = 0$$

$$I_2 = -3.0 \text{ A}$$

Use este valor de  $I_2$  en la ecuación (3) para encontrar  $I_1$ :

$$-24.0 \text{ V} + (6.0 \, \Omega)I_1 - (4.0 \, \Omega)(-3.0 \text{ A}) = 0$$

$$-24.0 \text{ V} + (6.0 \, \Omega)I_1 + 12.0 \text{ V} = 0$$

$$I_1 = 2.0 \text{ A}$$

Use la ecuación (1) para encontrar  $I_3$ :

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2.0 \text{ A} - 3.0 \text{ A} = -1.0 \text{ A}$$

**Finalizar** Ya que los valores para  $I_2$  e  $I_3$  son negativos, las direcciones de estas corrientes son opuestas a las indicadas en la figura 27.14. Los valores numéricos para las corrientes son correctos. A pesar de la dirección incorrecta, *debe* continuar usando estos valores negativos en cálculos consecutivos porque las ecuaciones se establecieron con la elección de dirección original. ¿Qué habría ocurrido si las direcciones se hubiesen dejado como en la figura 27.14, pero el recorrido de las espiras fuese en dirección opuesta?

## 27.4 Circuitos RC

Hasta ahora ha analizado circuitos de corriente directa en donde la corriente es constante. En los circuitos de CD que contienen capacitores, la corriente siempre está en la misma dirección pero puede variar en el tiempo. Se le llama **circuito RC** a un circuito que contiene una combinación en serie de un resistor y un capacitor.

### Carga de un capacitor

La figura 27.15 muestra un circuito  $RC$  simple en serie. Se supone que el capacitor de este circuito está inicialmente descargado. No existirá corriente en tanto el interruptor esté abierto (figura 27.15a). No obstante, si el interruptor se mueve hacia la posición  $a$  en  $t = 0$  (figura 27.15b), la carga comenzará a fluir, estableciendo una corriente en el circuito, y el capacitor comenzará a cargarse.<sup>2</sup> Observe que durante la carga, las cargas no saltan de una placa a otra del capacitor porque el espacio entre las placas representa un circuito abierto. En vez de eso, la carga se transfiere de una placa a otra y a sus alambres de conexión gracias al campo eléctrico que la batería establece en los alambres, hasta que el capacitor queda completamente cargado. Conforme las placas se cargan, la diferencia de potencial aplicada al capacitor aumenta. El valor de la carga máxima en las placas dependerá del voltaje de la batería. Una vez que se alcanza la carga máxima, la corriente en el circuito es igual a cero, ya que la diferencia de potencial aplicada al capacitor es igual a la suministrada por la batería.

<sup>2</sup> En análisis previos sobre los capacitores, supuso que se encuentran en una condición de estado estable, esto es, no hay una corriente presente en ninguna de las ramas del circuito que contiene un capacitor. Ahora considere el caso *antes* de que se llegue a la condición de estado estable; en esta situación, las cargas están en movimiento y existe una corriente en los alambres conectados al capacitor.





Para analizar cuantitativamente este circuito, aplique la regla de la espira de Kirchhoff al circuito una vez que el interruptor está en la posición *a*. Recorriendo la espira de la figura 27.15b en el sentido de las manecillas del reloj, da

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - iR = 0 \tag{27.15}$$

donde  $q/C$  es la diferencia de potencial aplicada al capacitor e  $iR$  es la diferencia de potencial aplicada al resistor. Cuando estudiamos los circuitos eléctricos en los que la carga o la corriente están cambiando con el tiempo, usaremos minúsculas  $q$  e  $i$  para los valores variables en el tiempo. Reservaremos letras mayúsculas para valores iniciales, finales o de estado estacionario. Para los signos de  $\mathcal{E}$  e  $iR$ , se utilizan las reglas convencionales analizadas con anterioridad en la ecuación 27.15. El capacitor se recorre en la dirección de la placa positiva a la negativa; esto representa una reducción de potencial.

Por tanto, en la ecuación 27.15 se utiliza un signo negativo para la diferencia de potencial.

Utilice la ecuación 27.15 para determinar la corriente inicial  $I_i$  en el circuito y la carga máxima  $Q_{m\acute{a}x}$  sobre el capacitor. En el instante en que se cierra el interruptor ( $t=0$ ), la carga del capacitor es igual a cero, y en la ecuación 27.15 aparece que la corriente inicial  $I_i$  en el circuito es su valor máximo y se conoce por

$$I_i = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (\text{corriente en } t = 0) \tag{27.16}$$

En este momento, la diferencia de potencial de las terminales de la batería aparece por completo aplicada al resistor. Después, cuando el capacitor ha sido cargado a su valor máximo  $Q_{m\acute{a}x}$ , las cargas dejan de fluir, la corriente en el circuito es igual a cero, y la diferencia de potencial de las terminales de la batería aparece aplicada al capacitor. Al sustituir  $i=0$  en la ecuación 27.15 se obtiene la carga máxima del capacitor:

$$Q_{m\acute{a}x} = C\mathcal{E} \quad (\text{carga máxima}) \tag{27.17}$$

Para determinar expresiones analíticas que muestren cómo la carga y la corriente dependen del tiempo, resuelva la ecuación 27.15, una sola ecuación con dos variables,  $q$  e  $i$ . En todas las partes de un circuito en serie la corriente debe ser igual. Por tanto, la corriente en la resistencia  $R$  debe ser la misma que la corriente entre las placas del capacitor y los alambres conectados a ellas. Esta corriente es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la carga en las placas del capacitor. Por tanto, en la ecuación 27.15 remplace  $i = dq/dt$  y simplifique la ecuación:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Para encontrar una expresión para  $q$ , resuelva esta ecuación diferencial separable. Primero combine los términos del lado derecho:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E}}{RC} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\mathcal{E}}{RC}$$

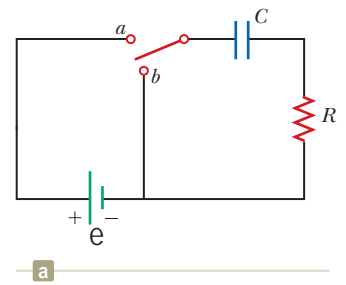
Multiplique por  $dt$  y divida entre  $q - C\mathcal{E}$

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC} dt$$

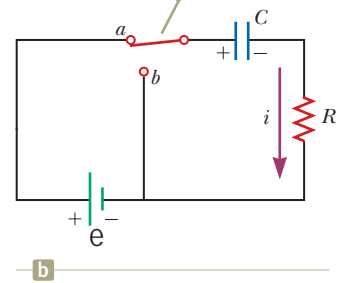
Integre esta expresión, donde  $q = 0$  en  $t = 0$ :

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

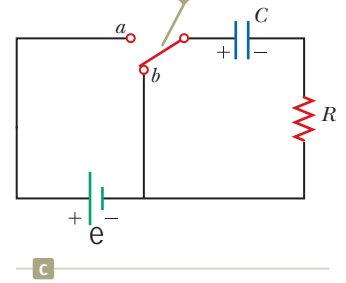
$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$



Cuando el interruptor se mueve a la posición *a*, el capacitor comienza a cargarse.

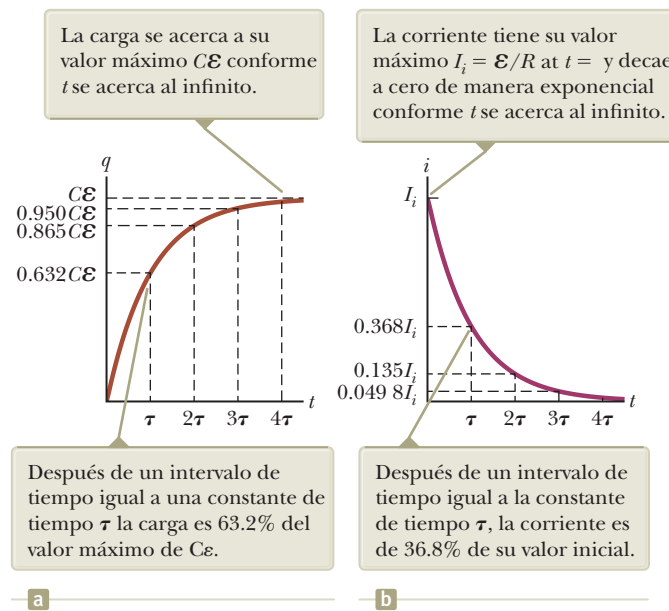


Cuando el interruptor se mueve a la posición *b*, el capacitor se descarga.



**Figura 27.15** Un capacitor en serie con resistor, interruptor y batería.





**Figura 27.16** (a) Gráfica de la carga de un capacitor en función del tiempo para el circuito que se muestra en la figura 27.15b. (b) Gráfica de la corriente en función del tiempo para el circuito que se muestra en la figura 27.15b.

A partir de la definición de los logaritmos naturales, escriba esta expresión como sigue

La carga como una función del tiempo para un capacitor cargándose ▶

$$q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_{\text{máx}}(1 - e^{-t/RC}) \quad (27.18)$$

donde  $e$  es la base de los logaritmos naturales y se ha efectuado la sustitución de la ecuación 27.17.

Puede encontrar la corriente de carga derivando la 27.18 respecto al tiempo. Utilizando  $i = dq/dt$ , encuentre que

La corriente como una función del tiempo para un capacitor cargándose ▶

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \quad (27.19)$$

En la figura 27.16 se muestran las gráficas de la carga y de la corriente de un capacitor en función del tiempo. Observe que la carga es igual a cero en  $t = 0$  y se acerca al valor máximo  $C\mathcal{E}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . La corriente tiene un valor máximo  $I_i = \mathcal{E}/R$  en  $t = 0$ , y decae exponencialmente hasta cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . La cantidad  $RC$ , que aparece en los exponentes de las ecuaciones 27.18 y 27.19, se llama la **constante de tiempo**  $\tau$  del circuito.

$$\tau = RC \quad (27.20)$$

La constante de tiempo representa el intervalo de tiempo durante el cual la corriente disminuye hasta  $1/e$  de su valor inicial; es decir, en un intervalo de tiempo  $\tau$ , la corriente decrece a  $i = e^{-1}I_i = 0.368I_i$ . Después de un intervalo de tiempo  $2\tau$ , la corriente decrece a  $i = e^{-2}I_i = 0.135I_i$  y así sucesivamente. De igual manera, en un intervalo de tiempo  $\tau$ , la carga aumenta de cero a  $C\mathcal{E}[1 - e^{-1}] = 0.632C\mathcal{E}$ .

La energía de salida de la batería cuando el capacitor está totalmente cargado es  $Q_{\text{máx}}\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$ . Una vez cargado el capacitor, la energía almacenada en el mismo es  $\frac{1}{2}Q_{\text{máx}}\mathcal{E} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$  que es exactamente la mitad de la energía de salida de la batería. Se deja como problema (problema 44) demostrar que la mitad restante de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en el resistor.

### Descarga de un capacitor

Imagine que el capacitor en la figura 27.15b está completamente cargado. A través del capacitor hay una diferencia de potencial  $Q/C$  y hay diferencia de potencial cero a través del resistor porque  $i = 0$ . Si el interruptor ahora se mueve a la posición  $b$  en  $t = 0$  (figura 27.15c), el capacitor comienza a descargarse a través del resistor. En algún tiempo  $t$  durante la descarga, la corriente en el circuito es  $i$  y la carga en el capacitor es  $q$ . El circuito de la figura 27.15c es el mismo que el circuito en la figura 27.15b, excepto

por la ausencia de la batería. Por tanto, de la ecuación 27.15 se elimina la fem  $\mathcal{E}$  para obtener la ecuación de la espira adecuada para el circuito de la figura 27.17c:

$$-\frac{q}{C} - iR = 0 \tag{27.21}$$

Cuando se sustituye  $i = dq/dt$  en esta expresión, se convierte en

$$-R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

Al integrar esta expresión con  $q = Q_i$  en  $t = 0$  se obtiene

$$\int_{Q_i}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q_i}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC} \tag{27.22}$$

◀ Carga como función del tiempo para un capacitor que se descarga

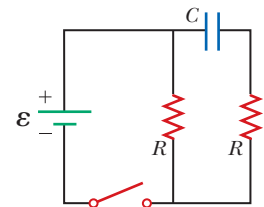
Al derivar la ecuación 27.22 respecto al tiempo se obtiene la corriente instantánea como función del tiempo:

$$i(t) = -\frac{Q_i}{RC} e^{-t/RC} \tag{27.23}$$

◀ Corriente como función del tiempo para un capacitor que se descarga

donde  $Q_i/RC = I_i$  es la corriente inicial. La figura 27.15b muestra una corriente descendente en la resistencia que hemos adivinado para aplicar las reglas de Kirchhoff y generar las ecuaciones 27.15 y 27.21. La ecuación 27.23 muestra que la corriente en el capacitor de descarga es negativa, lo que indica que la corriente es *ascendente* en la resistencia en la figura 27.15c. Tanto la carga en el capacitor como la corriente decaen exponencialmente a una cantidad caracterizada por la constante de tiempo  $\tau = RC$ .

- E XAMEN RÁPIDO 27.5** Considere el circuito de la figura 27.17 y suponga que:
- la batería no tiene resistencia interna. (i) Justo después de cerrar el interruptor, ¿cuál es la corriente en la batería? (a) 0, (b)  $\mathcal{E}/2R$  (c)  $2\mathcal{E}/R$  (d)  $\mathcal{E}/R$  (e) imposible de determinar. (ii) Después de un tiempo muy largo, ¿cuál es la corriente en la batería? Elija entre las mismas opciones.



**Figura 27.17** (Examen rápido 27.5) ¿Cómo varía la corriente después de cerrar el interruptor?

### Ejemplo conceptual 27.8 Limpiaparabrisas intermitente

Muchos automóviles están equipados con limpiaparabrisas que pueden funcionar intermitentemente durante una lluvia ligera. ¿De qué forma la operación de tales limpiadores depende de la carga y descarga de un capacitor?

#### SOLUCIÓN

Los limpiadores son parte de un circuito RC cuya constante de tiempo puede variar al seleccionar diferentes valores de  $R$  a través de un interruptor de posiciones múltiples. Conforme aumenta el voltaje a través del capacitor, el capacitor alcanza un punto en el que se descarga y activa los limpiadores. Después el circuito comienza otro ciclo de carga. El intervalo de tiempo entre barridos individuales de los limpiadores está determinado por el valor de la constante de tiempo.

### Ejemplo 27.9 Carga de un capacitor en un circuito RC

Un capacitor sin carga y un resistor se conectan en serie a una batería, como se muestra en la figura 27.15, donde  $\mathcal{E} = 12.0$  V,  $C = 5.00 \mu\text{F}$  y  $R = 8.00 \times 10^5 \Omega$ . El interruptor se mueve a la posición *a*. Encuentre la constante de tiempo del circuito, la carga máxima en el capacitor, la corriente máxima en el circuito y la carga y la corriente como funciones del tiempo.

continúa

## 27.9 continuación

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Estudie la figura 27.15 e imagine mover el interruptor a la posición  $a$ , como se muestra en la figura 27.15b. Al hacerlo, el capacitor comienza a cargarse.

**Categorizar** Evalúe los resultados con las ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la constante de tiempo del circuito a partir de la ecuación 27.20:

$$\tau = RC = (8.00 \times 10^5 \Omega)(5.00 \times 10^{-6} \text{ F}) = 4.00 \text{ s}$$

Evalúe la carga máxima en el capacitor cuando  $t \rightarrow \infty$  a partir de la ecuación 27.17:

$$Q_{\text{max}} = C\mathcal{E} = (5.00 \mu\text{F})(12.0 \text{ V}) = 60.0 \mu\text{C}$$

Evalúe la corriente máxima en el circuito cuando  $t = 0$  a partir de la ecuación 27.16:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12.0 \text{ V}}{8.00 \times 10^5 \Omega} = 15.0 \mu\text{A}$$

Use estos valores en las ecuaciones 27.18 y 27.19 para encontrar la carga y la corriente como funciones del tiempo:

$$(1) \quad q(t) = 60.0(1 - e^{-t/4.00})$$

$$(2) \quad i(t) = 15.0e^{-t/4.00}$$

En las ecuaciones (1) y (2),  $q$  está en microcoulombs,  $i$  en microamperes y  $t$  en segundos.

## Ejemplo 27.10 Descarga de un capacitor en un circuito RC

Considere un capacitor de capacitancia  $C$  que se descarga a través de un resistor de resistencia  $R$ , como se muestra en la figura 27.15c.

**(A)** ¿Después de cuántas constantes de tiempo la carga en el capacitor es un cuarto de su valor inicial?

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Estudie la figura 27.15 e imagine mover el interruptor a la posición  $b$ , como se muestra en la figura 27.15c. Al hacerlo, el capacitor comienza a descargarse.

**Categorizar** El ejemplo se clasifica como uno que involucra un capacitor que se descarga y se usan las ecuaciones adecuadas.

**Analizar** Sustituya  $q(t) = Q/4$  en la ecuación 27.22:

$$\frac{Q_i}{4} = Q_i e^{-t/RC}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-t/RC}$$

Tome el logaritmo de ambos lados de la ecuación y resuelva para  $t$ :

$$-\ln 4 = -\frac{t}{RC}$$

$$t = RC \ln 4 = 1.39RC = 1.39\tau$$

**(B)** La energía almacenada en el capacitor disminuye con el tiempo conforme el capacitor se descarga. ¿Después de cuántas constantes de tiempo la energía almacenada es un cuarto de su valor inicial?

## SOLUCIÓN

Use las ecuaciones 25.13 y 27.22 para expresar la energía almacenada en el capacitor en cualquier tiempo  $t$ :

$$(1) \quad U(t) = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q_i^2}{2C} e^{-2t/RC}$$

Sustituya  $U(t) = 1/4(Q^2/2C)$  en la ecuación (1):

$$\frac{1}{4} \frac{Q_i^2}{2C} = \frac{Q_i^2}{2C} e^{-2t/RC}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-2t/RC}$$

Tome el logaritmo de ambos lados de la ecuación y resuelva para  $t$ :

$$-\ln 4 = -\frac{2t}{RC}$$

$$t = \frac{1}{2}RC \ln 4 = 0.693RC = 0.693\tau$$



## 27. 10 continuación

**Finalizar** Observe que, ya que la energía depende del cuadrado de la carga, la energía en el capacitor cae más rápidamente que la carga en el capacitor.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si quiere describir el circuito en términos del intervalo de tiempo requerido para que la carga caiga a la mitad de su valor original, en lugar de hacerlo por la constante de tiempo  $t$ ? Eso daría un parámetro para el circuito, llamado *vida media*  $t_{1/2}$ . ¿Cómo se relaciona la vida media con la constante de tiempo?

**Respuesta** En una vida media, la carga cae de  $Q_i$  a  $Q_i/2$ . Por tanto, de la ecuación 27.22,

$$\frac{Q_i}{2} = Q_i e^{-t_{1/2}/RC} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-t_{1/2}/RC}$$

lo que conduce a

$$t_{1/2} = 0.693\tau$$

El concepto de vida media será importante cuando estudie decaimiento nuclear en el capítulo 43. El decaimiento radioactivo de una muestra inestable se comporta de una forma matemáticamente similar a un capacitor que se descarga en un circuito RC.

## Ejemplo 27.11 Energía entregada a un resistor

Un capacitor de  $5.00 \mu\text{F}$  se carga a una diferencia de potencial de  $800 \text{ V}$  y luego se descarga a través de un resistor. ¿Cuánta energía se entrega al resistor en el intervalo de tiempo requerido para descargar completamente el capacitor?

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** En la parte (B) del ejemplo 27.10 se consideró la disminución de energía en un capacitor que se descarga a un valor de un cuarto de la energía inicial. En este ejemplo, el capacitor se descarga por completo.

**Categorizar** Resuelva este ejemplo a partir de dos planteamientos. El primero es modelar el circuito como un *sistema aislado para la energía*. Ya que la energía en un sistema aislado se conserva, la energía potencial eléctrica inicial  $U_E$  almacenada en el capacitor se transforma en energía interna  $E_{\text{int}} = E_R$  en el resistor. El segundo planteamiento es modelar el resistor como un *sistema no aislado para la energía*. La energía entra al resistor mediante transmisión eléctrica desde el capacitor, lo que causa un aumento en la energía interna del resistor.

**Analizar** Comience con el planteamiento de sistema aislado.

Escriba la reducción apropiada de la ecuación de conservación de la energía, ecuación 8.2:

$$\Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

Sustituya los valores inicial y final de las energías:

$$(0 - U_E) + (E_{\text{int}} - 0) = 0 \rightarrow E_R = U_E$$

Use la ecuación 25.13 para la energía potencial eléctrica en el capacitor:

$$E_R = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

Sustituya valores numéricos:

$$E_R = \frac{1}{2} (5.00 \times 10^{-6} \text{ F})(800 \text{ V})^2 = 1.60 \text{ J}$$

El segundo planteamiento, que es más difícil, pero tal vez más instructivo, es notar que, conforme el capacitor se descarga a través del resistor, la rapidez a la que se entrega la energía al resistor por transmisión eléctrica es  $i^2 R$ , donde  $i$  es la corriente instantánea conocida por la ecuación 27.23.

Evalúe la energía entregada al resistor al integrar la potencia en todo el tiempo porque transcurre un intervalo de tiempo infinito para que el capacitor se descargue por completo:

$$P = \frac{dE}{dt} \rightarrow E_R = \int_0^{\infty} P dt$$

Sustituya para la potencia instantánea entregada al resistor de la ecuación 26.22:

$$E_R = \int_0^{\infty} i^2 R dt$$

continúa





## 27.11 continuación

Sustituya para la corriente a partir de la ecuación 27.23:

$$E_R = \int_0^{\infty} \left( -\frac{Q_i}{RC} e^{-t/RC} \right)^2 R dt = \frac{Q_i^2}{RC^2} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt$$

Sustituya el valor de la integral, que es  $RC/2$  (véase el problema 28):

$$E_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left( \frac{RC}{2} \right) = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

**Finalizar** Este resultado concuerda con el obtenido con el planteamiento de sistema aislado, como debe ser. Puede usar este segundo planteamiento para encontrar la energía total entregada al resistor en *cualquier* tiempo después de que el interruptor se cierra, simplemente sustituya el límite superior en la integral con dicho valor específico de  $t$ .

## 27.5 Cableado doméstico y seguridad eléctrica

Muchas consideraciones son importantes en el diseño de un sistema eléctrico en un hogar para que se le proporcione un servicio eléctrico adecuado a los ocupantes mientras maximizan su seguridad. Observaremos algunos aspectos de un sistema eléctrico doméstico en esta sección.

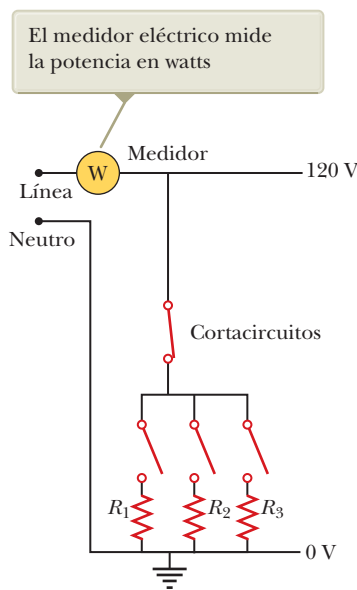
### Cableado doméstico

Los circuitos domésticos representan una aplicación práctica de algunas de las ideas que se presentan en este capítulo. En nuestro mundo de aparatos eléctricos, es útil entender los requisitos de energía y las limitaciones de los sistemas eléctricos convencionales y las medidas de seguridad que impiden accidentes.

En una instalación convencional, la compañía eléctrica distribuye energía eléctrica a los hogares por medio de un par de alambres que conectan cada casa en paralelo. Un alambre se conoce como *alambre de corriente*,<sup>3</sup> como se ve en la figura 27.18 y el otro como *alambre neutro o de tierra*. El alambre neutro está a tierra; es decir, su potencial eléctrico se supone igual a cero. La diferencia de potencial entre los alambres de corriente y el neutro es de cerca de 120 V. Este voltaje es alternante con el tiempo, y el potencial del alambre de corriente oscila en relación con la tierra. Gran parte de lo aprendido hasta ahora sobre el estado fem constante (corriente directa) puede aplicarse también a la corriente alterna que las compañías de energía eléctrica suministran a los negocios y a los hogares. (El voltaje y la corriente alternos se analizan en el capítulo 32.)

A fin de registrar el consumo de energía de la casa, un medidor se conecta en serie con el alambre de corriente que entra en ella. Después del medidor, el alambre se divide para que existan varios circuitos separados en paralelo distribuidos por toda la casa. Cada circuito contiene un cortacircuitos (o, en instalaciones más antiguas, un fusible). El alambre y el cortacircuitos correspondiente a cada circuito son cuidadosamente seleccionados para que cubran las necesidades de corriente de dicho circuito. Si éste debe soportar una corriente tan grande como 30 A, deberán seleccionarse un alambre grueso y un cortacircuitos apropiado para manejar esta corriente. Un circuito que se utiliza para alimentar sólo lámparas y pequeños artefactos domésticos a menudo sólo requiere 20 A. Cada circuito tiene su propio cortacircuitos para proteger esta parte del sistema eléctrico de la casa.

Como ejemplo, imagine un circuito en el cual están conectados un tostador, un microondas y una cafetera (que corresponden a  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  de la figura 28.19). Al utilizar la expresión  $P = I\Delta V$  puede calcular la corriente en cada aparato. El tostador, nominalmente de 1000 W, consume una corriente de  $1000 \text{ W}/120 \text{ V} = 8.33 \text{ A}$ . El microondas, nominalmente de 1300 W, consume 10.8 A, y la cafetera, nominalmente de 800 W, consume 6.67 A. Si los tres aparatos funcionan al mismo tiempo, consumen una corriente total de 25.8 A. Por tanto, en el circuito deberán instalarse alambres que tengan capacidad para manejar, por lo menos, esta corriente. Si el valor del fusible que protege al circuito es demasiado pequeño —20 A—, el fusible se abrirá



**Figura 27.18** Diagrama de cableado de un circuito doméstico. Las resistencias representan aparatos electrodomésticos o algún otro dispositivo que funciona con un voltaje aplicado de 120 V.

<sup>3</sup>*Alambre de corriente* es una expresión común para un conductor cuyo potencial eléctrico está más arriba o más abajo del potencial de tierra.

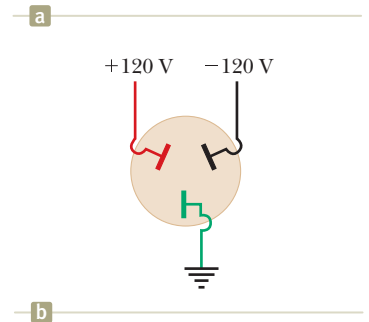
cuando conecte el tercer aparato, lo que impedirá la operación de todos los aparatos. Para evitar esta situación, el tostador y la cafetera pueden ser conectados a un circuito de 20 A y el microondas a otro circuito independiente de 20 A.

Muchos aparatos para uso pesado, como estufas y secadoras de ropa eléctricas, requieren 240 V para su funcionamiento. La compañía eléctrica suministra este voltaje mediante un tercer alambre que está 120 V por debajo del potencial de tierra (figura 27.19). La diferencia de potencial entre este alambre de corriente y el otro (el cual está 120 V por encima del potencial de tierra) es de 240 V. Un aparato doméstico que funciona a 240 V requiere la mitad de la corriente en comparación con uno que es alimentado a 120 V; por tanto, en un circuito que tenga un voltaje mayor pueden utilizarse alambres más delgados sin sobrecalentamiento.

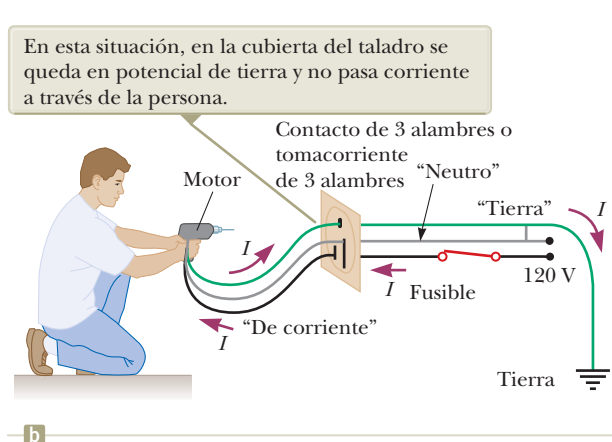
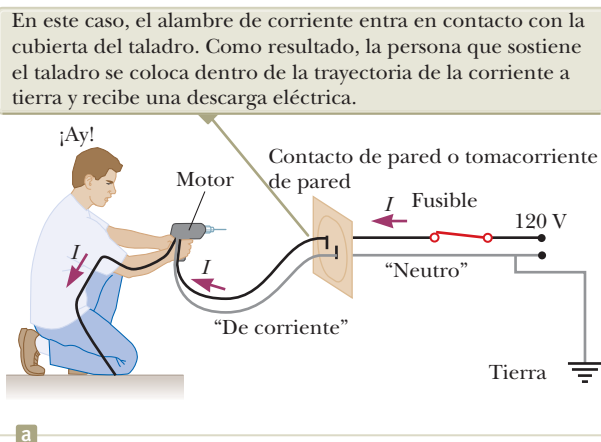
### Seguridad eléctrica

Cuando el alambre de corriente de una salida eléctrica se conecta directamente a tierra, el circuito está completo y se presenta un estado de cortocircuito. Un *cortocircuito* se presenta cuando existe una resistencia casi cero entre dos puntos a diferentes potenciales; esto da como resultado una corriente muy grande. Cuando esto sucede de forma accidental, un fusible que funcione de manera correcta abrirá el circuito y no ocurrirá ningún daño. Sin embargo, una persona en contacto con tierra puede electrocutarse al tocar el alambre de corriente de un cordón deshilachado u otro conductor expuesto. Se crea un contacto a tierra excepcionalmente efectivo (¡y peligroso!) cuando la persona toca una tubería de agua (normalmente al potencial de tierra) o está de pie sobre el piso con los pies mojados. Esta última situación representa un contacto de tierra efectivo ya que el agua sin destilar es un buen conductor debido a que contiene gran número de iones asociados con impurezas. Esta situación debe evitarse a toda costa.

Muchas salidas de 120 V están diseñadas para aceptar un cordón de tres vías. (Esta característica es obligatoria en todas las instalaciones eléctricas nuevas.) Una de estas vías es el alambre de corriente, que tiene un potencial nominal de 120 V. La segunda es el alambre neutro, nominalmente a 0 V, el cual lleva la corriente a tierra. En la figura 27.20a se muestra una conexión a un taladro eléctrico con únicamente dos alambres. Si accidentalmente el alambre de corriente hace contacto con la cubierta del taladro eléctrico (que puede presentarse si el aislante del alambre está roto), la corriente puede ser conducida a tierra a través de la persona, lo que da como resultado un sacudimiento eléctrico. El tercero, que es redondo, es un alambre de tierra de seguridad, por el que normalmente no pasa corriente pero está a la vez conectado a tierra y directamente a la cubierta del aparato eléctrico. Si el alambre de corriente se pone



**Figura 27.19** (a) Tomacorriente para una conexión de alimentación a 240 V. (b) Conexiones de cada una de las entradas de un tomacorriente de 240 V.



**Figura 27.20** (a) Diagrama del circuito para un taladro eléctrico con sólo dos alambres de conexión. La trayectoria normal de la corriente es del alambre de corriente a las conexiones del motor y de regreso a tierra a través del alambre neutro. (b) Esta descarga puede evitarse conectando el taladro a tierra mediante un tercer alambre “de tierra”. Los colores de los cables representan las normas eléctricas en Estados Unidos: el alambre de “caliente” es negro, el cable de tierra es verde y el cable neutro es blanco (mostrado en gris en la figura).

accidentalmente en cortocircuito con la cubierta, gran parte de la corriente sigue la trayectoria de menor resistencia del aparato a tierra como muestra la figura 27.20b.

En la actualidad, en cocinas, baños, sótanos, y otras áreas de riesgo en los nuevos hogares se usan tomacorrientes especiales llamados *interruptores de falla a tierra* (GFI). Estos aparatos están diseñados para proteger a las personas de las descargas eléctricas al detectar pequeñas corrientes (<5 mA) que se fugan a tierra. (El principio de su funcionamiento está descrito en el capítulo 30.) Cuando detectan una fuga de corriente excesivamente grande, en menos de 1 ms la corriente se desconecta.

Una descarga eléctrica da como resultado quemaduras fatales, o puede causar el mal funcionamiento de músculos de órganos vitales, como el corazón. El grado de daño al cuerpo dependerá de la magnitud de la corriente, de la duración del fenómeno, de la parte del cuerpo que tocó el alambre de corriente y de la parte del cuerpo por donde sale la corriente. Una corriente de 5 mA o menos provoca una sensación de sacudimiento, pero por lo regular con muy poco o ningún daño. Si la corriente es mayor a 10 mA, los músculos se contraen y la persona quizá no pueda ser capaz de soltar el alambre de corriente. Una corriente de alrededor de 100 mA que pase a través del cuerpo durante sólo algunos segundos, puede ser fatal. Una corriente de esa naturaleza paralizará los músculos del sistema respiratorio, impidiendo la respiración. En algunos casos, corrientes de alrededor de 1 A pueden producir quemaduras serias (y a veces fatales). En la práctica, ningún contacto con alambres de corriente se considera seguro cuando el voltaje es superior a 24 V.

## Resumen

### ► Definiciones

La **fem** de una batería es igual al voltaje a través de sus terminales cuando la corriente es cero. Esto es: la fem es equivalente al **voltaje de circuito abierto** de la batería.

### ► Conceptos y principios

La **resistencia equivalente** de un conjunto de resistores conectados en una **combinación en serie** es

$$R_{\text{cq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (27.8)$$

La **resistencia equivalente** de un conjunto de resistores conectados en una combinación en **paralelo** se encuentra partiendo de la relación

$$\frac{1}{R_{\text{cq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (27.12)$$

Si un capacitor se carga con una batería a través de un resistor de resistencia  $R$ , la carga en el capacitor y la corriente en el circuito varían en el tiempo de acuerdo con las expresiones

$$q(t) = Q_{\text{máx}}(1 - e^{-t/RC}) \quad (27.18)$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \quad (27.19)$$

donde  $Q_{\text{máx}} = C\mathcal{E}$  es la máxima carga en el capacitor. El producto  $RC$  se llama **constante de tiempo**  $\tau$  del circuito.

Los circuitos que involucran más de una espira se analizan convenientemente con el uso de las **leyes de Kirchhoff**:

1. **Leyes de la unión.** En cualquier unión, la suma de las corrientes debe ser igual a cero:

$$\sum_{\text{unión}} I = 0 \quad (27.13)$$

2. **Leyes de la espira.** La suma de las diferencias de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier espira de circuito debe ser cero:

$$\sum_{\text{circuito cerrado}} \Delta V = 0 \quad (27.14)$$

Cuando un resistor se recorre en la dirección de la corriente, la diferencia de potencial  $\Delta V$  a través del resistor es  $-IR$ . Cuando un resistor se recorre en la dirección opuesta a la corriente,  $\Delta V = +IR$ . Cuando una fuente de fem se recorre en la dirección de la fem (terminal negativa a terminal positiva), la diferencia de potencial es  $+\mathcal{E}$ . Cuando una fuente de fem se recorre opuesta a la fem (positivo a negativo), la diferencia de potencial es  $-\mathcal{E}$ .


Si un capacitor cargado de capacitancia  $C$  se descarga a través de un resistor de resistencia  $R$ , la carga y la corriente disminuyen exponencialmente en el tiempo de acuerdo con las expresiones

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC} \quad (27.22)$$

$$i(t) = -\frac{Q_i}{RC} e^{-t/RC} \quad (27.23)$$

donde  $Q_i$  es la carga inicial en el capacitor y  $Q_i/RC$  es la corriente inicial en el circuito.

# Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBAASIGN**  
From Cengage

- Usted y sus primos juegan con su sobrina, mostrándole algunos circuitos eléctricos simples. Usted conecta una batería de 9.0 V a un zumbador eléctrico con dos cables equipados con pinzas de cocodrilo en cada extremo. Ambos cables son de cobre y tienen un diámetro de 0.500 mm. El cable 1 tiene 1.00 m de longitud, mientras que el cable 2 tiene 0.250 m de longitud. Espera que su sobrina esté encantada con el sonido del timbre, pero algo está mal. El sonido es demasiado débil. Tiene un multímetro, por lo que puede tomar mediciones de voltaje y corriente. La mitad de su grupo toma medidas mientras el circuito está en funcionamiento: voltaje en la batería, 8.60 V; voltaje a través del zumbador, 6.40 V; voltaje a través del cable 2, 0.010 V de corriente en el circuito, 0.500 A. La otra mitad de su grupo revisa la línea y encuentra que la batería que está utilizando debe tener una resistencia interna menor a 0.900 V, y que el zumbador que está utilizando no debe tener más de 15.0 V de resistencia durante el funcionamiento. Las mitades de su grupo vuelven a reunirse y determinan qué componente está defectuoso: la batería, el zumbador, el cable 1 o el cable 2.
- ACTIVIDAD** Su grupo está realizando experimentos eléctricos en su laboratorio de física. El suministro de resistencias en el almacén se ha agotado y solo tiene dos valores diferentes de resistencia: 20 V y 50 V. (a) Sus experimentos requieren una resistencia de 45 V y una resistencia de 35 V. Divida su grupo en dos mitades. El grupo (i) determinará cómo formar una resistencia de 45 V a partir de su suministro, mientras que el grupo (ii) hará lo mismo con una resistencia de 35 V. (b) Después de trabajar en el experimento por un tiempo, se da cuenta de que ahora necesita una resistencia de 105 V. Haga que todo su grupo trabaje en conjunto para encontrar al menos tres formas de combinar las resistencias en su almacén para generar 105 V.
- Considere la siguiente tabla, que muestra la cantidad típica de energía utilizada por una serie de electrodomésticos. En la tercera columna, discuta en su grupo y anote el número de tales aparatos en un hogar típico. Muchos de estos serán 1, algunos serán 0 si el artículo no se usa y otros serán más de uno, como la cantidad de focos en el hogar. En la columna de tiempo, calcule la cantidad de tiempo en horas que se usaría cada dispositivo en un día. Multiplique las columnas 2, 3 y 4 para obtener el uso de energía en un día para cada electrodoméstico en la última columna. A partir de estos resultados, calcule (a) el consumo de energía mensual de este hogar en kWh y (b) la factura mensual de electricidad si la electricidad cuesta 11¢ por kWh.

Electrodoméstico	Potencia (W)	Número de aparatos	Tiempo de uso en un día (h)	Energía en un día (kWh)
<b>Hogar</b>				
Aire acondicionado central	5 000			
Aspiradora	500			
Calentador de agua eléctrico	475			
Televisión LCD	215			
Foco incandescente de 100 W	100			
Foco CFL	25			
Ventilador de techo	100			
Foco LED	10			
Ventilador de mesa	20			
Abre puertas de la cochera	350			
Antena satelital	30			
Televisión de plasma	340			
<b>Cocina:</b>				
Horno	3 000			
Lavavajillas	1 200			
Cafetera	1 500			
Horno de microondas	1 500			
Tostador	1 100			
Refrigerador	400			
<b>Baño:</b>				
Secadora de cabello	1 500			
Rasuradora eléctrica	15			
Plancha de cabello	90			
<b>Lavandería:</b>				
Secadora eléctrica	3 400			
Plancha	1 100			
Lavadora	500			
<b>Computadora:</b>				
Computadora portátil	100			
Computadora de escritorio	120			
Cargador de teléfono celular	4			
Router de internet	15			
Impresora de tinta	25			
<b>Dormitorio:</b>				
Cobertor eléctrico	200			
Radio despertador	2			



# Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

## SECCIÓN 27.1 Fuerza electromotriz

- AMT** Dos baterías de 1.50 V —con sus terminales positivas en una misma orientación— están insertadas en serie en el cuerpo de una linterna. Una de las baterías tiene una resistencia interna de  $0.255 \Omega$ , y la otra una resistencia interna de  $0.153 \Omega$ . Cuando el interruptor se cierra, por la lámpara pasa una corriente de 600 mA. (a) ¿Cuál es la resistencia de la lámpara? (b) ¿Qué fracción de la energía química transformada aparece como energía interna de las baterías?
- CIC** Como en el ejemplo 27.2, considere una fuente de energía con fem  $\mathcal{E}$  fija y resistencia interna  $r$  que causa corriente en una resistencia de carga  $R$ . En este problema,  $R$  es fija y  $r$  es variable. La eficiencia se define como la energía entregada a la carga dividida entre la energía entregada por la fem. (a) Cuando la resistencia interna se ajusta para máxima transferencia de potencia, ¿cuál es la eficiencia? (b) ¿Cuál debe ser la resistencia interna para la máxima eficiencia posible? (c) Cuando la compañía eléctrica vende energía a un consumidor, ¿tiene una meta de alta eficiencia o de máxima transferencia de potencia? Explique. (d) Cuando un estudiante conecta una bocina a un amplificador, ¿qué es lo que quiere más: eficiencia o alta transferencia de potencia? Explique.

## SECCIÓN 27.2 Resistores en serie y en paralelo

- La figura P27.3 muestra el interior de una lámpara incandescente de tres vías, que proporciona tres niveles de intensidad de luz. La toma de la lámpara está equipada con un interruptor de cuatro posiciones para seleccionar diferentes intensidades de luz, con las posiciones descritas de la siguiente manera: (1) apagado (los interruptores  $S_1$  y  $S_2$  ambos abiertos), (2) interruptor  $S_1$  cerrado, (3) interruptor  $S_2$  cerrado, y (4) interruptores  $S_1$  y  $S_2$  ambos cerrados. La bombilla contiene dos filamentos. Cuando la lámpara está conectada a una fuente de 120 V, un filamento recibe 100 W de potencia y el otro recibe 75 W. ¿Cuál es la entrada de potencia total a la lámpara cuando (a) solo el interruptor  $S_1$  está cerrado, (b) solo el interruptor  $S_2$  está cerrado, y (c) ambos interruptores están cerrados? (d) **¿Qué pasaría si?** Supongamos que el filamento de 75 W se rompe y ya no es capaz de transportar una corriente. ¿Cuántas posiciones de interruptor darán como resultado que la luz salga de la lámpara y cuál será la potencia de entrada en esas posiciones?
- CIC** Un foco marcado “75 W [a] 120 V” se atornilla en un porta focos en el extremo de un cable largo de extensión, en el cual cada uno de los dos conductores tiene una resistencia de  $0.800 \Omega$ . El otro extremo de la extensión se enchufa en una salida de 120 V. (a) Explique por qué la potencia verdadera que se entrega al foco no puede ser 75 W en esta situa-

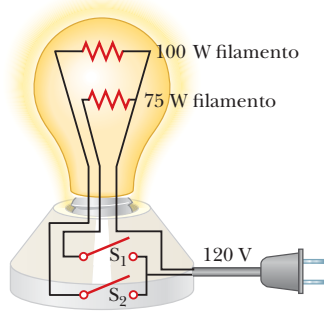


Figura P27.3

ción. (b) Dibuje un diagrama de circuito y (c) determine la potencia real entregada al foco en este circuito.

- CIC** Considere los dos circuitos mostrados en la figura P27.5 en el que las baterías son idénticas. La resistencia de cada foco es  $R$ . Ignore las resistencias internas de las baterías. (a) Determine las expresiones de las corrientes en cada foco. (b) ¿Cómo es el brillo de B comparado con el de C? Explique. (c) ¿Cómo es el brillo de A en comparación con el de B y de C? Explique.

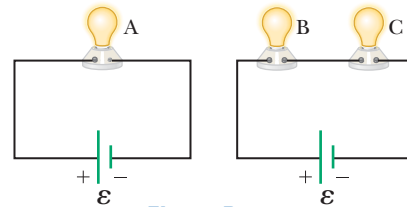


Figura P27.5

- Considere cadenas de luces incandescentes que se utilizan para muchos fines ornamentales, como la decoración de árboles de Navidad. Con los años, tanto las conexiones en serie como en serie se han utilizado para cadenas de luces, y los focos han variado en diseño. Debido a que los focos conectados en serie funcionan con menos energía por foco y a menor temperatura, son más seguros que los

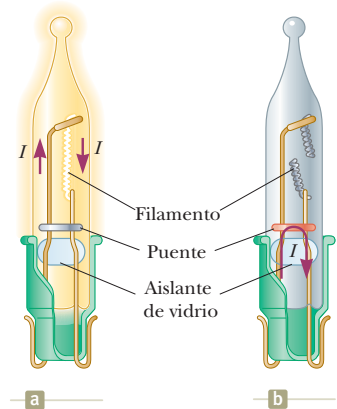


Figura P27.6

focos de conexión en paralelo, donde cada bombilla funciona a 120 V. Para evitar que la falla de un foco apague la cadena entera para los focos cableados en serie, se desarrolló un nuevo diseño. La figura P27.6a muestra uno de estos tipos de foco miniatura diseñada para operar en una conexión en serie. Cuando el filamento se rompe en uno de estos focos, la rotura en el filamento representa mayor resistencia de la serie, mucho más grande que la de los filamentos intactos. Como resultado, la mayoría de los 120 V aplicados aparecen a través del foco con el filamento roto. Dentro del foco, una pequeña espira puente cubierta por un material aislante se envuelve alrededor de los cables del filamento. Cuando el filamento falla y aparecen 120 V en el foco, un arco quema el aislamiento en el puente y conecta los cables del filamento, como se muestra en la Figura P27.6b. Esta conexión ahora proporciona una ruta de baja resistencia a través del foco, a pesar de que su filamento ya no está activo, y el voltaje a través del foco cae a cero. Todos los demás focos no solo permanecen encendidos sino que brillan más intensamente porque la resistencia total de la cadena se reduce y, en consecuencia, aumenta la corriente en cada foco restante. Supongamos que tiene una cadena de 48 focos, cada una con una resistencia de  $8.00 \Omega$ . Suponga que la resistencia de un foco con su filamento roto cae a cero. Supongamos que un foco se calienta peligrosamente, de modo que podría

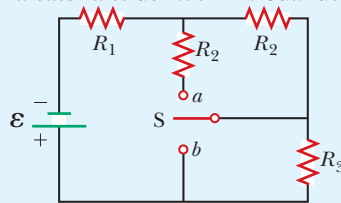


incendiar algo, si recibe una potencia de 1.75 W. ¿Cuántos focos pueden fallar antes de que la cadena de luces se vuelva peligrosa?

**7. CE** Usted está trabajando en un taller de fabricación de productos electrónicos. Su proyecto actual está en el equipo que produce resistencias para el circuito de temporizador que retrasa el cierre de la puerta de un elevador. De acuerdo con su especificación de diseño, el circuito del temporizador debe tener una resistencia de  $32.0 \Omega$  entre dos puntos A y B. A medida que sus resistencias salen de la línea de montaje, usted encuentra que tienen una variación del  $\pm 5.00\%$  de este valor. Después de una reunión del equipo para evaluar esta situación, el equipo decide que las resistencias en el rango  $32.0 \pm 0.5\%$  son aceptables y no necesitan modificación. Para resistencias fuera de este rango, el director no desea descartar las resistencias, sino agregar resistencias adicionales en serie o en paralelo con la resistencia principal para obtener la resistencia equivalente total al valor de diseño exacto de  $32.0 \Omega$ . Usted se pone a cargo de adquirir las resistencias adicionales. ¿Qué rango de resistencia para estas resistencias adicionales necesita para cubrir todo el rango de variación de  $\pm 5.00\%$ ? Todas las resistencias se pueden medir a tres cifras significativas.

**8. CE** En su nuevo trabajo en una empresa de ingeniería, su supervisora le pide que fabrique una resistencia que tenga una resistencia de  $R = 0.100 \Omega$  y *ningún* cambio en la resistencia con la temperatura. Ella sugiere hacer la resistencia a partir de longitudes de carbono cilíndrico y cables de nicrom de igual radio, colocados de extremo a extremo. Ella quiere que la combinación encaje en una máquina que permite que el radio de la resistencia sea de  $r = 1.50 \text{ mm}$ . ¿Cuáles son las longitudes de los dos segmentos de la resistencia?

**9. CE** Una batería con  $\mathcal{E} = 6.00 \text{ V}$  y sin resistencia interna, suministra corriente al circuito que se muestra en la figura P27.9. Cuando el interruptor de doble posición  $S$  está abierto, como se muestra, la corriente en la batería es de  $1.00 \text{ mA}$ . Cuando el interruptor se cierra en la posición  $a$ , la corriente en la batería es de  $1.20 \text{ mA}$ . Cuando el interruptor se cierra en la posición  $b$ , la corriente en la batería es de  $2.00 \text{ mA}$ . Determine las resistencias (a)  $R_1$ , (b)  $R_2$  y (c)  $R_3$ .



**Figura P27.9**  
Problemas 9 y 10.

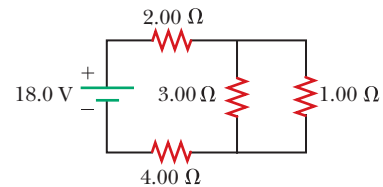
**10. S** Una batería con  $\mathcal{E}$  y sin resistencia interna, suministra corriente al circuito que se muestra en la figura P27.9. Cuando el interruptor de doble posición  $S$  está abierto, como se muestra, la corriente en la batería es  $I_0$ . Cuando el interruptor se cierra en la posición  $a$ , la corriente en la batería es  $I_a$ . Cuando el interruptor se cierra en la posición  $b$ , la corriente en la batería es  $I_b$ . Determine las resistencias (a)  $R_1$ , (b)  $R_2$  y (c)  $R_3$ .

**11. CE** La clase de hoy sobre corriente y resistencia está a punto de comenzar y usted espera a su profesor, que es conocido por sus demostraciones poco ortodoxas. ¡Él entra justo al comienzo de la clase y lleva hot dogs! A continuación, procede a organizar una demostración utilizando un antiguo estilo de cocina para hot dogs en el que éstos se conectan directamente a través de  $120 \text{ V}$  de la toma de corriente de la pared. Ha modificado la estufa para que aplique simultáneamente  $120 \text{ V}$  a tres combinaciones: en los extremos de

un solo hot dog, en los extremos de dos hot dogs en paralelo y en los extremos exteriores de dos hot dogs en serie. Él explica que ha medido la resistencia de un hot dog a  $11.0 \Omega$ , y que un hot dog necesita  $75.0 \text{ kJ}$  de energía para cocinarlo y dice que otorgará un crédito adicional a cualquier persona que, antes de que un hot dog comience a humear, pueda determinar (a) qué hot dog (s) se cocinará primero, y (b) el intervalo de tiempo para que cada hot dog se cocine. ¡Rápido! ¡Póngase a trabajar!

**12. V** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un técnico está probando un circuito que contiene una resistencia  $R$ . Se da cuenta de que un mejor diseño para el circuito incluiría una resistencia de  $7/3R$  en lugar de  $R$ . Él tiene tres resistores adicionales, cada uno con una resistencia  $R$ . Mediante la combinación de estos resistores adicionales en una forma determinada que luego se coloca en serie con la resistencia original, se logra la resistencia deseada.

**13. V** Calcule la potencia entregada a cada resistor en el circuito que se muestra en la figura P27.13.

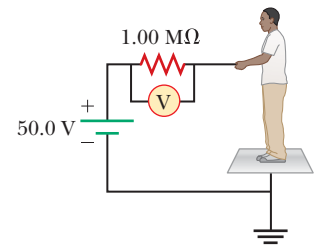


**Figura P27.13**

**14. BIO** Con el propósito de medir la resistencia eléctrica del calzado a una placa de tierra metálica a través del cuerpo del usuario, la American National Standards Institute (ANSI) especifica el circuito que se muestra en la figura P27.14. La diferencia de potencial  $\Delta V$  aplicada al resistor de  $1.00 \text{ M}\Omega$  se mide con un voltímetro ideal. (a) Demuestre que la resistencia del calzado está dada por

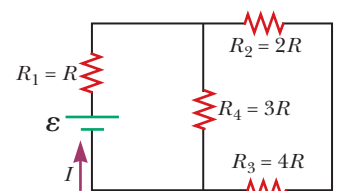
$$R_{\text{calzado}} = \frac{50.0 \text{ V} - \Delta V}{\Delta V}$$

(b) En una prueba médica, la corriente a través del cuerpo humano no debe exceder los  $150 \mu\text{A}$ . ¿La corriente especificada en el circuito de la ANSI puede exceder los  $150 \mu\text{A}$ ? Para poder decidir, piense en una persona de pie y descalza sobre una placa aterrizada.



**Figura P27.14**

**15. C/C S** Cuatro resistores están conectados a una batería, como se muestra en la figura P27.15. (a) Determine la diferencia de potencial a través de cada resistor en términos de  $\mathcal{E}$ . (b) Determine la corriente en cada uno de los resistores en función de  $I$ . (c) ¿Qué pasaría si? Si  $R_3$  aumenta, ¿qué le ocurre a la corriente en cada uno de los resistores? (d) En el límite de  $R_3 \rightarrow \infty$ , ¿cuáles son los nuevos valores de corriente en cada resistor en función de  $I$ , la corriente original de la batería?



**Figura P27.15**

**16.** Usted tiene un puesto de docente en una universidad comunitaria y está impartiendo una clase en tecnología automotriz. Está inmerso en una discusión sobre el uso de cables pasacorrente para arrancar un automóvil con la batería descargada desde un automóvil con una batería nueva. Ha dibujado el diagrama del circuito en la figura P27.16 para explicar el proceso. La batería de la izquierda es la batería en operación en el automóvil que funciona correctamente, con fem  $\mathcal{E}$  y resistencia interna  $R_L$ , donde el subíndice  $L$  se refiere a "en vivo". Sus terminales están conectadas directamente a través de los de la batería muerta, en el medio de la diagrama, con fem  $\mathcal{E}$  y resistencia interna  $R_D$ , donde el subíndice  $D$  se refiere a "muerto". Luego, el motor de arranque con la batería descargada se activa al cerrar el interruptor de encendido, lo que permite que el automóvil encienda. La resistencia del arranque es  $R_S$ . Un estudiante levanta la mano y pregunta: "¿Entonces se está cargando la batería descargada mientras el motor de arranque está en funcionamiento?" ¿Cómo responde?

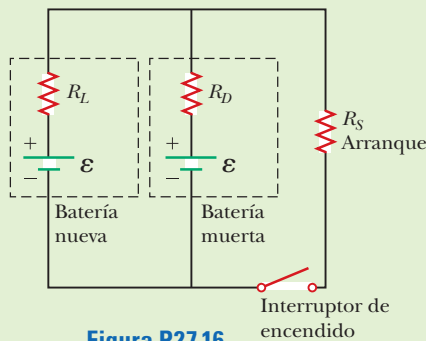


Figura P27.16

**SECCIÓN 27.3 Leyes de Kirchoff**

**17.** El circuito mostrado en la figura P27.17 está conectado durante 2.00 min. (a) Determine la corriente en cada una de las ramas del circuito. (b) Determine la energía entregada por cada batería. (c) Determine la energía entregada a cada resistor. (d) Identifique la transformación neta de energía que se presenta en el funcionamiento del circuito. (e) Determine la cantidad total de energía transformada en energía interna en los resistores.

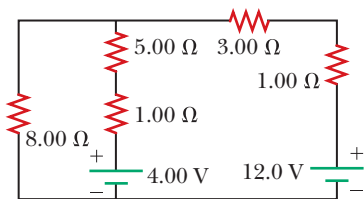


Figura P27.17

**18.** Las siguientes ecuaciones describen un circuito eléctrico:

$$\begin{aligned}
 -I_1 (220 \Omega) + 5.80 \text{ V} - I_2 (370 \Omega) &= 0 \\
 +I_2 (370 \Omega) + I_3 (150 \Omega) - 3.10 \text{ V} &= 0 \\
 I_1 + I_3 - I_2 &= 0
 \end{aligned}$$

(a) Dibuje un diagrama del circuito. (b) Calcule las incógnitas e identifique el significado físico de cada incógnita.

**19.** Si  $R = 1.00 \text{ k}\Omega$  y  $\mathcal{E} = 250 \text{ V}$  en la figura P27.19, determine la dirección y la magnitud de la corriente en el alambre horizontal entre  $a$  y  $e$ .

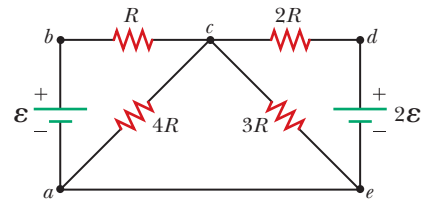


Figura P27.19

**20.** En el circuito de la figura P27.20, la corriente  $I_1 = 3.00 \text{ A}$  y los valores de  $\mathcal{E}$  para la batería ideal y  $R$  son desconocidos. ¿Cuáles son las corrientes (a)  $I_2$  y (b)  $I_3$ ? (c) ¿Puede encontrar los valores de  $\mathcal{E}$  y  $R$ ? Si es así, determine sus valores. Si no, explique.

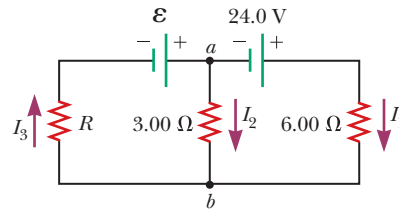


Figura P27.20

**21.** (a) ¿El circuito mostrado en la figura P27.21 puede reducirse a una sola resistencia conectada a una batería? Explique. Calcule las corrientes (b)  $I_1$ , (c)  $I_2$ , y (d)  $I_3$ .

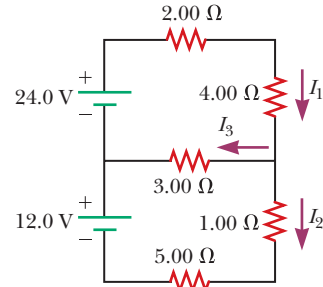


Figura P27.21

**22.** Para el circuito mostrado en la Figura P27.22, se desea encontrar las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$ . Utilice las leyes de Kirchoff para obtener las ecuaciones para (a) el circuito superior, (b) el circuito inferior, y (c) la unión en el lado izquierdo. En cada caso, suprima las unidades para claridad y simplificación, combinando los términos. (d) Resuelva la ecuación en la unión para  $I_3$ . (e) Usando la ecuación que determinó en el inciso (d), elimine  $I_3$  de la ecuación que se determinó en el inciso (b). (f) Resuelva las ecuaciones que se determinaron en los incisos (a) y (e) de forma simultánea para las dos incógnitas  $I_1$  e  $I_2$ . (g) Sustituya las respuestas encontradas en el inciso (f) en la ecuación de la unión determinada en el inciso (d), para la solución de  $I_3$ . (h) ¿Cuál es el significado de la respuesta negativa de  $I_2$ ?

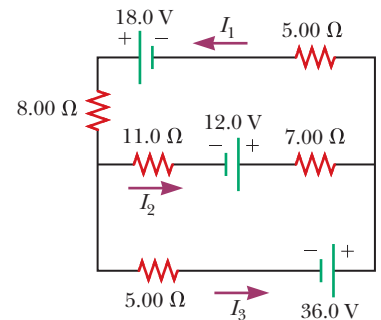
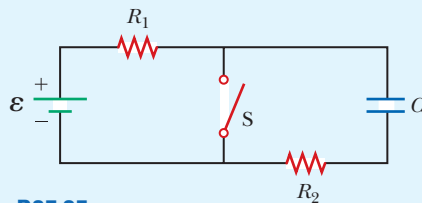


Figura P27.22

**SECCIÓN 27.4 Circuitos RC**

23. Un capacitor descargado y un resistor están conectados en serie a una fuente de fem. Si  $\mathcal{E} = 9.00 \text{ V}$ ,  $C = 20.0 \mu\text{F}$ , y  $R = 100 \Omega$ , encuentre (a) la constante de tiempo del circuito, (b) la carga máxima en el capacitor y (c) la carga en el capacitor en el instante igual a una constante de tiempo después de que la batería se conecta.
24. Demuestre que la constante de tiempo en la ecuación 27.20 tiene unidades de tiempo.
25. En el circuito de la figura P27.25 el interruptor S, que ha estado abierto durante mucho tiempo, se cierra repentinamente. Sea  $\mathcal{E} = 10.0 \text{ V}$ ,  $R_1 = 50.0 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$  y  $C = 10.0 \mu\text{F}$ . Determine la constante de tiempo (a) antes de que el interruptor se cierre y (b) después de que el interruptor ha cerrado. (c) Suponga que el interruptor se cierra en  $t = 0$ . Determine la corriente que pasa por el interruptor como una función del tiempo.



**Figura P27.25** Problemas 25 y 26.

26. En el circuito de la figura P27.25 el interruptor S, que ha estado abierto durante mucho tiempo, se cierra repentinamente. Determine la constante de tiempo (a) antes de que el interruptor se cierre y (b) después de que el interruptor ha cerrado. (c) Suponga que el interruptor se cierra en  $t = 0$ . Determine la corriente que pasa por el interruptor como una función del tiempo.
27. Un capacitor de  $10.0 \mu\text{F}$  se carga mediante una batería de  $10.0 \text{ V}$  a través de una resistencia  $R$ . El capacitor alcanza una diferencia de potencial de  $4.00 \text{ V}$  en un intervalo de tiempo de  $3.00 \text{ s}$  después de comenzar la carga. Encuentre  $R$ .
28. Demuestre que la integral  $\int_0^\infty e^{-2t/RC} dt$  en el ejemplo 27.11 tiene el valor  $\frac{1}{2}RC$ .

**SECCIÓN 27.5 Cableado doméstico y seguridad eléctrica**

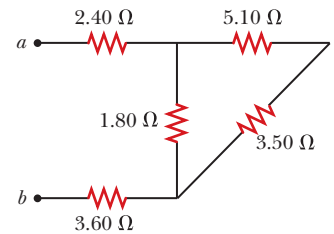
29. Usted y sus compañeros de cuarto están estudiando mucho para su examen de física. Estudia hasta altas horas de la noche y luego cae en su cama para dormir un poco. Todos ustedes se despiertan temprano antes del examen y se pelean sobre qué preparar para el desayuno. No pueden ponerse de acuerdo sobre lo que deben preparar, por lo que uno de ustedes cocina waffles en una wafflera de 990 watts mientras que otro tuesta pan en una tostadora de 900 watts. Desea hacer café con una cafetera de 650 watts, y lo conecta a la misma barra de contactos en la que se enchufan la wafflera y la tostadora. ¿El interruptor de circuito 20-A permanecerá en funcionamiento?
30. Un calentador eléctrico con  $1.5 \times 10^3 \text{ W}$ , un tostador de  $750 \text{ W}$  y una parrilla eléctrica de  $1.0 \times 10^3 \text{ W}$  están conectados a un circuito doméstico normal de  $120 \text{ V}$ . (a) ¿Cuánta corriente consume cada uno? (b) Si el circuito está protegido por un fusible de  $25.0 \text{ A}$ , ¿Para este caso es suficiente un fusible? Explique su respuesta.
31. Encienda su lámpara de escritorio. Tome el cable con la mano y sosténgalo entre el pulgar y el índice. (a) Haga una estimación, con un orden de magnitud, de la corriente que

pasa por su mano. Puede suponer que en un instante dado en el interior del cable de la lámpara el conductor cercano a su pulgar se encuentra a un potencial  $\sim 10^2 \text{ V}$  y que el conductor cercano a su índice se encuentra al potencial de tierra ( $0 \text{ V}$ ). La resistencia de su mano depende de manera importante del espesor y el contenido de humedad de las capas superiores de su piel. Suponga que la resistencia de su mano entre las puntas de sus dedos índice y pulgar es de  $\sim 10^4 \Omega$ . Usted puede representar el cable conteniendo un aislamiento de hule. Enuncie otras cantidades que haya medido o estimado, así como sus valores. Explique su razonamiento. (b) Suponga que su cuerpo se encuentra aislado de cualesquiera otras cargas o corrientes. Describa en términos de un orden de magnitud el potencial de su pulgar donde toca el cable, y el potencial de su índice donde toca el cable.

**PROBLEMAS ADICIONALES**

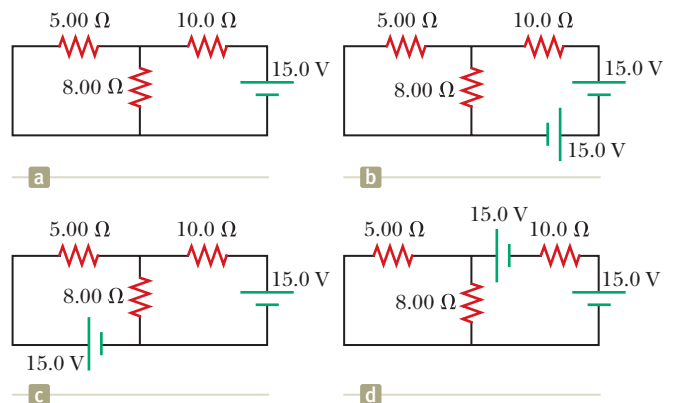
32. Cuatro resistores están conectados en paralelo con una batería de  $9.20 \text{ V}$ . Transportan corrientes de  $150 \text{ mA}$ ,  $45.0 \text{ mA}$ ,  $14.00 \text{ mA}$  y  $4.00 \text{ mA}$ . (a) Si el resistor de mayor resistencia es reemplazado con uno que soporte el doble, ¿cuál es la razón entre la nueva corriente de la batería a la original? (b) ¿Qué pasaría si? Si se reemplaza el resistor con menor resistencia por uno con el doble de ésta, ¿cuál es la relación entre la nueva corriente total y la original? (c) En una noche de febrero, una casa pierde energía debido a varias fugas de calor, incluyendo las siguientes:  $15 \times 10^3 \text{ W}$  por conducción a través del techo,  $450 \text{ W}$  por filtración (flujo de aire) alrededor de las ventanas,  $140 \text{ W}$  por conducción a través de la pared del sótano por arriba de los cimientos de la casa y  $40.0 \text{ W}$  por conducción a través de la puerta de triplay del desván. Para tener un máximo de ahorro en gastos por calefacción, ¿cuál de estas pérdidas de energía debe reducirse primero? Explique cómo decide. Clifford Swartz sugirió la idea para este problema.

33. Encuentre la resistencia equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$  en la figura P27.33.



**Figura P27.33**

34. El circuito de la figura P27.34a consiste en tres resistores y una batería sin resistencia interna. (a) Encuentre la corriente en el resistor de  $5.00 \Omega$ . (b) Encuentre la potencia entregada al resistor de  $5.00 \Omega$ . (c) En cada uno de los circuitos de las figuras P27.34b, P27.34c y P27.34d, se insertó en el circuito una batería adicional de



**Figura P27.34**

15.0 V. ¿Cuál diagrama o diagramas representa un circuito que requiera el uso de las reglas de Kirchhoff para encontrar las corrientes? Explique por qué. (d) ¿En cuál de estos tres circuitos se entrega la menor cantidad de potencia al resistor de  $10.0 \Omega$ ? (No necesita calcular la potencia en cada circuito si explica su respuesta.)

35. El circuito de la figura P27.35 se conectó durante varios segundos. Encuentre la corriente (a) en la batería de 4.00 V, (b) en el resistor de  $3.00 \Omega$  (c) en la batería de 8.00 V y (d) en la batería de 3.00 V. (e) Encuentre la carga en el capacitor.

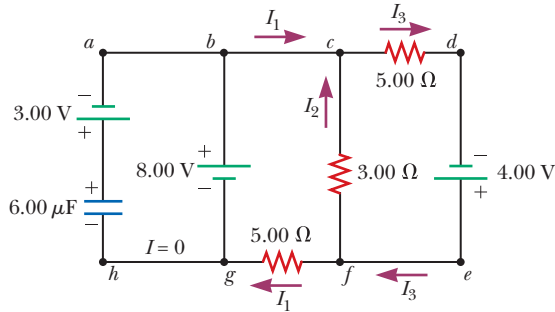


Figura P27.35

36. La resistencia entre las terminales  $a$  y  $b$  en la figura P27.36 es  $75.0 \Omega$ . Si los resistores están marcados  $R$  tienen el mismo valor, determine  $R$ .

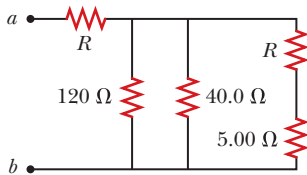


Figura P27.36

37. (a) Calcule la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$  en la figura P27.37 y (b) identifique qué punto tiene el potencial más alto.

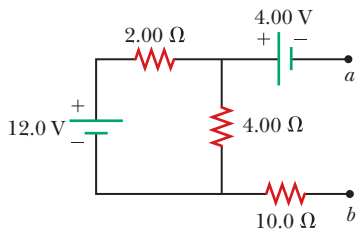


Figura P27.37

38. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Una batería tiene una fem  $\mathcal{E} = 9.20 \text{ V}$  y una resistencia interna  $r = 1.20 \Omega$ . Se conecta un resistor  $R$  a través de la batería y extrae de ella una potencia de  $P = 21.2 \text{ W}$ .

39. Cuando dos resistores desconocidos están conectados en serie con una batería, la batería entrega 225 W y transporta una corriente total de 5.00 A. Para la misma corriente total, se entregan 50.0 W cuando los resistores se conectan en paralelo. Determine los valores de los dos resistores.

40. Cuando dos resistores desconocidos están conectados en serie con una batería, ésta entrega una potencia total  $P_s$  y lleva una corriente total de  $I$ . Para la misma corriente total, se entrega una potencia total  $P_p$  cuando los resistores están

conectados en paralelo. Determine los valores de cada resistor.

41. El circuito de la figura P27.41 contiene dos resistores  $R_1 = 2.00 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 3.00 \text{ k}\Omega$ , y dos capacitores  $C_1 = 2.00 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 3.00 \mu\text{F}$ , conectados a una batería con fem  $\mathcal{E} = 120 \text{ V}$ . Si no hay carga en los capacitores antes de que el interruptor  $S$  se cierre, determine las cargas de los capacitores (a)  $C_1$  y (b)  $C_2$  en función del tiempo, después de que el interruptor se cierra.

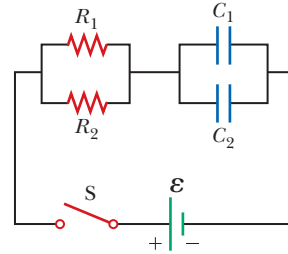


Figura P27.41

42. Dos resistores  $R_1$  y  $R_2$  están en paralelo. Juntos llevan una corriente total  $I$ . (a) Determine la corriente en cada resistor. (b) Demuestre que esta división de la corriente total  $I$  entre ambos resistores da como resultado menos potencia entregada a la combinación que cualquier otra división. Es un principio general que *la corriente en un circuito de corriente directa se autodistribuye para que la potencia total entregada al circuito sea mínima*.

43. Una fuente de energía que tiene un voltaje de circuito abierto de 40.0 V y una resistencia interna de  $2.00 \Omega$  es utilizada para cargar dos baterías conectadas en serie, cada una con una fem de 6.00 V y una resistencia interna de  $0.300 \Omega$ . Si la corriente de carga debe ser de 4.00 A, (a) ¿cuál es la resistencia adicional que debe añadirse en serie?, ¿a qué rapidez se incrementa la energía interna en (b) la fuente, (c) en las baterías, y (d) en la resistencia en serie añadida?, (e) ¿a qué rapidez se incrementa la energía química en las baterías?

44. Una batería es utilizada para cargar un capacitor a través de un resistor, como se muestra en la figura P27.44. Demuestre que la mitad de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en el resistor y que la otra mitad es almacenada en el capacitor.

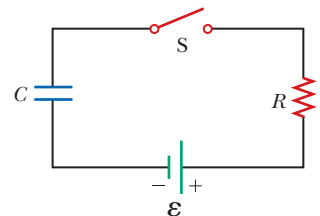


Figura P27.44

45. Un voltímetro ideal, conectado a través de cierta batería fresca de 9 V, lee 9.30 V, y un amperímetro ideal conectado brevemente a través de la misma batería lee 3.70 A. Se dice que la batería tiene un voltaje de circuito abierto de 9.30 V y una corriente de cortocircuito de 3.70 A. Modele la batería como una fuente de fem  $\mathcal{E}$  en serie con una resistencia interna  $r$  como en la figura 27.1a. (a) Determine tanto  $\mathcal{E}$  como (b)  $r$ . Un experimentador conecta 20 de estas baterías idénticas como se sugiere en la figura P27.45. Determine (c) el voltaje de circuito abierto y (d) la corriente de corto-circuito del par de baterías conectadas. (e) El experimen-

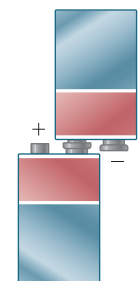


Figura P27.45



tador conecta una resistencia de  $12.0 \Omega$  entre las terminales expuestas de las baterías conectadas. Encuentre la corriente en el resistor. (f) Determine la potencia entregada al resistor. (g) El experimentador conecta un segundo resistor idéntico en paralelo con el primero. Encuentre la potencia suministrada a cada resistor. (h) Debido a que el mismo par de baterías está conectado a través de ambos resistores como lo estaba a través de un solo resistor, ¿por qué la potencia en el inciso (g) no es la misma que la del inciso (f)?

- 46.** (a) Determine la carga de equilibrio en el capacitor del circuito de la figura P27.46 como función de  $R$ . (b) Evalúe la carga cuando  $R = 10.0 \Omega$ . (c) ¿La carga en el capacitor puede ser cero? Si es así, ¿para qué valor de  $R$ ? (d) ¿Cuál es la máxima magnitud posible de la carga en el capacitor? ¿Para qué valor de  $R$  se logra? (e) ¿Experimentalmente es significativo tomar  $R = \infty$ ? Explique su respuesta. Si es así, ¿qué magnitud de carga implica?

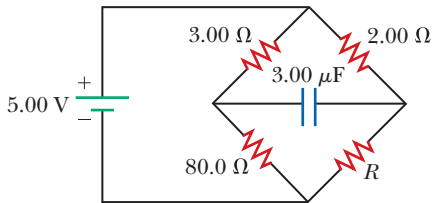


Figura P27.46

- 47.** Suponga que en la figura P27.47 el interruptor ha estado cerrado durante un tiempo suficientemente largo para que el capacitor se cargue por completo. Determine (a) la corriente en estado estacionario de cada resistor y (b) la carga  $Q_{max}$  del capacitor. (c) Ahora el interruptor se abre en  $t = 0$ . Escriba una ecuación para la corriente en  $R_2$  como una función del tiempo y (d) determine el intervalo de tiempo necesario para que la carga del capacitor se reduzca a un quinto de su valor inicial.

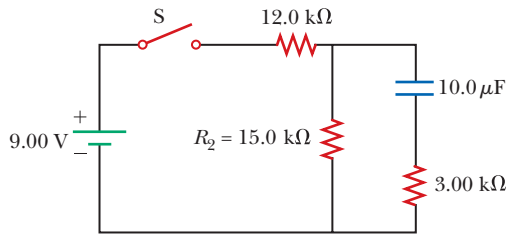


Figura P27.47

- 48.** La figura P27.48 muestra el modelo de un circuito para la transmisión de una señal eléctrica, como por ejemplo televisión por cable, a un gran número de suscriptores. Cada suscriptor conecta una resistencia de carga  $R_L$  entre la línea de transmisión y la tierra. Supuestamente la tierra se encuentra a potencial cero y es capaz de conducir corriente de cualquier tamaño entre cualquier conexión a tierra con una resistencia despreciable. La resistencia de la línea de transmisión entre los puntos de conexión de diferentes suscriptores se puede modelar como una resistencia  $R_T$  constante. Demuestre que la resistencia equivalente entre las terminales de la fuente de la señal es

$$R_{eq} = \frac{1}{2} [(4R_T R_L + R_T^2)^{1/2} + R_T]$$

*Sugerencia:* Ya que hay una gran cantidad de suscriptores, la resistencia equivalente no debería cambiar mucho si el primer suscriptor cancela su servicio. En consecuencia, la resistencia equivalente de la sección de circuito a la derecha del primer resistor de carga es casi igual a  $R_{eq}$ .

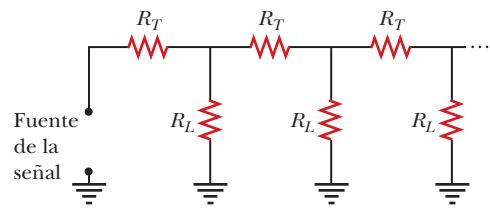


Figura P27.48

- 49.** Un estudiante de ingeniería, que es el operador de una estación de radio universitaria, desea verificar la efectividad del pararrayos instalado en la antena (figura P27.49). La resistencia desconocida  $R_x$  está entre los puntos  $C$  y  $E$ . El punto  $E$  es una tierra verdadera, pero no puede medirla directamente, ya que se encuentra varios metros por debajo de la superficie de la Tierra.

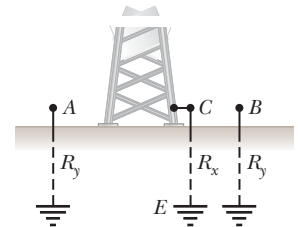


Figura P27.49

- (a) Deduzca una ecuación para  $R_x$  en función de las resistencias observables,  $R_1$  y  $R_2$ . (b) Una resistencia a tierra satisfactoria debería ser  $R_x < 2.00 \Omega$ . ¿Es la puesta a tierra de la estación de radio lo adecuado si las mediciones dan  $R_1 = 13.0 \Omega$  y  $R_2 = 6.00 \Omega$ ? Explique.

- 50.** Se aplica un voltaje de  $\Delta V$  a una configuración en serie de  $n$  resistores, cada uno con resistencia  $R$ . Los componentes del circuito se vuelven a conectar en una configuración en paralelo se aplica de nuevo el voltaje  $\Delta V$ . Demuestre que la potencia entregada a la configuración en serie es  $1/n^2$  veces la potencia entregada a la configuración en paralelo.

**PROBLEMAS DE DESAFÍO**

- 51.** El interruptor en la figura P27.51a se cierra cuando  $\Delta V_c > \frac{2}{3} \Delta V$  y se abre cuando  $\Delta V_c < \frac{1}{3} \Delta V$ . El voltímetro lee el voltaje como aparece en la figura P27.51b. ¿Cuál es el periodo  $T$  de la forma de onda en función de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$ ?

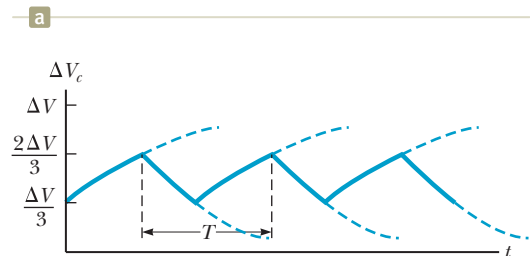
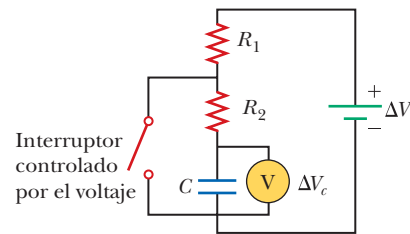


Figura P27.51





Esta es una vista de piloto de una pista de aterrizaje poco antes de que el avión descienda sobre ella. ¿Qué significan los símbolos "35R"? (Craig Mills / Shutterstock)

- 28.1 Modelo de análisis: Partícula en un campo (magnético)
- 28.2 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme
- 28.3 Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético
- 28.4 Fuerza magnética que actúa sobre un conductor que transporta corriente
- 28.5 Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme
- 28.6 El efecto Hall

**IMAGINE** Su familia está tomando un viaje a la Columbia Británica por vía aérea. Después de aterrizar en Vancouver, toma un pequeño avión privado hasta un aeropuerto local. Le sorprende que pueda mirar directamente a la cabina y ver lo que el piloto ve por la ventana delantera. Su vista es especialmente emocionante ya que está aterrizando. Notará que la pista que tiene delante tiene los caracteres "35R" pintados en ella y se pregunta cómo se determina ese número de pista. Después de aterrizar en el aeropuerto local, el plan de su familia es internarse en la naturaleza y tratar de encontrar el camino con una brújula de teléfono inteligente. Saca su teléfono inteligente, abre la aplicación de la brújula y apunta en una dirección, diciendo: "¡Eso es el Norte!" Otro miembro de su familia le dice que ese no es el Norte verdadero, porque la costa oeste de Canadá tiene una declinación magnética relativamente grande. Al no haber oído hablar de la declinación magnética, silenciosamente guarda su teléfono mientras el otro miembro de la familia usa algunas matemáticas para determinar la dirección real del verdadero Norte. Promete pasar algún tiempo en su habitación de hotel esta noche buscando la *declinación magnética* en línea.

**CONEXIONES** Al comienzo del capítulo 22, investigamos algunos fenómenos interesantes relacionados con la electricidad: un globo frotado en el cabello atrae trozos de papel, frota los zapatos sobre una alfombra de lana y toca a un amigo para crear una chispa. Muchos de nosotros también hemos experimentado los efectos del magnetismo en nuestras vidas. Cuando éramos niños, pudimos haber jugado con imanes o explorado con una brújula. En este capítulo, exploramos un nuevo tipo de campo, el campo magnético. Esta investigación se conectará a los últimos capítulos en los que encontramos que el campo magnético ejerce fuerzas sobre partículas cargadas eléctricamente. Sin embargo, estas fuerzas ocurren solo si las partículas cargadas se están moviendo. Este hecho formará la base de todo lo que estudiamos en este capítulo.

En el capítulo siguiente, investigaremos otra conexión fuerte entre la electricidad y el magnetismo al mostrar que la fuente de un campo magnético está moviendo cargas eléctricas. A medida que avanzamos, descubriremos que estas conexiones entre la electricidad y el magnetismo conducen a la existencia de ondas electromagnéticas, que estudiamos en el capítulo 33. La existencia de estas ondas, a su vez, conduce a todo el tema de la óptica, sobre el cual aprender en los capítulos 34 a 37.

## 28.1 Modelo de análisis: Partícula en un campo (magnético)

Cuando se estudió la electricidad en el capítulo 22, se describieron las fuerzas eléctricas entre partículas cargadas. Luego hicimos un gran progreso en nuestra comprensión al introducir la noción de un campo eléctrico. Estudiamos en detalle los efectos sobre una partícula cargada colocada en un campo eléctrico. Seguiremos un proceso similar aquí, con algunas diferencias. Debido a que los efectos magnéticos, como el de un imán de barra que levanta un clip, se producen a distancia sin necesidad de contacto físico, simplemente asumiremos la existencia de un *campo magnético* por el momento. Exploraremos el comportamiento de las partículas cargadas que residen en ese campo. Debido a que la fuente de un campo magnético es más complicada que la de un campo eléctrico, pospondremos una explicación detallada de la fuente de un campo magnético hasta el capítulo 29, y dedicaremos todo ese capítulo a esa explicación. Digamos por ahora que la región del espacio que rodea cualquier carga eléctrica *en movimiento* contiene un **campo magnético**. Un campo magnético también rodea una sustancia magnética que forma un imán permanente.

La fuente de cualquier campo magnético posee dos polos, un polo norte y un polo sur. Los polos recibieron sus nombres debido a la forma en que un imán, como el de una brújula, se comporta en presencia del campo magnético de la Tierra. Si un imán de barra está suspendido desde su punto medio y puede balancearse libremente en un plano horizontal, rotará hasta que su polo norte magnético apunte hacia el Polo Norte geográfico de la Tierra y su polo sur magnético apunta hacia el Polo Sur geográfico de la Tierra. Los polos de un imán tienen algunas similitudes con las cargas eléctricas: los experimentos muestran que los polos magnéticos ejercen fuerzas atractivas o repulsivas entre sí y que estas fuerzas varían como el cuadrado inverso de la distancia entre los polos que interactúan. Sin embargo, existen grandes diferencias entre las cargas eléctricas y los polos magnéticos. Por ejemplo, las cargas eléctricas pueden aislarse (vea al electrón y al protón), mientras que nunca se ha aislado un solo polo magnético; Los polos magnéticos siempre se encuentran en pares. Hasta ahora todos los intentos para detectar un polo magnético aislado han sido infructuosos. No importa cuántas veces se corte un imán permanente en dos, cada pieza siempre tiene un polo norte y un polo sur.

Históricamente el símbolo  $\vec{B}$  ha sido utilizado para representar el campo magnético, y ésta es la notación utilizada en este libro. La dirección del campo magnético  $\vec{B}$  en cualquier sitio es la dirección a la cual apunta la aguja de una brújula colocada en dicha posición. Igual que en el caso del campo eléctrico, es posible representar el campo magnético gráficamente utilizando *líneas de campo magnético*.

La figura 28.1 muestra cómo pueden trazarse las líneas del campo magnético de un imán de barra con ayuda de una brújula. Observe que las líneas de campo magnético en el exterior del imán apuntan alejándose del polo norte y hacia el polo sur. Es posible mostrar los patrones de campo magnético de un imán de barra utilizando pequeñas limaduras de hierro, como se muestra en la figura 28.2 (página 744).

La configuración del campo magnético de la Tierra, ilustrada en la figura 28.3 (página 744), es muy similar a la que se lograría al enterrar un gigantesco imán de barra en lo profundo del interior de la Tierra. La razón por la cual el polo norte de un imán es atraído hacia el polo geográfico norte de la Tierra es que el polo sur del imán de barra modelo se encuentra actualmente cerca del polo geográfico norte. Si una aguja de la brújula es soportada por rodamientos que le permiten rotar tanto en el plano vertical como en el plano horizontal, la aguja es horizontal con respecto a la superficie de la Tierra solo cerca del ecuador. A medida que la brújula se mueve

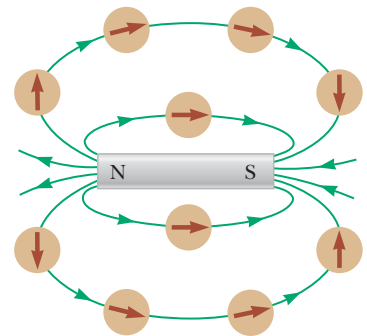


NorthWindPicture Archives

### Hans Christian Oersted

*Físico y químico danés (1777-1851)*

Oersted es más conocido por haber observado que la aguja de una brújula se desvía cuando se le coloca cerca de un alambre que lleva corriente. Este importante descubrimiento fue la primera evidencia de la relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos. Oersted también fue el primero en obtener aluminio puro.



**Figura 28.1** Con la aguja de la brújula pueden trazarse las líneas de campo magnético en la región externa de un imán de barra.

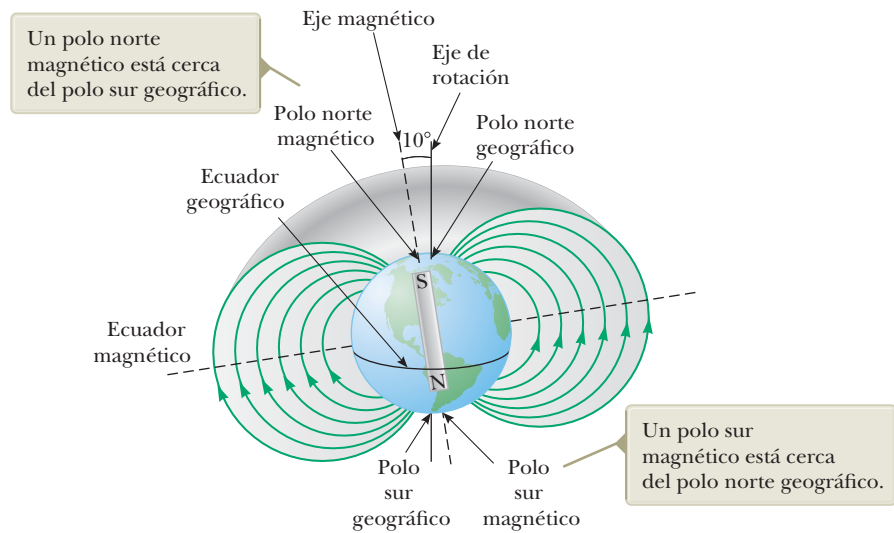


**Figura 28.2** Patrón de campo magnético desplegado con limaduras de hierro espolvoreadas en un papel cerca de un imán.



Cortésia de Henry Leap and Jim Lehman

**Figura 28.3** La Tierra es magnética, las líneas de campo se pueden modelar como un imán de barra. Tenga en cuenta que el polo norte geomagnético está asociado con el polo sur del imán modelo.



hacia el norte, la aguja gira de manera que apunte cada vez más hacia la superficie de la Tierra. Finalmente, en algún punto, el polo norte de la aguja apunta directamente hacia abajo.

El modelo de imán de barra en la figura 28.3 está simplificado. Debido a que el campo magnético de la Tierra no es exactamente el mismo que el de un simple imán de barra, y debido a que existen anomalías magnéticas en la corteza terrestre, en realidad existen dos tipos de polos magnéticos. El punto en la superficie en el que una aguja de la brújula apunta hacia abajo es el **polo norte magnético**. La posición del polo magnético se ha movido a lo largo de cientos de millas desde el año 1900, desde la latitud  $70^\circ$  N hasta su latitud actual de  $86^\circ$  N. El **polo norte geomagnético** es el punto en la superficie de la Tierra en el cual el eje magnético se cruza con la superficie. Por el contrario, este punto se ha movido solo a una distancia relativamente pequeña alrededor de la latitud  $80^\circ$  N desde 1900. Mientras que el polo norte magnético se ha movido hacia el norte, más cerca del polo norte geográfico, el polo sur también se ha movido hacia el norte, lejos del polo geográfico sur. Actualmente se encuentra cerca de la latitud  $65^\circ$  S, mientras que el polo geomagnético sur está cerca de  $80^\circ$  S.

Es esta diferencia entre los polos norte geográficos y magnéticos lo que causa la dificultad de determinar el Norte con una brújula mencionada en el "Imagine" de apertura. Su brújula apuntará hacia el polo norte magnético, pero en una región como Columbia Británica, esa dirección es bastante diferente de la dirección a lo largo de una línea de longitud hacia el Polo Norte geográfico. Por ejemplo, en Vancouver, la

aguja de tu brújula apunta alrededor de  $17^\circ$  al este del norte verdadero. El número en el marcador de pista en la fotografía de apertura del capítulo se refiere a la dirección de la pista con respecto al norte magnético, dividido por 10. Por tanto, la pista 35 está orientada  $350^\circ$ , medida en sentido horario, desde el norte magnético. La letra R nos dice que hay al menos dos pistas paralelas en esta dirección, y está a la *derecha*. La otra pista está marcada 35L, para *izquierda*, e incluso puede haber 35C para el *centro*. En el aeropuerto internacional de Vancouver, hay dos pistas en una orientación de  $100^\circ$  con respecto al norte verdadero. Debido a la declinación magnética, sin embargo, no están marcados como pista 10, sino más bien como pistas 8L y 8R, porque están orientadas  $83^\circ$  desde el norte magnético.

La dirección del campo magnético de la Tierra se ha invertido varias veces durante el último millón de años. La evidencia de este fenómeno se encuentra en el basalto, un tipo de roca que contiene hierro y que se forma con base en el material expulsado por actividad volcánica en el fondo del océano. Conforme la lava se enfría se solidifica y conserva una huella de la dirección del campo magnético de la Tierra. Mediante otros medios se determina la edad de estas rocas a fin de tener un calendario de estas inversiones periódicas del campo magnético.

Podemos cuantificar el campo magnético  $\vec{B}$  mediante el uso de nuestro modelo de una partícula en un campo, igual que con el modelo para la gravedad analizado en el capítulo 13 y el de la electricidad en el capítulo 22. La existencia de un campo magnético en algún punto en el espacio puede determinarse midiendo la magnitud de la **fuerza magnética**  $\vec{F}_B$  que ejerce el campo sobre una partícula de prueba ubicada en ese punto. Este proceso es el mismo que seguimos en la definición del campo eléctrico en el capítulo 22. Si realizamos un experimento colocando una partícula cargada  $q$  en el campo magnético, nos encontramos con los siguientes resultados que son similares a los de los experimentos con las fuerzas eléctricas, donde  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  (ecuación 22.8):

- La fuerza magnética es proporcional a la carga  $q$  de la partícula.
- La fuerza magnética ejercida sobre una carga negativa tiene dirección opuesta a la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre una carga positiva que se mueva en la misma dirección.
- La fuerza magnética es proporcional a la magnitud del vector de campo magnético  $\vec{B}$ .

También encontramos los siguientes resultados, que son *totalmente diferentes* de los de los experimentos con las fuerzas eléctricas:

- La fuerza magnética es proporcional a la rapidez  $v$  de la partícula.
- Si el vector velocidad forma un ángulo  $\theta$  con el campo magnético, la magnitud de la fuerza magnética es proporcional al seno de  $\theta$ .
- Cuando una partícula cargada se mueve *paralela* al vector de campo magnético, la fuerza magnética que actúa sobre ella es igual a cero.
- Cuando una partícula cargada se mueve de forma *no* paralela al vector de campo magnético, la fuerza magnética actúa en dirección perpendicular a  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ , es decir, la fuerza magnética es perpendicular al plano formado por  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ .

Estos resultados muestran que la fuerza magnética sobre una partícula es más complicada que la fuerza eléctrica. La fuerza magnética es distintiva porque depende de la velocidad de la partícula y porque su dirección es perpendicular tanto a  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ . La figura 28.4 (página 746) muestra los detalles de la dirección de la fuerza magnética sobre una partícula cargada. A pesar de este complicado comportamiento, estas observaciones pueden ser resumidas en una forma compacta al escribir la fuerza magnética como

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (28.1)$$

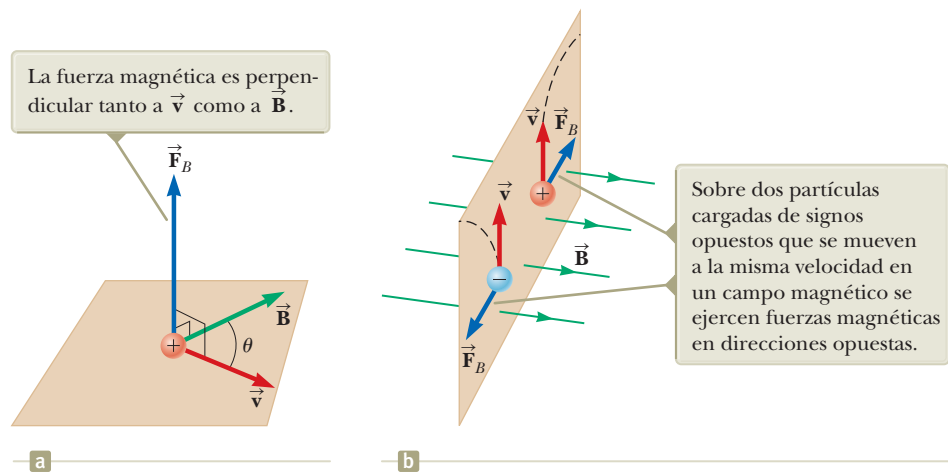
que por definición del producto vectorial (vea la sección 11.1) es perpendicular tanto a  $\vec{v}$  como a  $\vec{B}$ . Esta ecuación es una definición operacional del

◀ Expresión vectorial de la fuerza magnética que se ejerce sobre una partícula cargada en movimiento en un campo magnético





**Figura 28.4** (a) Dirección de la fuerza magnética  $\vec{F}_B$  que actúa sobre una partícula cargada que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$ . (b) Fuerzas magnéticas sobre una carga positiva y una negativa. Un campo magnético uniforme está representado por líneas de campo uniformemente espaciadas. En cualquier punto, el vector de campo magnético  $\vec{B}$  es paralelo a la línea de campo. Las líneas discontinuas muestran la trayectoria de las partículas, las cuales investigaremos en la sección 28.2.

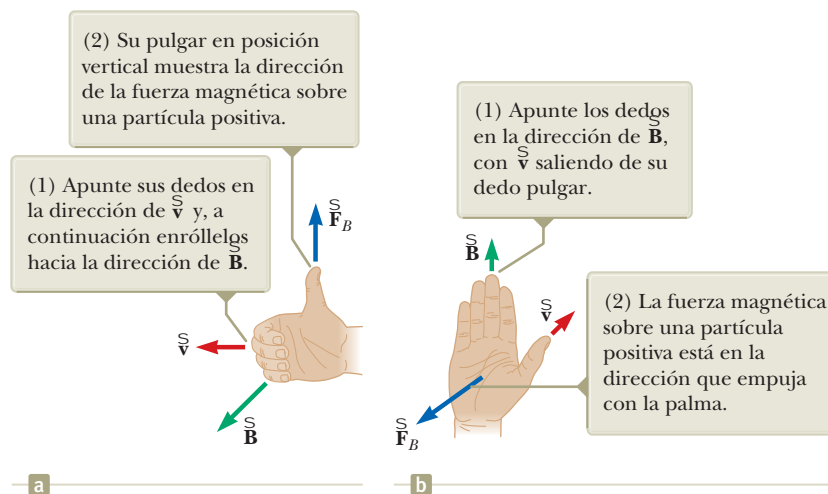


campo magnético en algún punto en el espacio. Esto es, el campo magnético está definido en función de la fuerza que actúa sobre una partícula cargada en movimiento. La ecuación 28.1 es la representación matemática de la versión magnética del análisis del modelo de la **partícula en un campo** y es la analogía magnética para la ecuación 22.8.

La figura 28.5 analiza dos reglas de la mano derecha para determinar la dirección del producto cruz  $\vec{v} \times \vec{B}$  y la dirección de  $\vec{F}_B$ . La regla de la figura 28.5a depende de la regla de la mano derecha para el producto cruz de la figura 11.2. Dirija los cuatro dedos de su mano derecha a lo largo de la dirección de  $\vec{v}$ , manteniendo la palma de cara a  $\vec{B}$ , y cierre los dedos hacia  $\vec{B}$ . El pulgar extendido, que forma un ángulo recto con los dedos, apunta en la dirección de  $\vec{v} \times \vec{B}$ . Ya que  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ ,  $\vec{F}_B$  queda en la dirección del pulgar si  $q$  es positiva y en la dirección opuesta si  $q$  es negativa. (Si necesita más elementos para comprender el producto cruz, sería útil repasar la sección 11.1, incluyendo la figura 11.2.)

En la figura 28.5b se muestra una regla alterna. En este caso el pulgar apunta en la dirección de  $\vec{B}$  y los dedos extendidos en la dirección de  $\vec{v}$ . Ahora la fuerza  $\vec{F}_B$  que se ejerce sobre una carga positiva se extiende hacia afuera desde la palma de la mano. La ventaja de esta regla es que la fuerza sobre la carga está en la dirección en que se debería empujar con la mano, es decir, hacia afuera de la palma. La fuerza ejercida sobre una carga negativa está en la dirección opuesta. Utilice libremente cualquiera de estas dos reglas

**Figura 28.5** Dos reglas de la mano derecha para determinar la dirección de la fuerza magnética  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$  que actúa sobre una partícula cargada  $q$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  en un campo magnético  $\vec{B}$ . (a) En esta regla, la fuerza magnética está en la dirección en la cual su dedo pulgar apunta. (b) En esta regla, la fuerza magnética está en dirección de la palma, como si se estuviera empujando la partícula con la mano.





Tomando como base la ecuación 11.3, la magnitud de la fuerza magnética sobre una partícula cargada es

$$F_B = |q|vB \sin \theta \quad (28.2) \quad \leftarrow \text{Magnitud de la fuerza magnética ejercida sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético}$$

donde  $\theta$  es el menor ángulo entre  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ . Por esta expresión puede ver que  $F_B$  sea igual a cero cuando  $\vec{v}$  es paralela o antiparalela a  $\vec{B}$  ( $\theta = 0$  o  $180^\circ$ ) y es máxima cuando  $\vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{B}$  ( $\theta = 90^\circ$ ).

- E XAMEN RÁPIDO 28.1** Un electrón se mueve en el plano del papel de este libro
- hacia la parte superior de la página. Además en el plano de la página existe un
  - campo magnético que está dirigido hacia la derecha. ¿Cuál es la dirección de la
  - fuerza magnética sobre el electrón? (a) hacia la parte superior, (b) hacia la parte
  - inferior, (c) hacia el borde izquierdo, (d) hacia el borde derecho, (e) encima ale-
  - jándose de la página, (f) hacia adentro de la página.

Comparemos las diferencias importantes entre las versiones eléctrica y magnética del modelo de partícula en un campo:

- El vector fuerza eléctrica actúa a lo largo de la dirección del campo eléctrico, en tanto que el vector fuerza magnética actúa perpendicularmente al campo magnético.
- La fuerza eléctrica actúa sobre una partícula cargada sin importar si ésta se encuentra en movimiento, en tanto que la fuerza magnética actúa sobre una partícula cargada sólo cuando está en movimiento.
- La fuerza eléctrica efectúa trabajo al desplazar una partícula cargada, en tanto que la fuerza magnética asociada con un campo magnético estable no efectúa trabajo cuando se desplaza una partícula, debido a que la fuerza es perpendicular al desplazamiento de su punto de aplicación.

Con base en este último enunciado y también con el teorema trabajo-energía cinética, se concluye que la energía cinética de una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético no puede ser modificada por solo el campo magnético. El campo magnético, puede modificar la dirección del vector velocidad pero no puede cambiar la rapidez ni la energía cinética de la partícula.

En la ecuación 28.2 se observa que la unidad del SI del campo magnético es newton por coulomb-metro por segundo, o **tesla** (T):

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}} \quad \leftarrow \text{El tesla}$$

Dado que un ampere se define como un coulomb por segundo,

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

Una unidad que no es del SI y que se usa comúnmente para el campo magnético, el *gauss* (G), se relaciona con la tesla mediante la conversión  $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$ . La tabla 28.1 proporciona algunos valores representativos de los campos magnéticos.

**TABLA 28.1** Algunas magnitudes aproximadas del campo magnético

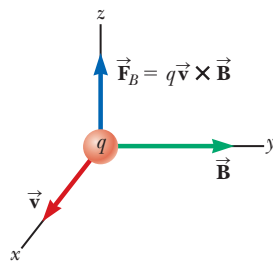
Fuente del campo	Magnitud del campo (T)
Poderoso imán de laboratorio superconductor	30
Poderoso imán de laboratorio convencional	2
Unidad médica MRI (resonancia magnética)	1.5
Imán de barra	$10^{-2}$
Superficie del Sol	$10^{-2}$
Superficie de la Tierra	$5 \times 10^{-5}$
Interior del cerebro humano (debido a impulsos nerviosos)	$10^{-13}$



## ANÁLISIS DE MODELO: Partícula en un campo (magnético)

Imagine que una fuente (que investigaremos más adelante) establece un **campo magnético**  $\vec{B}$  a través del espacio. Ahora imagine que se coloca una partícula cargada  $q$  en ese campo. La partícula interactúa con el campo magnético de modo que la partícula experimenta una fuerza magnética dada por

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (28.1)$$



### Ejemplos:

- un ion se mueve en una trayectoria circular en el campo magnético de un espectrómetro de masas (sección 28.3)
- existe una corriente eléctrica en una barra cuando ésta se mueve dentro de un campo magnético (capítulo 30)
- una bobina en un motor gira en respuesta al campo magnético en el motor (capítulo 30)
- en una cámara de burbujas, partículas creadas en las colisiones siguen trayectorias curvas en un campo magnético, permitiendo que las partículas puedan ser identificadas (capítulo 44)

### Ejemplo 28.1 Electrón que se mueve en un campo magnético

Un electrón se mueve a través del espacio como un rayo cósmico (página 752) con una rapidez de  $8.0 \times 10^6$  m/s a lo largo del eje  $x$  (figura 28.6). En esta ubicación, el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de 0.050 mT, dirigidos en un ángulo de  $60^\circ$  con el eje  $xy$  y se encuentran en el plano  $xy$ . Calcule la fuerza magnética sobre el electrón.

#### SOLUCIÓN

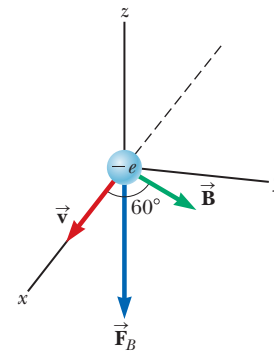
**Conceptualizar** Recuerde que la fuerza magnética sobre una partícula cargada es perpendicular al plano formado por los vectores velocidad y campo magnético. Use la regla de la mano derecha en la figura 28.5 para convencerse de que la dirección de la fuerza sobre el electrón es hacia abajo, en la dirección  $z$  en la figura 28.6.

**Categorizar** La fuerza magnética se evalúa utilizando la versión *magnética* del modelo de *partícula en un campo*.

**Analizar** Use la ecuación 28.2 para encontrar la magnitud de la fuerza magnética

$$\begin{aligned} F_B &= |q|vB \sin \theta \\ &= (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(8.0 \times 10^6 \text{ m/s})(5.0 \times 10^{-5} \text{ T})(\sin 60^\circ) \\ &= 5.5 \times 10^{-17} \text{ N} \end{aligned}$$

**Finalizar** Para practicar el uso del producto vectorial, evalúe esta fuerza en notación vectorial con la ecuación 28.1. La magnitud de la fuerza magnética le puede parecer pequeña, pero recuerde que se está actuando en una partícula muy pequeña, el electrón. Para convencerse de que esto es una fuerza sustancial para un electrón, calcule la aceleración inicial del electrón debido a esta fuerza.



**Figura 28.6** (Ejemplo 28.1) La fuerza magnética  $\vec{F}_B$  que actúa sobre el electrón está en la dirección  $z$  negativa cuando  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  entran en el plano  $xy$ .

## 28.2 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme

En la figura 28.4b, mostramos dos partículas cargadas en un campo magnético uniforme en un tiempo determinado. Las líneas punteadas sugieren el movimiento posterior de las dos partículas en respuesta a la fuerza magnética sobre ellos. En esta sección, investigamos más detalles sobre este movimiento y los caminos seguidos por las partículas.

Antes de continuar con la explicación, se requiere cierta aclaración de la notación usada en este libro. Para indicar la dirección de  $\vec{B}$  en las ilustraciones, a veces se presentan vistas en perspectiva, como en la figura 28.6. Si  $\vec{B}$  se encuentra en el plano de la página o está presente en un dibujo en perspectiva, se usan vectores verdes o líneas de campo verdes con puntas de flechas. En las ilustraciones que no están en



perspectiva, se bosqueja un campo magnético perpendicular a y dirigido alejándose de la página con una serie de puntos verdes, que representan las puntas de flechas que vienen hacia usted (vea la figura 28.7a). En este caso, el campo se etiqueta  $\vec{B}_{\text{afuera}}$ . Si  $\vec{B}$  se dirige perpendicularmente hacia adentro de la página, se usan cruces, que representan las colas emplumadas de las flechas disparadas alejándose de usted, como en la figura 28.7b. En este caso, el campo se etiqueta  $\vec{B}_{\text{adentro}}$ , donde el subíndice “adentro” indica “hacia la página”. La misma notación con cruces y puntos también se usa para otras cantidades que pueden ser perpendiculares a la página, como direcciones de fuerzas, velocidades y corrientes.

Ahora considere el caso especial de una partícula cargada positiva que se mueve en un campo magnético uniforme, estando el vector de velocidad inicial de la partícula en posición perpendicular al campo. Suponga que la dirección del campo magnético es hacia la página, igual que en la figura 28.8. El modelo de partícula en un campo nos dice que la fuerza magnética sobre la partícula es perpendicular a las líneas de campo magnético y a la velocidad de la partícula. El hecho de que haya una fuerza sobre la partícula indica que se debe aplicar el modelo de partícula bajo una fuerza neta. Conforme la partícula cambia la dirección de su velocidad como respuesta a la fuerza magnética, ésta se mantiene en posición perpendicular a la velocidad. Como se apuntó en la sección 6.1, si la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad, la trayectoria de la partícula ¡es una circunferencia! La figura 28.8 muestra a la partícula en movimiento circular en un plano perpendicular al campo magnético. Aunque por ahora las fuerzas del magnetismo y magnéticas pueden ser nuevas y desconocidas para usted, se observa un efecto magnético que se traduce en algo con lo que está familiarizado: ¡el modelo de partículas en movimiento circular uniforme!

La partícula se mueve en círculo porque la fuerza magnética  $\vec{F}_B$  es perpendicular a  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  y tiene una magnitud constante igual a  $qvB$ . Como se ilustra en la figura 28.8, la rotación para una carga positiva en un campo magnético es en dirección contraria a las manecillas del reloj hacia el interior de la página. Si  $q$  fuera negativa, la rotación sería en dirección de las manecillas del reloj. Use el modelo de una partícula bajo una fuerza neta para escribir la segunda ley de Newton para la partícula:

$$\sum F = F_B = ma$$

Ya que la partícula se mueve en un círculo, también se representa como una partícula en movimiento circular uniforme y se sustituye la aceleración con la aceleración centrípeta:

$$F_B = qvB = \frac{mv^2}{r}$$

Esta expresión conduce a la siguiente ecuación para el radio de la trayectoria circular:

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{28.3}$$

Es decir, el radio de la trayectoria es proporcional a la cantidad de movimiento lineal  $mv$  de la partícula e inversamente proporcional a la magnitud de la carga sobre la partícula y a la magnitud del campo magnético. La rapidez angular de la partícula (según la ecuación 10.10) es

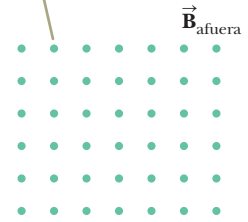
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \tag{28.4}$$

El periodo del movimiento (el intervalo de tiempo que necesita la partícula para completar una revolución) es igual a la circunferencia del círculo dividido entre la rapidez de la partícula:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \tag{28.5}$$

Estos resultados demuestran que la rapidez angular de la partícula y el periodo del movimiento circular no dependen de la rapidez de la partícula ni del radio de

Las líneas de campo magnético que van hacia afuera del papel se indican mediante puntos, que representan las puntas de las flechas que van hacia afuera.

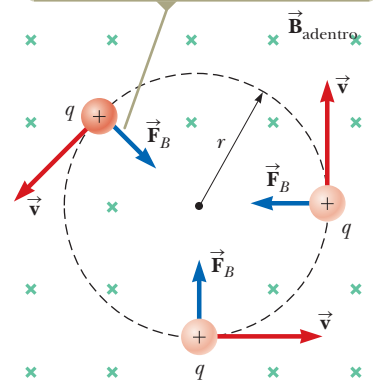


Las líneas del campo magnético que van hacia el papel se indican mediante cruces, que representan las plumas de las flechas que van hacia adentro



**Figura 28.7** Representación de las líneas del campo magnético perpendiculares a la página.

La fuerza magnética  $\vec{F}_B$  que actúa sobre la carga lo hará siempre dirigida hacia el centro del círculo.

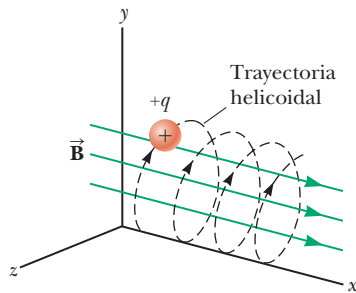


**Figura 28.8** Cuando la velocidad de una partícula cargada es perpendicular a un campo magnético uniforme, ésta se mueve siguiendo una trayectoria circular en un plano perpendicular a  $\vec{B}$ .



la órbita. La rapidez angular  $\omega$  se denomina **frecuencia de ciclotrón**, porque las partículas cargadas circulan con esta frecuencia angular en un tipo de acelerador conocido como *ciclotrón*, el cual se explica en la sección 28.3.

- EJEMPLO RÁPIDO 28.2** Una partícula cargada se mueve en dirección perpendicular a un campo magnético con una trayectoria circular de radio  $r$ . (i) Una partícula idéntica entra en el campo, con  $\vec{v}$  perpendicular a  $\vec{B}$ , pero con una rapidez más elevada que la primera partícula. En comparación con el radio del círculo que recorre la primera partícula, el radio de la trayectoria circular que traza la segunda partícula es: (a) menor, (b) mayor o (c) igual en tamaño? (ii) La magnitud del campo magnético se incrementa. De las mismas opciones, compare el radio de la nueva trayectoria circular de la primera partícula con el radio de su trayectoria inicial.



**Figura 28.9** Una partícula con carga, con un vector de velocidad que tenga una componente paralela a un campo magnético uniforme, se mueve en una trayectoria helicoidal.

Si una partícula cargada se mueve en un campo magnético uniforme con su velocidad  $\vec{v}$  orientada en algún ángulo arbitrario respecto a  $\vec{B}$ , su trayectoria será una espiral. Por ejemplo, si el campo está dirigido en la dirección  $x$ , como se observa en la figura 28.9, no existe componente de la fuerza en la dirección  $x$ . Como resultado,  $a_x = 0$ , y la componente en  $x$  de la velocidad se mantiene constante. La partícula cargada es una partícula en equilibrio en esa dirección. La fuerza magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$  hace que cambien las componentes  $v_y$  y  $v_z$  en relación con el tiempo, y el movimiento resultante es una espiral cuyo eje es paralelo al campo magnético. La proyección de la trayectoria sobre el plano  $yz$  (visto a lo largo del eje de las  $x$ ) es un círculo. (¡Las proyecciones de la trayectoria sobre los planos  $xy$  y  $xz$  son sinusoidales!) Las ecuaciones 28.3 y 28.5 siguen siendo aplicables, siempre y cuando se remplace  $v$  por  $v_{\perp} = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$ .

### Ejemplo 28.2 Protón con movimiento perpendicular a un campo magnético uniforme

Un protón se mueve en una órbita circular de 14 cm de radio en un campo magnético uniforme de 0.35 T, perpendicular a la velocidad del protón. Encuentre la rapidez del protón.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** A partir de la discusión en esta sección, se sabe que el protón sigue una trayectoria circular cuando se mueve en un campo magnético uniforme. En el capítulo 38, aprendió de que la rapidez más alta posible para una partícula es la de la luz,  $3.00 \times 10^8$  m/s, por lo que la rapidez de la partícula en este problema debe ser menor que este valor.

**Categorizar** El protón es descrito tanto por el *modelo de partícula en un campo* como por el modelo de *partícula en movimiento circular uniforme*. Estos modelos llevaron a la ecuación 28.3.

**Analizar** Resuelva la ecuación 28.3 para la rapidez de la partícula:

$$v = \frac{qBr}{m_p}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v = \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(0.35 \text{ T})(0.14 \text{ m})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}$$

$$= 4.7 \times 10^6 \text{ m/s}$$

**Finalizar** La rapidez es de hecho menor que la de la luz, como se requería.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si un electrón, en lugar de un protón, se mueve en una dirección perpendicular al mismo campo magnético con esta misma rapidez? ¿El radio de su órbita será diferente?

**Respuesta** Un electrón tiene una masa mucho menor que la del protón, así que la fuerza magnética debe ser capaz de cambiar su velocidad mucho más fácilmente que la del protón. Por tanto, se espera que el radio sea más pequeño. La ecuación 28.3 muestra que  $r$  es proporcional a  $m$  con  $q$ ,  $B$  y  $v$  iguales para el electrón y para el protón. En consecuencia, el radio será más pequeño por el mismo factor que la razón de masas  $m_e/m_p$ .

**Ejemplo 28.3 Flexión de un haz de electrones**

En un experimento diseñado para medir la magnitud de un campo magnético uniforme, los electrones se aceleran desde el reposo a causa de una diferencia de potencial de 350 V y después entran a un campo magnético uniforme que es perpendicular al vector velocidad de los electrones. Los electrones viajan a lo largo de una trayectoria curva debido a la fuerza magnética que se ejerce sobre ellos, y se observa que el radio de la trayectoria es de 7.5 cm. (En la figura 28.10 se muestra el haz de electrones curvo.)

**(A)** ¿Cuál es la magnitud del campo magnético?



Cortesía de Henry Leap and Jim Lehman

**Figura 28.10** (Ejemplo 28.3) Flexión de un haz de electrones en un campo magnético.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Este ejemplo involucra electrones que se aceleran desde el reposo debido a una fuerza eléctrica y después se mueven en una trayectoria circular debido a una fuerza magnética. Con la ayuda de las figuras 28.8 y 28.10, visualice el movimiento circular de los electrones.

**Categorizar** La ecuación 28.3 muestra que se necesita la rapidez  $v$  del electrón para encontrar la magnitud del campo magnético y no se conoce  $v$ . En consecuencia, se debe encontrar la rapidez del electrón según la diferencia de potencial a través de la que se acelera. Para hacerlo, la primera parte del problema se clasifica al modelar un electrón y el campo eléctrico como un *sistema aislado* en términos de *energía*. Una vez que el electrón entra al campo magnético, la segunda parte del problema se clasifica como uno que involucra *una partícula en un campo* y una *partícula en movimiento circular uniforme*, estudiadas en esta sección.

**Analizar** Escriba la reducción adecuada de la ecuación de conservación de energía, ecuación 8.2, para el sistema electrón-campo eléctrico:

$$\Delta K + \Delta U_E = 0$$

Sustituya las energías inicial y final adecuadas:

$$\left(\frac{1}{2}m_e v^2 - 0\right) + (q \Delta V) = 0$$

Resuelva para la rapidez del electrón:

$$v = \sqrt{\frac{-2q \Delta V}{m_e}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v = \sqrt{\frac{-2(-1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(350 \text{ V})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 1.11 \times 10^7 \text{ m/s}$$

Ahora imagine que el electrón entra al campo magnético con esta rapidez. Resuelva la ecuación 28.3 para la magnitud del campo magnético:

$$B = \frac{m_e v}{er}$$

Sustituya valores numéricos:

$$B = \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.11 \times 10^7 \text{ m/s})}{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(0.075 \text{ m})} = 8.4 \times 10^{-4} \text{ T}$$

**(B)** ¿Cuál es la rapidez angular de los electrones?

**SOLUCIÓN**

Use la ecuación 10.10:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1.11 \times 10^7 \text{ m/s}}{0.075 \text{ m}} = 1.5 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

**Finalizar** La rapidez angular se puede representar como  $\omega = (1.5 \times 10^8 \text{ rad/s}) (1 \text{ rev}/2\pi \text{ rad}) = 2.4 \times 10^7 \text{ rev/s}$ . ¡Los electrones viajan alrededor del círculo 24 millones de veces por segundo! Esta respuesta es consistente con la muy alta rapidez que se encontró en el inciso (a).

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si un súbito exceso de corriente origina que el voltaje acelerador aumente a 400 V? ¿Cómo afecta a la rapidez angular de los electrones, si supone que el campo magnético permanece constante?

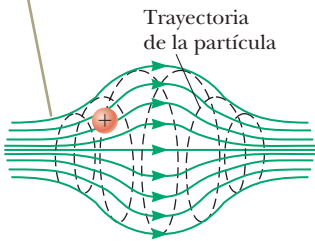
**Respuesta** El aumento en el voltaje de aceleración  $\Delta V$  origina que los electrones entren al campo magnético con una mayor rapidez  $v$ . Esta mayor rapidez los hace viajar en un círculo con un radio más grande  $r$ . La rapidez angular es la razón de  $v$  a  $r$ . Tanto  $v$  como  $r$  aumentan en el mismo factor, de modo que los efectos se cancelan y la rapidez angular per-

manece igual. La ecuación 28.4 es una expresión para la frecuencia de ciclotrón, que es la misma que la rapidez angular de los electrones. La frecuencia de ciclotrón depende sólo de la carga  $q$ , el campo magnético  $B$  y la masa  $m_e$ , ninguna de las cuales cambió. Por tanto, el exceso de corriente no tiene efecto sobre la rapidez angular. (Sin embargo, en realidad, el sobrevoltaje también puede aumentar el campo magnético si el campo magnético es activado por la misma fuente que el voltaje acelerador. En este caso, la rapidez angular aumenta de acuerdo con la ecuación 28.4.)

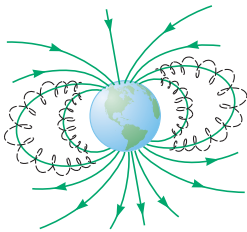




La fuerza magnética ejercida sobre la partícula cerca de cualquiera de los dos extremos tiene una componente que la hace girar en espiral de regreso hacia el centro.



**Figura 28.11** Una partícula cargada que se mueve en un campo magnético no uniforme (una botella magnética) en espiral respecto al campo oscilando entre los extremos.



**Figura 28.12** Los cinturones de Van Allen están constituidos por partículas cargadas atrapadas por el campo magnético no uniforme de la Tierra. Las líneas de campo magnético están representadas en color verde y las trayectorias de las partículas en color negro.

Cuando las partículas cargadas se mueven en un campo magnético no uniforme, su movimiento es complejo. Por ejemplo, en un campo magnético intenso en sus extremos y débil en su parte media, como el que se muestra en la figura 28.11, las partículas pueden oscilar entre dos posiciones. Una partícula cargada sale de un extremo de la espiral a lo largo de las líneas de campo hasta llegar al otro extremo, donde invierte su trayectoria y de regreso en la espiral. Este esquema se conoce como *botella magnética*, ya que las partículas cargadas pueden quedar atrapadas en su interior. Se ha utilizado esta botella magnética para confinar *plasma*, un gas formado por iones y electrones. Este esquema de confinamiento de plasma podría jugar un papel crucial en el control de la fusión nuclear, proceso que podría suministrar en el futuro una fuente de energía casi infinita. Por desgracia, la botella magnética tiene sus problemas. Si un gran número de partículas está atrapado, las colisiones que se presentan entre ellas hacen que finalmente se fuguen del sistema.

Los cinturones de radiación de Van Allen están formados de partículas cargadas (en su mayor parte electrones y protones) que rodean la Tierra en regiones toroidales (figura 28.12). Las partículas atrapadas por el campo magnético no uniforme de la Tierra giran en espiral alrededor de las líneas de campo de un polo al otro, cubriendo la distancia en apenas unos cuantos segundos. Estas partículas se originan principalmente en el Sol, aunque algunas provienen de las estrellas y otros objetos celestes. Por esta razón las partículas se conocen como *rayos cósmicos*. La mayor parte de los rayos cósmicos son desviados por el campo magnético de la Tierra y nunca llegan a la atmósfera. Sin embargo, algunas de las partículas quedan atrapadas; son estas partículas las que forman los cinturones de Van Allen. Cuando las partículas se encuentran sobre los polos, a veces colisionan con los átomos de la atmósfera, haciendo que éstos emitan una luz visible. Estas colisiones son el origen de la bella aurora boreal, es decir las luces del norte, cuando se trata del hemisferio norte, y las auroras australes si se trata del hemisferio sur. Las auroras normalmente se presentan sólo en las regiones polares, ya que los cinturones de Van Allen en estas regiones están a menor distancia de la Tierra. En ocasiones, sin embargo, la actividad solar hace que más partículas cargadas entren en los cinturones y distorsionen de manera significativa las líneas de campo magnético normal asociadas con la Tierra. En esta situación, es posible observar a veces auroras en latitudes más bajas.

### 28.3 Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

Una carga móvil con una velocidad  $\vec{v}$  en presencia tanto de un campo eléctrico  $\vec{E}$  y un campo magnético  $\vec{B}$  experimenta a la vez una fuerza eléctrica  $q\vec{E}$  y una fuerza magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$ . La fuerza total (conocida como fuerza de Lorentz) que actúa sobre la carga es

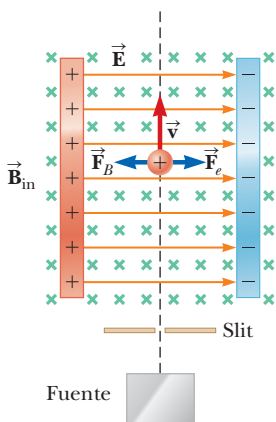
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{28.6}$$

Investiguemos algunos dispositivos que aprovechan la fuerza de Lorentz.

#### Selector de velocidad

En muchos experimentos que incluyen partículas cargadas en movimiento, es importante que todas las partículas se muevan a la misma velocidad, esto se puede lograr aplicando la combinación de un campo eléctrico con uno magnético orientados como se ilustra en la figura 28.13. Un campo eléctrico uniforme se dirige a la derecha (en el plano de la página en la figura 28.13) y se aplica un campo magnético uniforme en dirección perpendicular al campo eléctrico (hacia adentro de la página en la figura 28.13). Si  $q$  es positiva y la velocidad  $\vec{v}$  está dirigida hacia arriba, la fuerza magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$  se dirige hacia la izquierda y la fuerza eléctrica  $q\vec{E}$  hacia la derecha. Cuando se escogen las magnitudes de los dos campos, de forma que  $qE = qvB$ , la partícula cargada se modela como una partícula en equilibrio y se mueve en línea recta vertical a través de la región de los campos. Por la expresión  $qE = qvB$ , se encuentra que

$$v = \frac{E}{B} \tag{28.7}$$



**Figura 28.13** Un selector de velocidad. Cuando una partícula cargada positiva se mueve con velocidad  $\vec{v}$  ante la presencia de un campo magnético dirigido hacia la página y un campo eléctrico dirigido hacia la derecha, experimenta una fuerza eléctrica  $q\vec{E}$  hacia la derecha y una fuerza magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$  hacia la izquierda.

Sólo aquellas partículas que tengan esta rapidez pasarán sin desviarse a través de los campos eléctrico y magnético mutuamente perpendiculares. La fuerza magnética que se ejerce sobre partículas que se mueven con magnitudes de velocidad más elevadas es mayor a la fuerza eléctrica, lo que desvía las partículas hacia la izquierda. Las que se muevan con magnitudes de velocidad menores se desviarán hacia la derecha.

### Espectrómetro de masas

Un **espectrómetro de masas** separa iones según su razón masa a carga. Una versión de este dispositivo, conocido como *espectrómetro de masas Bainbridge*, el haz de iones pasa primero a través de un selector de velocidad y después entra a un segundo campo magnético uniforme  $\vec{B}_0$  que tiene la misma dirección que el campo magnético en el selector (figura 28.14). Al entrar en el segundo campo magnético, los iones se mueven en un semicírculo de radio  $r$  antes de que se impacte en la película fotográfica en  $P$ . Si los iones están con carga positiva, el haz se desviará hacia la izquierda, como se observa en la figura 28.14. Si los iones están con carga en forma negativa, el haz se desviará hacia la derecha. Por la ecuación 28.3, la razón  $m/q$  se expresa de la forma

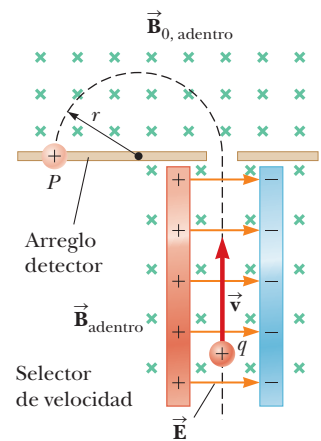
$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}$$

La ecuación 28.7, da

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0B}{E} \tag{28.8}$$

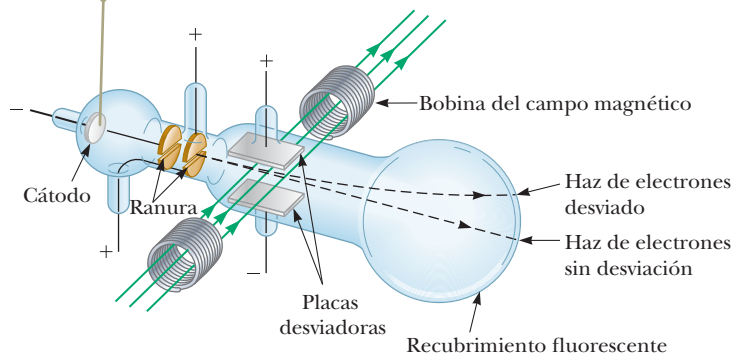
Debido a esto, es posible determinar  $m/q$  midiendo el radio de curvatura y conociendo cuáles son los valores del campo  $B$ ,  $B_0$  y  $E$ . En la práctica, por lo general se miden las masas de diferentes isótopos de un ion conocido, con todos los iones de la misma carga  $q$ . De esta manera se pueden determinar las razones de masa, incluso si  $q$  es desconocido.

Una variante de esta técnica fue utilizada en 1897 por J. J. Thomson (1856-1940) para medir la razón  $e/m_e$  para los electrones. La figura 28.15a muestra el aparato básico que utilizó. Los electrones se aceleran desde el cátodo y pasan a través de dos ranuras. A continuación pasan a una región de campos eléctrico y magnético perpendiculares entre sí. Las magnitudes de los dos campos se ajustan inicialmente a fin de producir un haz sin desviación. Cuando se desactiva el campo magnético, el campo eléctrico produce una desviación medible en el haz que queda registrada sobre la pantalla fluorescente. A partir de la magnitud de la desviación y de los valores medidos para  $E$  y  $B$ , es posible determinar la razón carga a masa. El resultado de este experimento crucial representa el descubrimiento del electrón como una partícula fundamental de la naturaleza.



**Figura 28.14** Espectrómetro de masas. Las partículas cargadas positivas se lanzan primero a través de un selector de velocidad y después en una región donde el campo magnético  $\vec{B}_0$  hace que recorran una trayectoria semicircular y se impacten en la película fotográfica en  $P$ .

Desde el cátodo se aceleran los electrones, que pasan a través de dos ranuras, y son desviados tanto por un campo eléctrico (formado por placas desviadoras cargadas) como por un campo magnético (dirigido perpendicularmente al campo eléctrico). El haz de electrones golpea después una pantalla fluorescente.



**Figura 28.15** (a) Aparato de Thomson para la medición de  $e/m_e$ . (b) J. J. Thomson (izquierda) en el Cavendish Laboratory, University of Cambridge. La persona a la derecha, Frank Baldwin Jewett, es un pariente lejano de John W. Jewett, Jr., coautor de este libro.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 28.1

**El ciclotrón no es el único tipo de acelerador de partículas** El ciclotrón es importante históricamente, ya que fue el primer acelerador de partículas que alcanzó magnitudes de velocidad elevadas. Los ciclotrones siguen siendo utilizados en aplicaciones médicas, y la mayor parte de los aceleradores actualmente en uso en la investigación no son ciclotrones. Los aceleradores para la investigación funcionan con base en un principio diferente, y en general se conocen como *sinclotrones*.

## El Ciclotrón

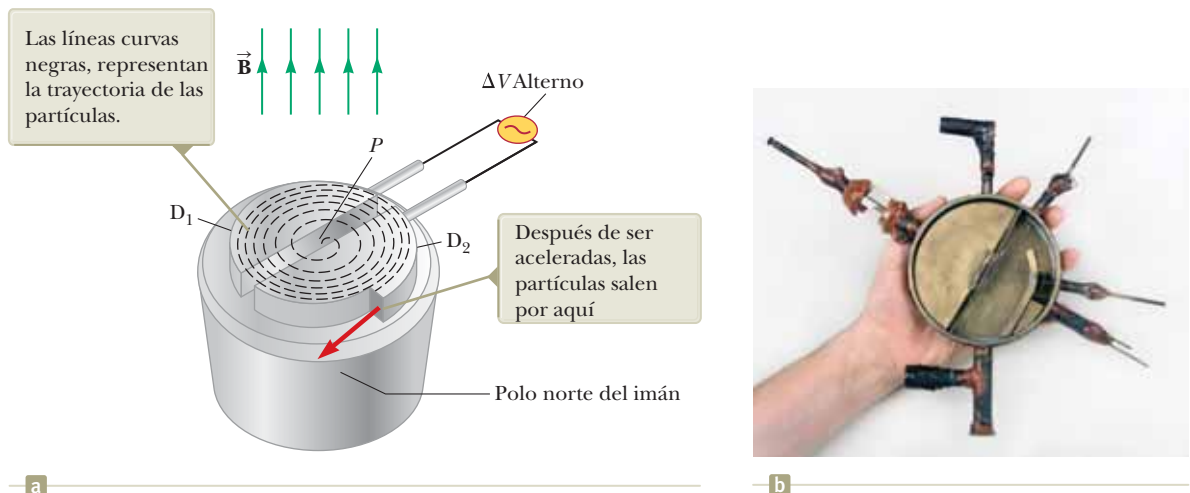
Un **ciclotrón** es un dispositivo que puede acelerar partículas cargadas a considerables magnitudes de velocidad. Las partículas energéticas producidas son utilizadas para bombardear los núcleos atómicos, produciendo así reacciones nucleares de interés para los investigadores. Varios hospitales utilizan este dispositivo para la producción de sustancias radioactivas para diagnóstico y tratamiento.

Tanto las fuerzas eléctricas como magnéticas desempeñan un papel fundamental en la operación de un ciclotrón, en la figura 28.16a se muestra el dibujo esquemático. Las cargas se mueven en el interior de dos recipientes semicirculares,  $D_1$  y  $D_2$ , que se conocen como *des* debido a que su forma es parecida a la letra D. A las “des” se les aplica una diferencia de potencial alternante de alta frecuencia y se dirige un campo magnético uniforme en dirección perpendicular. Un ion positivo liberado en  $P$  cerca del centro del imán en una “de” sigue una trayectoria semicircular (lo cual se indica con la línea discontinua de color negro del dibujo) y vuelve al espacio entre las “des” en un intervalo de tiempo  $T/2$ , donde  $T$  es el intervalo de tiempo necesario para hacer un recorrido completo alrededor de dos “des”, y que se da en la ecuación 28.5. La frecuencia de la diferencia de potencial aplicada se ajusta de manera que la polaridad de las “des” se invierta en el mismo intervalo de tiempo que utiliza el ion para recorrer una “de”. Si la diferencia de potencial aplicado se ajusta de manera que  $D_1$  esté a un potencial eléctrico inferior que  $D_2$  en una magnitud  $\Delta V$ , el ion se acelerará a través del espacio hasta  $D_1$  y su energía cinética se incrementará en la cantidad  $q\Delta V$ . Pasa después alrededor de  $D_1$  en una trayectoria semicircular de un radio más grande (porque su rapidez se ha incrementado). Después de un intervalo de tiempo  $T/2$ , otra vez llega al espacio entre las “des”. En este instante, la polaridad entre las “des” se ha invertido, y se le da al ion otro “impulso” a través del espacio. El movimiento continúa, así que para cada mitad de recorrido de una “de”, el ion adquiere energía cinética adicional igual a  $q\Delta V$ . Cuando el radio de su trayectoria es prácticamente el de las “des”, el ion sale del sistema a través de la ranura de salida. Observe que la operación del ciclotrón se basa en que  $T$  es independiente de la rapidez del ion y del radio de la trayectoria circular (ecuación 28.5).

Se puede obtener una expresión para la energía cinética del ion cuando sale del ciclotrón, en función del radio  $R$  de las “des”. Por la ecuación 28.3 se sabe que  $v = qBR/m$ . Por tanto, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m} \quad (28.9)$$

Cuando la energía de los iones en un ciclotrón excede aproximadamente 20 MeV, entran en juego efectos relativistas. (Estos efectos se explican en el capítulo 38.)



**Figura 28.16** (a) Un ciclotrón está constituido por una fuente de iones en  $P$ , dos “des”  $D_1$  y  $D_2$ , a las cuales se les aplica una diferencia de potencial alternante y un campo magnético uniforme. (El polo sur del imán no se muestra.) (b) El primer ciclotrón, inventado por E. O. Lawrence y M. S. Livingston en 1934.

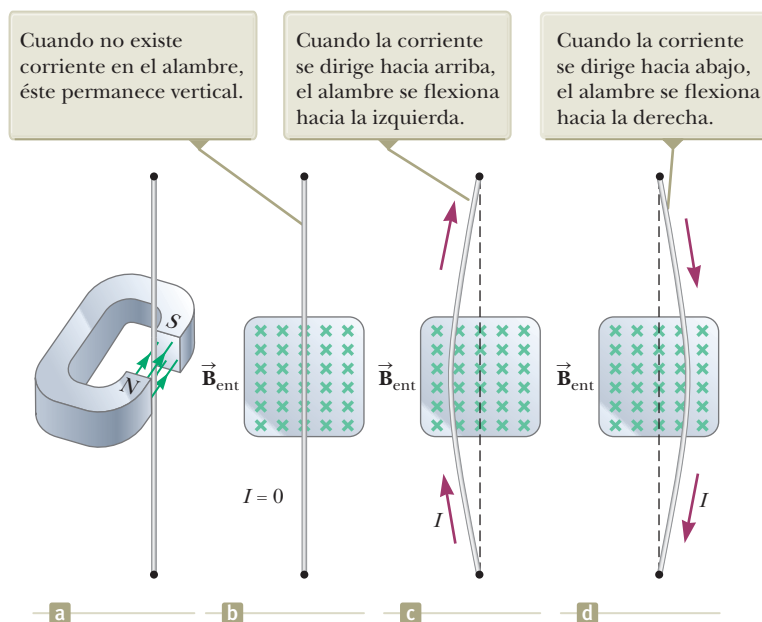
Estudios muestran que  $T$  aumenta y que los iones en movimiento no se quedan en fase con la diferencia de potencial aplicada. Algunos aceleradores superan este problema modificando el periodo de la diferencia de potencial aplicada, de manera que se conserve en fase con los iones en movimiento.

### 28.4 Fuerza magnética que actúa sobre un conductor que transporta corriente

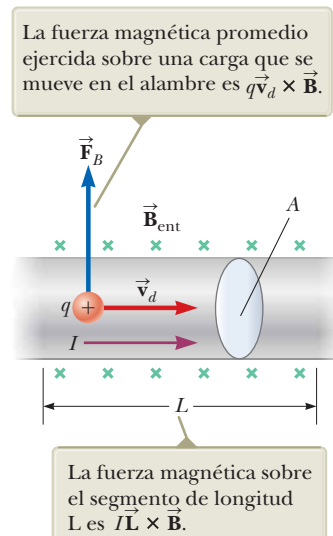
Si se ejerce una fuerza magnética sobre una partícula cargada cuando ésta se mueve a través de un campo magnético, no debería sorprendernos que un alambre que transporta una corriente también experimente una fuerza cuando se le coloca en un campo magnético. La corriente es un conjunto de muchas partículas cargadas en movimiento; de ahí que la fuerza resultante ejercida por el campo sobre el alambre sea la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre todas las partículas cargadas que conforman la corriente. La fuerza ejercida sobre las partículas se transmite al alambre cuando colisionan con los átomos que constituyen el alambre.

Es posible demostrar la acción de una fuerza magnética sobre un conductor de corriente colgando un alambre entre los polos de un imán, como se observa en la figura 28.17a. Para facilitar la visualización, en el inciso (a) se ha eliminado una parte del imán en forma de herradura, a fin de mostrar en los incisos (b), (c) y (d) de la figura 28.17. El campo magnético está dirigido hacia la página y abarca la región entre las líneas sombreadas. Cuando la corriente en el alambre es igual a cero, el alambre se mantiene vertical, como se puede ver en la figura 28.17b. Sin embargo, cuando el alambre conduce una corriente hacia arriba, como se ve en la figura 28.17c, el alambre se flexiona hacia la izquierda. Si se invierte la dirección de la corriente, como muestra la figura 28.17d, el alambre se flexiona hacia la derecha.

Conviene cuantificar esta explicación considerando un segmento recto de alambre de longitud  $L$  y de área de sección transversal  $A$ , que conduce una corriente  $I$  en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , según se ve en la figura 28.18. De acuerdo con la versión magnética de una partícula en un modelo de campo, la fuerza magnética que se ejerce sobre una carga  $q$  en movimiento, con una velocidad de arrastre  $\vec{v}_d$  es igual a  $q\vec{v}_d \times \vec{B}$ . Para encontrar la fuerza total que actúa sobre el alambre, multiplique la fuerza  $q\vec{v}_d \times \vec{B}$  ejercida sobre una carga por el número de cargas en el segmento. Ya



**Figura 28.17** (a) Alambre suspendido verticalmente entre los polos de un imán. (b) – (d) El arreglo que se muestra en el inciso (a) mira hacia el polo sur del imán, de manera que el campo magnético (cruces verdes) se dirige hacia adentro de la página.



**Figura 28.18** Un segmento de un alambre conduciendo corriente en un campo magnético  $\vec{B}$ .

que el volumen del segmento es  $AL$ , el número de cargas en el segmento es igual a  $nAL$ , siendo  $n$  el número de cargas móviles por unidad de volumen. Por esto, la fuerza magnética total sobre el alambre de longitud  $L$  es

$$\vec{F}_B = (q\vec{v}_d \times \vec{B})nAL$$

Es posible escribir esta expresión de una forma más conveniente al observar que, de la ecuación 26.4, la corriente en el alambre es igual a  $I = nqv_dA$ . Por tanto,

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} \quad (28.10)$$

Fuerza ejercida sobre un segmento de alambre conductor que transporta corriente en un campo magnético uniforme

donde  $\vec{L}$  es un vector que apunta en la dirección de la corriente  $I$  y que tiene una magnitud igual a la longitud  $L$  del segmento. Observe que esta expresión se aplica sólo a un segmento de alambre recto en un campo magnético uniforme.

Ahora considere un segmento de alambre de forma arbitraria de sección transversal uniforme en un campo magnético, según se observa en la figura 28.19. De la ecuación 28.10 se concluye que la fuerza magnética que se ejerce sobre una longitud  $d\vec{s}$  de un pequeño segmento de vector en presencia de un campo  $\vec{B}$  es igual a

$$d\vec{F}_B = I d\vec{s} \times \vec{B} \quad (28.11)$$

donde  $d\vec{F}_B$  está dirigido hacia afuera de la página debido a las direcciones de  $\vec{B}$  y de  $d\vec{s}$  en la figura 28.19. Es posible considerar la ecuación 28.11 como una definición alterna de  $\vec{B}$ . Es decir, el campo magnético  $\vec{B}$  se define en función de una fuerza medible ejercida sobre un elemento de corriente, donde la fuerza es máxima cuando  $\vec{B}$  es perpendicular al elemento, y cero cuando  $\vec{B}$  es paralelo al elemento.

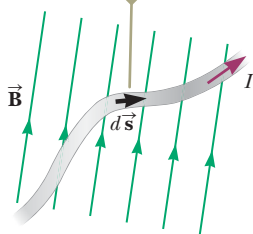
Para calcular la fuerza total  $\vec{F}_B$  que actúa sobre el alambre que se muestra en la figura 28.19, se integra la ecuación 28.11 por toda la longitud del alambre:

$$\vec{F}_B = I \int_a^b d\vec{s} \times \vec{B} \quad (28.12)$$

donde  $a$  y  $b$  representan los puntos extremos del alambre. Cuando se efectúa esta integración, la magnitud del campo magnético y la dirección que tiene el campo en relación con el vector  $d\vec{s}$  puede variar en diferentes puntos.

- EJERCICIO RÁPIDO 28.3** Un alambre transporta corriente en el plano del papel en dirección a la parte superior de la página. El alambre experimenta una fuerza magnética hacia el borde derecho de la página. ¿La dirección del campo magnético que crea esta fuerza se localiza (a) en el plano de la página y con dirección hacia el borde izquierdo, (b) en el plano de la página y con dirección hacia el borde inferior, (c) hacia arriba y alejándose de la página, (d) hacia abajo y adentro de la página?

La fuerza magnética sobre cualquier segmento  $d\vec{s}$  es igual a  $I d\vec{s} \times \vec{B}$  y se dirige hacia afuera de la página.



**Figura 28.19** Un segmento de alambre de forma arbitraria que lleva una corriente  $I$  en un campo magnético  $\vec{B}$  experimenta una fuerza magnética.

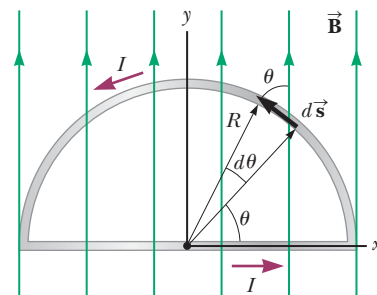
### Ejemplo 28.4 Fuerza sobre un conductor semicircular

Un alambre doblado en un semicírculo de radio  $R$  forma un circuito cerrado y transporta una corriente  $I$ . El alambre yace en el plano  $xy$  y un campo magnético uniforme se dirige a lo largo del eje  $y$  y positivo, como en la figura 28.20. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre la porción recta del alambre y sobre la porción curva.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Con la regla de la mano derecha para producto cruz, se ve que la fuerza  $\vec{F}_1$  sobre la porción recta del alambre es alejándose de la página y la fuerza  $\vec{F}_2$  sobre la porción curva es hacia adentro de la página. ¿ $\vec{F}_1$  es mayor en magnitud que  $\vec{F}_2$  porque la longitud de la porción curva es mayor que la de la porción recta?

**Categorizar** Ya que se trata con un alambre portador de corriente en un campo magnético en lugar de una sola partícula cargada, debe usar la ecuación 28.12 para encontrar la fuerza total sobre cada porción del alambre.



**Figura 28.20** (Ejemplo 28.4) La fuerza magnética sobre la porción recta de la espira se dirige alejándose de la página, y la fuerza magnética sobre la porción curva se dirige hacia la página.



28.4 continuación

**Analizar** Note que  $d\vec{s}$  es perpendicular a  $\vec{B}$  en todas partes en la porción recta del alambre. Use la ecuación 28.12 para encontrar la fuerza sobre esta porción:

$$\vec{F}_1 = I \int_a^b d\vec{s} \times \vec{B} = I \int_{-R}^R B dx \hat{k} = 2IRB \hat{k}$$

Para hallar la fuerza magnética sobre la parte curva, primero escriba una expresión para la fuerza magnética  $d\vec{F}_2$  sobre el elemento  $d\vec{s}$  en la figura 28.20:

$$(1) \quad d\vec{F}_2 = I d\vec{s} \times \vec{B} = -IB \sin \theta ds \hat{k}$$

A partir de la geometría en la figura 28.20, escriba una expresión para  $ds$ :

$$(2) \quad ds = R d\theta$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1) e integre a respecto al ángulo  $\theta$ , desde 0 a  $\pi$ :

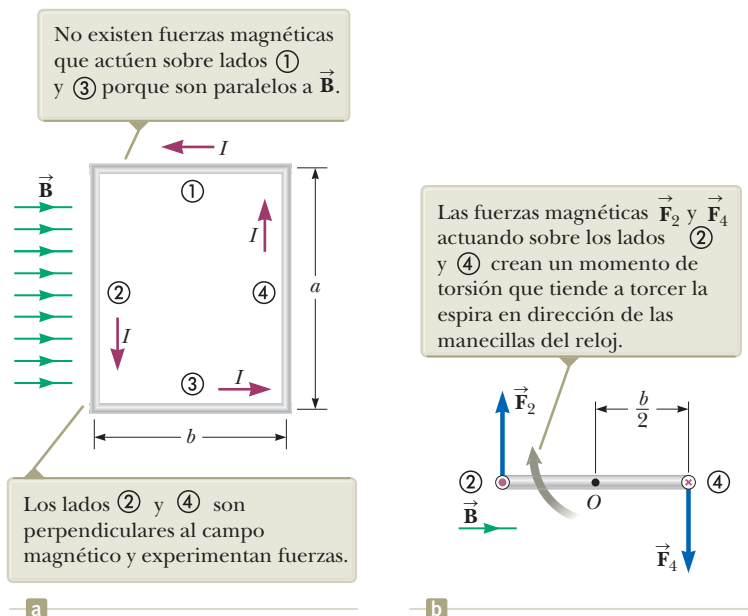
$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= - \int_0^\pi IRB \sin \theta d\theta \hat{k} = -IRB \int_0^\pi \sin \theta d\theta \hat{k} = -IRB [-\cos \theta]_0^\pi \hat{k} \\ &= IRB(\cos \pi - \cos 0) \hat{k} = IRB(-1 - 1) \hat{k} = -2IRB \hat{k} \end{aligned}$$

**Finalizar** A partir de este ejemplo surgen dos enunciados generales muy importantes. Primero, la fuerza sobre la porción de curva es la misma en magnitud que la fuerza sobre un alambre recto entre los mismos dos puntos. En general, la fuerza magnética sobre un alambre curvo portador de corriente en un campo magnético uniforme es igual a la de un alambre recto que conecta los puntos finales y porta la misma corriente. Además,  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$  también es un resultado general: la fuerza magnética neta que actúa sobre cualquier espira de corriente cerrado en un campo magnético uniforme es cero.

## 28.5 Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme

En la sección 28.4 se mostró que sobre un conductor que transporta una corriente y es colocado en un campo magnético, se ejerce una fuerza magnética. A partir de este punto, ahora se analiza cómo en una espira de corriente colocado en un campo magnético se ejerce un momento de torsión.

Considere una espira rectangular que tiene una corriente  $I$  en presencia de un campo magnético uniforme dirigido paralelamente al plano de la espira, como se observa en la figura 28.21a.



**Figura 28.21** (a) Vista superior de una espira de corriente rectangular en un campo magnético uniforme. (b) Vista lateral de la espira en dirección de los lados ② y ④. El lado que ves en esta parte es el lado ③. El punto color violeta en el círculo izquierdo representa la corriente en el alambre ② dirigida hacia el lector; la cruz color violeta en el círculo derecho representa la corriente en el alambre ④ alejándose del lector.

Sobre los lados ① y ③ no actúa ninguna fuerza magnética, ya que estos alambres son paralelos al campo; por lo que para estos lados,  $\vec{L} \times \vec{B} = 0$ . Sin embargo, sobre los lados ② y ④, sí actúan fuerzas magnéticas, porque están orientados perpendicularmente al campo. La magnitud de estas fuerzas es, por la ecuación 28.10,

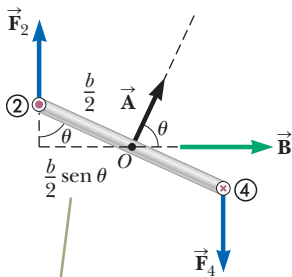
$$F_2 = F_4 = IaB$$

La dirección de  $\vec{F}_2$ , que es la fuerza magnética ejercida sobre el alambre ②, es alejándose de la página, de acuerdo con la vista que se muestra en la figura 28.21a; y la de  $\vec{F}_4$ , la fuerza magnética que se ejerce sobre el alambre ④, es hacia el interior de la página en la misma vista. Si observa la espira desde el lado ③ apuntando a lo largo de los lados ② y ④, verá lo que se muestra en la figura 28.21b, y las dos fuerzas magnéticas  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_4$  están dirigidas según se muestra. Observe que las dos fuerzas apuntan en direcciones opuestas pero *no* actúan a lo largo de la misma línea de acción. Si se logra que la espira gire alrededor del punto  $O$ , estas dos fuerzas producen, en relación con este punto, un momento de torsión que hace que la espira gire en el sentido de las manecillas del reloj. La magnitud de este momento de torsión  $\tau_{\text{máx}}$  es

$$\tau_{\text{máx}} = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = (IaB) \frac{b}{2} + (IaB) \frac{b}{2} = IabB$$

donde  $b/2$  es el momento de palanca en relación con  $O$  para cada una de las fuerzas. Ya que el área contenida por la espira es  $A = ab$ , el momento de torsión máximo es

$$\tau_{\text{máx}} = IAB \quad (28.13)$$



Cuando la normal a la espira forma un ángulo  $\theta$  con el campo magnético, el brazo de momento para el par es  $(b/2) \text{ sen } \theta$ .

**Figura 28.22** Vista desde un extremo de la espira en la figura 28.21, con la normal a la espira a un ángulo  $\theta$  respecto al campo magnético.

Imagine que el ciclo se libera del reposo. El ciclo se modela como un objeto rígido bajo un par neto (capítulo 10), y comenzará a girar en respuesta al par neto. El sentido de rotación es el de las manecillas del reloj cuando se le observa desde el lado ③, como se observa en la figura 28.21b. Si se invirtiera la dirección de la corriente, las direcciones de las fuerzas también se invertirían, y la tendencia a la rotación sería en la dirección contraria a las manecillas del reloj. Este comportamiento se explota prácticamente en un dispositivo llamado *motor*, que discutiremos en el capítulo 30.

La ecuación 28.13 usa el subíndice "máx" porque el par tiene su valor máximo cuando el campo magnético es paralelo al bucle. Ahora se supone que el campo magnético uniforme forma un ángulo  $\theta < 90^\circ$  con una línea recta perpendicular al plano de la espira, como en la figura 28.22. Por conveniencia, suponemos que  $\vec{B}$  es perpendicular a los lados ② y ④. En este caso las fuerzas magnéticas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_3$  ejercidas sobre los lados ① y ③ se cancelan entre sí y no producen momento de torsión, ya que actúan a lo largo de la misma recta. Sin embargo, las fuerzas magnéticas  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_4$  que actúan sobre los lados ② y ④ producen un momento de torsión en relación con *cualquier punto*. En la vista lateral que se muestra en la figura 28.22, se nota que el momento de palanca de  $\vec{F}_2$  en relación con el punto  $O$  es igual a  $(b/2) \text{ sen } \theta$ . De manera similar, el momento de palanca de  $\vec{F}_4$  en relación con  $O$ , es también  $(b/2) \text{ sen } \theta$ . Ya que  $F_2 = F_4 = IaB$ , la magnitud del momento de torsión neto en relación con  $O$  es

$$\begin{aligned} \tau &= F_2 \frac{b}{2} \text{ sen } \theta + F_4 \frac{b}{2} \text{ sen } \theta \\ &= IaB \left( \frac{b}{2} \text{ sen } \theta \right) + IaB \left( \frac{b}{2} \text{ sen } \theta \right) = IabB \text{ sen } \theta \\ &= IAB \text{ sen } \theta \end{aligned} \quad (28.14)$$

donde  $A = ab$  es el área de la espira. Este resultado muestra que el momento de torsión tiene su valor máximo  $IAB$  cuando el campo es perpendicular a la normal en el plano de la espira ( $\theta = 90^\circ$ ), como se vio al analizar la figura 28.21, y es igual a cero cuando el campo es paralelo a la normal en el plano de la espira ( $\theta = 0$ ).

Comparando la ecuación 28.14 con la ecuación 11.3, vemos que una expresión conveniente para el momento de torsión ejercido sobre una espira colocado en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  es

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B} \quad (28.15)$$

donde  $\vec{A}$ , que es el vector que se muestra en la figura 28.22, es perpendicular al plano de la espira y tiene una magnitud igual al área de la misma. La dirección de  $\vec{A}$  se determina con la regla de la mano derecha que se describe en la figura 28.23. Cuando enrolla los dedos de la mano derecha en la dirección de la corriente en la espira, su pulgar apunta en la dirección de  $\vec{A}$ . Como muestra la figura 28.22, la espira tiende a girar en la dirección de valores decrecientes de  $\theta$  (es decir, de forma que el vector de área  $\vec{A}$  gire hacia la dirección del campo magnético).

El producto  $I\vec{A}$  representa el **momento dipolar magnético**  $\vec{\mu}$  (conocido a menudo como “momento magnético”) de la espira:

$$\vec{\mu} \equiv I\vec{A} \quad (28.16)$$

La unidad del SI del momento dipolar magnético es el ampere-metro<sup>2</sup> ( $A \cdot m^2$ ). Si una bobina de alambre contiene  $N$  espiras de la misma área, el momento magnético de la bobina es

$$\vec{\mu}_{\text{bobina}} = NI\vec{A} \quad (28.17)$$

Usando la ecuación 28.16 exprese el momento de torsión ejercido en una espira de corriente en un campo magnético  $\vec{B}$  de la forma

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (28.18)$$

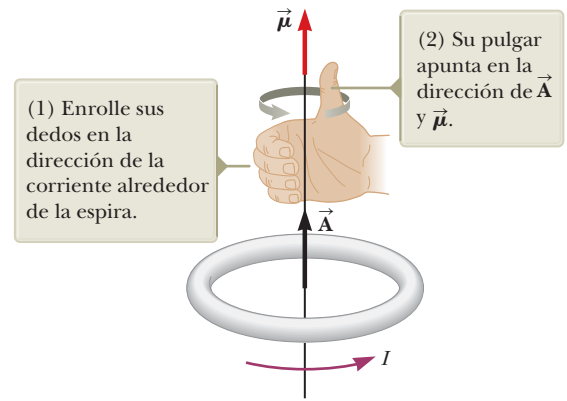
Observe que este resultado es similar al de la ecuación 25.20,  $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ , correspondiente al momento de torsión ejercido en un dipolo eléctrico en presencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$ , donde  $\vec{p}$  es el momento dipolar eléctrico.

Aunque se obtiene el momento de torsión para una orientación específica de  $\vec{B}$  en relación con la espira, la ecuación  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  es válida para cualquier orientación. Es más, aunque deduzca la expresión del momento de torsión para el caso de una espira rectangular, el resultado es válido para cualquier forma de espira.

En la sección 25.6 se afirmó que la energía potencial de un sistema de un dipolo eléctrico dentro de un campo eléctrico está dada por  $U_E = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ . Esta energía depende de la orientación del dipolo en el campo eléctrico. De la misma forma, la energía potencial de un sistema constituida por un dipolo magnético en un campo magnético depende de la orientación del dipolo en dicho campo, y está dada por

$$U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (28.19)$$

Esta expresión muestra que el sistema tiene la mínima energía  $U_{\text{mín}} = -\mu B$  cuando  $\vec{\mu}$  apunta en la misma dirección que  $\vec{B}$ . El sistema tiene su máxima energía  $U_{\text{máx}} = +\mu B$  cuando  $\vec{\mu}$  apunta en la dirección opuesta a  $\vec{B}$ .



**Figura 28.23** Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector  $\vec{A}$ . La dirección del momento magnético  $\vec{\mu}$  es la misma que la dirección de  $\vec{A}$ .

◀ Momento dipolar magnético de una espira de corriente

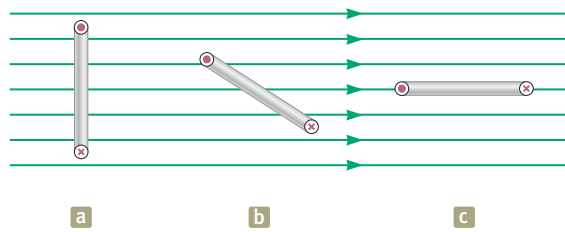
◀ Momento de torsión sobre un momento magnético en un campo magnético

◀ Energía potencial de un sistema formado por un momento magnético en un campo magnético

- E XAMEN RÁPIDO 28.4** (i) Ordene de mayor a menor las magnitudes de los momentos de torsión que actúan sobre las espiras rectangulares (a), (b) y (c) que muestran el borde superior en la figura 28.24 (página 760). Todas las espiras son idénticas y conducen la misma corriente. (ii) Clasifique de mayor a menor las magnitudes de las fuerzas netas que actúan sobre las espiras rectangulares mostradas en la figura 28.24.



**Figura 28.24** (Examen rápido 28.4) ¿Cuál de las espiras de corriente (vistas los bordes superiores) experimenta el mayor momento de torsión?, (a), (b) o (c). ¿Cuál de las espiras de corriente experimenta la fuerza neta máxima?



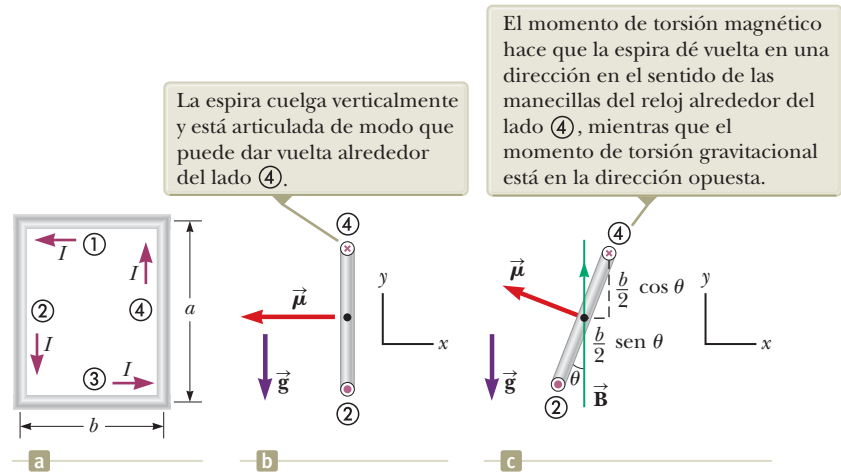
**Ejemplo 28.5 Rotación de una bobina**

Considere la espira de alambre de la figura 28.25a. Imagine que gira sobre un eje a lo largo del lado ④, que es paralelo al eje  $z$  y se amarra de modo que el lado ④ permanece fijo y el resto de la espira cuelga verticalmente, pero puede dar vueltas alrededor del lado ④ (figura 28.25b). La masa de la espira es 50.0 g, y los lados tienen longitudes  $a = 0.200$  m y  $b = 0.100$  m. La espira conduce una corriente de 3.50 A y se sumerge en un campo magnético uniforme vertical de 0.010 0 T de magnitud en la dirección  $y$  positiva (figura 28.25c). ¿Qué ángulo forma el plano de la espira con la vertical?

**SOLUCION**

**Conceptualizar** En la vista lateral de la figura 28.25b, observe que el momento magnético de la espira es hacia la izquierda. Por tanto, cuando la espira está en el campo magnético, el momento de torsión magnético sobre la espira hace que dé vuelta en una dirección en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del lado ④, que se eligió como el eje de rotación. Imagine que la espira hace esta rotación en sentido de las manecillas del reloj de modo que el plano de la espira es a cierto ángulo  $\theta$  con la vertical, como en la figura 28.25c. La fuerza gravitacional sobre la espira ejerce un momento de torsión que causaría una rotación en la dirección contraria a las manecillas del reloj si el campo magnético se interrumpe.

**Categorizar** A cierto ángulo de la espira, los dos momentos de torsión descritos en la etapa *Conceptualizar* son iguales en magnitud y la espira está en reposo. Por tanto, la espira se modela como un *objeto rígido en equilibrio*.



**Figura 28.25** (Ejemplo 28.5) (a) Dimensiones de una espira de corriente rectangular. (b) Vista del borde de la espira en el que se aprecian desde abajo los lados ② y ④. (c) Vista final de la espira en (b) girada a través de un ángulo respecto a la horizontal cuando se coloca en un campo magnético.

**Analizar** Evalúe el momento de torsión magnético sobre la espira en el lado ④ a partir de la ecuación 28.18:

$$\vec{\tau}_B = \vec{\mu} \times \vec{B} = -\mu B \sin(90^\circ - \theta) \hat{k} = -IaB \cos \theta \hat{k} = -IabB \cos \theta \hat{k}$$

Evalúe el momento de torsión gravitacional sobre la espira y observe que la fuerza gravitacional se puede modelar como actuante en el centro de la espira:

$$\vec{\tau}_g = \vec{r} \times m\vec{g} = mg \frac{b}{2} \sin \theta \hat{k}$$

A partir del modelo de cuerpo rígido en equilibrio, sume los momentos de torsión e iguale a cero el momento de torsión neto:

$$\sum \vec{\tau} = -IabB \cos \theta \hat{k} + mg \frac{b}{2} \sin \theta \hat{k} = 0$$

Resuelva para  $\theta$ :

$$IabB \cos \theta = mg \frac{b}{2} \sin \theta \rightarrow \tan \theta = \frac{2IaB}{mg}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{2IaB}{mg} \right)$$

Sustituya valores numéricos:

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{2(3.50 \text{ A})(0.200 \text{ m})(0.010 0 \text{ T})}{(0.050 0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)} \right] = 1.64^\circ$$

**Finalizar** El ángulo es relativamente pequeño, de modo que la espira todavía cuelga casi verticalmente. Sin embargo, si la corriente  $I$  o el campo magnético  $B$  aumentan, el ángulo aumenta conforme el momento de torsión magnético se hace más intenso.

## 28.6 El efecto Hall

Cuando se coloca un conductor de corriente en un campo magnético, se genera una diferencia de potencial en una dirección perpendicular tanto a la corriente como al campo magnético. Este fenómeno, que fue observado por primera vez por Edwin Hall (1855-1938) en 1879, se conoce como *efecto Hall*. El arreglo utilizado para observar el efecto Hall está constituido por un conductor plano que transporta una corriente  $I$  en la dirección  $x$ , como se ve en la figura 28.26. Un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  se aplica en la dirección  $y$ . Si los portadores de carga son electrones que se mueven en la dirección negativa de  $x$  con una velocidad de arrastre  $\vec{v}_d$ , experimentan una fuerza magnética hacia arriba  $\vec{F}_B = q\vec{v}_d \times \vec{B}$ , y son desviados en la misma dirección, se acumulan en el borde superior del conductor plano, y dejan en el borde inferior un exceso de carga positiva en el borde inferior (figura 28.27a). Esta acumulación de carga en los bordes establece un campo eléctrico en el conductor y se incrementa hasta que la fuerza eléctrica en los portadores que quedan en el resto del conductor equilibra la fuerza magnética que actúa sobre los portadores. Los electrones pueden ser ahora descritos por el modelo de la partícula en equilibrio y ya no son desviados hacia arriba. Como se ve en la figura 28.27, se puede medir la diferencia de potencial, conocida como el **voltaje Hall**  $\Delta V_{Hp}$  generado en el conductor, mediante un voltímetro suficientemente sensible conectado a través de la muestra.

Si los portadores de carga son positivos y por tanto se desplazan en la dirección positiva de  $x$  (para una corriente hacia la derecha), como se muestra en las figuras 28.26 y 29.27b, también experimentan una fuerza magnética  $q\vec{v}_d \times \vec{B}$  hacia arriba. Ello produce una acumulación de cargas positivas en el borde superior y deja un exceso de carga negativa en el borde inferior. De ahí que el signo del voltaje Hall generado en la muestra sea de signo opuesto al correspondiente a la desviación de electrones. Por tanto, el signo de los portadores de carga puede determinarse a partir de una medición de la polaridad que tiene el voltaje Hall.

En la deducción de una expresión que defina el voltaje Hall, primero observe que la fuerza magnética ejercida sobre los portadores tiene una magnitud igual a  $qv_d B$ . En equilibrio, esta fuerza está equilibrada por la fuerza eléctrica  $qE_H$ , donde  $E_H$  es la magnitud del campo eléctrico debido a la separación de las cargas (conocido a veces como *campo Hall*). Por tanto,

$$qv_d B = qE_H$$

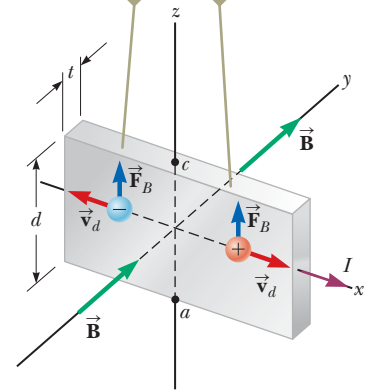
$$E_H = v_d B$$

Si  $d$  es el ancho del conductor, el voltaje Hall es igual a

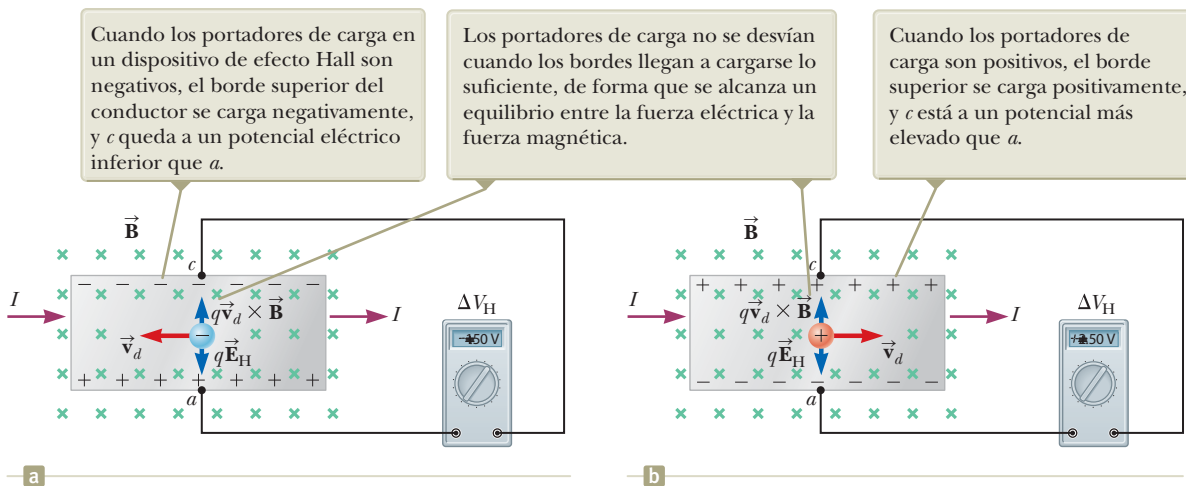
$$\Delta V_H = E_H d = v_d B d \tag{28.20}$$

En consecuencia, el voltaje Hall observado da un valor de la rapidez de arrastre de los portadores de carga una vez conocidos los valores de  $d$  y  $B$ .

Cuando  $I$  tiene la dirección  $x$  y  $\vec{B}$  la dirección  $y$ , los portadores de cargas tanto positivas como negativas se desvían hacia arriba o hacia abajo en el campo magnético.



**Figura 28.26** Para observar el efecto Hall, se aplica un campo magnético a un conductor que transporta corriente. El voltaje Hall se mide entre los puntos  $a$  y  $c$ .



**Figura 28.27** El signo del voltaje Hall depende del signo de los portadores de carga.



Es posible obtener la densidad  $n$  de los portadores de carga midiendo la corriente en la muestra. Por la ecuación 26.4, puede expresar la rapidez de arrastre como

$$v_d = \frac{I}{nqA} \quad (28.21)$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal del conductor. Remplazando la ecuación 28.21 en la ecuación 28.20, se obtiene

$$B = \frac{nqA}{Id} \Delta V_H \quad (28.22)$$

Dado que  $A = td$ , siendo  $t$  el espesor del conductor, es también posible expresar la ecuación 28.22 de la forma

El voltaje Hall ► 
$$B = \frac{nqt}{I} \Delta V_H \quad (28.23)$$

donde  $R_H = 1/nq$  es el coeficiente de Hall. Esta relación muestra que un conductor correctamente calibrado puede ser utilizado para medir la magnitud de un campo magnético desconocido.

### Ejemplo 28.6 Efecto Hall para el cobre

Una tira de cobre rectangular de 1.5 cm de ancho y 0.10 cm de grosor porta una corriente de 5.0 A. Encuentre el voltaje Hall para un campo magnético de 1.2 T aplicado en una dirección perpendicular a la tira.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Estudie cuidadosamente las figuras 28.26 y 28.27 y asegúrese de entender que un voltaje Hall se desarrolla entre los bordes superior e inferior de la tira.

**Categorizar** El voltaje Hall se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Si supone que un electrón por átomo está disponible para conducción, determine la densidad de portador de carga en términos de la masa molar  $M$  y la densidad  $\rho$  del cobre:

$$(1) \quad n = \frac{N_A}{V} = \frac{N_A \rho}{M}$$

Resuelva la ecuación 28.23 para la tensión de Hall y sustituya la ecuación (1):

$$\Delta V_H = \frac{IB}{nqt} = \frac{MIB}{N_A \rho qt}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\Delta V_H = \frac{(0.0635 \text{ kg/mol})(5.0 \text{ A})(1.2 \text{ T})}{(6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(8920 \text{ kg/m}^3)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(0.0010 \text{ m})}$$

$$= 0.44 \mu\text{V}$$

Este voltaje Hall extremadamente pequeño se espera en los buenos conductores. (Observe que el ancho del conductor no es necesario en este cálculo.)

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si la tira tiene las mismas dimensiones, pero está hecho de un semiconductor? ¿El voltaje Hall será menor o mayor?

**Respuesta** En los semiconductores,  $n$  es mucho menor de lo que es en metales que aportan un electrón por átomo a la corriente; en consecuencia, el voltaje Hall usualmente es mayor porque varía con el inverso de  $n$ . Por lo general las corrientes del orden de 0.1 mA se usan para tales materiales. Considere un trozo de silicio que tenga las mismas dimensiones que la tira de cobre en este ejemplo y cuyo valor para  $n$  es  $1.0 \times 10^{20}$  electrones/m<sup>3</sup>. Si considera  $B = 1.2 \text{ T}$  e  $I = 0.10 \text{ mA}$ , se tiene que  $\Delta V_H = 7.5 \text{ mV}$ . Una diferencia de potencial de esta magnitud es fácilmente medible.



# Resumen

## Definiciones

El **momento de dipolo magnético**  $\vec{\mu}$  de una espira portadora de corriente  $I$  es

$$\vec{\mu} \equiv I\vec{A} \quad (28.16)$$

donde el vector de área  $\vec{A}$  es perpendicular al plano de la espira y  $|\vec{A}|$  es igual al área de la espira. La unidad SI de  $\vec{\mu}$  es  $A \cdot m^2$ .

## Conceptos y principios

Si una partícula cargada se mueve en un campo magnético uniforme, de modo que su velocidad inicial es perpendicular al campo, la partícula se mueve en un círculo, cuyo plano es perpendicular al campo magnético. El radio de la trayectoria circular es

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (28.3)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $q$  su carga. La rapidez angular de la partícula cargada es

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (28.4)$$

Si un conductor recto de longitud  $L$  porta una corriente  $I$ , la fuerza ejercida sobre dicho conductor cuando se coloca en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  es

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} \quad (28.10)$$

donde la dirección de  $\vec{L}$  es en la dirección de la corriente y  $|\vec{L}| = L$ .

Si un alambre con forma arbitraria que porta una corriente  $I$  se coloca en un campo magnético, la fuerza magnética ejercida sobre un segmento muy pequeño  $d\vec{s}$  es

$$d\vec{F}_B = I d\vec{s} \times \vec{B} \quad (28.11)$$

Para determinar la fuerza magnética total sobre el alambre, debe integrar la ecuación 28.11 en todo el alambre, teniendo en mente que tanto  $\vec{B}$  como  $d\vec{s}$  pueden variar en cada punto.

El momento de torsión  $\vec{\tau}$  sobre una espira de corriente colocado en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  es

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (28.18)$$

La energía potencial del sistema de un dipolo magnético en un campo magnético es

$$U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (28.19)$$

## Modelo de análisis para resolver problemas

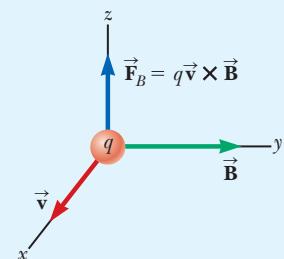
**Partícula en un campo (Magnético)** Una fuente (que se analizará en el capítulo 29) establece un campo magnético  $\vec{B}$  a través del espacio. Cuando se coloca una partícula cargada  $q$  y moviéndose con velocidad  $\vec{v}$  en ese campo, experimenta una fuerza magnética dada por

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (28.1)$$

La dirección de esta fuerza magnética es perpendicular tanto a la velocidad de la partícula como al campo magnético. La magnitud de esta fuerza es

$$F_B = |q|vB \sin \theta \quad (28.2)$$

donde  $\theta$  es el ángulo más pequeño entre  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ . La unidad SI de  $\vec{B}$  es el **tesla** (T), donde  $1 \text{ T} = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$ .



# Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

1. Su equipo está trabajando para una empresa de fabricación de muelles. Se le ha pedido al equipo que diseñe un nuevo método para medir la constante de resorte de un muelle. Juntos, han creado el diseño que se muestra en la figura TP28.1. El inciso (a) de la figura muestra una vista lateral de un rizo conductor de área  $A = ab$ . El rizo se pivota en  $O$ . El punto central del lado izquierdo del rizo está unido al extremo superior de un muelle de constante de fuerza  $k$ . El extremo inferior del muelle está unido a un soporte rígido. El rizo está en un campo magnético de magnitud  $B$  dirigido hacia la derecha. Cuando existe una corriente  $I$  en

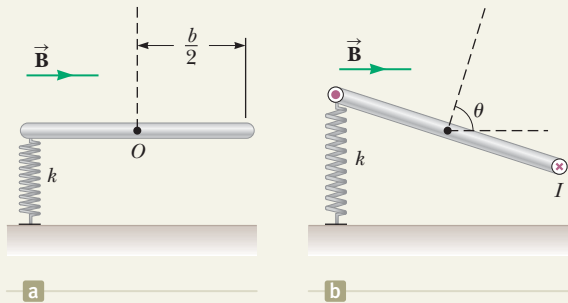


Figura TP28.1

el circuito, el rizo gira a una nueva posición de equilibrio en el ángulo  $\theta$ , como se muestra en el inciso (b) de la figura TP28.1. Encuentre una expresión para la constante de resorte  $k$  del muelle. Suponga que la rotación del rizo es lo suficientemente pequeña como para que el muelle permanezca esencialmente vertical.

2. **ACTIVIDAD** Su grupo acaba de completar la toma de datos para un experimento de voltaje Hall en su laboratorio de física, utilizando la configuración que se muestra en la figura 28.27. La siguiente tabla muestra las medidas. Si las mediciones se tomaron con una corriente de 0.200 A, y la muestra está hecha de un material que tiene una densidad de portadores de carga de  $1.00 \times 10^{26}$  portadores/m<sup>3</sup>, ¿cuál es el espesor de la muestra?

$B$ (T)	$\Delta V_H$ ( $\mu V$ )
0.00	0
0.10	11.0
0.20	19.0
0.30	28.0
0.40	42.0
0.50	50.0
0.60	61.0
0.70	68.0
0.80	79.0
0.90	90.0
1.00	102

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

### SECCIÓN 29.1 Análisis de modelo: Partícula en un campo (Magnético)

Los problemas 1, 2 y 4 del capítulo 11 se pueden ver en esta sección como un repaso del producto vectorial.

1. En el ecuador, cerca de la superficie de la Tierra, el campo magnético es aproximadamente  $50.0 \mu T$  hacia el norte, y el campo eléctrico es de unos 100 N/C hacia abajo con buen clima. Encuentre las fuerzas gravitatorias, eléctricas y magnéticas de un electrón en este entorno, suponiendo que el electrón tiene una velocidad instantánea de  $6.00 \times 10^6$  m/s dirigida hacia el este.
2. Considere un electrón cerca del ecuador de la Tierra. ¿En qué dirección tiende a desviarse si su velocidad está dirigida hacia (a) abajo, (b) el norte, (c) el oeste o (d) el sureste?
3. Encuentre la dirección del campo magnético que actúa sobre una partícula cargada positivamente que se mueve en las distintas situaciones que se muestran en la figura P28.3 si la dirección de la fuerza magnética que actúa sobre ella es como se indica.

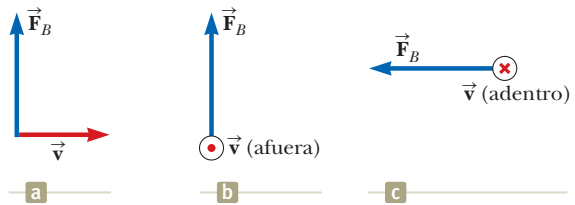


Figura P28.3

4. Un protón que se mueve a  $4.00 \times 10^6$  m/s a través de un campo magnético de 1.70 T experimenta una fuerza magnética de magnitud  $8.20 \times 10^{-13}$  N. ¿Cuál es el ángulo que forma la velocidad del protón y el campo?
5. **AMT** Un protón viaja con una rapidez de  $5.02 \times 10^6$  m/s a un ángulo de  $60.0^\circ$  en la dirección de un campo magnético con un valor de 0.180 T en la dirección de las  $x$  positivas. ¿Cuáles son (a) la magnitud de la fuerza magnética ejercida sobre el protón y (b) su aceleración?
6. **CIC** Un electroimán laboratorio produce un campo magnético de magnitud 1.50 T. Un protón se mueve a través de este campo con una rapidez de  $6.00 \times 10^6$  m/s. (a) Calcule la magnitud de la fuerza magnética máxima que podría ser



ejercida sobre el protón. (b) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración máxima del protón? (c) ¿El campo ejerce la misma fuerza magnética sobre un electrón que se mueve a través del campo con la misma rapidez? (d) ¿Los electrones experimentan la misma aceleración? Explique.

- 7.** Un protón se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  a una rapidez de  $1.00 \times 10^7$  m/s y experimenta una aceleración de  $2.00 \times 10^{13}$  m/s<sup>2</sup> en la dirección positiva de  $x$  cuando su velocidad está en la dirección positiva de  $z$ . Determine la magnitud y la dirección del campo.

### SECCIÓN 28.2 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme

- 8.** Se aplica un voltaje acelerador de  $2.5 \times 10^3$  V a un cañón de electrones, lo que produce un haz de electrones que originalmente viajan horizontalmente al norte en el vacío hacia el centro de una pantalla a 35.0 cm de distancia. ¿Cuáles son (a) la magnitud y (b) la dirección de la desviación en la pantalla causada por el campo gravitacional de la Tierra? (b) ¿Cuáles son (c) la magnitud y (d) la dirección de la desviación en la pantalla causada por la componente vertical del campo magnético de la Tierra, considerado como  $20.0 \mu\text{T}$  hacia abajo? (e) ¿Un electrón en este campo magnético vertical se mueve como un proyectil, con vector aceleración constante perpendicular a una componente de velocidad constante hacia el norte? (f) ¿Es una buena aproximación suponer que este es el movimiento del proyectil? Explique.

- 9.** Un protón (con carga  $= +e$  y masa  $= m_p$ ), un deuterón (con carga  $= +e$  y masa  $= 2m_p$ ) y una partícula alfa (con carga  $= +2e$  y masa  $= 4m_p$ ) son acelerados mediante una diferencia de potencial común  $\Delta V$ . Cada una de las partículas entra en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  con una velocidad en dirección perpendicular a  $\vec{B}$ . El protón se mueve en una trayectoria circular de radio  $r_p$ . Determine (a) los radios de las órbitas circulares del deuterón,  $r_d$ , y (b) de la partícula alfa,  $r_\alpha$ , todos ellos en función de  $r_p$ .

- 10. Problema de repaso** Una bola de metal de 30.0 g tiene carga neta  $Q = 5.00 \mu\text{C}$  se tira por la ventana horizontalmente hacia el norte a una velocidad de  $v = 20.0$  m/s. La ventana está a una altura  $h = 20.0$  m por encima del suelo. Un campo magnético horizontal uniforme de magnitud  $B = 0.0100$  T es perpendicular al plano de la trayectoria de la bola y dirigido hacia el oeste. (a) Suponiendo que la bola sigue la misma trayectoria que tendría en ausencia del campo magnético, encuentre la fuerza magnética que actúa sobre la bola antes de que toque el suelo. (b) Basándose en el resultado del inciso (a), la precisión de tres dígitos significativos ¿justifica asumir que la trayectoria no se ve afectada por el campo magnético? Explique.

- 11. Problema de repaso.** Un electrón choca en forma elástica con un segundo electrón que está inicialmente en reposo. Después de la colisión, los radios de sus trayectorias son 1.00 cm y 2.40 cm. Las trayectorias son perpendiculares a un campo magnético uniforme de magnitud 0.044 0 T. Determine la energía (en keV) del electrón incidente.

- 12. Problema de repaso** Un electrón choca elásticamente con un segundo electrón inicialmente en reposo. Después de la colisión, los radios de sus trayectorias son  $r_1$  y  $r_2$ . Las trayectorias son perpendiculares a un campo magnético uniforme de magnitud  $B$ . Determine la energía del electrón incidente.

- 13. Problema de repaso.** Un electrón se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético constante

de magnitud 1.00 mT. El momento angular del electrón en relación con el centro del círculo es  $4.00 \times 10^{-25}$  kg · m<sup>2</sup>/s. Determine (a) el radio de la trayectoria circular y (b) la rapidez del electrón.

### SECCIÓN 28.3 Aplicaciones que involucran partículas cargadas móviles en un campo magnético

- 14.** Un ciclotrón, concebido para acelerar protones, tiene un campo magnético de 0.450 T de magnitud en una región de radio 1.20 m. ¿Qué valores tienen (a) la frecuencia del ciclotrón y (b) la rapidez máxima adquirida por los protones?

- 15.** Usted está trabajando como asistente médico en una instalación de rayos de protones, donde los protones de alta velocidad se utilizan para bombardear las células cancerosas. Los protones se aceleran con un ciclotrón, que le resulta muy interesante debido a su formación en física. Usted le está explicando esto a un paciente que tiene cierta familiaridad con los ciclotrones. Ella pregunta: "¿Cuántas revoluciones hace un protón en el ciclotrón antes de que llegue a su energía cinética de salida?". Usted está sorprendido, tanto por la alta calidad de su pregunta y el hecho de que nunca pensó en una pregunta así antes. Le dice que intentará darle una respuesta antes de que termine su tratamiento hoy. Cuando termina de prepararla para el tratamiento, ingresa en la sala del ciclotrón y observa la máquina. Solo tres números están disponibles en el etiquetado de la máquina: la energía de salida  $K = 250$  MeV, el radio al que salen los protones,  $r = 0.850$  m, y la diferencia de potencial de aceleración entre los dees,  $\Delta V = 800$  V. Usted vuelve a la el paciente se preparó para darle el número total de veces que los protones rodean el ciclotrón antes de salir.

- 16.** Iones de uranio 238 con un sola carga se aceleran mediante una diferencia de potencial de 2.00 kV y entran en un campo magnético uniforme de 1.20 T dirigido perpendicularmente a sus velocidades. (a) Determine el radio de su trayectoria circular. (b) Repita lo anterior para iones de uranio 235. (c) ¿Qué pasaría si? ¿De qué manera la relación de los radios de estas trayectorias depende del voltaje acelerador? y (d) ¿de la magnitud del campo magnético?

- 17.** Un ciclotrón (figura 28.16), concebido para acelerar protones, tiene un radio exterior de 0.350 m. Los protones son emitidos, prácticamente desde el reposo, por una fuente ubicada en el centro y son acelerados por una diferencia de potencial de 600 V cada vez que atraviesan el espacio existente entre las "des". Éstas están instaladas entre los polos de un electroimán de campo 0.800 T. (a) Determine la frecuencia del ciclotrón para los protones en este ciclotrón. (b) Determine la rapidez a la cual los protones salen del ciclotrón y (c) su energía cinética máxima. (d) ¿Cuántas revoluciones efectúa un protón en el ciclotrón? (e) ¿Durante qué intervalo de tiempo se acelera un protón?

- 18.** Una partícula, en el ciclotrón que se muestra en la figura 28.16a, adquiere energía  $q\Delta V$  de una fuente de energía alterna cada vez que pasa de una de a la otra. El intervalo de tiempo para cada órbita completa es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

de modo que la rapidez promedio de aumento de energía de la partícula es

$$\frac{2q\Delta V}{T} = \frac{q^2 B \Delta V}{\pi m}$$



Note que esta entrada de potencia es constante en el tiempo. Por otro lado, la proporción de aumento en el radio  $r$  de esta trayectoria *no* es constante. (a) Demuestre que la tasa de aumento en el radio  $r$  de su trayectoria no es constante, sino que está dada por

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\Delta V}{\pi B}$$

(b) Describa cómo es que la trayectoria de las partículas en la figura 28.16a es consistente con el resultado del inciso (a). (c) ¿Con qué rapidez aumenta la posición radial de los protones en el ciclotrón, inmediatamente antes de que los protones salgan del ciclotrón? Suponga que el ciclotrón tiene un radio externo de 0.350 m, una aceleración de voltaje de  $\Delta V = 600$  V y un campo magnético de magnitud 0.800 T. (d) ¿Por cuánto aumenta el radio de la trayectoria de los protones durante su última revolución completa?

- 19.** En sus experimentos con “rayos catódicos” durante los cuales descubrió el electrón, J.J. Thomson demostró que las mismas desviaciones de haz resultaban con tubos que tenían cátodos hechos de *diferentes* materiales y contenían *varios* gases antes de la evacuación. (a) ¿Estas observaciones son importantes? Explique su respuesta. (b) Cuando aplicó varias diferencias de potencial a las placas de desviación y encendió las bobinas magnéticas, solas o en combinación con las placas de desviación, Thomson observó que la pantalla fluorescente continuaba mostrando una *única y pequeña* mancha radiante. Argumente si su observación es importante. (c) Haga los cálculos para demostrar que la razón carga-masa que obtuvo Thomson era enorme comparada con la de cualquier objeto macroscópico o cualquier átomo o molécula ionizado. ¿Cómo puede darle sentido a este hecho? (d) ¿Podría Thomson observar alguna desviación del haz debido a gravitación? Haga los cálculos para argumentar para su respuesta. *Nota:* Para obtener una mancha radiante visible en la pantalla fluorescente, la diferencia de potencial entre rendijas y el cátodo debe ser de 100 V o más.

### SECCIÓN 28.4 Fuerza magnética que actúa sobre un conductor que transporta corriente

- 20.** Un alambre recto que lleva una corriente de 3.00 A se coloca en un campo magnético uniforme de magnitud 0.280 T en dirección perpendicular al alambre. (a) Calcule la magnitud de la fuerza magnética sobre una sección del alambre que tiene una longitud de 14.0 cm. (b) Explique por qué no se puede determinar la dirección de la fuerza magnética con la información dada en el problema.
- 21.** Un alambre transporta una corriente estable de 2.40 A. Un tramo recto del alambre tiene 0.750 m de largo y yace a lo largo del eje  $x$  dentro de un campo magnético uniforme,  $\vec{B} = 1.60\hat{k}$ . Si la corriente está orientada en la dirección positiva de  $x$ , ¿cuál es la fuerza magnética que se ejerce sobre la sección del alambre?
- 22.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Imagine un cable de cobre con un radio de 1.00 mm que rodea la Tierra en su ecuador magnético, donde la dirección del campo es horizontal. Una fuente de alimentación proporciona 100 MW para el alambre y así mantener una corriente en él, en una dirección tal que la fuerza magnética del campo magnético de la Tierra es hacia arriba. Debido a esta fuerza, el cable es levitado inmediatamente por encima del suelo.
- 23. Problema de repaso.** Una varilla con 0.720 kg de masa y un radio de 6.00 cm descansa sobre dos rieles paralelos (figura P28.23) que están separados por un valor  $d = 12.0$  cm y

tiene una longitud  $L = 45.0$  cm de largo. La varilla conduce una corriente  $I = 48.0$  A en la dirección que se muestra y rueda por los rieles sin resbalar. Perpendicularmente a la varilla y a los rieles existe un campo magnético uniforme de magnitud 0.240 T. Si parte del reposo, ¿cuál será la rapidez de la varilla cuando se salga de los rieles?

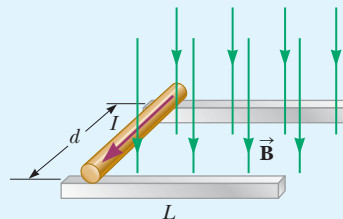


Figura P28.23 Problemas 23 y 24.

- 24. Problema de repaso.** Una varilla de masa  $m$  y de radio  $R$  descansa sobre dos rieles paralelos (figura P28.23) que están separados por una distancia  $d$  y que tienen una longitud  $L$ . La varilla conduce una corriente  $I$  en la dirección que se muestra y rueda a lo largo de los rieles sin resbalar. Un campo magnético uniforme  $B$  está dirigido perpendicularmente a la varilla y a los rieles. Si parte del reposo, ¿cuál será la rapidez de la varilla cuando se salga de los rieles?
- 25.** Un alambre de masa por unidad de longitud igual a 0.500 g/cm conduce una corriente de 2.00 A horizontalmente hacia el sur. ¿Cuáles son (a) la dirección y (b) la magnitud del campo magnético mínimo necesario para levantar este alambre verticalmente hacia arriba?
- 26.** Considere el sistema representado en la figura P28.26. Un alambre horizontal de 15.0 cm de masa de 15.0 g se coloca entre dos conductores verticales, delgados, y un campo magnético uniforme actúa perpendicular a la página. El cable es libre de moverse verticalmente sin fricción sobre los dos conductores verticales. Cuando una corriente de 5.00 A es dirigida como se muestra en la figura, el alambre horizontal se mueve hacia arriba a velocidad constante en presencia de la gravedad. (a) ¿Qué fuerzas actúan sobre el alambre horizontal?, y (b) ¿en qué condición el alambre es capaz de moverse hacia arriba a velocidad constante? (c) Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético mínimo requerido para mover el alambre a rapidez constante. (d) ¿Qué pasa si el campo magnético supera este valor mínimo?

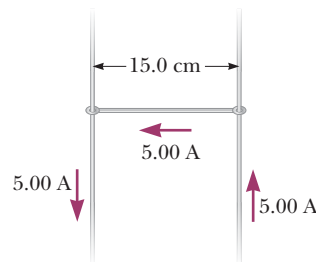


Figura P28.26

- 27.** Por debajo de un anillo conductor horizontal de radio  $r$  que conduce una corriente  $I$  se coloca un poderoso imán, como se muestra en la figura P28.27. Si el campo magnético  $\vec{B}$  forma un ángulo  $\theta$  con la vertical en la ubicación del anillo, ¿cuál es (a) la magnitud y (b) la dirección de la fuerza resultante sobre el anillo?



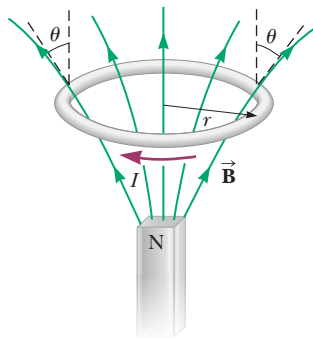


Figura P28.27

- 28.** En la figura P28.28, el cubo tiene aristas de 40.0 cm. Cuatro segmentos rectos de alambre, *ab*, *bc*, *cd* y *da* forman una espira cerrada que conduce una corriente  $I = 5.00$  A en la dirección que se muestra. En la dirección positiva de *y* existe un campo magnético uniforme de magnitud  $B = 0.020$  T. Determine el vector fuerza magnética que se ejerce sobre (a) *ab* (b) *bc* (c) *cd* (d) *da*. (e) Explique cómo puede hallar la fuerza ejercida en el cuarto de estos segmentos partir de las fuerzas de los otros tres, sin cálculo adicional que involucre el campo magnético.

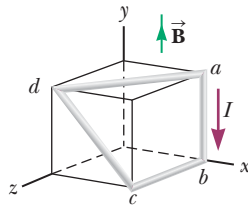


Figura P28.28

**SECCIÓN 29.5 Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme**

- 29.** La aguja de una brújula magnética tiene un momento magnético igual a  $9.70$  mA · m<sup>2</sup>. En su ubicación, el campo magnético de la Tierra tiene un valor de  $55.0$  μT hacia el norte a  $48.0^\circ$  por debajo de la horizontal. Identifique las orientaciones de la aguja de la brújula que representan (a) la energía potencial mínima y (b) la máxima del sistema aguja-campo. (c) ¿Cuánto trabajo debe realizarse sobre la aguja para moverla de la primera a la última orientación?
- 30.** Una bobina circular de 50.0 vueltas y 5.00 cm de radio puede ser orientada en cualquier dirección en un campo magnético uniforme que tiene una magnitud de 0.500 T. Si la bobina transporta una corriente de 25.0 mA, encuentre la magnitud de la torsión máxima posible ejercido sobre la bobina.

- 31.** Usted está a cargo de planear un espectáculo de magia física para una jornada de puertas abiertas en su campus y presenta el siguiente plan para un truco. Colocará una esfera en un plano inclinado áspero de ángulo  $\theta$ , como se muestra en la figura P28.31, y no rodará por la pendiente. Este es el secreto que solo usted conoce: la esfera no es conductora, tiene una masa de 80.0 g y un radio de 20.0 cm. Una bobina plana y compacta de alambre con cinco vueltas se envuelve firmemente alrededor, con cada vuelta concéntrica con la esfera. La esfera se coloca en el plano inclinado de modo que la bobina sea paralela al plano. Establece un campo magnético uniforme de 0.350 T verticalmente hacia arriba en la región de la esfera. (a) ¿Qué corriente se necesita en la bobina para que este truco funcione? (b) Explica el truco a un amigo en confianza y sugiere bajar el ángulo  $\theta$  del plano inclinado para hacer que la corriente requerida sea más baja. ¿Cómo responde?

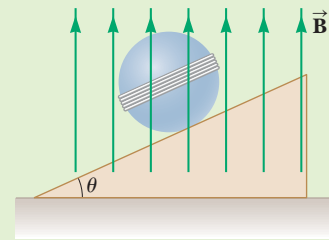


Figura P28.31

- 32.** Está trabajando en el empleo de sus sueños: asistente para el departamento de efectos especiales de un estudio de cine. Le acaban de dar esta tarea: la estrella de una película de terror está caminando por un pasillo espeluznante cuando de repente, debido a algunas fuerzas sobrenaturales desconocidas y extrañas, todas los cuadros colgados en la pared comienzan a girar sobre sus bordes superiores ¡hasta que se pegan fuera de la pared! Para configurar este efecto, coloca los cuadros en la pared con bisagras a lo largo de su extremo superior y enrolla 20 vueltas de cable alrededor del marco exterior del cuadro, como se muestra en la figura P28.32a. Establece un campo magnético uniforme en el pasillo que se dirige hacia arriba y orientado en un ángulo de  $\gamma = 5.00^\circ$  con la vertical, con su componente horizontal dirigido perpendicularmente a la pared. Cuando envía una corriente de  $I = 10.0$  A a través del cable alrededor de cada cuadro, el marco se balancea perpendicularmente a la pared como se muestra en la figura P28.32b. Considere un cuadro particular de ancho  $w = 40.6$  cm, altura  $h = 50.8$  cm, y masa  $m = 0.750$  kg. (a) Su supervisora le pide que determine la magnitud del campo magnético que es necesario para que este cuadro gire de modo que su cara esté paralela al piso y perpendicular a la pared, como en la figura P28.32b. (b) Ella también le pregunta sobre los peligros asociados con este campo magnético.

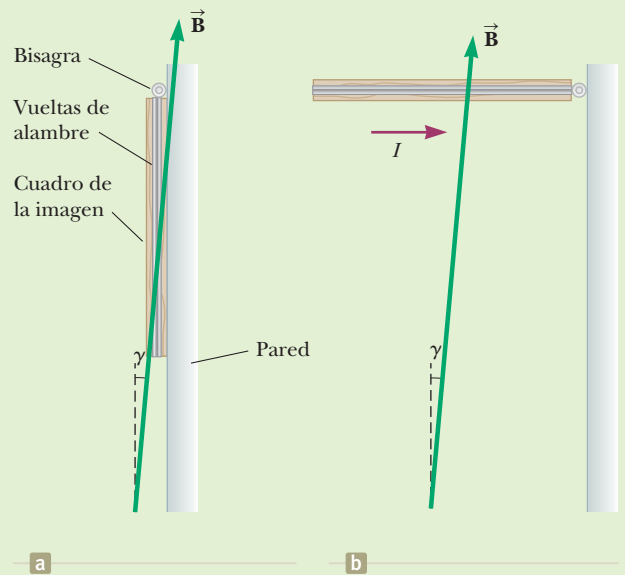


Figura P28.32

- 33.** Una bobina rectangular está constituida por  $N = 100$  vueltas muy apretadas y tiene como dimensiones  $a = 0.400$  m y  $b = 0.300$  m. La bobina se articula a lo largo del eje *y*, y su plano forma un ángulo  $\theta = 30.0^\circ$  con el eje *x* (figura P28.33). (a) ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión ejercida sobre



la bobina por un campo magnético uniforme  $B = 0.800 \text{ T}$  dirigido a lo largo del eje  $x$ , cuando la corriente es  $I = 1.20 \text{ A}$  en la dirección que se muestra en la figura? (b) ¿Cuál es la dirección de rotación esperada de la bobina?

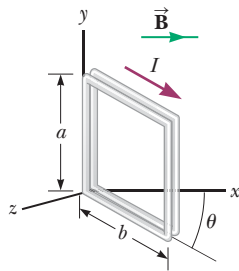


Figura P28.33

- 34.** Una espira de alambre rectangular tiene dimensiones de  $0.500 \text{ m}$  por  $0.300 \text{ m}$ . La espira se apoya en el eje  $xy$  se encuentra en el plano  $xy$ , como se muestra en la figura P28.34. Un campo magnético uniforme de magnitud  $1.50 \text{ T}$  está dirigido en un ángulo de  $40.0^\circ$  con respecto al eje  $y$  y con las líneas de campo paralelas al plano  $yz$ . La espira transporta una corriente de  $0.900 \text{ A}$  en la dirección que se muestra. (No haga caso de la gravitación.) Se desea evaluar la torsión de la corriente en la espira. (a) ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre el segmento de cable  $ab$ ? (b) ¿Cuál es la dirección del par asociado con esta fuerza alrededor de un eje a través del origen? (c) ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre el segmento  $cd$ ? (d) ¿Cuál es la dirección del par asociado con esta fuerza alrededor de un eje a través del origen? (e) ¿Pueden las fuerzas examinadas en los incisos (a) y (c) combinarse para hacer que la espira gire alrededor de  $x$ ? (f) ¿Pueden afectar el movimiento de la espira en modo alguno? Explique. (g) ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre el segmento  $bc$ ? (h) ¿Cuál es la dirección del par asociado con esta fuerza alrededor de un eje a través del origen? (i) ¿Cuál es la torsión del segmento  $ad$  alrededor de un eje que pasa por el origen? (j) Desde el punto de vista de la figura P28.34, una vez que la espira se libera desde el reposo en la posición mostrada, ¿tendrá que girar en sentido horario en sentido antihorario alrededor del eje  $x$ ? (k) Calcule la magnitud del momento magnético de la espira. (l) ¿Cuál es el ángulo entre el vector de momento magnético y el campo magnético? (m) Calcule la torsión en la espira utilizando los resultados de los incisos (k) y (l).

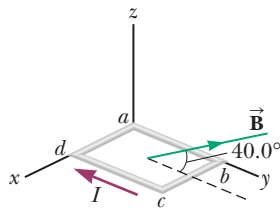


Figura P28.34

- 35.** Un alambre se dobla formando un círculo de diámetro de  $10.0 \text{ cm}$  y se coloca en un campo magnético de  $3.00 \text{ mT}$ . El alambre conduce una corriente de  $5.00 \text{ A}$ . Determine (a) el momento de torsión máximo sobre el alambre y (b) el intervalo de las energías potenciales del sistema alambre-campo para distintas orientaciones del círculo.

## SECCIÓN 28.6 El efecto Hall

- 36.** Una sonda para el efecto Hall funciona con una corriente de  $120 \text{ mA}$ . Cuando la sonda se coloca en un campo magnético uniforme de magnitud  $0.080 \text{ T}$ , produce un voltaje Hall con un valor de  $0.700 \mu\text{V}$ . (a) Cuando se mide un campo magnético desconocido, el voltaje Hall es igual a  $0.330 \mu\text{V}$ . ¿Cuál es la magnitud del campo desconocido? (b) El espesor de la sonda en la dirección de  $\vec{B}$  es de  $2.00 \text{ mm}$ . Determine la densidad de los portadores de carga, cada uno con una carga de magnitud  $e$ .

## PROBLEMAS ADICIONALES

- 37.** Iones de carbono-14 y carbono-12 (cada uno con carga de magnitud  $e$ ) son acelerados en un ciclotrón. Si el ciclotrón tiene un campo magnético de magnitud  $2.40 \text{ T}$ , ¿cuál es la diferencia en la frecuencia de ciclotrón para los dos iones?
- 38.** La figura 28.11 muestra una partícula cargada que viaja en un campo magnético no uniforme que forma una botella magnética. (a) Explique por qué la partícula cargada positiva en la figura se debe mover en sentido de las manecillas del reloj. La partícula viaja a lo largo de una hélice cuyo radio disminuye y cuyo paso disminuye conforme la partícula se mueve en un campo magnético más intenso. Si la partícula se mueve hacia la derecha, a lo largo del eje  $x$ , su velocidad en esta dirección se reducirá a cero y será reflejado desde el lado derecho de la botella, que actúa como un "espejo magnético". La partícula termina rebotando de atrás para adelante entre los extremos de la botella. (b) Explique cualitativamente por qué la velocidad axial se reduce a cero conforme la partícula se mueve en la región de campo magnético intenso al final de la botella. (c) Explique por qué la velocidad tangencial aumenta conforme la partícula se aproxima al extremo de la botella. (d) Explique por qué la partícula en órbita tiene un momento dipolar magnético.
- 39.** Dentro de una región cilíndrica del espacio de radio de  $100 \text{ mm}$ , un campo magnético es uniforme con una magnitud  $25.0 \mu\text{T}$  y orientado paralelo al eje del cilindro. El campo magnético es cero fuera de este cilindro. Un protón de rayos cósmicos viajando a un décimo de la velocidad de la luz se dirige directamente hacia el centro del cilindro, con una trayectoria perpendicular al eje del cilindro. (a) Calcule el radio de curvatura de la trayectoria que el protón sigue cuando entra en la región del campo. (b) Explique si el protón llegará al centro del cilindro.
- 40.** Los sistemas de circulación extracorpórea y las máquinas de diálisis emplean bombas sanguíneas. Una bomba mecánica puede destruir células sanguíneas. La figura P28.40 representa una bomba electromagnética. La sangre se confina en un tubo eléctricamente aislador, cilíndrico, pero en la práctica representado como un rectángulo de ancho  $w$  y altura  $h$ . La simplicidad de diseño hace confiable a la bomba. La sangre se mantiene fácilmente sin contaminar; el tubo es simple de limpiar o barato para sustituir. Dos electrodos ajustan en lo alto y bajo del tubo. La diferencia de potencial entre ellos establece una corriente eléctrica a través de la sangre, con densidad de corriente  $J$  en una sección de longitud  $L$ . En la misma región existe un campo magnético perpendicular. (a) Explique por qué este arreglo produce en el líquido una fuerza que se dirige a lo largo de la longitud de la tubería. (b) Demuestre que la sección de líquido en el campo magnético experimenta un aumento de presión  $JLB$ . (c) Después de que la sangre sale de la bomba, ¿esta se carga? (d) ¿Porta corriente? (e) ¿Está magnetizada? (La misma bomba magné-

tica se puede usar para cualquier fluido que conduce electricidad, como el sodio líquido en un reactor nuclear.)

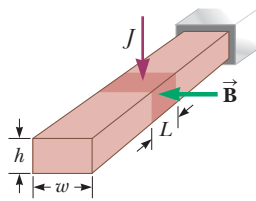


Figura P28.40

41. **Problema de repaso.** Un protón está en reposo en el plano vertical frontera de una región que contiene un campo magnético uniforme y vertical  $B$  (Figura P28.41). Una partícula alfa moviéndose horizontalmente choca de frente de forma elástica con el protón. Inmediatamente después de la colisión, ambas partículas entran en el campo magnético, moviéndose perpendicularmente a la dirección del campo. El radio de la trayectoria del protón es  $R$ . La masa de la partícula alfa es cuatro veces la correspondiente del protón y su carga el doble de la carga del protón. Determine el radio de la trayectoria de la partícula alfa.

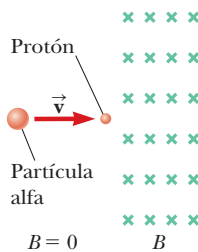


Figura P28.41

42. (a) Un protón en movimiento con una velocidad  $\vec{v} = v_i \hat{i}$  experimenta una fuerza magnética  $\vec{F} = F_y \hat{j}$ . Explique lo que se puede o no inferir en relación con  $\vec{B}$  a partir de esta información. (b) **¿Qué pasaría si?** En términos de  $F_y$ , ¿cuál sería la fuerza ejercida sobre un protón que se mueva con una velocidad de  $\vec{v} = -v_i \hat{i}$  en este mismo campo? (c) ¿Cuál sería la fuerza ejercida sobre un electrón que se mueva con una velocidad de  $\vec{v} = -v_i \hat{i}$  en este mismo campo?
43. Un protón, que tiene una velocidad inicial de  $20.0 \hat{i}$  Mm/s entra a un campo magnético uniforme de  $0.300$  T de magnitud, con una dirección perpendicular a la velocidad del protón. Deja la región llena de campo con velocidad  $20.0 \hat{j}$  Mm/s. Determine (a) la dirección del campo magnético, (b) el radio de curvatura de la trayectoria del protón mientras está en el campo, (c) la distancia que recorre el protón en el campo y (d) el intervalo de tiempo que el protón está en el campo.

44. Ha sido llamado como testigo experto en un caso civil. El caso involucra una disputa entre vecinos. El vecino demandante se queja de un zumbido durante la noche que le impide dormir. Afirma que el zumbido proviene de una lámpara en el techo del porche del acusado. Al demandado le gusta hacer las instalaciones y las reparaciones él mismo y ha hecho un trabajo descuidado al instalar la lámpara. El accesorio cuelga verticalmente de un solo cable que se conecta a través del techo del porche y baja por la pared a un conector en una toma de corriente cercana. El segundo

cable se cuelga horizontalmente con cuerdas al nivel de la luz y luego baja por la pared hasta el otro conector en la salida. El acusado deja la luz encendida toda la noche por seguridad. Recordando su física de la escuela secundaria, el demandante afirma que la combinación del voltaje doméstico de  $60$  Hz y el campo magnético de la Tierra resulta en una fuerza impulsora oscilante en el único cable del cual la lámpara cuelga verticalmente. Esto, a su vez, establece una onda estacionaria en el cable, y esa es la causa del zumbido. Usted ha sido contratado por el abogado defensor. Al escuchar los detalles del caso, obtiene el permiso del acusado y realiza las mediciones. La masa de la lámpara es de  $17.5$  kg, el cable vertical desde el que cuelga tiene una longitud de  $0.150$  m y una masa de  $0.030$  kg. ¿Es correcta la afirmación del demandante de que el campo magnético de la Tierra está causando el zumbido del cable? Ignore cualquier efecto del segundo cable.

45. Una mezcladora eléctrica manual contiene un motor eléctrico. Represente el motor como una bobina circular, compacta y plana que lleva corriente eléctrica en una región donde existe un campo magnético producido por un imán permanente externo. Sólo necesita considerar un instante en la operación del motor. (Estudiará de nuevo los motores en el capítulo 30.) (a) Estime el orden de magnitud del campo magnético, (b) el momento de torsión en la bobina, (c) su corriente, (d) su área y (e) el número de vueltas en la bobina. La potencia de entrada al motor es eléctrica, y está dada por  $P = I \Delta V$ , y la potencia de salida útil es mecánica,  $P = \tau \omega$ .
46. **¿Por qué no es posible la siguiente situación?** La figura P28.46 muestra una técnica experimental para alterar la dirección de desplazamiento de una partícula cargada. Una partícula de carga  $q = 1.00 \mu\text{C}$  y masa  $m = 2.00 \times 10^{-13}$  kg entra en la parte inferior de la región de campo magnético uniforme a la velocidad  $v = 2.00 \times 10^5$  m/s, con un vector de velocidad perpendicular a las líneas de campo. La fuerza magnética sobre la partícula hace que su dirección de desplazamiento cambie de modo que sale de la región del campo magnético en la parte superior viajando en un ángulo de su dirección original. El campo magnético tiene magnitud  $B = 0.400$  T y se dirige fuera de la página. La longitud  $h$  de la región del campo magnético es  $0.110$  m. Una experimentadora realiza la técnica y mide el ángulo  $\theta$  con el que las partículas salen de la parte superior del campo. Ella encuentra que los ángulos de desviación son exactamente como se predijo.

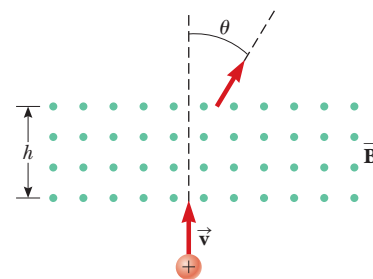


Figura P28.46

47. Un cirujano de corazón vigila mediante un monitor la cantidad de sangre que circula por una arteria utilizando un medidor de flujo electromagnético (figura P28.47). Los electrodos  $A$  y  $B$  están en contacto con la superficie exterior del vaso sanguíneo que tiene un diámetro interior de  $3.00$  mm. (a) Ante un campo magnético de magnitud  $0.040$  T, entre

los electrodos aparece una fem de  $160 \mu\text{V}$ . Calcule la rapidez de la sangre. (b) Explique por qué el electrodo A es positivo, según se ilustra. (c) ¿El que los iones móviles presentes en la sangre estén la mayoría cargados positiva o negativamente depende del signo de la fem? Explique.

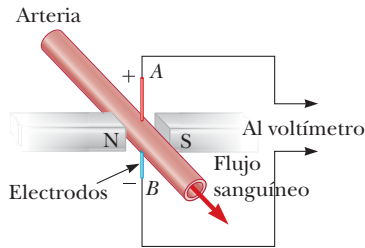


Figura P28.47

- 48. Problema de repaso.** (a) Demuestre que un dipolo magnético en un campo magnético uniforme, desplazado de su orientación de equilibrio y liberado, puede oscilar como un péndulo de torsión en movimiento armónico simple (sección 15.5). (b) ¿Esta afirmación es cierta para todos los desplazamientos angulares, para todos los desplazamientos menores que  $180^\circ$  o sólo para pequeños desplazamientos angulares? Explique. (c) Suponga que el dipolo es la aguja de una brújula, un imán de barra ligero, con un momento magnético de magnitud  $\mu$  y tiene momento de inercia  $I$  en torno a su centro, donde está montada sobre un eje vertical sin fricción, y se coloca en un campo magnético horizontal de magnitud  $B$ . Evalúe su frecuencia de oscilación. (d) Explique cómo se puede usar convenientemente la aguja de brújula como un indicador de la magnitud del campo magnético externo. Si su frecuencia es  $0.680 \text{ Hz}$  en el campo local de la Tierra, con una componente horizontal de  $39.2 \mu\text{T}$ , ¿cuál es la magnitud de un campo en donde su frecuencia de oscilación es  $4.90 \text{ Hz}$ ?

### PROBLEMAS DE DESAFÍO

- 49.** Considere un electrón que se encuentra en la órbita de un protón y que se conserva en una trayectoria circular fija de radio  $R = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ , debido a la fuerza de Coulomb. Si la carga en órbita se trata como si fuera una espira de corriente, calcule el momento de torsión resultante cuando el sistema está inmerso en un campo magnético de  $0.400 \text{ T}$  dirigido perpendicularmente al momento magnético de la espira.
- 50.** Protones con una energía cinética de  $5.0 \text{ MeV}$  ( $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ ) se mueven en la dirección positiva de  $x$  y entran en un campo magnético  $\vec{B} = 0.050 0 \hat{k} \text{ T}$  dirigido hacia fuera del plano de la página que se extiende desde  $x = 0$  hasta  $x = 1.00 \text{ m}$ , como se observa en la figura P28.50. (a) Ignore los efectos relativistas y determine el ángulo  $\alpha$  entre el vector inicial de velocidad del haz de protones y el vector de velocidad después de que el haz salga del campo. (b) Calcule la componente  $y$  del momento de los protones cuando salen del campo magnético.

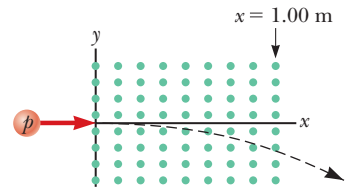


Figura P28.50

- 51. Problema de repaso.** Un alambre de densidad lineal de masa igual a  $1.00 \text{ g/cm}$  se coloca sobre una superficie horizontal que tiene un coeficiente de fricción cinética de  $0.200$ . El alambre conduce una corriente de  $1.50 \text{ A}$  hacia el este y se desliza horizontalmente hacia el norte. ¿Cuál es (a) la magnitud y (b) la dirección del campo magnético más pequeño que provocará que el alambre se mueva de esta manera?







## Fuentes del campo magnético

Un técnico prepara a un paciente para recibir un escáner desde una máquina de resonancia magnética (MRI) en un hospital. Los cables superconductores (sección 26.5) se usan para crear un campo magnético muy fuerte en el interior de la máquina, así como también alrededor de la máquina. (James Steidl / Shutterstock)

**IMAGINE** Comienza a trabajar a tiempo parcial como conserje en un hospital local para ganar un poco de dinero extra. Su supervisora está dándole orientación. Ella le está mostrando el equipo y los suministros de limpieza. Luego, le dice que escuche con atención mientras le indica que debe limpiar la habitación en la que se encuentra la máquina de resonancia magnética (MRI). Ella explica que la máquina de MRI siempre está encendida, incluso cuando la habitación no se usa durante la noche. Los objetos de metal pueden ser atraídos por el campo magnético muy fuerte de la máquina de MRI. Ella enfatiza que ha habido accidentes, incluso fatales, que involucran máquinas de MRI, incluyendo muchos que involucran equipos de limpieza. Hubo incluso un caso en el que una máquina de MRI retiró un arma de fuego de un oficial de policía y la descargó al golpear contra ella. Como resultado, hay tipos especiales de equipos de limpieza y suministros que se deben usar en el área de la máquina de MRI. Ella le hace prometer que solo usará el equipo y los suministros especiales de limpieza en la sala de resonancia magnética. Después de la orientación, se pregunta cómo la máquina de MRI puede crear un campo magnético tan fuerte. También estudia cuidadosamente el equipo especial para usar en la sala de MRI para averiguar qué hace que sea seguro usarlo cerca de la máquina de MRI.

**CONEXIONES** En el capítulo 28, estudiamos la fuerza magnética ejercida sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético. Para completar la descripción de la interacción magnética, este capítulo explora de dónde viene el campo magnético en primer lugar: cargas en movimiento. Comenzamos mostrando cómo usar la ley de Biot y Savart para calcular el campo magnético producido en algún punto del espacio por un pequeño elemento de corriente. Este formalismo se usa para investigar varias configuraciones magnéticas. Eventualmente generamos la *ley de Ampère*, que es útil para calcular el campo magnético de una configuración altamente simétrica que transmite una corriente constante, y recuerda la ley de Gauss en

- 29.1 Ley de Biot-Savart
- 29.2 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos
- 29.3 Ley de Ampère
- 29.4 Campo magnético de un solenoide
- 29.5 Ley de Gauss en el magnetismo
- 29.6 Magnetismo en la materia





el capítulo 23. Después de completar este capítulo, estaremos preparados para los siguientes capítulos, que abordan la combinación de efectos eléctricos y magnéticos llamada *electromagnetismo*. El electromagnetismo es la base de muchos fenómenos físicos que estudiaremos para el resto del libro.

## 29.1 Ley de Biot-Savart

La relación entre el magnetismo y la electricidad se descubrió en 1819 cuando, durante una demostración de conferencia, Hans Christian Oersted descubrió que una corriente eléctrica en un cable desviaba una aguja de la brújula cercana. En la década de 1820, Faraday y Joseph Henry (1797-1878) demostraron conexiones adicionales entre la electricidad y el magnetismo. Mostraron que se puede producir una corriente eléctrica en un circuito moviendo un imán cerca del circuito o cambiando la corriente en un circuito cercano. Estas observaciones demuestran que un campo magnético cambiante crea un campo eléctrico. Años más tarde, el trabajo teórico de Maxwell mostró que lo contrario también es cierto: un campo eléctrico cambiante crea un campo magnético. En general, entonces, la fuente de un campo magnético es una *carga eléctrica en movimiento*.

Poco después del descubrimiento de Oersted, Jean-Baptiste Biot (1774-1862) y Félix Savart (1791-1841) realizaron experimentos cuantitativos sobre la fuerza ejercida por una corriente eléctrica sobre un imán cercano. A partir de sus resultados experimentales, Biot y Savart llegaron a una expresión matemática que proporciona el campo magnético en algún punto del espacio en términos de la corriente que produce el campo. En el capítulo 22, mostramos que la expresión matemática para el campo eléctrico debido a una sola carga (ecuación 22.9) es relativamente simple. Encontraremos que la expresión matemática para el campo magnético no es tan simple. Esta expresión se basa en las siguientes observaciones experimentales para el campo magnético  $d\vec{\mathbf{B}}$  en un punto  $P$  asociado con un elemento de longitud  $d\vec{\mathbf{s}}$  de un alambre por el que pasa una corriente estable  $I$  (figura 29.1):

- El vector  $d\vec{\mathbf{B}}$  es perpendicular tanto a  $d\vec{\mathbf{s}}$  (que apunta en la dirección de la corriente) como al vector unitario  $\hat{\mathbf{r}}$ , dirigido desde  $d\vec{\mathbf{s}}$  hacia  $P$ .
- La magnitud de  $d\vec{\mathbf{B}}$  es inversamente proporcional a  $r^2$ , donde  $r$  es la distancia de  $d\vec{\mathbf{s}}$  a  $P$ .
- La magnitud de  $d\vec{\mathbf{B}}$  es proporcional a la corriente y a la magnitud  $ds$  del elemento de longitud  $d\vec{\mathbf{s}}$ .
- La magnitud de  $d\vec{\mathbf{B}}$  es proporcional a  $\sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $d\vec{\mathbf{s}}$  y  $\hat{\mathbf{r}}$ .

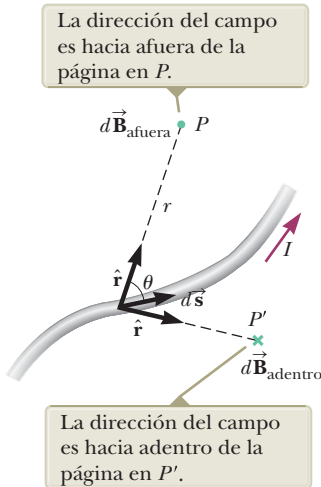
Estas observaciones se resumen en la expresión matemática conocida hoy en día como la **ley de Biot-Savart**.

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (29.1)$$

donde  $\mu_0$  es una constante llamada **permeabilidad del espacio vacío**:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \quad (29.2)$$

Existen similitudes y diferencias interesantes entre la ecuación 29.1 para el campo magnético debido a un elemento de corriente y la ecuación 22.9 para el campo eléctrico debido a una carga puntual. La magnitud del campo magnético varía con el cuadrado inverso de la distancia de la fuente, al igual que el campo eléctrico debido a una carga puntual. Sin embargo, las direcciones de los dos campos son bastante diferentes. El campo eléctrico creado por una carga puntual es radial, pero el campo magnético creado por un elemento de corriente es perpendicular tanto al elemento de longitud  $d\vec{\mathbf{s}}$  como al vector unitario  $\hat{\mathbf{r}}$  como se describe por el producto cruz en la ecuación 29.1. Por tanto, si el conductor se encuentra en el plano de la página como se muestra en la Figura 29.1,  $d\vec{\mathbf{B}}$  señala fuera de la página en  $P$  y hacia adentro de la página en  $P'$ .



**Figura 29.1** El campo magnético  $d\vec{\mathbf{B}}$  en un punto debido a la corriente  $I$  que pasa a través de un elemento de longitud  $d\vec{\mathbf{s}}$  está definido por la ley de Biot-Savart.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 29.1

**La ley de Biot-Savart** El campo magnético que describe la ley de Biot-Savart se *debe* a un conductor por el que pasa una corriente. No confunda este campo con cualquier campo *externo* que pudiera aplicarse al conductor proveniente de alguna otra fuente.

Ley de Biot-Savart ►

Permeabilidad del espacio vacío ►



Observe que el campo  $d\vec{B}$  en la ecuación 29.1 es creado en un punto por la corriente en sólo un pequeño elemento de longitud  $d\vec{s}$  del conductor. Para determinar el campo magnético *total*  $\vec{B}$  que se crea en algún punto por una corriente de tamaño finito, debe sumar las contribuciones de todos los elementos de corriente  $I d\vec{s}$  que forman la corriente. Es decir, debe integrar la ecuación 29.1 para evaluar  $\vec{B}$ :

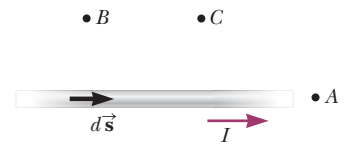
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (29.3)$$

donde la integral se aplica sobre la distribución completa de la corriente. Esta expresión debe manejarse con especial cuidado ya que el integrando es un producto cruz y, por tanto, una cantidad vectorial. En el ejemplo 29.1 verá el caso de una integración de este tipo.

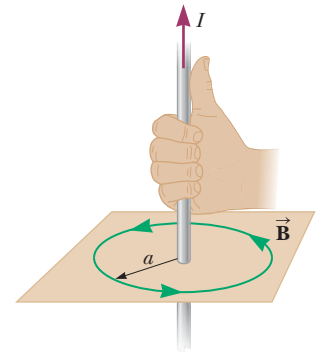
A pesar de que se desarrolla la ley de Biot-Savart para un alambre que conduce una corriente, también es válida para una corriente formada por cargas que fluyen a través del espacio, como el haz de partículas en un acelerador. En ese caso,  $d\vec{s}$  representa la longitud de un pequeño segmento de espacio en el que fluyen las cargas.

La ley de Biot-Savart expresa el valor del campo magnético correspondiente a un elemento de corriente aislado en algún punto, pero este elemento de corriente aislado no puede existir como lo hace una carga eléctrica aislada. Un elemento de corriente debe ser parte de una distribución mayor de corriente, ya que para que las cargas fluyan es necesario que exista un circuito completo. Por tanto, la ley de Biot-Savart (ecuación 29.1) es sólo la primera etapa para el cálculo de un campo magnético; acto seguido es necesario efectuar una integración sobre la distribución de la corriente, como en la ecuación 29.3.

- E XAMEN RÁPIDO 29.1** Considere el campo magnético debido a la corriente a
- lo largo del alambre que se muestra en la figura 29.2. Ordene de mayor a menor
  - los puntos *A*, *B* y *C*, en función de la magnitud del campo magnético debido a la
  - corriente existente a lo largo del elemento  $d\vec{s}$  que se muestra.



**Figura 29.2** (Examen rápido 29.1) ¿Dónde es mayor el campo magnético debido al elemento de corriente?



**Figura 29.3** La regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético que rodea un cable largo y recto que transporta una corriente. Observe que las líneas del campo magnético forman círculos alrededor del cable.

El ejemplo 29.1 a continuación investiga el campo magnético debido a un cable largo y recto. Esta geometría es importante porque ocurre a menudo. La figura 29.3 es una vista en perspectiva del campo magnético que rodea un cable largo, recto y que lleva corriente. Porque la simetría del cable y las líneas del campo magnético son círculos concéntricos con el cable y se encuentran en planos perpendiculares. La magnitud de  $\vec{B}$  es constante en cualquier círculo de radio  $a$  y se encontrará en el ejemplo 29.1. Una regla conveniente para determinar la dirección de  $\vec{B}$  es agarrar el cable con la mano derecha, colocando el pulgar a lo largo de la dirección de la corriente. Los cuatro dedos se envuelven en la dirección del campo magnético.

La figura 29.3 también muestra que la línea del campo magnético no tiene principio ni fin. Por el contrario, forma un circuito cerrado. Esa es una gran diferencia entre las líneas de campo magnético y líneas de campo eléctrico, que comienzan con cargas positivas y terminan con cargas negativas. Exploraremos esta característica de las líneas de campo magnético más adelante en la sección 29.5. Prueba la regla de la mano derecha para los vectores de campo en la figura 29.1.

### Ejemplo 29.1 Campo magnético alrededor de un conductor recto delgado

Considere un cable recto delgado de longitud finita que porta una corriente constante  $I$  y está colocado a lo largo del eje  $x$ , como se muestra en la figura 29.4 (página 774). Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto  $P$  debido a esta corriente.

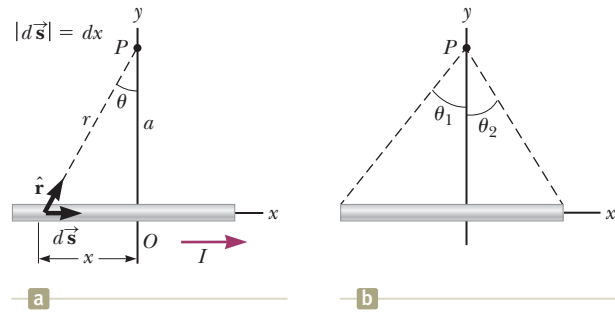
#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** A partir de la ley Biot-Savart, se espera que la magnitud del campo sea proporcional a la corriente en el alambre y disminuya conforme aumenta la distancia  $a$  desde el alambre al punto  $P$ . También se espera que el campo dependa de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en la figura 29.3b. Colocamos el origen en  $O$  y sea el punto  $P$  a lo largo del eje  $y$  positivo.

*continúa*

## 29.1 continuación

**Categorizar** Se pide encontrar el campo magnético debido a una distribución de corriente simple, así que este ejemplo es un problema representativo para el que es apropiada la ley Biot-Savart. Debe encontrar la contribución de campo de un pequeño elemento de corriente y, a continuación integrar sobre la distribución de la corriente. Al encontrar el campo eléctrico debido a la distribución de carga lineal continua en la sección 23.1, expresamos el elemento de carga  $dq$  en la ecuación 23.1 como  $dq = \lambda dx$ . Cuando usamos la ley Biot-Savart, tenemos un elemento similar en  $I d\vec{s}$ . En este elemento, sin embargo,  $I$  es constante y  $d\vec{s}$  se elige para ser paralelo a la dirección de  $I$ .



**Figura 29.4** (Ejemplo 29.1) (a) Un alambre recto delgado que porta una corriente  $I$ . (b) Ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  utilizados para determinar el campo neto.

**Analizar** Comience por considerar un elemento de longitud  $d\vec{s}$  ubicado a una distancia  $r$  de  $P$ . La dirección del campo magnético en el punto  $P$  debida a la corriente en este elemento es hacia afuera de la página porque  $d\vec{s} \times \hat{r}$  es hacia afuera de la página. De hecho, ya que todos los elementos de corriente  $I d\vec{s}$  yacen en el plano de la página, todos producen un campo magnético dirigido afuera de la página en el punto  $P$ . Por tanto, la dirección del campo magnético en el punto  $P$  es hacia afuera de la página y sólo es necesario encontrar la magnitud del campo.

Evalúe el producto cruz en la ley Biot-Savart:

$$d\vec{s} \times \hat{r} = |d\vec{s} \times \hat{r}| \hat{k} = \left[ dx \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right] \hat{k} = (dx \cos \theta) \hat{k}$$

Sustituya en la ecuación 29.1:

$$(1) \quad d\vec{B} = (dB) \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \cos \theta}{r^2} \hat{k}$$

A partir de la geometría en la figura 29.4a, exprese  $r$  en términos de  $\theta$ :

$$(2) \quad r = \frac{a}{\cos \theta}$$

Observe que  $\tan \theta = -x/a$  a partir del triángulo rectángulo en la figura 29.4a (el signo negativo es necesario porque  $d\vec{s}$  se ubica en un valor negativo de  $x$ ) y resuelva para  $x$ :

$$x = -a \tan \theta$$

Encuentre la diferencial  $dx$ :

$$(3) \quad dx = -a \sec^2 \theta d\theta = -\frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Sustituya las ecuaciones (2) y (3) dentro de la expresión para el componente  $z$  del campo a partir de la ecuación (1):

$$(4) \quad dB = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} \right) \left( \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \right) \cos \theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta$$

Integre la ecuación (4) sobre todos los elementos de longitud en el alambre, donde los ángulos sustentados varían de  $\theta_1$  a  $\theta_2$ , como se definió en la figura 29.4b:

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \quad (29.4)$$

**Finalizar** Puede usar este resultado para encontrar el campo magnético de cualquier alambre recto portador de corriente si conoce la geometría y por ende los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Considere el caso especial de un alambre recto infinitamente largo. Si el alambre en la figura 29.4b se vuelve infinitamente largo, se ve que  $\theta_1 = \pi/2$  y  $\theta_2 = -\pi/2$  para elementos de longitud que varían entre las posiciones  $x = -\infty$  y  $x = +\infty$ . Ya que  $(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = [(\sin \pi/2 - \sin(-\pi/2))] = 2$ , la ecuación 29.4 se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (29.5)$$

Las ecuaciones 29.4 y 29.5 muestran que la magnitud del campo magnético es proporcional a la corriente y disminuye con la distancia creciente desde el alambre, como se esperaba. La ecuación 29.5 tiene la misma forma matemática que la expresión para la magnitud del campo eléctrico debido a un largo alambre con carga (vea la ecuación 23.8).

### Ejemplo 29.2 Campo magnético debido a un segmento de alambre curvo

Calcule el campo magnético en el punto  $O$  para el segmento de alambre portador de corriente que se muestra en la figura 29.5. El alambre consiste en dos porciones rectas y un arco circular de radio  $a$ , que sustenta un ángulo  $\theta$ .

continúa

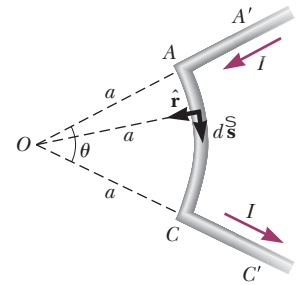
29.2 continuación

SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El campo magnético en  $O$  debido a la corriente en los segmentos rectos  $AA'$  y  $CC'$  es cero porque  $d\vec{s}$  es paralelo a  $\hat{r}$  a lo largo de estas trayectorias, lo que significa que  $d\vec{s} \times \hat{r} = 0$  para estas trayectorias. Por tanto, esperamos que el campo magnético en  $O$  se deba sólo a la corriente en la parte curvada del alambre.

**Categorizar** Ya que se pueden ignorar los segmentos  $AA'$  y  $CC'$ , este ejemplo se clasifica como una aplicación de la ley Biot-Savart al segmento de alambre curvo  $AC$ .

**Analizar** Cada elemento de longitud  $d\vec{s}$  a lo largo de la trayectoria  $AC$  está a la misma distancia  $a$  desde  $O$ , y la corriente en cada uno aporta un elemento de campo  $d\vec{B}$  dirigido hacia la página en  $O$ . Además, en cada punto sobre  $AC$ ,  $d\vec{s}$  es perpendicular a  $\hat{r}$ ; por tanto,  $|d\vec{s} \times \hat{r}| = ds$ .



**Figure 29.5** (Ejemplo 29.2) Una porción de alambre forma un arco de círculo. La longitud del segmento curvo  $AC$  es  $s$ .

A partir de la ecuación 29.1, encuentre la magnitud del campo en  $O$  debido a la corriente en un elemento de longitud  $ds$ :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds}{a^2}$$

Integre esta expresión a lo largo de la trayectoria curva  $AC$ , y note que  $I$  y  $a$  son constantes:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} s$$

A partir de la geometría, observe que  $s = a\theta$  y sustituya:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} (a\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \theta \tag{29.6}$$

**Finalizar** La ecuación 29.6 da la magnitud del campo magnético en  $O$ . La dirección de  $\vec{B}$  es hacia la página en  $O$  porque  $d\vec{s} \times \hat{r}$  es hacia la página para todo elemento de longitud.

¿QUÉ PASARÍA SI?

¿Y si se le pidiera encontrar el campo magnético en el centro de una espira de alambre circular de radio  $R$  que porte una corriente  $I$ ? ¿Esta pregunta se puede responder en este punto de su comprensión de la fuente de los campos magnéticos?

**Respuesta** Sí, se puede. Los alambres rectos en la figura 29.5 no aportan al campo magnético. La única contribución es del segmento curvo. Conforme el ángulo  $\theta$  aumenta, el segmento curvo se convierte en un círculo completo cuando  $\theta = 2\pi$ . Por tanto, puede encontrar el campo magnético en el centro de una espira de alambre al hacer  $\theta = 2\pi$  en la ecuación 29.6:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2\pi = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

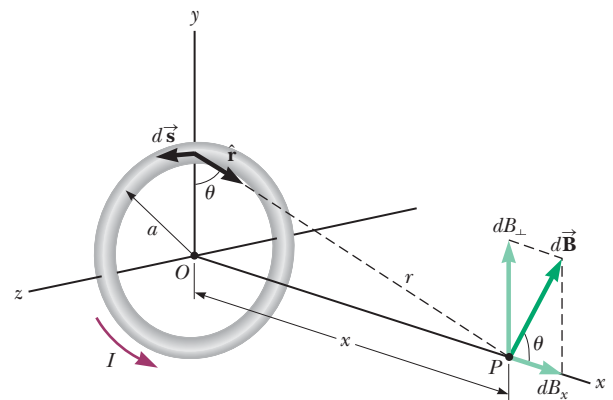
Este resultado es un caso específico de un resultado más general explicado en el ejemplo 29.3.

**Ejemplo 29.3** Campo magnético en el eje de una espira de corriente circular

Considere una espira de alambre circular de radio  $a$  ubicada en el plano  $yz$  y que porta una corriente constante  $I$ , como en la figura 29.6. Calcule el campo magnético en un punto axial  $P$  a una distancia  $x$  desde el centro de la espira.

SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Compare este problema con el ejemplo 23.2 para el campo eléctrico debido a un anillo cargado. La figura 29.6 muestra la aportación al campo magnético  $d\vec{B}$  en  $P$  debida a un solo elemento de corriente en lo alto del anillo. Este vector de campo se puede resolver en componentes  $dB_x$  paralelo al eje del anillo y  $dB_\perp$  perpendicular al eje. Piense en las aportaciones al campo magnético de un elemento de corriente en la parte baja de la espira. Requerido por la simetría de la situación, las componentes perpendiculares del campo debido a los elementos en las partes superior e inferior del anillo se cancelan. Esta cancelación se presenta para todos los pares de segmentos alrededor del anillo, de modo que puede ignorar la componente perpendicular del campo y enfocarse exclusivamente en las componentes paralelas, que simplemente se suman.



**Figura 29.6** (Ejemplo 29.3) Geometría para calcular el campo magnético en un punto  $P$  que se encuentra sobre el eje de una espira de corriente. Por simetría, el campo total  $\vec{B}$  es a lo largo de este eje.

continúa



## 29.3 continuación

**Categorizar** Se pide encontrar el campo magnético debido a una distribución de corriente simple, así que este ejemplo es un problema representativo para el que la ley Biot-Savart es adecuada.

**Analizar** En esta situación cada elemento de longitud  $d\vec{s}$  es perpendicular al vector  $\hat{r}$  en la ubicación del elemento. Por tanto, para cualquier elemento,  $|d\vec{s} \times \hat{r}| = (ds)(1) \sin 90^\circ = ds$ . Además, todos los elementos de longitud alrededor de la espira están a la misma distancia  $r$  de  $P$ , donde  $r^2 = a^2 + x^2$ .

Use la ecuación 29.1 para encontrar la magnitud de  $d\vec{B}$  debida a la corriente en cualquier elemento de longitud  $d\vec{s}$ :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\vec{s} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{(a^2 + x^2)}$$

Encuentre la componente  $x$  del elemento de campo:

$$(1) \quad dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{(a^2 + x^2)} \cos \theta$$

A partir de la geometría, evalúe  $\cos \theta$ :

$$\cos \theta = \frac{a}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

Sustituya en la ecuación (1) e integre sobre toda la espira y observe que  $x$  y  $a$  son constantes:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds}{a^2 + x^2} \left[ \frac{a}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \oint ds$$

La integral que queda es la circunferencia de la espira:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} (2\pi a) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (29.7)$$

**Finalizar** Para encontrar el campo magnético en el centro de la espira, haga  $x = 0$  en la ecuación 29.7. En este punto especial,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (\text{para } x = 0) \quad (29.8)$$

que es consistente con el resultado del **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 29.2.

El patrón de líneas de campo magnético para una espira de corriente circular se muestra en la figura 29.7a. Por claridad, las líneas se dibujan sólo para el plano que contiene el eje de la espira. El patrón de líneas de campo es axialmente simétrico y se parece al patrón alrededor de un imán de barra, que se muestra en la figura 29.7b.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si considera puntos sobre el eje  $x$  muy alejados de la espira? ¿Cómo se comporta el campo magnético en estos puntos distantes?

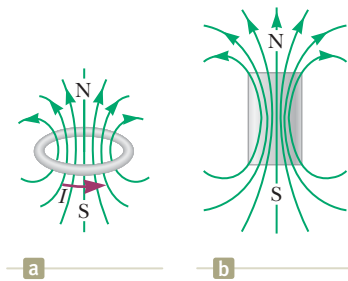
**Respuesta** En este caso, en el que  $x \gg a$ , se puede ignorar el término  $a^2$  en el denominador de la ecuación 29.7 y obtener

$$B \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3} \quad (\text{para } x \gg a) \quad (29.9)$$

La magnitud del momento magnético  $\mu$  de la espira se define como el producto de corriente y el área de la espira (vea la ecuación 28.16):  $\mu = I(\pi a^2)$  para la espira circular. La ecuación 29.9 se puede expresar como

$$B \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3} \quad (29.10)$$

Este resultado es similar en forma a la expresión para el campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico,  $E = k_e(p/y^3)$  (vea el ejemplo 22.6), donde  $p = 2qa$  es el momento del dipolo eléctrico, como se definió en la ecuación 25.18.



**Figura 29.7** (Ejemplo 29.3) (a) Líneas de campo magnético que rodean un lazo de corriente. (b) Líneas de campo magnético que rodean una barra magnetizada. (c) Líneas de campo magnético que rodean un imán de barra. Note la similitud entre este patrón de líneas y el de un lazo de corriente.

Aunque el patrón del campo magnético de la Tierra (figura 28.3) es similar al que se produciría con un imán de barra (figura 29.7b) en las profundidades de la Tierra, la fuente de este campo magnético no puede ser grandes masas de material permanentemente magnetizado. La Tierra sí tiene grandes depósitos de mineral de hierro en las profundidades de su superficie, pero las altas temperaturas en el núcleo de la Tierra evitan que el hierro retenga la magnetización permanente. (Ver sección 29.6.) Los científicos consideran que es más probable que la fuente del campo magnético de la Tierra sean las corrientes de convección en el núcleo externo de la Tierra. Los



iones o electrones cargados que circulan en el núcleo externo líquido podrían producir un campo magnético como lo hace una espira de corriente, como en el ejemplo 29.3. También hay una fuerte evidencia de que la magnitud del campo magnético de un planeta está relacionada con la tasa de rotación del planeta. Por ejemplo, Júpiter gira más rápido que la Tierra, y las sondas espaciales indican que el campo magnético de Júpiter es más fuerte que el de la Tierra. Venus, por otro lado, gira más lentamente que la Tierra, y su campo magnético es más débil. La investigación sobre la causa del magnetismo de la Tierra está en curso.

## 29.2 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos

En el capítulo anterior se describió la fuerza magnética que actúa sobre un conductor que lleva una corriente, colocado en un campo magnético externo. Ya que la corriente en un conductor genera su propio campo magnético, es fácil entender que dos conductores que transportan una corriente ejercen fuerzas magnéticas entre sí. Un cable establece el campo magnético y el otro cable se modela como una colección de partículas en un campo magnético. Estas fuerzas se utilizan como base para definir el ampere y el coulomb.

Considere dos alambres largos, rectos, paralelos, separados por una distancia  $a$  y que llevan corrientes  $I_1$  e  $I_2$  en la misma dirección, como se muestra en la figura 29.8. Es posible determinar la fuerza ejercida sobre un alambre debido al campo magnético desplegado por el otro alambre. El alambre 2, que lleva una corriente  $I_2$  y se identifica arbitrariamente como alambre fuente, crea un campo magnético  $\vec{B}_2$  en la ubicación del alambre 1, el alambre de prueba. La magnitud de este campo magnético es el mismo en todos los puntos sobre el alambre 1. La dirección de  $\vec{B}_2$  puede encontrarse usando la regla de la mano derecha mostrada en la figura 29.3 y es perpendicular al alambre 1 como se muestra en la figura 29.8. De acuerdo con la ecuación 28.10, la fuerza magnética sobre un tramo de longitud  $\ell$  del alambre 1 es  $\vec{F}_1 = I_1 \vec{\ell} \times \vec{B}_2$ . En vista de que en este caso  $\vec{\ell}$  es perpendicular a  $\vec{B}_2$ , la magnitud de  $\vec{F}_1$  es  $F_1 = I_1 \ell B_2$ . Ya que la magnitud de  $\vec{B}_2$  está dada por la ecuación 29.5,

$$F_1 = I_1 \ell B_2 = I_1 \ell \left( \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \ell \quad (29.11)$$

La dirección de  $\vec{F}_1$  es hacia el alambre 2, debido a que  $\vec{\ell} \times \vec{B}_2$  va en esa dirección. Si se calcula el campo establecido por el alambre 1 sobre el alambre 2, se encontrará que la fuerza  $\vec{F}_2$  que actúa sobre el alambre 2 es de igual magnitud y de dirección opuesta a  $\vec{F}_1$ . Esto es lo que se esperaba, ya que la tercera ley de Newton debe cumplirse. Cuando las corrientes se encuentran en direcciones opuestas (esto es, cuando en la figura 29.8 se invierte una de las corrientes), las fuerzas se invierten y los alambres se repelen. En consecuencia, conductores paralelos que llevan corrientes en una misma dirección se atraen, y conductores paralelos que llevan corrientes en direcciones opuestas se repelen.

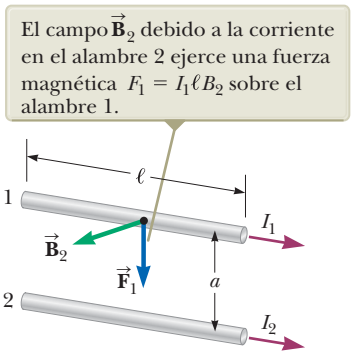
Debido a que es igual la magnitud de las fuerzas en ambos alambres, simplemente se señala la magnitud de la fuerza magnética entre alambres como  $F_B$ . Puede volver a escribir esta magnitud en función de la fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (29.12)$$

La fuerza entre dos alambres paralelos es utilizada para definir el **ampere** de esta manera:

Cuando  $2 \times 10^{-7}$  N/m es la magnitud de la fuerza por unidad de longitud presente entre dos alambres largos y paralelos que llevan corrientes idénticas y están separados 1 m, se define la corriente en cada alambre como 1 A.

El valor  $2 \times 10^{-7}$  N/m se obtiene a partir de la ecuación 29.12 con  $I_1 = I_2 = 1$  A y  $a = 1$  m. Puesto que esta definición se basa en una fuerza, puede utilizarse una medición mecánica para estandarizar al ampere. Por ejemplo, el National Institute



**Figura 29.8** Dos alambres paralelos que transportan cada uno una corriente estable y ejercen una fuerza magnética uno sobre el otro. La fuerza es de atracción si las corrientes son paralelas (como se muestra) y de repulsión si las corrientes son antiparalelas.

### Definición del ampere



of Standards and Technology utiliza un instrumento llamado *balanza de corriente* para mediciones básicas de corriente. Los resultados son utilizados para estandarizar otros instrumentos eléctricos más convencionales, como los amperímetros.

La unidad del SI de carga, el **coulomb**, se define en función del amperio: cuando un conductor lleva una corriente constante de 1 A, la cantidad de carga que fluye a través de la sección transversal del conductor durante 1 s es 1 C.

En la deducción de las ecuaciones 29.11 y 29.12, se supone que ambos alambres son largos, en comparación con la distancia que los separa. De hecho, sólo un alambre necesita ser largo. Las ecuaciones describen con precisión las fuerzas que alambres largos, rectos y paralelos de longitud limitada  $\ell$  ejercen uno sobre el otro.

**EJEMPLO RÁPIDO 29.2** Un resorte mecánico de varias espiras sin corriente se cuelga del techo. Cuando se cierra un interruptor para que exista una corriente en el resorte, ¿las espiras se (a) acercan, (b) separan o (c) no se mueven en absoluto?

### Ejemplo 29.4 Suspensión de un alambre

Dos alambres paralelos infinitamente largos se encuentran en el suelo separados una distancia  $a = 1.00$  cm, como se muestra en la figura 29.9a. Un tercer alambre, de longitud  $L = 10.0$  m y 400 g de masa, porta una corriente  $I_1 = 100$  A y está elevado y flotando sobre los dos primeros alambres, en una posición horizontal a la mitad entre ellos. Los alambres infinitamente largos portan iguales corrientes  $I_2$  en la misma dirección, pero en la dirección opuesta a la del alambre elevado y flotando. ¿Qué corriente deben portar los alambres infinitamente largos para que los tres alambres formen un triángulo equilátero?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Ya que la corriente en el alambre corto es opuesta a la de los alambres largos, el alambre corto es repelido por los otros dos. Imagine que aumentan las corrientes en los alambres largos de la figura 29.9a. La fuerza repulsiva se vuelve más intensa, y el alambre elevado y flotando asciende al punto donde el peso del alambre está una vez más en equilibrio. La figura 29.9b muestra la situación deseada con los tres alambres formando un triángulo equilátero.

**Categorizar** Debido a que el alambre elevado está sujeto a las fuerzas pero no se acelera, este es un modelo de una *partícula en equilibrio*.

**Analizar** Las componentes horizontales de las fuerzas magnéticas sobre el alambre elevado y flotando se cancelan. Las componentes verticales son positivas y se suman. Elija el eje  $z$  apuntando hacia arriba a través del alambre de la parte superior en la figura 29.9b y en el plano de la página.

Encuentre la fuerza magnética total en la dirección hacia arriba sobre el alambre que flota:

$$\vec{F}_B = 2 \left( \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \ell \right) \cos \theta \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a} \ell \cos \theta \hat{\mathbf{k}}$$

Encuentre la fuerza gravitacional sobre el alambre que flota:

$$\vec{F}_g = -mg\hat{\mathbf{k}}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al sumar las fuerzas e igualar a cero la fuerza neta:

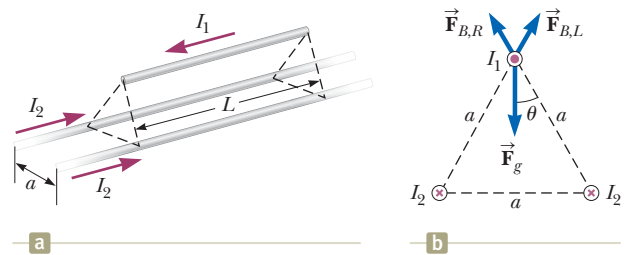
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_g = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a} \ell \cos \theta \hat{\mathbf{k}} - mg\hat{\mathbf{k}} = 0$$

Resuelva para la corriente en los alambres sobre el suelo:

$$I_2 = \frac{mg\pi a}{\mu_0 I_1 \ell \cos \theta}$$

Sustituya valores numéricos

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{(0.400 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)\pi(0.010 \text{ m})}{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(100 \text{ A})(10.0 \text{ m}) \cos 30.0^\circ} \\ &= 113 \text{ A} \end{aligned}$$



**Figura 29.9** (Ejemplo 29.4) (a) Dos alambres portadores de corriente que se encuentran sobre el suelo y un tercer alambre flotando en el aire mediante fuerzas magnéticas. (b) Vista lateral. En la situación descrita en el ejemplo, los tres alambres forman un triángulo equilátero. Las dos fuerzas magnéticas sobre el alambre que flota en el aire son  $\vec{F}_{B,L2}$  la fuerza debida al alambre de la izquierda sobre el suelo, y  $\vec{F}_{B,R1}$  la fuerza debida al alambre de la derecha en el suelo. También se muestra la fuerza gravitacional  $\vec{F}_g$  sobre el alambre flotando.

**Finalizar** Las corrientes en todos los alambres son del orden de  $10^2$  A. Tales corrientes grandes requerirían equipo especializado. Por tanto, esta situación sería difícil de establecer en la práctica. ¿El equilibrio del alambre 1 es estable o inestable?

## 29.3 Ley de Ampère

En la figura 28.1, mostramos cómo se pueden usar las brújulas para trazar las líneas del campo magnético alrededor de un imán de barra. La figura 29.10 muestra cómo se pueden usar las brújulas para demostrar las líneas del campo magnético alrededor de un cable largo y vertical. Cuando no hay corriente presente en el cable (figura 29.10a), todas las agujas de la brújula apuntan en la misma dirección (la de la componente horizontal del campo magnético de la Tierra) como se esperaba. Cuando el cable lleva una corriente intensa y constante, todas las agujas se desvían en una dirección tangente al círculo como en la figura 29.10b. Estas observaciones demuestran que la dirección del campo magnético producido por la corriente en el cable es consistente con la regla de la mano derecha descrita en la figura 29.3. Cuando la corriente se invierte, las agujas de la figura 29.10b también se invierten.

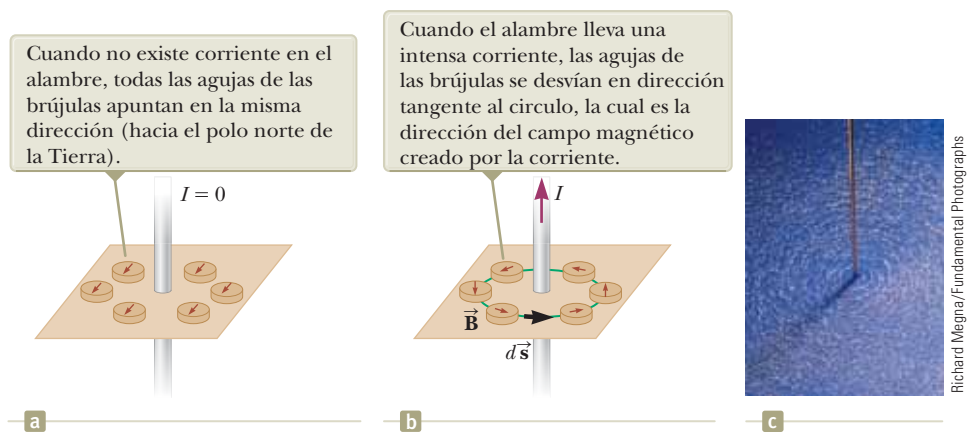
Ahora se evalúa el producto  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  para un pequeño elemento de longitud  $d\vec{s}$  sobre la trayectoria circular definida por las agujas de las brújulas, y sume los productos para todos los elementos sobre toda la trayectoria circular cerrada.<sup>1</sup> A lo largo de esta trayectoria, los vectores  $d\vec{s}$  y  $\vec{B}$  son paralelos en cada punto (véase la figura 29.10b), así que  $\vec{B} \cdot d\vec{s} = Bds$ . Además, la magnitud de  $\vec{B}$  es constante sobre este círculo y se conoce por la ecuación 29.5. Por tanto, la suma de los productos  $B \cdot ds$  a lo largo de la trayectoria cerrada, que es equivalente a la integral de línea de  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ , es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I$$

donde  $\oint ds = 2\pi r$  es la circunferencia de la trayectoria circular de radio  $r$ . A pesar de que este resultado fue calculado para el caso especial de una trayectoria circular que rodea a un alambre de longitud finita, es válida para la trayectoria cerrada de *cualquier* forma (una *espira amperiana*) que rodea una corriente en un circuito cerrado. El caso general, conocido como la **ley de Ampère**, puede enunciarse como sigue:

La integral de línea de  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  alrededor de *cualquier* trayectoria cerrada es igual a  $\mu_0 I$ , donde  $I$  es la corriente total constante que pasa a través de *cualquier* superficie limitada por la trayectoria cerrada:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad (29.13)$$



**Figura 29.10** (a) y (b) Agujas de brújulas mostrando los efectos de la corriente en las proximidades del alambre. (c) Líneas de campo magnético circulares que rodean un conductor de corriente, desplazadas mediante limaduras de hierro.

<sup>1</sup> Quizá se pregunte por qué se decidió hacer esto para evaluar este producto escalar. El origen de la ley de Ampère se dio en la ciencia del siglo XIX, en la cual una “carga magnética” (la analogía supuesta para una carga eléctrica aislada) se imaginaba en movimiento alrededor de una línea de campo circular. El trabajo realizado sobre la carga se relacionó con  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ , de la misma manera que el trabajo realizado al mover una carga eléctrica en un campo eléctrico se relacionó con  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ . Por tanto, la ley de Ampère, un principio válido y útil, ¡se originó a partir de un cálculo de trabajo erróneo y olvidado!

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 29.2

**Cómo evitar los problemas con los signos** Cuando utilice la ley de Ampère, aplique la regla de la mano derecha siguiente. Apunte su pulgar en la dirección de la corriente a través de la espira. Después sus dedos doblados apuntan en la dirección en que deberá integrar cuando recorre la espira para evitar tener que definir la corriente como negativa

### ◀ Ampère's law



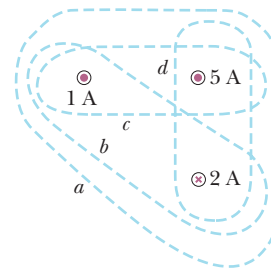
### André-Marie Ampère Físico francés (1775-1836)

A Ampère se le acredita el descubrimiento del electromagnetismo: la relación entre corrientes eléctricas y campos magnéticos. El genio de Ampère, particularmente en las matemáticas, se hizo evidente cuando tenía 12 años; su vida personal, sin embargo, estuvo repleta de tragedias. Su padre, un rico concejal de la ciudad, fue guillotinado durante la Revolución Francesa, y su esposa murió joven, en 1803. Ampère murió de neumonía a los 61 años.

Observe las cursivas en el cuadro sombreado. Podemos elegir cualquier camino y cualquier superficie delimitada por ese camino. En la mayoría de los casos, elegimos rutas que son simples, como círculos o rectángulos. Además, en la mayoría de los casos, elegimos la superficie plana delimitada por la ruta. Imagine la cubierta de un tambor: el borde circular es el camino y la membrana plana de la cubierta es la superficie. Sin embargo, si la membrana vibra, hay instantes de tiempo en que la ruta permanece fija, pero la superficie no es plana; la membrana se inclina hacia arriba o hacia abajo desde su posición de equilibrio. Veremos en el capítulo 33 una situación en la que debemos considerar una superficie distinta a la plana delimitada por el camino.

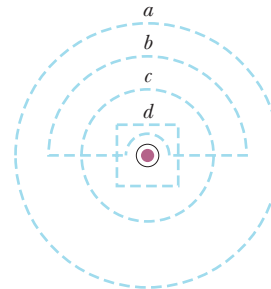
La ley de Ampère describe la creación de campos magnéticos para todas las configuraciones de corriente continua, pero a este nivel matemático, sólo es útil para calcular el campo magnético de configuraciones de corriente que tienen un alto grado de simetría. Su uso es similar al de la ley de Gauss para el cálculo de campos eléctricos con distribuciones de carga altamente simétricas.

**E XAMEN RÁPIDO 29.3** Clasifique de mayor a menor las magnitudes de  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  para las trayectorias cerradas *a* a *d* de la figura 29.11.



**Figura 29.11** (Examen rápido 29.3) Cuatro trayectorias cerradas alrededor de tres alambres conductores de corriente.

**E XAMEN RÁPIDO 29.4** Ordene de mayor a menor las magnitudes de  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  para las trayectorias cerradas en la figura 29.12.



**Figura 29.12** (Examen rápido 29.4) Varias trayectorias cerradas cerca de un solo alambre conductor de corriente.

**Ejemplo 29.5 Campo magnético creado por un alambre largo portador de corriente**

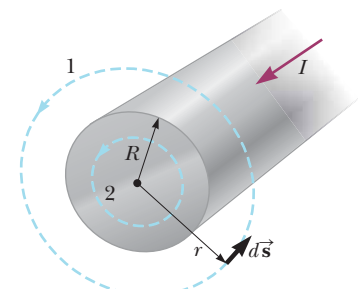
Un alambre recto largo de radio *R* porta una corriente constante *I* que se distribuye uniformemente a través de la sección transversal del alambre (figura 29.13). Calcule el campo magnético a una distancia *r* desde el centro del alambre en las regiones  $r \geq R$  y  $r < R$ .

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Estudie la figura 29.13 para entender la estructura del alambre y la corriente en el alambre. La corriente crea campos magnéticos en todas partes, tanto dentro como fuera del alambre. En base a las discusiones sobre alambres rectos largos, esperamos que las líneas del campo magnético sean círculos con su centro en el eje central del alambre. En el ejemplo 29.1, usamos *a* para la distancia desde un cable de radio insignificante. En este ejemplo, el cable tiene un radio *R*. Usaremos *r* para la distancia desde el centro del cable y compararemos las regiones tanto dentro como fuera del cable.

**Categorizar** Ya que el alambre tiene un alto grado de simetría, este ejemplo se clasifica como un problema de ley de Ampère. Para el caso  $r \geq R$ , se debe llegar al mismo resultado obtenido en el ejemplo 29.1, donde se aplicó la ley Biot-Savart a la misma situación.

**Analizar** Para el campo magnético exterior al alambre, elija para la trayectoria de integración el círculo 1 en la figura 29.13. A partir de la simetría,  $\vec{B}$  debe ser constante en magnitud y paralela a  $d\vec{s}$  en todo punto sobre este círculo.



**Figura 29.13** (Ejemplo 29.5) Un alambre recto largo de radio *R* que porta una corriente estable *I* distribuida uniformemente a través de la sección transversal del alambre. El campo magnético en cualquier punto se puede calcular a partir de la ley de Ampère usando una trayectoria circular de radio *r*, concéntrica con el alambre.

29.5 continuación

Observe que la corriente total que pasa a través del plano del círculo es  $I$  y aplique la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

Resuelva para  $B$ :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{para } r \geq R) \tag{29.14}$$

Ahora considere el interior del alambre, donde  $r < R$ . En este caso la corriente  $I'$  que pasa a través del plano del círculo 2 es menor que la corriente total  $I$ . Debido a que la corriente se distribuye uniformemente a través de la sección transversal del cable, la densidad de corriente  $J$  (ecuación 26.5) es constante en el interior del cable. Por tanto, para cualquier área  $A$  del interior perpendicular a la longitud del cable, la corriente que pasa a través de esa área es  $I' = JA$ .

Establezca la razón de la corriente  $I'$  encerrada por el círculo 2 a la corriente total  $I$  igual a la razón del área  $\pi r^2$  encerrada por el círculo 2 al área de sección transversal  $\pi R^2$  del alambre:

$$\frac{I'}{I} = \frac{JA'}{JA} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

Resuelva para  $I'$ :

$$I' = \frac{r^2}{R^2} I$$

Aplique la ley de Ampère al círculo 2:

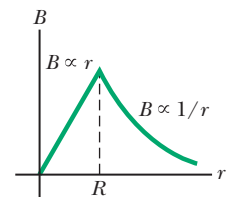
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r) = \mu_0 I' = \mu_0 \left( \frac{r^2}{R^2} I \right)$$

Resuelva para  $B$ :

$$B = \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r \quad (\text{para } r < R) \tag{29.15}$$

**Finalizar** El campo magnético exterior al alambre (ecuación 29.14) es idéntico en forma a la ecuación 29.5 excepto por la sustitución de  $r$  por  $a$ . Como frecuentemente es el caso en situaciones con gran simetría, es mucho más fácil usar la ley de Ampère que la ley Biot-Savart (ejemplo 29.1). El campo magnético interior al alambre es similar en forma a la expresión para el campo eléctrico adentro de una esfera uniformemente cargada (vea el ejemplo 23.6). En la figura 29.14 se grafica la magnitud del campo magnético en función de  $r$  para esta configuración. Dentro del alambre,  $B \rightarrow 0$  conforme  $r \rightarrow 0$ . Además, las ecuaciones 29.14 y 29.15 dan el mismo valor del campo magnético en  $r = R$ , lo que demuestra que el campo magnético es continuo en la superficie del alambre.

**Figura 29.14** (Ejemplo 29.5) Magnitud del campo magnético en función de  $r$  para el alambre que se muestra en la figura 29.13. El campo es proporcional a  $r$  dentro del alambre y varía como  $1/r$  afuera del alambre.



**Ejemplo 29.6** Campo magnético creado por un toroide

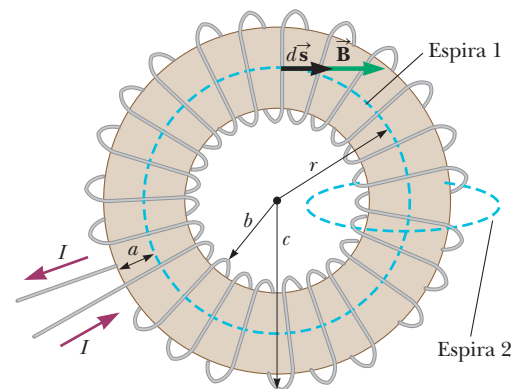
Un dispositivo llamado *toroide* (figura 29.15) se usa con frecuencia para crear un campo magnético casi uniforme en algún área cerrada. El dispositivo consiste en un alambre conductor enrollado alrededor de un anillo (un *toro*) hecho de un material no conductor. Para un toroide que tiene  $N$  vueltas de alambre muy juntas una de otra, calcule el campo magnético en la región ocupada por el toro, a una distancia  $r$  del centro.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Estudie cuidadosamente la figura 29.15 para entender cómo el alambre se enrolla alrededor del toro. El toro podría ser un material sólido o podría ser aire, con un alambre rígido enrollado en la forma que se muestra en la figura 29.15 para formar un toroide vacío. Imagine que cada vuelta del alambre es una espira circular, como en el ejemplo 29.3. El campo magnético en el centro de la espira es perpendicular al plano de la espira. Por tanto, las líneas del campo magnético del conjunto de espiras formarán círculos dentro del toroide como se sugiere por la espira 1 en la figura 29.15.

**Categorizar** Ya que el toroide tiene un alto grado de simetría, este ejemplo se clasifica como un problema de ley de Ampère.

**Analizar** Considere la espira amperiana circular (espira 1) de radio  $r$  en el plano de la figura 29.15. Por simetría, la magnitud del campo es constante



**Figura 29.15** (Ejemplo 29.6) Un toroide que consiste en muchas vueltas de alambre. Si las vueltas están muy cerca una de otra, el campo magnético en el interior del toroide (la región sombreada en amarillo) es tangente al círculo discontinuo (espira 1) y varía en  $1/r$ . La dimensión  $a$  es el radio transversal del toro. El campo afuera del toroide es muy pequeño y se puede describir usando la espira amperiana (espira 2) en el lado derecho, perpendicular a la página.

continúa



29.6 continuación

en este círculo y tangente a él, de modo que  $\vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds$ . Además, el alambre pasa a través de la espira  $N$  veces, de modo que la corriente total a través de la espira es  $NI$ .

Aplique la ley de Ampère a la espira 1:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 NI$$

Resuelva para  $B$ :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \tag{29.16}$$

**Finalizar** Este resultado demuestra que  $B$  varía en  $1/r$  y por tanto *no es uniforme* en la región ocupada por el toro. Sin embargo, si  $r$  es muy grande en comparación con el radio de sección transversal  $a$  del toro, el campo es aproximadamente uniforme adentro del toro.

Para un toroide ideal, en el que las vueltas estén muy juntas, el campo magnético externo es cercano a cero, pero no es exactamente cero. En la figura 29.15, imagine que el radio  $r$  de la espira amperiana es más pequeño que  $b$  o mayor que  $c$ . En cualquier caso, la espira encierra cero corriente neta, de modo que  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ . Puede pensar que este resultado prueba que  $\vec{B} = 0$ , pero no es así. Considere la espira amperiana (espira 2) en el lado derecho del toroide en la figura

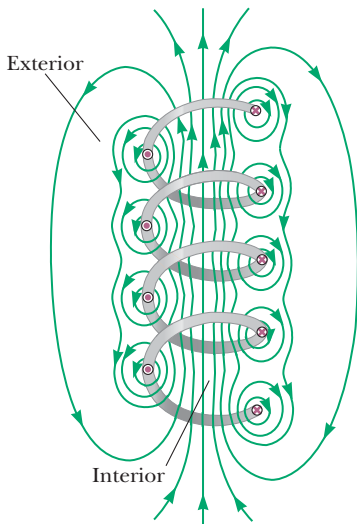
29.15. El plano de esta espira es perpendicular a la página y el toroide pasa a través de la espira. Conforme las cargas entran al toroide, como indican las direcciones de corriente en la figura 29.15, logran su avance contra las manecillas del reloj alrededor del toroide. Por tanto, ¡hay una corriente antihoraria alrededor del toroide, así que pasa una corriente amperiana por la espira 2! Esta corriente es pequeña, pero no cero. Como resultado, el toroide actúa como una espira de corriente y produce un campo externo débil de la forma que se muestra en la figura 29.7. La causa por la que  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  para la espira amperiana 1 de radio  $r < b$  y  $r > c$ , es que las líneas de campo son perpendiculares a  $d\vec{s}$ , no porque  $\vec{B} = 0$ .

### 29.4 Campo magnético de un solenoide

Un **solenoid** es un alambre largo enrollado en forma de hélice. Con esta configuración, puede producirse un campo magnético razonablemente uniforme en el espacio rodeado por las vueltas del alambre —llamado *interior* del solenoide— cuando éste lleva una corriente. Cuando hay muy poco espacio entre las vueltas, cada una puede tratarse como si fuera una espira circular, y el campo magnético neto es la suma vectorial de los campos que resultan de todas las vueltas.

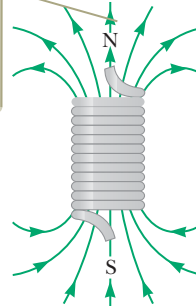
La figura 29.16 muestra las líneas de campo magnético alrededor de un solenoide de espiras sueltas, no apretadas. Observe que las líneas de campo en el interior son casi paralelas, están uniformemente distribuidas y están juntas, lo que indica que en este espacio el campo es intenso y casi uniforme.

Si las vueltas están muy apretadas y el solenoide es de longitud finita, las líneas de campo magnético son como se muestra en la figura 29.17a. Esta distribución de líneas de campo es similar a la que rodea un imán de barra (véase la figura 29.17b). En consecuencia, un extremo del solenoide se comporta como polo norte del imán, y el extremo opuesto se comporta como polo sur.



**Figura 29.16** Líneas de campo magnético para un solenoide de vueltas poco apretadas.

Las líneas del campo magnético se parecen a las que existen alrededor de un imán de barra, lo que significa que efectivamente el solenoide tiene polos norte y sur.



Henry Leap and Jim Lehman

**Figura 29.17** (a) Líneas de campo magnético para un solenoide con vueltas muy apretadas de longitud finita, que lleva una corriente constante. El campo en el espacio interior es intenso casi uniforme. (b) Patrón del campo magnético de un imán de barra, desplegado mediante limaduras de hierro sobre una hoja de papel.

tud del solenoide, el campo interior se vuelve más uniforme y el exterior más débil. Se obtiene un *solenoides ideal*, cuando las vueltas están muy apretadas y la longitud es mucho mayor que los radios de las vueltas. La figura 29.18 muestra la sección transversal longitudinal de una porción de un solenoide de este tipo, que lleva una corriente  $I$ . En este caso, el campo externo es cercano a cero, y el campo interior es uniforme en un volumen muy grande.

Si en la figura 29.18 considera la espira amperiana (espira 1) perpendicular a la página que rodea a un solenoide ideal, verá que ésta encierra una pequeña corriente conforme las cargas en el alambre se mueven espira por espira a lo largo del solenoide. En consecuencia, existe un campo magnético diferente de cero en el exterior del solenoide. Es un campo débil, con líneas de campo circulares, como las que son provocadas por una línea de corriente, según en la figura 29.9. Para un solenoide ideal, éste es el único campo externo a él.

En un solenoide ideal puede utilizar la ley de Ampère para obtener una expresión cuantitativa del campo magnético interior. Ya que el solenoide es ideal,  $\vec{B}$  en el espacio interior es uniforme y paralelo al eje, y las líneas de campo magnético en el espacio exterior forman círculos alrededor del solenoide. Los planos de estos círculos son perpendiculares a la página. Considere la trayectoria rectangular (espira 2) de longitud  $\ell$  y ancho  $w$  que se muestran en la figura 29.18. A esta trayectoria se le puede aplicar la ley de Ampère para evaluar la integral de  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  en cada lado del rectángulo. La contribución a lo largo del lado 3 es igual a cero, porque en esta región las líneas de campo magnético son perpendiculares a la trayectoria. Las contribuciones de los lados 2 y 4 son iguales a cero, de nuevo porque  $\vec{B}$  es perpendicular a  $d\vec{s}$  a lo largo de estas trayectorias, tanto en el interior como en el exterior del solenoide. El lado 1 proporciona una contribución a la integral ya que, a lo largo de esta trayectoria,  $\vec{B}$  es uniforme y paralelo a  $d\vec{s}$ . La integral sobre la trayectoria rectangular cerrada es, por tanto,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{trayectoria 1}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int ds = B\ell$$

El lado derecho de la ley de Ampère se refiere a la corriente total  $I$  a través del área limitada por la trayectoria de integración. En este caso, la corriente total a través de la trayectoria rectangular es igual a la corriente en cada vuelta multiplicada por el número de vueltas. Si en la longitud  $\ell$ ,  $N$  es el número de vueltas, la corriente total a través del rectángulo es  $NI$ . Por tanto, la ley de Ampère aplicada a esta trayectoria da

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B\ell = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 nI$$

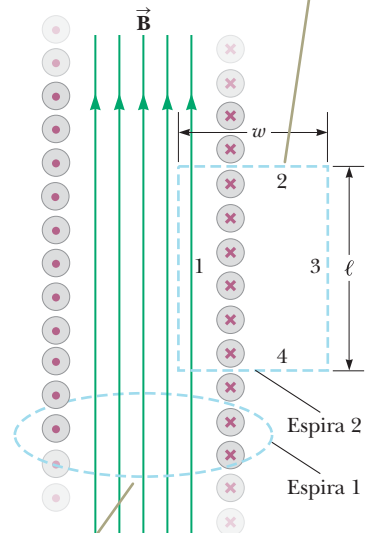
donde  $n = N/\ell$  es el número de vueltas por unidad de longitud.

También se podría obtener este resultado si reconsidera el campo magnético de un toroide (véase el ejemplo 29.6). Si el radio  $r$  del toro de la figura 29.15 con  $N$  vueltas es mucho mayor que el radio  $a$  de la sección transversal del toroide, una pequeña sección del toroide se aproxima a un solenoide, para el cual  $n = N/2\pi r$ . En este límite, la ecuación 29.16 concuerda con la ecuación 29.17.

La ecuación 29.17 es válida sólo para los puntos cercanos al centro (es decir alejados de los extremos) de un solenoide muy largo. Como podía haberse esperado, el campo cerca de cada extremo es más pequeño que el valor dado por la ecuación 29.17. Así como la longitud de un solenoide se incrementa, la magnitud del campo en el extremo se reduce a la mitad de la magnitud en el centro (véase el problema 45).

- E XAMEN RÁPIDO 29.5** Considere un solenoide que, en comparación con su radio, es muy largo. Entre las siguientes opciones, ¿Cuál es la manera más efectiva de incrementar el campo magnético en el interior del solenoide?: (a) duplicar su longitud; manteniendo constante el número de vueltas por unidad de longitud; (b) reducir su radio a la mitad, manteniendo constante el número de vueltas por unidad de longitud; o (c) recubrir el solenoide entero con otra capa de vueltas de alambre conductor.

La ley de Ampère aplicada a la trayectoria rectangular discontinua en el plano de la página puede ser usada para calcular la magnitud del campo interno.



La ley de Ampère aplicada a la trayectoria circular cuyo plano es perpendicular a la página, se puede usar para mostrar que existe un campo débil externo al solenoide.

**Figura 29.18** Vista de sección transversal de un solenoide ideal, donde el campo magnético interno es uniforme y el campo exterior es cercano a cero.

◀ Campo magnético en el interior de un solenoide

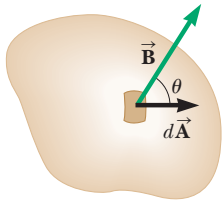


### 29.5 Ley de Gauss en el magnetismo

El flujo asociado con un campo magnético se define de manera similar a la utilizada para definir el flujo eléctrico (véase la ecuación 23.4). Imagine un elemento de área  $dA$  sobre una superficie de forma arbitraria, como se muestra en la figura 29.19. Si el campo magnético en este elemento es  $\vec{B}$ , el flujo magnético a través del elemento es  $\vec{B} \cdot d\vec{A}$ , donde  $d\vec{A}$  es un vector perpendicular a la superficie y que tiene una magnitud igual al área  $dA$ . Por tanto, el flujo magnético total  $\Phi_B$  a través de la superficie es

Definición de flujo magnético ▶

$$\Phi_B \equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{29.18}$$



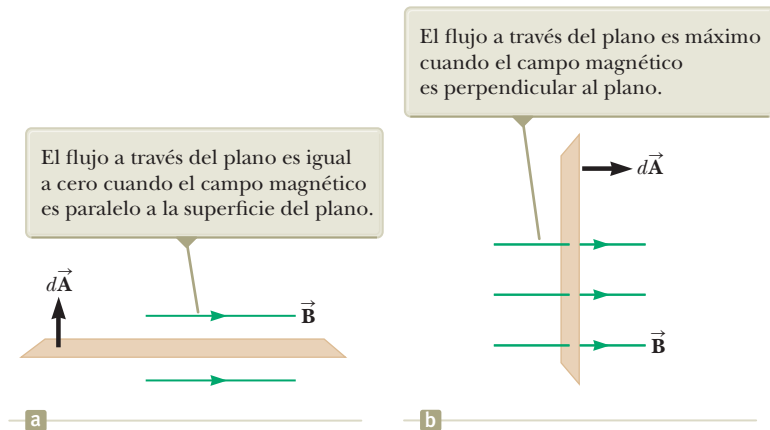
**Figura 29.19** El flujo magnético a través de un elemento de área  $dA$  es  $\vec{B} \cdot d\vec{A} = B dA \cos \theta$ , donde  $d\vec{A}$  es un vector perpendicular a la superficie.

Considere el caso especial de un plano de área  $A$  en un campo uniforme  $\vec{B}$  que forma un ángulo  $\theta$  con  $d\vec{A}$ . El flujo magnético a través del plano en este caso es

$$\Phi_B = BA \cos \theta \tag{29.19}$$

Si el campo magnético es paralelo al plano, como en la figura 29.20a, entonces  $\theta = 90^\circ$  y el flujo a través del plano es igual a cero. Si el campo es perpendicular al plano, como en la figura 29.20b, entonces  $\theta = 0$  y el flujo a través del plano es  $BA$  (el valor máximo).

La unidad del flujo magnético es  $T \cdot m^2$ , la cual se define como un *weber* (Wb);  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot m^2$ .



**Figura 29.20** Flujo magnético a través de un plano que yace en un campo magnético.

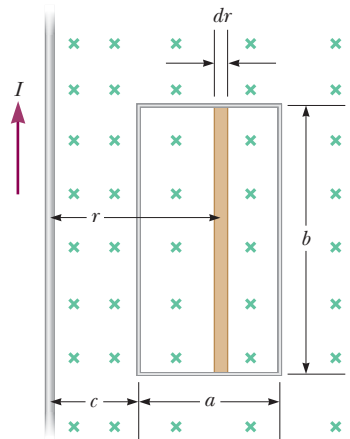
#### Ejemplo 29.7 Flujo magnético a través de una espira rectangular

Una espira rectangular de ancho  $a$  y longitud  $b$  se ubica cerca de un alambre largo que conduce una corriente  $I$  (figura 29.21). La distancia entre el alambre y el lado más cercano de la espira es  $c$ . El alambre es paralelo al lado largo de la espira. Encuentre el flujo magnético total a través de la espira debido a la corriente en el alambre.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Como se vio en la sección 29.3, las líneas del campo magnético debido al cable serán círculos, muchos de los cuales pasarán a través de la espira rectangular. Se sabe que la magnitud del campo magnético es una función de la distancia  $r$  desde un alambre largo. Por tanto, el campo magnético varía por toda el área de la espira rectangular.

**Categorizar** Ya que el campo magnético varía por toda el área de la espira, debe integrar de principio a fin esta área para encontrar el flujo total. Esto lo identifica como un problema de análisis.



**Figura 29.21** (Ejemplo 29.7) El campo magnético debido al alambre que conduce una corriente  $I$  no es uniforme sobre la espira rectangular

## 29.7 continuación

**Analizar** Observe que  $\vec{B}$  es paralelo a  $d\vec{A}$  en cualquier punto dentro de la espira, encuentre el flujo magnético a través del área rectangular mediante la ecuación 29.18 e incorpore la ecuación 29.14 para el campo magnético:

Expresé el elemento de área (la tira de color canela en la figura 29.21) como  $dA = b dr$  y sustituya:

Integre desde  $r = c$  hasta  $r = a + c$ :

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B dA = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA$$

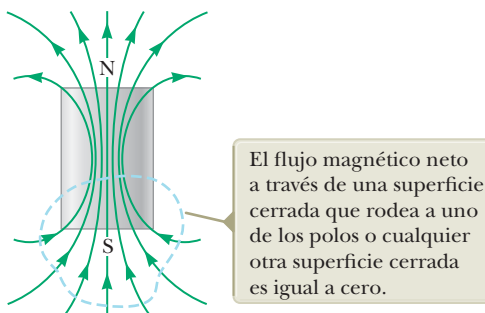
$$\Phi_B = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int \frac{dr}{r}$$

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_c^{a+c} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln r \Big|_c^{a+c} \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( \frac{a+c}{c} \right) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{c} \right) \end{aligned}$$

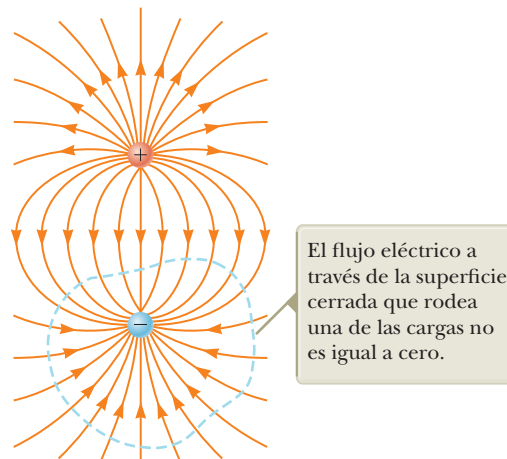
**Finalizar** Observe cómo el flujo depende del tamaño de la espira. Incrementar  $a$  o  $b$  aumenta el flujo como se esperaba. Si  $c$  se vuelve tan grande tal que la espira esté muy alejada del alambre, el flujo tiende a cero, también como se esperaba. Si  $c$  tiende a cero, el flujo se vuelve infinito. En principio, este valor infinito se presenta porque el campo se vuelve infinito en  $r = 0$  (si supone un alambre infinitamente delgado). Esto no ocurrirá en la realidad porque el grosor del alambre evita que el extremo izquierdo de la espira llegue a  $r = 0$ .

En el capítulo 23 se llegó a la conclusión de que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que rodea una carga neta es proporcional a dicha carga (ley de Gauss). En otras palabras, el número de líneas de campo eléctrico que salen de la superficie depende únicamente de la carga neta que se encuentra en su interior. Esta propiedad se basa en el hecho de que las líneas de campo eléctrico se originan y terminan en cargas eléctricas.

La situación es muy diferente para los campos magnéticos, que son continuos y forman espiras cerradas. En otras palabras, las líneas de campo magnético de una corriente en la figura 29.3 y de un imán de barra en la figura 29.22 no empiezan ni terminan en ningún punto. Observe que para cualquier superficie cerrada, como la que dibujan las líneas discontinuas de la figura 29.22, el número de líneas que entran a la superficie es igual al número de líneas que salen de ella; por tanto, el flujo magnético neto es igual a cero. En contraste, para una superficie cerrada que rodea una carga de un dipolo eléctrico (figura 29.23), el flujo eléctrico neto no es igual a cero.



**Figura 29.22** Las líneas de campo magnético de un imán de barra forman espiras cerradas. (La línea discontinua representa la intersección de la superficie cerrada con la página.)



**Figura 29.23** Las líneas de campo eléctrico que rodean un dipolo eléctrico parten de la carga positiva y terminan en la negativa.

La ley de Gauss en el magnetismo establece que

el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada siempre es igual a cero:

Ley de Gauss en el magnetismo ►

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (29.20)$$

Esto significa que los polos magnéticos aislados (monopolos) nunca han sido detectados y por tanto no existen. Sin embargo los científicos continúan la investigación y ciertas teorías han tenido éxito al explicar el comportamiento físico fundamental sugiriendo la posible existencia de monopolos magnéticos.

## 29.6 Magnetismo en la materia

El campo magnético producido por una corriente en una bobina de alambre da una pista sobre lo que hace que ciertos materiales exhiban propiedades magnéticas intensas. Anteriormente se encontró que una bobina como la que se muestra en la figura 29.17a tiene un polo norte y un polo sur. En general, *cualquier* espira de corriente tiene un campo magnético y, debido a eso, un momento dipolar magnético, incluyendo las espiras de corriente a nivel atómico descritas en algunos modelos del átomo.

### Los momentos magnéticos de los átomos

Se inicia la explicación con el modelo clásico del átomo, en el que los electrones se mueven en órbitas circulares alrededor de núcleos mucho más pesados como se muestra en la figura 29.24. En este modelo, un electrón en órbita forma una espira de corriente minúscula (ya que se trata de una carga en movimiento). Aunque este modelo tiene muchas deficiencias, algunas de sus predicciones están de acuerdo con la teoría correcta, la cual se expresa en función de la física cuántica.

Llamemos a la corriente del electrón en órbita  $I$ . Debido a que la órbita tiene un área  $A$ , hay un momento magnético asociado con el electrón en órbita de magnitud  $\mu = IA$ . Además, el electrón tiene un momento angular alrededor del núcleo de magnitud  $L = m_e vr$ , donde  $m_e$  es la masa del electrón y  $v$  es su velocidad orbital. Debido a que el electrón está cargado negativamente, los vectores  $\vec{\mu}$  y  $\vec{L}$  apuntan en direcciones opuestas. Ambos vectores son perpendiculares al plano de la órbita como se indica en la figura 29.24.

Un resultado fundamental de la física cuántica es que el momento angular orbital está cuantizado y es igual a múltiplos de  $\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ , donde  $h$  es la constante de Planck (vea capítulo 39). El valor diferente de cero más pequeño del momento magnético del electrón que resulta de su movimiento orbital es

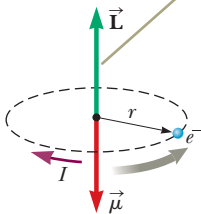
$$\mu = \sqrt{2} \frac{e}{2m_e} \hbar \quad (29.21)$$

En el capítulo 41 se comprenderá de dónde surgen las expresiones como la ecuación 29.21.

Ya que todas las sustancias contienen electrones, es lógico preguntar por qué la mayor parte de las sustancias no son magnéticas. El argumento principal es que en la mayoría, el momento magnético de un electrón en un átomo es cancelado por el correspondiente de otro electrón en órbita en dirección opuesta. El resultado neto es que, para la mayor parte de los materiales, el efecto magnético producido por el movimiento orbital de los electrones es cero o muy pequeño.

En adición a este momento magnético orbital (así como los protones, neutrones y otras partículas), un electrón tiene una propiedad intrínseca llamada **espín** que también contribuye a su momento magnético. Por lo común, un electrón puede considerarse como si estuviera girando sobre su eje, como se muestra en la figura 29.25, pero deberá tener mucho cuidado con esta interpretación clásica. La magnitud del momento angular  $\vec{S}$  asociada con el espín es del mismo orden de magnitud que la magnitud del momento angular  $\vec{L}$  debida al movimiento orbital. La magnitud del momento angular del espín de un electrón, según la teoría cuántica, es

El electrón tiene un momento angular  $\vec{L}$  en una dirección y un momento magnético  $\vec{\mu}$  en la dirección opuesta.



**Figura 29.24** Un electrón que se mueve en la dirección de la flecha gris en una órbita circular de radio  $r$ . Como el electrón tiene una carga negativa, la dirección de la corriente debida a su movimiento alrededor del núcleo es opuesta a la dirección de dicho movimiento.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 29.3

**El electrón no gira** El electrón físicamente no gira. Tiene un momento angular intrínseco *como si estuviera girando*, pero la noción de rotación para una partícula puntual no tiene significado. La rotación sólo se aplica a un *objeto rígido*, con una extensión en el espacio, como en el capítulo 10. Realmente el momento angular de giro es un efecto relativista.





$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$$

El momento magnético característicamente asociado con el espín de un electrón tiene el valor

$$\mu_{\text{spin}} = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (29.22)$$

Esta combinación de constantes es conocida como el **magnetón de Bohr**  $\mu_B$ :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T} \quad (29.23)$$

Por tanto, los momentos magnéticos atómicos pueden expresarse como múltiplos del magnetón de Bohr. (Observe que  $1 \text{ J/T} = 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .)

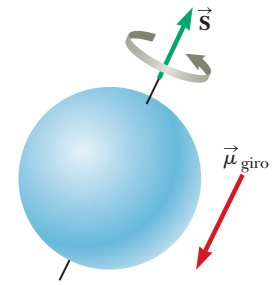
En átomos que contienen muchos electrones, éstos por lo general forman parejas con espines opuestos entres sí; por tanto, los momentos magnéticos del espín se cancelan. Sin embargo, los átomos que contienen un número impar de electrones deben tener por lo menos un electrón sin par, por lo que el espín deberá tener algún momento magnético. El momento magnético total de un átomo es la suma vectorial de los momentos magnéticos orbitales y del espín. En la tabla 29.1 se dan algunos ejemplos. Advertia que el helio y el neón tienen momentos magnéticos iguales a cero porque sus espines individuales y sus momentos orbitales se cancelan.

El núcleo de un átomo también tiene un momento magnético asociado con sus protones y neutrones constituyentes. Sin embargo, el momento magnético de un protón o un neutrón es mucho más pequeño que el de un electrón y por lo general no se considera. Se comprenderá esto si se analiza la ecuación 29.23 reemplazando la masa del electrón con la masa de un protón o un neutrón. Ya que las masas del protón y del neutrón son mucho mayores que la del electrón, sus momentos magnéticos son  $10^3$  veces menores que los del electrón.

## Ferromagnetismo

Un pequeño número de sustancias exhiben efectos magnéticos intensos, lo que se conoce como **ferromagnetismo**. Algunos ejemplos de sustancias ferromagnéticas son el hierro, el cobalto, el níquel, el gadolinio y el disprosio. Estas sustancias contienen momentos magnéticos atómicos permanentes que tienden a alinearse paralelamente uno con otro incluso en presencia de un campo magnético externo débil. Una vez alineados los momentos hacia un magneto permanente, la sustancia se mantiene magnetizada después de haberse retirado el campo externo. Esta alineación permanente se debe a un fuerte acoplamiento entre momentos vecinos, el cual puede entenderse sólo en términos de la mecánica cuántica.

Todos los materiales ferromagnéticos están constituidos por regiones microscópicas llamadas **dominios**, regiones dentro de las cuales todos los momentos magnéticos están alineados. Estos dominios tienen volúmenes de alrededor de  $10^{-12}$  a  $10^{-8} \text{ m}^3$  y contienen  $10^{17}$  a  $10^{21}$  átomos. Los límites entre diversos dominios con orientaciones diferentes se llaman **paredes del dominio**. En una muestra no magnetizada, los momentos magnéticos en los dominios están orientados al azar para que el momento magnético neto sea igual a cero, como en la figura 29.26a (página 788). Cuando la muestra se coloca en un campo magnético externo  $\vec{B}$ , crece el tamaño de aquellos dominios que tienen momentos magnéticos alineados con el campo creciente, lo que da como resultado una muestra magnetizada, como en la figura 29.26b. Conforme el campo magnético se vuelve más intenso, como en la figura 29.26c, los dominios en los cuales los momentos magnéticos no están alineados con el campo se vuelven muy pequeños. Cuando se retira el campo magnético externo, la muestra puede retener una magnetización neta en la dirección del campo original. A temperaturas normales, la agitación térmica no es suficiente para alterar esta orientación de los momentos magnéticos.



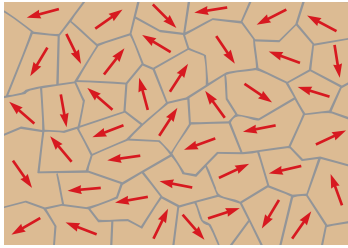
**Figura 29.25** Modelo clásico de un electrón girando. Adopte este modelo para recordar que los electrones tienen un momento angular intrínseco. Sin embargo, este modelo no debe ser llevado demasiado lejos: da una magnitud incorrecta para el momento magnético, da números cuánticos incorrectos, y demasiados grados de libertad.

**TABLA 29.1** Momentos magnéticos de algunos átomos e iones

Átomo o ion	Momento magnético ( $10^{-24} \text{ J/T}$ )
H	9.27
He	0
Ne	0
Ce <sup>3+</sup>	19.8
Yb <sup>3+</sup>	37.1

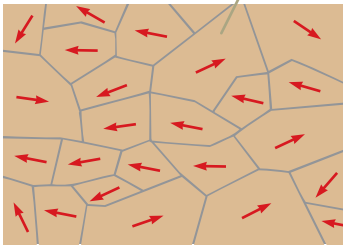


Orientación al azar de los dipolos magnéticos atómicos en los dominios de una sustancia no magnetizada.



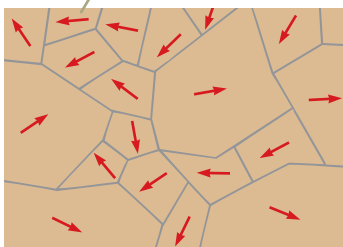
a

Cuando se aplica un campo externo  $\vec{B}$  los dominios con componentes de momento magnético en la misma dirección que  $\vec{B}$  se vuelven más grandes, dando a la muestra una magnetización neta.



b

Conforme el campo se hace aún más intenso, los dominios con vectores de momentos magnéticos no alineados con el campo externo se vuelven muy pequeños.



c

**Figura 29.26** Orientación de los dipolos magnéticos antes y después de que se aplica un campo magnético a una sustancia ferromagnética.

**TABLA 29.2** Temperaturas Curie para varias sustancias ferromagnéticas

Sustancia	$T_{\text{Curie}}$ (K)
Hierro	1 043
Cobalto	1 394
Níquel	631
Gadolinio	317
$\text{Fe}_2\text{O}_3$	893

Cuando una sustancia ferromagnética alcanza o excede una temperatura crítica conocida como **temperatura Curie**, pierde su magnetización residual. Por debajo de la temperatura Curie, los momentos magnéticos están alineados y la sustancia es ferromagnética. Cuando supera la temperatura Curie, la agitación térmica es lo suficientemente grande para orientar al azar los momentos, y la sustancia se vuelve paramagnética. Las temperaturas de Curie para varias sustancias ferromagnéticas se muestran en la tabla 29.2.

## Paramagnetismo

Las sustancias paramagnéticas tienen un magnetismo pequeño, pero positivo, resultado de la presencia de átomos (o de iones) con momentos magnéticos permanentes. Estos momentos interactúan sólo de manera débil entre sí y se orientan al azar en ausencia de un campo magnético externo. Cuando la sustancia paramagnética se coloca en un campo magnético externo, sus momentos atómicos tienden a alinearse con el campo. Sin embargo, este proceso de alineamiento debe competir con el movimiento térmico, que tiende a orientar al azar a los momentos magnéticos.

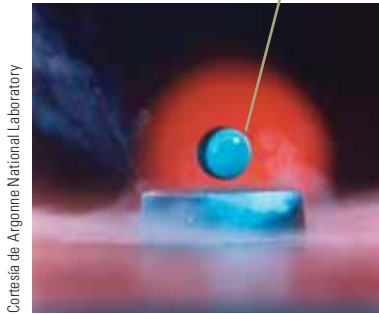
## Diamagnetismo

Cuando se aplica un campo magnético externo a una sustancia diamagnética, se induce un momento magnético débil en dirección opuesta al campo aplicado, esto hace que las sustancias diamagnéticas sean débilmente repelidas por un imán. Aunque el diamagnetismo está presente en toda materia, sus efectos son mucho menores que los del paramagnetismo o del ferromagnetismo, y sólo son evidentes cuando no existen esos otros efectos.

Puede llegar a tener cierta comprensión del diamagnetismo si considera un modelo clásico de dos electrones atómicos en órbita alrededor del núcleo, en direcciones opuestas, pero con una misma rapidez. Los electrones se mantienen en sus órbitas circulares debido a la fuerza electrostática de atracción ejercida por el núcleo con carga positiva. Ya que los momentos magnéticos de los dos electrones son de igual magnitud, pero de dirección opuesta, se cancelan entre sí, y el momento magnético del átomo es igual a cero. Cuando se le aplica un campo magnético externo, los electrones experimentan una fuerza magnética adicional  $q\vec{v} \times \vec{B}$ . Esta fuerza magnética añadida se combina con la fuerza electrostática para incrementar la rapidez orbital del electrón cuyo momento magnético es antiparalelo al campo y reduce la velocidad del electrón cuyo momento magnético es paralelo al mismo. Como resultado, los dos momentos magnéticos de los electrones ya no se cancelan, y la sustancia adquiere un momento magnético neto opuesto al campo aplicado.

Como recordará del capítulo 26, un superconductor es una sustancia en la cual, por debajo de alguna temperatura crítica, su resistencia eléctrica es igual a cero. Ciertos tipos de superconductores también exhiben en el estado de superconducción un diamagnetismo perfecto. Como resultado, un campo magnético aplicado es expulsado por el superconductor de manera que en su interior el campo se vuelve igual a cero. Este fenómeno se conoce como **efecto Meissner**. Si se coloca un imán permanente cerca de un superconductor, los dos objetos se repelen. Esto se ilustra en

En el efecto Meissner, el pequeño imán induce una corriente superconductor en el disco, el cual ha sido enfriado hasta  $-321\text{ }^\circ\text{F}$  ( $77\text{ K}$ ). Las corrientes crean una fuerza magnética en el imán que repele al disco superconductor y lo pone en suspensión.



Cortesía de Argonne National Laboratory

**Figura 29.27** Este imán suspendido arriba de un disco superconductor cerámico enfriado que ilustra el efecto Meissner se ha convertido en la ilustración más clara de la superconductividad a altas temperaturas. La superconductividad es la pérdida de toda resistencia al paso de la corriente eléctrica, y es la clave para un uso más eficiente de la energía.

la figura 29.27, la cual muestra un pequeño imán permanente suspendido sobre un superconductor que se mantiene a  $77\text{ K}$ .

Los cables superconductores en el solenoide son los que permiten a la máquina de MRI en la semblanza de apertura proporcionar un campo magnético tan grande. Debido a que la resistencia de los cables es cero, es posible una corriente muy alta, creando un campo magnético muy intenso, cuya magnitud viene dada aproximadamente por la ecuación 29.17. Como se muestra en la tabla 28.1, una magnitud de campo típica en una máquina de MRI es  $1.5\text{ T}$ . Debido a que el solenoide no es infinito, hay un campo magnético externo como se discutió en la sección 29.4. Como resultado, si un material ferromagnético está presente cerca de la MRI, se puede atraer fuertemente a la máquina, lo que puede ocasionar un evento violento. El equipo especial que use en la sala de MRI no debe tener material ferromagnético e, idealmente, no tiene material paramagnético.

## Resumen

### ► Definiciones

El **flujo magnético**  $\Phi_B$  a través de una superficie se define por la integral de superficie

$$\Phi_B \equiv \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \quad (29.18)$$

### ► Conceptos y principios

La **ley Biot-Savart** dice que el campo magnético  $d\vec{\mathbf{B}}$  en un punto  $P$  debido a un elemento de longitud  $d\vec{\mathbf{s}}$  que porta una corriente estable  $I$  es

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (29.1)$$

donde  $\mu_0$  es la **permeabilidad del espacio libre**,  $r$  es la distancia desde el elemento hasta el punto  $P$  y  $\hat{\mathbf{r}}$  es un vector unitario que apunta desde  $d\vec{\mathbf{s}}$  hacia el punto  $P$ . El campo total en  $P$  se encuentra al integrar esta expresión en toda la distribución de corriente.

La fuerza magnética por unidad de longitud entre dos alambres paralelos separados por una distancia  $a$  y que porta corrientes  $I_1$  e  $I_2$  tiene una magnitud

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (29.12)$$

La fuerza es de atracción si las corrientes están en la misma dirección y de repulsión si están en direcciones opuestas.

*continúa*



La **ley de Ampère** dice que la integral de línea de  $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$  alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a  $\mu_0 I$ , donde  $I$  es la corriente estable total a través de cualquier superficie acotada por la trayectoria cerrada

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I \quad (29.13)$$

La **ley de Gauss del magnetismo** establece que el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada es cero.

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \quad (29.20)$$

La magnitud del campo magnético a una distancia  $r$  de un alambre recto largo que porta una corriente eléctrica  $I$  es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (29.14)$$

Las líneas de campo son círculos concéntricos con el alambre.

Las magnitudes de los campos adentro de un toroide y solenoide son

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (\text{toroide}) \quad (29.16)$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 n I \quad (\text{solenoides}) \quad (29.17)$$

donde  $N$  es el número total de vueltas.

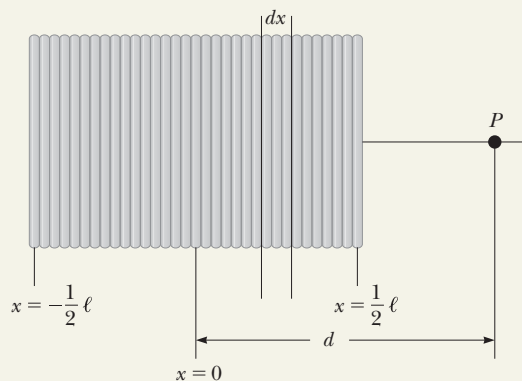
Las sustancias se clasifican en una de tres categorías que describen su comportamiento magnético. Las sustancias **diamagnéticas** son aquellas en las que el momento magnético es débil y opuesto al campo magnético aplicado. Las sustancias **paramagnéticas** son aquellas en las que el momento magnético es débil y en la misma dirección que el campo magnético aplicado. En las sustancias **ferromagnéticas**, las interacciones entre los átomos hacen que los momentos magnéticos se alineen y ocasionan una fuerte magnetización que permanece después de que el campo externo se retira.

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

1. Su profesor a veces emplea exámenes grupales en su clase, en los que los alumnos trabajan juntos y todos reciben la misma calificación. Su grupo está trabajando en uno de estos exámenes y se enfrenta a la siguiente situación. La figura TP29.1 muestra una vista lateral de un solenoide herméticamente cerrado de longitud  $\ell$ , radio  $a$ , y  $n$  vueltas por unidad de longitud. El solenoide, que lleva una corriente  $I$ , está ubicado con su centro en  $x = 0$ . Observe que el solenoide *no* es infinitamente largo. Su grupo tiene la tarea de determinar el campo magnético en puntos arbitrarios a lo

Figura TP29.1



largo del eje del solenoide. Con este fin, realice los pasos del siguiente plan: (a) Modele cada longitud corta  $dx$  del solenoide como una espira de corriente circular, encuentre el campo magnético debido a todo el solenoide en el punto  $P$  en el eje  $x$ , una distancia  $d$  desde su centro. (b) Haga  $d \rightarrow 0$  para encontrar el campo magnético en el eje  $x$  en el punto medio del solenoide. (c) En la expresión del inciso (b), haga  $\ell \rightarrow \infty$  para encontrar el campo dentro de un solenoide infinitamente largo. (d) ¿Cómo se compara el resultado del inciso (c) con la ecuación 29.17?

2. **ACTIVIDAD** Para esta actividad, su grupo necesitará un clavo grande, un tramo de alambre, una batería y algunos clips. (a) Un miembro del grupo enrolla el alambre cuatro veces alrededor del clavo, colocando cada nueva vuelta de alambre al lado de la anterior, y dejando suficiente longitud de ambos extremos del alambre para conectarlos a una batería. Otro conecta los extremos del alambre a una batería. El aparato es ahora un electroimán. Vea cuántos clips recogerá el electroimán de la mesa y quedan suspendidos de la punta del clavo. Registre los resultados de su grupo. (b) Ahora continúe el experimento enrollando dos vueltas más de alambre junto a las anteriores, para un total de 6 vueltas, y midiendo la cantidad de clips recogidos. Repita el experimento para 8, 10, 12 y 14 vueltas. A partir de los datos de su grupo, pronostique la cantidad de clips que el clavo recogerá con 20 vueltas de alambre. (c) Enrolle 20 vueltas y mida la cantidad de clips. ¿Coincidió la predicción de su grupo con los resultados? (d) Ahora enrolle 20 vueltas de alambre, pero con las últimas 10 vueltas enrolladas en la parte superior de la primera capa de 10 vueltas. ¿Cuántos clips recoge este imán?



# Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBAASIGN** From Cengage

## SECCIÓN 29.1 Ley de Biot-Savart

**1.** Calcule la magnitud del campo magnético en un punto que está a 25.0 cm de distancia de un conductor delgado y largo que lleva una corriente de 2.00 A.

**2.** Usted está trabajando como testigo experto en un caso civil. Ha sido contratado por el abogado de una compañía que fabrica brújulas. La compañía está siendo demandada por un excursionista novato que utilizó una de las brújulas de alto nivel de la compañía. El excursionista afirma que la brújula estaba defectuosa, enviándolo en una dirección diferente de la dirección deseada. Después de seguir la dirección equivocada, dejó caer y perdió su brújula por lo que no pudo tomar medidas posteriores. Como resultado, se perdió por días, con los consiguientes efectos nocivos para su salud y la pérdida de salarios por los días perdidos en el trabajo. El excursionista ha proporcionado la ubicación exacta en la que tomó la lectura errónea con la brújula defectuosa. Usted viaja a este lugar y mira alrededor. Advierte que hay una línea de transmisión de energía eléctrica directamente sobre su ubicación, corriendo en dirección norte-sur. Con la trigonometría, determina que la línea de alimentación está a una distancia vertical de 6.65 m sobre el suelo. Al regresar a su oficina, se comunica con los empleados de la compañía de energía eléctrica, quienes le informan que esa línea de alimentación rural en particular lleva corriente CD con una magnitud típica durante el día de 135 A. (a) Para proporcionar asesoramiento en este caso, calcule el campo magnético causado por la línea de alimentación en la ubicación del caminante. (b) ¿Qué consejo le da al abogado?

**3.** En el modelo de Niels Bohr de 1913 del átomo de hidrógeno, un electrón gira alrededor del protón a una distancia de  $5.29 \times 10^{-11}$  m con una rapidez de  $2.19 \times 10^6$  m/s. Calcule la magnitud del campo magnético que produce su movimiento en el sitio ocupado por el protón.

**4.** Determine el campo magnético en un punto  $P$  localizado a una distancia  $x$  de la esquina de un alambre infinitamente largo doblado de manera que forma un ángulo recto, como se muestra en la figura P29.4. El alambre lleva una corriente estable  $I$ .

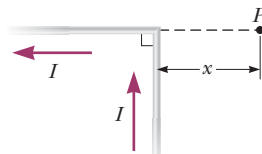


Figura P29.4

**5.** Un alambre recto largo conduce corriente  $I$ . Se hace un ángulo recto al doblarlo por la mitad del alambre. El doblez forma un arco de circunferencia de radio  $r$  como se muestra en la figura P29.5. Determine la magnitud del campo en el centro del arco.

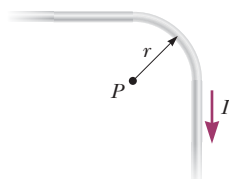


Figura P29.5

**6.** Considere una espira de corriente circular plana de radio  $R$  que lleva una corriente  $I$ . Elija que el eje de  $x$  a lo largo del eje de la espira, con el origen en el centro de ella. Trace una gráfica de la razón de

la magnitud del campo magnético en la coordenada  $x$  con la del origen, para  $x = 0$  hasta  $x = 5R$ . Puede resultar útil una calculadora programable o una computadora para resolver este problema.

**7.** Tres largos conductores paralelos portan corrientes de  $I = 2.00$  A. La figura P29.7 es la vista de un extremo de los conductores, donde cada corriente sale de la página. Si considera  $a = 1.00$  cm, determine la magnitud y la dirección del campo magnético en los puntos (a)  $A$ , (b)  $B$  y (c)  $C$ .

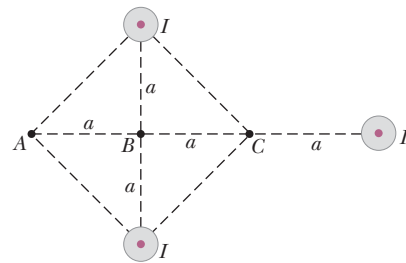


Figura P29.7

**8.** Un alambre muy largo lleva una corriente de 30.0 A hacia la izquierda a lo largo del eje  $x$ . Un segundo alambre muy largo lleva una corriente de 50.0 A hacia la derecha a lo largo de la línea ( $y = 0.280$  m,  $z = 0$ ). (a) ¿En qué parte del plano de los dos alambres el campo magnético es igual a cero? (b) Una partícula con una carga de  $-2.00 \mu\text{C}$  se mueve a una velocidad de  $150\hat{i}$  Mm/s a lo largo de la línea ( $y = 0.100$  m,  $z = 0$ ). Calcule el vector de la fuerza magnética que actúa sobre la partícula. (c) ¿Qué pasaría si? Se aplica un campo eléctrico uniforme a fin de permitir que esta partícula pase a través de esta región sin desviarse. Calcule el vector del campo eléctrico requerido.

**9.** Determine el campo magnético (en función de  $I$ ,  $a$  y  $d$ ) en el origen causado por la espira de corriente en la figura P29.9. La espira se extiende al infinito por encima de la figura.

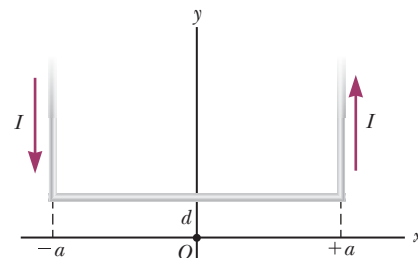


Figura P29.9

**10.** Un alambre que lleva una corriente  $I$  es doblado de manera que forma un triángulo equilátero de lados  $L$  (a) Determine la magnitud del campo magnético en el centro del triángulo. (b) En un punto a igual distancia entre el centro y cualquier vértice, ¿el campo es más intenso o más débil que en el centro? Dé un argumento cualitativo a su respuesta.

**11.** Dos alambres largos, paralelos transportan corrientes de  $I_1 = 3.00$  A e  $I_2 = 5.00$  A en las direcciones indicadas en la figura P29.11. (a) Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto medio entre los alambres. (b) Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético en



el punto  $P$ , situado  $ad = 20.0\text{ cm}$  por encima del alambre que lleva la corriente de  $5.00\text{ A}$ .

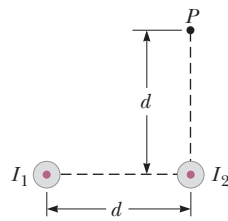


Figura P29.11

### SECCIÓN 29.2 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos

- 12.** Dos alambres paralelos separados por  $4.00\text{ cm}$  se repelen entre sí con una fuerza por unidad de longitud de  $2.00 \times 10^{-4}\text{ N/m}$ . La corriente en un alambre es  $5.00\text{ A}$ . (a) Determine la corriente en el otro alambre. (b) ¿Las corrientes están en la misma dirección o en direcciones opuestas? (c) ¿Qué pasaría si la dirección de una corriente se invierte y se duplica?
- 13.** Dos alambres paralelos están separados por  $6.00\text{ cm}$ , cada uno con  $3.00\text{ A}$  de corriente en la misma dirección. (a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza por unidad de longitud entre los alambres? (b) ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?
- 14.** Dos alambres largos cuelgan verticalmente. El alambre 1 lleva una corriente ascendente de  $1.50\text{ A}$ . El alambre 2 a  $20.0\text{ cm}$  a la derecha del alambre 1, lleva una corriente descendente de  $4.00\text{ A}$ . Un tercer alambre, el alambre 3, será colgado verticalmente y situado de tal manera que cuando se conduzca una corriente determinada, ninguna fuerza neta es experimentada por cada alambre. (a) ¿Es posible esta situación? ¿Es posible que en más de una manera? Describa (b) la posición del alambre 3 y (c) la magnitud y dirección de la corriente en el alambre 3.
- 15.** Usted es parte de un equipo que trabaja en una tienda de partes para maquinaria. Un cliente importante le ha pedido a su empresa que proporcione resortes con una constante de fuerza muy precisa  $k$ . Para medir la constante de resorte, sujeta dos de los resortes entre los extremos de dos cables muy largos de longitud  $L$ , separados por la longitud  $\ell$  no estirada, de los resortes, como se muestra en la figura P29.15. El método de fijación específico que utiliza aísla los resortes de los cables para que no pase corriente por los resortes. Coloca el aparato sobre una mesa y luego pasa una corriente de magnitud  $I$  a través de los cables, en direcciones opuestas. Como resultado, los resortes se extienden una distancia  $d$  y llegan al equilibrio. Usted determina una expresión para la constante de resorte en términos de  $L$ ,  $I$ ,  $\ell$  y  $d$ .

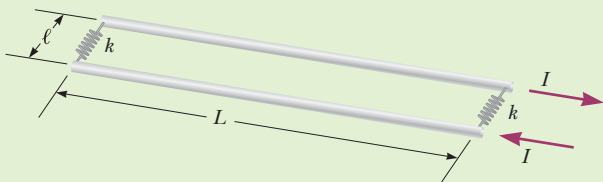


Figura P29.15

- 16.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Dos conductores de cobre paralelos cada uno de longitud  $\ell = 0.500\text{ m}$  y radio  $r = 250\ \mu\text{ m}$ . Llevan corrientes  $I = 10.0\text{ A}$  en sentidos opuestos y se repelen entre sí con una fuerza magnética  $F_B = 1.00\text{ N}$ .
- 17.** La unidad de flujo magnético recibe su nombre en honor de Wilhelm Weber. Una unidad práctica de campo magnético recibe su nombre en honor de Johann Karl Friedrich Gauss. Además de sus logros individuales, juntos construyeron un telégrafo en 1833. Consistía en una batería e interruptor, en un extremo de una línea de transmisión de  $3\text{ km}$  de largo,

que operaba un electroimán en el otro extremo. Suponga que la línea de transmisión de Weber y Gauss era como se diagrama en la figura P29.17. Dos alambres paralelos largos, cada uno con una masa por cada unidad de longitud de  $40.0\text{ g/m}$ , están sostenidos en un plano horizontal mediante cuerdas de  $\ell = 6.00\text{ cm}$  de largo. Cuando ambos alambres portan la misma corriente  $I$ , los alambres se repelen mutuamente de modo que el ángulo entre las cuerdas de sostén es  $\theta = 16.0^\circ$ . (a) ¿Las corrientes están en la misma dirección o en direcciones opuestas? (b) Encuentre la magnitud de la corriente. (c) Si esta línea de transmisión se llevase a Marte, ¿la corriente requerida para separar los alambres  $16^\circ$  sería mayor o menor que la de la Tierra? ¿Por qué?

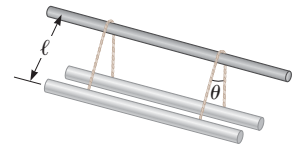


Figura P29.17

### SECCIÓN 29.3 Ley de Ampère

- 18.** El niobio se convierte en un superconductor cuando es enfriado por debajo de  $9\text{ K}$ . Su superconductividad se destruye cuando el campo magnético superficial excede de  $0.100\text{ T}$ . Determine la corriente máxima que pueda llevar un alambre de niobio de  $2.00\text{ mm}$  de diámetro y mantenerse como superconductor, en ausencia de cualquier campo magnético externo.
- 19.** Las bobinas magnéticas de un reactor de fusión tokamak tienen forma toroidal con un radio interno de  $0.700\text{ m}$  y un radio externo de  $1.30\text{ m}$ . El toroide tiene  $900$  vueltas de alambre de gran diámetro, cada una de las cuales lleva una corriente de  $14.0\text{ kA}$ . Determine la magnitud del campo magnético en el interior del toroide a lo largo de (a) el radio interno y (b) el radio externo.
- 20.** Un paquete de  $100$  alambres rectos, largos y aislados, forma un cilindro de radio  $R = 0.500\text{ cm}$ . Si cada alambre conduce  $2.00\text{ A}$ , ¿cuál es (a) la magnitud y (b) la dirección de la fuerza magnética por unidad de longitud que actúa sobre un alambre localizado a  $0.200\text{ cm}$  del centro del paquete? (c) ¿Qué pasaría si? Un alambre en el borde exterior del paquete ¿experimentaría una fuerza mayor o menor que el valor calculado en los incisos (a) y (b)? Dé un argumento cualitativo a su respuesta.
- 21.** El campo magnético que está a  $40.0\text{ cm}$  de un alambre largo y recto que lleva una corriente de  $2.00\text{ A}$  es igual a  $1.00\ \mu\text{T}$ . (a) ¿A qué distancia existe un valor de campo de  $0.100\ \mu\text{T}$ ? (b) ¿Qué pasaría si? En un instante dado, los dos conductores de un cable largo de una extensión doméstica llevan corrientes iguales de  $2.00\text{ A}$  en direcciones opuestas. Los dos alambres se encuentran a  $3.00\text{ mm}$  de distancia. Determine el campo magnético a  $40.0\text{ cm}$  del centro del cable recto, en el plano de los dos alambres. (c) ¿A qué distancia se reduce el campo a la décima parte? (d) El alambre central en un cable coaxial lleva una corriente de  $2.00\text{ A}$  en una dirección y la funda que la rodea lleva una corriente de  $2.00\text{ A}$  en dirección opuesta. ¿Qué campo magnético produce el cable en los puntos exteriores?
- 22.** Un conductor cilíndrico largo de radio  $R$  lleva una corriente  $I$ , como se muestra en la figura P29.22. Sin embargo, la densidad de corriente  $J$  no es uniforme sobre la sección transversal del conductor, sino que es una función del radio de acuerdo a  $J = br$ , donde  $b$  es una constante. Determine una expresión para el campo magnético  $B$  (a) a una distancia  $r_1 < R$  y (b) a una distancia  $r_2 > R$ , medida desde el centro del conductor.

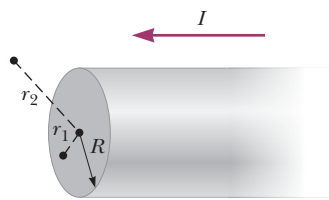


Figura P29.22

**SECCIÓN 29.4 Campo magnético creado por un solenoide**

- 23.** Un solenoide largo que tiene 1 000 vueltas distribuidas uniformemente en una longitud de 0.400 m produce un campo magnético de magnitud  $1.00 \times 10^{-4}$  T en su centro. ¿Qué corriente se requiere en los devanados para que eso ocurra?
- 24.** Un cierto imán superconductor en forma de un solenoide de longitud de 0.500 m puede generar un campo magnético de 9.00 T en su núcleo cuando sus bobinas llevan una corriente de 75.0 A. Encuentre el número de vueltas en el solenoide.

**25.** Está trabajando en una empresa que fabrica solenoides para uso industrial y de investigación. Un cliente ha pedido un solenoide que será operado por una fuente de alimentación de 1 000 V y debe tener una longitud de  $\ell = 25.0$  cm. Un paquete experimental cilíndrico de radio  $r_s = 1.00$  cm debe caber dentro del solenoide. El cliente quiere el mayor campo magnético posible dentro del solenoide. Los alambres de cobre más finos permitidos por su compañía son AWG 36, que corresponde a un diámetro de alambre de  $d_w = 0.127$  mm. Usted determina la magnitud máxima del campo magnético que se puede crear en el solenoide para informar al cliente.

**26.** Se le proporciona cierto volumen de cobre a partir del cual elabora alambre de cobre. Para aislar el alambre puede tener tanto esmalte como quiera. Usted usará el alambre para fabricar un solenoide firmemente devanado de 20 cm de largo que tenga el mayor campo magnético posible en el centro y usar una fuente de energía que pueda entregar una corriente de 5 A. El solenoide se puede enrollar con alambre en una o más capas. (a) ¿Debe hacer el alambre largo y delgado, o más corto y grueso? Explique. (b) ¿Debe hacer el radio del solenoide pequeño o grande? Explique.

**SECCIÓN 29.5 Ley de Gauss en el magnetismo**

- 27.** Considere la superficie hemisférica cerrada de la figura P29.27. El hemisferio está en un campo magnético uniforme que forma un ángulo  $\theta$  con la vertical. Calcule el flujo magnético a través de (a) la superficie plana  $S_1$  y (b) la superficie hemisférica  $S_2$ .

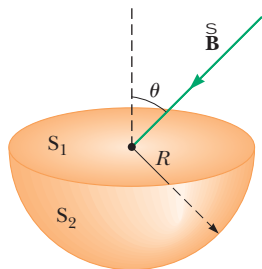


Figura P29.27

**28.** Está trabajando para una empresa que crea entornos magnéticos especiales. Su nuevo supervisor proviene del lado financiero de la organización en lugar del técnico. Le prometió a un cliente que la compañía puede proporcionar un dispositivo que creará un campo magnético dentro de una cámara cilíndrica que se dirige a lo largo del eje del cilindro

en todos los puntos de la cámara y aumenta en la dirección axial como el cuadrado del valor de  $y$ , donde  $y$  está en la dirección axial y  $y = 0$  está en el extremo inferior del cilindro. Prepare un cálculo para mostrar que el campo solicitado por su supervisor y prometido a un cliente es imposible.

- 29.** Un solenoide de radio  $r = 1.25$  cm y longitud  $\ell = 30.0$  cm tiene 300 vueltas y transporta 12.0 A. (a) Calcule el flujo a través de la superficie de un disco de radio  $R = 5.00$  cm colocado perpendicularmente a, y centrado en el eje del solenoide, como se muestra en la figura P29.29a. (b) La figura P29.29b muestra una vista ampliada por el extremo del mismo solenoide. Calcule el flujo a través del área color azul, que está definida por un anillo de radio interno  $a = 0.400$  cm y de radio externo  $b = 0.800$  cm.

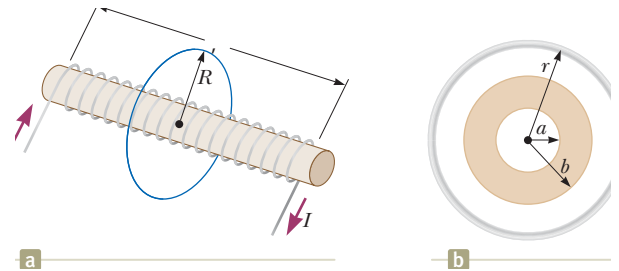


Figura P29.29

**SECCIÓN 29.6 Magnetismo en la materia**

- 30.** El momento magnético de la Tierra es de aproximadamente  $8.00 \times 10^{22}$  A · m<sup>2</sup>. Imagine que el campo magnético planetario fuese causado por la magnetización completa de un enorme depósito de hierro con densidad de 7 900 kg/m<sup>3</sup> y aproximadamente  $8.50 \times 10^{28}$  átomos de hierro/m<sup>3</sup>. (a) ¿Cuántos electrones no apareados participarían cada uno con un momento magnético de  $9.27 \times 10^{-24}$  A · m<sup>2</sup>? (b) Con dos electrones no apareados por átomo de hierro, ¿cuántos kilogramos de hierro tendría el depósito?

**PROBLEMAS ADICIONALES**

- 31.** Un solenoide de 30.0 vueltas de longitud 6.00 cm produce un campo magnético de magnitud 2.00 mT a su centro. Encuentre la corriente en el solenoide.
- 32.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? La magnitud del campo magnético de la Tierra en los polos es de aproximadamente  $7.00 \times 10^{-5}$  T. Suponga que el campo se desvanece a cero antes de su próxima inversión. Algunos científicos proponen planes para generar artificialmente un campo magnético de remplazo para ayudar con los dispositivos que dependen de la presencia del campo. El plan que se ha seleccionado es establecer un alambre de cobre alrededor de la línea ecuatorial y suministrarle una corriente que generaría un campo magnético de magnitud  $7.00 \times 10^{-5}$  T en los polos. (No haga caso de magnetización de los materiales en el interior de la Tierra.) El plan se lleva a cabo y es altamente eficaz.
- 33.** Suponga que instala una brújula en el centro del tablero de un automóvil. (a) Suponiendo que el tablero está hecho principalmente de plástico, estime el orden de magnitud de aproximación del campo magnético en esta posición, generado por la corriente presente cuando enciende los faros. (b) ¿Cómo se compara esto con el campo magnético de la Tierra?
- 34.** Una tira de metal delgada y muy larga con un ancho  $w$  lleva a todo lo largo una corriente  $I$ , como se muestra en la figura P29.34. La corriente está uniformemente distribuida a lo

ancho de la tira. Determine el campo magnético en el punto  $P$  del diagrama. El punto  $P$  está en el plano de la tira a una distancia  $b$  de la orilla.

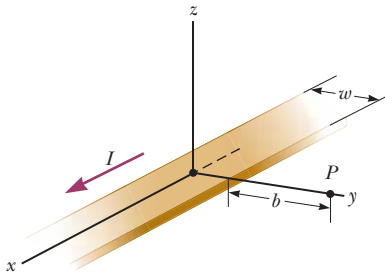


Figura P29.34

**35.** Un anillo no conductor con un radio de 10.0 cm está uniformemente cargado con una carga total positiva de 10.0  $\mu\text{C}$ . El anillo gira a una rapidez angular constante de 20.0 rad/s alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del anillo. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético sobre el eje del anillo, a 5.00 cm de su centro?

**36.** Un anillo no conductor de radio  $R$  está uniformemente cargado con una carga total positiva  $q$ . El anillo gira con una rapidez angular constante  $\omega$  alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del anillo. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético sobre el eje del anillo, a una distancia  $\frac{1}{2}R$  de su centro?

**37.** Un capacitor de placas paralelas muy grandes uniformemente cargado por unidad de área  $+\sigma$  sobre la placa superior y  $-\sigma$  sobre la placa inferior. Las placas están en posición horizontal y ambas se mueven horizontalmente con una rapidez  $v$  hacia la derecha. (a) ¿Cuál es el campo magnético entre las placas? (b) ¿Cuál es el campo magnético justo arriba o justo abajo de las placas? (c) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza magnética por unidad de área sobre la placa superior? (d) ¿A qué rapidez extrapolada  $v$  se equilibrará la fuerza magnética de una placa con la fuerza eléctrica sobre la misma? *Sugerencia:* Utilice la ley de Ampere y elija un trayectoria cercana a las placas del capacitor.

**38.** Dos bobinas circulares de radio  $R$ , cada una con  $N$  vueltas, son perpendiculares a un eje común. Los centros de las bobinas están separados una distancia  $R$ . Cada bobina lleva una corriente estable  $I$  en la misma dirección, como se muestra en la figura P29.38. (a) Demuestre que el campo magnético sobre el eje a una distancia  $x$  del centro de la bobina es

$$B = \frac{N\mu_0 IR^2}{2} \left[ \frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(2R^2 + x^2 - 2Rx)^{3/2}} \right]$$

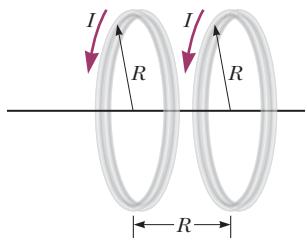


Figura P29.38 Problemas 38 y 39

(b) Demuestre que  $dB/dx$  y  $d^2B/dx^2$  son ambos iguales a cero en el punto medio entre las bobinas. Esto significa que el campo magnético a la mitad del camino entre las bobinas es uniforme. En esta configuración las bobinas se llaman *bobinas de Helmholtz*.

**39.** Dos bobinas de alambre idénticas, circulares y planas, tienen cada una 100 vueltas y radio  $R = 0.500$  m. Las bobinas están organizadas como un conjunto de bobinas de Helmholtz de manera que la distancia de separación entre las bobinas es igual al radio de éstas (véase la figura P29.38). Cada bobina conduce una corriente  $I = 10.0$  A. Determine la magnitud del campo magnético en un punto sobre el eje común de las bobinas y a la mitad del camino entre éstas.

**40.** Dos espiras circulares son paralelas, coaxiales, y están casi en contacto, con una separación entre sus centros de 1.00 mm (figura P29.40). Cada espira tiene 10.0 cm de radio. La espira superior conduce una corriente  $I = 140$  A en sentido de las manecillas del reloj. La inferior conduce una corriente también de 140 A, pero en el sentido opuesto. (a) Calcule la fuerza magnética ejercida por la espira inferior sobre la superior. (b) Suponga que un estudiante piensa que la primera etapa de solución del inciso (a) es aplicar la ecuación 29.7 para hallar el campo magnético producido por una de las espiras. ¿Cómo debatiría en favor o en contra de esta idea? (c) La espira superior tiene una masa de 0.021 0 kg. Calcule su aceleración, suponiendo que las únicas fuerzas que actúan en ella son la fuerza en el inciso (a) y la fuerza de gravedad.

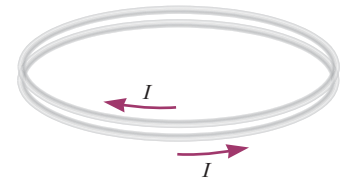


Figura P29.40

**41.** Como se ha visto en los capítulos anteriores, cualquier objeto con carga eléctrica, en reposo o en movimiento, que no sea el objeto cargado que creó el campo, experimenta una fuerza en un campo eléctrico. Además, cualquier objeto con carga eléctrica, fijo o móvil, puede crear un campo eléctrico (capítulo 22). Del mismo modo, una corriente eléctrica o una carga eléctrica en movimiento, que no sea la corriente o carga que crea el campo, experimenta una fuerza en un campo magnético (capítulo 28), y una corriente eléctrica crea un campo magnético (sección 29.1). (a) Para comprender cómo una carga en movimiento crea un campo magnético, considere una partícula con carga  $q$  moviéndose a la velocidad  $\vec{v}$ . Defina el vector de posición  $\vec{r} = r\hat{r}$  conducido desde la carga hacia alguna ubicación. Demuestre que el campo magnético en dicha ubicación es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

(b) Determine la magnitud del campo magnético a 1.00 mm al lado de un protón que se mueve a  $2.00 \times 10^7$  m/s. (c) Determine la fuerza magnética sobre un segundo protón en el mismo punto, y que se mueve con la misma rapidez, pero en dirección opuesta. (d) Encuentre la fuerza eléctrica sobre el segundo protón.

**42.** **Problema de repaso.** Se han sugerido los cañones de rieles para el lanzamiento de proyectiles hacia el espacio sin necesidad de cohetes químicos. Un modelo a escala del cañón de rieles (figura P29.42) está constituido por dos rieles horizontales largos paralelos separados  $\ell = 3.50$  cm, puenteados por una barra con una masa  $m = 3.00$  g que está libre de fricción de deslizamiento. Los rieles y la barra presentan una resistencia eléctrica baja, y la corriente queda limitada por la fuente de energía a un valor constante  $I = 24.0$  A encuentra lejos a la izquierda de la barra por lo que no tiene un efecto magnético sobre la figura. La figura P29.42 muestra a la barra en reposo en el punto medio de los rieles en

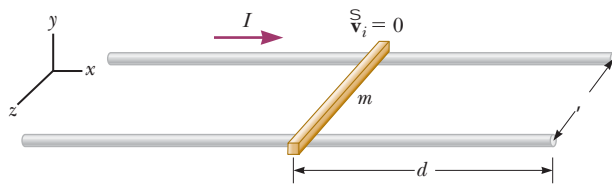


Figura P29.42

el momento en que se establece la corriente. Se desea encontrar la rapidez con la que la barra deja los rieles al ser liberada desde el punto medio de éstos. (a) Determine la magnitud del campo magnético a 1.75 cm de un solo alambre recto muy largo que lleva una corriente de 24.0 A. (b) Con el propósito de evaluar el campo magnético, modele los rieles como de longitud infinita. Usando el resultado del inciso (a), determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto medio de la barra. (c) Argumente que este valor de campo es el mismo en todas las posiciones de la barra a la derecha del punto medio de los rieles. En otros puntos a lo largo de la barra, el campo está en la misma dirección que el punto medio, pero es mayor en magnitud. Suponga que el campo magnético efectivo promedio a lo largo de la barra es cinco veces más grande que el campo en el punto medio. Con esta suposición, (d) determine la magnitud y (e) dirección de la fuerza sobre la barra. (f) ¿La barra se mueve con aceleración constante? (g) Determine la velocidad de la barra después de que se ha desplazado una distancia  $d = 130$  cm hasta el extremo de los rieles.

43. Se enrollan apretadamente 50 vueltas de alambre aislado de 0.100 cm de diámetro formando una espiral plana. La espiral llena un disco que está alrededor de un círculo con un radio de 5.00 cm y que se extiende a un radio de 10.00 cm en el borde externo. Suponga que el alambre lleva una corriente  $I$  en el centro de su sección transversal. Aproximadamente cada vuelta de alambre forma un círculo, por lo que existe una espira de corriente de 5.05 cm de radio, otra con 5.15 cm, y así sucesivamente. Calcule numéricamente el campo magnético en el centro de la bobina.

44. Un alambre recto, infinitamente largo, que lleva una corriente  $I_1$  se encuentra parcialmente rodeado por una espira, como se muestra en la figura P29.44. La espira tiene una longitud  $L$ , un radio  $R$  y lleva una corriente  $I_2$ . El eje de la espira coincide con el del alambre. Calcule la fuerza ejercida sobre la espira.

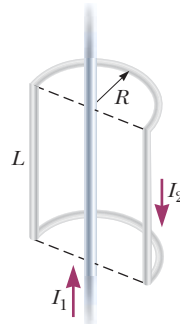


Figura P29.44

PROBLEMAS DE DESAFÍO

45. Considere un solenoide de longitud  $\ell$ , y radio  $a$  que contiene  $N$  vueltas estrechamente espaciadas y que lleva una corriente estacionaria  $I$ . (a) En términos de estos parámetros, encuentre el campo magnético en un punto a lo largo del eje como una función de la posición  $x$  desde el extremo del solenoide. (b) Demuestre que a medida que  $\ell$  se hace muy largo,  $B$  se aproxima a  $\mu_0 NI/2\ell$ , en cada extremo del solenoide.

46. Se ha visto que un solenoide largo produce un campo magnético uniforme dirigido a lo largo del eje de una región cilíndrica. Sin embargo, para producir un campo magnético uniforme dirigido paralelamente a un diámetro de una región cilíndrica, se pueden utilizar las bobinas de desviación

que se ilustran en la figura P29.46. Las espiras están enrolladas sobre un tubo ligeramente aplanado. La figura P29.46 muestra una envoltura de alambre alrededor del tubo. Esta envoltura continua de esta manera hasta el lado visible que tiene muchas secciones de alambre largas que transportan corriente hacia la izquierda en la figura P29.46a y el lado oculto tiene largos tramos que conducen corriente hacia la derecha. La vista desde un extremo del tubo en la figura P29.46b muestra estos alambres y las corrientes que transportan. Al embobinar cuidadosamente los alambres, la distribución de los alambres puede tomar la forma sugerida en la vista desde un extremo de tal manera que la distribución de corriente global de la corriente es la superposición de dos cilindros circulares de radio  $R$  (mostrados con líneas discontinuas) traslapados de una corriente uniformemente distribuida, una hacia el lector y la otra alejándose. La densidad de corriente  $J$  es la misma en cada cilindro. La posición del centro de un cilindro está representada por un vector de posición  $\vec{d}$  en relación con centro del otro cilindro. Demuestre que el campo magnético en el interior del tubo hueco es  $\mu_0 Jd/2$  hacia abajo. *Sugerencia:* Utilice métodos vectoriales para simplificar el cálculo.

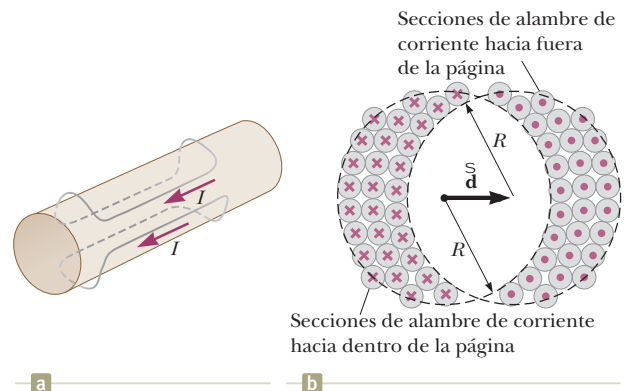


Figura P29.46

47. Un alambre que lleva una corriente  $I$  es doblado para formar una espira exponencial,  $r = e^\theta$ , desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = 2\pi$ , como se sugiere en la figura P29.47. Para cerrar la espira, los extremos se conectan mediante un alambre recto a lo largo del eje  $x$ . (a) El ángulo  $\beta$  entre una línea radial y su tangente en cualquier punto de la curva  $r = f(\theta)$  está relacionado con la función de la siguiente manera

$$\tan \beta = \frac{r}{dr/d\theta}$$

Utilice este hecho para demostrar que  $\beta = \pi/4$ . (b) Determine la magnitud del campo magnético en el origen

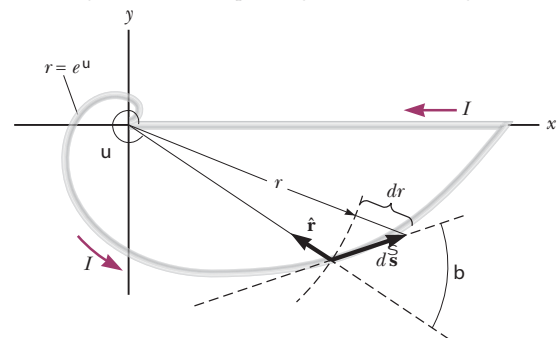


Figura P29.47

48. Una esfera de radio  $R$  tiene una densidad de carga volumétrica uniforme  $\rho$ . Determine (a) el campo magnético en el



centro de la esfera cuando éste gira como objeto rígido con rapidez angular  $\omega$  alrededor de un eje que pasa por su centro (figura P29.48), (b) el momento magnético de la esfera.

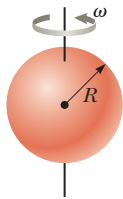


Figura P29.48

49. Un conductor cilíndrico largo de radio  $a$  tiene dos cavidades cilíndricas de diámetro  $a$  en toda su longitud, como se muestra en la figura P29.49. Se dirige una corriente  $I$  hacia afuera de la página y tiene un valor uniforme en toda la sección transversal del conductor. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en función de  $\mu_0$ ,  $I$ ,  $r$  y  $a$  en (a) el punto  $P_1$  y (b) en el punto  $P_2$ .

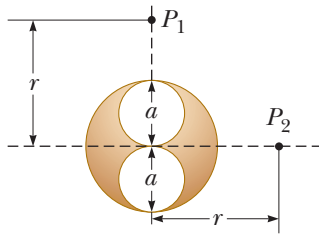


Figura P29.49

50. Un alambre se dobla en forma de un cuadrado con un costado de longitud  $L$  (figura P29.50). Demuestre que cuando la corriente en la espira es igual a  $I$ , el campo magnético en el punto  $P$ , a una distancia  $x$  del centro del cuadrado a lo largo de su eje, es

$$B = \frac{\mu_0 I L^2}{2\pi(x^2 + L^2/4)\sqrt{x^2 + L^2/2}}$$

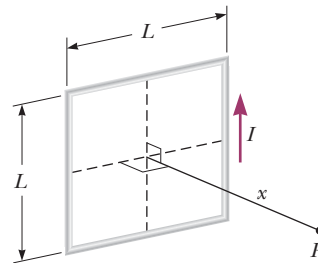


Figura P29.50

51. La magnitud de la fuerza sobre un dipolo magnético  $\vec{\mu}$  alineado con un campo magnético no uniforme en la dirección positiva  $x$  está dada por  $F_x = |\vec{\mu}| dB/dx$ . Suponga que dos espiras planas de alambre tienen cada una un radio  $R$  y llevan una corriente  $I$ . (a) Las espiras están organizadas paralelamente, compartiendo el mismo eje. Éstas se encuentran separadas por una distancia variable  $x \gg R$ . Demuestre que la fuerza magnética entre ellas varía en función de  $1/x^4$ . (b) Evalúe la magnitud de esta fuerza cuando  $I = 10.0$  A,  $R = 0.500$  cm y  $x = 5.00$  cm.





# Ley de Faraday

# 30

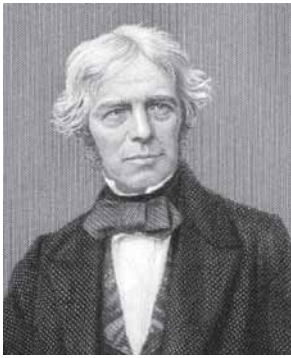
Un molino de viento toma energía del viento y la convierte en electricidad. ¿Cómo hace eso? ¿Qué hay dentro de la caja detrás de las aspas? (Lukasz Janyst/Shutterstock)

**IMAGINE** Está tomando un viaje de fin de semana fuera de la ciudad y disfrutando del paisaje. En un momento, pasa por un parque eólico y le impresiona la cantidad y el tamaño de los molinos de viento que generan electricidad. Si bien sabe que la energía para operar el molino proviene del viento, no está seguro de cómo la energía se convierte en electricidad. Mira cuidadosamente los molinos de viento y observa que cada uno tiene una caja o un confinamiento detrás de las aspas. ¿La caja es solo un mecanismo de soporte para las aspas, o hay algo dentro de ella? ¿De ahí viene la electricidad?

**CONEXIONES** Hasta ahora, nuestros estudios en electricidad y magnetismo han tratado campos eléctricos y campos magnéticos como entidades separadas. Los campos eléctricos son causados por cargas estacionarias y los campos magnéticos son causados por cargas en movimiento. Los experimentos realizados por Michael Faraday en Inglaterra en 1831 e independientemente por Joseph Henry en Estados Unidos ese mismo año mostraron efectos interesantes cuando existe un campo magnético cambiante en una región del espacio. Uno de los efectos ocurre cuando un circuito sin batería se coloca en la región del campo magnético cambiante. ¡Encontramos que existe una corriente en el circuito! A medida que estudiamos este tipo de fenómeno aún más, descubrimos que, incluso si el circuito no está presente, ¡hay un campo eléctrico en la región del campo magnético cambiante! Estos resultados sugieren una relación profunda entre los campos eléctricos y magnéticos. Usamos el término inducido para describir los efectos: hay una corriente inducida en el circuito y un campo eléctrico inducido en la región del campo magnético cambiante. La relación matemática entre los campos eléctricos y magnéticos que generamos en este capítulo se denomina *ley de inducción de Faraday*. Esta será nuestra primera introducción al electromagnetismo, un tema que ha revolucionado la investigación en física y ha permitido el desarrollo de innumerables dispositivos electrónicos, como su teléfono

- 30.1 Ley de Faraday de inducción
- 30.2 Fem de movimiento
- 30.3 Ley de Lenz
- 30.4 Forma general de la ley de Faraday
- 30.5 Generadores y motores
- 30.6 Corrientes de eddy





iStockphoto.com/Steven Wynn Photography

### Michael Faraday

Físico y químico inglés (1791-1867)

Faraday ha sido considerado a menudo el científico experimental más grande del siglo XIX. Sus innumerables contribuciones al estudio de la electricidad incluyen la invención del motor eléctrico, del generador eléctrico y del transformador, así como el descubrimiento de la inducción electromagnética y de las leyes de la electrólisis. Influido poderosamente por la religión, se negó a trabajar para las fuerzas armadas británicas en el desarrollo de gases venenosos.

inteligente. Nuestro estudio del electromagnetismo conducirá a ondas electromagnéticas, proporcionando la base para nuestro estudio de la óptica en los capítulos 34-37.

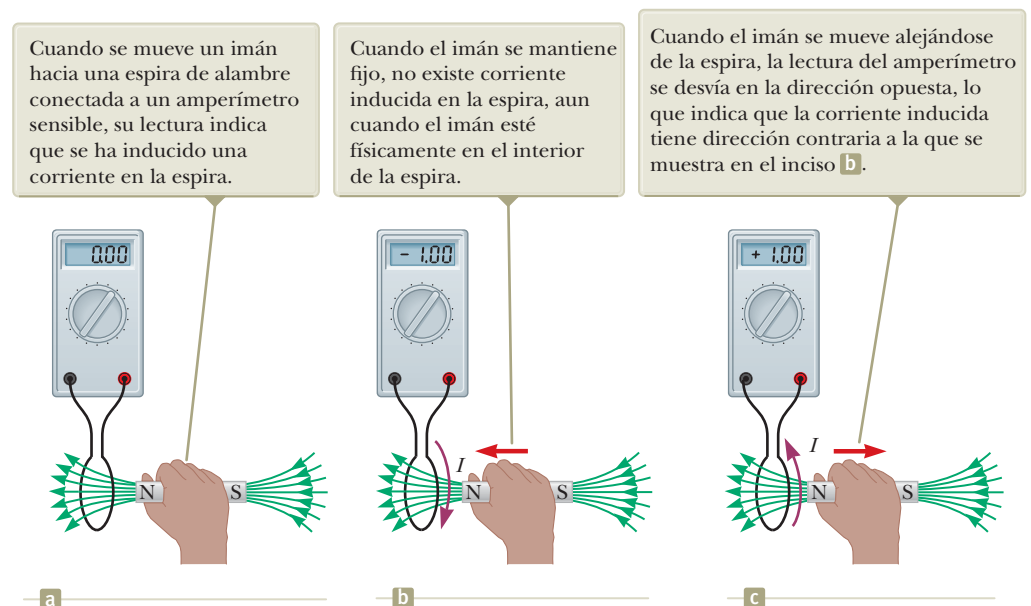
## 30.1 Ley de Faraday de la inducción

Comencemos nuestra investigación sobre las corrientes inducidas mencionadas en la introducción al considerar los resultados experimentales obtenidos cuando una espira de cable está conectada a un amperímetro sensible como se ilustra en la figura 30.1. Observe primero que no hay batería que proporcione energía a la espira de alambre. Cuando un imán se mantiene inmóvil cerca de la espira, como en la figura 30.1a, no se mide corriente en ella. El paso de las líneas de campo magnético estático a través de la espira no tiene efecto eléctrico. Pero ahora mueva el imán hacia la espira, como en la figura 30.1b. Pasa algo bastante notable: ¡se induce una corriente en el circuito, medida por el amperímetro! Cuando el imán deja de moverse, la corriente vuelve a cero. Ahora retire el imán de la espira, como en la figura 30.1c. De nuevo, se registra una corriente inducida, en la dirección opuesta a la de la figura 30.1b.

Este simple experimento sugiere una conexión fundamental entre los campos eléctricos y magnéticos. Una carga estacionaria establece un campo eléctrico, como se estudió en el capítulo 22. Si la carga se mueve, el campo eléctrico en un punto en el espacio cerca de la carga debe cambiar con el tiempo. Una carga en movimiento, sin embargo, es una corriente. Y, como descubrimos en el capítulo 29, una corriente establece un campo magnético. Por tanto, un campo eléctrico cambiante da como resultado un campo magnético. Con el experimento descrito en el párrafo anterior, vemos lo contrario: un campo magnético cambiante induce una corriente, ¡que se debe a un campo eléctrico en el cable!

Ahora describamos un experimento realizado por Faraday e ilustrado en la figura 30.2. Una bobina primaria está enrollada alrededor de un anillo de hierro y conectada a un interruptor y una batería. Una bobina secundaria también está enrollada alrededor del anillo y está conectada a un amperímetro sensible. No hay batería presente en el circuito secundario, y la bobina secundaria no está conectada eléctricamente a la bobina primaria.

Cuando el interruptor está abierto como se muestra en la figura 30.2, no se detecta corriente en el circuito secundario, como lo indica la lectura en el amperímetro, pero, ¿qué sucede si cerramos el interruptor? Encontramos que la lectura actual salta momentáneamente cuando el interruptor se cierra y luego vuelve a cero. Como el interruptor permanece cerrado, la lectura de corriente en el circuito secundario per-



**Figura 30.1** Un experimento simple muestra que se induce una corriente en una espira cuando un imán se aproxima o se aleja de la espira.

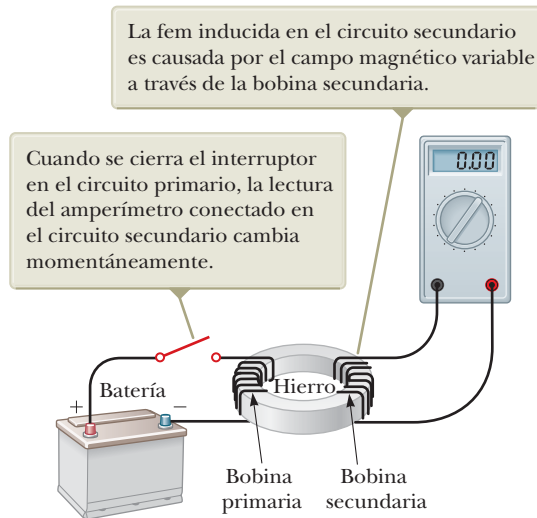


Figura 30.2 Experimento de Faraday.

manece en cero aunque haya corriente en el circuito primario. Ahora, cuando se abre el interruptor, la lectura actual de nuevo salta momentáneamente, con el signo opuesto a cuando se abrió el interruptor, y luego vuelve a cero.

Los experimentos mostrados en las figuras 30.1 y 30.2 tienen algo en común: en ambos casos se induce una corriente en una espira cuando el flujo magnético a través de la espira cambia con el tiempo. En la figura 30.1, el campo magnético cambia porque el imán se mueve con relación a la espira. En la figura 30.2, el cierre del interruptor permite que exista una corriente en la bobina primaria. Esta corriente establece un campo magnético en el anillo de hierro que cambia de cero a su valor de equilibrio después de que se cierra el interruptor. El campo magnético cambiante a través de la bobina secundaria induce una corriente. Cuando se vuelve a abrir el interruptor, el campo magnético vuelve a cero y hay una corriente momentánea inducida en la bobina secundaria en la dirección opuesta. Hemos discutido que una corriente se debe a una fem (sección 27.1), por lo que decimos que una fem es inducida por un campo magnético cambiante. Los experimentos muestran que la fem inducida en una espira de alambre se relaciona con la rapidez de cambio con el tiempo del flujo magnético a través de la espira. Este enunciado, puede ser escrito matemáticamente como **ley de inducción de Faraday**

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (30.1) \quad \leftarrow \text{Ley de Faraday de inducción}$$

donde  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$  es el flujo magnético a través de la espira. (Véase la sección 29.5.)

Si una bobina consiste de  $N$  espiras, con la misma área, como en la figura 30.2, y  $\Phi_B$  es el flujo magnético a través de una espira, se induce una fem en todas las espiras. Las espiras están en serie, por lo que sus fem se suman; debido a eso, la fem total inducida en la bobina está dada por la expresión

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (30.2)$$

El signo negativo que aparece en las ecuaciones 30.1 y 30.2 es de un significado físico de importancia, como se explica en la sección 30.3.

Suponga que una espira que encierra una superficie  $A$  se encuentra en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , como se ve en la figura 30.3. El flujo magnético a través de la espira es igual a  $BA \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre el campo magnético y la normal a la espira; por esto, la fem inducida puede expresarse como

$$\mathcal{E} = - \frac{d}{dt}(BA \cos \theta) \quad (30.3)$$

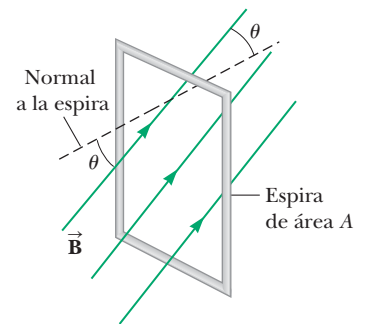
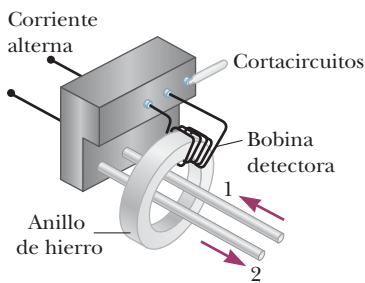
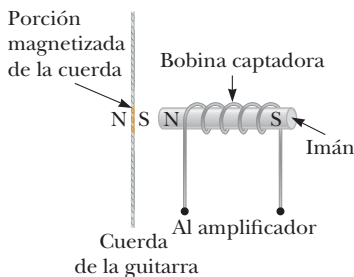


Figura 30.3 Espira conductora que encierra un área  $A$  en presencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . El ángulo formado entre  $\vec{B}$  y la normal a la espira es  $\theta$ .





**Figura 30.4** Componentes esenciales de un interruptor parásito por fallas a tierra.



**Figura 30.5** (a) En una guitarra eléctrica una cuerda magnetizada en vibración induce una fem en una bobina captadora. (b) Las bobinas captadoras (los círculos que aparecen por debajo de las cuerdas metálicas) de esta guitarra eléctrica, detectan las vibraciones de las cuerdas y envían esta información a través de un amplificador a los altavoces. (Un interruptor en la guitarra permite al ejecutante seleccionar el conjunto de las seis bobinas captadoras que se van a utilizar.)

A partir de esta expresión observe que una fem puede ser inducida en el circuito de varias formas:

- La magnitud de  $\vec{B}$  cambia con el tiempo.
- El área encerrada por la espira cambia con el tiempo.
- El ángulo  $\theta$  entre  $\vec{B}$  y la normal a la espira puede cambiar con el tiempo.
- Cualquier combinación puede presentarse de lo anterior.

**EJEMPLO RÁPIDO 30.1** Una espira de alambre circular está en un campo magnético uniforme con el plano de la espira perpendicular a las líneas de campo. ¿Cuál de los siguientes casos *no* causará la inducción de una corriente en la espira? (a) Si se aplasta la espira; (b) si se gira la espira respecto a un eje perpendicular a las líneas de campo; (c) conservando fija la orientación de la espira y moviéndola a lo largo de dichas líneas; (d) retirando la espira fuera del campo.

### Algunas aplicaciones de la Ley de Faraday

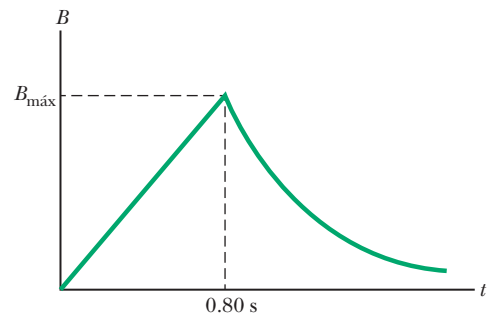
El interruptor de circuito de falla a tierra (ICFT), mencionado en la sección 27.5, es un dispositivo de seguridad interesante que protege a los usuarios de aparatos eléctricos en el hogar contra descargas eléctricas. Su funcionamiento hace uso de la ley de Faraday. En el ICFT que se muestra en la figura 30.4, el cable 1 conduce desde la toma de corriente de la pared hasta el aparato que se debe proteger y el cable 2 conduce desde el aparato hasta la toma de corriente de la pared. Un anillo de hierro rodea los dos cables y una bobina sensora envuelve parte del anillo. Debido a que las corrientes en los cables están en direcciones opuestas y de igual magnitud, hay una corriente neta cero fluyendo a través del anillo y el flujo magnético neto a través de la bobina sensora es cero. Ahora suponga que la corriente de retorno en el cable 2 cambia para que las dos corrientes no sean iguales en magnitud. (Eso puede suceder si, por ejemplo, el aparato se moja, permitiendo que la corriente se filtre a tierra.) Entonces la corriente neta a través del anillo no es cero y el flujo magnético a través de la bobina sensora ya no es cero. Debido a que la corriente doméstica es alternante (lo que significa que su dirección se sigue invirtiendo), el flujo magnético a través de la bobina de detección cambia con el tiempo, induciendo una fem en la bobina. Esta fem inducida se utiliza para disparar un interruptor de circuito, que detiene la corriente antes de que sea capaz de alcanzar un nivel dañino.

Otra aplicación interesante de la ley de Faraday es la producción de sonido en una guitarra eléctrica. La bobina en este caso, llamada bobina de captación, se coloca cerca de la cuerda de la guitarra vibrante, que está hecha de un metal que puede ser magnetizado. Un imán permanente dentro de la bobina magnetiza la porción de la cuerda más cercana a la bobina (figura 30.5a). Cuando la cuerda vibra a cierta frecuencia, su segmento magnetizado produce un flujo magnético cambiante a través de la bobina. El flujo cambiante induce una fem en la bobina que se alimenta a un amplificador. La salida del amplificador se envía a los altavoces, que producen las ondas de sonido que escuchamos.

### Ejemplo 30.1 Inducción de una fem en una bobina

Una bobina consiste de 200 vueltas de alambre. Cada vuelta es un cuadrado de lado  $d = 18 \text{ cm}$  y se establece un campo magnético uniforme en dirección perpendicular al plano de la bobina. La figura 30.6 muestra el comportamiento de la magnitud del campo magnético con el tiempo. De 0 a 0.80 s, el campo cambia linealmente de 0 a 0.50 T. Después de  $t = 80 \text{ s}$  la magnitud del campo decae con el tiempo de acuerdo con la expresión  $B = B_{\text{máx}} e^{-at}$ , donde  $a$  es una constante y  $B_{\text{máx}} = 0.50 \text{ T}$ .

**(A)** ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la bobina entre  $t = 0$  y  $t = 0.80 \text{ s}$ ?



**Figura 30.6** (Ejemplo 30.1) La magnitud del campo magnético uniforme a través de una espira de alambre aumenta linealmente y luego disminuye exponencialmente.

30.1 continuación

SOLUCIÓN

**Conceptualizar** A partir de la descripción en el problema, imagine qué líneas de campo magnético pasan a través de la bobina. Ya que el campo magnético cambia en magnitud, en la bobina se induce una fem.

**Categorizar** Se evaluará la fem usando la ley de Faraday de esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la ecuación 30.2 para la situación descrita en este caso, y observe que el campo magnético cambia linealmente con el tiempo:

$$|\mathcal{E}| = N \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = N \frac{\Delta(BA)}{\Delta t} = NA \frac{\Delta B}{\Delta t} = Nd^2 \frac{B_f - B_i}{\Delta t}$$

Sustituya valores numéricos:

$$|\mathcal{E}| = (200)(0.18 \text{ m})^2 \frac{(0.50 \text{ T} - 0)}{0.80 \text{ s}} = 4.0 \text{ V}$$

**(B)** ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la bobina después de  $t = 0.80 \text{ s}$ ?

Evalúe la ecuación 30.2 para la situación descrita aquí:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -N \frac{d}{dt} (AB_{\text{máx}} e^{-at}) = -NAB_{\text{máx}} \frac{d}{dt} e^{-at} = aNd^2 B_{\text{máx}} e^{-at}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\mathcal{E} = a(200)(0.18 \text{ m})^2 (0.50 \text{ T}) e^{-at} = 3.2ae^{-at}$$

Esta expresión indica que la fem en la espira decae exponencialmente después de  $t = 0.80 \text{ s}$ . La magnitud inicial de la fem depende del parámetro desconocido  $a$ .

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si se le pidiera encontrar la magnitud de la corriente inducida en la bobina mientras el campo varía durante los primeros 80 s? ¿Puede responder a esta pregunta?

**Respuesta** Si los extremos de la bobina no están conectados a un circuito, la respuesta a esta pregunta es sencilla: ¡la corriente es cero! (Las cargas se mueven dentro del alambre de la bobina, pero no se pueden mover adentro o afuera de los extremos de la bobina.) Para que exista una corriente estable, los extremos de la bobina se deben conectar entre sí o a un circuito externo. Suponga que la bobina se conecta a un circuito y que la resistencia total de la bobina y el circuito es de  $2.0 \Omega$ . Por tanto, la magnitud de la corriente inducida en la bobina es

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{4.0 \text{ V}}{2.0 \Omega} = 2.0 \text{ A}$$

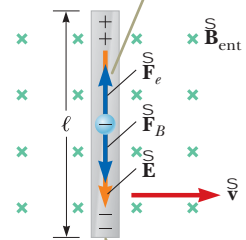
### 30.2 Fem de movimiento

En la sección 30.1 y el ejemplo 30.2 se consideran casos en los que una bobina de alambre estuvo estacionaria y el campo magnético cambió con el tiempo. Veamos ahora algo diferente. Supongamos que un campo magnético es uniforme y constante, y movemos un conductor en el campo. Encontramos que hay una fem inducida en el conductor. Llamamos a tal fem una **fem de movimiento**.

El conductor recto de longitud  $\ell$  que se muestra en la figura 30.7 se mueve a través de un campo magnético uniforme dirigido hacia el interior de la página. Por simplicidad, suponga que el conductor se mueve en una dirección perpendicular al campo con una velocidad constante bajo la influencia de algún agente externo. De la versión magnética de la partícula en un modelo de campo, los electrones en el conductor experimentan una fuerza  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$  (ecuación 28.1) que está dirigida a lo largo de la longitud  $\ell$ , perpendicularmente tanto a  $\vec{v}$  como a  $\vec{B}$ . Bajo la influencia de esta fuerza, los electrones se mueven hacia el extremo inferior del conductor, en donde se acumulan, dejando una carga positiva neta en el extremo superior. Como resultado de esta separación de cargas, se produce un campo eléctrico  $\vec{E}$  dentro del conductor. Por tanto, los electrones en el alambre se describen también por la versión eléctrica del modelo de la partícula en un campo. Las cargas se acumulan en ambos extremos hasta que la fuerza magnética  $qvB$  dirigida hacia abajo sobre los electrones que quedan en el conductor se equilibra con la fuerza eléctrica  $qE$  hacia arriba. Entonces, los electrones son descritos por el modelo de partícula en equilibrio.

$$\sum F = 0 \rightarrow qE - qvB = 0 \rightarrow E = vB$$

En estado estable, las fuerzas eléctricas y magnéticas sobre un electrón presente en el alambre están en equilibrio.



Debido a la fuerza magnética ejercida sobre los electrones, los extremos del conductor se cargan con cargas opuestas y establecen un campo eléctrico en el conductor.

**Figura 30.7** Conductor eléctrico recto de longitud  $\ell$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  a través de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  con dirección perpendicular a  $\vec{v}$ .





La magnitud del campo eléctrico que se produce en el conductor está relacionada con la diferencia de potencial a través de los extremos del conductor, de acuerdo con la relación  $\Delta V = E\ell$  (véase ecuación 24.6). Entonces, para la condición de equilibrio,

$$\Delta V = E\ell = B\ell v \quad (30.4)$$

donde el extremo superior del conductor en la figura 30.7 está con un potencial eléctrico más elevado que el extremo inferior. En consecuencia, **se mantiene una diferencia de potencial entre los extremos del conductor siempre que éste se siga moviendo a través del campo magnético uniforme**. Si se invierte la dirección del movimiento, también se invierte la polaridad de la diferencia de potencial.

Una situación más interesante se presenta cuando el conductor en movimiento forma parte de una trayectoria de conducción cerrada. Esta situación es de utilidad particular para ilustrar cómo el flujo magnético variable origina una corriente inducida en un circuito cerrado. Considere un circuito constituido por una barra conductora de longitud  $\ell$  que se desliza a lo largo de dos rieles conductores paralelos fijos, como se muestra en la figura 30.8a. Por simplicidad, suponga que la barra tiene una resistencia igual a cero y que la parte fija del circuito tiene una resistencia  $R$ . Se aplica un campo magnético uniforme y constante  $\vec{\mathbf{B}}$  perpendicular al plano del circuito. Conforme se mueve la barra hacia la derecha con una velocidad  $\vec{\mathbf{v}}$  bajo la influencia de una fuerza aplicada  $\vec{\mathbf{F}}_{\text{apl}}$ , los electrones libres en la barra experimentan una fuerza magnética dirigida hacia abajo, como en la figura 30.7. Por esta razón, se establece una diferencia de potencial entre los extremos de la barra móvil. Debido a la trayectoria de conducción cerrada en esta situación, la barra es parte de un circuito completo, como se muestra en la figura 30.8b. La barra móvil actúa como una fuente de fem para el circuito. Los electrones de todo el circuito se mueven en el sentido de las agujas del reloj alrededor del circuito, constituyendo una corriente  $I$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Abordemos esta situación observando que el flujo a través del circuito en la figura 30.8a cambia porque el área del circuito cambia a medida que la barra se mueve. Dado que en cualquier instante el área encerrada por el circuito es igual a  $\ell x$ , donde  $x$  es la posición de la barra, el flujo magnético a través de dicha área es

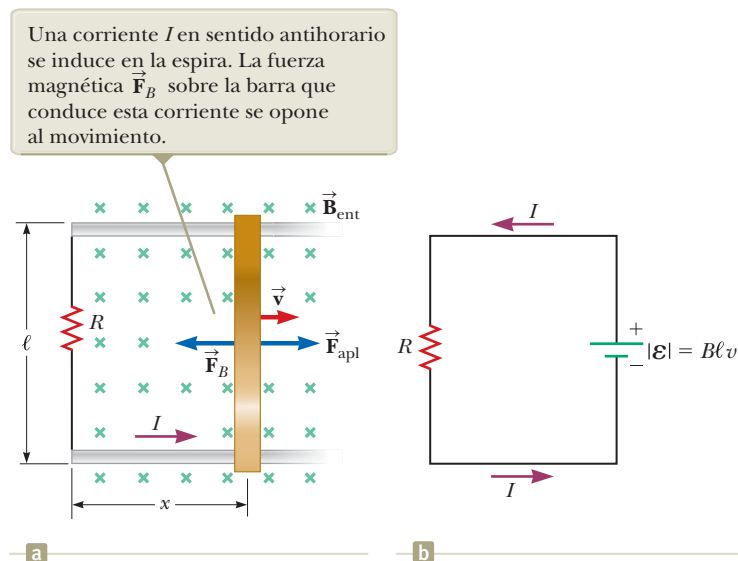
$$\Phi_B = B\ell x$$

Al utilizar la ley de Faraday y observar que  $x$  cambia con el tiempo con una rapidez de  $dx/dt = v$ , velocidad de la barra, encuentra que la fem de movimiento inducida es igual a

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell \frac{dx}{dt}$$

Fem de movimiento ►

$$\mathcal{E} = -B\ell v \quad (30.5)$$



**Figura 30.8** (a) Barra conductora que se desliza con una velocidad  $\vec{\mathbf{v}}$  a lo largo de dos rieles conductores bajo la acción de la fuerza aplicada  $\vec{\mathbf{F}}_{\text{apl}}$ . Debido a la corriente en la barra hay una fuerza magnética  $\vec{\mathbf{F}}_B$  sobre la barra en dirección opuesta a la fuerza aplicada (b) El diagrama de circuito equivalente para el arreglo se muestra en el inciso (a).

¡La magnitud de la fem es el mismo resultado que obtuvimos en la ecuación 30.4 usando un modelo de fuerza! En vista de que la resistencia en el circuito es  $R$ , la magnitud de la corriente inducida es

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B\ell v}{R} \quad (30.6)$$

Usando la figura 30.7, analizamos la fem de movimiento generada en una barra móvil usando un modelo de fuerza. Con la ayuda de la figura 30.8, usamos la ley de Faraday para generar la misma expresión para la fem de movimiento. Ahora consideremos un enfoque de energía. Puede preguntarse sobre la fuente de energía entregada al resistor en la figura 30.8 porque no hay batería en el circuito. Supongamos que la barra se modela como una partícula en equilibrio, moviéndose a velocidad constante bajo la influencia de dos fuerzas de igual magnitud:  $F_{apl} = F_B$ . La fuerza aplicada debe trabajar en la barra para mantenerla a esta velocidad constante contra la fuerza magnética  $\vec{F}_B$  sobre los electrones en movimiento. ¡La transferencia de energía representada por este trabajo resulta en el calentamiento de la resistencia!

Verifiquemos esta afirmación matemáticamente. Identificando la barra y el campo magnético como un sistema no aislado de energía, la reducción apropiada de la ecuación 8.2 es  $0 = W_{apl} + T_{ET}$  donde  $W_{apl}$  es el trabajo realizado por el agente que mueve la barra y  $T_{ET}$  es la energía transferida desde la barra hacia el resistor por transmisión eléctrica. Tomando una derivada de tiempo de esta ecuación da  $dW_{apl}/dt = -dT_{ET}/dt$  o  $P_{apl} = -P_{elec}$ . En esta expresión,  $P_{apl}$  es la entrada de potencia del agente que mueve la barra y  $P_{elec}$  es la razón de transferencia de energía desde la barra al resistor mediante electricidad. El poder de  $P_{elec}$  es un número negativo porque la energía está saliendo de la barra con este método. Vamos a verificar esta ecuación usando, respectivamente, las ecuaciones 8.18, 5.8, 28.10, 30.5, 26.7 y 26.22:

$$P_{apl} = F_{apl} v = F_B v = (\ell B)v = I(B\ell v) = I\mathcal{E} = I(IR) = I^2 R = -P_{elec} \quad (30.7)$$

En el paso final, reconocemos que  $P = I^2 R$  es la tasa de energía entregada al resistor, por lo que  $-I^2 R$  es la razón a la que la energía abandona la barra.

- EJEMPLO RÁPIDO 30.2** En la figura 30.8a, una cierta fuerza aplicada de magnitud  $F$  resulta en una velocidad constante  $v$  y una potencia de entrada  $P$ . Imagine que se incrementa la fuerza de forma que la velocidad constante de la barra se duplica hasta  $2v$ . Bajo estas condiciones, ¿cuáles son la fuerza y la potencia de entrada nuevas? (a)  $2F$  y  $2P$ , (b)  $4F$  y  $2P$ , (c)  $2F$  y  $4P$  y (d)  $4F$  y  $4P$ .

### Ejemplo 30.2 Fuerza magnética que actúa sobre una barra deslizante

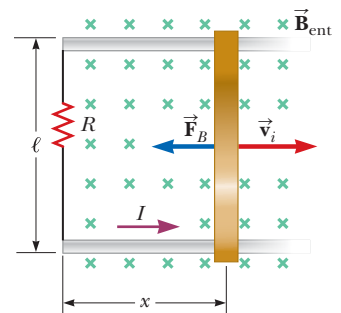
La barra conductora ilustrada en la figura 30.9 (se mueve sobre dos rieles paralelos sin fricción en presencia de un campo magnético uniforme dirigido hacia la página. La barra tiene masa  $m$  y su longitud es  $\ell$ . A la barra se le da una velocidad inicial  $\vec{v}_i$  hacia la derecha y se libera en  $t = 0$ .

**(A)** Usando las leyes de Newton, encuentre la velocidad de la barra como función del tiempo después de que es liberada.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Conforme la barra se desliza hacia la derecha (en la figura 30.9) en el circuito, que consiste en la barra, los rieles y el resistor, se establece una corriente en sentido contrario al de las manecillas del reloj. La corriente hacia arriba en la barra resulta en una fuerza magnética hacia la izquierda sobre la barra, como se muestra en la figura. Por tanto, la barra debe frenar, así que la solución matemática debe demostrar esto.

**Categorizar** El texto clasifica este problema como uno apropiado para el uso de las leyes de Newton. Modele la barra como una *partícula bajo una fuerza neta*.



**Figura 30.9** (Ejemplo 30.2) A una barra conductora de longitud  $\ell$  sobre dos rieles conductores fijos se le da una velocidad inicial  $\vec{v}_i$  hacia la derecha.

continúa

## 30.2 continuación

**Analizar** A partir de la ecuación 28.10, la fuerza magnética es  $F_B = -\ell B$ , donde el signo negativo indica que la fuerza es hacia la izquierda. La fuerza magnética es la *única* fuerza horizontal que actúa sobre la barra.

Usando la partícula bajo el modelo de fuerza neta, aplique la segunda ley de Newton a la barra en la dirección horizontal:

$$F_x = ma \rightarrow -\ell B = m \frac{dv}{dt}$$

Sustituya  $I = B\ell v/R$  de la ecuación 30.6:

$$m \frac{dv}{dt} = -\left(\frac{B\ell v}{R}\right)\ell B = -\frac{B^2\ell^2}{R}v$$

Reordene la ecuación de modo que todos los casos de la variable  $v$  estén a la izquierda y los de  $t$  estén a la derecha:

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)dt$$

Integre esta ecuación usando la condición inicial  $v = v_i$  en  $t = 0$  y observe que  $(B^2\ell^2/mR)$  es una constante:

$$\int_{v_i}^v \frac{dv}{v} = -\frac{B^2\ell^2}{mR} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_i}\right) = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)t$$

Defina la constante  $\tau = mR/B^2\ell^2$  y resuelva para la velocidad:

$$(1) \quad v = v_i e^{-t/\tau}$$

**Finalizar** Esta expresión para  $v$  indica que la velocidad de la barra disminuye con el tiempo bajo la acción de la fuerza magnética, como se esperaba a partir de la conceptualización del problema. La forma matemática del decaimiento es exponencial.

**(B)** Demuestre que se encuentra el mismo resultado al usar un planteamiento energético.

## SOLUCIÓN

**Categorizar** El texto de esta parte del problema pide usar un planteamiento energético para la misma situación. Modelamos la barra de la figura 30.9 como un *sistema no aislado de energía*.

**Analizar** La reducción apropiada de la ecuación 8.2 es  $\Delta K = T_{ET}$ . El término de la izquierda representa el cambio en la velocidad de la barra, mientras que el término de la derecha representa la energía transferida fuera de la barra por la electricidad.

Derive la reducción de la ecuación 8.2 con respecto al tiempo:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dT_{ET}}{dt} = P_{\text{elec}} = -I^2 R$$

Sustituya para la energía cinética de la barra a partir de la ecuación 7.16 y la corriente a partir de la ecuación 30.6:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\left(\frac{B\ell v}{R}\right)^2 R \rightarrow mv \frac{dv}{dt} = -\frac{(B\ell v)^2}{R}$$

Reordene términos:

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)dt$$

**Finalizar** Este resultado es la misma expresión que se encontró en la parte (A).

## ¿QUÉ PASARÍA SI?

Suponga que quiere aumentar la distancia a través de la cual la barra se mueve entre el tiempo que inicialmente se proyecta y el tiempo cuando en esencia llega al reposo. Puede hacer esto al cambiar una de tres variables:  $v_i$ ,  $R$  o  $B$  por un factor de 2 o 1/2. ¿Cuál variable debe cambiar para maximizar la distancia, y la duplicaría o la reduciría a la mitad?

**Respuesta** Aumentar  $v_i$  haría que la barra se moviera más lejos. Incrementar  $R$  reduciría la corriente y por tanto la fuerza magnética, lo que haría que la barra se moviera más lejos. Reducir  $B$  reduciría la fuerza magnética y haría que la barra se moviera más lejos. Sin embargo, ¿cuál método es el más efectivo?

Use la ecuación (1) para encontrar por integración la distancia que la barra se mueve:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = v_i e^{-t/\tau} \\ x &= \int_0^\infty v_i e^{-t/\tau} dt = -v_i \tau e^{-t/\tau} \Big|_0^\infty \\ &= -v_i \tau (0 - 1) = v_i \tau = v_i \left(\frac{mR}{B^2\ell^2}\right) \end{aligned}$$

Esta expresión demuestra que duplicar  $v_i$  o  $R$  duplicará la distancia. No obstante, cambiar  $B$  en un factor de  $\frac{1}{2}$ , hace que la distancia sea cuatro veces mayor!

**Ejemplo 30.3** Fem de movimiento inducida en una barra giratoria

Una barra conductora de longitud  $\ell$  da vueltas con una rapidez angular constante  $\omega$  en torno a un pivote en un extremo. Un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  se dirige perpendicular al plano de rotación, como se muestra en la figura 30.10. Encuentre la fem de movimiento inducida entre los extremos de la barra.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** La barra giratoria es diferente en naturaleza a la barra deslizante en la figura 30.7. Sin embargo, considere un pequeño segmento de la barra. Se trata de una longitud corta de conductor en movimiento en un campo magnético que tiene una fem generada en ella como la barra deslizante en la figura 30.7. Al pensar en cada pequeño segmento como una fuente de fem, se ve que todos los segmentos están en serie y las fem se suman a todo lo largo de la barra.

**Categorizar** En términos de la conceptualización del problema, este ejemplo se plantea como se hizo en el análisis de la ecuación 30.5, con la característica añadida de que los segmentos cortos de la barra viajan en trayectorias circulares.

**Analizar** Evalúe la magnitud de la fem inducida en un segmento de la barra de longitud  $dr$  que tenga una velocidad  $\vec{v}$  a partir de la ecuación 30.5:

Encuentre la fem total entre los extremos de la barra al sumar las fem inducidas a través de todos los segmentos:

La velocidad tangencial  $v$  de un elemento se relaciona con la velocidad angular  $\omega$  mediante la relación  $v = r\omega$  (ecuación 10.10); use este hecho e integre:

$$d\mathcal{E} = Bv \, dr$$

$$\mathcal{E} = \int Bv \, dr$$

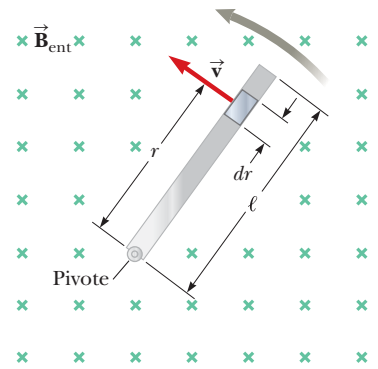
$$\mathcal{E} = B \int v \, dr = B\omega \int_0^\ell r \, dr = \frac{1}{2} B\omega\ell^2$$

**Finalizar** En la ecuación 30.5 para una barra deslizante se puede aumentar  $\mathcal{E}$  al aumentar  $B$ ,  $\ell$  o  $v$ . Incrementar cualquiera de estas variables por un factor determinado aumenta  $\mathcal{E}$  por el mismo factor. Por tanto, usted elegiría cualquiera de estas tres variables que sea la más conveniente de aumentar. Sin embargo, para la barra giratoria, hay una ventaja al aumentar la longitud de la barra para elevar la fem, porque  $\ell$  es cuadrática. Duplicar la longitud le da cuatro veces la fem, mientras que duplicar la velocidad angular sólo duplica la fem.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga, después de leer este ejemplo, que da con una brillante idea. Una rueda de la fortuna tiene rayos metálicos entre el centro y el borde circular. Estos rayos se mueven en el campo magnético de la Tierra, de modo que cada rayo actúa como la barra en la figura 30.10. Planea usar la fem generada por la rotación de la rueda de la fortuna para activar los focos de la rueda. ¿Funcionará esta idea?

**Respuesta** Si calcula una fem típica generada por un rayo, encontrará que es aproximadamente 1 mV, demasiado pequeña para operar una lámpara incandescente. (¡Pruebe este cálculo!)

Una dificultad adicional se relaciona con la energía. Incluso si supone que puede encontrar lámparas que operen usando una diferencia de potencial del orden de milivolts, un rayo debe ser parte de un circuito para proporcionar un voltaje a las lámparas. En consecuencia, el rayo debe portar una corriente. Ya que este rayo portador de corriente está en un campo magnético, sobre el rayo se ejerce una fuerza magnética en la dirección opuesta a su dirección de movimiento. Como resultado, el motor de la rueda de la fortuna debe suministrar más energía para realizar trabajo contra esta fuerza de arrastre magnético. A final de cuentas, el motor debe proporcionar la energía que opere las lámparas, ¡y usted no ha obtenido nada de manera gratuita!



**Figura 30.10** (Ejemplo 30.3) Una barra conductora gira en torno a un pivote en un extremo en un campo magnético uniforme que es perpendicular al plano de rotación. Una fem de movimiento se induce a través de los extremos de la barra.

**30.3** Ley de Lenz

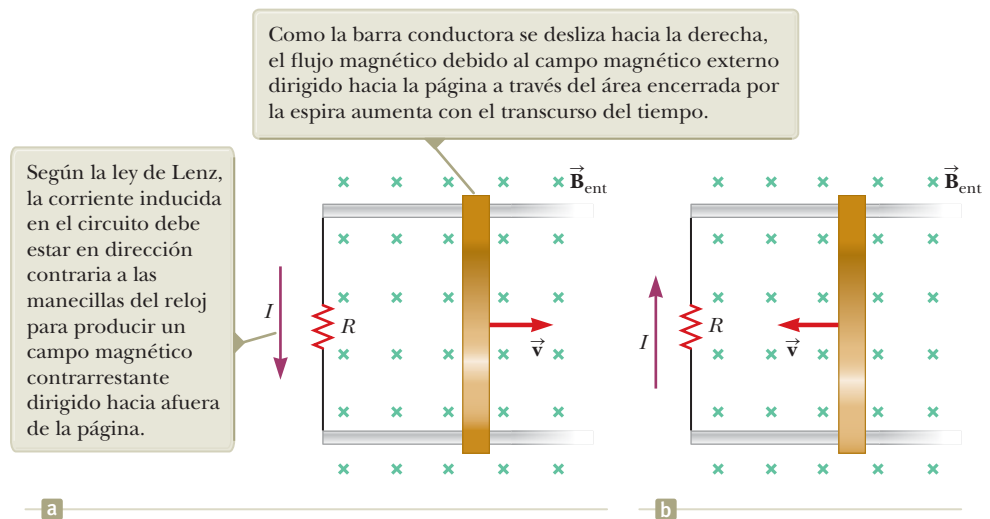
La ley de Faraday (ecuación 30.1) indica que la fem inducida y el cambio en el flujo tienen signos algebraicos opuestos. Lo anterior tiene una interpretación física muy real que ha llegado a ser conocida como la **ley de Lenz**:<sup>1</sup>

La corriente inducida en una espira está en la dirección que crea un campo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético en el área encerrada por la espira.

◀ Ley de Lenz

<sup>1</sup> Desarrollada por el físico alemán Heinrich Lenz (1804-1865).

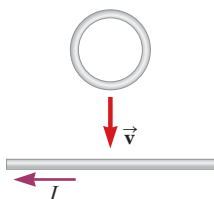
**Figura 30.11** (a) La Ley de Lenz puede utilizarse para determinar la dirección de la corriente inducida. (b) Cuando la barra se mueve hacia la izquierda, la corriente inducida debe moverse en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Por qué?



Es decir, la corriente inducida tiende a mantener el flujo magnético original a través de la espira por alteración. Ahora se demostrará que esta ley es una consecuencia de la ley de conservación de energía.

Para comprender la ley de Lenz, considere el ejemplo de la barra que se mueve hacia la derecha sobre dos rieles paralelos en presencia de un campo magnético uniforme (el campo magnético *externo*, cruces en verde, figura 30.11a). Conforme se mueve la barra hacia la derecha el flujo magnético a través del área encerrada por el circuito se incrementa con el tiempo ya que el área aumenta. La ley de Lenz establece que la corriente inducida en el circuito debe estar dirigida de forma que el campo magnético que produzca se oponga al cambio en el flujo magnético externo. Ya que el flujo magnético debido a un campo externo dirigido hacia adentro de la página está en aumento, la corriente inducida en el circuito, si ha de oponerse a este cambio, debe producir un campo dirigido hacia el exterior de la página encerrada por el circuito. En consecuencia, la corriente inducida en la espira del circuito debe dirigirse en dirección opuesta a las manecillas del reloj cuando la barra se mueve hacia la derecha. (Utilice la regla de la mano derecha para verificar esta dirección.) Si la barra se mueve hacia la izquierda, como en la figura 30.11b, el flujo magnético externo a través del área encerrada por la espira se reduce con el transcurso del tiempo. Ya que el campo está dirigido hacia la página, la dirección de la corriente inducida deberá estar en sentido de las manecillas del reloj si ha de producir un campo que también quede dirigido hacia la página. En cualquiera de los casos, la corriente inducida tiende a mantener el flujo original a través del área encerrada por la espira de corriente.

Ahora examine esta situación a partir de consideraciones de energía. Suponga que a la barra se le da un ligero impulso hacia la derecha. En la explicación anterior, se encontró que este movimiento establece una corriente en la espira en dirección contraria a las manecillas del reloj. ¿Qué pasaría si supone que la corriente está en la dirección de las manecillas del reloj?, en este caso la corriente es hacia abajo en la barra, conforme a la Ecuación 28.10, la dirección de la fuerza magnética que se ejerce sobre la barra esté dirigida hacia la derecha. Esta fuerza aceleraría la barra e incrementaría su velocidad, lo que a su vez haría que el área encerrada por la espira se incrementara con mayor rapidez, lo cual daría como resultado un incremento en la corriente inducida, provocando un incremento en la fuerza, lo que a su vez produciría un incremento en la corriente, y así sucesivamente. De hecho, el sistema estaría adquiriendo energía sin ninguna entrada de la misma. Sin duda este comportamiento es inconsistente con todas las experiencias y viola la ley de la conservación de la energía. Por tanto, la corriente debe ir en sentido contrario a las manecillas del reloj.



**Figura 30.12** (Examen rápido 30.3)

- E XAMEN RÁPIDO 30.3** La figura 30.12 muestra una espira redonda de alambre que cae hacia un alambre que conduce corriente hacia la izquierda. La dirección de la corriente inducida en la espira es (a) en sentido de las manecillas del reloj, (b) opuesta a las manecillas del reloj, (c) cero, (d) imposible de determinar.



**Ejemplo conceptual 30.4 Aplicación de la ley de Lenz**

Se coloca un imán cerca de una espira metálica, como se muestra en la figura 30.13a.

**(A)** Encuentre la dirección de la corriente inducida en la espira cuando el imán se empuja hacia la espira.

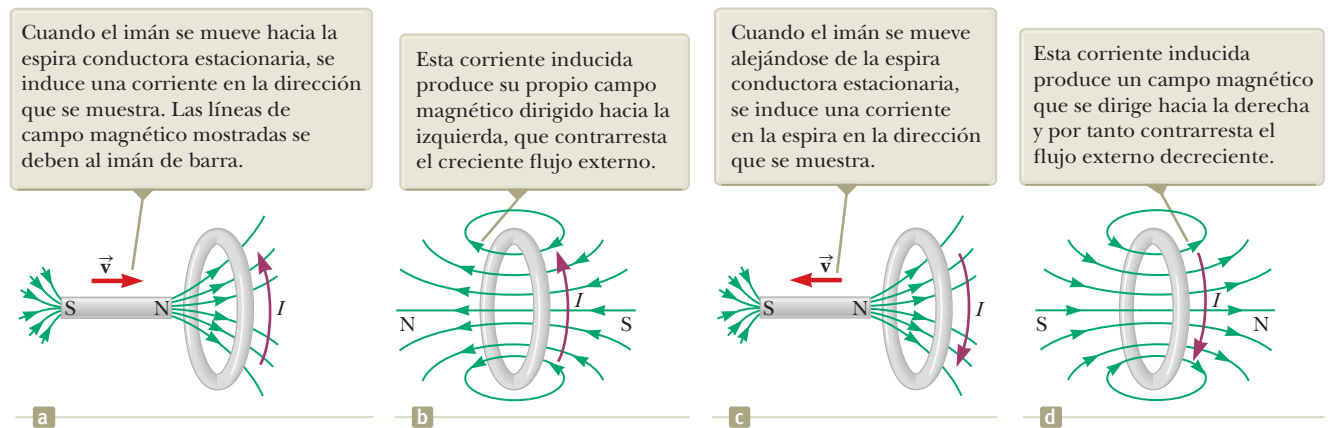
**SOLUCIÓN**

Esta es la misma situación que en la figura 30.1b. En la discusión de esa figura, dijimos que la dirección de la corriente era opuesta a la de la figura 30.1c, pero en ese momento no pudimos especificar la dirección más allá de eso. Ahora podemos. Conforme el imán se mueve a la derecha, hacia la espira, el flujo magnético externo a través de la espira aumenta con el tiempo. Para contrarrestar este aumento en flujo debido a un campo hacia la derecha, la corriente inducida produce su propio campo magnético hacia la izquierda, como se ilustra en la figura 30.13b; por eso, la corriente inducida está en la dirección que se muestra. Al saber que polos magnéticos similares se repelen, se concluye que la cara izquierda de la espira de corriente actúa como un polo norte y la cara derecha actúa como un polo sur.

**(B)** Encuentre la dirección de la corriente inducida en la espira cuando el imán se aleja de la espira.

**SOLUCIÓN**

Si el imán se mueve hacia la izquierda, como en la figura 30.13c, su flujo a través del área encerrada por la espira disminuye en el tiempo. Ahora la corriente inducida en la espira está en la dirección que se muestra en la figura 30.13d porque esta dirección de corriente produce un campo magnético en la misma dirección que el campo externo. En este caso, la cara izquierda de la espira es un polo sur y la cara derecha es un polo norte.



**Figura 30.13** (Ejemplo conceptual 30.4) Una barra móvil induce una corriente en una espira conductora.

**Ejemplo conceptual 30.5 Una espira móvil a través de un campo magnético**

Una espira metálica rectangular, con dimensiones  $\ell$  y  $w$  y resistencia  $R$ , se mueve con velocidad constante  $v$  hacia la derecha, como en la figura 30.14a. La espira pasa a través de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  dirigido hacia la página y que se extiende una distancia  $3w$  a lo largo del eje  $x$ . Defina  $x$  como la posición del lado derecho de la espira a lo largo del eje  $x$ .

**(A)** Grafique, como función de  $x$ , el flujo magnético a través del área encerrada por la espira.

**SOLUCIÓN**

La figura 30.14b muestra el flujo a través del área encerrada por la espira como función de  $x$ . Antes de que la espira entre al campo, el flujo a través de la espira es cero. Conforme la espira entra al campo, el flujo aumenta linealmente con la posición hasta que el borde izquierdo de la espira está justo dentro del campo. A medida que la espira se mueve a través del campo uniforme, el flujo a través de la espira permanece constante. Por último, el flujo a través de la espira disminuye linealmente a cero conforme la espira sale del campo.

**(B)** Grafique, como función de  $x$ , la fem de movimiento inducida en la espira.

**SOLUCIÓN**

Antes de que la espira entre al campo, no se induce fem de movimiento en él porque no hay campo presente (figura 30.14c). Conforme el lado derecho de la espira entra al campo, el flujo magnético dirigido hacia la página aumenta. Por tanto, de

*continúa*

30.5 continuación

acuerdo con la ley de Lenz, la corriente inducida es contra las manecillas del reloj porque debe producir su propio campo magnético dirigido hacia afuera de la página. La fem de movimiento  $B\ell v$  (de la ecuación 30.5) surge de la fuerza magnética experimentada por las cargas en el lado derecho de la espira. Cuando la espira está completamente en el campo, el cambio en flujo magnético a través de la espira es cero; en consecuencia, la fem de movimiento desaparece. Esto ocurre porque, una vez que el lado izquierdo de la espira entra al campo, la fem de movimiento inducida en él cancela la fem de movimiento presente en el lado derecho de la espira. Conforme el lado derecho de la espira sale del campo, el flujo a través de la espira comienza a disminuir, se induce una corriente en sentido de las manecillas del reloj y la fem inducida es  $Bv$ . Tan pronto como el lado izquierdo sale del campo, la fem disminuye a cero.

(C) Grafique, como función de  $x$ , la fuerza aplicada externa necesaria para contrarrestar la fuerza magnética y mantener  $v$  constante.

SOLUCIÓN

La fuerza externa que se debe aplicar a la espira para mantener este movimiento se grafica en la figura 30.14d. Antes de que la espira entre al campo, ninguna fuerza magnética actúa sobre ella; por eso, la fuerza aplicada debe ser cero si  $v$  es constante. Cuando el lado derecho de la espira entra al campo, la fuerza aplicada sobre la espira debe incrementarse para mantener constante la velocidad de la espira así que la espira es una partícula en equilibrio, y la fuerza aplicada debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza magnética ejercida sobre dicho lado. Cuando la espira está completamente en el campo, el flujo a través de la espira no cambia con el tiempo. Por eso, la fem inducida neta en la espira es cero y la corriente también es cero. Por tanto, no se necesita fuerza externa para mantener el movimiento. Por último, conforme el lado derecho sale del campo, la fuerza aplicada debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza magnética que actúa sobre el lado izquierdo de la espira, la cual aún está en el campo.

A partir de esta explicación, se concluye que la potencia se suministra sólo cuando la espira está entrando o saliendo del campo. Además, ¡este ejemplo demuestra que la fem de movimiento inducida en la espira puede ser cero aun cuando haya movimiento a través del campo! Una fem de movimiento sólo se induce cuando el flujo magnético a través de la espira *cambia en el tiempo*.

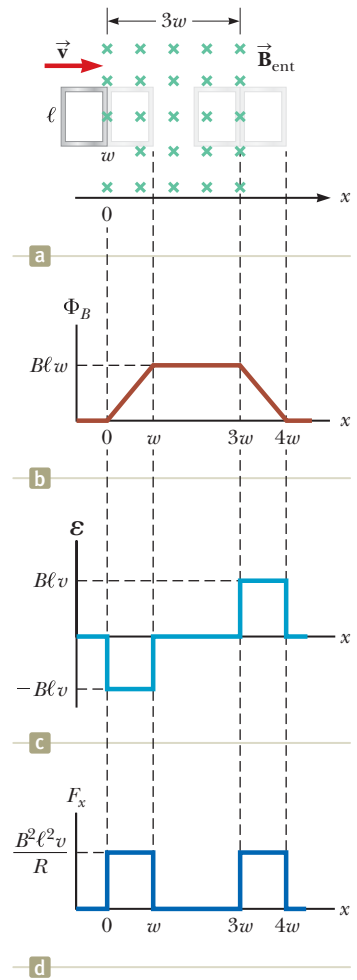


Figura 30.14 (Ejemplo conceptual 30.5) (a) Una espira conductora rectangular de ancho  $w$  y longitud  $\ell$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  a través de un campo magnético uniforme que se extiende una distancia  $3w$ . (b) Flujo magnético a través del área encerrada por la espira como función de la posición de la espira. (c) Fem inducida como función de la posición de la espira. (d) Fuerza aplicada requerida para velocidad constante como función de la posición de la espira.

### 30.4 Forma general de la ley de Faraday

Si  $\vec{B}$  cambia con el transcurso del tiempo, se induce un campo eléctrico en una dirección que es tangente a la circunferencia de la espira.

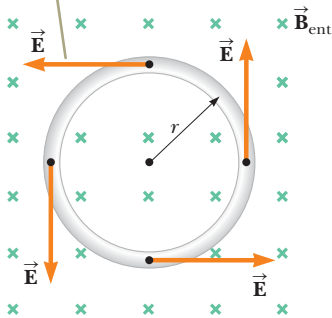


Figura 30.15 Espira conductora de radio  $r$  en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira.

Observe una vez más una espira conductora en un campo magnético, como en la figura 30.15. Imagine que el campo magnético cambia en el tiempo. En concordancia con la ecuación 29.18, el campo cambiante da como resultado un flujo magnético variable a través de la espira, también, de acuerdo con la ecuación 30.1, el flujo cambiante causa una fem en la espira. Además, de acuerdo con la ecuación 26.7, la fem causa una corriente en la espira y según la ecuación 26.6, la corriente es impulsada por un campo eléctrico en la espira. El campo eléctrico que está impulsando la corriente en la espira se muestra en varios puntos en la figura 30.15.

Ha encontrado, entonces, que un campo magnético variable ha generado un campo eléctrico. Se hizo alusión a este fenómeno al comienzo de la sección 30.1, y ahora está preparado para analizar más detalles. Aquí está la pregunta que conducirá a una característica notable de este análisis: *¿qué pasaría si elimina la espira conductora?* Esto, por supuesto, eliminaría las cargas que se mueven por la espira, pero encuentra lo siguiente: ¡el campo eléctrico sigue allí! Las cargas en movimiento en la espira simplemente demostraron que el campo eléctrico estaba allí, pero la espira no es necesaria para la existencia del campo eléctrico. Su existencia se debe únicamente a los cambios en el campo magnético.

Se intentará cuantificar este nuevo tipo de campo eléctrico. En la ecuación 24.3, se encontró que una diferencia de potencial entre dos puntos en el espacio era igual a la integral de línea del producto punto del campo eléctrico y un desplazamiento infinitesimal.

mal a lo largo de una trayectoria entre los puntos. Aplique esto a un recorrido alrededor de nuestra espira conductora en la figura 30.15, donde la diferencia de potencial alrededor de la espira estará representada por la fem inducida en ella por el campo magnético cambiante. Usando la integral para la fem en la ecuación 30.1, tiene que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (30.8)$$

◀ Forma general de ley de Faraday

La ecuación 30.8 es la forma general de la ley de Faraday. Esta representa todas las situaciones en las que un campo magnético variable genera un campo eléctrico. En el capítulo 33, estudiará una generalización de la ley de Ampère (ecuación 29.13) que representa campos magnéticos generados por campos eléctricos variables. En ese capítulo, se reunirán todas estas y otras ecuaciones importantes en un conjunto llamado *ecuaciones de Maxwell*, que formarán la base de todos los fenómenos electromagnéticos.

Utilice la ecuación 30.8 para encontrar el campo eléctrico generado por el campo magnético cambiante en la figura 30.15. El campo eléctrico en cualquier parte de la espira es paralelo a los vectores de desplazamiento, por lo que el producto escalar se convierte simplemente en  $E ds$ . Debido a que el campo magnético es uniforme, la simetría del ciclo nos dice que  $E$  es el mismo en todas partes de la espira. Por tanto, la ecuación 30.8 se convierte

$$E \oint ds = -\frac{d}{dt}(BA) \rightarrow E(2\pi r) = -\frac{dB}{dt}(\pi r^2) \rightarrow E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (30.9)$$

Si se especifica la variación de tiempo del campo magnético, el campo eléctrico inducido se puede calcular a partir de la ecuación 30.9.

La ecuación 24.3 evalúa la diferencia de potencial entre dos puntos en el espacio como una integral entre esos dos puntos del campo eléctrico creados por algunas cargas de fuente. Suponga que se integra alrededor de una trayectoria circular en el espacio en una región que contiene un campo eléctrico de este tipo, volviendo al mismo punto. Si los dos puntos en la ecuación 24.3 son los mismos, la integral se reduce a cero, lo que tiene sentido: la diferencia de potencial entre dos puntos en el espacio que son iguales debe ser cero.

Pero la integral en la ecuación 30.8 es la misma integral y analizó hacer un recorrido alrededor de la espira circular en la figura 30.15. El valor de la integral no es cero en este caso. ¿Qué está pasando? Esto es evidencia de que el campo eléctrico que está analizando aquí es de naturaleza diferente del formado por las cargas estacionarias en el capítulo 23. Se describió un campo eléctrico inducido como no conservativo, porque la integral alrededor de una trayectoria cerrada no es cero. A pesar de esta diferencia en la naturaleza, el campo eléctrico inducido tiene muchas de las mismas propiedades que los campos eléctricos debido a las cargas de la fuente. Por ejemplo, un campo eléctrico inducido puede aplicar fuerzas sobre partículas cargadas de acuerdo con la ecuación 22.8.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 30.1

**Campos eléctricos inducidos** No necesariamente existe un campo magnético variable en la ubicación del campo eléctrico inducido. En la figura 30.15, incluso una espira externa a la región del campo magnético experimentará un campo eléctrico inducido.

### Ejemplo 30.6 Campo eléctrico inducido por un campo magnético variable en un solenoide

Un largo solenoide de radio  $R$  tiene  $n$  vueltas de alambre por cada unidad de longitud y porta una corriente variable en el tiempo que varía sinusoidalmente como  $I = I_{\text{máx}} \cos \omega t$ , donde  $I_{\text{máx}}$  es la máxima corriente y  $\omega$  es la frecuencia angular de la fuente de corriente alterna (figura 30.16).

**(A)** Determine la magnitud del campo eléctrico inducido en el exterior del solenoide a una distancia  $r > R$  a lo largo de su eje central.

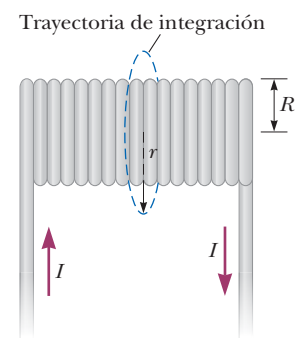
#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 30.16 muestra la situación física. Conforme cambia la corriente en las bobinas, imagine un campo magnético variable en todos los puntos del espacio, así como un campo eléctrico inducido.

**Categorizar** En este análisis de problema, ya que la corriente varía en el tiempo, el campo magnético cambia, lo que conduce a un campo eléctrico inducido que se opone a los campos eléctricos electrostáticos debidos a cargas eléctricas estacionarias.

**Analizar** Primero considere un punto externo y tome la trayectoria para la integral de línea como un círculo de radio  $r$  con centro en el solenoide, como se ilustra en la figura 30.16.

continúa



**Figura 30.16** (Ejemplo 30.6) Un largo solenoide que porta una corriente variable en el tiempo conocida por  $I = I_{\text{máx}} \cos \omega t$ . Un campo eléctrico se induce tanto adentro como afuera del solenoide.

## 30.6 continuación

Evalúe el lado derecho de la ecuación 30.8 y observe que el campo magnético  $\vec{B}$  dentro del solenoide es perpendicular al círculo acotado por la trayectoria de integración:

$$(1) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

Evalúe el campo magnético en el solenoide a partir de la ecuación 29.17:

$$(2) \quad B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_{\text{máx}} \cos \omega t$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$(3) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi R^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = \pi R^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \omega \sin \omega t$$

Evalúe el lado izquierdo de la ecuación 31.9 y observe que la magnitud de  $\vec{E}$  es constante sobre la trayectoria de integración y  $\vec{E}$  es tangente a ella:

$$(4) \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(2\pi r)$$

Sustituya las ecuaciones (3) y (4) en la ecuación 30.8:

$$E(2\pi r) = \pi R^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \omega \sin \omega t$$

Resuelva para la magnitud del campo eléctrico

$$E = \frac{\mu_0 n I_{\text{máx}} \omega R^2}{2r} \sin \omega t \quad (\text{para } r > R)$$

**Finalizar** Este resultado muestra que la amplitud del campo eléctrico afuera del solenoide cae como  $1/r$  y varía sinusoidalmente con el tiempo; es proporcional a la corriente  $I$ , así como a la frecuencia  $\omega$ , lo que es consistente con el hecho de que un mayor valor de  $\omega$  significa un mayor cambio en el flujo magnético por unidad de tiempo. Como se verá en el capítulo 33, el campo eléctrico variable en el tiempo produce una aportación adicional al campo magnético. El campo magnético puede ser un poco más intenso de lo que se estableció al principio, tanto dentro como fuera del solenoide. La corrección al campo magnético es pequeña si la frecuencia angular  $\omega$  es pequeña. No obstante, a altas frecuencias, puede dominar un nuevo fenómeno: los campos eléctrico y magnético, cada uno reconstruyendo al otro, constituyen una onda electromagnética radiada por el solenoide, como se estudiará en el capítulo 33.

**(B)** ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide, a una distancia  $r$  desde su eje?

## SOLUCIÓN

**Analizar** Para un punto interior ( $r < R$ ), el flujo magnético a través de una espira de integración se conoce por  $\Phi_B = B\pi r^2$ .

Evalúe el lado derecho de la ecuación 30.8:

$$(5) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (5):

$$(6) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi r^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = \pi r^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \omega \sin \omega t$$

Sustituya las ecuaciones (4) y (6) en la ecuación 30.8:

$$E(2\pi r) = \pi r^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \omega \sin \omega t$$

Resuelva para la magnitud del campo eléctrico:

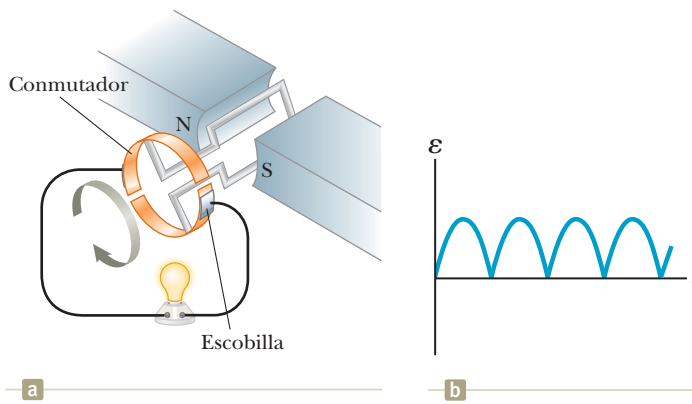
$$E = \frac{\mu_0 n I_{\text{máx}} \omega}{2} r \sin \omega t \quad (\text{for } r < R)$$

**Finalizar** Este resultado muestra que la amplitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide por el flujo magnético variable a través del solenoide aumenta linealmente con  $r$  y varía sinusoidalmente con el tiempo. Al igual que con el campo fuera del solenoide, el campo en el interior es proporcional a la corriente  $I$  y la frecuencia  $\omega$ .

## 30.5 Generadores y motores

Puede tener una linterna de emergencia o una radio que funcione girando una manivela con la mano. Dentro de este dispositivo hay un *generador* que convierte la energía de su mano en energía potencial eléctrica. Veamos primero el **generador de corriente continua (CC)**, que se ilustra en la figura 30.17a. En su forma más simple, consiste en una espira de alambre girado por algún medio externo en un campo magnético. A medida que la espira gira, el flujo magnético a través del área encerrada por la espira





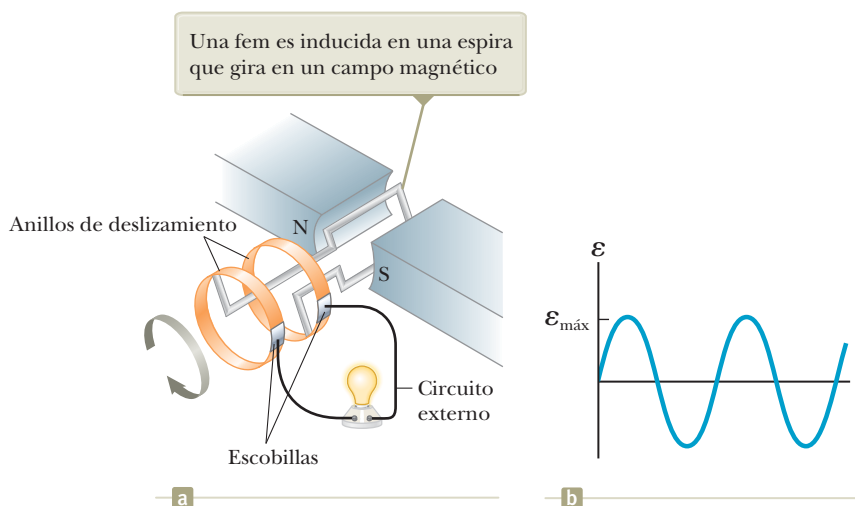
**Figura 30.17** a) Diagrama esquemático de un generador de CC. b) La magnitud de la fem varía con el transcurso del tiempo, pero sin que nunca cambie la polaridad.

cambia con el tiempo y este cambio induce una fem y una corriente en la espira de acuerdo con la ley de Faraday. Los extremos de la espira están conectados a un dispositivo de anillo dividido, llamado *conmutador*, que gira con la espira. Las conexiones desde el conmutador, que actúan como terminales de salida del generador, al circuito externo se realizan mediante escobillas metálicas inmóviles en contacto con el conmutador.

En esta configuración, el voltaje de salida siempre tiene la misma polaridad y pulsa con el tiempo, como se muestra en la figura 30.17b. Podemos entender por qué al notar que los contactos del anillo partido invierten sus roles cada medio ciclo. Al mismo tiempo, la polaridad de la fem inducida se invierte; por tanto, la polaridad del anillo dividido (que es la misma que la polaridad del voltaje de salida) sigue siendo la misma. Una corriente continua pulsante no es adecuada para la mayoría de las aplicaciones. Para obtener una corriente CC más estable, los generadores comerciales de CC usan muchas bobinas y conmutadores distribuidos de manera que los pulsos sinusoidales de las diversas bobinas están desfasados. Cuando estos pulsos se superponen, la salida de CC está casi libre de fluctuaciones.

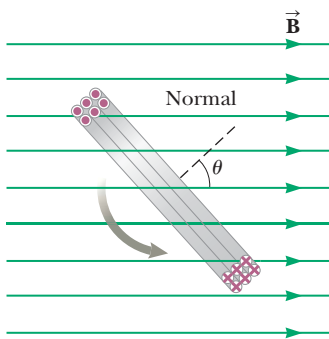
Considere ahora el **generador de corriente alterna (CA)**. Al igual que con el generador de CC, consiste en una espira de alambre girada por algún medio externo en un campo magnético (figura 30.18a). Los extremos de la espira se conectan a dos *anillos de deslizamiento* que giran con ella. Las conexiones de estos anillos, que actúan como terminales de salida del generador al circuito externo, se realizan mediante escobillas metálicas inmóviles que están en contacto con ellos.

En las plantas eléctricas comerciales, la energía requerida para hacer girar la espira se puede obtener de una diversidad de fuentes. Por ejemplo, en una planta hidroeléctrica, el movimiento rotatorio se produce por una caída de agua dirigida hacia las aspas de una turbina; para los molinos de viento en la semblanza de aper-



**Figura 30.18** (a) Diagrama esquemático de un generador de CA. (b) Fem alternante inducida en la espira graficada en función del tiempo.





**Figura 30.19** Vista del corte transversal de una espira que encierra un área  $A$  y que tiene  $N$  vueltas, girando con una velocidad angular constante  $\omega$  en un campo magnético. La fem inducida en la espira varía sinusoidalmente con el tiempo.

tura, la rotación de las aspas por el viento provoca la rotación de una espira en un generador, que es lo que está en la caja detrás de las aspas de la turbina.

Suponga que, en lugar de una sola vuelta, la espira tiene  $N$  vueltas (una situación más práctica), todas con la misma área  $A$ , y giran en un campo magnético con una velocidad angular constante  $\omega$ . Si  $\theta$  es el ángulo formado entre el campo magnético y la normal al plano de la espira, como ocurre en la figura 30.19, el flujo magnético a través de la espira para cualquier instante es igual a

$$\Phi_B = BA \cos \theta = BA \cos \omega t$$

donde se utiliza la relación  $\theta = \omega t$  existente entre la posición angular y la rapidez angular (véase la ecuación 10.3). (El reloj se ajusta de manera que  $t = 0$  cuando  $\theta = 0$ .) Por eso, la fem inducida en la bobina es

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -NBA \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = NBA\omega \sin \omega t \quad (30.10)$$

Este resultado indica que la fem varía de manera sinusoidal en función del tiempo, tal y como está graficado en la figura 30.18b. Por la ecuación 30.10, la fem máxima tiene como valor

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = NBA\omega \quad (30.11)$$

que se presenta cuando  $\omega t = 90^\circ$ , o bien, igual a  $270^\circ$ . En otras palabras,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}}$  cuando el campo magnético está en el plano de la bobina y la rapidez de cambio en el tiempo del flujo es máxima. Además, la fem es igual a cero cuando  $\omega t = 0$ , o bien igual a  $180^\circ$ , esto es, cuando  $\vec{B}$  es perpendicular al plano de la bobina y la rapidez de cambio con el tiempo del flujo es cero.

La frecuencia de los generadores comerciales existentes en Estados Unidos y Canadá es de 60 Hz, en tanto que en algunas naciones europeas la frecuencia es de 50 Hz. (Recuerde que  $\omega = 2\pi f$ , donde  $f$  es la frecuencia en hertz.)

- EJEMPLO RÁPIDO 30.4** En un generador de CA, una bobina de  $N$  vueltas de alambre gira en un campo magnético. Entre las opciones que siguen, ¿cuál es la que *no* causa un incremento en la fem producida en la bobina? (a) Reemplazando el alambre de la bobina por uno de menor resistencia, (b) haciendo que la bobina gire con mayor rapidez, (c) incrementando el campo magnético, o (d) incrementando el número de vueltas de alambre en la bobina.

### Ejemplo 30.7 Fem inducida en un generador

La bobina en un generador CA consiste en ocho vueltas de alambre, cada una de área  $A = 0.090 \text{ m}^2$ , y la resistencia total del alambre es de  $12.0 \Omega$ . La bobina da vueltas en un campo magnético de  $0.500 \text{ T}$  con una frecuencia constante de  $60.0 \text{ Hz}$ .

**(A)** Encuentre la máxima fem inducida en la bobina.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Estudie la figura 30.18 para asegurarse de que comprende la operación de un generador CA.

**Categorizar** Se evalúan los parámetros usando ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 30.11 para encontrar la máxima fem inducida:

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = NBA\omega = NBA(2\pi f)$$

Sustituya valores numéricos:

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = 8(0.500 \text{ T})(0.090 \text{ m}^2)(2\pi)(60.0 \text{ Hz}) = 136 \text{ V}$$

**(B)** ¿Cuál es la máxima corriente inducida en la bobina cuando las terminales de salida se conectan a un conductor de baja resistencia?

#### SOLUCIÓN

Use la ecuación 26.7 y el resultado de la parte (A):

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{R} = \frac{136 \text{ V}}{12.0 \Omega} = 11.3 \text{ A}$$

Los **motores** son dispositivos en los que se transfiere energía mediante transmisión eléctrica y de los cuales se transfiere energía hacia afuera en forma de trabajo. En esencia, un motor es un generador que funciona a la inversa. En vez de generar una corriente mediante el giro de una espira, una batería suministra corriente a la bobina, y el momento de torsión que actúa en la bobina conductora de corriente hace que ésta gire (sección 28.5).

Se puede realizar trabajo mecánico útil si se une la espira rotatoria de un motor con algún dispositivo externo. Sin embargo, cuando la bobina gira en un campo magnético, el flujo magnético variable induce una fem en la bobina; consistente con la ley de Lenz, la fem inducida siempre actuará para reducir la corriente en la bobina. El término *fuerza contraelectromotriz* se utiliza para indicar que una fem tiene tendencia a reducir la corriente suministrada. Ya que el voltaje disponible para el suministro de la corriente es igual a la diferencia entre el voltaje de alimentación y la fuerza contraelectromotriz, la corriente que pasa por la bobina rotatoria queda limitada por esta última.

Cuando se activa un motor, inicialmente no existe fuerza contraelectromotriz y la corriente resulta muy grande porque está limitada únicamente por la resistencia de la bobina. Conforme la bobina empieza a girar, la fuerza contraelectromotriz inducida se opone al voltaje aplicado, reduciendo así la corriente en la bobina. Si se le permite al motor funcionar sin carga mecánica, la fuerza contraelectromotriz reduce la corriente a un valor sólo lo suficientemente grande para cubrir las pérdidas de energía debidas a la energía interna y a la fricción. Si una carga pesada detiene el motor de forma que ya no pueda girar, la falta de una fuerza contraelectromotriz puede llevar a un nivel peligrosamente alto de corriente en el alambre del motor. Esta situación es peligrosa, y se explora en la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 30.8.

### Ejemplo 30.8 Corriente inducida en un motor

Un motor contiene una bobina con una resistencia total de  $10\ \Omega$  producida por un voltaje de  $120\ \text{V}$ . Cuando el motor funciona a su máxima rapidez, la fuerza contraelectromotriz es de  $70\ \text{V}$ .

**(A)** Encuentre la corriente en la bobina en el instante en que el motor se enciende.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Piense en el motor justo después de que se enciende. Todavía no se mueve, de modo que no hay fuerza contraelectromotriz generada. Como resultado, la corriente en el motor es alta. Después de que el motor comienza a girar, se genera una fuerza contraelectromotriz y la corriente disminuye.

**Categorizar** Necesita combinar la nueva comprensión de los motores con la relación entre corriente, voltaje y resistencia en este problema de sustitución.

Evalúe la corriente en la bobina a partir de la ecuación 26.7 sin fuerza contraelectromotriz generada:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{120\ \text{V}}{10\ \Omega} = 12\ \text{A}$$

**(B)** Encuentre la corriente en la bobina cuando el motor alcanza máxima rapidez.

#### SOLUCIÓN

Evalúe la corriente en la bobina con la máxima fuerza contraelectromotriz generada:

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{fuerza}}}{R} = \frac{120\ \text{V} - 70\ \text{V}}{10\ \Omega} = \frac{50\ \text{V}}{10\ \Omega} = 5.0\ \text{A}$$

La corriente extraída por el motor cuando funciona a su máxima rapidez es significativamente menor que la extraída antes de que comience a girar.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que este motor está en una sierra circular. Cuando funciona la sierra, el aspa se atasca en un trozo de madera y el motor no puede girar. ¿En qué porcentaje aumenta la potencia de entrada del motor cuando está atascado?

**Respuesta** Es posible que haya tenido experiencias cotidianas con motores que se calientan cuando algo evita que giren. Esto se debe al aumento de potencia de entrada al motor. La mayor rapidez de transferencia de energía resulta en un aumento en la energía interna de la bobina, un efecto indeseable.

continúa

## 30.8 continuación

Establezca la rapidez de la potencia de entrada al motor cuando se atasca, empleando la corriente calculada en la parte (A), a la que se presenta cuando no está atascado, parte (B):

Al sustituir valores numéricos se obtiene

¡Que representa un aumento de 476% en la potencia de entrada! Tan alta potencia de entrada hace que la bobina se caliente y se dañe.

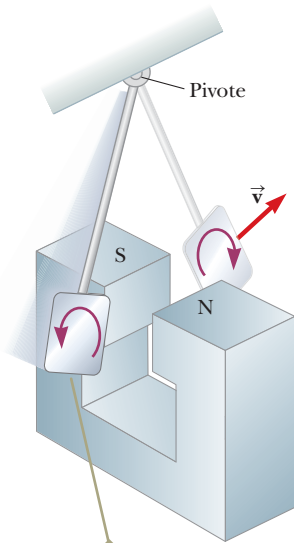
$$\frac{P_{\text{atascado}}}{P_{\text{no atascado}}} = \frac{I_A^2 R}{I_B^2 R} = \frac{I_A^2}{I_B^2}$$

$$\frac{P_{\text{atascado}}}{P_{\text{no atascado}}} = \frac{(12 \text{ A})^2}{(5.0 \text{ A})^2} = 5.76$$

## 30.6 Corrientes de eddy

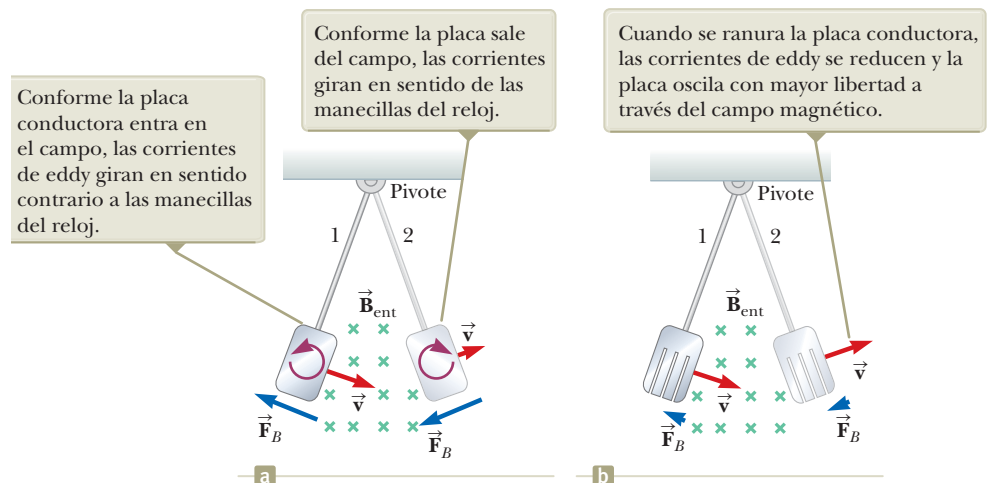
Como ha visto, en un circuito se induce una fem y una corriente debido a la presencia de un flujo magnético variable. Imagine ahora una placa de metal, como la que cuelga de una varilla en la figura 30.20. Se puede considerar que una placa de metal es una combinación de muchas espiras circulares concéntricas conductoras de varios radios. Por tanto, se inducen corrientes circulares, conocidas como **corrientes de eddy** en piezas voluminosas de metal que se mueven a través de un campo magnético. Este fenómeno se demuestra si se deja una placa plana de cobre o de aluminio unida al extremo de una barra rígida en oscilación a través de un campo magnético (figura 30.20). Conforme la placa entra en el campo, el flujo magnético variable induce una fem en ella, la cual, a su vez, hace que los electrones libres presentes en la placa se muevan, produciendo corrientes de eddy en remolino. De acuerdo con la ley de Lenz, la dirección de las corrientes de eddy es tal que genera campos magnéticos que se oponen al cambio que causan dichas corrientes. Por esta causa, las corrientes de eddy deben producir polos magnéticos efectivos sobre la placa, que son repelidos por los polos del imán; esto da lugar a una fuerza de repulsión que se opone al movimiento de la placa. (Si lo contrario fuera verdadero, la placa se aceleraría y su energía se incrementaría después de cada oscilación, lo que violaría la ley de conservación de energía.)

Como se indica en la figura 30.21a, con  $\vec{B}$  dirigido hacia el interior de la página, la corriente de eddy inducida va en dirección opuesta a las manecillas del reloj conforme la placa oscilante entra en el campo en la posición 1, debido a que se está incrementando el flujo causado por el campo magnético externo hacia el interior de la página a través de la placa. Por esto, según la ley de Lenz, la corriente inducida debe proveer su propio campo magnético hacia el exterior de la página. Lo opuesto ocurre conforme la placa sale del campo en la posición 2, donde la corriente está en el sentido de las manecillas del reloj. Ya que las corrientes de eddy inducidas siempre producen una fuerza magnética de retardo  $\vec{F}_B$  cuando la placa entra o sale del campo, la placa oscilante finalmente regresa a una posición de reposo. Si, como se muestra en la figura 30.21b, se abren ranuras en la placa, se reducen de manera importante las corrientes de eddy y la fuerza de



Como la placa entra o sale del campo, el flujo magnético variable induce una fem, que es la que genera corrientes de eddy en la placa.

**Figura 30.20** Formación de corrientes de eddy en una placa conductora que se mueve a través de un campo magnético.



**Figura 30.21** Cuando una placa conductora oscila a través de un campo magnético, se inducen corrientes de eddy y la fuerza magnética  $\vec{F}_B$  sobre la placa se opone a su velocidad, haciendo que finalmente llegue al reposo.

retardo correspondiente. Comprenderá lo anterior al darse cuenta de que los cortes en la placa impiden la formación de largas espiras de corriente.

Los sistemas de frenado en muchos trenes subterráneos y trolebuses aprovechan la inducción electromagnética y las corrientes de eddy. Un electroimán unido al tren está colocado cerca de los rieles de acero. (En esencia, un electroimán es un solenoide con núcleo de hierro.) El efecto de freno se presenta cuando se hace pasar una corriente muy grande por el electroimán. El movimiento relativo existente entre el imán y los rieles induce en éstos corrientes de eddy y la dirección de estas corrientes produce una fuerza de arrastre sobre el tren en movimiento. Ya que estas corrientes disminuyen uniformemente en magnitud al disminuir la velocidad del tren, el efecto de frenado es muy suave. Como medida de seguridad, algunas herramientas eléctricas las utilizan para detener rápidamente las aspas en rotación una vez apagado el dispositivo.

Con frecuencia, las corrientes de Eddy son indeseables, ya que representan una transformación de energía mecánica en energía interna en la resistencia del metal. A fin de reducir esta pérdida de energía, a menudo las piezas conductoras se fabrican laminadas, es decir, con capas delgadas de material separadas por otro material no conductor, como por ejemplo las lacas o algún óxido metálico. Esta estructura en capas evita espiras de corriente grandes y limita de manera efectiva las corrientes a espiras pequeñas en cada capa individual. Estas estructuras laminadas se usan en los núcleos de los transformadores (véase la sección 32.8) y en los motores para minimizar las corrientes de eddy y, por consiguiente, incrementar la eficiencia de dichos dispositivos.

## Resumen

### ► Conceptos y principios

La **Ley de inducción de Faraday** afirma que la fem inducida en una espiral es directamente proporcional a la razón de cambio en el tiempo del flujo magnético a través de la espira, o bien

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (30.1)$$

donde  $\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$  es el flujo magnético a través de la espira.

Cuando una barra conductora de longitud  $\ell$  se mueve con una velocidad  $\vec{\mathbf{v}}$  a través de un campo magnético  $\vec{\mathbf{B}}$ , donde  $\vec{\mathbf{B}}$  es perpendicular a la barra y a  $\vec{\mathbf{v}}$ , la **fem de movimiento** inducida en la barra es

$$\mathcal{E} = -B\ell v \quad (30.5)$$

La **ley de Lenz** afirma que la corriente inducida y la fem inducida en un conductor están en una dirección tal que establecen un campo magnético que se opone al cambio que los produce.

Una forma general de la **ley de inducción de Faraday** es

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (30.8)$$

donde  $\vec{\mathbf{E}}$  es el campo eléctrico no conservativo que se produce mediante el flujo magnético variable.

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN from Cengage

1. **ACTIVIDAD** En esta actividad, su grupo construirá un motor homopolar simple. Necesitará los siguientes componentes:

- Batería AA
- Tornillo de madera
- Imán de disco
- Cable aislado, de unos 10 cm de largo, con los extremos pelados

Coloque el imán de disco en la cabeza del tornillo, donde debe ser atraído y permanecer adherido. Cuelgue la punta del tornillo de la parte inferior plana de la batería, donde se atraerá magnéticamente y se colgará. La figura TP30.1 (página 816) muestra la estructura del motor. Coloque un extremo del cable en el botón en la parte superior de la batería y sosténgalo con un dedo o cinta adhesiva. Toque el otro extremo del cable hasta el borde del disco magnético y observe cómo gira el tornillo. La punta del tornillo puede deambular mientras gira. Si llega al borde de la parte plana de la parte inferior de la batería, puede encontrar un lugar donde la fricción en la punta impide su rotación. Registre el



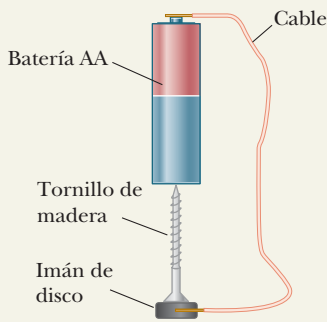


Figura TP30.1

sentido de rotación del tornillo e informe lo que sucede si (a) el imán de disco se gira para invertir sus polos, y (b) la batería se gira para que el tornillo se cuelgue del botón.

2. Su grupo tiene una idea para el diseño de un nuevo aparato de ejercicio que hará uso de la fem inducida. Usted planea construir una jaula cilíndrica, con un eje horizontal, utilizando 32 varillas metálicas de 0.800 m de longitud, montadas entre dos extremos metálicos circulares de radio  $r = 25.0$  cm como se muestra en el inciso (a) de la figura TP30.2. Entre las terminales conectará un resistor. Esta jaula se montará en un pivote para que pueda girar alrededor de los centros de los extremos metálicos. Además, un electroimán está montado con un polo dentro de la jaula y el otro por fuera, como se muestra en el inciso (b) de la figura TP30.2. La figura muestra una vista final de los polos del imán, que se extienden en la página una distancia  $\ell$ , de modo que los polos magnéticos son tan largos como las varillas de metal. El imán produce un campo magnético de magnitud  $B = 0.250$  T entre sus polos. En uso, el operador está de cara a

la jaula y tira continuamente hacia abajo de las varillas de metal a la izquierda de la jaula, como se muestra en la figura TP30.2b. Esto provoca la rotación de la jaula, haciendo que las varillas de metal pasen entre los polos del imán. La fem generada en las varillas de metal crea una corriente y la fuerza magnética en esta corriente proporciona una fuerza resistiva a la rotación de la jaula. (a) Discuta en su grupo lo siguiente y realice el cálculo solicitado: Su objetivo de diseño es que el operador debe trabajar a razón de 100 watts cuando la jaula está girando a una velocidad angular constante de 5.00 rad/s. Antes de construir el aparato, vea si su objetivo de diseño es factible calculando la resistencia requerida entre los extremos. (b) Analice en su grupo las siguientes preguntas: ¿Qué tan seguro es este dispositivo? ¿Puede ver un defecto de seguridad?

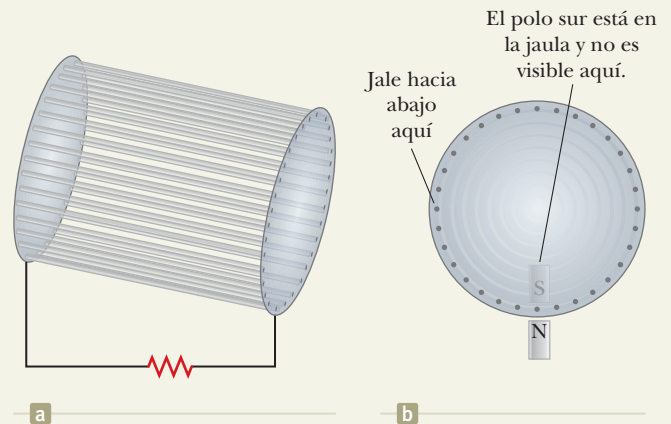


Figura TP30.2

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN From Cengage

### SECCIÓN 30.1 Ley de Faraday de inducción

1. La espira circular de alambre en la figura P30.1 tiene un radio de 12.0 cm y se encuentra en un campo magnético y perpendicular al plano de la espira como se muestra en la figura P30.1 si el campo disminuye a razón de 0.50T en algún intervalo de tiempo, encontrar la magnitud de la fem inducida en la espira durante este intervalo de tiempo.
2. Un instrumento basado en fem inducida ha sido utilizado para medir la velocidad de hasta 6 km/s de un proyectil. En el proyectil está incorporado un pequeño imán, como se muestra en la figura P30.2. El proyectil pasa a través de dos bobinas separadas por una distancia  $d$ . A medida que el proyectil pasa a través de cada bobina, un pulso de fuerza electromotriz se induce en la bobina. El intervalo de tiempo entre los pulsos se puede medir con precisión con un osciloscopio y por tanto se puede determinar la velocidad. (a)

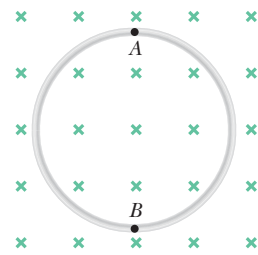


Figura P30.1

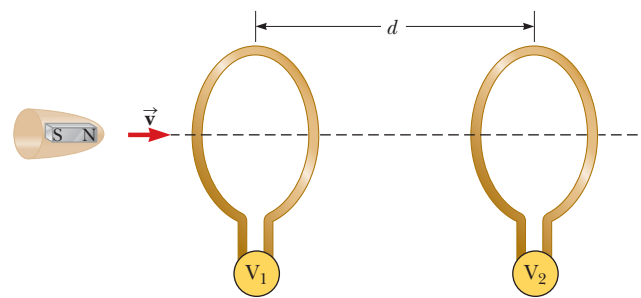


Figura P30.2

- Dibuje una gráfica de  $\Delta V$  en función de  $t$  para la disposición mostrada. Considere la posibilidad de una corriente que fluye en sentido antihorario si el punto de partida del proyectil se ve como positivo. En su gráfica, indique cuál es el pulso de la bobina 1 y cuáles el de la bobina 2. (b) Si la separación del pulso es de 2.40 ms y  $d = 1.50$  m, ¿cuál es la velocidad del proyectil?
3. Actualmente, se desarrolla trabajo científico para determinar si los débiles campos magnéticos oscilantes pueden afectar la salud humana. Por ejemplo, un estudio encontró que los conductores de trenes tenían una mayor incidencia

BIO



de cáncer en la sangre que otros trabajadores de los ferrocarriles, posiblemente debido a la exposición prolongada a los dispositivos mecánicos en la cabina de la máquina del tren. Considere la posibilidad de un campo magnético de magnitud  $1.00 \times 10^{-3} \text{ T}$ , oscilando sinusoidalmente en  $60.0 \text{ Hz}$ . Si el diámetro de un glóbulo rojo es de  $8.00 \mu\text{m}$ , determine la fem máxima que puede ser generada alrededor del perímetro de una célula en este campo.

4. Un solenoide largo tiene  $n = 400$  vueltas por cada metro y lleva una corriente dada por  $I = 30.0 (1 - e^{-1.60t})$ . En el interior del solenoide, colocada en forma coaxial con el mismo se encuentra una bobina que tiene un radio de  $R = 6.00 \text{ cm}$  y está formada por  $N = 250$  vueltas de alambre delgado (figura P30.4). ¿Cuál es la fem inducida en la bobina por la corriente variable?

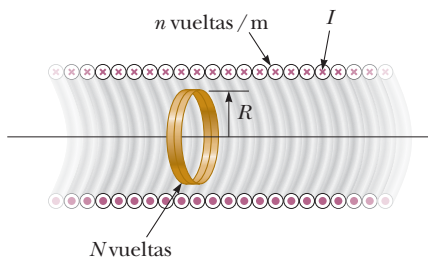


Figura P30.4

5. Un anillo de aluminio de radio  $r_1 = 5.00 \text{ cm}$  y  $3.00 \times 10^{-4} \Omega$  de resistencia se coloca en el extremo de un solenoide largo de núcleo de aire, con 1 000 vueltas por cada metro y radio  $r_2 = 3.00 \text{ cm}$  como se muestra en la figura P30.5. Suponga que el componente axial del campo producido por dicho solenoide es sólo la mitad de intenso en toda el área del extremo del solenoide que el correspondiente en el centro del mismo. Además suponga que el solenoide produce un campo despreciable fuera de su área de sección transversal. La corriente en el solenoide se incrementa con una tasa de  $270 \text{ A/s}$ . (a) ¿Cuál es la corriente inducida en el anillo? En el centro de éste, ¿cuáles son (b) la magnitud y (c) la dirección del campo magnético producido por la corriente inducida en el anillo?

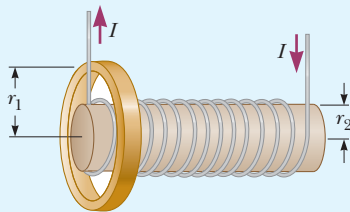


Figura P30.5 Problemas 5 y 6.

6. Un anillo de aluminio de radio  $r_1$  y de resistencia  $R$  se coloca alrededor del extremo de un solenoide largo con núcleo de aire con  $n$  vueltas por cada metro y con un radio menor  $r_2$ , como el que se muestra en la figura P30.5. Suponga que el componente axial del campo producido por el solenoide en el área correspondiente al extremo de éste es la mitad de intenso que en el centro del mismo. También suponga que el solenoide produce un campo despreciable por fuera de su área de sección transversal. La corriente en el solenoide se incrementa a razón de  $\Delta I/\Delta t$ . (a) ¿Cuál es la corriente inducida en el anillo? (b) En el centro del anillo, ¿cuál es el campo magnético producido por la corriente inducida en él? (c) ¿Cuál es la dirección de este campo?

7. Una bobina formada por 50 vueltas de alambre en forma de cuadrado, se coloca en un campo magnético de forma que la normal al plano de la bobina forme un ángulo de  $30.0^\circ$  con la dirección del campo. Cuando el campo magnético aumenta de manera uniforme de  $200 \mu\text{T}$  a  $600 \mu\text{T}$  en  $0.400 \text{ s}$ , se induce en la bobina una fem de  $80.0 \text{ mV}$ . ¿Cuál es la longitud total del alambre en la bobina?

8. Cuando un alambre conduce una corriente CA de frecuencia conocida, es posible utilizar una bobina Rogowski para determinar la amplitud  $I_{\text{máx}}$  de la corriente sin desconectar el alambre para desviar la corriente por un medidor. La bobina Rogowski que se muestra en la figura P30.8, simplemente se sujeta alrededor del alambre. Está constituida de un conductor toroidal enroscado alrededor de una cuerda circular de regreso. El toroide tiene  $n$  vueltas por cada unidad de longitud a lo largo de ella y un área de sección transversal  $A$ . La corriente que se va a medir está dada por  $I(t) = I_{\text{máx}} \sin \omega t$ . (a) Demuestre que la amplitud de la fem inducida en la bobina Rogowski es  $\mathcal{E}_{\text{máx}} = \mu_0 n A \omega I_{\text{máx}}$ . (b) Explique la causa por la cual el alambre que conduce la corriente desconocida no necesita estar en el centro de la bobina Rogowski, así como por qué la bobina no responderá a corrientes cercanas que no estén dentro de ella.

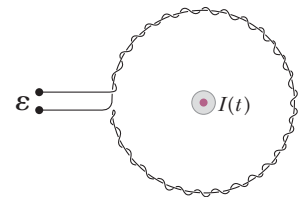


Figura P30.8

9. Un toroide de sección transversal rectangular ( $a = 2.00 \text{ cm}$  por  $b = 3.00 \text{ cm}$ ) y de radio interno  $R = 4.00 \text{ cm}$  está formado por 500 vueltas de alambre que conducen una corriente sinusoidal  $I = I_{\text{máx}} \sin \omega t$ , con  $I_{\text{máx}} = 50.0 \text{ A}$  y una frecuencia  $f = \omega/2\pi = 60.0 \text{ Hz}$ . Una bobina con  $N' = 20$  vueltas de alambre está acoplada con el toroide, como se observa en la figura P30.9. Determine la fem inducida en la bobina en función del tiempo.

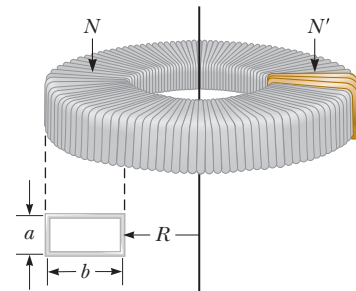


Figura P30.9

SECCIÓN 30.2 Fem de movimiento

El problema 47 del capítulo 28 puede ser asignado a esta sección.

10. Un avión pequeño, con una extensión de las alas de  $14.0 \text{ m}$ , vuela hacia el norte con una rapidez de  $70.0 \text{ m/s}$  sobre una región donde la componente vertical del campo magnético de la Tierra es  $1.20 \mu\text{T}$  hacia abajo. (a) ¿Qué diferencia de potencial se desarrolla entre las puntas de las alas? (b) ¿Cuál punta de ala está a mayor potencial? (c) ¿Qué pasaría si? ¿Cómo cambiaría la respuesta a los incisos (a) y (b) si el avión vira para volar hacia el este? (d) ¿Se puede usar esta fem para activar una luz en el compartimiento de pasajeros? Explique su respuesta.

11. Un helicóptero (figura P30.11) tiene aspas de 3.00 m de longitud que se extienden desde un eje central y giran a 2.00 rev/s. Si el componente vertical del campo magnético de la Tierra es de  $50.0 \mu\text{T}$ , ¿cuáles la fem inducida entre la punta del aspa y el eje central?



Sascha Hahn/Shutterstock

Figura P30.11

12. Un alambre de 2.00 m de longitud se mantiene en la dirección este-oeste y se mueve horizontalmente hacia el norte a una velocidad de  $0.500 \text{ m/s}$ . El campo magnético de la Tierra en esta región es de magnitud  $50.0 \mu\text{T}$  y dirigido hacia el norte a  $53.0^\circ$  por debajo de la horizontal. (a) Calcule la magnitud de la fem inducida entre los extremos del alambre y (b) determine qué extremo es positivo.
13. Una varilla de metal de masa  $m$  se desliza sin fricción a lo largo de dos rieles horizontales paralelos, separados por una distancia  $\ell$ , y conectado por una resistencia  $R$ , como se muestra en la figura P 30.13. Un campo magnético vertical uniforme de magnitud  $B$  es aplicado en sentido perpendicular al plano del papel. La fuerza aplicada que se muestra en la figura actúa sólo por un momento, sólo para dar a la varilla una velocidad  $v$  en términos de  $m$ ,  $\ell$ ,  $R$ ,  $B$  y  $v$ , encuentre la distancia que la barra se desliza a medida que se desacelera hasta detenerse.

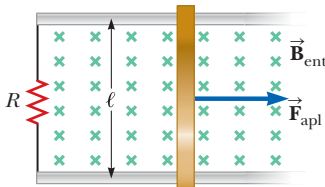


Figura P30.13

14. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un automóvil tiene una antena de radio vertical de longitud  $\ell = 1.20 \text{ m}$ . El automóvil se desplaza en una carretera horizontal con curvas, donde el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de  $B = 50.0 \mu\text{T}$  y se dirige hacia el norte y hacia abajo en un ángulo  $\theta = 65.0^\circ$  debajo de la horizontal. La fem electromotriz desarrollada entre la parte superior y la parte inferior de la antena varía con la velocidad y el sentido de la marcha del automóvil y tiene un valor máximo de  $4.50 \text{ mV}$ .
15. Una barra conductora de longitud  $\ell$ , se mueve hacia la derecha sobre dos rieles sin fricción como se muestra en la figura P30.15. Un campo magnético uniforme dirigido hacia la página tiene una magnitud de  $0.300 \text{ T}$ . Suponga  $R = 9.00 \Omega$  y  $\ell = 0.350 \text{ m}$ . (a) ¿A qué velocidad constante se debe mover la barra para producir una corriente de  $8.50 \text{ mA}$  en el resistor? (b) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida? (c) ¿A qué tasa es suministrada la energía al resistor? (d) explique el origen de la energía que está siendo entregada al resistor.

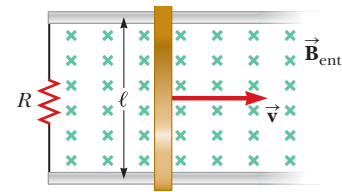


Figura P30.15

16. Una astronauta está conectada a su nave por un cable de sujeción de  $25.0 \text{ m}$  de largo; ella y la nave espacial orbitan a la Tierra en una trayectoria circular a una rapidez de  $7.80 \times 10^3 \text{ m/s}$ . En un instante, la fuerza electromotriz entre los extremos de un alambre incrustado en el cable se mide como  $1.17 \text{ V}$ . Suponga que en ese instante, la dimensión larga del cable es perpendicular al campo magnético de la Tierra. Suponga también que el centro de masa del cable de sujeción se mueve con una velocidad perpendicular al campo magnético de la Tierra. (a) ¿Cuál es la magnitud del campo de la Tierra en este lugar? (b) ¿La fem cambia conforme el sistema se mueve de un lugar a otro? Explique. (c) Proporcione dos condiciones en las que la fem sería cero a pesar de que el campo magnético no es cero.

17. Está trabajando para una empresa que fabrica motores y generadores. Al final de su primer día de trabajo, su supervisor le explica que lo asignará a un equipo que está diseñando un nuevo *generador homopolar*. No tiene idea de qué es eso, pero acepta de todo corazón la tarea. En casa esa noche, busca en línea para aprender sobre el generador homopolar y encuentra lo siguiente. El generador homopolar, también llamado *disco de Faraday*, es un generador eléctrico de bajo voltaje y alta corriente. Consiste en un disco conductor giratorio con una escobilla inmóvil (un contacto eléctrico deslizante) en su eje y otro en un punto en su circunferencia, como se muestra en la figura P30.17. Un campo magnético uniforme se aplica perpendicularmente al plano del disco. Cuando se usan bobinas superconductoras para producir un gran campo magnético, un generador homopolar puede tener una potencia de varios megawatts. Tal generador es útil, por ejemplo, en la purificación de metales por electrólisis. Si se aplica un voltaje a las terminales de salida del generador, funciona en reversa como un *motor homopolar* capaz de proporcionar un gran torque, útil en la propulsión de la nave. En el trabajo a la mañana siguiente, su supervisor le dice que el generador homopolar bajo consideración tendrá un campo magnético de magnitud  $B = 0.900 \text{ T}$  y el radio del disco es  $r = 0.400 \text{ m}$ . La fem deseada que se generará con el dispositivo es  $\mathcal{E} = 25.0 \text{ V}$ . Su supervisor le pide que determine la velocidad angular requerida del disco para lograr este resultado.

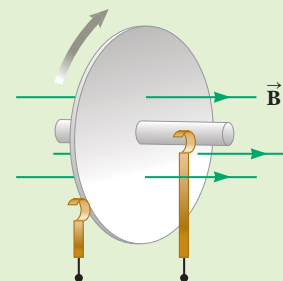


Figura P30.17

**18.** Está trabajando en un laboratorio que usa fem en movimiento para realizar mediciones magnéticas. Ha descubierto que es difícil crear un campo magnético uniforme en todo el aparato de barra deslizante que se muestra en la figura 30.18a, con una resistencia  $R$  conectada entre los rieles. Decide investigar la creación del campo magnético con un conductor largo, recto y portador de corriente que se encuentra al lado y paralelo a uno de los rieles, como se muestra en la figura P30.18. Esto creará un campo no uniforme en el plano de la barra y los rieles. Usted configura el aparato de esta manera, con el cable portador de corriente a una distancia desde el riel superior. Desea encontrar una expresión para la fuerza necesaria para deslizar la barra a una velocidad constante de  $v$  hacia la derecha en la figura P30.18 si el cable lleva una corriente  $I$ . (Sugerencia: se requerirán dos integraciones separadas).

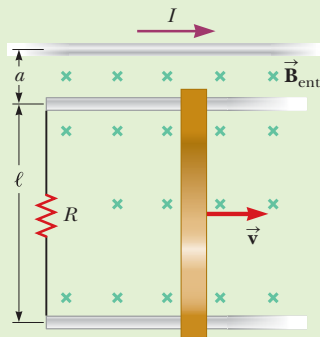


Figura P30.18

**19.** Está trabajando en una fábrica que produce barras largas de cobre con una sección transversal cuadrada. En una sección del proceso de producción, las barras deben deslizarse hacia abajo en un plano inclinado en un ángulo  $\theta = 21.0^\circ$  con respecto a la horizontal. Se ha descubierto que las barras se desplazan con una velocidad demasiado alta y se abollan o doblan cuando llegan al final del plano y deben desecharse. Para evitar este desperdicio, puede idear una forma de entregar las barras en la parte inferior del plano a una velocidad menor. Remplace el plano inclinado con un par de rieles metálicos paralelos, que se muestran en la figura P30.19, separados por una distancia,  $\ell = 2.00$  m. Las barras lisas de masa  $m = 1.00$  kg se deslizarán por los rieles lisos, con la longitud de la barra siempre perpendicular a los rieles. Los rieles están inmersos en un campo magnético de magnitud  $B$ , y un resistor de resistencia  $R = 1.00 \Omega$  está conectado entre los extremos superiores de los rieles. Determine el campo magnético necesario en su dispositivo para que las barras lleguen a la parte inferior del plano con una velocidad máxima  $v = 1.00$  m/s.

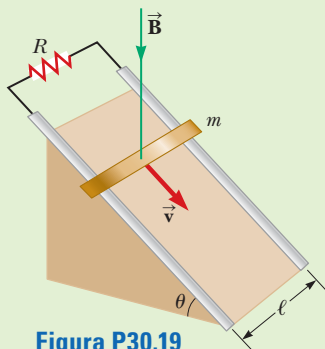


Figura P30.19

Problemas 19 y 20.

**20.** Está trabajando en una fábrica que produce barras largas de cobre con una sección transversal cuadrada. En una sección del proceso de producción, las barras deben deslizarse hacia abajo en un plano inclinado de ángulo  $\theta$ . Se ha descubierto que las barras se desplazan con una velocidad demasiado alta y se abollan o doblan cuando llegan al final del plano y deben desecharse. Para evitar este desperdicio, puede idear una forma de entregar las barras en la parte inferior del plano a una velocidad menor. Remplace el plano inclinado con un par de rieles metálicos paralelos, que se muestran en la figura P30.19, separados por una distancia  $\ell$ . Las barras lisas de masa  $m$  se deslizarán por los rieles suaves, con la longitud de la barra siempre perpendicular a los rieles. Los rieles están sumergidos en un campo magnético de magnitud  $B$ , y un resistor de resistencia  $R$  está conectado entre los extremos superiores de los rieles. Determine el campo magnético necesario en su dispositivo para que las barras lleguen a la parte inferior del plano con una velocidad máxima  $v_{m\acute{a}x}$ .

**SECCIÓN 30.4 Forma general de la ley de Faraday**

**21.** Dentro del círculo verde que se muestra en la figura P30.21, el campo magnético cambia con el tiempo según la expresión  $B = (2.00t^3 - 4.00t^2 + 0.800)$ , donde  $B$  está en teslas,  $t$  en segundos y  $R = 2.50$  cm. Cuando  $t = 2.00$  calcule (a) la magnitud y (b) la dirección de la fuerza ejercida sobre un electrón localizado en el punto  $P$  que está a una distancia  $r = 5.00$  cm. a partir del centro del campo de la región circular. (c) ¿En qué instante esta fuerza es igual a cero?

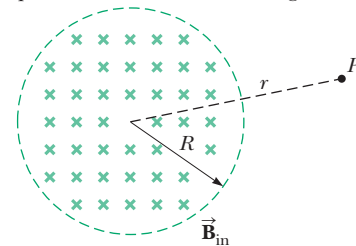


Figura P30.21

**22.** Un solenoide largo con  $1 \times 10^3$  vueltas por metro y un radio de 2.00 cm lleva una corriente oscilatoria determinada por  $I = 5.00 \sin(100\pi t)$ . (a) ¿Cuál es el campo eléctrico inducido en el radio  $r = 1.00$  cm desde el eje del solenoide? (b) ¿Cuál es la dirección de este campo eléctrico cuando la corriente en el solenoide crece en dirección contraria a las manecillas del reloj?

**SECCIÓN 30.5 Generadores y motores**

El problema 45 del capítulo 28 puede asignarse a esta sección.

**23.** Un generador produce 24.0 V cuando se gira a 900 rev/min. ¿Qué fem se produce al girar a 500 rev/min?

**24.** La figura P30.24 (página 820) es una gráfica de la fem inducida en función del tiempo para una bobina de  $N$  vueltas que gira con una rapidez angular  $\omega$  en un campo magnético uniforme con dirección perpendicular al eje de rotación de la bobina. ¿Qué pasaría si? Copie este dibujo (a una escala mayor) y en el mismo conjunto de ejes muestre la gráfica de la fem en función de  $t$  (a) si duplica el número de vueltas de la bobina; (b) si en vez de lo anterior duplica la rapidez angular y (c) si se duplica la rapidez angular y al mismo tiempo se reduce a la mitad el número de vueltas de la bobina.

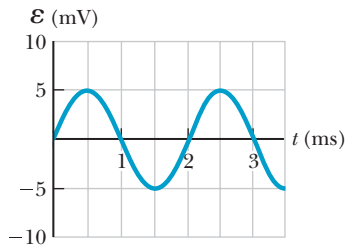


Figura P30.24

25. La espira giratoria cuadrada de un generador de CA tiene 10.0 cm por lado. Se le hace girar a 60.0 Hz en un campo uniforme de 0.800 T. Calcule (a) el flujo a través de la espira como una función del tiempo, (b) la fem inducida en la espira, (c) la corriente inducida en la espira si ésta tiene una resistencia de 1.00 Ω, (d) la potencia entregada a la espira y (e) el momento de torsión que se debe ejercer para que gire.

26. En la figura P30.26, un conductor semicircular de radio  $R = 0.250$  m es girado alrededor del eje de CA a una razón constante de 120 rev/min. Un campo magnético uniforme de magnitud 1.30 T llena toda la región por debajo del eje y se dirige hacia afuera de la página. (a) Calcule el valor máximo de la fem inducida entre los extremos del conductor. (b) ¿Cuál es el valor de la fem inducida promedio por cada rotación completa? (c) ¿Qué pasaría si? ¿Cómo cambiarían sus respuestas a los incisos (a) y (b) si se permitiera que el campo magnético se extendiera a una distancia  $R$  por encima del eje de rotación? Dibuje la fem en función del tiempo (d) cuando el campo está según lo dibujado en la figura P30.26 y (e) cuando el campo se extiende, como se describe en el inciso (c).

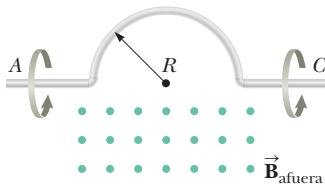


Figura P30.26

SECCIÓN 30.6 Corrientes de eddy

27. La figura P30.27 representa un freno electromagnético que utiliza corrientes de eddy. El electroimán cuelga de un carro de ferrocarril cerca de uno de los rieles. Para frenar el carro, se envía una corriente considerable a través de las bobinas del electroimán. El electroimán móvil induce corrientes de eddy en los rieles, cuyos campos se oponen al cambio en el campo del electroimán. Los campos magnéticos de las corrientes de eddy ejercen fuerza sobre la corriente del electroimán, reduciendo así la velocidad del carro. Las direcciones de este último y de la corriente en el electroimán están ilustradas correctamente en la imagen. Determine cuál de las corrientes de eddy que se muestran sobre los rieles es la correcta. Explique su respuesta.

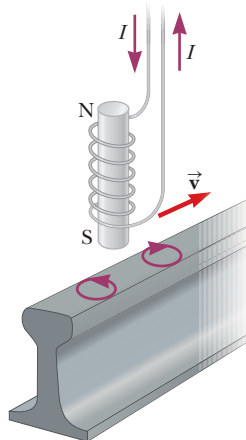


Figura P30.27

PROBLEMAS ADICIONALES

28. Suponga que, con el fin de fabricar una bobina, enrolla alambre en el cartón de soporte de un rollo de cinta de celofán. Describa cómo podrá utilizar un imán de barra para producir un voltaje inducido en la bobina. ¿Cuál es el orden de magnitud de la fem generada? Diga qué cantidades se han tomado como datos, así como sus valores.

29. Una espira rectangular de área  $A = 0.160$  m<sup>2</sup> se coloca en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano de la espira. Se permitió que la magnitud del campo variara en el tiempo de acuerdo a  $B = 0.350 e^{-t/2.00}$ , donde  $B$  está en teslas y  $t$  en segundos. El campo tiene el valor constante de 0.350 T para  $t < 0$ . ¿Cuál es el valor de  $\mathcal{E}$  en  $t = 4.00$  s?

30. Una espira rectangular de área  $A$  se coloca en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano de la espira. Se permitió que la magnitud del campo variara en el tiempo de acuerdo a  $B = B_{\text{máx}} e^{-t/\tau}$ , donde  $B_{\text{máx}}$  y  $\tau$  son constantes. El campo tiene la  $B_{\text{máx}}$  valor constante para  $t < 0$ . Encontrar la fem inducida en la espira como una función del tiempo.

31. Una bobina circular que encierra un área de 100 cm<sup>2</sup> está hecha con 200 vueltas de alambre de cobre (figura P30.31). El alambre que forma la bobina no tiene resistencia, los extremos del cable están conectados a través de una resistencia de 5.00 Ω para formar un circuito cerrado. Inicialmente, un campo magnético uniforme de 1.10 T apunta perpendicularmente hacia arriba a través del plano de la bobina. Después, la dirección del campo se invierte de manera que el campo magnético final tiene una magnitud de 1.10 T y apunta hacia abajo a través de la bobina. Si el intervalo de tiempo necesario para que el campo revierta las direcciones es 0.100 s, ¿cuál es la corriente media en la bobina durante ese tiempo?

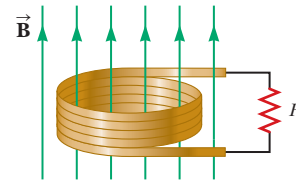


Figura P30.31

32. Considere el aparato que se muestra en la figura P30.32, en el que una barra conductora se puede mover a lo largo de dos rieles conectados a una lámpara. Todo el sistema está sumergido en un campo magnético de magnitud  $B = 0.400$  T perpendicular hacia dentro de la página. La distancia vertical entre los rieles horizontales es  $\ell = 0.800$  m. La resistencia de la lámpara es  $R = 48.0$  Ω, supuesta como constante. La barra y los rieles tienen resistencia despreciable. La barra se mueve hacia la derecha por una fuerza

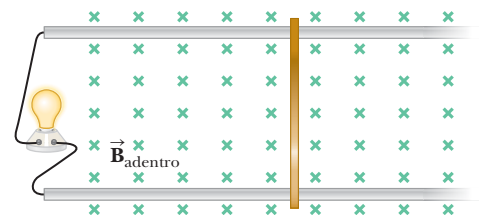


Figura P30.32



constante  $F = 0.600 \text{ N}$  de magnitud. Se desea encontrar la potencia máxima de la lámpara. (a) Encuentre una expresión para la corriente en la lámpara como una función de  $B$ ,  $\ell$ ,  $R$ ,  $\gamma$  y  $v$ , la rapidez de la barra. (b) Cuando se entrega la potencia máxima a la lámpara, ¿qué análisis de modelo describe correctamente la barra en movimiento? (c) Utilice el análisis de modelo del inciso (b) para obtener un valor numérico de la rapidez  $v$  de la barra cuando se entrega la potencia máxima a la lámpara. (d) Determine la corriente en la lámpara cuando se le entrega la potencia máxima. (e), ¿Cuál es la potencia máxima de la bombilla? Use  $P = I^2 R$  (f) ¿Cuál es la potencia mecánica máxima de entrada transmitida a la barra por la fuerza  $F$ ? (g) Ha supuesto la resistencia de la lámpara como constante. En realidad, como la potencia entregada a la lámpara aumenta, la temperatura y la resistencia del filamento se incrementan. ¿La rapidez que encontró en el inciso (c) cambia si aumenta la resistencia y todas las demás cantidades se mantienen constantes? (h) Si es así, ¿la rapidez encontrada en el inciso (c) aumenta o disminuye? Si no es así, explique. (i) Con la suposición de que la resistencia de la lámpara aumenta a medida que la corriente se incrementa, ¿la potencia hallada en el inciso (f) cambia? (j) Si es así, ¿la potencia que encontró en el inciso (f) es mayor o menor? Si no es así, explique.

33. Las cuerdas de acero de una guitarra están vibrando (vea la figura 30.5). El componente de campo magnético perpendicular a la superficie de una bobina recolectora en las inmediaciones está dada por

$$B = 50.0 + 3.20 \text{ sen } 1046 \pi t$$

donde  $B$  está en militeslas y  $t$  está en segundos. La bobina recolectora circular tiene 30 vueltas y radio de 2.70 mm. Encuentre la fem inducida en la bobina como una función del tiempo.

34. **AMT** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Una espira conductora rectangular de masa  $M = 0.100 \text{ kg}$ , resistencia  $R = 1.00 \Omega$ , y dimensiones  $w = 50.0 \text{ cm}$  por  $\ell = 90.0 \text{ cm}$  está sujeta con su borde inferior justo por encima de una región con un campo magnético uniforme de magnitud  $B = 1.00 \text{ T}$  como se muestra en la figura P30.34. La espira se suelta desde el reposo. Justo cuando el borde superior de la espira alcanza la región que contiene el campo, la espira se mueve con una rapidez de  $4.0 \text{ m/s}$ .

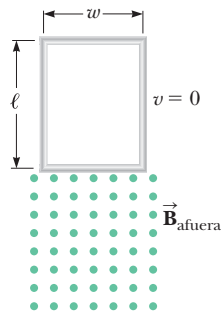


Figura P30.34

35. Una varilla conductora de longitud  $\ell = 35.0 \text{ cm}$  está libre para deslizarse sobre dos barras paralelas conductoras, como se muestra en la figura P30.35. Dos resistores,  $R_1 = 2.00 \Omega$  y  $R_2 = 5.00 \Omega$ , están conectados en los extremos de las barras formando una espira. Un campo magnético constante  $B = 2.50 \text{ T}$  está dirigido perpendicularmente hacia el interior de la página. Un agente externo jala la varilla hacia

la izquierda con una rapidez constante  $v = 8.00 \text{ m/s}$ . Determine (a) las corrientes que pasan por ambos resistores, (b) la potencia total entregada a la resistencia del circuito y (c) la magnitud de la fuerza aplicada necesaria para mover la varilla a esta velocidad constante.

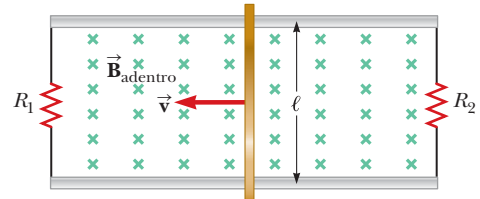


Figura P30.35

36. **S** Con frecuencia los valores de campo magnético se determinan con el uso de un dispositivo conocido como *bobina explosoradora*. Esta técnica depende de la medición de la carga total que pasa a través de una bobina en un intervalo de tiempo en que el flujo magnético que liga los devanados cambia ya sea debido al movimiento de la bobina o a un cambio en el valor de  $B$ . (a) Demuestre que, conforme el flujo a través de la bobina cambia de  $\Phi_1$  a  $\Phi_2$ , la carga transferida a través de la bobina está dada por  $Q = N(\Phi_2 - \Phi_1)/R$ , donde  $R$  es la resistencia de la bobina y  $N$  es el número de vueltas. (b) Como ejemplo específico, calcule  $B$  cuando una carga total de  $5 \times 10^{-4} \text{ C}$  pasa a través de una bobina de 100 vueltas, de  $200 \Omega$  de resistencia y área de sección transversal de  $40.0 \text{ cm}^2$ , cuando da vueltas en un campo uniforme desde una posición donde el plano de la bobina es perpendicular al campo a una posición donde el plano de la bobina es paralelo al campo.

37. **T** El plano de una espira cuadrada de alambre con lado  $a = 0.200 \text{ m}$  está orientado verticalmente y a lo largo de un eje este-oeste. El campo magnético de la Tierra en este punto es de magnitud  $B = 35.0 \mu\text{T}$  y está dirigido hacia el norte a  $35^\circ$  debajo de la horizontal. La resistencia total de la espira y de los alambres de conexión a un amperímetro de alta sensibilidad es de  $0.500 \Omega$ . Si aparecen súbitamente fuerzas horizontales y hacen que la espira se colapse como se muestra en la figura P30.37, ¿cuál es la carga total que pasa por el amperímetro?

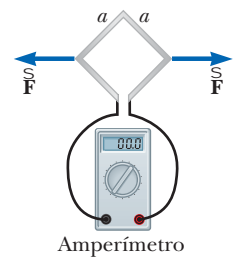


Figura P30.37

38. **CIC** En la figura P30.38, el eje de rodamiento de  $1.50 \text{ m}$  de largo es empujado a lo largo de los rieles con una rapidez constante  $v = 3.00 \text{ m/s}$ . En los puntos  $a$  y  $b$  de los rieles, directamente uno frente al otro, se conecta un resistor  $R = 0.400 \Omega$ . Las ruedas hacen un buen contacto eléctrico con los rieles y, por tanto, el eje, los rieles y  $R$

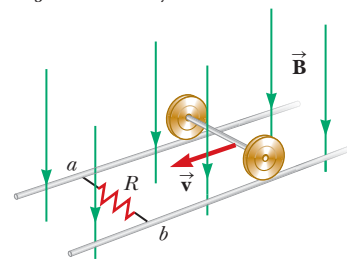


Figura P30.38



forman un circuito cerrado. La única resistencia significativa en el circuito es  $R$ . En sentido vertical y hacia abajo existe un campo magnético uniforme  $B = 0.080\text{ T}$ . (a) Determine la corriente  $I$  inducida en el resistor. (b) ¿Cuál es la fuerza horizontal  $F$  necesaria para mantener rodando el eje con rapidez constante? (c) ¿Cuál de los extremos del resistor,  $a$  o  $b$ , está a un potencial eléctrico más elevado? (d) **¿Qué pasaría si?** Cuando el eje circule más allá del resistor, ¿la corriente en  $R$  lo hará en dirección inversa? Explique su respuesta.

39. La figura P30.39 muestra un conductor estacionario cuya forma es similar a la letra e. El radio de la parte circular es  $a = 50.0\text{ cm}$ . El conductor se coloca en un campo magnético constante de  $0.500\text{ T}$  dirigidas hacia fuera de la página. Una varilla conductora recta de  $50.0\text{ cm}$  de largo, se hace pivotar alrededor del punto  $O$  y gira con una rapidez angular constante de  $2.00\text{ rad/s}$ . (a) Determine la fem inducida en la espira  $POQ$ . Tenga en cuenta que el área de la espira es  $\theta a^2/2$ . (b) Si todo el material conductor tiene una resistencia por longitud de  $5.00\ \Omega/\text{m}$ , ¿cuál es la corriente inducida en la espira  $POQ$  en el instante  $0.250\text{ s}$  después de que el punto  $P$  pasa el punto  $Q$ ?

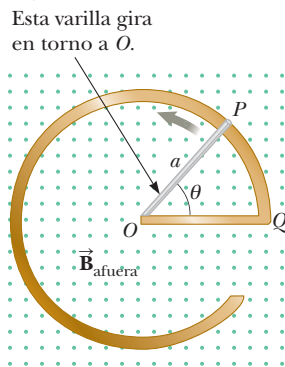


Figura P30.39

40. Una varilla conductora se mueve con una velocidad constante en una dirección perpendicular a un alambre largo y recto que lleva una corriente  $I$ , como se observa en la figura P30.40. Demuestre que la magnitud de la fem generada entre los extremos de la varilla es igual a

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 v I \ell}{2\pi r}$$

En este caso, observe que la fem disminuye cuando se incrementa  $r$ , lo que era de esperarse.

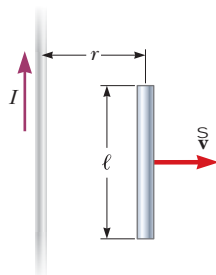


Figura P30.40

41. La figura P30.41 muestra una bobina circular compacta con 220 vueltas y  $12.0\text{ cm}$  de radio sumergida en un campo magnético uniforme paralelo al eje de la bobina. La rapidez de cambio del campo tiene la magnitud constante de  $20.0\text{ mT/s}$ . (a) ¿Qué información adicional es necesaria para

determinar si la bobina porta corriente en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario? (b) La bobina se sobrecalienta si se le entregan más de  $160\text{ W}$  de potencia. ¿Qué resistencia tendría la bobina en este punto crucial? (c) Para funcionar fría, ¿debe tener menor o mayor resistencia?

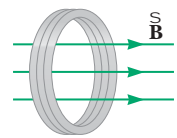


Figura P30.41

42. **Problema de repaso.** En la figura P30.42, un campo magnético uniforme disminuye con una rapidez constante  $dB/dt = -K$ , donde  $K$  es una constante positiva. En él se coloca una espira circular de alambre de radio  $a$  con una resistencia  $R$  y una capacitancia  $C$  con su plano normal al campo. (a) Determine la carga  $Q$  en el capacitor cuando esté totalmente cargado. (b) ¿Cuál de las placas, superior o inferior, estará con un potencial más elevado? (c) Explique la fuerza que causa la separación de las cargas.

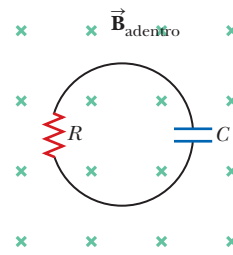


Figura P30.42

43. Una bobina cuadrada de  $N$  vueltas con lado  $\ell$  y resistencia  $R$  es jalada hacia la derecha a velocidad constante  $v$  en presencia de un campo magnético uniforme  $B$  que actúa perpendicular a la bobina como se muestra en la figura P30.43. En  $t = 0$ , el lado derecho de la bobina sólo se ha apartado del borde derecho del campo. En el momento  $t$ , el lado izquierdo de la bobina entra en la región donde  $B = 0$ . En términos de las cantidades de  $N$ ,  $B$ ,  $\ell$ ,  $v$  y  $R$ , encuentre expresiones simbólicas para (a) la magnitud de la fuerza electromotriz inducida en la espira durante el intervalo de tiempo desde  $t = 0$  a  $t$ , (b) la magnitud de la corriente inducida en la bobina, (c) la potencia suministrada a la bobina, y (d) la fuerza requerida para retirar la bobina del campo. (e) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la espira? (f) ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética sobre la espira mientras que se está jalando fuera del campo?

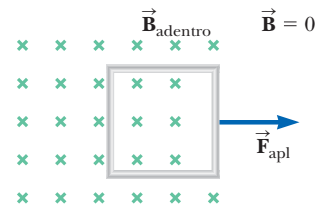


Figura P30.43

44. Una varilla conductora de longitud  $l$  se mueve con una velocidad constante  $\vec{v}$  en una dirección paralela a un alambre largo y recto que lleva una corriente estable  $I$ . El eje de la varilla se mantiene perpendicular al alambre con el extremo cercano a una distancia  $r$  (figura P30.44). Demuestre que la magnitud de la fem inducida en la varilla es igual a

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{\ell}{r} \right)$$

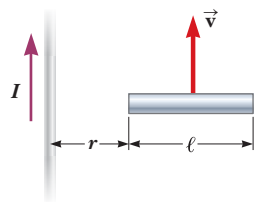


Figura P30.44

45. Un alambre recto y largo lleva una corriente según la expresión  $I = I_{\text{máx}} \sin(\omega t + \phi)$  y yace en el plano de una bobina rectangular de  $N$  vueltas de alambre, según se observa en la figura P30.45. Las cantidades  $I_{\text{máx}}$ ,  $\omega$  y  $\phi$  son constantes. Suponga que  $I_{\text{máx}} = 50.0$  A,  $\omega = 200 \pi \text{ s}^{-1}$ ,  $N = 100$ ,  $h = \omega = 5.00$  cm y  $L = 20.0$  cm. Determine la fem inducida en la bobina por el campo magnético creado por la corriente en el alambre recto.

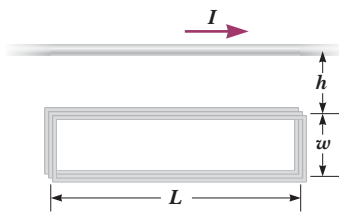


Figura P30.45

46. Una espira rectangular de dimensiones  $\ell$  y  $w$  se mueve con una velocidad constante  $\vec{v}$  alejándose de un alambre largo que conduce una corriente  $I$  en el plano de la espira (figura P30.46), cuya resistencia total es  $R$ . Deduzca una expresión para la corriente en la espira en el instante en que el lado cercano esté a una distancia  $r$  del alambre.

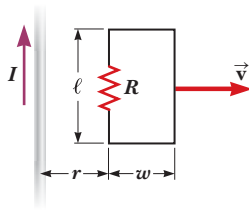


Figura P30.46

47. Un alambre delgado de  $\ell = 30.0$  cm de largo se mantiene paralelo y a  $d = 80.0$  cm por encima de un alambre largo y delgado que conduce  $I = 200$  A fijo en una posición (figura P30.47). El alambre de 30.0 cm se suelta y cae en el instante  $t = 0$ , siempre en paralelo con el alambre conductor de corriente. Suponga que el alambre que cae se acelera a  $9.80 \text{ m/s}^2$ . (a) Deduzca una ecuación para la fem inducida como una función del tiempo. (b) ¿Cuál es el valor mínimo de la fem? (c) ¿Cuál es el valor máximo? (d) ¿Cuál es la fem inducida 0.300 s después de soltarlo?

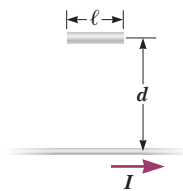


Figura P30.47

PROBLEMAS DE DESAFÍO

48. Un horno de inducción aplica inducción electromagnética para producir corrientes de eddy en un conductor, lo que eleva la temperatura del conductor. Las unidades comerciales funcionan con frecuencias que varían de 60 Hz hasta

aproximadamente 1 MHz y entregan potencias desde algunos watts hasta varios megawatts. El calentamiento por inducción se puede usar para calentar una sartén metálica en una estufa de cocina y para evitar oxidación y contaminación del metal cuando se suelda en una caja al vacío. Para explorar el calentamiento por inducción, considere un disco conductor plano de radio  $R$ , grosor  $b$  y resistividad  $\rho$ . Un campo magnético sinusoidal  $B_{\text{máx}} \cos \omega t$  se aplica perpendicular al disco. Suponga que las corrientes de eddy se presentan en círculos concéntricos con el disco. (a) Calcule la potencia promedio entregada al disco. (b) ¿Qué pasaría si? ¿En qué factor cambia la potencia cuando la amplitud del campo se duplica? (c) ¿Cuando la frecuencia se duplica? (d) ¿Cuando el radio del disco se duplica?

49. Una barra de masa  $m$  y resistencia  $R$  se desliza sin fricción en un plano horizontal sobre rieles paralelos, como los que se muestran en la figura P30.49. Los rieles están separados por una distancia  $d$  y entre ellos está conectada una batería que mantiene una fem  $\mathcal{E}$  constante, y existe un campo magnético constante  $\vec{B}$  con dirección perpendicular hacia afuera de la página. Si la barra parte del reposo en  $t = 0$ , demuestre que en el tiempo  $t$  se mueve con una rapidez

$$v = \frac{\mathcal{E}}{Bd} (1 - e^{-B^2 d^2 t / mR})$$

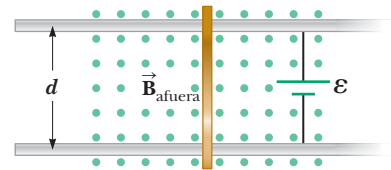


Figura P30.49

50. Un betatrón es un dispositivo que acelera electrones a energías en el intervalo de MeV mediante inducción electromagnética. Los electrones en una cámara de vacío se mantienen en una órbita circular mediante un campo magnético perpendicular al plano orbital. El campo magnético se aumenta gradualmente para inducir un campo eléctrico alrededor de la órbita. (a) Demuestre que el campo eléctrico está en la dirección correcta para hacer que los electrones aumenten su rapidez. (b) Suponga que el radio de la órbita permanece constante. Demuestre que la magnitud promedio del campo magnético sobre el área encerrada por la órbita debe ser el doble de grande que el campo magnético en la circunferencia del círculo.

51. **Problema de repaso.** La barra de masa  $m$  de la figura P30.51 es desplazada horizontalmente sobre rieles paralelos y sin fricción mediante un hilo sin masa que pasa por encima de una polea ligera y sin fricción unida a un objeto suspendido de masa  $M$ . El campo magnético uniforme tiene una magnitud  $B$  y  $\ell$  es la distancia entre los rieles. La única resistencia eléctrica significativa es el resistor de carga  $R$ , que conecta a los rieles en sus extremos. Deduzca una expresión que proporcione la rapidez horizontal de la barra en función del tiempo, si el objeto suspendido se libera con la barra en reposo en  $t = 0$ .

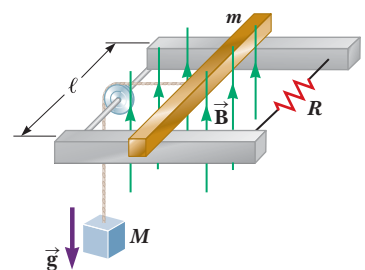


Figura P30.51

# 31

## Inductancia

En una intersección controlada por un semáforo, a menudo se pueden ver círculos cortados en el pavimento. La fotografía muestra una carretera con varios círculos, todos conectados por líneas rectas oscuras a un punto cerca de la parte inferior de la imagen.

►  
¿Cuál es el propósito de estos círculos?

(John W. Jewett, Jr.)



- 31.1 Autoinducción e inductancia
- 31.2 Circuitos  $RL$
- 31.3 Energía en un campo magnético
- 31.4 Inductancia mutua
- 31.5 Oscilaciones en un circuito  $LC$
- 31.6 Circuito  $RLC$

### **IMAGINE** Todavía está en su viaje de fin de semana que comenzó en el

capítulo anterior. Se detiene en un semáforo donde hay muy poco tráfico. La luz se vuelve verde inmediatamente para usted. Ha notado este fenómeno antes, pero ahora, después de haber estudiado física, dices: "¡Espera un momento! ¿Cómo sabe exactamente el semáforo que mi coche está aquí?" "Vuelve a intentarlo, entrando en un carril de giro a la izquierda. ¡La flecha verde de giro a la izquierda se ilumina! A medida que se acerca a más semáforos, busca alrededor algún tipo de estructura que pueda contener algo que detecte la presencia de su automóvil. No ve nada montado en postes o sobrecarga que pueda servir como detector. Luego observa que hay surcos circulares que parecen ser desbastados en el camino cerca de cada intersección. ¿Podrían tener algo que ver con eso?

**CONEXIONES** En el capítulo 30, vio que una fem y una corriente se inducen en una espira de alambre cuando el flujo magnético a través del área encerrada por la espira cambia con el tiempo. Este fenómeno de inducción tiene algunas consecuencias prácticas. En este capítulo, se describe primero un efecto conocido como autoinducción, en el cual una corriente variable en el tiempo en un circuito produce una fem inducida que se opone a la fem que inicialmente configuró la corriente variable en el tiempo. La autoinducción es la base del inductor, un nuevo elemento de circuito. Es posible combinar el inductor en circuitos eléctricos con nuestros elementos de circuito introducidos previamente, el capacitor y el resistor. Estudiará la energía almacenada en el campo magnético de un inductor y la densidad de energía asociada con el campo magnético. Encontrará que los circuitos que incluyen inductores pueden tener un comportamiento similar al oscilador armónico simple que estudió en el capítulo 15. Además, su comprensión de los inductores le permitirá avanzar y comprender el funcionamiento de los circuitos de CA en el capítulo 32.

## 31.1 Autoinducción e inductancia

Ahora que ha estudiado la ley de Faraday, debe distinguir cuidadosamente entre fems y corrientes que son causadas por fuentes físicas como las baterías y aquellas que son inducidas por campos magnéticos variables. Cuando usamos un término (como *fem* o *corriente*) sin un adjetivo, estamos describiendo los parámetros asociados con una fuente física. Se usa el adjetivo inducido para describir las fem y las corrientes causadas por un campo magnético variable.

Considere un circuito formado por un interruptor, un resistor y una fuente de fem, como se muestra en la figura 31.1. El diagrama de circuito se representa en perspectiva para mostrar las orientaciones de algunas líneas de campo magnético debido a la corriente en el circuito. Cuando el interruptor se coloca en posición cerrada, la corriente no salta inmediatamente de cero a su valor máximo  $\mathcal{E}/R$ . Para describir este efecto se puede utilizar la ley de la inducción electromagnética de Faraday (ecuación 30.1). Conforme la corriente aumenta con el tiempo, las líneas de campo magnético que rodean los cables pasan a través la espira representada por el mismo circuito. Este campo magnético que pasa a través de la espira causa un flujo magnético a través de la espira. Este flujo creciente genera una fem inducida en el circuito. La dirección de la fem inducida es tal que causaría una corriente inducida en la espira (si ésta no llevase ya una corriente), que establecería un campo magnético opuesto al cambio en el campo magnético original. Por tanto, la dirección de la fem inducida es en sentido opuesto a la dirección de la fem de la batería, lo que da como resultado un incremento gradual, en vez de instantáneo, de la corriente hasta que alcance su valor de equilibrio final. Debido a la dirección de la fem inducida también se le conoce como *fuerza contraelectromotriz*, que es similar a la que se presenta en un motor, como se explicó en el capítulo 30. Este efecto se llama **autoinducción** debido a que el flujo variable a través del circuito y la fem inducida resultante surge del circuito mismo. La fem  $\mathcal{E}_L$  establecida en este caso se llama **fem autoinducida**.

Para obtener una descripción cuantitativa de la autoinducción, recuerde la ley de Faraday, la cual dice que la fem inducida es igual al negativo de la rapidez de cambio en el tiempo del flujo magnético. Éste es proporcional al campo magnético que en su momento es proporcional a la corriente en el circuito. Por tanto, una fem autoinducida en un circuito siempre es proporcional a la rapidez de cambio en el tiempo de la corriente. Para cualquier espira de alambre, se puede escribir esta proporcionalidad como

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad (31.1)$$

donde  $L$  es una constante de proporcionalidad —llamada **inductancia** de la espira— que depende de la geometría de la espira y de otras características físicas. Si considera una bobina con espacios cerrados de  $N$  vueltas (un toroide o un solenoide ideal) que lleva una corriente  $i$  y contiene  $N$  vueltas, la ley de Faraday dice que  $\mathcal{E}_L = -N d\Phi_B/dt$ . Al combinar esta expresión con la ecuación 31.1 da:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad (31.2)$$

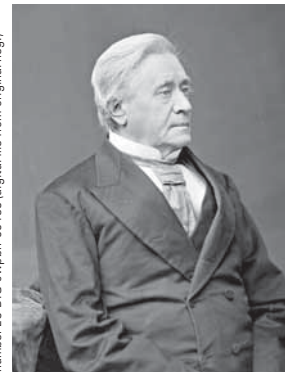
donde se supone que pasa el mismo flujo magnético a través de cada una de las vueltas y  $L$  es la inductancia de toda la bobina.

A partir de la ecuación 31.1, también se escribe la inductancia como la razón

$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{di/dt} \quad (31.3)$$

La unidad del SI para la inductancia es el **henry** (H), el que, como se puede ver por la ecuación 31.3, equivale a 1 volt-segundo por ampere:  $1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{A}$ . Recuerde que la resistencia es una medida de la oposición a la corriente que está dada por la ecuación 26.7  $R = \Delta V/I$ ; en comparación, la ecuación 31.3 es de la misma forma matemática que la ecuación 26.7 y muestra que la inductancia es una medida de oposición a un *cambio* en la corriente.

Library of Congress, Prints & Photographs Division, Reproduction number LC-DIG-cwpbhr-00489 (original file from original neg.)

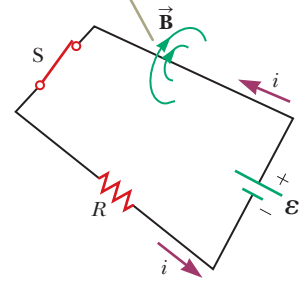


### Joseph Henry

*Físico estadounidense (1797-1878)*

Henry se convirtió en el primer director del Instituto Smithsonian y en el primer presidente de la Academia de Ciencias Naturales. Mejoró el diseño del electroimán y construyó uno de los primeros motores. También descubrió el fenómeno de la autoinducción, pero no publicó sus resultados. La unidad de la inductancia, el henry, es llamada así en su honor.

Una vez cerrado el interruptor, la corriente produce un flujo magnético a través del área encerrada por la espira. Conforme la corriente aumenta hacia su valor de equilibrio, este flujo magnético cambia con el tiempo e induce una fem en la espira.



**Figura 31.1** Autoinducción en un circuito sencillo.

◀ Inductancia de una bobina de  $N$  vueltas





Como se muestra en el ejemplo 31.1, la inductancia de una bobina depende de su geometría. Esta dependencia es similar a la capacitancia de un capacitor que depende de la geometría de sus placas, como se determinó con la ecuación 25.3 y la resistencia de un resistor depende de la longitud y el área del material conductor de acuerdo con la ecuación 26.10. Calcular la inductancia puede ser bastante complicado en el caso de geometrías complejas; sin embargo, los ejemplos que se dan a continuación involucran situaciones simples para evaluar fácilmente sus inductancias.

- EJERCICIO RÁPIDO 31.1** Una bobina con una resistencia igual a cero tiene sus extremos señalados como  $a$  y  $b$ . El potencial en  $a$  es mayor que en  $b$ . ¿Cuál de los siguientes incisos es consistente con este caso? (a) La corriente es constante y se dirige de  $a$  a  $b$ ; (b) la corriente es constante y se dirige de  $b$  a  $a$ ; (c) la corriente está en aumento y se dirige de  $a$  a  $b$ ; (d) la corriente disminuye y se dirige de  $a$  a  $b$ ; (e) la corriente aumenta y se dirige de  $b$  a  $a$ ; (f) la corriente es decreciente y se dirige de  $b$  a  $a$ .

### Ejemplo 31.1 Inductancia de un solenoide

Considere un solenoide con  $N$  vueltas y longitud  $\ell$  devanado uniformemente. Suponga que  $\ell$  es mucho mayor que el radio de los devanados y que el núcleo del solenoide es aire.

(A) Encuentre la inductancia del solenoide.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Las líneas de campo magnético de cada vuelta del solenoide pasan a través de todas las vueltas, de modo que una fem inducida en cada bobina se opone al cambio en la corriente.

**Categorizar** Este ejemplo se puede clasificar como un problema de sustitución. Ya que el solenoide es largo, se pueden usar los resultados para un solenoide ideal obtenidos en el capítulo 29.

Encuentre el flujo magnético a través de cada vuelta de área  $A$  en el solenoide; use la expresión para el campo magnético de la ecuación 29.17:

$$\Phi_B = BA = \mu_0 niA = \mu_0 \frac{N}{\ell} iA$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 31.2:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \quad (31.4)$$

(B) Calcule la inductancia del solenoide si contiene 300 vueltas, su longitud es de 25.0 cm y su área de sección transversal es de 4.00 cm<sup>2</sup>.

#### SOLUCIÓN

Sustituya los valores numéricos en la ecuación 31.4:

$$\begin{aligned} L &= (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{300^2}{25.0 \times 10^{-2} \text{ m}} (4.00 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \\ &= 1.81 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A} = 0.181 \text{ mH} \end{aligned}$$

(C) Calcule la fem autoinducida en el solenoide si la corriente que porta disminuye a la razón de 50.0 A/s.

#### SOLUCIÓN

Sustituya  $di/dt = -50.0$  A/s y la respuesta a la parte (B) en la ecuación 31.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_L &= -L \frac{di}{dt} = -(1.81 \times 10^{-4} \text{ H})(-50.0 \text{ A/s}) \\ &= 9.05 \text{ mV} \end{aligned}$$

El resultado para la parte (A) muestra que  $L$  depende de la geometría y es proporcional al cuadrado del número de vueltas. Ya que  $N = n\ell$ , el resultado también se puede expresar en la forma

$$L = \mu_0 \frac{(n\ell)^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A \ell = \mu_0 n^2 V \quad (31.5)$$

donde  $V = A\ell$  es el volumen interior del solenoide.



## 31.2 Circuitos RL

Si un circuito contiene una bobina, como un solenoide, la autoinductancia de ésta impide que la corriente en el circuito aumente o disminuya de manera instantánea. Un elemento de circuito con una gran inductancia se conoce como **inductor** y utiliza el símbolo de circuito . Siempre suponga que la inductancia del resto del circuito se puede ignorar en comparación con la del inductor, sin embargo. Recuerde que incluso un circuito sin una bobina tiene algo de inductancia que puede afectar su comportamiento.

Dado que la inductancia en un inductor resulta en una fuerza contraelectromotriz, un inductor en un circuito se opone a los cambios en la corriente dentro de dicho circuito. El inductor intenta mantener la corriente igual a como estaba antes de que ocurriera el cambio. Si el voltaje de la batería en el circuito se incrementa para aumentar la corriente, el inductor se opone a este cambio, y el aumento de corriente no es instantáneo. Si se reduce el voltaje de la batería, el inductor da como resultado una reducción lenta de la corriente en vez de una caída inmediata. Por tanto, el inductor hace que el circuito sea lento en reaccionar a los cambios en el voltaje.

Considere el circuito que se muestra en la figura 31.2a, que contiene una batería de resistencia interna despreciable. Este circuito es un **circuito RL** porque los elementos conectados a la batería son un resistor y un inductor. Las líneas curvas sobre el interruptor  $S_2$  sugieren que este interruptor nunca se puede abrir; siempre está en  $a$  o en  $b$ . (Si el interruptor no se conecta ni a  $a$  ni a  $b$ , cualquier corriente en el circuito súbitamente se detiene.) Suponga que  $S_2$  se pone en  $a$  y que el interruptor  $S_1$  se abre para  $t < 0$  y luego se cierra en  $t = 0$  como se muestra en la figura 31.2b. La corriente en el circuito comienza a aumentar y en el inductor se induce una fuerza contraelectromotriz (ecuación 31.1) que se opone a la corriente creciente en el inductor.

En el instante cuando la corriente cambia, es posible aplicar la regla de la espira de Kirchhoff a este circuito, recorriendo el circuito de la figura 31.2b en el sentido de las manecillas del reloj:

$$\mathcal{E} - iR - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (31.6)$$

donde  $iR$  es la caída de voltaje a través del resistor. (Las reglas de Kirchhoff se desarrollan para circuitos con corrientes estables, pero también pueden aplicarse a un circuito en que la corriente está cambiando, si imagina que representan un circuito en un *instante* de tiempo.) Ahora debe buscar una solución para esta ecuación diferencial, una similar a la que aplicó para un circuito RC (véase la sección 27.4.)

Una solución matemática de la ecuación 31.6 representa la corriente en el circuito como una función del tiempo. Para determinar esta solución, cambie las variables, haciendo que  $x = (\mathcal{E}/R) - i$ , para que  $dx = -di$ . Con estas sustituciones, la ecuación 31.6 es

$$x + \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = 0$$

Reordenando e integrando esta última expresión, tiene

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \quad \text{S} \quad \ln \frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L} t$$

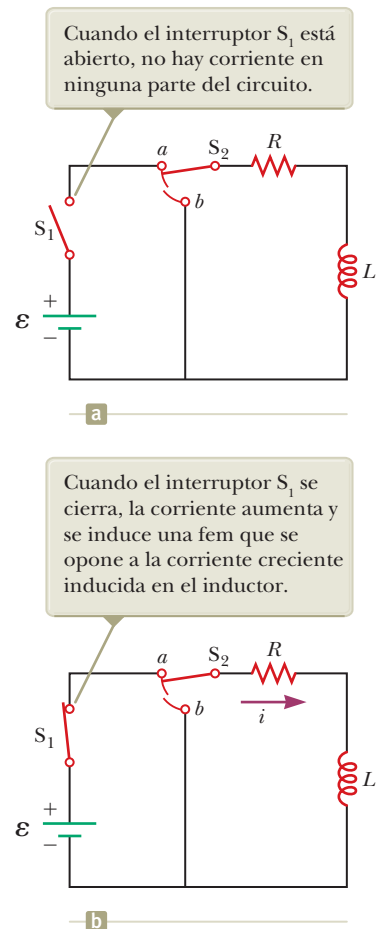
donde  $x_0$  es el valor de  $x$  en el tiempo  $t = 0$ . Si toma el antilogaritmo de este resultado, obtiene

$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

Ya que  $i = 0$  en  $t = 0$ , observe a partir de la definición de  $x$  que  $x_0 = \mathcal{E}/R$ . En consecuencia, esta última expresión es equivalente a

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L} \quad \text{S} \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

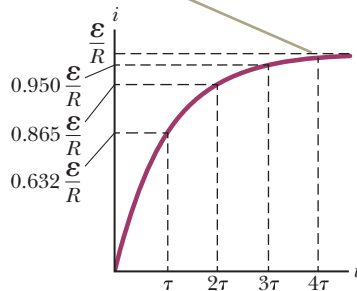
Esta expresión muestra cómo la corriente es afectada por el inductor. La corriente no aumenta de manera instantánea hasta su valor de equilibrio final cuando el interruptor se cierra, sino que aumenta de acuerdo con una función exponencial. Si retira la inductancia del circuito, al hacer que  $L$  tienda a cero, el término exponencial será cero y en este caso la corriente no depende del tiempo; en ausencia de la inductancia la corriente aumenta de manera instantánea a su valor de equilibrio final.



**Figura 31.2** Circuito RL (a) Cuando el interruptor  $S_1$  está abierto, la batería no está conectada a otros elementos en el circuito. (b) Cuando el interruptor  $S_1$  está cerrado, la batería está conectada y comienza a circular una corriente en el circuito.

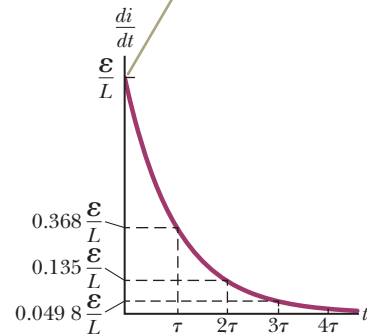


Después de que el interruptor  $S_1$  se cierra en  $t = 0$ , la corriente aumenta hacia su valor máximo  $\mathcal{E}/R$ .



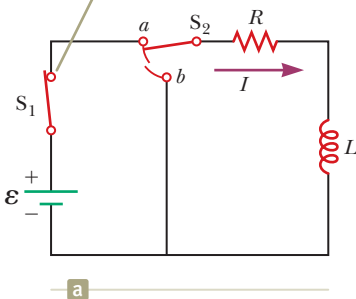
**Figura 31.3** Gráfica de la corriente en función del tiempo para el circuito  $RL$  que se muestra en la figura 31.2b. La constante de tiempo  $\tau$  es el intervalo de tiempo necesario para que  $i$  alcance 63.2% de su valor máximo.

La rapidez de cambio en el tiempo de la corriente es máxima en  $t = 0$ , instante en el que se cierra el interruptor  $S_1$ .



**Figura 31.4** Gráfica de  $di/dt$  en función del tiempo para el circuito  $RL$  que se muestra en la figura 31.2b. La razón de cambio disminuye de manera exponencial con el tiempo conforme  $i$  aumenta hacia su valor máximo.

Cuando el interruptor  $S_1$  ha sido cerrado por un largo tiempo, la corriente en el circuito alcanza su valor de estado estacionario  $I$ .



También es posible escribir esta expresión como

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \tag{31.7}$$

donde la constante  $\tau$  es la **constante de tiempo** del circuito  $RL$ :

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{31.8}$$

Físicamente,  $\tau$  es el intervalo de tiempo necesario para que la corriente en el circuito alcance  $(1 - e^{-1}) = 0.632 = 63.2\%$  de su valor final  $\mathcal{E}/R$ . La constante de tiempo es un parámetro útil para comparar el tiempo de respuesta de diferentes circuitos.

La figura 31.3 representa la corriente en función del tiempo en el circuito  $RL$ . Observe que el valor de equilibrio de la corriente, que se presenta cuando  $t$  tiende a infinito, es igual a  $\mathcal{E}/R$ . Verifique esto con  $di/dt$  igual a cero en la ecuación 31.6 y resolviendo en función de la corriente  $i$ . (En el equilibrio, el cambio en la corriente es igual a cero.) Por tanto, al inicio la corriente aumenta con mucha rapidez y después se acerca gradualmente al valor de equilibrio  $\mathcal{E}/R$  conforme  $t$  tiende a infinito.

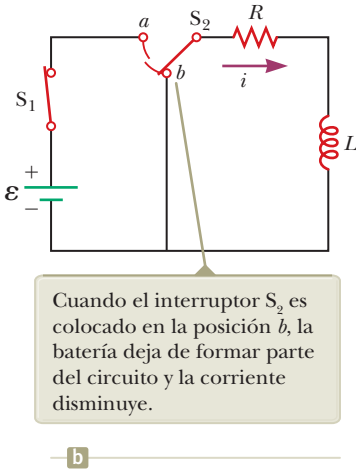
Investigue la rapidez del cambio en el tiempo de la corriente. Tomando la primera derivada con el tiempo de la ecuación 31.7, da

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau} \tag{31.9}$$

Este resultado muestra que la rapidez del cambio en el tiempo de la corriente es máximo (igual a  $\mathcal{E}/L$ ) en  $t = 0$  y disminuye exponencialmente hasta cero conforme  $t$  tiende a infinito (figura 31.4).

Suponga que el interruptor  $S_2$  en el circuito en la figura 31.2 se ha colocado en la posición  $a$  (y el interruptor  $S_1$  permanece cerrado) el suficiente tiempo para permitir que la corriente llegue a su valor de equilibrio  $I = \mathcal{E}/R$  como se muestra en la figura 31.5a. Si  $S_2$  se mueve de  $a$  a  $b$ , el circuito queda descrito ahora sólo por la espira a la derecha de la figura 31.5b. Por tanto, la batería ha sido eliminada del circuito. Con  $\mathcal{E} = 0$  en la ecuación 31.6 obtenemos

$$iR + L \frac{di}{dt} = 0$$



Cuando el interruptor  $S_2$  es colocado en la posición  $b$ , la batería deja de formar parte del circuito y la corriente disminuye.

**Figura 31.5** (a) La condición que se muestra en la figura 31.2b existe desde hace mucho tiempo y la corriente tiene su valor máximo. (b) Cuando el interruptor  $S_2$  es colocado en la posición  $b$ , la corriente comienza a disminuir.

Queda como un problema (problema 12) demostrar que la solución de esta ecuación diferencial es

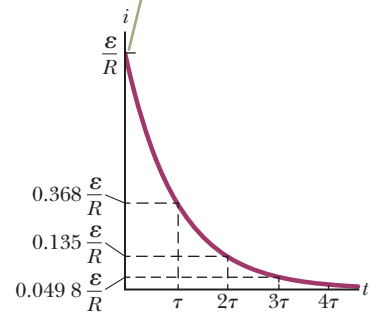
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = I_i e^{-t/\tau} \quad (31.10)$$

donde  $\mathcal{E}$  es la fem de la batería e  $I_i = \mathcal{E}/R$  es la corriente inicial en el instante en que el interruptor se coloca en  $b$ .

Si el circuito no incluyera un inductor, la corriente se reduciría de inmediato a cero al retirar la batería. Cuando el inductor está presente, se opone a la disminución de la corriente y hace que ésta disminuya en forma exponencial. Una gráfica de la corriente en función del tiempo (figura 31.6) muestra que la corriente disminuye continuamente con el tiempo.

- EJAMEN RÁPIDO 31.2** Considere el circuito de la figura 31.2a, con  $S_1$  abierto y  $S_2$  en la posición  $a$ . El interruptor  $S_1$  está ahora cerrado en la figura 31.2b. (i) En el momento en que se cierra el interruptor  $S_1$ , ¿a través de cuál elemento de circuito el voltaje es igual a la fem de la batería? (a) el resistor, (b) el inductor, (c) el inductor y el resistor. (ii) Después de un tiempo considerable, ¿a través de cuál elemento de circuito el voltaje es igual a la fem de la batería? Elija entre las mismas respuestas.

En  $t = 0$ , el interruptor está colocado en la posición  $b$ , y la corriente pasa por su valor máximo  $\mathcal{E}/R$ .



**Figura 31.6** Corriente en función del tiempo para la espira del lado derecho del circuito que aparece en la figura 31.5b. Para  $t < 0$ , el interruptor  $S_2$  está en la posición  $a$ .

### Ejemplo 31.2 Constante de tiempo de un circuito RL

Considere de nuevo el circuito de la figura 31.2. Suponga que los elementos del circuito tienen los siguientes valores:  $\mathcal{E} = 12.0 \text{ V}$ ,  $R = 6.00 \Omega$  y  $L = 30.0 \text{ mH}$ .

**(A)** Encuentre la constante de tiempo del circuito.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Debe comprender el comportamiento del circuito de la figura 31.2 a partir de la explicación de esta sección.

**Categorizar** Los resultados se evalúan con las ecuaciones desarrolladas en esta sección, de modo que este ejemplo es un problema de sustitución.

Evalúe la constante de tiempo a partir de la ecuación 31.8:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30.0 \times 10^{-3} \text{ H}}{6.00 \Omega} = 5.00 \text{ ms}$$

**(B)** El interruptor  $S_2$  está en la posición  $a$  y el interruptor  $S_1$  se cierra en  $t = 0$ . El circuito se muestra en la figura 31.2b. Calcule la corriente en el circuito en  $t = 2.00 \text{ ms}$ .

#### SOLUCIÓN

Evalúe la corriente en  $t = 2.00 \text{ ms}$  a partir de la ecuación 31.7:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{12.0 \text{ V}}{6.00 \Omega} (1 - e^{-2.00 \text{ ms}/5.00 \text{ ms}}) = 2.00 \text{ A} (1 - e^{-0.400}) = 0.659 \text{ A}$$

**(C)** Compare la diferencia de potencial a través del resistor con que cruza el inductor.

#### SOLUCIÓN

En el instante en que el interruptor  $S_1$  se cierra, no hay corriente y por tanto no hay diferencia de potencial a través del resistor. En dicho instante, el voltaje de la batería aparece por completo a través del inductor en la forma de una fuerza contraelectromotriz de  $12.0 \text{ V}$  conforme el inductor intenta mantener la condición de corriente cero. (El extremo superior del inductor en la figura 31.2b está a un mayor potencial eléctrico que el extremo inferior.) Conforme pasa el tiempo, la fem a través del inductor disminuye y la corriente en el resistor (y por tanto el voltaje a través de él) aumenta como se muestra en la figura 31.7 (página 830). La suma de los dos voltajes en todo momento es  $12.0 \text{ V}$ .

**¿QUÉ PASARÍA SI?** En la figura 31.7, los voltajes a través del resistor y el inductor son iguales en  $3.4 \text{ ms}$ . ¿Y si usted quiere retrasar la condición en la que los voltajes sean iguales en cierto instante posterior, como  $t = 10.0 \text{ ms}$ ? ¿Para lograr esto cuál parámetro,  $L$  o  $R$ , requeriría menos ajuste, en términos de un cambio porcentual?

continúa

## 31.2 continuación

**Respuesta** La figura 31.7 muestra que los voltajes son iguales cuando el voltaje a través del inductor ha caído a la mitad de su valor original. En consecuencia, el intervalo de tiempo requerido para que los voltajes sean iguales es la *vida media*  $t_{1/2}$  del decaimiento. La vida media se introdujo en la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 27.10 para describir el decaimiento exponencial en los circuitos  $RC$ , donde  $t_{1/2} = 0.693 \tau$ .

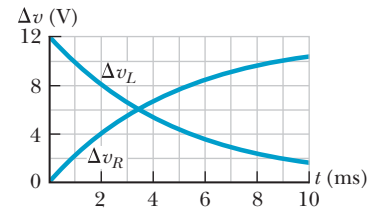
A partir de la vida media deseada de 10.0 ms, use el resultado del ejemplo 27.10 para encontrar la constante de tiempo del circuito:

Mantenga  $L$  fija y encuentre el valor de  $R$  que dé esta constante de tiempo:

Ahora mantenga  $R$  fija y encuentre el valor apropiado de  $L$ :

El cambio en  $R$  corresponde a una disminución de 65%, comparada con la resistencia inicial. ¡El cambio en  $L$  representa un aumento de 188% en inductancia! Por tanto, un ajuste porcentual mucho más pequeño en  $R$  puede lograr el efecto deseado del ajuste que se requeriría en  $L$ .

**Figura 31.7** (Ejemplo 31.2) Comportamiento en el tiempo de los voltajes a través del resistor y el inductor en la figura 31.2b, dados los valores proporcionados en este ejemplo.



$$\tau = \frac{t_{1/2}}{0.693} = \frac{10.0 \text{ ms}}{0.693} = 14.4 \text{ ms}$$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \text{S} \quad R = \frac{L}{\tau} = \frac{30.0 \times 10^{-3} \text{ H}}{14.4 \text{ ms}} = 2.08 \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \text{S} \quad L = \tau R = (14.4 \text{ ms})(6.00 \Omega) = 86.4 \times 10^{-3} \text{ H}$$

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 31.1

**En un capacitor, un resistor y un inductor se almacena energía de manera diferente** En capacitores, inductores y resistores, los mecanismos de almacenaje de energía son diferentes. Un capacitor cargado almacena energía como energía potencial eléctrica. Un inductor almacena energía en lo que se podría llamar energía potencial magnética, cuando transporta corriente. La energía entregada a un resistor se transforma en energía interna.

## 31.3 Energía en un campo magnético

A medida que avanzamos, descubriremos que tendremos que abordar las consideraciones energéticas en los circuitos con inductores. En general, una batería en un circuito que contiene un inductor proporciona más energía que una en un circuito sin el inductor. Cuando se cierra el interruptor  $S_1$  en la figura 31.2b, parte de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en la resistencia del circuito en tanto que la energía restante es almacenada en el campo magnético del inductor. Si multiplica cada uno de los términos de la ecuación 31.6 por  $i$  y reordena la expresión,

$$i\mathcal{E} = i^2R + Li \frac{di}{dt} \quad (31.11)$$

Al reconocer  $i\mathcal{E}$  como la rapidez a la cual la energía se suministra por la batería e  $i^2R$  como la rapidez a la cual se entrega energía al resistor,  $Li(di/dt)$  debe representar la rapidez a la cual se almacena energía en el inductor. Si  $U_B$  representa la energía almacenada en el inductor en cualquier instante, se puede escribir la relación  $dU_B/dt$  con la cual se almacena energía de la forma

$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt}$$

Para determinar la energía total almacenada en el inductor en cualquier instante, reescriba esta expresión de la forma  $dU_B = Li di$  e integre:

$$U_B = \int dU_B = \int_0^i Li di = L \int_0^i i di$$

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 \quad (31.12)$$

donde  $L$  es constante y ha sido retirada de la integral. La ecuación 31.12 representa la energía almacenada en el campo magnético del inductor cuando la corriente es igual a  $i$ . Esta ecuación es similar en forma a la ecuación 25.13 para la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor,  $U_E = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$ . En cualquier caso, la energía es necesaria para establecer un campo.

También es posible determinar la densidad de energía de un campo magnético y compararla con la densidad de energía de un campo eléctrico. Para hacerlo más simple, considere un solenoide cuya inductancia está dada por la ecuación 31.5:

$$L = \mu_0 n^2 V$$

Energía almacenada en un inductor ►



El campo magnético de un solenoide está dado por la ecuación 29.17:

$$B = \mu_0 ni$$

Al sustituir la expresión para  $L$  y para  $i = B/\mu_0 n$  en la ecuación 31.12, obtiene

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} V \quad (31.13)$$

La densidad de energía magnética, o la energía almacenada por cada unidad de volumen en el campo magnético del inductor, es  $u_B = U_B/V$  o bien

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (31.14) \quad \blacktriangleleft \text{ Densidad de energía magnética}$$

A pesar de que esta expresión se dedujo para el caso especial de un solenoide, aplica también para cualquier región del espacio en el que exista un campo magnético. Observe que la ecuación 31.14 es similar en forma a la ecuación 25.15 para la energía por cada unidad de volumen almacenada en un campo eléctrico,  $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ . En ambos casos, la densidad de energía es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo.

- E XAMEN RÁPIDO 31.3** Usted realiza un experimento que requiere la densidad de energía más alta posible en el interior de un solenoide muy largo que transporta corriente. ¿Cuál de las siguientes opciones aumenta la densidad de energía? (Puede haber más de una elección correcta.) (a) Aumentar el número de vueltas por cada unidad de longitud en el solenoide, (b) incrementar el área de la sección transversal del solenoide, (c) aumentar sólo la longitud del solenoide mientras se mantiene fijo el número de vueltas por cada unidad de longitud fija o (d) incrementar la corriente en el solenoide.

### Ejemplo 31.3 ¿Qué ocurre con la energía en el inductor?

Considere una vez más el circuito  $RL$  que se muestra en la figura 31.5a, con el interruptor  $S_2$  en la posición  $a$  y a la corriente en su valor de estado estable. Cuando  $S_2$  se pasa a la posición  $b$ , como en la figura 31.5b, la corriente en la espira derecha decae exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la ecuación 31.10. Demuestre que toda la energía inicialmente almacenada en el campo magnético del inductor aparece como energía interna en el resistor conforme la corriente decae a cero.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Antes de que  $S_2$  se ponga en  $b$ , la corriente es constante a su valor máximo, y desde la batería se entrega energía con una relación constante al resistor y la energía se almacena en el campo magnético del inductor. Después de  $t = 0$ , cuando  $S_2$  está en la posición  $b$ , la batería ya no puede proporcionar energía y la energía se entrega sólo al resistor desde el inductor.

**Categorizar** La espira derecha del circuito se modela como un *sistema aislado*, de modo que la energía se transfiere entre componentes del sistema pero no sale del sistema.

**Analizar** Evalúe la energía entregada por el resistor, que aparece como energía interna en el mismo.

Inicie con la ecuación 26.22 y reconozca que la rapidez de cambio de la energía interna en el resistor es la potencia entregada al resistor:

$$\frac{dE_{\text{int}}}{dt} = P = i^2 R$$

Sustituya la corriente dada por la ecuación 31.10 en la ecuación anterior:

$$\frac{dE_{\text{int}}}{dt} = i^2 R = (I_i e^{-Rt/L})^2 R = I_i^2 R e^{-2Rt/L}$$

Resuelva para  $dE_{\text{int}}$  e integre esta expresión sobre los límites  $t = 0$  a  $t \rightarrow \infty$ :

$$E_{\text{int}} = \int_0^{\infty} I_i^2 R e^{-2Rt/L} dt = I_i^2 R \int_0^{\infty} e^{-2Rt/L} dt$$

Se puede demostrar que el valor de la integral definida es  $L/2R$  (véase el problema 22). Use este resultado para evaluar  $E_{\text{int}}$ :

$$E_{\text{int}} = I_i^2 R \left( \frac{L}{2R} \right) = \frac{1}{2} LI_i^2$$

**Finalizar** Este resultado es igual a la energía inicial almacenada en el campo magnético del inductor, dado por la ecuación 31.12, como se debía comprobar.





**Ejemplo 31.4 El cable coaxial**

Con frecuencia los cables coaxiales se usan para conectar dispositivos eléctricos como su sistema de video y en la recepción de señales de los sistemas de televisión por cable. Modele un cable coaxial largo como dos cubiertas conductoras cilíndricas delgadas y concéntricas de radios  $a$  y  $b$  y longitud  $\ell$ , como un delgado cascarón cilíndrico conductor de radio  $b$  concéntrico con un cilindro sólido de radio  $a$  como se muestra en la figura 31.8. Los conductores portan la misma corriente  $i$  en direcciones opuestas. Calcule la inductancia  $L$  de la longitud  $\ell$  de este cable.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Considere la figura 31.8. Aunque no se tiene una bobina visible en esta geometría, imagine una rebanada radial delgada del cable coaxial como el rectángulo dorado claro en la figura 31.8. Si los conductores interior y exterior se conectan a los extremos del cable (arriba y abajo de la figura), esta rebanada representa una gran espira conductora. La corriente en la espira establece un campo magnético entre los conductores interior y exterior que pasa a través de esta espira. Si la corriente cambia, el campo magnético cambia y la fem inducida se opone al cambio original en la corriente en los conductores.

**Categorizar** Esta situación se clasifica como una en la que se debe regresar a la definición fundamental de inductancia, ecuación 31.2.

**Analizar** Debe encontrar el flujo magnético a través del rectángulo dorado claro de la figura 31.8. La ley de Ampère (vea la sección 29.3) dice que el campo magnético en la región entre los conductores se debe al conductor interior y que su magnitud es  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ , donde  $r$  se mide desde el centro común de los cilindros. En la figura 31.8 se muestra una línea a lo largo de un campo circular de ejemplo con el vector de campo tangente a la línea de campo.

El campo magnético es perpendicular al rectángulo dorado claro de longitud  $\ell$  y ancho  $b - a$ , la sección transversal de interés. Ya que el campo magnético varía con la posición radial a través de este rectángulo, debe usar el cálculo para encontrar el flujo magnético total.

Divida el rectángulo dorado claro en tiras de ancho  $dr$  como la tira más oscura en la figura 31.8. Evalúe el flujo magnético a través de tal tira:

$$d\Phi_B = B dA = B\ell dr$$

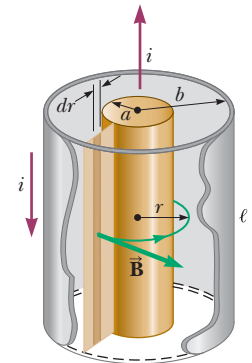
Sustituya para el campo magnético e integre  $dr$  sobre todo el rectángulo dorado claro:

$$\Phi_B = \int_a^b \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \ell dr = \frac{\mu_0 i \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Use la ecuación 31.2 para encontrar la inductancia del cable:

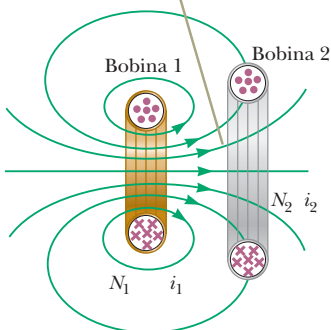
$$L = \frac{\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

**Finalizar** La inductancia depende sólo de factores geométricos relativos al cable. Aumenta si  $\ell$  aumenta, si  $b$  aumenta o si  $a$  disminuye. Este resultado es consistente con la conceptualización: cualquiera de estos cambios aumenta el tamaño de la espira representada por la rebanada radial y a través de la que pasa el campo magnético, que aumenta la inductancia.



**Figura 31.8** (Ejemplo 31.4) Sección de un cable coaxial largo. Los conductores interior y exterior portan corrientes iguales en direcciones opuestas.

Una corriente en la bobina 1 establece un campo magnético y parte de las líneas del campo magnético pasan a través de la bobina 2.



**Figura 31.9** Vista de la sección transversal de dos bobinas adyacentes.

**31.4 Inductancia mutua**

Con frecuencia, el flujo magnético a través del área encerrada por un circuito varía con el tiempo debido a corrientes variables con el tiempo en circuitos cercanos. Esta situación induce una fem a través de un proceso conocido como *inductancia mutua*, denominada así porque depende de la interacción de dos circuitos.

Considere dos bobinas de alambre enrolladas apretadamente, como se muestra en la vista de la sección transversal de la figura 31.9. La corriente  $i_1$  en la bobina 1, la cual tiene  $N_1$  vueltas, produce un campo magnético. Parte de las líneas de este campo pasan a través de la bobina 2, la cual tiene  $N_2$  vueltas. El flujo magnético causado por la corriente de la bobina 1 y que pasa a través de la bobina 2 está representado por  $\Phi_{12}$ . En analogía con la ecuación 31.2, se puede identificar la **inductancia mutua**  $M_{12}$  de la bobina 2 respecto a la bobina 1:

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} \tag{31.15}$$

La inductancia mutua depende de la geometría de ambos circuitos y de su orientación mutua. Conforme aumenta la distancia de separación de los circuitos, la inductancia mutua disminuye, ya que el flujo que une los circuitos decrece.

Si la corriente  $i_1$  varía con el tiempo, según la ley de Faraday y la ecuación 31.15, la fem inducida por la bobina 1 en la bobina 2 es igual a

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{M_{12} i_1}{N_2} \right) = -M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad (31.16)$$

En la explicación anterior, se supone que la corriente pasa por la bobina 1. También puede imaginar una corriente  $i_2$  en la bobina 2. La explicación precedente puede repetirse para demostrar que existe una inductancia mutua  $M_{21}$ . Si la corriente  $i_2$  varía con el tiempo, la fem inducida por la bobina 2 en la bobina 1 es igual a

$$\mathcal{E}_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt} \quad (31.17)$$

En la inductancia mutua, la fem inducida en una bobina siempre es proporcional a la rapidez con la cual cambia la corriente de la otra bobina. A pesar de que las constantes de proporcionalidad  $M_{12}$  y  $M_{21}$  fueron tratadas por separado, puede demostrarse que son iguales. Por tanto, con  $M_{12} = M_{21} = M$ , las ecuaciones 31.16 y 31.17 se convierten en

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

Estas dos ecuaciones son similares en forma a la ecuación 31.1 de la fem autoinducida  $\mathcal{E} = -L (di/dt)$ . La unidad de la inductancia mutua es el henry.

**EJEMPLO RÁPIDO 31.4** En la figura 31.9, la bobina 1 se coloca más cerca de la bobina 2, conservando fija la orientación de ambas bobinas. Debido a este movimiento, la inductancia mutua de las dos bobinas (a) aumenta, (b) disminuye o (c) no es afectada.

### Ejemplo 31.5 Cargador de batería “inalámbrico”

Un cepillo dental eléctrico tiene una base diseñada para sostener el mango del cepillo dental cuando no está en uso. Como se muestra en la figura 31.10a, el mango tiene un orificio cilíndrico que encaja holgadamente sobre un cilindro coincidente en la base. Cuando el mango se coloca en la base, una corriente variable en un solenoide dentro del cilindro de la base induce una corriente en una bobina dentro del mango. Esta corriente inducida carga la batería en el mango.

La base se puede modelar como un solenoide de longitud  $\ell$  con  $N_B$  vueltas (figura 31.10b), que porta una corriente  $i$  y tiene un área de sección transversal  $A$ . La bobina del mango contiene  $N_H$  vueltas y rodea por completo la bobina de la base. Encuentre la inductancia mutua del sistema.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Asegúrese de poder identificar las dos bobinas en la situación y entender que una corriente variable en una bobina induce una corriente en la segunda bobina.

**Categorizar** El resultado se evaluará usando los conceptos explicados en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

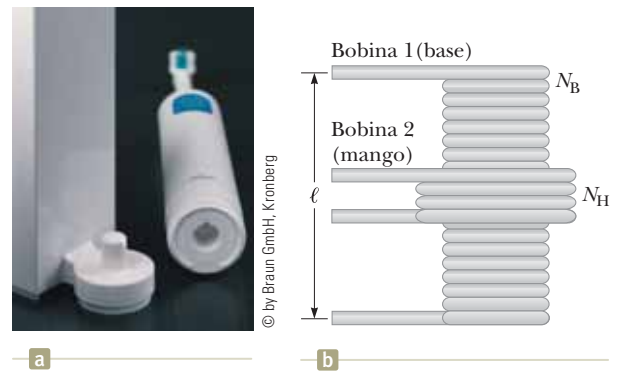
Use la ecuación 29.17 para expresar el campo magnético en el interior del solenoide de la base:

$$B = \mu_0 \frac{N_B}{\ell} i$$

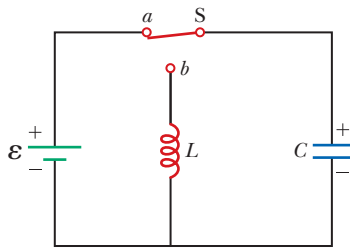
Encuentre la inductancia mutua y advierta que el flujo magnético  $\Phi_{BH}$  a través de la bobina del mango causado por el campo magnético de la bobina de la base es  $BA$ :

$$M = \frac{N_H \Phi_{BH}}{i} = \frac{N_H BA}{i} = \mu_0 \frac{N_B N_H}{\ell} A$$

El cargador inalámbrico se usa en muchos otros dispositivos “sin cables”. Un ejemplo significativo es el cargado inductivo utilizado por algunos fabricantes de automóviles eléctricos que evitan el contacto directo metal a metal entre el automóvil y el aparato cargador.



**Figura 31.10** (Ejemplo 31.5) (a) Este cepillo dental eléctrico usa la inducción mutua de solenoides como parte de su sistema cargador de batería. (b) Una bobina de  $N_H$  vueltas enrollada alrededor del centro de un solenoide de  $N_B$  vueltas.



**Figura 31.11** Circuito LC simple. El capacitor tiene una carga inicial  $Q_{\text{máx}}$ , y el interruptor en posición a se abre en  $t < 0$  y después en posición b se cierra en  $t = 0$ .

## 31.5 Oscilaciones en un circuito LC

En la sección 31.2, conectamos el nuevo elemento de circuito que estamos estudiando, el inductor, con un resistor y estudiamos el comportamiento del circuito. Ahora conectaremos un capacitor con un inductor, como se ilustra en la figura 31.11, la combinación es un **circuito LC**. Cuando el interruptor está en la posición *a* como en la figura 31.11, la batería está cargando el capacitor. Debido a que no asumimos resistencia en el circuito, este proceso de carga es esencialmente instantáneo. Además, la ausencia de resistencia significa que ninguna energía en el circuito se transforma en energía interna. También suponemos una situación idealizada en la que la energía no se irradia lejos del circuito ( $T_{ER}$  en la ecuación 8.2). En realidad, esta radiación ocurrirá, y se trata en el capítulo 33.

Cuando el capacitor está totalmente cargado, la energía se almacena en el campo eléctrico del capacitor y es igual a  $U_E = Q_{\text{máx}}^2/2C$  (ecuación 25.13). Con el interruptor en la posición *a*, el inductor no está en el circuito, por lo que no se almacena energía en el inductor. Ahora imagine que el interruptor de la figura 31.11 se coloca en la posición *b*. El capacitor comienza a descargarse; la velocidad a la que las cargas abandonan las placas del capacitor (que también es la velocidad a la que cambia la carga en el capacitor) es igual a la corriente en el circuito. La energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor disminuye. Debido a que hay una corriente en el circuito, parte de la energía ahora se almacena en el campo magnético del inductor. Por lo tanto, la energía se transfiere del campo eléctrico del capacitor al campo magnético del inductor. Cuando el capacitor está completamente descargado, no almacena energía. En este momento, la corriente alcanza su valor máximo y toda la energía en el circuito se almacena en el inductor. La corriente continúa en la misma dirección, disminuyendo en magnitud, con el capacitor llegando a estar completamente cargado otra vez pero con la polaridad de sus placas ahora opuesta a la polaridad inicial. En ese punto, la corriente se detiene y no hay energía almacenada en el inductor. Al proceso anterior le sigue otra descarga, hasta que el circuito vuelve a su estado original de carga máxima,  $Q_{\text{máx}}$ , y la polaridad de la placa que aparece en la figura 31.11. La energía sigue oscilando entre el inductor y el capacitor.

Considere algún tiempo arbitrario  $t$  después de que el interruptor en la figura 31.11 es colocado en la posición *b*. En este momento, el capacitor tiene una carga  $q < Q_{\text{máx}}$  y la corriente sea  $i < I_{\text{máx}}$ . Ya que se ha supuesto que la resistencia del circuito es igual a cero y se ignora cualquier radiación electromagnética, la energía no se transforma en energía interna y tampoco se transfiere hacia el exterior del sistema del circuito. Con estas suposiciones, el circuito es un sistema aislado de energía, y la ecuación 8.2 se vuelve

Energía total almacenada en un  
circuito LC ▶

$$\Delta U_E + \Delta U_B = 0 \quad (31.18)$$

Derivando la ecuación 31.18 respecto al tiempo, utilizando las ecuaciones 25.13 y 31.12 para las energías almacenadas en el capacitor y el inductor, respectivamente:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = 0 \quad (31.19)$$

Es posible simplificar lo anterior a una ecuación diferencial de una variable si recuerda que la corriente en el circuito es igual a la rapidez a la cual cambia la carga en el capacitor:  $i = dq/dt$ . De lo anterior, se deduce que  $di/dt = d^2q/dt^2$ . Si sustituye estas relaciones en la ecuación 31.19, obtiene

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} q \quad (31.20)$$

Resuelva en función de  $q$  señalando que esta expresión tiene la misma forma que la ecuación análoga 15.3 para un movimiento armónico simple:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

donde  $k$  es la constante del resorte,  $m$  es la masa del bloque y la carga  $q$  juega el mismo papel matemático en la ecuación 31.20 que  $x$  en la ecuación 15.3. La solución de esta ecuación mecánica tiene la forma general (ecuación 15.6):

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

donde  $A$  es la amplitud del movimiento armónico simple (el valor máximo de  $x$ ),  $\omega$  es la frecuencia angular de este movimiento y  $\phi$  es la constante de fase; los valores de  $A$  y  $\phi$  dependen de las condiciones iniciales. Ya que la ecuación 31.20 es de la misma forma matemática que la ecuación diferencial del oscilador armónico simple, tiene la solución

$$q = Q_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi) \quad (31.21)$$

◀ Carga como función del tiempo para un circuito LC ideal

donde  $Q_{\text{máx}}$  es la carga máxima del capacitor y la frecuencia angular  $\omega$  es la raíz cuadrada del coeficiente de  $q$  en la ecuación 31.20 (Ver ecuación 15.3 y 15.5):

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (31.22)$$

◀ Frecuencia angular de oscilación en un circuito LC

La carga en el capacitor sufre una simple oscilación armónica, alternando polaridades. Advertir que la frecuencia angular de las oscilaciones depende solamente de la inductancia y capacitancia del circuito. La ecuación 31.22 proporciona la *frecuencia natural* de oscilación del circuito LC.

Ya que  $q$  varía de manera sinusoidal con el tiempo, la corriente en el circuito también varía de la misma forma. Lo anterior es demostrable derivando la ecuación 31.21 en función del tiempo:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q_{\text{máx}} \sin(\omega t + \phi) = -I_{\text{máx}} \sin(\omega t + \phi) \quad (31.23)$$

◀ Corriente como función del tiempo para un circuito LC ideal

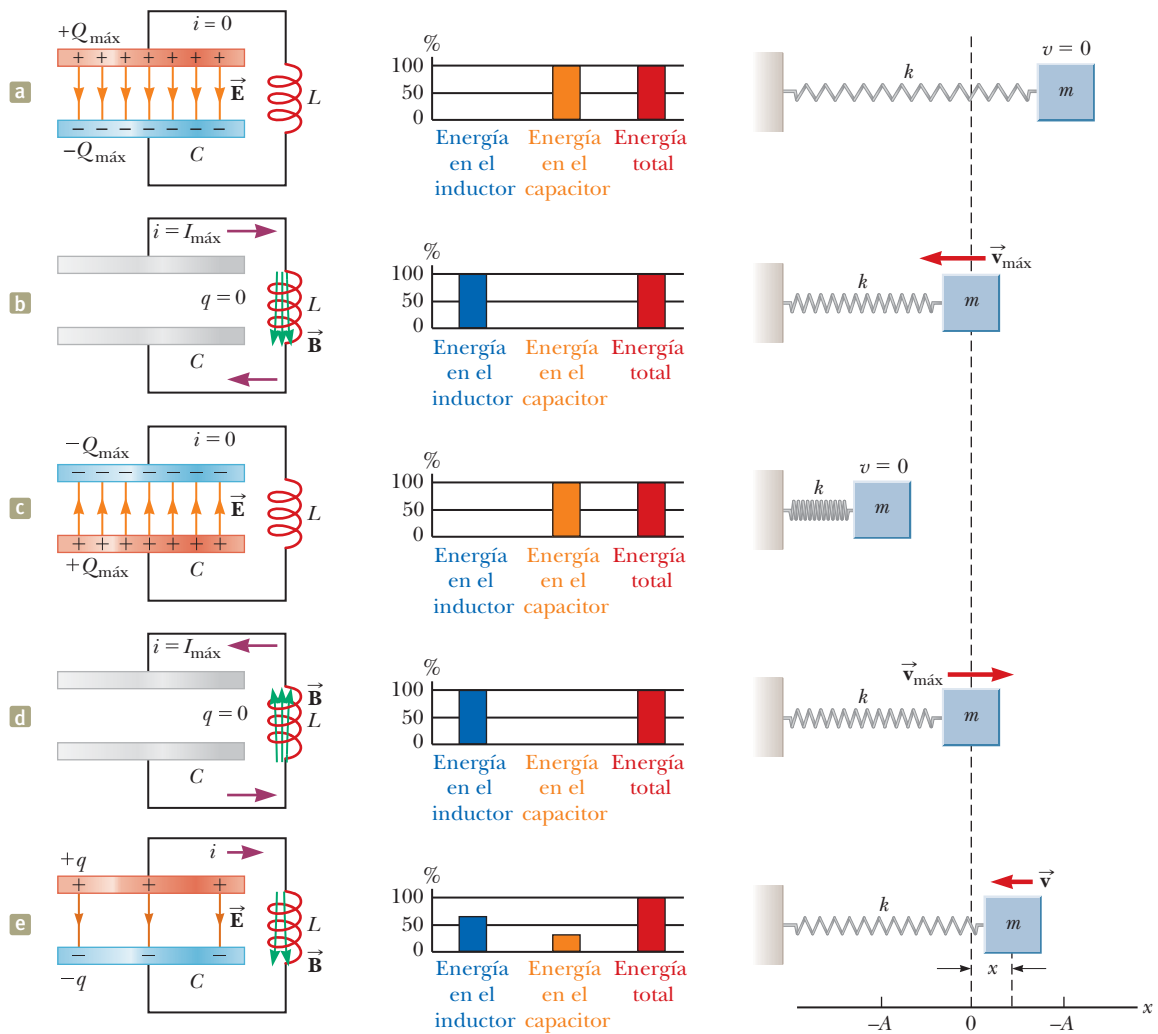
En la figura 31.12 (página 836) se muestra una representación de las oscilaciones de la energía en un circuito LC. Como se mencionó, el comportamiento del circuito es análogo al de la partícula en un movimiento armónico simple estudiado en el capítulo 15. Por ejemplo, considere el sistema bloque-resorte mostrado en la figura 15.10. Las oscilaciones de este sistema se muestran en la figura 31.12 a la derecha. La energía potencial  $\frac{1}{2}kx^2$  almacenada en un resorte estirado es análoga a la energía potencial  $Q_{\text{máx}}^2/2C$  almacenada en el capacitor en la figura 31.12. La energía cinética  $\frac{1}{2}mv^2$  del bloque en movimiento es análoga a la energía magnética  $\frac{1}{2}Li^2$  almacenada en el inductor, que requiere la presencia de cargas en movimiento. En la figura 31.12a, toda la energía se almacena como energía potencial eléctrica en el capacitor en  $t = 0$  (porque  $i = 0$ ), lo mismo que toda la energía en un sistema bloque-resorte inicialmente está almacenada como energía potencial en el resorte si se estira y libera en  $t = 0$ . En la figura 31.12b, toda la energía se almacena como energía magnética  $\frac{1}{2}LI_{\text{máx}}^2$  en el inductor, donde  $I_{\text{máx}}$  es la corriente máxima. Las figuras 31.12c y 31.12d muestran situaciones consecutivas de cuarto de ciclo en que la energía es toda eléctrica o toda magnética. En puntos intermedios, parte de la energía es eléctrica y parte es magnética (figura 31.12e).

En la figura 31.13 (página 836) se muestran gráficas de  $q$  en función de  $t$  y de  $i$  en función de  $t$ . Observe que la carga en el capacitor oscila entre los valores extremos  $Q_{\text{máx}}$  y  $-Q_{\text{máx}}$ , y que la corriente oscila entre  $I_{\text{máx}}$  y  $-I_{\text{máx}}$ . Además, la corriente está  $90^\circ$  fuera de fase con la carga. Es decir, cuando la carga está en un valor máximo, la corriente es igual a cero, y cuando la carga es cero, la corriente tiene su valor máximo.

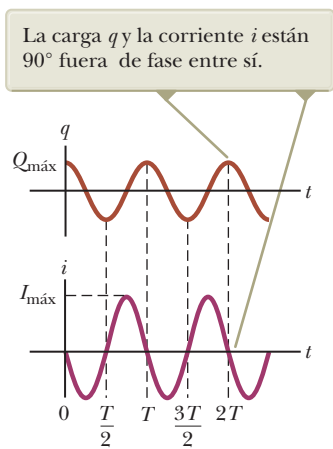
En la figura 31.14 (página 836) se muestran gráficamente variaciones de  $U_E$  y  $U_B$  en función del tiempo. La suma de  $U_E + U_B$  es una constante y es igual a la energía total  $Q_{\text{máx}}^2/2C$ , o  $\frac{1}{2}LI_{\text{máx}}^2$ . Verificar analíticamente lo anterior es simple. Las amplitudes de las dos gráficas en la figura 31.14 deben ser iguales porque la energía máxima almacenada en el capacitor (cuando  $I = 0$ ) debe ser igual a la energía máxima almacenada en el inductor (cuando  $Q = 0$ ). Esta igualdad se expresa matemáticamente como

$$\frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C} = \frac{LI_{\text{máx}}^2}{2}$$

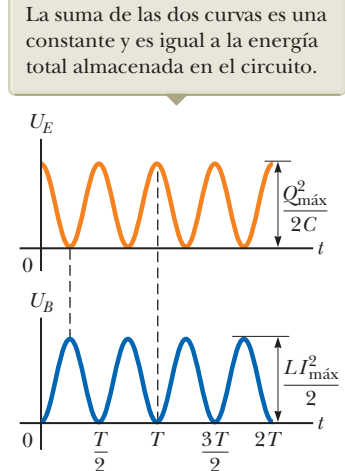




**Figura 31.12** Transferencia de energía en un circuito LC sin resistencia y no radiante. El capacitor tiene una carga  $Q_{\text{máx}}$  en  $t = 0$ , en el instante en que el interruptor en la figura 31.11 se coloca en la posición *b*. La analogía mecánica de este circuito es la partícula en un movimiento armónico simple, representado por un sistema bloque-resorte a la derecha de la figura. (a) – (d). En estos instantes especiales, toda la energía del circuito reside en uno de sus elementos. (e) En un instante arbitrario, la energía se divide entre el capacitor y el inductor.



**Figura 31.13** Gráficas de la carga con el tiempo y de la corriente en función del tiempo para un circuito LC sin resistencia y sin radiación.



**Figura 31.14** Gráficas de  $U_E$  y de  $U_B$  en función de  $t$  para un circuito LC sin resistencia y sin radiación.



En el caso ideal las oscilaciones persistirán en el circuito de manera indefinida; sin embargo, recuerde que la energía total  $U$  en el circuito permanece constante sólo si se ignoran las transferencias y transformaciones de energía. En circuitos reales siempre existirá alguna resistencia y, en consecuencia, parte de la energía se transformará en energía interna. Al principio de esta sección se mencionó que también se ignoraría la radiación del circuito. En realidad, en este tipo de circuito la radiación es inevitable y la energía total del circuito disminuye de manera continua como consecuencia de este proceso.

- E XAMEN RÁPIDO 31.5** (i) En un instante del tiempo durante las oscilaciones de un circuito  $LC$ , la corriente pasa por su valor máximo. En ese instante, ¿qué pasa con el voltaje a través del capacitor? (a) Es diferente del correspondiente en las terminales del inductor, (b) es igual a cero, (c) alcanza su máximo valor, (d) es imposible de determinar. (ii) Ahora considere el instante en el que la corriente es momentáneamente igual a cero. Para las mismas opciones, describa la magnitud del voltaje a través del capacitor en este instante.

### Ejemplo 31.6 Oscilaciones en un circuito $LC$

En la figura 31.11, la batería tiene una fem de 12.0 V, la inductancia es de 2.81 mH y la capacitancia es de 9.00 pF. El interruptor se pone en la posición  $a$  durante un tiempo considerable, de modo que el capacitor se carga. Luego el interruptor se pone en la posición  $b$ , retirando la batería del circuito y se conecta el capacitor directamente a través del inductor.

(A) Determine la frecuencia de oscilación del circuito.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Cuando el interruptor se pone en la posición  $b$ , la parte activa del circuito es la espira de la derecha, que es un circuito  $LC$ .

**Categorizar** Dado que se aplican las ecuaciones desarrolladas en esta sección; este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 31.22 para encontrar la frecuencia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$f = \frac{1}{2\pi[(2.81 \times 10^{-3} \text{ H})(9.00 \times 10^{-12} \text{ F})]^{1/2}} = 1.00 \times 10^6 \text{ Hz}$$

(B) ¿Cuáles son los valores máximos de carga en el capacitor y la corriente en el circuito?

#### SOLUCIÓN

Encuentre la carga inicial en el capacitor, que es igual a la carga máxima:

$$Q_{\text{máx}} = C\Delta V = (9.00 \times 10^{-12} \text{ F})(12.0 \text{ V}) = 1.08 \times 10^{-10} \text{ C}$$

Use la ecuación 31.23 para encontrar la corriente máxima en términos de la carga máxima:

$$\begin{aligned} I_{\text{máx}} &= \omega Q_{\text{máx}} = 2\pi f Q_{\text{máx}} = (2\pi \times 10^6 \text{ s}^{-1})(1.08 \times 10^{-10} \text{ C}) \\ &= 6.79 \times 10^{-4} \text{ A} \end{aligned}$$

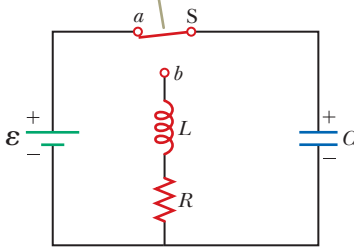
## 31.6 Circuito RLC

El circuito  $LC$  que estudió en la sección 31.5 fue idealizado: la resistencia del circuito fue cero. Pasemos ahora nuestra atención a un circuito más realista que consiste en una resistencia, un inductor y un capacitor conectados como se muestra en la figura 31.15a (página 838). Suponemos que la resistencia del resistor representa toda la resistencia en el circuito. Supongamos que el interruptor ha estado en la posición  $a$  durante un tiempo prolongado, de modo que el capacitor tiene una carga inicial  $Q_{\text{máx}}$ . El interruptor ahora se coloca en la posición  $b$  como se muestra en la figura 31.15b. Los tres elementos del circuito ahora están conectados en serie. Si se continúa ignorando la radiación electromagnética del circuito, se puede escribir la reducción apropiada de la ecuación 8.2 para el circuito como

$$\Delta U_E + \Delta U_B + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

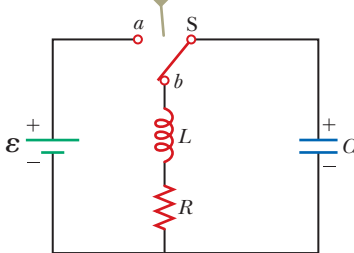


El interruptor se ajusta primero a la posición *a*, y el capacitor se carga.



a

El interruptor se coloca en la posición *b* y comienzan las oscilaciones.



b

**Figura 31.15** Un circuito *RLC* en serie. (a) Con el interruptor en la posición *a*, la batería carga el capacitor. (b) Cuando el interruptor se coloca en la posición *b*, la batería se retira del circuito y la corriente en el circuito *RLC* oscila.

donde la energía interna representa el calentamiento del resistor. Ahora derive esta ecuación con respecto al tiempo:

$$\frac{dU_E}{dt} + \frac{dU_B}{dt} + \frac{dE_{int}}{dt} = 0$$

Use las ecuaciones 25.13 y 31.12 para evaluar las dos primeras derivadas, y reconozca que el tercer término es la velocidad a la que la energía se entrega al resistor:

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} + i^2 R = 0$$

Reconociendo que la corriente en el circuito es igual a la rapidez de cambio de carga en el capacitor, sustitúyalo  $i = dq/dt$ , y reorganice:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \tag{31.24}$$

El circuito *RLC* es análogo al oscilador armónico amortiguado que se analiza en la sección 15.6 y se ilustra en la figura 15.19. La ecuación del movimiento para una partícula sometida a una oscilación armónica amortiguada es, a partir de la ecuación 15.31,

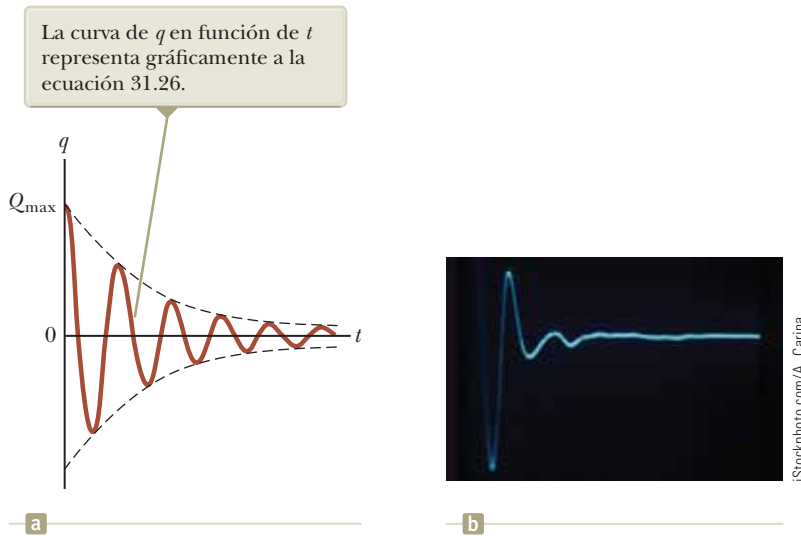
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{31.25}$$

Comparando las ecuaciones 31.24 y 31.25, observe que  $q$  corresponde a la posición  $x$  de la partícula en cualquier instante,  $L$  a la masa  $m$  de la partícula,  $R$  al coeficiente de amortiguamiento  $b$ , y  $C$  a  $1/k$ , donde  $k$  es la fuerza constante del resorte. Estas y otras relaciones se enumeran en la Tabla 31.1.

Debido a que la solución analítica de la ecuación 31.24 es engorrosa, brindamos solo una descripción cualitativa del comportamiento del circuito. En el caso más simple, cuando  $R = 0$ , la ecuación 31.24 se reduce a la de un circuito *LC* simple como se esperaba, y la carga y la corriente oscilan sinusoidalmente en el tiempo. Esta situación es equivalente a eliminar toda la amortiguación en el oscilador mecánico.

**TABLA 31.1** Analogías entre circuitos *RLC* y una partícula en movimiento armónico amortiguado

Circuito <i>RLC</i>		Partícula en movimiento armónico amortiguado en una dimensión
Carga	$q \leftrightarrow x$	Posición
Corriente	$i \leftrightarrow v_x$	Velocidad
Diferencia de potencial	$\Delta V \leftrightarrow F_x$	Fuerza
Resistencia	$R \leftrightarrow b$	Coefficiente de amortiguación viscosa ( $k =$ constante del resorte)
Capacitancia	$C \leftrightarrow 1/k$	Masa
Inductancia	$L \leftrightarrow m$	
Corriente derivada respecto al tiempo de la carga	$i = \frac{dq}{dt} \leftrightarrow v_x = \frac{dx}{dt}$	Velocidad derivada respecto al tiempo de posición
Rapidez de cambio de la corriente segunda derivada respecto al tiempo de la carga	$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \leftrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Aceleración segunda derivada respecto al tiempo de posición
Energía en el inductor	$U_B = \frac{1}{2} Li^2 \leftrightarrow K = \frac{1}{2} mv^2$	Energía cinética de un objeto en movimiento
Energía en el capacitor	$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \leftrightarrow U = \frac{1}{2} kx^2$	Energía potencial almacenada en un resorte
Rapidez de pérdida de energía causada por la resistencia	$i^2 R \leftrightarrow bv^2$	Rapidez de pérdida de energía causada por la fricción
Circuito <i>RLC</i>	$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \leftrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$	Partícula en un movimiento armónico amortiguado



**Figura 31.16** (a) Carga en función del tiempo para un circuito RLC amortiguado. La carga disminuye en esta forma cuando  $R < \sqrt{4L/C}$ . (b) Patrón de osciloscopio que muestra el decaimiento en las oscilaciones de un circuito RLC.

Cuando  $R$  es pequeña, una situación análoga a la amortiguación de la luz en el oscilador mecánico, la solución de la ecuación 31.24 es

$$q = Q_{\text{máx}} e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t \quad (31.26)$$

donde  $\omega_d$ , la frecuencia angular a la que oscila el circuito, está dada por

$$\omega_d = \left[ \frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (31.27)$$

Es decir, el valor de la carga en el capacitor se somete a una oscilación armónica amortiguada en analogía con el sistema partícula-resorte moviéndose en un medio viscoso. La ecuación 31.27 muestra que cuando  $R \ll \sqrt{4L/C}$  (de manera que el segundo término entre los paréntesis cuadrados es mucho menor que el primero), la frecuencia  $\omega_d$  del oscilador amortiguado se acerca al oscilador no amortiguado,  $1/\sqrt{LC}$ . Debido a que  $i = dq/dt$ , se deduce que la corriente también se somete a una oscilación armónica amortiguada. En la figura 31.16a se muestra la gráfica de la carga contra el tiempo para el oscilador amortiguado y en la figura 31.16b se muestra una línea de registro de un osciloscopio para un circuito real RLC. El valor máximo de  $q$  disminuye después de cada oscilación, lo mismo que disminuye con el tiempo la amplitud de un sistema partícula-resorte.

Para valores de  $R$  más grandes, las oscilaciones se amortiguan con mayor rapidez; de hecho, existe un valor crítico de la resistencia  $R_c = \sqrt{4L/C}$  por encima del cual no se presentan oscilaciones. Se dice que un sistema con  $R = R_c$  está *críticamente amortiguado*. Cuando  $R$  excede a  $R_c$ , se dice que el sistema está *sobreamortiguado*.

Ahora, ¿qué está pasando con los círculos desbastados en la calle en la semblanza de apertura? En esos círculos, hay una espira de alambre enterrado debajo de la superficie de la calle. Como sabemos por este capítulo, una espira de alambre actúa como un inductor. La espira debajo de la calle está conectada a un circuito, por cables enterrados en los cortes en línea recta que vemos en la fotografía. El circuito es un circuito RLC, con la espira en la calle actuando como la inducción primaria  $L$  en el circuito. La electrónica de control impulsa el circuito de RLC con un voltaje oscilante para que el circuito oscile a su frecuencia natural, dada por la ecuación 31.27. Cuando un vehículo sube y se detiene sobre la espira, la inductancia del circuito cambia por dos razones: (1) El metal del automóvil representa un material magnético (sección 29.6), que altera el campo magnético que pasa por la espira; y (2) las corrientes de eddy (sección 30.6) son inducidas en el metal del automóvil, produciendo líneas de campo magnético adicionales que pasan a través de la espira de inductancia. El cambio en la inductancia  $L$  de la espira cambia su frecuencia natural de oscilación. La electrónica de control detecta este cambio y envía una señal para cambiar la luz de rojo a verde.



# Resumen

## ► Conceptos y principios

Cuando la corriente en una espira de alambre cambia con el tiempo, se induce una fem en la espira de acuerdo con la ley de Faraday. La fem autoinducida es

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad (31.1)$$

donde  $L$  es la **inductancia** de la espira. La inductancia es una medida de cuánta oposición ofrece la espira a un cambio en la corriente en la espira. La inductancia tiene la unidad SI de **henry** (H), donde  $1 \text{ H} = 1 \cdot \text{s/A}$ .

La inductancia de cualquier bobina es

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad (31.2)$$

donde  $N$  es el número total de vueltas y  $\Phi_B$  es el flujo magnético a través de la bobina. La inductancia de un dispositivo depende de su geometría. Por ejemplo, la inductancia de un solenoide con núcleo de aire es

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \quad (31.4)$$

donde  $\ell$  es la longitud del solenoide y  $A$  es el área de sección transversal.

La energía almacenada en el campo magnético de un inductor que porta una corriente  $i$  es

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 \quad (31.12)$$

Esta energía es la contraparte magnética de la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor cargado.

La densidad de energía en un punto donde el campo magnético es  $B$  es

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (31.14)$$

En un circuito  $LC$  que tenga resistencia cero y no radie electromagnéticamente (una idealización), los valores de la carga en el capacitor y la corriente en el circuito varían sinusoidalmente en el tiempo con una frecuencia angular dada por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (31.22)$$

La energía en un circuito  $LC$  se transfiere de manera continua entre la energía almacenada en el capacitor y la energía almacenada en el inductor.

Si un resistor y un inductor se conectan en serie a una batería de fem  $\mathcal{E}$  en el tiempo  $t = 0$ , la corriente en el circuito varía en el tiempo de acuerdo con la expresión

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (31.7)$$

donde  $\tau = L/R$  es la **constante de tiempo** del circuito  $RL$ . Si se sustituye la batería en el circuito por un alambre sin resistencia, la corriente decae exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la expresión

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (31.10)$$

donde  $\mathcal{E}/R$  es la corriente inicial en el circuito.

La **inductancia mutua** de un sistema de dos bobinas es

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} = M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2} = M \quad (31.15)$$

Esta inductancia mutua permite relacionar la fem inducida en una bobina con la fuente de corriente variable en una bobina cercana usando las relaciones

$$\mathcal{E}_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt} \quad (31.16, 31.17)$$

En un circuito  $RLC$  con resistencia pequeña, la carga en el capacitor varía con el tiempo de acuerdo con

$$q = Q_{\text{máx}} e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t \quad (31.26)$$

donde

$$\omega_d = \left[ \frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (31.27)$$

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

1. Un miembro de su grupo sugiere que el circuito  $RL$  en la figura 31.5a se modifique de modo que se agregue un tercer interruptor  $S_3$  como se muestra en la figura TP31.1. El interruptor  $S_1$  ha estado cerrado durante un tiempo prolongado y el interruptor  $S_2$  ha estado en la posición  $a$  durante mucho tiempo, de modo que la corriente en el inductor ha

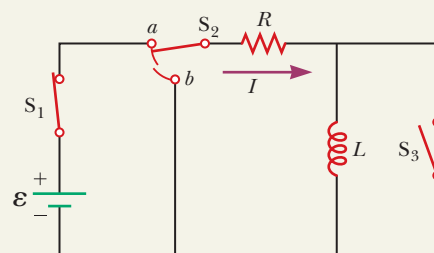


Figura TP31.1

alcanzado su valor máximo. El inductor tiene una resistencia  $RL$  en sus bobinados. Ahora, el interruptor  $S_3$  se cierra en  $t = 0$ . El miembro del grupo que sugirió el circuito reta al resto del grupo a discutir y resolver el siguiente problema: Encuentre la corriente subsiguiente en función del tiempo en (a) el resistor  $R$ , (b) el inductor  $L$ , y (c) el interruptor  $S_3$ . Como una pregunta extra, el grupo recibe el siguiente desafío: (d) ¿Cuál es la corriente en el interruptor  $S_3$  en el tiempo  $t = 0$ ?

2. **ACTIVIDAD** Su equipo ha utilizado un registrador de datos con software de gráficos para tomar datos sobre el voltaje a través del capacitor en el circuito  $RLC$  de la figura 31.15. El interruptor  $S$  ha estado en la posición  $a$  durante mucho tiempo y luego se lanza a la posición  $b$ . Usted sabe que la capacitancia  $C$  es 15.0 mF. Su registrador de datos hace una gráfica del voltaje a través del capacitor como una función de tiempo, con  $t = 0$  en el instante en que el interruptor fue colocado en la posición  $b$ . El gráfico se muestra en la figura TP31.2. Usando el gráfico, discuta esta situación en su grupo y determine (a) la fem de la batería, (b) la inductancia  $L$  y (c) la resistencia  $R$ .

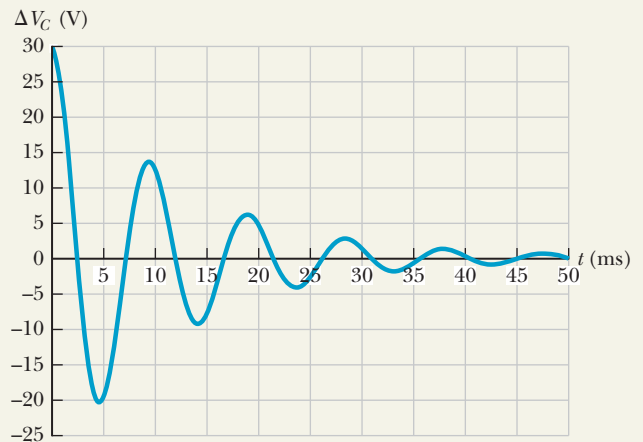


Figura TP31.2

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN From Cengage

### SECCIÓN 31.1 Autoinducción e inductancia

- Un inductor de 2.00 H lleva una corriente estable de 0.500 A. Cuando se abre el interruptor en el circuito, después de 10.0 ms, la corriente es, efectivamente, igual a cero. ¿Cuál es la fem inducida promedio en el inductor durante este tiempo?
- Un cable de teléfono enroscado forma una espira de 70.0 vueltas, con un diámetro de 1.30 cm y una longitud sin estirar de 60.0 cm. Determine la autoinductancia de un conductor en el cable sin estirar.
- Una fem de 24.0 mV es inducida en una bobina de 500 vueltas en el instante en que la corriente está cambiando con una rapidez de 10.0 A/s. ¿Cuál es el flujo magnético a través de cada vuelta de la bobina en un instante en que la corriente es 4.00 A?
- Una corriente de 40.0 mA se conduce por un solenoide con núcleo de aire uniformemente rodeada con 450 vueltas, un diámetro de 15.0 mm y longitud de 12.0 cm. Calcule (a) el campo magnético dentro del solenoide, (b) el flujo magnético a través de cada vuelta, y (c) la inductancia del solenoide. (d) ¿Qué pasaría si? Si la corriente fuera diferente, ¿cuál de estas cantidades cambiaría?
- En un solenoide de inductancia  $L$ , una fem autoinducida cambia con el tiempo de la forma  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-kt}$ . Suponiendo que la carga es finita, determine la carga total que pasa a través de un punto del alambre del solenoide.

6. **S** Un toroide tiene un radio mayor  $R$  y un radio menor  $r$ , y está estrechamente enrollado con  $N$  vueltas de alambre en un toro de cartón hueco.

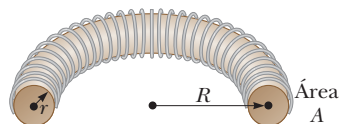


Figura P31.6

La figura P31.6 muestra la mitad de este toroide, permitiendo la vista de su sección transversal. Si  $R \gg r$ , el campo

magnético en la región encerrada por el alambre del toroide es esencialmente el mismo que el campo magnético de un solenoide que ha sido doblado en un gran círculo de radio  $R$ . Modele con un campo uniforme de un solenoide largo y demuestre que la inductancia de dicho toroide es aproximadamente igual a

$$L \approx \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \frac{r^2}{R}$$

7. **T** Un inductor de 10.0 mH conduce una corriente  $i = I_{\max} \sin \omega t$ , con  $I_{\max} = 5.00$  A y  $f = \omega / 2\pi = 60.0$  Hz. ¿Cuál es la fem autoinducida como una función de tiempo?

8. La corriente en un inductor de 4.00 m H varía en el tiempo como se muestra en la figura P31.8. Construya una gráfica de la fem autoinducida a través del inductor durante el intervalo de tiempo  $t = 0$  a  $t = 12.0$  ms.

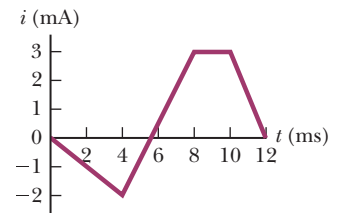


Figura P31.8

9. **CE** Usted está trabajando como técnico eléctrico. Un día, en el campo, necesita un inductor, pero no puede encontrar uno. Al mirar en su gabinete de suministro de alambre, encuentra un tubo de cartón con un solo conductor enrollado de manera uniforme para formar un solenoide. Cuenta cuidadosamente las vueltas del alambre y descubre que hay 580 vueltas. El diámetro del tubo es de 8.00 cm, y la longitud de la porción enrollada con alambre es de 36.0 cm. Entonces, saca su calculadora para determinar (a) la inductancia de la bobina y (b) la fem generada en ella si la corriente en el cable aumenta a una razón de 4.00 A/s.

### SECCIÓN 31.2 Circuitos RL

10. Un solenoide de 510 vueltas tiene un radio de 8.00 mm y una longitud total de 14.0 cm. (a) ¿Cuál es su inductancia? (b) Si el solenoide está conectado en serie con un resistor de 2.50  $\Omega$  y una batería, ¿cuál es la constante de tiempo del circuito?



11. Un circuito  $RL$  en serie con  $L = 3.00 \text{ H}$  y un circuito  $RL$  en serie con  $C = 3.00 \mu\text{F}$  tienen constantes de tiempo idénticas. Si los dos circuitos contienen la misma resistencia  $R$ , (a) ¿cuál es el valor de  $R$ ? y (b) ¿cuál es el valor de la constante de tiempo?

12. Demuestre que  $i = I_1 e^{-t/\tau}$  es una solución de la ecuación diferencial

$$iR + L \frac{di}{dt} = 0$$

donde  $I_1$  es la corriente en  $t = 0$  y  $\tau = L/R$ .

13. Un circuito consta de una bobina, un interruptor y una batería, todos conectados en serie. La resistencia interna de la batería es insignificante en comparación con la de la bobina. El interruptor está originalmente abierto. Éste se cierra y después de un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la corriente en el circuito llega a 80.0% de su valor final. El interruptor permanece entonces cerrado por un intervalo de tiempo mucho más largo que  $\Delta t$ . Los cables conectados a las terminales de la batería están a continuación en corto circuito con otro alambre y se eliminan de la batería, de modo que la corriente es ininterrumpida. (a) En un instante que es un intervalo de tiempo  $\Delta t$  después del cortocircuito, ¿en qué porcentaje de su valor máximo está la corriente? (b) En el momento  $2\Delta t$  después de que la bobina tiene un cortocircuito, ¿qué porcentaje de su valor máximo tiene la corriente en la bobina?

14. Está trabajando como asistente de demostración para un profesor de física. Él le muestra el circuito en la figura P31.14, que quiere que construya para una próxima clase. El foco es del tipo incandescente doméstico que recibe energía a una tasa de 40.0 W cuando funciona a 120 V. Tiene una resistencia  $R_1$ , que, por simplicidad, asumiremos que es constante en todos los voltajes operativos. La batería en el circuito tiene una fem de 12.0 V. Cuando el interruptor se ha cerrado por un tiempo prolongado, el foco se ilumina débilmente, ya que solo funciona con 12.0 V. Sin embargo, cuando se abre el interruptor, el foco parpadea y luego gradualmente se apaga hasta llegar a la oscuridad. Su profesor quiere que usted determine dos valores: (a) la resistencia  $R_2$  que es necesaria para que el foco parpadee inicialmente, cuando se abra el interruptor, con el mismo brillo que tendría si se enchufa en una toma de 120 V; (b) la inductancia  $L$  necesaria para mantener la corriente en el foco por encima del 50.0% de su valor cuando se abre el interruptor, durante un intervalo de tiempo de 2.00 s después de su apertura. Supongamos un inductor libre de resistencia y que la resistencia del foco no varía con la temperatura.

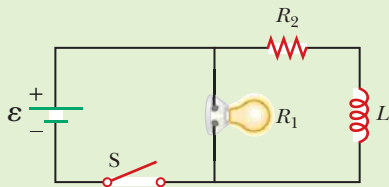


Figura P31.14

15. El interruptor de la figura P31.15 está abierto durante  $t < 0$  y después se cierra en  $t = 0$ . Suponga que  $R = 4.00 \Omega$ ,  $L = 1.00 \text{ H}$  y  $\mathcal{E} = 10.0 \text{ V}$ . (a) Determine la corriente en el inductor y (b) la corriente en el interruptor como funciones de tiempos posteriores.

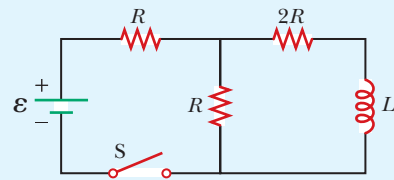


Figura P31.15 Problemas 15, 16, y 38.

16. El interruptor de la figura P31.15 está abierto durante  $t < 0$  y después se cierra en  $t = 0$ . (a) Determine la corriente en el inductor y (b) la corriente en el interruptor como funciones de tiempos posteriores.

17. Un inductor que tiene una inductancia de 15.0 H y una resistencia de  $30.0 \Omega$  está conectado a una batería de 100 V. ¿Cuál es la rapidez de incremento de la corriente (a) en  $t = 0$  y (b) en  $t = 1.50 \text{ s}$ ?

18. Considere dos inductores ideales  $L_1$  y  $L_2$  que tienen una resistencia interna igual a *cero* y muy separados uno del otro, de forma que sus campos magnéticos no influyen entre sí. (a) Si los inductores están conectados en serie, demuestre que son equivalentes a un solo inductor ideal que tenga  $L_{eq} = L_1 + L_2$ . (b) Si los dos inductores están conectados en paralelo, demuestre que son equivalentes a un solo inductor ideal que tenga  $1/L_{eq} = 1/L_1 + 1/L_2$ . (c) ¿Qué pasaría si? Ahora considere dos inductores  $L_1$  y  $L_2$  que tengan, respectivamente, resistencias internas  $R_1$  y  $R_2$  diferentes de cero. Suponga que incluso se encuentran alejadas una de la otra, de manera que su inductancia mutua sea igual a cero. Si los inductores están conectados en serie, demuestre que son equivalentes a un solo inductor que tenga  $L_{eq} = L_1 + L_2$  y  $R_{eq} = R_1 + R_2$ . (d) Si estos mismos inductores estuvieran conectados en paralelo, ¿es cierto que son equivalentes a un solo inductor ideal que tenga  $1/L_{eq} = 1/L_1 + 1/L_2$  y  $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2$ ? Explique su respuesta.

19. Considere el pulso de corriente  $i(t)$  que se muestra en la figura P31.19a. La corriente comienza desde cero y se convierte después en 10.0 A entre  $t = 0$  y  $t = 200 \mu\text{s}$ , y a continuación vuelve a ser igual a cero. Este pulso es aplicado a la entrada del circuito parcial mostrado en la figura P31.19b. Determine la corriente en el inductor como una función del tiempo.

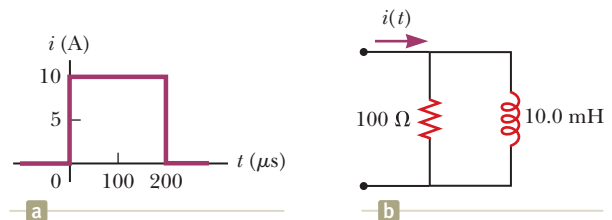


Figura P31.19

SECCIÓN 31.3 Energía en un campo magnético

20. Calcule la energía asociada con el campo magnético de un solenoide de 200 vueltas en el que una corriente de 1.75 A produce un flujo magnético de  $3.70 \text{ T} \cdot \text{m}^2$  en cada vuelta.
21. Un solenoide de 68 vueltas con núcleo de aire tiene 8.00 cm de largo y un diámetro de 1.20 cm. ¿Cuánta energía se almacena en su campo magnético cuando conduce una corriente de 0.770 A?

22. Complete el cálculo del ejemplo 31.3 probando que

**S** 
$$\int_0^{\infty} e^{-2Rt/L} dt = \frac{L}{2R}$$

23. Una batería 24.0 V está conectada en serie con un resistor y un inductor, con  $R = 8.00 \Omega$  y  $L = 4.00$  H, respectivamente. Encuentre la energía almacenada en el inductor (a) cuando la corriente alcanza su valor máximo y (b) en un instante que es un intervalo de tiempo de una constante de tiempo después de que el interruptor se cierra.

24. Una bobina plana de alambre tiene una inductancia de 40.0 mH y una resistencia de 5.00  $\Omega$ . Está conectada a una batería de 22.0 V en el instante  $t = 0$ . Considere el momento cuando la corriente es de 3.00 A. (a) ¿Con qué rapidez entrega energía la batería? (b) ¿Cuál es la potencia entregada al resistor? (c) ¿Con qué rapidez se almacena energía en el campo magnético de la bobina? (d) ¿Cuál es la relación entre estos tres valores de potencia? (e) La relación descrita en el inciso (d), ¿también es verdadera en otros instantes? (f) Explique la relación en el momento inmediatamente después de  $t = 0$  y en un momento algunos segundos más tarde.

**SECCIÓN 31.4 Inductancia mutua**

25. Una fem de 96.0 mV es inducida en los devanados de una bobina cuando la corriente en una bobina cercana está aumentando con una rapidez de 1.20 A/s. ¿Cuál es la inductancia mutua de las dos bobinas?

26. Dos solenoides A y B, colocados uno cerca del otro y compartiendo el mismo eje cilíndrico, tienen 400 y 700 vueltas, respectivamente. En el solenoide A una corriente de 3.50 A produce un flujo promedio de 300  $\mu$ Wb por cada vuelta de A y un flujo de 90.0  $\mu$ Wb por cada vuelta de B. (a) Calcule la inductancia mutua de los dos solenoides. (b) ¿Cuál es la inductancia de A? (c) ¿Cuál es la fem inducida en B cuando la corriente en A aumenta con una rapidez de 0.500 A/s?

27. Un solenoide  $S_1$  tiene  $N_1$  vueltas, radio  $R_1$  y longitud  $\ell$ . Es tan largo que su campo magnético es uniforme casi en todas partes dentro de él y casi cero fuera. Un segundo solenoide  $S_2$  tiene  $N_2$  vueltas, radio  $R_2 < R_1$  y la misma longitud que  $S_1$ .  $S_2$  se encuentra dentro del primer solenoide, con sus ejes paralelos. (a) Suponga que  $S_1$  conduce corriente variable  $i$ . Calcule la inductancia mutua que caracteriza la fem inducida en  $S_2$ . (b) Ahora suponga que  $S_2$  conduce corriente  $i$ . Calcule la inductancia mutua a la que es proporcional la fem en  $S_1$ . (c) Establezca cómo se comparan mutuamente los resultados de los incisos (a) y (b).

28. Dos espiras sencillas circulares de una vuelta de alambre tienen radios  $R$  y  $r$ , con  $R \gg r$ . Las espiras se encuentran en el mismo plano y son concéntricas. (a) Demuestre que la inductancia mutua de las dos espiras es de aproximadamente  $M = \mu_0 \pi r^2 / 2R$ . (b) Evalúe  $M$  para  $r = 2.00$  cm y  $R = 20.0$  cm.

**SECCIÓN 32.5 Oscilaciones en un circuito LC**

29. En el circuito de la figura P31.29, la fem de la batería es de 50.0 V, la resistencia de 250  $\Omega$  y la capacitancia de 0.500  $\mu$ F. El interruptor S se cierra durante un largo periodo a través del capacitor y mide una diferencia de potencial de cero. Después de que se abre el interruptor, la diferencia de potencial

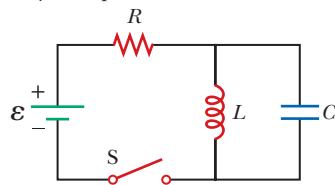


Figura P31.29

en las terminales del capacitor alcanza un valor máximo de 150 V. ¿Cuál es el valor de la inductancia?

30. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? El circuito LC que se muestra en la figura PC31.30 tiene  $L = 30.0$  mH y  $C = 50.0$   $\mu$ F. El capacitor tiene una carga inicial de 200  $\mu$ C. El interruptor está cerrado y el circuito sufre oscilaciones no amortiguadas LC. En instantes periódicos, las energías almacenadas por el capacitor y el inductor son iguales, con cada uno de los dos componentes de almacenamiento de 250  $\mu$ J.

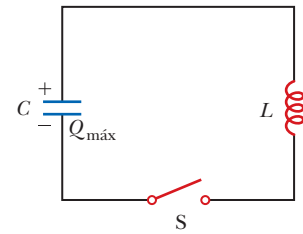


Figura P31.30 Problemas 30 y 32.

31. Un circuito LC está constituido por un inductor de 20.0 mH y un capacitor de 0.500  $\mu$ F. Si la corriente máxima instantánea es de 0.100 A, ¿cuál es la mayor diferencia de potencial en los extremos del capacitor?

32. Un circuito LC como el de la figura PC31.30 está constituido por un inductor de 3.30 H y un capacitor de 840 pF, inicialmente con una carga de 105  $\mu$ C. El interruptor se abre en  $t < 0$  y después se cierra en  $t = 0$ . Calcule las siguientes cantidades en  $t = 2.00$  ms: (a) la energía almacenada en el capacitor, (b) la energía almacenada en el inductor y (c) la energía total del circuito.

**SECCIÓN 31.6 Circuito RLC**

33. En la figura 31.15, supongamos que  $R = 7.60 \Omega$ ,  $L = 2.20$  mH y  $C = 1.80 \mu$ F. (a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada del circuito cuando el interruptor pasa a la posición *b*. (b) ¿Cuál es la resistencia crítica para las oscilaciones amortiguadas?

34. Demuestre que la ecuación 31.24 del texto se trata de la regla de las espiras de Kirchhoff aplicada al circuito de la figura 31.15b.

35. Oscilaciones eléctricas se inician en un circuito en serie que contiene una capacitancia  $C$ , una inductancia  $L$  y una resistencia  $R$ . (a) Si  $R \ll \sqrt{4L/C}$  (amortiguación débil), ¿cuánto tiempo pasará antes de que la amplitud de la oscilación de la corriente disminuya a 50.0% de su valor inicial? (b) ¿Cuánto tiempo tarda en disminuir la energía a 50.0% de su valor inicial?

**PROBLEMAS ADICIONALES**

36. **Problema de repaso.** Considere un capacitor con vacío entre sus placas grandes, cercanas, paralelas y con cargas opuestas. (a) Demuestre que la fuerza en una placa se explica al considerar que el campo eléctrico entre placas ejerce una "presión negativa" igual a la densidad de energía del campo eléctrico. (b) Considere dos hojas planas infinitas que llevan corrientes eléctricas en direcciones opuestas con densidades lineales  $J_s$  de corriente iguales. Calcule la fuerza por cada área que actúa sobre una hoja debida al campo magnético, de magnitud  $\mu_0 J_s / 2$  producido por la otra hoja. (c) Calcule el campo magnético neto entre las hojas y el campo exterior al volumen entre ellas. (d) Calcule la densidad de energía en el campo magnético entre las hojas. (e) Demuestre que la fuerza sobre una hoja se explica si se considera que el campo magnético entre las hojas ejerce una presión positiva igual a su densidad de energía. Este resultado para la presión magnética es aplicable a todas las configuraciones de corriente, no sólo a hojas de corriente.

**37. S** Un capacitor en un circuito  $LC$  en serie tiene una carga inicial  $Q$  y está descargándose. Cuando la carga sobre el capacitor es igual a  $Q/2$ , determine, en función de  $Q$ ,  $N$ ,  $L$  y  $C$ , el flujo a través de cada una de las  $N$  vueltas de la bobina.

**38. AMT C/C** En el circuito diagramado en la figura P31.15, suponga que el interruptor se cerró durante un largo intervalo de tiempo y se abrió en  $t = 0$ . Suponga además,  $R = 4.00 \Omega$ ,  $L = 1.00$  H y  $\mathcal{E} = 10.0$  V. (a) Antes de que el interruptor se abra, ¿el inductor se comporta como un circuito abierto, como un cortocircuito, un resistor de alguna resistencia particular o ninguna de estas opciones? (b) ¿Qué corriente porta el inductor? (c) ¿Cuánta energía se almacena en el inductor para  $t < 0$ ? (d) Después de que el interruptor se abre, ¿qué ocurre con la energía previamente almacenada en el inductor? (e) Bosqueje una gráfica de la corriente en el inductor para  $t \geq 0$ . Etiquete los valores inicial y final y la constante de tiempo.

**39.** (a) Una bobina circular y plana realmente no produce un campo magnético uniforme en el área que encierra. No obstante, estime la inductancia de una bobina plana, circular y compacta, con un radio  $R$  y  $N$  vueltas, al suponer que el campo en su centro es uniforme en toda el área. (b) Un circuito de una mesa de laboratorio está constituido por una batería de 1.5 V, un resistor de  $270 \Omega$ , un interruptor y tres cables de unión de 30 cm de largo que los conectan. Suponga que el circuito se arregla de forma circular. Piense en él como si fuera una bobina plana de una sola vuelta. Calcule el orden de magnitud de su inductancia y (c) de la constante de tiempo describiendo la rapidez con que aumenta la corriente cuando se cierra el interruptor.

**40. C/C** En el momento  $t = 0$ , una batería de 24.0 V se conecta a una bobina de 5.00 mH y un resistor de 6.00  $\Omega$ . (a) Inmediatamente después, ¿cómo se compara la diferencia de potencial a través del resistor, con la fem a través de la bobina? (b) Responda la misma pregunta acerca del circuito varios segundos después. (c) ¿Hay un instante en el que estos dos voltajes son iguales en magnitud? Si es así, ¿cuándo? ¿Hay más de uno de tales instantes? (d) Después de que una corriente de 4.00 A se establece en el resistor y la bobina, la batería súbitamente se sustituye por un cortocircuito. Responda de nuevo las preguntas (a), (b) y (c), con referencia a este nuevo circuito.

**41. CE** Está trabajando en un circuito  $LC$  para un experimento que realiza en su sótano. Usted tiene un capacitor apropiado, pero necesita construir su propio inductor. Desea cortar un anillo de madera con una sección transversal rectangular, como se muestra en la figura P31.41, de madera con un grosor de  $h = 1.00$  cm. Enrolla 500 vueltas de alambre alrededor de él para formar un inductor toroidal. Para su experimento, necesita tener  $1.82 \times 10^{-4}$  J de energía almacenada en el inductor cuando transmite una corriente de 2.00 A. Para cortar el anillo de madera apropiado, necesita determinar la relación  $b/a$ . Ignore cualquier efecto del núcleo de madera en el campo magnético.

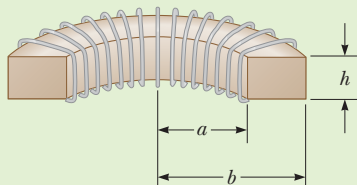


Figura P31.41 Problemas 41 y 42.

**42. CE** Está trabajando en un circuito  $LC$  para un experimento que realiza en su sótano. Usted tiene un capacitor apropiado, pero necesita construir su propio inductor. Desea cortar un anillo de madera con una sección transversal rectangular, como se muestra en la figura P31.41, de madera con un grosor  $h$ . Enrolla  $N$  vueltas de alambre alrededor de él para formar un inductor toroidal. Para su experimento, necesita tener energía  $U_B$  almacenada en el inductor cuando lleva una corriente  $i$ . Para cortar el anillo de madera apropiado, debe determinar la relación  $b/a$ . Ignore cualquier efecto del núcleo de madera en el campo magnético.

**43. CE S** Está tratando de representar a su campus en los Juegos Olímpicos de Física. Le acaban de dar un problema relacionado con el circuito que se muestra en la figura P31.43. Los valores de los elementos del circuito son  $\mathcal{E} = 12.0$  V,  $R = 10.0 \Omega$ ,  $C = 5.00$  mF y  $L = 2.00$  mH. El inductor está libre de resistencia y el capacitor comienza con carga cero. El interruptor S se ha configurado para estar en la posición  $a$  durante mucho tiempo. En  $t = 0$ , el interruptor S se coloca en la posición  $b$ . ¿Cuál es la carga en el capacitor en  $t = 1.00$  s? Para formar parte del equipo, ¿debe ser el primer participante en determinar la respuesta! ¿Listo? ¡Adelante!

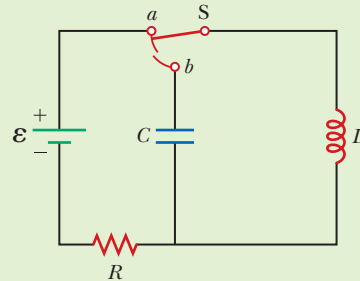


Figura P31.43

**44.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Usted está trabajando en un experimento con una conexión en serie de un capacitor cargado de 500  $\mu$ F, un inductor de 32.0 mH y un resistor  $R$ . Puede descargar el capacitor a través del inductor y el resistor y observar la disminución de las oscilaciones de la corriente en el circuito. Cuando la resistencia  $R$  es 8.00  $\Omega$ , la disminución en las oscilaciones es demasiado lenta para su diseño experimental. Para hacer el decaimiento más rápido, duplica la resistencia. Como resultado, se genera una disminución de las oscilaciones de la corriente que son perfectas para sus necesidades.

**45.** Una corriente variable en el tiempo  $i$  viaja a través de un inductor de 50.0 mH, como se muestra en la figura P31.45a. La corriente es constante en  $i = -1.00$  A hasta que  $t = 0$  y después varía con el tiempo como se muestra en la figura P31.45b. Elabore una gráfica de la fem a través del inductor en función del tiempo.

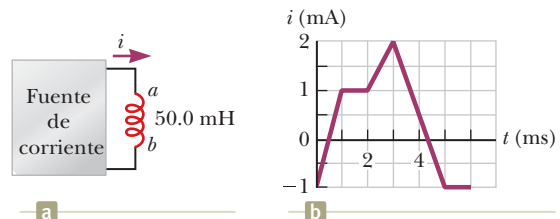


Figura P31.45

- 46.** En  $t = 0$ , el interruptor abierto en la figura P31.46 se cierra. Se desea encontrar una expresión simbólica de la corriente en el inductor de tiempo  $t > 0$ . Llame  $i$  a esta corriente y elija que vaya hacia abajo en el inductor en la figura P31.46. Identifique  $i_1$  como la corriente hacia la derecha a través de  $R_1$  e  $i_2$  como la corriente hacia abajo a través de  $R_2$ . (a) Utilice la regla de los nodos de Kirchhoff para encontrar una relación entre las tres corrientes. (b) Utilice la regla de la malla de Kirchhoff alrededor de la malla izquierda para encontrar otra relación. (c) Utilice la regla de las mallas de Kirchhoff alrededor del circuito externo para encontrar una tercera relación. (d) Elimine  $i_1$  e  $i_2$  entre las tres ecuaciones para encontrar una ecuación que implique solamente la corriente  $i$ . (e) Compare la ecuación del inciso (d) con la ecuación 31.6 en el texto. Utilice esta comparación

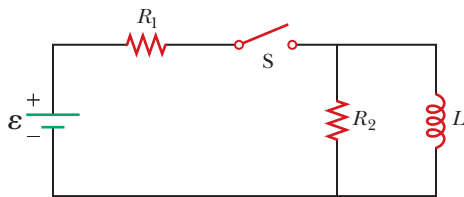


Figura P31.46

para reescribir la ecuación 31.7 en el texto para la situación en este problema y demuestre que

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} [1 - e^{-(R/L)t}]$$

donde  $R^9 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

Los problemas 47 y 48 aplican ideas de este y capítulos previos para algunas propiedades de los superconductores, que fueron introducidos en la sección 26.5.

- 47. Problema de repaso.** Se ha propuesto el uso de los superconductores para las líneas de transmisión de potencia. Un solo cable coaxial (figura P31.47) podría conducir  $1.00 \times 10^3$  MW (la salida de una gran planta eléctrica) a 200 kV, CD, a lo largo de una distancia de  $1 \times 10^3$  km sin pérdidas. Un alambre interno con un radio de  $a = 2.00$  cm, hecho del superconductor  $Nb_3Sn$ , podría llevar la corriente  $I$  en una dirección. Un cilindro superconductor le rodea, con un radio  $r = 5.00$  cm, y lleva la corriente de retorno  $I$ . En dicho sistema, ¿cuál es el campo magnético (a) en la superficie del conductor interno o (b) en la superficie interna del conductor externo? (c) ¿Cuánta energía se almacenaría en el campo magnético en el espacio entre los conductores en una línea de transmisión superconductora de  $1 \times 10^3$  km? (d) ¿Cuál es la presión ejercida sobre el conductor externo debida a la corriente en el conductor interno?

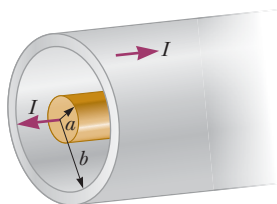


Figura P31.47

- 48. Problema de repaso.** Una propiedad fundamental de un material superconductor del tipo 1 es el *diamagnetismo perfecto*, es decir, la demostración del *efecto Meissner*, que se ilustra en la figura 29.27 en la sección 29.6 y que se describe como sigue. Si se coloca una muestra del material superconductor en un campo magnético producido externamente, o si se enfría para hacer de él un superconductor mientras está en un campo magnético, aparecen corrientes eléctricas en la superficie de la muestra. Las corrientes tienen justo la intensidad y la dirección necesarias para que el campo magnético total sea igual a cero en todo el interior de la muestra. Este problema ayudará a comprender la fuerza magnética que puede actuar sobre la muestra superconductora. Compare este problema con problema 39 en el capítulo 25, perteneciente a la fuerza de atracción de un dieléctrico perfecto en un campo eléctrico fuerte.

Un solenoide vertical con una longitud de 120 cm y un diámetro de 2.50 cm está constituido por 1 400 vueltas de alambre de cobre que lleva una corriente contraria al sentido de las manecillas del reloj de 2.00 A, como se observa en la figura P31.48a. (a) Determine el campo magnético en el vacío en el interior del solenoide. (b) Determine la densidad de energía del campo magnético. Ahora se inserta parcialmente en el solenoide una barra superconductora de 2.20 cm de diámetro. Su extremo superior está muy lejos del solenoide, donde el campo magnético es despreciable. El extremo inferior de la barra está profundamente incrustado en el solenoide. (c) Explique cómo identifica la dirección que requiere la corriente en la superficie curva de la barra, para que el campo magnético total en el interior de la barra sea igual a cero. En la figura P31.48b se dibuja el campo producido por las supercorrientes, y en la figura P31.48c se encuentra el campo total. (d) El campo del solenoide ejerce una fuerza sobre la corriente en el superconductor. Explique cómo determina la dirección de la fuerza sobre la barra. (e) Advierta que las unidades  $J/m^3$  de la densidad de energía son las mismas que las unidades de presión  $N/m^2$ , calcule la magnitud de la fuerza multiplicando la densidad de energía del campo del solenoide por el área del extremo inferior de la barra superconductora.

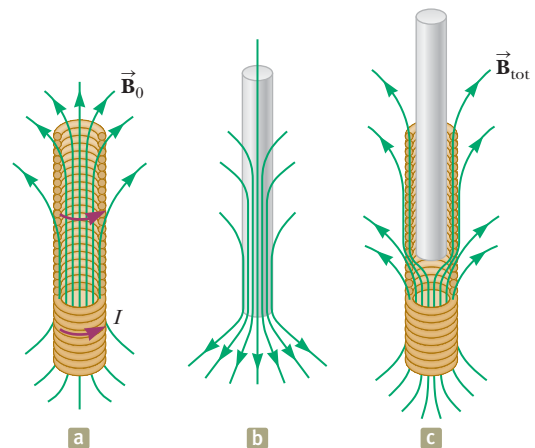
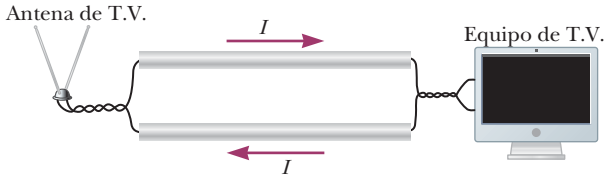


Figura P31.48

- 49.** Un alambre hecho de un material no magnético, de radio  $R$ , lleva una corriente uniformemente distribuida en su sección transversal. La corriente total que conduce el alambre es  $I$ . Demuestre que la energía magnética por cada unidad de longitud en el interior del alambre es  $\mu_0 I^2 / 16\pi$ .

**PROBLEMAS DE DESAFÍO**

**50.** En el pasado, muchos hogares recibían señales de televisión no digital desde una antena, los alambres de entrada de una antena de televisión a menudo se fabrican en forma de dos alambres paralelos (figura P31.50). Los dos alambres conducen corrientes de igual magnitud en direcciones opuestas. La separación de centro a centro de los cables es  $w$ , y  $a$  es su radio. Supongamos que  $w$  es lo suficientemente grande en comparación con  $a$  tal que los alambres conducen la corriente distribuida de manera uniforme en sus superficies y no existe campo magnético dentro del alambre. (a) ¿Por qué esta configuración de conductores tiene inductancia?



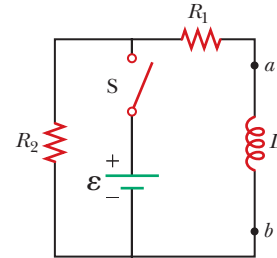
**Figura P31.50**

(b) ¿Qué constituye la espira de flujo en esta configuración?  
 (c) Demuestre que la inductancia de un tramo  $x$  de este tipo de cable de entrada es

$$L = \frac{\mu_0 x}{\pi} \ln \left( \frac{w - a}{a} \right)$$

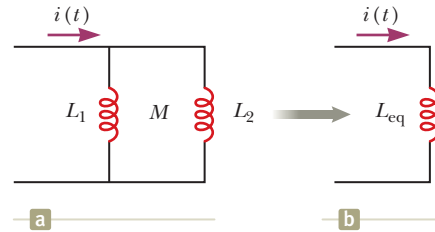
- 51.** Suponga que la magnitud del campo magnético fuera de una esfera de radio  $R$  es  $B = B_0(R/r)^2$ , donde  $B_0$  es una constante. (a) Determine la energía total almacenada en el campo magnético fuera de la esfera. (b) Evalúe el resultado del inciso (a) para  $B_0 = 5.00 \times 10^{-5} \text{ T}$  y  $R = 6.00 \times 10^6 \text{ m}$ , los valores apropiados para el campo magnético de la Tierra.
- 52.** En la figura P31.52, la batería tiene una fem  $\mathcal{E} = 18.0 \text{ V}$  y los otros elementos del circuito tienen valores  $L = 0.400 \text{ H}$ ,  $R_1 = 2.00 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 6.00 \text{ k}\Omega$ . El interruptor está cerrado

durante  $t < 0$ , y se establecen condiciones de estado estable. Luego se abre en  $t = 0$ . (a) Determine la fem a través de  $L$  justo después de  $t = 0$ . (b) ¿Qué extremo de la bobina  $a$  o bien  $b$  está aun mayor potencial? (c) Grafique a mano las corrientes en  $R_1$  y en  $R_2$  como una función del tiempo, tome las direcciones del estado estable como positivas. Muestre valores antes y después de  $t = 0$ . (d) ¿Cuánto tiempo después de  $t = 0$  la corriente en  $R_2$  llega a tener el valor de  $2.00 \text{ mA}$ ?



**Figura P31.52**

**53.** Dos inductores que tienen inductancias  $L_1$  y  $L_2$  están conectados en paralelo como se muestra en la figura P31.53a. La inductancia mutua entre los dos inductores es  $M$ . Determine la inductancia equivalente  $L_{eq}$  para el sistema (figura P31.53b).



**Figura P31.53**







Un probador de clavija, utilizado para probar tomacorrientes eléctricos en el hogar. Observe que las dos luces de la derecha están iluminadas si el tomacorriente está correctamente conectado. Otras combinaciones de luces indican problemas específicos con el tomacorriente. (Matt Howard/Shutterstock)

## IMAGINE Está en su garaje reuniendo algunas herramientas para

investigar un tomacorriente eléctrico en su casa que parece darle problemas. Toma un extensión de cable y decide probarlo para asegurarse de que el cable de tierra funcione correctamente. Para hacerlo, usa un *probador de clavija*. Enchufa este dispositivo a un tomacorriente eléctrico y la combinación de luces indica si el tomacorriente está correctamente conectado a tierra y funcionando correctamente. Usted conecta este dispositivo al extremo de su extensión de cable. A continuación, suelta accidentalmente el extremo del cable y observa algo interesante sobre la apariencia de la luz del dispositivo. Para investigar más a fondo, levanta el probador, apaga las luces en el garaje y balancea el extremo del cable con el probador en un círculo. ¡Wow! Las luces en el probador de contactos aparecen como una serie circular de segmentos brillantes y oscuros. ¿Qué causa este efecto? Pasa los siguientes minutos probando diferentes radios del círculo, diferentes velocidades angulares, etcétera.

**CONEXIONES** En capítulos anteriores, hemos estudiado una serie de elementos de un circuito: capacitores, resistencias e inductores. Comenzando en el capítulo 25, conectamos estos elementos a las baterías, formando *circuitos de corriente continua* (CC), en los cuales la corriente siempre viaja en la misma dirección. En los capítulos siguientes, encontramos varios efectos interesantes cuando combinamos elementos en los circuitos *RC*, *LC*, *RL* y *RLC*. Pero, hasta ahora, solo hemos usado baterías como fuente de energía. Cada vez que enciende un televisor, una computadora o cualquiera de una multitud de otros aparatos eléctricos en el hogar, usted llama a un *circuito de corriente alterna* (CA) para proporcionar la potencia necesaria para operarlos. En este tipo de circuito, la fuente de alimentación no proporciona un voltaje fijo como una batería, sino que suministra un voltaje alterno, generalmente sinusoidal. Una comprensión de los circuitos de CA permitirá investigaciones mucho más allá del

- 32.1 Fuentes de CA
- 32.2 Resistores en un circuito de CA
- 32.3 Inductores en un circuito de CA
- 32.4 Capacitores en un circuito de CA
- 32.5 Circuito *RLC* en serie
- 32.6 Potencia en un circuito de CA
- 32.7 Resonancia en un circuito *RLC* en serie
- 32.8 El transformador y la transmisión de energía

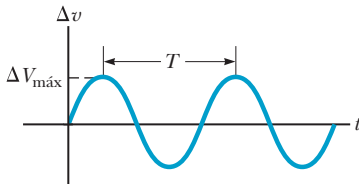


alcance de este texto, desde sistemas eléctricos domésticos hasta estudios de la red eléctrica de una empresa de servicios públicos que proporciona energía a gran escala a hogares y negocios.

### 32.1 Fuentes de CA

Un circuito de CA está conformado por elementos del circuito y una fuente de energía que proporciona un voltaje alterno  $\Delta v$ . Este voltaje, que varía con el tiempo de acuerdo con la fuente, está descrito por

$$\Delta v = \Delta V_{\text{máx}} \text{sen } \omega t \tag{32.1}$$



**Figura 32.1** El voltaje suministrado por una fuente de CA es sinusoidal con un periodo  $T$ .

donde  $\Delta V_{\text{máx}}$  es el máximo voltaje de salida de la fuente de CA, o la **amplitud de voltaje**. Hay varias posibilidades para fuentes de CA, incluyendo generadores, como se explicó en la sección 30.5, y osciladores eléctricos. En una casa, cada toma de corriente es una fuente de CA. Ya que el voltaje de salida de una fuente CA varía de manera sinusoidal con el tiempo, el voltaje es positivo durante una mitad del ciclo y negativo durante la otra mitad como en la figura 32.1. De la misma manera, la corriente en cualquier circuito conductor para una fuente de CA es una corriente alternante que también varía sinusoidalmente con el tiempo.

De la ecuación 15.12 la frecuencia angular del voltaje de CA es

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

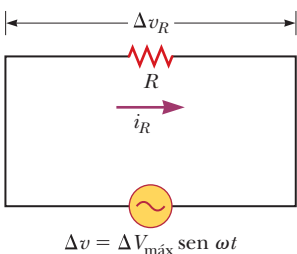
donde  $f$  es la frecuencia de la fuente y  $T$  el periodo. La fuente determina la frecuencia de la corriente en cualquier circuito conectado a ella. En Estados Unidos, las plantas para la generación de energía eléctrica usan una frecuencia de 60 Hz, que corresponde a una frecuencia angular de 377 rad/s.

El probador que se conecta al tomacorriente en la sección "Imagine" es una fuente de CA. Por tanto, las luces del dispositivo se encienden y se apagan varias veces por segundo. El parpadeo es demasiado rápido para que lo detecte si mantiene el probador quieto. Pero cuando lo gira en un círculo, el parpadeo intermitente de las luces en el probador es evidente.

### 32.2 Resistores en un circuito de CA

Con esta introducción a las fuentes de CA, apliquemos una fuente de CA a nuestros elementos de circuito familiares de forma individual, y luego apliquémoslo a una combinación de todos los elementos. Comenzamos con una resistencia.

Considere un circuito CA simple formado por un resistor y una fuente de CA, como se ilustra en la figura 32.2. En cualquier instante, la suma algebraica de los voltajes alrededor de un lazo cerrado en un circuito debe ser cero (regla del lazo de Kirchhoff). Por tanto,  $\Delta v + \Delta v_R = 0$ . En el instante en la figura, la corriente es en sentido horario alrededor del circuito; recorramos el circuito en la misma dirección. Usando las convenciones de signos en la figura 27.12, vemos que el voltaje a través de la resistencia es negativo. Para que la corriente esté en el sentido de las manecillas del reloj, el lado izquierdo de la fuente de CA debe ser momentáneamente positivo, entonces, de nuevo en la figura 27.12, el voltaje a través de la fuente de CA es positivo. Por tanto,



**Figura 32.2** Un circuito formado por un resistor de resistencia  $R$  conectado a una fuente de CA, designada por el símbolo

En el momento representado en la figura, la corriente está a la derecha en la resistencia.

$$\Delta v - i_R R = 0 \tag{32.2}$$

Al reagrupar la ecuación 32.2 y sustituir  $\Delta V_{\text{máx}} \text{sen } \omega t$  por  $\Delta v$  la corriente instantánea en el resistor es

$$i_R = \frac{\Delta v}{R} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{R} \text{sen } \omega t = I_{\text{máx}} \text{sen } \omega t \tag{32.3}$$



donde  $I_{\text{máx}}$  es la corriente máxima:

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{R} \quad (32.4) \quad \leftarrow \text{Corriente máxima en un resistor}$$

La ecuación 32.1 muestra que el voltaje instantáneo a través del resistor es

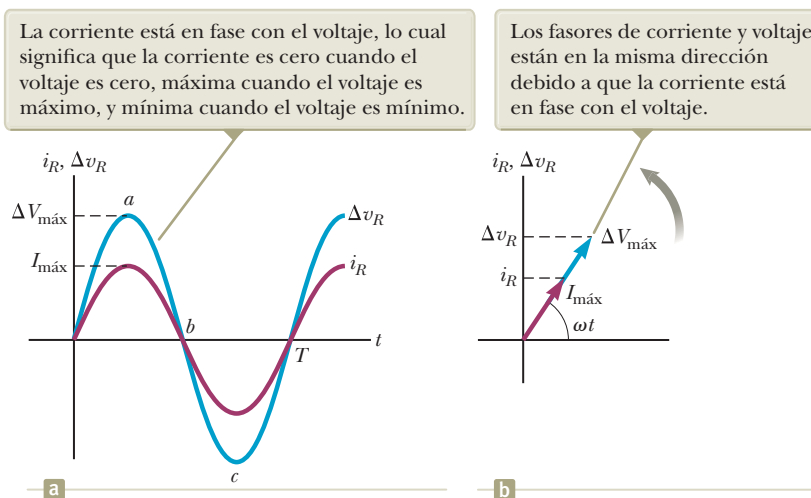
$$\Delta v_R = i_R R = I_{\text{máx}} R \text{ sen } \omega t \quad (32.5) \quad \leftarrow \text{Voltaje en las terminales de un resistor}$$

En la figura 32.3a, se muestra una gráfica del voltaje y la corriente en función del tiempo para este circuito. En el punto *a*, la corriente tiene un valor máximo en una dirección, denominada de manera arbitraria dirección positiva. Entre los puntos *a* y *b*, la corriente decrece en magnitud, pero aún está en la dirección positiva. En *b*, la corriente es por el momento cero; por tanto empieza a aumentar en la dirección negativa entre los puntos *b* y *c*. En *c*, la corriente ha llegado a su valor máximo en la dirección negativa.

La corriente y el voltaje están sincronizados entre sí porque varían de manera idéntica con el tiempo. Como  $i_R$  y  $\Delta v_R$  varían ambos como  $\text{sen } \omega t$  y alcanzan sus valores máximos al mismo tiempo, como se muestra en la figura 32.3a, se dice que están **en fase**, igual a la forma en que dos ondas pueden estar en fase, como se explicó cuando estudió el movimiento de ondas en el capítulo 17. Por tanto, para un voltaje sinusoidal aplicado, la corriente en un resistor siempre está en fase con el voltaje en las terminales del resistor. Para resistores en circuitos de CA, no existen conceptos nuevos que aprender. Los resistores se comportan esencialmente en la misma forma en circuitos de CD y de CA. No obstante, este no es el caso para capacitores e inductores.

Para simplificar el análisis de circuitos que contienen dos o más elementos, se usa una representación gráfica denominada *diagramas de fasores*. Un **fasor** es un vector cuya longitud es proporcional al valor máximo de la variable que representa ( $\Delta V_{\text{máx}}$  para voltaje e  $I_{\text{máx}}$  para corriente en el presente análisis) y que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una rapidez angular igual a la frecuencia angular asociada con la variable. La proyección del fasor sobre el eje vertical representa el valor instantáneo de la cantidad que representa.

La figura 32.3b muestra fasores de voltaje y corriente para el circuito de la figura 32.2 en algún instante de tiempo. Note que la figura 32.3a muestra los fasores de voltaje y corriente para todo el tiempo a lo largo del eje *t*. La figura 32.3b muestra los fasores de voltaje y corriente para solo un instante de tiempo. A medida que pasa el tiempo, los fasores giran en sentido contrario a las agujas del reloj. Las proyecciones de las flechas fasoriales en el eje vertical están determinadas por una función sinusoidal del ángulo del fasor con respecto al eje horizontal. Por ejemplo, la proyección del fasor corriente



**Figura 32.3** (a) Gráficas de la corriente instantánea  $i_R$  y el voltaje instantáneo  $\Delta v_R$  en las terminales de un resistor como funciones del tiempo. En el tiempo  $t = T$ , se ha completado un ciclo del voltaje y la corriente que varían con el tiempo. (b) Diagrama de fasores para el circuito resistivo que muestra cómo la corriente está en fase con el voltaje.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 32.1

#### Valores que varían con el tiempo

Los símbolos en minúscula  $\Delta v$  e  $i$  indican los valores instantáneos de voltajes y corrientes que varían con el tiempo. Los subíndices indican elementos apropiados del circuito. Las mayúsculas representan valores fijos de voltaje y corriente, como  $\Delta V_{\text{máx}}$  e  $I_{\text{máx}}$ .

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 32.2

#### Un fasor es como una gráfica

Un voltaje alterno se puede ilustrar en diferentes representaciones. La figura 32.1 es una representación gráfica en la que el voltaje se dibuja en coordenadas rectangulares, con el voltaje en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal. La figura 32.3b muestra otra representación gráfica. El espacio fase en el que se dibuja el fasor es similar al papel gráfico de coordenadas polares. La coordenada radial representa la amplitud del voltaje. La coordenada angular es el ángulo de fase. La coordenada del eje vertical de la punta del fasor representa el valor instantáneo del voltaje. La coordenada horizontal no representa nada en absoluto. Como se muestra en la figura 32.3b, las corrientes alternas también se pueden representar mediante fasores.

Para auxiliarse con esta explicación de los fasores, revise la sección 15.4, donde se representó el movimiento armónico simple de un objeto real mediante la proyección del movimiento circular uniforme de un objeto imaginario en un eje coordenado. Un fasor es una analogía directa a esta representación.



**Figura 32.4** (Examen rápido 32.1) Fasor de voltaje en tres instantes de tiempo, (a), (b) y (c).

de la figura 32.3b es  $i_R = I_{\text{máx}} \text{sen } \omega t$ . Note que esta expresión es la misma como en la ecuación 32.3. Por tanto, la proyección del fasor corriente representa una corriente que varía sinusoidalmente con el tiempo. La ventaja de este enfoque es que las relaciones de fase entre los voltajes y corrientes se pueden representar como sumas vectoriales de fasores usando las técnicas de sumas vectoriales discutidas en el capítulo 3.

En el caso del circuito resistivo de un simple lazo de la figura 32.2, los fasores de corriente y voltaje se encuentran en la misma dirección, como en la figura 32.3b, debido a que  $i_R$  y  $\Delta v_R$  están en fase. La corriente y el voltaje en circuitos que contienen capacitores e inductores tienen diferentes correspondencias de fase.

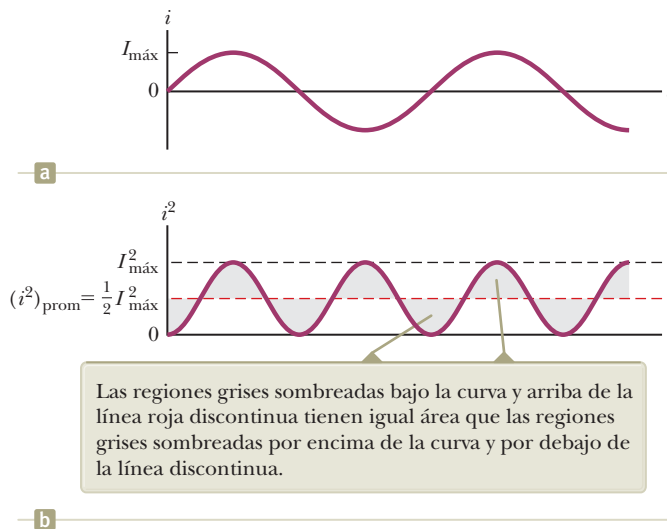
**E XAMEN RÁPIDO 32.1** Considere el fasor de voltaje de la figura 32.4, que se ilustra en tres instantes de tiempo. (i) Seleccione la parte de la figura (a), (b) o (c), que representa el instante de tiempo en que el valor instantáneo del voltaje tiene la mayor magnitud máxima. (ii) Seleccione la parte de la figura que representa el instante de tiempo en que el valor instantáneo del voltaje tiene la magnitud más pequeña.

Para el circuito resistivo sencillo de la figura 32.2, observe que **el valor promedio de la corriente en todo un ciclo es cero**. Es decir, se mantiene la corriente en la dirección positiva durante el mismo tiempo y a la misma magnitud que en la dirección negativa. No obstante, la dirección de la corriente no afecta el comportamiento del resistor. Comprenderá esto si observa que las colisiones entre electrones y los átomos fijos del resistor generan un aumento en la temperatura del resistor. Aun cuando este aumento de temperatura depende de la magnitud de la corriente, es independiente de la dirección de ésta.

Puede hacer esta explicación cuantitativa a este análisis si recuerda que la rapidez con la que se entrega energía a un resistor es la potencia  $P = i^2R$ , donde  $i$  es la corriente instantánea en el resistor. Ya que esta rapidez es proporcional al cuadrado de la corriente, no hay diferencia si la corriente es directa o alterna, es decir, si el signo asociado con la corriente es positivo o negativo. No obstante, el aumento de temperatura producido por una corriente alterna que tiene un valor máximo  $I_{\text{máx}}$  no es igual que el que produce una corriente directa igual a  $I_{\text{máx}}$ , porque la corriente alterna tiene este valor máximo sólo un instante durante cada ciclo (figura 32.5a). Lo que es de importancia en un circuito de CA es el valor promedio de corriente, que se conoce como **corriente rms**. Como aprendió en la sección 20.1, la notación *rms* quiere decir *media cuadrática*, que en este caso se trata de la raíz cuadrada del valor medio (promedio) del cuadrado de la corriente:  $I_{\text{rms}} = \sqrt{(i^2)_{\text{prom}}}$ . Dado que  $i^2$  varía con  $\text{sen}^2\omega t$  y como el valor promedio de  $i^2$  es  $\frac{1}{2}I_{\text{máx}}^2$  (vea la figura 32.5b), la corriente rms es

Corriente rms ►

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = 0.707I_{\text{máx}} \tag{32.6}$$



Las regiones grises sombreadas bajo la curva y arriba de la línea roja discontinua tienen igual área que las regiones grises sombreadas por encima de la curva y por debajo de la línea discontinua.

**Figura 32.5** (a) Gráfica de la corriente en un resistor como función del tiempo. (b) Gráfica del cuadrado de la corriente en un resistor como función del tiempo, mostrando que la línea roja discontinua es el promedio de  $I_{\text{máx}}^2 \text{sen}^2\omega t$ . En general, el valor promedio de  $\text{sen}^2\omega t$  o  $\text{cos}^2\omega t$  en un ciclo es  $\frac{1}{2}$ .

Esta ecuación expresa que una corriente alterna cuyo valor máximo es 2.00 A entrega a un resistor la misma potencia que una corriente directa que tiene un valor de  $(0.707)(2.00 \text{ A}) = 1.41 \text{ A}$ . Así, la potencia promedio entregada a un resistor que lleva una corriente alterna es

$$P_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}^2 R \quad (32.7) \quad \leftarrow \text{Potencia promedio entregada a un resistor}$$

El voltaje alterno también se explica mejor en términos del voltaje rms, y la correspondencia es idéntica a la de la corriente:

$$\Delta V_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = 0.707 \Delta V_{\text{máx}} \quad (32.8) \quad \leftarrow \text{Voltaje rms}$$

Cuando mide un voltaje alterno de 120 V de una toma de corriente eléctrica, se trata de un voltaje rms de 120 V. Un cálculo con la ecuación 32.8 muestra que ese voltaje alterno tiene un valor máximo de 170 V. Con frecuencia un argumento para utilizar valores rms cuando se analiza corrientes alternas es que los amperímetros y los voltímetros de CA están diseñados para leer valores rms. Además, con valores rms, muchas de las ecuaciones tienen la misma forma que las de corriente directa.

### Ejemplo 32.1 ¿Cuál es la corriente rms?

El voltaje de salida de una fuente CA se conoce por la expresión  $\Delta v = 200 \text{ sen } \omega t$ . Encuentre la corriente rms en el circuito cuando esta fuente se conecta a un resistor de  $47 \Omega$ .

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 32.2 muestra la situación física para este problema.

**Categorizar** La corriente se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Combine las ecuaciones 32.4 y 32.6 para encontrar la corriente rms:

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}R}$$

Al comparar esta expresión para un voltaje de salida con la forma general  $\Delta v = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t$  se demuestra que  $\Delta V_{\text{máx}} = 200 \text{ V}$ . Sustituya valores numéricos:

$$I_{\text{rms}} = \frac{200 \text{ V}}{\sqrt{2}(47.0 \Omega)} = 3.01 \text{ A}$$

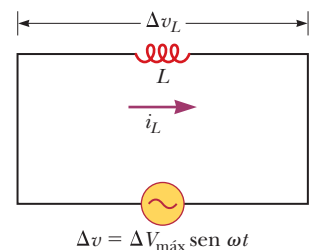
## 32.3 Inductores en un circuito de CA

Ahora considere un circuito de CA formado por un solo inductor conectado a las terminales de una fuente de CA, como se muestra en la figura 32.6. Si  $\Delta v_L = -L(di_L/dt)$  es el voltaje instantáneo autoinducido en las terminales del inductor (véase la ecuación 31.1), aplicando la regla de lazo de Kirchhoff a este circuito da  $\Delta v + \Delta v_L = 0$ , o

$$\Delta v - L \frac{di_L}{dt} = 0$$

Cuando sustituye  $\Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t$  en  $\Delta v$  y reordenando, obtiene

$$\Delta v = L \frac{di_L}{dt} = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t \quad (32.9)$$



**Figura 32.6** Circuito formado por un inductor de inductancia  $L$  conectado a una fuente de CA.



Al resolver esta ecuación para  $di_L$

$$di_L = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{L} \text{ sen } \omega t dt$$

Integrando esta expresión<sup>1</sup> da la corriente instantánea  $i_L$  del inductor como función del tiempo:

$$i_L = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{L} \int \text{sen } \omega t dt = -\frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L} \cos \omega t \quad (32.10)$$

Usando la identidad trigonométrica  $\cos \omega t = -\text{sen}(\omega t - \pi/2)$ , podemos expresarla por la ecuación 32.10 como

Corriente en un inductor ► 
$$i_L = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L} \text{ sen} \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (32.11)$$

Al comparar este resultado con la ecuación 32.9, se muestra que la corriente instantánea  $i_L$  en el inductor y el voltaje instantáneo  $\Delta v_L$  en las terminales del inductor están fuera de fase en  $\pi/2$  rad =  $90^\circ$ .

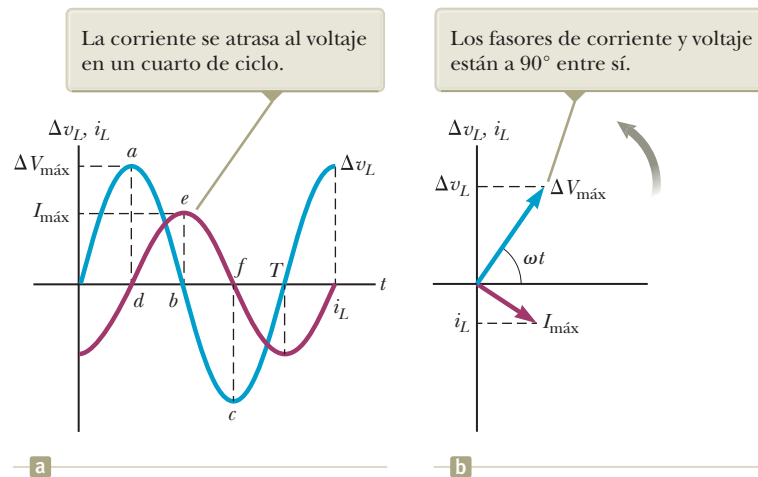
En la figura 32.7a se muestra la gráfica del voltaje y la corriente en función del tiempo. Cuando el voltaje  $\Delta v_L$  en el inductor es máximo (punto *a* en la figura 32.7a), la corriente en el inductor es cero (punto *d*), pero la rapidez de cambio de corriente está en un máximo. Cuando el voltaje es cero (punto *b*), la corriente tiene su valor máximo (punto *e*). Observe que el voltaje alcanza su valor máximo un cuarto de periodo antes de que la corriente alcance el suyo. Debido a eso, para un voltaje aplicado sinusoidal, la corriente en un inductor siempre se atrasa  $90^\circ$  respecto al voltaje en las terminales del inductor (un cuarto de ciclo en tiempo).

Con la relación entre corriente y voltaje para un resistor, podemos representar la misma relación para un inductor con un diagrama de fasores, como en la figura 32.7b. Observe que los fasores están a  $90^\circ$  uno del otro, lo cual representa una diferencia de fase de  $90^\circ$  entre la corriente y el voltaje. (Vea las ecuaciones 32.9 y 32.11)

La ecuación 32.10 muestra que la corriente en un circuito inductivo alcanza su valor máximo cuando  $\cos \omega t = \pm 1$ :

Corriente máxima en un inductor ► 
$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L} \quad (32.12)$$

Esta expresión es semejante a la relación entre corriente, voltaje y resistencia en un circuito de CD,  $I = \Delta V/R$  (ecuación 26.7). Como  $I_{\text{máx}}$  está en amperes y  $\Delta V_{\text{máx}}$  en volts,  $\omega L$  debe medirse en ohms. Por tanto,  $\omega L$  tiene las mismas unidades que la resistencia



**Figura 32.7** (a) Gráficas de la corriente instantánea  $i_L$  y voltaje instantáneo  $\Delta v_L$  a través de un inductor como funciones del tiempo. (b) Diagrama de fasores para el circuito inductivo.

<sup>1</sup> La constante de integración es despreciable aquí porque depende de las condiciones iniciales, que no son importantes en este caso.

y está relacionada con la corriente y el voltaje en la misma forma que la resistencia. Debe comportarse de una manera semejante a una resistencia, en el sentido de que representa oposición al paso de carga. Ya que  $\omega L$  depende de la frecuencia aplicada  $\omega$ , el inductor *reacciona* de modo diferente, ofreciendo oposición a la corriente, para diferentes frecuencias. Por esta razón,  $\omega L$  es la **reactancia inductiva**  $X_L$ :

$$X_L \equiv \omega L \quad (32.13) \quad \leftarrow \text{Reactancia inductiva}$$

Por tanto, se puede escribir la ecuación 32.12 como

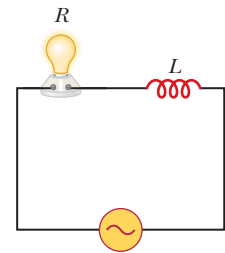
$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{X_L} \quad (32.14)$$

La expresión para la corriente rms en un inductor es semejante a la ecuación 32.14, sustituyendo  $I_{\text{máx}}$  por  $I_{\text{rms}}$  y  $\Delta V_{\text{máx}}$  por  $\Delta V_{\text{rms}}$ .

La ecuación 32.13 indica que, para cierto voltaje aplicado, la reactancia inductiva aumenta cuando la frecuencia aumenta. Esta conclusión es consistente con la ley de Faraday: cuanto mayor es la rapidez de cambio de la corriente en el inductor, mayor es la fuerza contraelectromotriz. La mayor fuerza contraelectromotriz se traduce en un aumento en la reactancia y una disminución en la corriente.

Con las ecuaciones 32.9 y 32.14, el voltaje instantáneo en los extremos del inductor es

$$\Delta v_L = -L \frac{di_L}{dt} = -\Delta V_{\text{máx}} \text{sen } \omega t = -I_{\text{máx}} X_L \text{sen } \omega t \quad (32.15) \quad \leftarrow \text{Voltaje en las terminales de un inductor}$$



**Figura 32.8** (Examen rápido 32.2) ¿En qué frecuencias brilla más la lámpara?

- E XAMEN RÁPIDO 32.2** Considere el circuito de CA de la figura 32.8. La frecuencia de la fuente de CA se ajusta mientras su amplitud de voltaje se mantiene constante. La lámpara brillará con más intensidad **(a)** a altas frecuencias, **(b)** a bajas frecuencias, o **(c)** el brillo será igual en todas las frecuencias.

### Ejemplo 32.2 Un circuito CA puramente inductivo

En un circuito CA puramente inductivo,  $L = 25.0$  mH y el voltaje rms es de 150 V. Calcule la reactancia inductiva y la corriente rms en el circuito, si la frecuencia es de 60.0 Hz.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 32.6 muestra la situación física para este problema. Tenga en mente que la reactancia inductiva aumenta con el incremento de la frecuencia del voltaje aplicado.

**Categorizar** La reactancia y la corriente se evalúan a partir de ecuaciones desarrolladas en esta sección, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 32.13 para encontrar la reactancia inductiva:  $X_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi(60.0 \text{ Hz})(25.0 \times 10^{-3} \text{ H})$   
 $= 9.42 \Omega$

Use una versión rms de la ecuación 32.14 para encontrar la corriente rms:  $I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{X_L} = \frac{150 \text{ V}}{9.42 \Omega} = 15.9 \text{ A}$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Si la frecuencia aumenta a 6.00 kHz, ¿qué sucede con la corriente rms en el circuito?

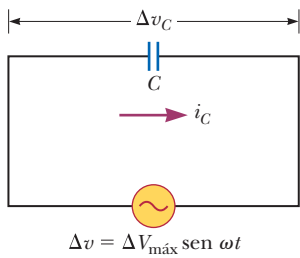
**Respuesta** Si la frecuencia aumenta, la reactancia inductiva también aumenta porque la corriente cambia con una mayor rapidez. El aumento en reactancia inductiva resulta en una menor corriente.

Calcule la nueva reactancia inductiva y la nueva corriente rms:

$$X_L = 2\pi(6.00 \times 10^3 \text{ Hz})(25.0 \times 10^{-3} \text{ H}) = 942 \Omega$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{150 \text{ V}}{942 \Omega} = 0.159 \text{ A}$$





**Figura 32.9** Circuito formado por un capacitor de capacitancia  $C$  conectado a una fuente de CA.

### 32.4 Capacitores en un circuito de CA

La figura 32.9 muestra un circuito de CA formado por un capacitor conectado a las terminales de una fuente de CA. La regla de lazo de Kirchhoff aplicada a este circuito da  $\Delta v + \Delta v_C = 0$ , o:

$$\Delta v - \frac{q}{C} = 0 \tag{32.16}$$

donde  $q$  es la carga en el capacitor y el signo negativo se debe al hecho que la diferencia de potencial entre el capacitor es opuesto al de la fuente, como se discutió en la figura 27.15, sustituyendo  $\Delta V_{máx} \text{ sen } \omega t$  para  $\Delta v$  y reorganizando da

$$q = C \Delta V_{máx} \text{ sen } \omega t \tag{32.17}$$

donde  $q$  es la carga instantánea en el capacitor. Al derivar la ecuación 32.17 respecto al tiempo se obtiene la corriente instantánea del circuito:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \omega C \Delta V_{máx} \cos \omega t \tag{32.18}$$

Usando la identidad trigonométrica  $\cos \omega t = \sin (\omega t + \pi/2)$  se puede expresar la ecuación 32.18 en la siguiente forma alternativa

$$i_C = \omega C \Delta V_{máx} \text{ sen } \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \tag{32.19}$$

Corriente en un capacitor ►

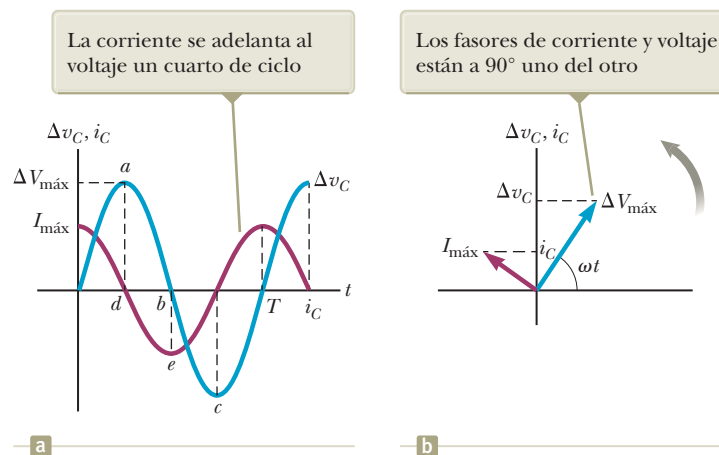
Al comparar esta expresión con  $\Delta v = \Delta V_{máx} \text{ sen } \omega t$ , se observa que la corriente está  $\pi/2 \text{ rad} = 90^\circ$  fuera de fase con el voltaje en las terminales del capacitor. Una gráfica de la corriente y el voltaje en función del tiempo se muestra en la figura 32.10.

Considere el punto  $a$  en la figura 32.10a, donde el voltaje a través del capacitor es máximo. Esto se presenta cuando el capacitor logra su carga máxima, de modo que el voltaje en las terminales del capacitor es máximo (punto  $d$ ). En puntos como el  $e$ , la corriente es máxima, lo cual se presenta cuando la carga en el capacitor se vuelve cero y empieza a cargarse con la polaridad opuesta. Cuando la carga es cero, el voltaje en las terminales del capacitor es cero (punto  $b$ ).

Al igual que con los inductores, la corriente y el voltaje para un capacitor se representan en un diagrama de fasores. El diagrama de fasores de la figura 32.10b muestra que para un voltaje aplicado sinusoidalmente, la corriente siempre se adelanta  $90^\circ$  al voltaje presente en las terminales del capacitor.

La ecuación 32.18 muestra que la corriente en el circuito alcanza su valor máximo cuando  $\cos \omega t = \pm 1$ :

$$I_{máx} = \omega C \Delta V_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{(1/\omega C)} \tag{32.20}$$



**Figura 32.10** (a) Gráficas de la corriente instantánea  $i_C$  y voltaje instantáneo  $\Delta v_C$  en las terminales de un capacitor como funciones del tiempo. (b) Diagrama de fasores para el circuito capacitivo.

Como en el caso de los inductores, esto se asemeja a la ecuación 26.7, por lo que el denominador debe desempeñar el papel de resistencia, con unidades en ohms. La combinación  $1/\omega C$  se representa con el símbolo  $X_C$ , y puesto que esta función varía con la frecuencia, se define como la **reactancia capacitiva**:

$$X_C \equiv \frac{1}{\omega C} \quad (32.21) \quad \leftarrow \text{Reactancia capacitiva}$$

Podemos escribir la ecuación 32.20 como

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{X_C} \quad (32.22) \quad \leftarrow \text{Corriente máxima en un capacitor}$$

La corriente rms se representa de manera semejante a la ecuación 32.22, sustituyendo  $I_{\text{máx}}$  por  $I_{\text{rms}}$  y  $\Delta V_{\text{máx}}$  por  $\Delta V_{\text{rms}}$ .

Con la ecuación 32.22 se expresa el voltaje instantáneo en las terminales del capacitor como

$$\Delta v_C = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t = I_{\text{máx}} X_C \text{ sen } \omega t \quad (32.23) \quad \leftarrow \text{Voltaje en las terminales de un capacitor}$$

Las ecuaciones 32.21 y 32.22 indican que cuando aumenta la frecuencia de la fuente de voltaje, disminuye la reactancia capacitiva y, por tanto, aumenta la corriente máxima. De nuevo, la frecuencia de la corriente está determinada por la frecuencia de la fuente de voltaje que activa al circuito. Cuando la frecuencia se aproxima a cero, la reactancia capacitiva se aproxima al infinito y, por ende, la corriente se aproxima a cero. Esta conclusión tiene sentido porque el circuito se aproxima a condiciones de corriente directa cuando  $\omega$  se aproxima a cero y el capacitor representa un circuito abierto.

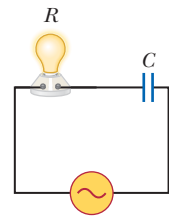


Figura 32.11 (Examen rápido 32.3)

**E XAMEN RÁPIDO 32.3** Considere el circuito de CA de la figura 32.11. La frecuencia de la fuente de CA se ajusta en tanto la amplitud de su voltaje se mantiene constante. La lámpara tendrá un brillo máximo **(a)** a altas frecuencias, **(b)** a bajas frecuencias, o **(c)** el brillo será igual a cualquier frecuencia.

**E XAMEN RÁPIDO 32.4** Considere el circuito de CA de la figura 32.12. La frecuencia de la fuente de CA está ajustada en tanto la amplitud de su voltaje se mantiene constante. La lámpara tendrá un brillo máximo **(a)** a altas frecuencias, **(b)** a bajas frecuencias, o **(c)** el brillo será igual a cualquier frecuencia.

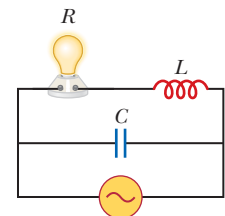


Figura 32.12 (Examen rápido 32.4)

### Ejemplo 32.3 Un circuito de CA puramente capacitivo

Un capacitor de  $8.00 \mu\text{F}$  es conectado a las terminales de una fuente CA de  $60.0 \text{ Hz}$ , cuyo voltaje rms es  $150 \text{ V}$ . Encuentre la reactancia capacitiva y la corriente rms en el circuito.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 32.9 muestra la situación física para este problema. Tenga en mente que la reactancia capacitiva disminuye con el incremento de la frecuencia del voltaje aplicado.

**Categorizar** La reactancia y la corriente se determinan a partir de las ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 32.21 para encontrar la reactancia capacitiva: 
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(60.0 \text{ Hz})(8.00 \times 10^{-6} \text{ F})} = 332 \Omega$$

Use una versión rms de la ecuación 32.22 para encontrar la corriente rms: 
$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{X_C} = \frac{150 \text{ V}}{332 \Omega} = 0.452 \text{ A}$$

continúa

## 32.3 continuación

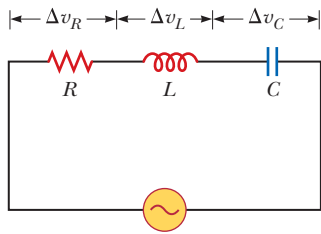
**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si la frecuencia se duplica? ¿Qué sucede con la corriente rms en el circuito?

**Respuesta** Si la frecuencia aumenta, la reactancia capacitiva disminuye, que es justo lo opuesto del caso de un inductor. La disminución en reactancia capacitiva resulta en un aumento en la corriente.

Calcule la nueva reactancia capacitiva y la nueva corriente rms:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi(120 \text{ Hz})(8.00 \times 10^{-6} \text{ F})} = 166 \Omega$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{150 \text{ V}}{166 \Omega} = 0.904 \text{ A}$$



**Figura 32.13** (a) Circuito en serie formado por un resistor, un inductor y un capacitor conectados a una fuente de CA. (b).

## 32.5 Circuito RLC en serie

En las secciones anteriores, consideramos elementos de circuitos individuales conectados a una fuente de CA. La figura 32.13 muestra un circuito que contiene una combinación de los tres elementos de nuestro circuito: una resistencia, un inductor y un capacitor conectados en serie. Estudiamos este circuito en la sección 31.6, donde cargamos el capacitor y luego cerramos un interruptor para conectar los otros dos elementos del circuito. Eso llevó a oscilaciones del circuito que fueron amortiguadas debido a la resistencia. Comparamos el circuito con un oscilador mecánico (figura 15.1), donde tiramos de un bloque hacia afuera, estiramos un resorte y lo dejamos, observando las oscilaciones amortiguadas debido a la fricción. En la sección 15.7, aplicamos una fuerza impulsora sinusoidal a un oscilador mecánico. Echemos un vistazo al analógico eléctrico a esta situación aquí, donde conectamos una fuente de voltaje alterno a través de la conexión en serie de los elementos del circuito. Si el voltaje aplicado varía sinusoidalmente con el tiempo, el voltaje aplicado instantáneo es

$$\Delta v = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t$$

La corriente en el circuito está dada por

$$i = I_{\text{máx}} \text{ sen } (\omega t - \phi)$$

donde  $\phi$  es cierto **ángulo de fase** entre la corriente y el voltaje aplicados. De acuerdo con la explicación de fase de las secciones 32.3 y 32.4, es de esperar que la corriente generalmente no esté en fase con el voltaje en un circuito RLC.

Debido a que los elementos en la figura 32.13 están en serie, la corriente en cualquier parte del circuito debe ser la misma en cualquier instante. Es decir, la corriente de un circuito en serie de CA tiene la misma amplitud y fase en cualquier punto. En términos de las secciones anteriores, se sabe que el voltaje en las terminales de cada elemento tiene amplitud y fase diferentes. En particular, el voltaje en las terminales del resistor está en fase con la corriente, el voltaje en las terminales del inductor se adelanta  $90^\circ$  a la corriente y el voltaje en las terminales del capacitor se atrasa  $90^\circ$  a la corriente. Con el uso de esta relación de fase, se expresan los voltajes instantáneos en las terminales de los tres elementos de circuito como

$$\Delta v_R = I_{\text{máx}} R \text{ sen } \omega t = \Delta V_R \text{ sen } \omega t \quad (32.24)$$

$$\Delta v_L = I_{\text{máx}} X_L \text{ sen } \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \Delta V_L \cos \omega t \quad (32.25)$$

$$\Delta v_C = I_{\text{máx}} X_C \text{ sen } \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -\Delta V_C \cos \omega t \quad (32.26)$$

La suma de los tres voltajes debe ser igual al voltaje instantáneo de la fuente  $\Delta v$  de CA, pero es importante reconocer que como los tres voltajes tienen diferente corres-



pendencia de fase con la corriente no se pueden sumar directamente. La figura 32.14 representa los fasores en un instante en el que la corriente de los tres elementos es, momentáneamente, cero. La corriente cero la representa el fador de corriente a lo largo del eje horizontal en cada parte de la figura. En seguida los fasores de voltaje se dibujan con el ángulo de fase adecuado a la corriente para cada elemento.

Puesto que los fasores son vectores que giran, combine los fasores de voltaje en la figura 32.14 mediante una suma vectorial como en la figura 32.15. En la figura 32.15a los fasores de voltaje de la figura 32.14 se combinan en las mismas coordenadas de los ejes. La figura 32.15b muestra la suma vectorial de los fasores de voltaje. Los fasores de voltaje  $\Delta V_L$  y  $\Delta V_C$  están en direcciones opuestas a lo largo de la misma línea, de modo que se puede construir el fador diferencia  $\Delta V_L - \Delta V_C$ , que es perpendicular al fador  $\Delta V_R$ . Este diagrama muestra que la suma vectorial de las amplitudes de voltaje  $\Delta V_R$ ,  $\Delta V_L$  y  $\Delta V_C$  es igual a un fador cuya longitud es el máximo voltaje aplicado,  $\Delta V_{\text{máx}}$ , y que forma un ángulo  $\phi$  con el fador de corriente  $I_{\text{máx}}$ . Del triángulo rectángulo de la figura 32.15b, puede observar que

$$\Delta V_{\text{máx}} = \sqrt{\Delta V_R^2 + (\Delta V_L - \Delta V_C)^2} = \sqrt{(I_{\text{máx}} R)^2 + (I_{\text{máx}} X_L - I_{\text{máx}} X_C)^2}$$

$$\Delta V_{\text{máx}} = I_{\text{máx}} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Por tanto, la corriente máxima se expresa como

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \tag{32.27}$$

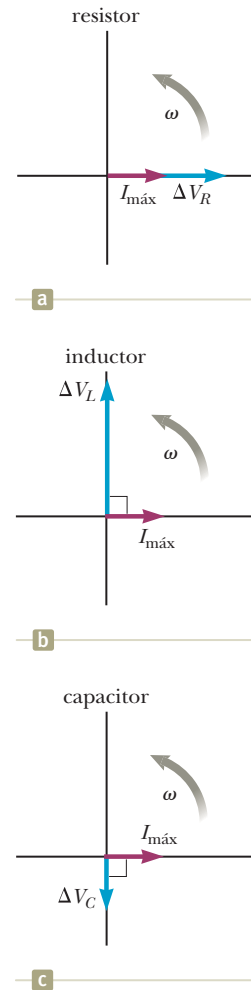
Una vez más, esta expresión tiene la misma forma matemática de la ecuación 26.7. El denominador de la fracción desempeña el papel de resistencia y se llama **impedancia**  $Z$  del circuito:

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{32.28}$$

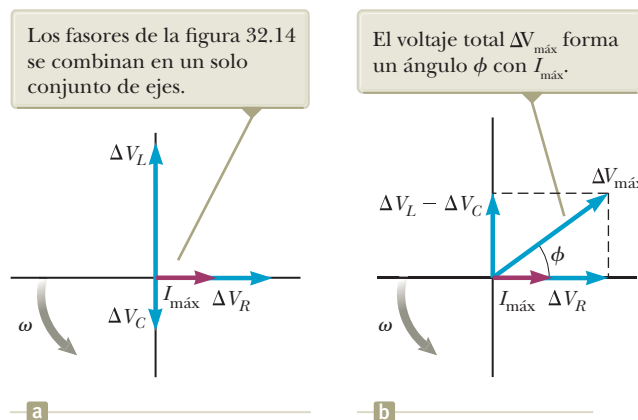
donde la impedancia también está en ohms. Por tanto, escriba la ecuación 32.27 en la forma

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{Z} \tag{32.29}$$

Considere la ecuación 32.29 como el equivalente en CA de la ecuación 26.7. Observe que la impedancia y, por tanto, la corriente de un circuito de CA dependen de la resistencia, la inductancia, la capacitancia y la frecuencia (ya que las reactivas son dependientes de la frecuencia).



**Figura 32.14** Relaciones de fase entre los fasores de voltaje y corriente para (a) un resistor, (b) un inductor y (c) un capacitor, conectados en serie.



**Figura 32.15** (a) Los fasores de la figura 32.14 para los elementos en un circuito RLC en serie se combinan en un solo diagrama. (b) Los fasores de inductancia y capacitancia se suman y luego se agregan vectorialmente al fador de resistencia.

A partir del triángulo rectángulo en el diagrama de fases en la figura 32.15b, el ángulo de fase  $\phi$  entre la corriente y el voltaje es

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta V_L - \Delta V_C}{\Delta V_R} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{I_{\text{máx}} X_L - I_{\text{máx}} X_C}{I_{\text{máx}} R} \right)$$

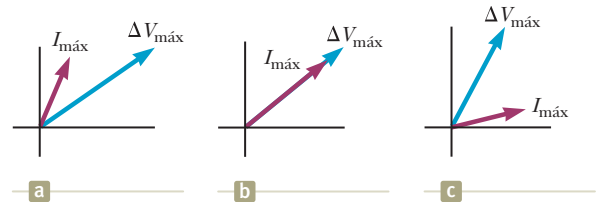
Ángulo de fase ►

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right) \quad (32.30)$$

Cuando  $X_L > X_C$  (lo cual se presenta en altas frecuencias), el ángulo de fase es positivo; esto significa que la corriente se atrasa al voltaje aplicado, como se ve en la figura 32.15b. Describa esta situación al decir que el circuito es *más inductivo que capacitivo*. Cuando  $X_L < X_C$ , el ángulo de fase es negativo, lo cual significa que la corriente se adelanta al voltaje aplicado, y el circuito es *más capacitivo que inductivo*. Cuando  $X_L = X_C$ , el ángulo de fase es cero y el circuito es *completamente resistivo*.

**E** **XAMEN RÁPIDO 32.5** Etiquete cada parte de la figura 32.16 (a), (b), (c) como  $X_L > X_C$ ,  $X_L = X_C$ , o  $X_L < X_C$ .

**Figura 32.16** (Examen rápido 32.5) Vincule los diagramas de fase con las relaciones entre las reactancias.



### Ejemplo 32.1 Análisis de un circuito RLC en serie

Un circuito RLC en serie tiene  $R = 425 \, \Omega$ ,  $L = 1.25 \, \text{H}$ , y  $C = 3.50 \, \mu\text{F}$ . Está conectado a una fuente CA con  $f = 60.0 \, \text{Hz}$  y  $\Delta V_{\text{máx}} = 150 \, \text{V}$ .

**(A)** Determine la reactancia inductiva, la reactancia capacitiva y la impedancia del circuito.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El circuito de interés en este ejemplo se muestra en la figura 32.13. La corriente en la combinación del resistor, inductor y capacitor oscila en un ángulo de fase particular respecto al voltaje aplicado.

**Categorizar** El circuito es un circuito RLC en serie simple, así que se puede usar el planteamiento explicado en esta sección.

**Analizar** Encuentre la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0 \, \text{Hz}) = 377 \, \text{s}^{-1}$$

Use la ecuación 32.13 para encontrar la reactancia inductiva:

$$X_L = \omega L = (377 \, \text{s}^{-1})(1.25 \, \text{H}) = 471 \, \Omega$$

Use la ecuación 32.21 para encontrar la reactancia capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(377 \, \text{s}^{-1})(3.50 \times 10^{-6} \, \text{F})} = 758 \, \Omega$$

Use la ecuación 32.28 para encontrar la impedancia:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ = \sqrt{(425 \, \Omega)^2 + (471 \, \Omega - 758 \, \Omega)^2} = 513 \, \Omega$$

**(B)** Encuentre la corriente máxima en el circuito.

#### SOLUCIÓN

Use la ecuación 32.29 para encontrar la corriente máxima:

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{Z} = \frac{150 \, \text{V}}{513 \, \Omega} = 0.293 \, \text{A}$$

## 32.4 continuación

(C) Encuentre el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje.

## SOLUCIÓN

Use la ecuación 32.30 para calcular el ángulo de fase:

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{471 \Omega - 758 \Omega}{425 \Omega} \right) = -34.0^\circ$$

(D) Encuentre el voltaje máximo a través de cada elemento.

## SOLUCIÓN

Use las ecuaciones 32.4, 32.14 y 32.22 para calcular los voltajes máximos:

$$\Delta V_R = I_{\text{máx}} R = (0.293 \text{ A})(425 \Omega) = 124 \text{ V}$$

$$\Delta V_L = I_{\text{máx}} X_L = (0.293 \text{ A})(471 \Omega) = 138 \text{ V}$$

$$\Delta V_C = I_{\text{máx}} X_C = (0.293 \text{ A})(758 \Omega) = 222 \text{ V}$$

(E) ¿Qué valor de remplazo de  $L$  debe elegir un ingeniero que analice el circuito tal que la corriente se adelante al voltaje aplicado en  $30.0^\circ$  en vez de  $34^\circ$ ? Todos los otros valores en el circuito permanecen iguales.

## SOLUCIÓN

Resuelva la ecuación 32.30 para la reactancia inductiva:  $X_L = X_C + R \tan \phi$

Sustituya las ecuaciones 32.13 y 32.21 en esta expresión:  $\omega L = \frac{1}{\omega C} + R \tan \phi$

Resuelva para  $L$ :

$$L = \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{\omega C} + R \tan \phi \right)$$

Sustituya los valores conocidos:

$$L = \frac{1}{(377 \text{ s}^{-1})} \left[ \frac{1}{(377 \text{ s}^{-1})(3.50 \times 10^{-6} \text{ F})} + (425 \Omega) \tan(-30.0^\circ) \right]$$

$$L = 1.36 \text{ H}$$

**Finalizar** Ya que la reactancia capacitiva es mayor que la reactancia inductiva, el circuito es más capacitivo que inductivo. En este caso, el ángulo de fase  $\phi$  es negativo, así que la corriente adelanta al voltaje aplicado.

Al usar las ecuaciones 32.24, 32.25 y 32.26, los voltajes instantáneos a través de los tres elementos son

$$\Delta v_R = (124 \text{ V}) \text{ sen } 377t$$

$$\Delta v_L = (138 \text{ V}) \text{ cos } 377t$$

$$\Delta v_C = (-222 \text{ V}) \text{ cos } 377t$$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Si sumara los voltajes máximos a través de los tres elementos del circuito? ¿Es esta una cantidad físicamente significativa?

**Respuesta** La suma de los voltajes máximos a través de los elementos es  $\Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C = 484 \text{ V}$ ; esta suma es mucho mayor que el voltaje máximo de la fuente, 150 V. La suma de los voltajes máximos es una cantidad sin significado porque, cuando se suman cantidades que varían sinusoidalmente, *tanto sus amplitudes como sus fases* deben tomarse en cuenta. Los voltajes máximos a través de los diversos elementos se presentan en diferentes tiempos. Por tanto, los voltajes se deben sumar en una forma que tome en consideración las diferentes fases, como se muestra en la figura 32.15.

## 32.6 Potencia en un circuito de CA

Ahora considere un planteamiento de energía para analizar circuitos de CA y que considere la transferencia de energía de la fuente de CA al circuito. La potencia entregada por una batería a un circuito externo de CD es igual al producto de la corriente y al voltaje terminal de la batería. De igual modo, la potencia instantánea entregada por una fuente de CA a un circuito es el producto de la corriente de la fuente y el vol-



taje aplicado. Para el circuito  $RLC$  que se ilustra en la figura 32.13, exprese la potencia instantánea  $P$  como

$$p = i \Delta v = [I_{\text{máx}} \text{sen}(\omega t - \phi)][\Delta V_{\text{máx}} \text{sen} \omega t]$$

$$p = I_{\text{máx}} \Delta V_{\text{máx}} \text{sen} \omega t \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (32.31)$$

Este resultado es una función complicada del tiempo y, debido a eso, no es muy útil desde un punto de vista práctico. Lo que sí interesa es la potencia promedio en uno o más ciclos. Este promedio se puede calcular al usar primero la identidad trigonométrica  $\text{sen}(\omega t - \phi) = \text{sen} \omega t \cos \phi - \cos \omega t \text{sen} \phi$ . La sustitución de esta identidad en la ecuación 32.31 da

$$p = I_{\text{máx}} \Delta V_{\text{máx}} \text{sen}^2 \omega t \cos \phi - I_{\text{máx}} \Delta V_{\text{máx}} \text{sen} \omega t \cos \omega t \text{sen} \phi \quad (32.32)$$

Ahora considere el tiempo promedio de  $p$  en uno o más ciclos, observe que  $I_{\text{máx}}$ ,  $\Delta V_{\text{máx}}$ ,  $\phi$  y  $\omega$  todos son constantes. El tiempo promedio del primer término de la derecha en la ecuación 32.32 comprende el valor promedio de  $\text{sen}^2 \omega t$ , que es  $\frac{1}{2}$ . El tiempo promedio del segundo término de la derecha del mismo signo es de igual forma cero porque  $\text{sen} \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \text{sen} 2\omega t$ , y el valor promedio de  $\text{sen} 2\omega t$  es cero. Por tanto, se expresa la **potencia promedio**  $P_{\text{prom}}$  como

$$P_{\text{prom}} = \frac{1}{2} I_{\text{máx}} \Delta V_{\text{máx}} \cos \phi \quad (32.33)$$

Es conveniente expresar la potencia promedio en términos de la corriente rms y el voltaje rms definidos por las ecuaciones 32.6 y 32.8:

Potencia promedio entregada a un circuito  $RLC$  ►

$$P_{\text{prom}} = I_{\text{rms}} \Delta V_{\text{rms}} \cos \phi \quad (32.34)$$

donde la cantidad  $\cos \phi$  se denomina **factor de potencia**. En la figura 32.15b se muestra que el voltaje máximo en las terminales del resistor está dado por  $\Delta V_R = \Delta V_{\text{máx}} \cos \phi = I_{\text{máx}} R$ . Por tanto,

$$\cos \phi = I_{\text{máx}} \frac{R}{\Delta V_{\text{máx}}} = \frac{R}{Z} \quad (32.35)$$

y se puede expresar  $P_{\text{prom}}$  como

$$P_{\text{prom}} = I_{\text{rms}} \Delta V_{\text{rms}} \cos \phi = I_{\text{rms}} \Delta V_{\text{rms}} \left( \frac{R}{Z} \right) = I_{\text{rms}} \left( \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{Z} \right) R$$

Sabiendo que  $\Delta V_{\text{rms}}/Z = I_{\text{rms}}$  se tiene

$$P_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}^2 R \quad (32.36)$$

La potencia promedio entregada por la fuente se convierte en energía interna en el resistor, al igual que en el caso de un circuito de CD. Cuando la carga es completamente resistiva,  $\phi = 0$ ,  $\cos \phi = 1$ , y por la ecuación 32.34, vemos que

$$P_{\text{prom}} = I_{\text{rms}} \Delta V_{\text{rms}}$$

Observe que no existen pérdidas de potencia asociadas con capacitores puros e inductores puros en un circuito de CA. La energía se almacena temporalmente como  $U_E$  en un capacitor y  $U_B$  en un inductor, pero no se transforma energía en  $E_{\text{int}}$  en estos elementos del circuito.

La ecuación 32.34 muestra que la potencia entregada por una fuente de CA a cualquier circuito depende de la fase, un resultado que tiene numerosas e interesantes aplicaciones. Por ejemplo, una fábrica que utilice motores grandes en máquinas, generadores o transformadores, tiene una carga inductiva grande (debida a todos los devanados). Para entregar mayor potencia a estos equipos en la fábrica sin usar voltajes excesivamente altos, los técnicos introducen capacitancia en los circuitos para cambiar la fase.



- EJAMEN RÁPIDO 32.6** Una fuente de CA alimenta un circuito *RLC* con una amplitud fija de voltaje. Si la frecuencia impulsora es  $\omega_1$ , el circuito es más capacitivo que inductivo y el ángulo de fase es  $-10^\circ$ . Si la frecuencia impulsora es  $\omega_2$ , el circuito es más inductivo que capacitivo y el ángulo de fase es  $+10^\circ$ . ¿En qué frecuencia la cantidad máxima de potencia es entregada al circuito? (a) mayor que  $\omega_1$ , (b) mayor que  $\omega_2$  o (c) la misma cantidad de potencia es entregada en ambas frecuencias.

### Ejemplo 32.5 Potencia promedio en un circuito *RLC* en serie

Calcule la potencia promedio entregada al circuito *RLC* en serie descrito en el ejemplo 32.4.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Considere el circuito de la figura 32.13 e imagine que la energía se entrega al circuito mediante la fuente de CA. Revise el ejemplo 32.4 para otros detalles acerca de este circuito.

**Categorizar** El resultado se encuentra usando las ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 32.8 y el voltaje máximo del ejemplo 32.4 para encontrar el voltaje rms de la fuente:

$$\Delta V_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{150 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 106 \text{ V}$$

De igual modo, encuentre la corriente rms en el circuito:

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{0.293 \text{ A}}{\sqrt{2}} = 0.207 \text{ A}$$

Use la ecuación 32.34 para encontrar la potencia entregada por la fuente:

$$\begin{aligned} P_{\text{prom}} &= I_{\text{rms}} V_{\text{rms}} \cos \phi = (0.207 \text{ A})(106 \text{ V}) \cos (-34.0^\circ) \\ &= 18.2 \text{ W} \end{aligned}$$

## 32.7 Resonancia en un circuito *RLC* en serie

Ya ha estudiado la resonancia en sistemas mecánicos oscilantes en el capítulo 15. En la sección 15.7, consideramos la situación en la que un sistema oscilante es impulsado por una fuerza externa que varía sinusoidalmente en el tiempo. Esto condujo al concepto de resonancia, donde el sistema exhibe su respuesta máxima cuando es conducido a su frecuencia natural. Como lo vio en la sección 31.6, un circuito *RLC* en serie es un sistema eléctrico oscilante con una frecuencia natural. Imagine ahora que maneja el circuito con un voltaje sinusoidal como el de la ecuación 32.1. Esperamos un fenómeno de resonancia. Se dice que un circuito *RLC* en serie está en **resonancia** cuando la frecuencia impulsora es tal que la corriente rms tiene su valor máximo. En general, la corriente rms se puede escribir como

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{Z} \quad (32.37)$$

donde  $Z$  es la impedancia del circuito. La sustitución de la expresión de  $Z$  en la ecuación 32.28 en la 32.37 da

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (32.38)$$

Puesto que la impedancia depende de la frecuencia de la fuente, la corriente del circuito *RLC* también depende de la frecuencia. La frecuencia angular  $\omega_0$  a la que  $X_L - X_C = 0$  se denomina **frecuencia de resonancia** del circuito. A esta frecuencia, el circuito exhibirá la máxima respuesta: la corriente rms en la ecuación 32.38 tendrá su mayor valor. Para hallar  $\omega_0$ , use la condición  $X_L = X_C$ , por la cual obtiene  $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$ , o sea

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (32.39) \quad \leftarrow \text{Frecuencia de resonancia}$$





Esta frecuencia también corresponde a la frecuencia natural de oscilación de un circuito  $LC$  (véase la sección 31.5). Por tanto, la corriente rms en un circuito  $RLC$  en serie alcanza su valor máximo cuando la frecuencia del voltaje aplicado es igual a la frecuencia natural del oscilador, que depende sólo de  $L$  y  $C$ . Además, a esta frecuencia la corriente está en fase con el voltaje aplicado.

**E XAMEN RÁPIDO 32.7** ¿Cuál es la impedancia de un circuito  $RLC$  en serie en resonancia? (a) mayor que  $R$ , (b) menor que  $R$  o (c) imposible de determinar.

En la figura 32.17a se ilustra una gráfica de corriente rms en función de la frecuencia para un circuito  $RLC$  en serie. Los datos suponen un constante  $\Delta V_{\text{rms}} = 5.0 \text{ mV}$ , que  $L = 5.0 \mu\text{H}$  y que  $C = 2.0 \text{ nF}$ . Las tres curvas corresponden a tres valores de  $R$ . En cada caso, la corriente rms alcanza su valor máximo a la frecuencia resonante  $\omega_0$ . Además, las curvas se hacen más angostas y más altas a medida que la resistencia se reduce.

La ecuación 32.38 muestra que cuando  $R = 0$ , la corriente se hace infinita a la resonancia. No obstante, los circuitos reales siempre tienen alguna resistencia que limita el valor de la corriente en algún valor finito. El análogo en un sistema oscilante mecánico es que la amplitud de la oscilación no puede ser infinita, porque siempre hay algo de fricción en el sistema.

También se puede calcular la potencia promedio como función de la frecuencia para un circuito  $RLC$  en serie. Usando las ecuaciones 32.36, 32.37 y 32.28 se tiene

$$P_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}^2 R = \frac{(\Delta V_{\text{rms}})^2}{Z^2} R = \frac{(\Delta V_{\text{rms}})^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{32.40}$$

Como  $X_L = \omega L$ ,  $X_C = 1/\omega C$ , y  $\omega_0^2 = 1/LC$ , el término  $(X_L - X_C)^2$  se puede expresar como

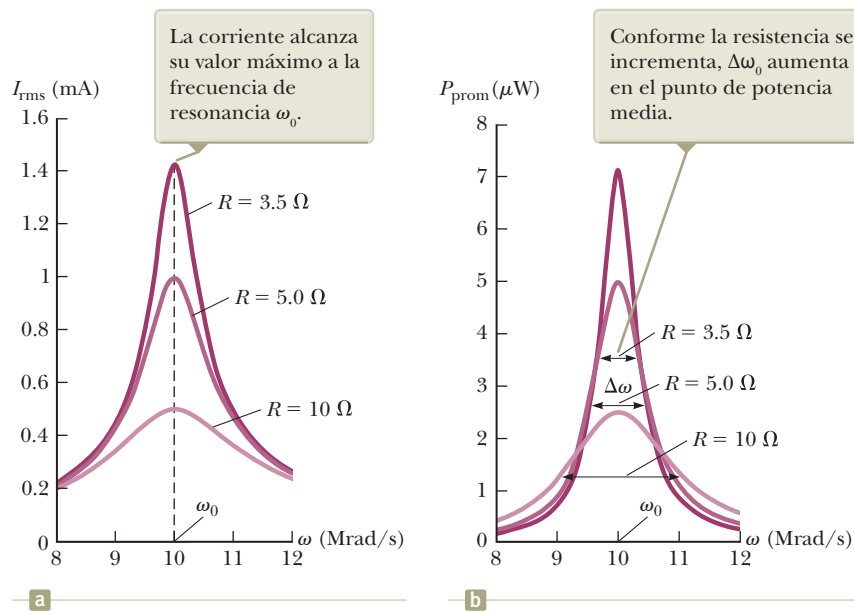
$$(X_L - X_C)^2 = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2$$

Con este resultado en la ecuación 32.40 obtiene

$$P_{\text{prom}} = \frac{(\Delta V_{\text{rms}})^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \tag{32.41}$$

Potencia promedio como función de la frecuencia en un circuito  $RLC$

La ecuación 32.41 muestra que en resonancia, cuando  $\omega = \omega_0$ , la potencia promedio es máxima y tiene el valor  $(\Delta V_{\text{rms}})^2/R$ . La figura 32.17b es una gráfica de la potencia



**Figura 32.17** (a) Corriente rms en función de la frecuencia para un circuito  $RLC$  en serie, para tres valores de  $R$ . (b) Potencia promedio entregada al circuito en función de la frecuencia para el circuito  $RLC$  en serie, para tres valores de  $R$ .

promedio en función de la frecuencia para dos valores de  $R$  en un circuito  $RLC$  en serie. Cuando se reduce la resistencia, la curva se hace más aguda cerca de la frecuencia de resonancia. Esta nitidez de la curva suele describirse por medio de un parámetro sin dimensiones conocido como **factor de calidad**,<sup>2</sup> denotado por  $Q$ :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (32.42) \quad \leftarrow \text{Factor de calidad}$$

donde  $\Delta\omega$  es el ancho de la curva medido entre los dos valores de  $\omega$  para los cuales  $P_{\text{prom}}$  tiene la mitad de su valor máximo, llamado *puntos de potencia media* (véase la figura 32.17b). Se deja como problema (problema 48) para demostrar que el ancho de los puntos de potencia media tienen el valor  $\Delta\omega = R/L$ , de modo que

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (32.43)$$

El circuito receptor de un radio es una aplicación importante de un circuito  $RLC$  resonante, usted puede sintonizar el radio a una estación particular (que transmite una onda electromagnética o señal de una frecuencia específica) al hacer variar un capacitor, que cambia la frecuencia de resonancia del circuito receptor. Cuando el circuito es conducido por las oscilaciones electromagnéticas una señal de radio se produce en una antena, el circuito del sintonizador responde con una gran amplitud de oscilación eléctrica sólo para la frecuencia de estación que iguala la frecuencia de resonancia. Por tanto sólo la señal de una estación de radio pasa por un amplificador y un altavoz, incluso a través de señales de todas las estaciones que conducen circuitos al mismo tiempo. Ya que es frecuente que muchas señales estén presentes en una amplia banda de frecuencias, es importante diseñar un circuito con  $Q$  elevada para eliminar las señales indeseables. De esta forma, las estaciones cuyas frecuencias son cercanas pero no iguales a la frecuencia resonante dan señales al receptor de que son insignificantes respecto a la señal que es igual a la frecuencia resonante.

### Ejemplo 32.6 Circuito $RLC$ en serie resonante

Considere un circuito  $RLC$  en serie para el que  $R = 150 \, \Omega$ ,  $L = 20.0 \, \text{mH}$ ,  $\Delta V_{\text{rms}} = 20.0 \, \text{V}$  y  $\omega = 5000 \, \text{s}^{-1}$ . Determine el valor de la capacitancia para que la corriente sea un máximo.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** En este problema, la frecuencia de conducción es fija. Deseamos diseñar el circuito en la figura 32.13 para que su frecuencia de resonancia coincida con la frecuencia de conducción.

**Categorizar** El resultado se encuentra usando ecuaciones desarrolladas en esta sección, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 32.39 para resolver para la capacitancia requerida en términos de la frecuencia de resonancia:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L}$$

Observe que solo necesitamos dos de las cantidades proporcionadas. Sustituya valores numéricos

$$C = \frac{1}{(5.00 \times 10^3 \, \text{s}^{-1})^2 (20.0 \times 10^{-3} \, \text{H})} = 2.00 \, \mu\text{F}$$

## 32.8 El transformador y la transmisión de energía

Como se explicó en la sección 26.6, es económico usar un voltaje alto y una corriente baja para minimizar la pérdida  $I^2 R$  en las líneas de transmisión cuando la energía eléctrica se transmite a grandes distancias. En consecuencia, son comunes líneas de 350 kV y, en muchas áreas, incluso se usan líneas con voltajes más altos (765 kV). En el extremo receptor de tales líneas, el consumidor requiere potencia a bajo voltaje (por

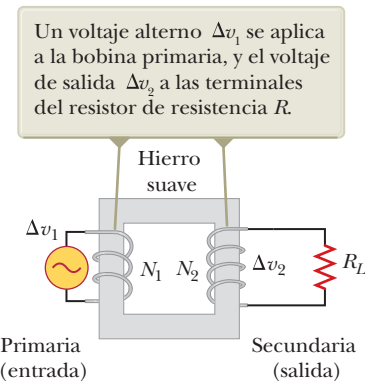
<sup>2</sup> El factor de calidad también se define como la rotación  $2\pi E/\Delta E$ , donde  $E$  es la energía almacenada en el sistema oscilante y  $\Delta E$  es la reducción de energía por ciclo de oscilación debida a la resistencia.



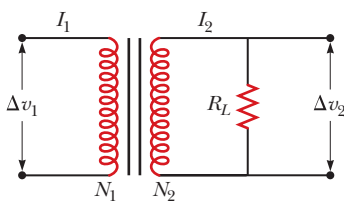


© Cengage

**Figura 32.18** El transformador en este poste de potencia baja la tensión de CA de 4 000 V a 240 V para su distribución a residencias individuales.



**Figura 32.19** Un transformador ideal está formado por dos bobinas enrolladas en el mismo núcleo de hierro.



**Figura 32.20** Diagrama de circuito para un transformador

seguridad y para eficiencia en diseño). En la práctica, el voltaje reduce a aproximadamente 20 000 V en una subestación de distribución, luego a 4000 V para entrega a áreas residenciales y finalmente a 120 V y 240 V en el sitio del consumidor. Por tanto, se necesita un dispositivo que pueda cambiar el voltaje y la corriente alternos sin causar cambios apreciables en la potencia entregada. El transformador CA es tal dispositivo. La figura 32.18 muestra un transformador típico en un área residencial.

En su forma más sencilla, el **transformador de CA** consta de dos bobinas de alambre enrolladas alrededor de un núcleo de hierro, como se ilustra en la figura 32.19. (Compárelo con el experimento de Faraday de la figura 30.2.) La bobina de la izquierda, que está conectada a la fuente de entrada de voltaje alterno y tiene  $N_1$  vueltas, se denomina *devanado primario* (o *primario*). A la bobina de la derecha, formada por  $N_2$  vueltas y conectada a un resistor de carga  $R$ , se le llama *devanado secundario* (o *secundario*). El propósito del núcleo de hierro es aumentar el flujo magnético a través de la bobina y proporcionar un medio en el que casi todas las líneas de campo magnético que pasan a través de una bobina lo hagan por la otra. De esta forma, el núcleo de hierro aumenta la inducción mutua de las bobinas.

La ley de Faraday (ecuación 30.1) proporciona la relación entre el voltaje  $\Delta v_1$  en las terminales del circuito primario y el flujo  $\Phi_B$  a través de cada vuelta del primario:

$$\Delta v_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} \tag{32.44}$$

Si supone que todas las líneas de campo magnético permanecen dentro del núcleo de hierro, el flujo que pasa por cada vuelta del primario es igual al flujo que pasa por cada vuelta del secundario. Por esto, el voltaje en las terminales del secundario es

$$\Delta v_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \tag{32.45}$$

Resolviendo la ecuación 32.44 para  $d\Phi_B/dt$  y si sustituimos el resultado en la ecuación 32.45, encontramos que

$$\Delta v_2 = \frac{N_2}{N_1} \Delta v_1 \tag{32.46}$$

Cuando  $N_2 > N_1$ , el voltaje de salida  $\Delta v_2$  es mayor que el voltaje de entrada  $\Delta v_1$ . Esta configuración se conoce como *transformador elevador*. Cuando  $N_2 < N_1$ , el voltaje de salida es menor que el voltaje de entrada, y se tiene un *transformador reductor*. En la figura 32.20 se muestra un diagrama del circuito para un transformador conectado a una resistencia de carga.

Cuando existe una corriente  $I_1$  en el circuito primario, se induce una corriente  $I_2$  en el secundario. (En esta explicación las mayúsculas  $I$  y  $\Delta V$  se refieren a los valores rms.) Si la carga del circuito secundario es una resistencia pura, la corriente inducida está en fase con el voltaje inducido. La potencia alimentada al circuito secundario la proporciona la fuente de CA conectada al circuito primario. En un transformador ideal, sin pérdidas, la potencia  $I_1 \Delta V_1$  suministrada por la fuente es igual a la potencia  $I_2 \Delta V_2$  en el circuito secundario. Es decir,

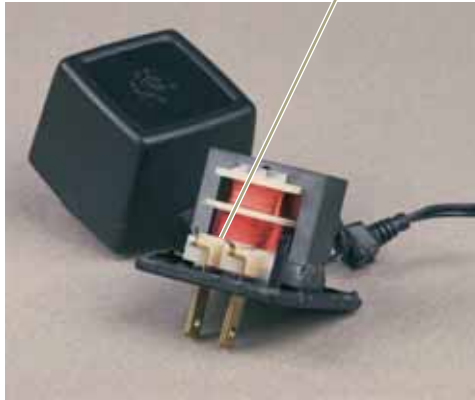
$$I_1 \Delta V_1 = I_2 \Delta V_2 \tag{32.47}$$

El valor de la resistencia de carga  $R_L$  determina el valor de la corriente del secundario porque  $I_2 = \Delta V_2 / R_L$ . Además, la corriente del primario es  $I_1 = \Delta V_1 / R_{eq}$ , donde

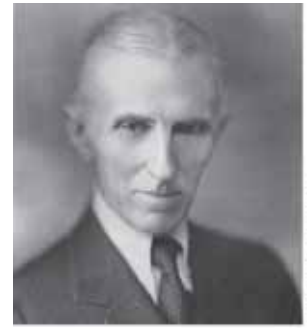
$$R_{eq} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_L \tag{32.48}$$

es la resistencia equivalente de la resistencia de carga cuando se ve desde el lado del primario. Este análisis permite inferir que un transformador se puede usar para acoplar resistencias entre el circuito primario y la carga. De esta forma se logra una máxima transferencia de potencia que puede lograrse entre una fuente de potencia dada y la resistencia de carga.

El devanado primario de este transformador está acoplado directamente a las puntas de la clavija. El devanado secundario se conecta al cable de línea que se ve a la derecha, que va a un aparato electrónico.



**Figura 32.21** Los dispositivos electrónicos a menudo funcionan por medio de adaptadores de CA que contienen transformadores como éste. Estos adaptadores alteran el voltaje de CA y en muchas aplicaciones, también convierten corriente alterna en corriente directa.



### Nikola Tesla

*Físico estadounidense (1856-1943)*

Tesla nació en Croacia pero pasó casi toda su vida profesional como inventor en Estados Unidos. Fue una figura clave en el perfeccionamiento de la electricidad de corriente alterna, transformadores de alta tensión y transporte de energía eléctrica mediante líneas de transmisión de CA.

El punto de vista de Tesla estuvo en desacuerdo con las ideas de Thomas Edison, quien se dedicó al uso de corriente directa para transmitir energía eléctrica. El método de CA de Tesla ganó.

Por ejemplo, un transformador conectado entre la salida de  $1\text{ k}\Omega$  de un amplificador de audio y un altavoz de  $8\ \Omega$  asegura la transmisión de tanta señal de audio como sea posible al altavoz. En terminología de equipos estéreo, esto se llama *acoplamiento de impedancias*.

En el análisis anterior, hemos asumido un transformador ideal en el que las pérdidas de energía en los devanados y el núcleo son cero. En realidad, hay posibilidades de pérdida de energía, y hay formas de minimizarlos. Las corrientes de Eddy se pueden generar en el núcleo de hierro, lo que lleva a un aumento en la energía interna debido a la resistencia del hierro. Estas pérdidas pueden reducirse utilizando un núcleo laminado como se estudió en la sección 30.6. La transformación de energía en energía interna en la resistencia finita de los alambres de la bobina suele ser muy pequeña. Los transformadores representativos tienen eficiencias de potencia de 90 a 99%.

Muchos aparatos electrónicos comunes para uso doméstico requieren voltajes bajos para funcionar de manera apropiada. Un transformador pequeño que se conecta directamente a la toma de la pared, como el que se ilustra en la figura 32.21, puede proporcionar el voltaje adecuado. La fotografía muestra los dos devanados enrollados alrededor de un núcleo común de hierro que se encuentra dentro de estas pequeñas “cajas negras”. Este transformador convierte los 120 V de CA del tomacorriente a 12.5 V de CA. (¿Puede usted determinar la relación de los números de vueltas de las dos bobinas?)

### Ejemplo 32.7 La economía de la energía de CA

Una estación de generación de electricidad necesita entregar energía a una capacidad de 20 MW a una ciudad a 1.0 km de distancia. Un voltaje común para los generadores de potencia comerciales es de 22 kV, pero se usa un transformador de elevador para aumentar el voltaje a 230 kV antes de la transmisión.

**(A)** Si la resistencia de los alambres es de  $2.0\ \Omega$  y la energía cuesta aproximadamente  $11\text{¢/kWh}$ , estime cuánto le cuesta a la compañía convertir la energía a energía interna en los alambres durante un día.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La resistencia de los alambres están en serie con la resistencia que representa la carga (hogares y negocios). Por tanto hay una caída de voltaje en los alambres, esto es, parte de la energía transmitida se convierte en energía interna en los alambres y nunca alcanza la carga.

**Categorizar** Este problema trata de encontrar la potencia entregada a una carga resistiva en un circuito CA. Ignore cualquier característica capacitiva o inductiva de la carga e iguale el factor potencia a 1.

*continúa*

## 32.7 continuación

**Analizar** Calcule la energía  $T_{ET}$  entregada por los alambres en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ :

$$T_{ET} = P_{\text{cables}} \Delta t$$

Use la ecuación 32.36 para evaluar la potencia entregada por los alambres:

$$T_{ET} = I_{\text{rms}}^2 R_{\text{cables}} \Delta t$$

Use la ecuación 32.36 para evaluar la corriente rms:

$$(1) \quad T_{ET} = \frac{P_{\text{prom}}^2}{\Delta V_{\text{rms}}^2} R_{\text{cables}} \Delta t$$

Sustituya valores numéricos:

$$T_{ET} = \frac{(20 \times 10^6 \text{ W})^2}{(230 \times 10^3 \text{ V})^2} (2.0 \Omega)(24 \text{ h}) = 3.6 \times 10^5 \text{ Wh} = 360 \text{ kWh}$$

Encuentre el costo de esta energía a razón de 11¢/kWh:

$$\text{Costo} = (360 \text{ kWh})(\$0.11/\text{kWh}) = \$40$$

**(B)** Repita el cálculo para una situación en la cual la planta eléctrica entrega la energía con un voltaje original de 22 kV.

## SOLUCIÓN

Utilice el nuevo voltaje en la ecuación (1):

$$T_{ET} = \frac{(20 \times 10^6 \text{ W})^2}{(22 \times 10^3 \text{ V})^2} (2.0 \Omega)(24 \text{ h}) = 4.0 \times 10^7 \text{ Wh} = 4.0 \times 10^4 \text{ kWh}$$

Encuentre el costo de esta energía a razón de 11¢/kWh: Costo =  $(4.0 \times 10^4 \text{ kWh})(\$0.11/\text{kWh}) = \$4.4 \times 10^3$

**Finalizar** Observe el tremendo ahorro que es posible a través del uso de transformadores y líneas de transmisión de alto voltaje. Tales ahorros, en combinación con la eficiencia de usar corriente alterna para operar motores, conduce a la adopción universal de la corriente alterna en lugar de la corriente directa para redes eléctricas comerciales.

## Resumen

## Definiciones

En los circuitos de CA que contienen inductores y capacitores, es útil definir la **reactancia inductiva**  $X_L$  y la **reactancia capacitiva**  $X_C$  como

$$X_L = \omega L \quad (32.13)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (32.21)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular de la fuente de CA. La unidad del SI para reactancia es el ohm.

La **impedancia**  $Z$  de un circuito de CA  $RLC$  en serie es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (32.28)$$

Esta expresión ilustra que no es posible sumar simplemente la resistencia y las reactancias en un circuito. Se debe explicar el voltaje aplicado y la corriente que están fuera de fase, con el **ángulo de fase**  $\phi$  entre la corriente y el voltaje como

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right) \quad (32.30)$$

El signo de  $\phi$  puede ser positivo o negativo, dependiendo de si  $X_L$  es mayor o menor que  $X_C$ . El ángulo de fase es cero cuando  $X_L = X_C$ .

## Conceptos y principios

La **corriente rms** y el **voltaje rms** en un circuito de CA en el que los voltajes y la corriente varían sinusoidalmente están dados por

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = 0.707 I_{\text{máx}} \quad (32.6)$$

$$\Delta V_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = 0.707 \Delta V_{\text{máx}} \quad (32.8)$$

donde  $I_{\text{máx}}$  y  $\Delta V_{\text{máx}}$  son los valores máximos.





Si un circuito de CA consiste en una fuente y un resistor, la corriente está en fase con el voltaje. Es decir, la corriente y el voltaje alcanzan sus valores máximos al mismo tiempo.

Si un circuito de CA consiste en una fuente y un inductor, la corriente se atrasa al voltaje por  $90^\circ$ . Es decir, el voltaje llega a su valor máximo un cuarto de periodo antes que la corriente alcance su valor máximo.

Si un circuito de CA consiste en una fuente y un capacitor, la corriente se adelanta al voltaje por  $90^\circ$ . Es decir, la corriente alcanza su valor máximo un cuarto de periodo antes que el voltaje alcance su valor máximo.

La corriente rms en un circuito  $RLC$  en serie es

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (32.38)$$

Un circuito  $RLC$  en serie está en resonancia cuando la reactancia inductiva es igual a la reactancia capacitiva. Cuando se satisface esta condición, la corriente rms conocida por la ecuación 32.38 tiene su valor máximo. La **frecuencia de resonancia**  $\omega_0$  del circuito es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (32.39)$$

La corriente rms en un circuito  $RLC$  en serie tiene su valor máximo cuando la frecuencia de la fuente es igual a  $\omega_0$ , es decir, cuando la frecuencia "conductor" iguala la frecuencia de resonancia.

La **potencia promedio** entregada por la fuente en un circuito  $RLC$  es

$$P_{\text{prom}} = I_{\text{rms}} \Delta V_{\text{rms}} \cos \phi \quad (32.34)$$

Una expresión equivalente para la potencia promedio es

$$P_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}^2 R \quad (32.36)$$

La potencia promedio entregada por la fuente resulta en una energía interna creciente en el resistor. En un inductor o capacitor ideal no se presenta pérdida de potencia.

Los **transformadores de CA** permiten cambios fáciles en voltaje alterno de acuerdo con

$$\Delta v_2 = \frac{N_2}{N_1} \Delta v_1 \quad (32.46)$$

donde  $N_1$  y  $N_2$  son los números de devanados en las bobinas primaria y secundaria, respectivamente, y  $\Delta v_1$  y  $\Delta v_2$  son los voltajes en estas bobinas.

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

- La figura TP32.1 muestra un circuito RLC con tres posibilidades para medir un voltaje de salida  $\Delta v_{\text{salida}}$ . Las curvas en la figura 32.17a muestran la corriente efectiva medida en la resistencia a medida que se varía la frecuencia de la fuente.

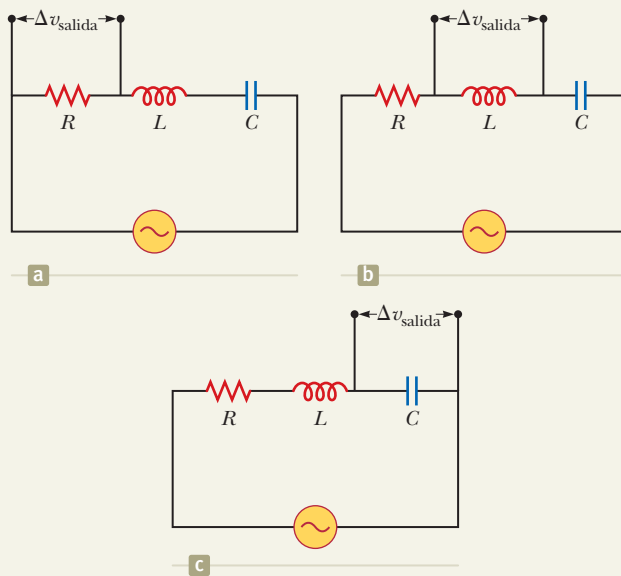


Figura TP32.1

El voltaje de salida  $\Delta V_R = I_{\text{rms}} R$  exhibirá un comportamiento similar a medida que la frecuencia varía. Los voltajes de salida a través del inductor y el capacitor mostrarán un comportamiento diferente. (a) Demuestre que las magnitudes de los voltajes de salida a través del capacitor y el inductor tienen el mismo valor en resonancia. (b) Demuestre que la magnitud del voltaje de salida a través del resistor en resonancia puede ser menor o mayor que aquellos a través del inductor y el capacitor, y encuentre el valor de  $R$  en la que los tres voltajes de salida son los mismos en la resonancia. (c) Las magnitudes de los voltajes de salida no alcanzan el valor máximo en la misma frecuencia. Demuestre que, para la resistencia del inciso (b), la frecuencia a la que se maximiza la magnitud del voltaje en el inductor es dos veces el que maximiza el voltaje del capacitor. *Sugerencia:* para el inciso (c), divida su grupo en dos y haga que un grupo trabaje en el inductor y el otro trabaje en el capacitor.

- ACTIVIDAD** En la sección 27.4, estudiamos los circuitos RC, con un voltaje de CD aplicado. Aprendimos acerca de cargar y descargar el capacitor en ese análisis. Ahora apliquemos un voltaje CA a un circuito RC. La figura TP32.2 (página 868) muestra un circuito RC con dos posibilidades para medir un voltaje de salida  $\Delta v_{\text{salida}}$ . Discuta las siguientes preguntas en su grupo. (a) ¿Para qué posibilidad el voltaje de salida será pequeño a frecuencias más bajas e igual al voltaje de entrada a altas frecuencias? (b) ¿Para qué posibilidad el voltaje de salida será pequeño a altas frecuencias e igual al voltaje de entrada a bajas frecuencias?



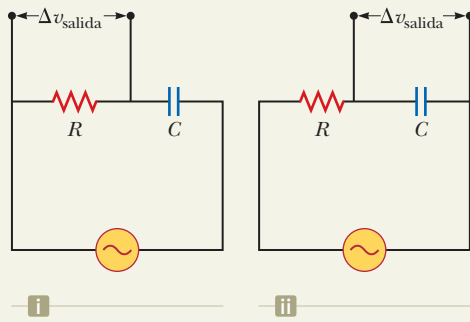


Figura TP32.2

3. En las secciones 32.5 y 32.7, investigamos el circuito serie *RLC*. La figura TP32.3a muestra un circuito *RLC* en paralelo. Discuta en su grupo cómo este circuito sería diferente del circuito en serie. Como con cualquier circuito en paralelo, los voltajes instantáneos (y los voltajes rms) en cada uno de los tres elementos del circuito son los mismos. Además, cada voltaje está en fase con la corriente en la resistencia. Las corrientes en *C* y *L* llevan o retrasan la corriente en la

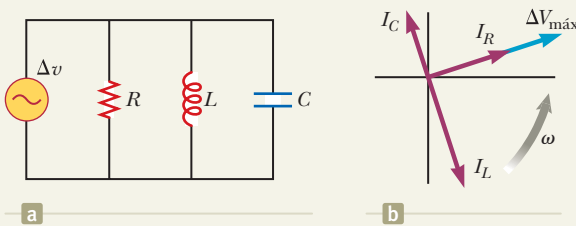


Figura TP32.3

resistencia como se muestra en el diagrama fasorial de corriente, figura TP32.3b. Trabaje con su grupo para realizar lo siguiente para este circuito: (a) Demuestre que la corriente rms entregada por la fuente es

$$I_{rms} = \Delta V_{rms} \left[ \frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right]^{1/2}$$

(b) Muestre que el ángulo de fase  $\phi$  entre  $\Delta V_{rms}$  e  $I_{rms}$  viene dado por

$$\tan \phi = R \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

(c) Demuestre que la corriente entregada por la fuente alcanza un mínimo cuando el circuito se conduce a su frecuencia de resonancia. (d) Encuentre una expresión para la impedancia del circuito paralelo *RLC*.

4. **ACTIVIDAD** Como grupo, considere y analice el circuito que se muestra en la figura 32.6, con un inductor y una fuente de CA. El inductor tiene una inductancia de 3.50 mH. Suponga que la fuente de CA no proporciona un voltaje sinusoidal, aunque el voltaje sigue siendo periódico. El resultado de la fuente de CA es que la corriente en el circuito se puede expresar durante el primer segundo después de encender la fuente de CA como

$$i(t) = \begin{cases} (6.00 \times 10^{-3})t & 0 < t < 0.600 \text{ s} \\ 9.00 \times 10^{-3} - (9.00 \times 10^{-3})t & 0.600 \text{ s} < t < 1.00 \text{ s} \end{cases}$$

donde la corriente *i* está en amperes y el tiempo *t* en segundos. Este patrón en la corriente se repite cada segundo siguiente. (a) Dibuje un gráfico de la corriente en el circuito como una función del tiempo. (b) Dibuje un gráfico del voltaje en el inductor en función del tiempo.

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a **WEBASSIGN** From Cengage

### SECCIÓN 32.2 Resistores en un circuito de CA

- (a) ¿Cuál es la resistencia de una lámpara que usa una potencia promedio de 75.0 W cuando está conectada a una fuente de 60.0 Hz que tiene un voltaje máximo de 170 V? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es la resistencia de una lámpara de 100 W?
- CIC** Cierta lámpara tiene una potencia de 60.0 W cuando funciona a un voltaje rms de 120 V. (a) ¿Cuál es el pico de voltaje aplicado a través de la lámpara? (b) ¿Cuál es la resistencia de la lámpara? (c) ¿Una lámpara de 100 W tiene una resistencia mayor o menor que una lámpara de 60.0 W? Explique.
- La corriente en el circuito que se observa en la figura P32.3 es igual a 60.0% del pico de corriente en  $t = 7.00$  ms. ¿Cuál es la frecuencia mínima de la fuente que da esta corriente?

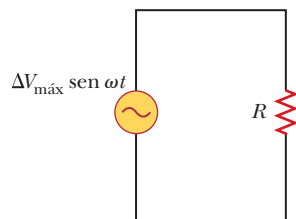


Figura P32.3  
Problemas 3 y 5.

- La figura P32.4 muestra tres lámparas conectadas a un voltaje de CA doméstico de 120 V CA (rms). Las lámparas 1 y 2 tienen una potencia de 150 W, y la lámpara 3 tiene una potencia de 100 W. Hallar (a) la corriente rms y (b) la resistencia de cada lámpara. (c) ¿Cuáles la resistencia total de la combinación de las tres lámparas?

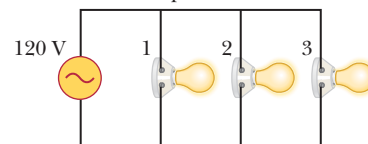


Figura P32.4

- En el circuito de CA simple que se muestra en la figura 32.3,  $R = 70.0 \Omega$  y el voltaje de salida de la fuente de CA es  $\Delta V_{máx} \text{ sen } \omega t$ . (a) Si  $\Delta V_R = 0.250 \Delta V_{máx}$  por primera vez en  $t = 0.010$  s, ¿cuál es la frecuencia angular de la fuente? (b) ¿Cuál es el siguiente valor de *t* para el cual  $\Delta V_R = 0.250 \Delta V_{máx}$ ?

### SECCIÓN 32.3 Inductores en un circuito de CA

- T** En un circuito de CA completamente inductivo, como se observa en la figura 32.6,  $\Delta V_{máx} = 100$  V. (a) La corriente máxima es 7.50 A a 50.0 Hz. Calcule la inductancia *L*. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿A qué frecuencia angular  $\omega$  es 2.50 A la corriente máxima?

7. Para el circuito que se ilustra en la figura P32.6,  $\Delta V_{\text{m\acute{a}x}} = 80.0 \text{ V}$ ,  $\omega = 65.0 \pi \text{ rad/s}$ , y  $L = 70.0 \text{ mH}$ . Calcule la corriente en el inductor a  $t = 15.5 \text{ ms}$ .

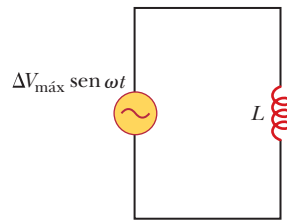


Figura P32.6  
Problemas 6 y 7.

8. Un inductor de  $20.0 \text{ mH}$  se conecta a una salida eléctrica estándar ( $V_{\text{rms}} = 120 \text{ V}$ ;  $f = 60.0 \text{ Hz}$ ). Determine la energía almacenada en el inductor a  $t = (1/180) \text{ s}$ , suponiendo que esta energía es cero a  $t = 0$ .

9. Una fuente de corriente alterna tiene un voltaje de salida rms de  $78.0 \text{ V}$  a una frecuencia de  $80.0 \text{ Hz}$ . Si la fuente está conectada a través de un inductor de  $25.0 \text{ mH}$ , ¿cuál es (a) la reactancia inductiva del circuito, (b) el valor de la corriente rms en el circuito, y (c) la máxima corriente en el circuito?

10. **Problema de repaso.** Determine el flujo magnético máximo que pasa por un inductor conectado a una toma de corriente estándar ( $\Delta V_{\text{rms}} = 120 \text{ V}$ ,  $f = 60.0 \text{ Hz}$ ).

**SECCIÓN 32.4 Capacitores en un circuito de CA**

11. Un capacitor de  $1.00 \text{ mF}$  se conecta a una toma de corriente estándar ( $\Delta V_{\text{rms}} = 120 \text{ V}$ ;  $f = 60.0 \text{ Hz}$ ). Determine la corriente en los alambres a  $t = \frac{1}{180} \text{ s}$ , suponiendo que cuando  $t = 0$  la energía almacenada en el condensador es cero.

12. Una fuente de CA con un voltaje rms de salida de  $36.0 \text{ V}$  a una frecuencia de  $60.0 \text{ Hz}$  se conecta a través de un capacitor de  $12.0 \mu\text{F}$ . Determine (a) la reactancia capacitiva, (b) la corriente rms, y (c) la máxima corriente en el circuito. (d) ¿El capacitor tiene su carga máxima cuando la corriente tiene su valor máximo? Explique.

13. ¿Cuál es la corriente máxima en un capacitor de  $2.20 \mu\text{F}$  cuando está conectado (a) a una salida eléctrica estándar estadounidense que tiene  $\Delta V_{\text{rms}} = 120 \text{ V}$ ,  $f = 60.0 \text{ Hz}$ , y (b) Una salida eléctrica estándar europea que tiene  $\Delta V_{\text{rms}} = 240 \text{ V}$ ,  $f = 50.0 \text{ Hz}$ ?

14. Un capacitor  $C$  se conecta a una fuente de alimentación que funciona con una frecuencia  $f$  y produce un voltaje  $\Delta V_{\text{rms}}$ . ¿Cuál es la carga máxima que aparece en cualquiera de las placas del capacitor?

**SECCIÓN 32.5 Circuito RLC en serie**

15. Además de los diagramas de fasores que muestran voltajes, como en la figura 32.15, puede dibujar diagramas de fasores con la resistencia y la reactancia. La resultante de la adición de los fasores es la impedancia. Dibuje a escala un diagrama de fasores que muestre  $Z$ ,  $X_L$ ,  $X_C$  y  $\phi$  para un circuito en serie de CA para el cual  $R = 300 \Omega$ ,  $C = 11.0 \mu\text{F}$ ,  $L = 0.200 \text{ H}$  y  $f = 500/\pi \text{ Hz}$ .

16. Una fuente de CA con  $V_{\text{m\acute{a}x}} = 150 \text{ V}$  y  $f = 50.0 \text{ Hz}$  se conecta entre los puntos  $a$  y  $d$  de la figura P32.16. Calcule los voltajes máximos entre (a) los puntos  $a$  y  $b$ , (b) los puntos  $b$  y  $c$ , (c) los puntos  $c$  y  $d$ , (d) los puntos  $b$  y  $d$ .

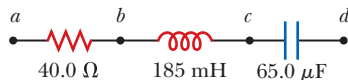


Figura P32.16 Problemas 16 y 51.

17. Está trabajando en una fábrica y se le ha encomendado la tarea de determinar las necesidades eléctricas de un nuevo motor que se instalará en una línea de ensamblaje. El motor ha sido probado bajo condiciones de carga y se ha encontrado que tiene una resistencia de  $35.0 \Omega$  y una reactancia inductiva de  $50.0 \Omega$ . Puede modelar el motor como un circuito serie  $RL$ , el motor tendrá su propio circuito con voltaje rms de  $480 \text{ V}$ . Determine la corriente de pico utilizada por el motor para determinar el tamaño del interruptor necesario para proteger el circuito.

18. Dibuje fasores a escala para los siguientes voltajes en unidades SI: (a)  $25.0 \text{ sen } \omega t$  con  $\omega t = 90.0^\circ$ , (b)  $30.0 \text{ sen } \omega t$  con  $\omega t = 60.0^\circ$ , y (c)  $18.0 \text{ sen } \omega t$  con  $\omega t = 300^\circ$ .

19. Un circuito  $RLC$  consta de un resistor de  $150 \Omega$ , un capacitor de  $21.0 \mu\text{F}$  y un inductor de  $460 \text{ mH}$  conectados en serie con una fuente de alimentación de  $120 \text{ V}$ ,  $60.0 \text{ Hz}$ . (a) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado? (b) ¿Cuál alcanza su valor máximo primero, la corriente o el voltaje?

20. Un resistor de  $60.0 \Omega$  está conectado en serie con un capacitor  $30.0 \mu\text{F}$  y una fuente cuyo voltaje máximo es  $120 \text{ V}$ , funcionando a  $60.0 \text{ Hz}$ . Determine (a) la reactancia capacitiva del circuito, (b) la impedancia del circuito, y (c) la máxima corriente en el circuito. (d) ¿El voltaje se adelanta o se atrasa a la corriente? (e) ¿Cómo afectaría a la corriente la adición de un inductor en serie con el resistor y el capacitor existentes? Explique.

**SECCIÓN 32.6 Potencia en un circuito de CA**

21. Un circuito  $RLC$  en serie tiene una resistencia de  $45.0 \Omega$  y una impedancia de  $75.0 \Omega$ . ¿Qué potencia promedio es entregada a este circuito cuando  $\Delta V_{\text{rms}} = 210 \text{ V}$ ?

22. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un circuito en serie que consiste en una fuente ideal de CA (sin inductancia o capacitancia en la fuente misma) con un voltaje rms de valor  $\Delta V$  a la frecuencia  $f$  y un zumbador magnético con una resistencia  $R$  y una inductancia  $L$ , al ajustar cuidadosamente la inductancia  $L$  del circuito, se alcanza un factor de potencia exactamente de  $1.00$ .

23. Un circuito  $RLC$  en serie tiene una resistencia de  $22.0 \Omega$  y una impedancia de  $80.0 \Omega$ . Si el voltaje rms aplicado al circuito es  $160 \text{ V}$ , ¿cuál es la potencia media que se entrega al circuito?

24. Un voltaje de CA de la forma  $\Delta v = 90.0 \text{ sen } 350 t$ , donde  $\Delta v$  está en volts y  $t$  en segundos, es aplicado a un circuito  $RLC$  en serie. Si  $R = 50.0 \Omega$ ,  $C = 25.0 \mu\text{F}$ , y  $L = 0.200 \text{ H}$ , encuentre (a) la impedancia del circuito, (b) la corriente rms en el circuito, y (c) la potencia media entregada al circuito.

**SECCIÓN 32.7 Resonancia en un circuito RLC en serie**

25. El circuito  $LC$  de un transmisor de radar oscila a  $9.00 \text{ GHz}$ . (a) ¿Qué inductancia se requiere para que el circuito resuene a esta frecuencia si su capacitancia es  $2.00 \text{ pF}$ ? (b) ¿Cuál es la reactancia inductiva del circuito en esta frecuencia?

26. Un circuito  $RLC$  en serie tiene los siguientes componentes con valores de:  $L = 20.0 \text{ mH}$ ,  $C = 100 \text{ nF}$ ,  $R = 20.0 \Omega$  y  $V_{\text{m\acute{a}x}} = 100 \text{ V}$ , con  $\Delta v = V_{\text{m\acute{a}x}} \text{ sen } \omega t$ . Encuentre (a) la frecuencia resonante del circuito, (b) la amplitud de la corriente a la frecuencia resonante, (c) el valor  $Q$  del circuito y (d) la amplitud del voltaje en las terminales del inductor con resonancia.

**27. CE** Desea construir un circuito  $RLC$  en serie para un proyecto en el que está trabajando. Al mirar en su caja de piezas de electrónica, se decepciona al encontrar que solo tiene dos resistencias, cada una de  $47.0\ \Omega$ , dos capacitores, cada uno de  $5.00\ \text{nF}$ , y un inductor de  $5.00\ \text{mH}$ . Determine la frecuencia angular más baja posible en resonancia que puede obtener de los cinco componentes conectando el inductor en serie con una combinación de las dos resistencias y una combinación de los dos capacitores.

**28.** Un resistor de  $10.0\ \Omega$ , un inductor de  $10.0\ \text{mH}$  y un capacitor de  $100\ \mu\text{F}$  se conectan en serie a una fuente de  $50.0\ \text{V}$  (rms) que tiene una frecuencia variable. Si la frecuencia de operación es del doble que la frecuencia de resonancia, encuentre la energía que es entregada al circuito durante cierto periodo.

**29. S** Un resistor  $R$ , un inductor  $L$  y un capacitor  $C$  se conectan en serie a una fuente de CA de voltaje  $V_{\text{rms}}$  y frecuencia variable. Si la frecuencia de operación es del doble que la frecuencia de resonancia, encuentre la energía que es entregada al circuito durante cierto periodo.

### SECCIÓN 32.8 El transformador y la transmisión de energía

**30. T** La bobina primaria de un transformador tiene  $N_1 = 350$  vueltas y la bobina secundaria tiene  $N_2 = 2\ 000$  vueltas. Si el voltaje de entrada en la bobina primaria es  $\Delta v(t) = 170 \cos \Omega t$ , donde  $\Delta v$  está en volts y  $t$  en segundos, ¿qué voltaje rms se genera en la bobina secundaria?

**31. BIO** Una persona trabaja cerca del secundario de un transformador, como se observa en la figura P32.31. El voltaje del primario es de  $120\ \text{V}$  a  $60.0\ \text{Hz}$  y el voltaje del secundario es  $5\ 000\ \text{V}$ . La capacitancia  $C_s$ , que es la capacitancia parásita entre la mano y el devanado secundario, es de  $20.0\ \text{pF}$ . Suponiendo que la persona tiene una resistencia corporal a tierra  $R_b = 50.0\ \text{k}\Omega$ , determine el voltaje rms en el cuerpo. (Sugerencia: Modele el secundario del transformador como una fuente de CA.)

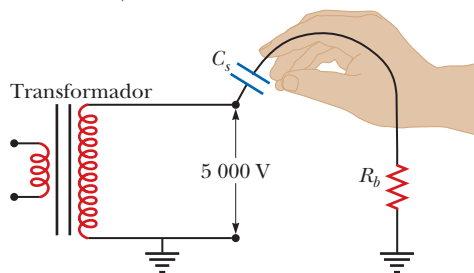


Figura P32.31

**32. AMT C/C** Una línea de transmisión que tiene una resistencia por cada unidad de longitud de  $4.50 \times 10^{-4}\ \Omega/\text{m}$  será utilizada para transmitir  $5.00\ \text{MW}$  a  $400$  millas ( $6.44 \times 10^5\ \text{m}$ ). El voltaje de salida del generador es de  $4.50\ \text{kV}$ . (a) ¿Cuál es la pérdida en la línea si se usa un transformador para elevar el voltaje a  $500\ \text{kV}$ ? (b) ¿Qué porcentaje de la potencia de entrada se pierde en la línea bajo estas circunstancias? (c) ¿Qué pasaría si? ¿Qué dificultades se encuentran al tratar de transmitir los  $5.00\ \text{MW}$  al voltaje de  $4.50\ \text{kV}$  del generador?

### PROBLEMAS ADICIONALES

**33.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un circuito  $RLC$  se utiliza en una radio para sintonizar una estación de radio comercial en AM. Los valores de los componentes del circuito son  $R = 15.0\ \Omega$ ,  $L = 2.80\ \mu\text{H}$  y  $C = 0.910\ \text{pF}$ .

**34. C/C** Un resistor de  $400\ \Omega$ , un inductor y un capacitor están en serie con una fuente CA. La reactancia del inductor es de  $700\ \Omega$  y la impedancia del circuito es de  $760\ \Omega$ . (a) Explique qué puede y qué no puede determinar acerca de la reactancia del capacitor. (b) Si encuentra que la fuente de energía disminuye conforme eleva la frecuencia, ¿qué sabe acerca de la reactancia capacitiva en el circuito original? (c) Repita el inciso (a) si supone que la resistencia es de  $200\ \Omega$  en lugar de  $400\ \Omega$  y la impedancia del circuito se mantiene a  $760\ \Omega$ .

**35.** La energía será transmitida a través de un par de alambres de cobre en una línea de transmisión a la tasa de  $20.0\ \text{kW}$  con sólo una pérdida de  $1.00\ \%$  sobre una distancia de  $18.0$  kilómetros a una diferencia de potencial  $\Delta V_{\text{rms}} = 1.50 \times 10^3\ \text{V}$  entre los alambres. Suponiendo que la densidad de corriente es uniforme en los conductores, ¿cuál es el diámetro requerido para cada uno de los dos alambres?

**36. S** La energía será transmitida a través de un par de alambres de cobre en una línea de transmisión a una tasa  $P$  con sólo una pérdida fraccional  $f$  sobre una distancia  $\ell$  a una diferencia de potencial  $\Delta V_{\text{rms}}$  entre los alambres. Suponiendo que la densidad de corriente es uniforme en los conductores, ¿cuál es el diámetro requerido para cada uno de los dos alambres?

**37.** Se puede usar un transformador para proveer una transferencia máxima de potencia entre dos circuitos de CA que tienen diferentes impedancias  $Z_1$  y  $Z_2$ . Este proceso se llama *correspondencia de impedancia*. (a) Muestre que la razón de vueltas  $N_1/N_2$  necesaria para satisfacer esta condición es

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

(b) Suponga que desea usar un transformador como dispositivo de acoplamiento de impedancias entre un amplificador de audio que tiene una impedancia de salida de  $8.00\ \text{k}\Omega$  y un altavoz con una impedancia de entrada de  $8.00\ \Omega$ . ¿Cuál debe ser la razón  $N_1/N_2$ ?

**38. S** Demuestre que el valor rms para el voltaje de diente de sierra que se ilustra en la figura P32.38 es  $\Delta V_{\text{máx}}/\sqrt{3}$ .

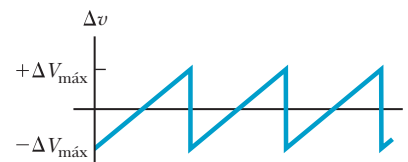


Figura P32.38

**39. C/C V** Marie Cornu, una física en el Instituto Politécnico de París, inventó los fasores aproximadamente en 1880. Este problema le ayuda a ver su utilidad general para representar oscilaciones. Dos vibraciones mecánicas se representan mediante las expresiones

$$y_1 = 12.0 \sin 4.50t$$

y

$$y_2 = 12.0 \sin (4.50t + 70.0^\circ)$$

donde  $y_1$  y  $y_2$  están en centímetros y  $t$  en segundos. Encuentre la amplitud y la constante de fase de la suma de estas funciones (a) usando una identidad trigonométrica (como las del apéndice B) y (b) al representar las oscilaciones como fasores. (c) Establezca el resultado de comparar las respuestas para (a) y (b). (d) Los fasores hacen igualmente sencillo sumar



ondas viajeras. Encuentre la amplitud y constante de fase de la suma de las tres ondas representadas por

$$y_1 = 12.0 \text{ sen } (15.0x - 4.50t + 70.0^\circ)$$

$$y_2 = 15.5 \text{ sen } (15.0x - 4.50t - 80.0^\circ)$$

$$y_3 = 17.0 \text{ sen } (15.0x - 4.50t + 160^\circ)$$

donde  $x$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$  están en centímetros y  $t$  en segundos.

- 40. C/C** Un circuito  $RLC$  en serie tiene frecuencia angular de resonancia de  $2 \times 10^3$  rad/s. Cuando opera a cierta frecuencia,  $X_L = 12.0 \Omega$  y  $X_C = 8.00 \Omega$ . (a) ¿Esta cierta frecuencia es mayor, menor o igual que la frecuencia de resonancia? Explique cómo puede decirlo. (b) Explique si es posible determinar los valores de  $L$  y  $C$ . (c) Si es posible, encuentre  $L$  y  $C$ . Si esta determinación no es posible, proporcione una expresión compacta para la condición que deben satisfacer  $L$  y  $C$ .

- 41. AMT C/C** **Problema de repaso.** Un conductor aislado de una extensión casera tiene una masa por longitud de 19.0 g/m. Una sección de este conductor se mantiene bajo tensión entre dos abrazaderas. Una subsección se ubica en un campo magnético de 15.3 mT de magnitud dirigido perpendicular a la longitud del cable. Cuando éste conduce una corriente  $CA$  de 9.00 A a una frecuencia de 60.0 Hz, vibra en resonancia en su estado de vibración de onda estacionaria más simple. (a) Determine la relación que se debe satisfacer entre la separación  $d$  de las abrazaderas y la tensión  $T$  en el cable. (b) Determine una posible combinación de valores para estas variables.

- 42. S** (a) Bosqueje una gráfica del ángulo de fase para un circuito  $RLC$  en serie como función de la frecuencia angular, desde cero hasta una frecuencia mucho mayor que la frecuencia de resonancia. (b) Identifique el valor de  $\phi$  a la frecuencia angular de resonancia  $\omega_0$ . (c) Demuestre que la pendiente de la gráfica de  $\phi$  con  $\omega$  en el punto de resonancia es  $2Q/\omega_0$ .

- 43. PG** Un circuito  $RLC$  en serie contiene los siguientes componentes:  $R = 150 \Omega$ ,  $L = 0.250$  H,  $C = 2.00 \mu\text{F}$  y una fuente con  $\Delta V_{\text{máx}} = 210$  V que funciona a 50.0 Hz. Su objetivo es encontrar el ángulo de fase, el factor de potencia y la potencia de entrada para este circuito. (a) Encuentre la reactancia inductiva en el circuito. (b) Determine la reactancia capacitiva en el circuito. (c) Halle la impedancia en el circuito. (d) Calcule la máxima corriente en el circuito. (e) Determine el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la fuente. (f) Encuentre el factor de potencia para el circuito. (g) Determine la potencia de entrada al circuito.

- 44. S** **Problema de repaso.** En el circuito que se ilustra en la figura P32.44, suponga que se dan todos los parámetros excepto  $C$ . Encuentre (a) la corriente como función del tiempo. (b) la potencia entregada al circuito. (c) la corriente como función del tiempo después de abrir sólo el interruptor 1. (d) Después de abrir también el interruptor 2, la corriente y voltaje están en fase. Encuentre la capacitancia  $C$ . Encuentre (e) la impedancia del circuito

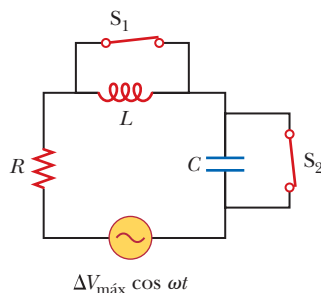


Figura P32.44

cuando ambos interruptores están abiertos. (f) la máxima energía almacenada en el capacitor durante las oscilaciones. (g) la máxima energía almacenada en el inductor durante las oscilaciones. (h) Ahora la frecuencia de la fuente de voltaje se duplica. Encuentre la diferencia de fase entre la corriente y el voltaje. (i) Encuentre la frecuencia que provoca que la reactancia inductiva sea igual a la mitad de la reactancia capacitiva.

- 45. CE** Ha decidido construir su propio sistema de altavoces para su sistema de entretenimiento hogareño. El sistema constará de dos altavoces: un gran "woofer", al que desea enviar bajas frecuencias de audio (graves) y un pequeño "tweeter", que debería recibir altas frecuencias de audio (agudos). Para separar las frecuencias altas y bajas de la señal de audio, construye el "crossover" (red de cruce) que se muestra en la figura P32.45. El voltaje de entrada es la salida de audio del amplificador en su sistema, que se muestra en la figura como una fuente de CA. Tiene dos salidas como se muestra: una a través de la resistencia y otra a través del capacitor. (a) ¿A través de qué elemento debe conectar el woofer? (b) ¿A través de qué elemento debe conectar el tweeter? (c) Para elegir los valores apropiados de  $R$  y  $C$ , necesita determinar una expresión para la relación entre el voltaje de salida y el voltaje de entrada en función de la frecuencia angular  $\omega$  para la resistencia como salida. (d) Debe determinar una expresión similar para la relación entre el voltaje de salida y el voltaje de entrada en función de la frecuencia angular  $\omega$  para el capacitor como salida.

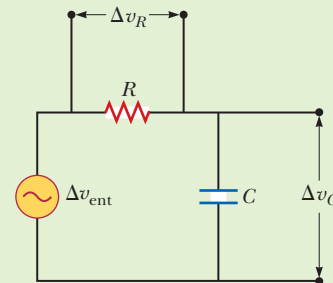


Figura P32.45

- 46.** Un circuito  $RLC$  en serie funciona a  $2 \times 10^3$  Hz. A esta frecuencia,  $X_L = X_C = 1884 \Omega$ . La resistencia del circuito es de  $40.0 \Omega$ . (a) Elabore una tabla que muestre los valores de  $X_L$ ,  $X_C$  y  $Z$  para  $f = 300, 600, 800, 1.0 \times 10^3, 1.5 \times 10^3, 2.0 \times 10^3, 3.0 \times 10^3, 4.0 \times 10^3, 6.0 \times 10^3$  y  $1.0 \times 10^4$  Hz. (b) Grafique en el mismo conjunto de ejes  $X_L$ ,  $X_C$  y  $Z$  como función de  $\ln f$ .

- 47. CE** Está tratando de hacerse miembro del equipo de Olimpiadas de Física. Su profesor de física lo está entrenando a usted y a otros alumnos haciéndolos competir entre todos para resolver problemas con la mayor precisión y rapidez posible. Durante una sesión, le presenta el circuito  $RLC$  que se muestra en la figura P32.47 (página 872). La figura P32.47a muestra el circuito con una batería como fuente de energía. La batería tiene una fem  $\varepsilon$  y resistencia interna  $r$ . Él le dice lo siguiente, suponiendo que el interruptor  $S$  ha estado en la posición  $a$  durante mucho tiempo:

- Si solo el interruptor  $S_L$  está cerrado, y los interruptores  $S_C$  y  $S_R$  están abiertos, y luego el interruptor  $S$  se coloca en la posición  $b$ , la constante de tiempo del circuito es  $t_1 = 0.200$  ms. El interruptor  $S$  vuelve a la posición  $a$  durante mucho tiempo.



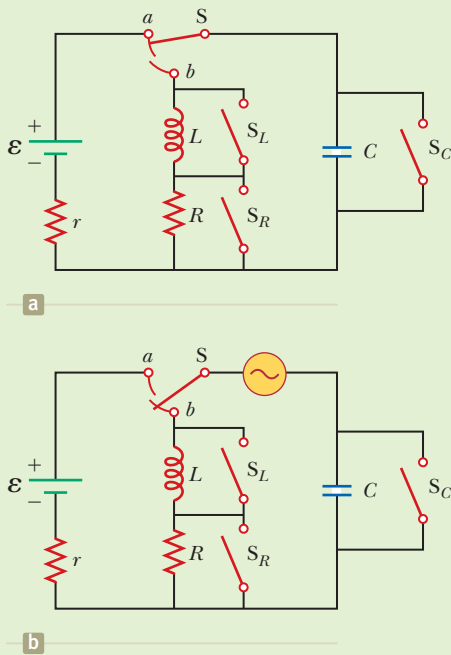


Figura P32.47

- Si solo el interruptor  $S_C$  está cerrado, y los interruptores  $S_L$  y  $S_R$  están abiertos, y luego el interruptor  $S$  se coloca en la posición  $b$ , la constante de tiempo del circuito es  $t_2 = 0.0500$  ms. El interruptor  $S$  vuelve a la posición  $a$  durante mucho tiempo.

En la figura P32.47b, se ha agregado una fuente de CA con una frecuencia variable al mismo circuito, y el interruptor  $S$  se coloca en la posición  $b$ . Los interruptores  $S_C$ ,  $S_L$  y  $S_R$  están abiertos. ¿A qué frecuencia angular  $\omega$  debe ajustarse la fuente de CA para que el circuito muestre resonancia? ¡Rápido! ¡A trabajar!

48. Un circuito  $RLC$  en serie en el que  $R = 1.00 \Omega$ ,  $L = 1.00$  mH y  $C = 1.00$  nF se conecta a una fuente de CA que entrega 1.00 V(rms). (a) Elabore una gráfica precisa de la potencia entregada al circuito como función de la frecuencia y (b) verifique que todo el ancho del pico de resonancia a la mitad del valor máximo sea  $R/2\pi L$ .

PROBLEMAS DE DESAFÍO

49. El resistor en la figura P32.49 representa el altavoz de medios en un sistema de tres altavoces. Suponga que su resistencia es constante en  $8.00 \Omega$ . La fuente representa un amplificador de audio que produce señales de amplitud uniforme  $\Delta V_{m\acute{a}x} = 10.0$  V en todas las frecuencias de audio. El inductor y el capacitor están funcionando como un filtro de paso de banda con  $\Delta V_{sal}/\Delta V_{ent} = 1/2$  a 200 Hz y a  $4.00 \times 10^3$  Hz. Determine los valores requeridos de (a)  $L$  y (b)  $C$ . Encuentre (c) el valor máximo de la razón  $\Delta V_{sal}/\Delta V_{ent}$ ; (d) la frecuencia  $f_0$  a la que la razón tiene su valor máximo, (e) el cambio de fase entre  $\Delta v_{ent}$  y  $\Delta v_{sal}$  a 200 Hz, a  $f_0$  y a  $4.00 \times 10^3$  Hz, y (f) la potencia media transferida al altavoz a 200 Hz, a  $f_0$  y a  $4.00 \times 10^3$  Hz. (g) Reconociendo que el diagrama representa un circuito  $RLC$  impulsado por una fuente de CA, encuentre su factor de calidad.

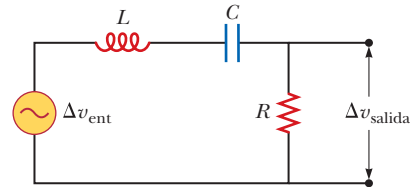


Figura P32.49

50. Un resistor de  $80.0 \Omega$  y un inductor de 200 mH se conectan en *paralelo* en las terminales de una fuente de 100 V (rms), 60.0 Hz. (a) ¿Cuál es la corriente rms del resistor? (b) ¿Con qué ángulo la corriente total se adelanta o se atrasa al voltaje?
51. Una fuente de alimentación con  $\Delta V_{rms} = 120$  V se conecta entre los puntos  $a$  y  $d$  de la figura P32.16. ¿A qué frecuencia entregará una potencia de 250 W? Explique su respuesta.





## Ondas electromagnéticas

### IMAGINE Está realizando una investigación en línea en su teléfono

inteligente, utilizando la señal de Wi-Fi de su red doméstica. La señal se corta de repente, y usted va a la configuración de Wi-Fi en su teléfono inteligente para investigar. En la lista de redes disponibles, ve que su red ha vuelto a subir, pero también nota que está recibiendo una señal de la casa de su vecino. Esto lo lleva a preguntarse si sus vecinos están recibiendo su señal de Wi-Fi. Saca su teléfono inteligente afuera y comienza a alejarse de su casa, monitoreando el indicador de potencia de la señal Wi-Fi en su teléfono inteligente. Le sorprende ver que la señal está disponible afuera. ¿Cómo pasa la señal a través de las paredes de tu casa? De hecho, ¿qué es exactamente una señal de Wi-Fi? A medida que se aleja de su casa, la intensidad de la señal disminuye. ¿Por qué sucede eso? ¿Qué está pasando aquí?

**CONEXIONES** Este capítulo representa una conexión muy fuerte entre tres partes del libro. En la Parte 2, hablamos sobre las ondas mecánicas, como el sonido, las olas del océano y las ondas en las cuerdas. Aquí en la Parte 4, estamos investigando los principios del electromagnetismo. En este capítulo, conectamos estos conjuntos de capítulos aparentemente dispares. Encontramos que los principios del electromagnetismo predicen la posibilidad de ondas electromagnéticas. Esta predicción teórica se confirma claramente en la práctica, por supuesto, por nuestra experiencia con una amplia variedad de ondas electromagnéticas: luz, radio, microondas, rayos X, etc. El comportamiento de estas ondas tiene claras similitudes con las ondas mecánicas, con una fuerte diferencia:

La introducción del Wi-Fi casero ha revolucionado la forma en que nos conectamos a internet. ¿Tus vecinos ven tu señal de Wi-Fi? (*crazystocker/Shutterstock*)

- 33.1 Corriente de desplazamiento y la forma general de la ley de Ampère
- 33.2 Ecuaciones de Maxwell y los descubrimientos de Hertz
- 33.3 Ondas electromagnéticas planas
- 33.4 Energía transportada por ondas electromagnéticas
- 33.5 Cantidad de movimiento y presión de radiación
- 33.6 Producción de ondas electromagnéticas por una antena
- 33.7 El espectro de las ondas electromagnéticas





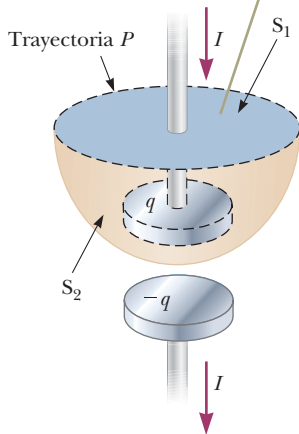
North Wind Picture Archives -- All rights reserved

### James Clerk Maxwell

Físico teórico escocés (1831-1879)

Maxwell desarrolló la teoría electromagnética de la luz y la teoría cinética de los gases, y explicó la naturaleza de los anillos de Saturno y la visión en color. La exitosa interpretación de Maxwell del campo electromagnético resultó en las ecuaciones de campo que llevan su nombre. Una formidable habilidad matemática combinada con una gran comprensión le permitió guiar el camino en el estudio del electromagnetismo y la teoría cinética. Murió de cáncer antes de cumplir 50 años de edad.

La corriente de conducción  $I$  en el alambre pasa solamente a través de  $S_1$ , lo que conduce a una contradicción en la ley de Ampère que sólo se resuelve si uno postula una corriente de desplazamiento a través de  $S_2$ .



**Figura 33.1** Dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  cerca de la placa de un capacitor están limitadas por la misma trayectoria  $P$ .

las ondas electromagnéticas no requieren un medio; ¡pueden propagarse a través del espacio vacío! La comprensión de las ondas electromagnéticas ha llevado a muchos sistemas de comunicación prácticos, incluidos la radio, la televisión, los sistemas de telefonía celular, la conectividad inalámbrica a internet y la optoelectrónica. Además, el estudio de las ondas electromagnéticas nos prepara para la Parte 5 del libro, en la que estudiamos la óptica, que describe el comportamiento detallado de las ondas electromagnéticas.

## 33.1 Corriente de desplazamiento y la forma general de la ley de Ampère

En el capítulo 29 se estudió el uso de la ley de Ampère (ecuación 29.13) para explicar los campos magnéticos producidos por corrientes:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I$$

En esta ecuación, la integral de línea es sobre cualquier trayectoria cerrada a través de la cual pasan corrientes de conducción, donde la corriente de conducción se define por la expresión  $I = dq/dt$ . (En esta sección se usa el término *corriente de conducción* para hacer referencia a la corriente que llevan los portadores de carga en el alambre, para distinguirla de un nuevo tipo de corriente que se introducirá en breve.) Hemos aceptado la ley de Ampère como una ecuación fundamental en electromagnetismo. ¿Pero supongamos que encontramos una situación en la que no se aplica? James Clerk Maxwell reconoció esta limitación y en consecuencia, modificó la ley de Ampère.

Considere un capacitor que se carga, como se ilustra en la figura 33.1. Cuando una corriente de conducción está presente, la carga sobre la placa positiva cambia pero no existe corriente de conducción en el espacio entre las placas porque no hay acarreo de cargas en ese espacio. Ahora considere las dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  en la figura 33.1, limitadas por la misma trayectoria  $P$ . La ley de Ampère establece que  $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$  alrededor de esta trayectoria debe ser igual a  $\mu_0 I$ , donde  $I$  es la corriente total a través de *cualquier* superficie limitada por la trayectoria  $P$ .

Cuando la trayectoria  $P$  se considera como la frontera de  $S_1$ ,  $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I$  ya que la corriente de conducción  $I$  pasa a través de  $S_1$ . Sin embargo, cuando la trayectoria se considera como la frontera de  $S_2$ ,  $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$  debido a que no pasa corriente de conducción a través de  $S_2$ . Por tanto, ¡se tiene una situación contradictoria que surge de la discontinuidad de la corriente! ¡La ley de Ampère da dos respuestas diferentes para las dos superficies!

Maxwell resolvió este problema al postular un término adicional en el lado derecho de la ley de Ampère, que incluye un factor llamado **corriente de desplazamiento**  $I_d$  que se define como<sup>1</sup>

$$I_d \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (33.1)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre (véase la sección 22.3) y  $\Phi_E \equiv \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$  es el flujo eléctrico (véase la ecuación 23.4) para el campo eléctrico entre las placas del condensador. Este flujo pasa a través de  $S_2$  pero no de  $S_1$ .

Conforme el capacitor se carga (o descarga), el campo eléctrico cambiante entre las placas puede considerarse equivalente a una corriente que actúa como una continuación de la corriente de conducción en el alambre. Cuando la expresión para la corriente de desplazamiento se agrega a la corriente de conducción en el lado derecho de la ley de Ampère, se resuelve la dificultad representada en la figura 33.1. No

<sup>1</sup> En este contexto *desplazamiento* no tiene el mismo significado que en el capítulo 2. A pesar de las implicaciones equívocas, la palabra está históricamente entrelazada en el lenguaje de la física, así que se continuará su uso.

importe cuál superficie limitada por la trayectoria  $P$  se elija, una corriente de conducción o una corriente de desplazamiento pasa a través de ella. Con este nuevo término  $I_d$  se expresa la forma general de la ley de Ampère (a veces llamada **ley Ampère-Maxwell**) como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (33.2) \quad \leftarrow \text{Ley de Ampère-Maxwell}$$

Este resultado fue un ejemplo notable del trabajo teórico de Maxwell y contribuyó a avances importantes en la comprensión del electromagnetismo.

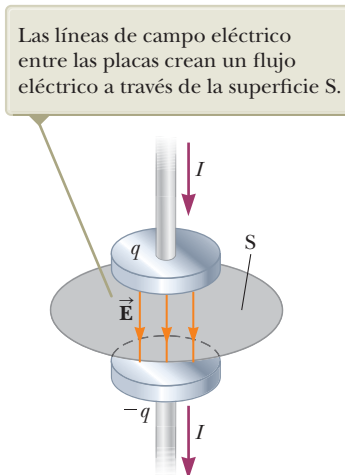
Puede entender el significado de esta expresión al referirse a la figura 33.2. El flujo eléctrico a través de la superficie  $S$   $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$ , donde  $A$  es el área de las placas del capacitor y  $E$  es la magnitud del campo eléctrico uniforme entre las placas. Si  $q$  es la carga sobre las placas en cualquier instante, entonces  $E = q/(\epsilon_0 A)$  (véase la sección ¿Qué pasaría si? en el ejemplo 23.8). En consecuencia, el flujo eléctrico a través de  $S$  es

$$\Phi_E = EA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Por esto, la corriente de desplazamiento a través de  $S$  es

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dq}{dt} \quad (33.3)$$

Es decir, la corriente de desplazamiento  $I_d$  a través de  $S$ , ¡es precisamente igual a la corriente de conducción  $I$  en los alambres conectados al capacitor!



**Figura 33.2** Cuando existe una corriente de conducción en los alambres, existe un cambio de campo eléctrico  $\vec{E}$  entre las placas del capacitor.

- E XAMEN RÁPIDO 33.1** En un circuito  $RC$ , el capacitor comienza a descargarse.
- (i) Durante la descarga en la región de espacio entre las placas del capacitor, ¿hay
  - (a) corriente de conducción pero no corriente de desplazamiento, (b) corriente de desplazamiento pero no corriente de conducción, (c) corriente de conducción y de desplazamiento o (d) ningún tipo de corriente? (ii) En la misma región del espacio, ¿hay (a) un campo eléctrico pero no un campo magnético, (b) un campo magnético pero no un campo eléctrico, (c) campos eléctrico y magnético o (d) ningún
  - tipo de campo?

**Ejemplo 33.1 Corriente de desplazamiento en un capacitor**

Un voltaje que varía sinusoidalmente se aplica a través de un capacitor de  $8.00 \mu\text{F}$  como se ve en la figura 33.3. La frecuencia del voltaje aplicado es  $f = 3.00 \text{ kHz}$  y la amplitud del voltaje es  $\Delta V_{\text{máx}} = 30.0 \text{ V}$ . Encuentre la corriente de desplazamiento en el capacitor.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** La figura 33.3 representa el diagrama de circuito para esta situación. La figura 33.2 muestra un acercamiento del capacitor y el campo eléctrico entre las placas.

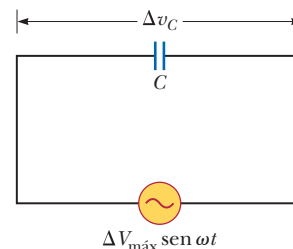
**Categorizar** Los resultados se evalúan con ecuaciones discutidas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 33.3 para encontrar la corriente de desplazamiento como función del tiempo. Observe que la carga en el capacitor es  $q = C \Delta v_C$ ;

$$i_d = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (C \Delta v_C) = C \frac{d}{dt} (\Delta V_{\text{máx}} \sin \omega t) = \omega C \Delta V_{\text{máx}} \cos \omega t = 2\pi f C \Delta V_{\text{máx}} \cos(2\pi f t)$$

Sustituya valores numéricos para obtener la corriente en amperes:

$$i_d = 2\pi(3.00 \times 10^3 \text{ Hz})(8.00 \times 10^{-6} \text{ F})(30.0 \text{ V}) \cos[2\pi(3.00 \times 10^3 \text{ Hz})t] = 4.52 \cos(1.88 \times 10^4 t)$$



**Figura 33.3** (Ejemplo 33.1)

## 33.2 Ecuaciones de Maxwell y los descubrimientos de Hertz

Ahora se presentan cuatro ecuaciones que se consideran la base de todos los fenómenos eléctricos y magnéticos. Estas ecuaciones, desarrolladas por Maxwell, son tan fundamentales para los fenómenos electromagnéticos como las leyes de Newton lo son para los fenómenos mecánicos. De hecho, la teoría que Maxwell desarrolló fue más allá incluso de lo que él pensó, porque resultó estar de acuerdo con la teoría especial de la relatividad, que Einstein demostró en 1905.

Las ecuaciones de Maxwell representan las leyes de la electricidad y el magnetismo que ya se han explicado, pero tienen importantes consecuencias adicionales. Por simplicidad, se presentan las **ecuaciones de Maxwell** como se aplican al espacio libre, es decir, en ausencia de cualquier material dieléctrico o magnético. Las cuatro ecuaciones son

Ley de Gauss ▶ Ecuación 23.7 → 
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (33.4)$$

Ley de Gauss del magnetismo ▶ Ecuación 29.20 → 
$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \quad (33.5)$$

Ley de Faraday ▶ Ecuación 30.8 → 
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (33.6)$$

Ley de Ampère-Maxwell ▶ Ecuación 33.2 → 
$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (33.7)$$

La ecuación 33.4 es la ley de Gauss: el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta dentro de dicha superficie dividida por  $\epsilon_0$ . Esta ley relaciona un campo eléctrico con la distribución de carga que lo produce.

La ecuación 33.5 es la ley de Gauss del magnetismo y afirma que el flujo magnético neto a través de una superficie cerrada es cero. Es decir, el número de líneas de campo magnético que entra a un volumen cerrado debe ser igual al número que sale de dicho volumen, lo que implica que las líneas de campo magnético no pueden comenzar o terminar en cualquier punto. Si lo hicieran, significaría que en dichos puntos existen monopolos magnéticos aislados; el hecho de que monopolos magnéticos aislados no se hayan observado en la naturaleza se considera una confirmación de la ecuación 33.5.

La ecuación 33.6 es la ley de Faraday de la inducción, que describe la creación de un campo eléctrico por un flujo magnético cambiante. Esta ley afirma que la fem, que es la integral de línea del campo eléctrico alrededor de cualquier trayectoria cerrada, es igual a la rapidez de cambio del flujo magnético a través de cualquier superficie limitada por dicha trayectoria. Una consecuencia de la ley de Faraday es la corriente inducida en una espira conductora colocada en un campo magnético variable en el tiempo.

La ecuación 33.7 es la ley Ampère-Maxwell, analizada en la sección 33.1 y describe la creación de un campo magnético por un campo eléctrico variable y por corriente eléctrica: la integral de línea del campo magnético alrededor de cualquier trayectoria cerrada es la suma de  $\mu_0$  multiplicada por la corriente neta a través de dicha trayectoria y  $\epsilon_0 \mu_0$  multiplicada por la rapidez de cambio del flujo eléctrico a través de cualquier superficie limitada por dicha trayectoria.

Una vez que se conocen los campos eléctrico y magnético en un punto en el espacio, la fuerza que actúa sobre una partícula de carga  $q$  se calcula a partir de las versiones eléctrica y magnética del modelo de partícula en un campo:

Ley de fuerza de Lorenz ▶ 
$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \quad (33.8)$$

Esta correspondencia se llama **ley de fuerza de Lorenz**. (Esta correspondencia se vio anteriormente como ecuación 28.6.) Las ecuaciones de Maxwell, junto con esta ley de fuerza, describen por completo todas las interacciones electromagnéticas clásicas en un vacío.

En capítulos anteriores vimos la carga  $q$  y la corriente  $I$  como fuentes de campos eléctricos y magnéticos. Ahora, imaginemos una región del espacio que no contiene cargas ni corrientes. Bajo estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell se vuelven





$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \quad (33.9)$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \quad (33.10)$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (33.11)$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (33.12)$$

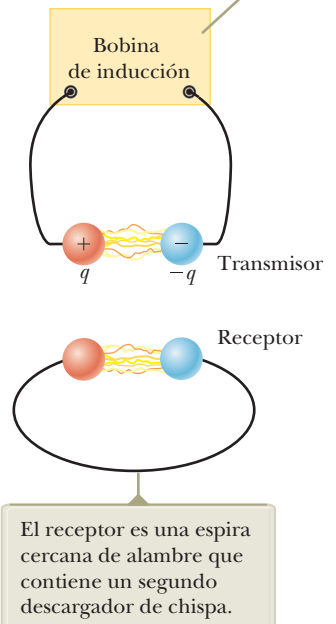
Observe la simetría de las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre de carga y actual. Las ecuaciones 33.9 y 33.10 son de la misma forma. Además, las ecuaciones 33.11 y 33.12 son simétricas en el sentido de que las integrales de línea de  $\vec{\mathbf{E}}$  y  $\vec{\mathbf{B}}$  alrededor de un camino cerrado están relacionadas con la tasa de cambio del flujo magnético y el flujo eléctrico, respectivamente. ¡Estas ecuaciones sugieren que los campos eléctricos y magnéticos pueden existir en un espacio libre de carga y corriente! Lo hacen regenerándose entre sí como se describe en las dos últimas ecuaciones. La ecuación 33.11 dice que una variación de tiempo en un campo  $B$  genera un campo  $E$ . Y la ecuación 33.12 nos dice que también sucede lo contrario.

En la siguiente sección se demuestra cómo las ecuaciones 33.11 y 33.12 se combinan para obtener una ecuación de onda tanto para el campo eléctrico como para el magnético. En el espacio vacío, donde  $q = 0$  e  $I = 0$ , la solución a estas dos ecuaciones muestra que la rapidez a la cual se desplazan las ondas electromagnéticas es igual a la rapidez medida de la luz. Este resultado permitió a Maxwell predecir que las ondas de luz son una forma de radiación electromagnética.

Hertz realizó experimentos para verificar la predicción de Maxwell. En la figura 33.4 aparece un diagrama del aparato experimental utilizado por Hertz para generar y detectar ondas electromagnéticas. Una bobina de inducción está conectada a un transmisor constituido por dos electrodos esféricos separados por un pequeño espacio. La bobina genera un breve sobrevoltaje en los electrodos, haciendo que uno sea positivo y el otro negativo. Cuando el campo eléctrico cercano a cualquiera de los electrodos sobrepasa la resistencia dieléctrica del aire ( $3 \times 10^6$  V/m; véase la tabla 25.1), se genera una chispa entre las esferas. En un campo eléctrico intenso, la aceleración de los electrones libres proporciona energía suficiente para ionizar cualquier molécula que impacten. Esta ionización genera más electrones que se pueden acelerar y que causan ionizaciones adicionales. Conforme el espacio del aire se ioniza, se convierte en un mejor conductor, y la descarga entre electrodos exhibe un comportamiento oscilatorio a una muy alta frecuencia. Desde el punto de vista de un circuito eléctrico, este aparato experimental es equivalente a un circuito  $LC$ , en el cual la inductancia corresponde a la bobina y la capacitancia a los electrodos esféricos.

Debido a que en el aparato de Hertz  $L$  y  $C$  son pequeñas, la frecuencia de oscilación es elevada, del orden de 100 MHz. (Recuerde de la ecuación 31.22 que  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  en el caso de un circuito  $LC$ ). Las ondas electromagnéticas se radian con esta frecuencia como resultado de la oscilación de las cargas libres en el circuito transmisor. Hertz pudo detectar estas ondas utilizando una espira sencilla de alambre con su propio descargador de chispa (el receptor). Esta espira receptora, alejada varios metros del transmisor, tiene sus propias inductancia efectiva, capacitancia y frecuencia natural de oscilación. En el experimento de Hertz se inducían las chispas en la apertura entre los electrodos receptores cuando la frecuencia del receptor se ajustaba para coincidir con la del transmisor. De esta manera, Hertz demostró que la corriente oscilante inducida en el receptor era producida por ondas electromagnéticas radiadas por el transmisor. Su experimento es análogo al fenómeno mecánico en el cual un diapasón responde a las vibraciones acústicas provenientes de otro diapasón idéntico en oscilación que esté cerca.

El transmisor está constituido por dos electrodos esféricos conectados a una bobina de inducción, la cual proporciona sobrevoltaje breve a las esferas, estableciendo oscilaciones en la descarga entre los electrodos.



**Figura 33.4** Diagrama del aparato de Hertz para generar y detectar ondas electromagnéticas.





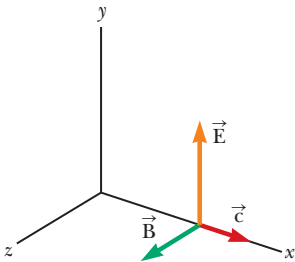
### Heinrich Rudolf Hertz

Físico alemán (1857-1894)

Hertz hizo su más importante descubrimiento de las ondas electromagnéticas en 1887. Después de encontrar que la rapidez de una onda electromagnética era la misma que la de la luz, Hertz demostró que las ondas electromagnéticas, al igual que las ondas de luz, se podían reflejar, refractar y difractar. Hertz murió de envenenamiento sanguíneo a la edad de 36 años. Durante su corta vida hizo muchas aportaciones a la ciencia. El hertz, igual a una vibración completa o ciclo por segundo, lleva su nombre.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 33.1

**¿Qué es "una" onda?** ¿Qué se entiende por una onda *sola*? La palabra *onda* representa tanto la emisión de una sola punta ("onda radiada desde *cualquier* posición en el plano  $yz$ " en el texto) y la colección de ondas desde *todos los puntos* en la fuente ("**onda plana**" en el texto). Usted debe ser capaz de usar este término en ambas formas y entender su significado a partir del contexto.



**Figura 33.5** Campos eléctricos y magnéticos de una onda electromagnética que viaja a la velocidad  $\vec{c}$  en la dirección  $x$  positiva. Los vectores de campo se muestran en un instante de tiempo y en una posición en el espacio. Estos campos dependen de



$y$  y  $t$ .

Además, Hertz demostró en una serie de experimentos que la radiación generada por su dispositivo con un descargador de chispa ponía de manifiesto propiedades de las ondas como interferencia, difracción, reflexión, refracción y polarización, que son propiedades que también exhibe la luz, como se verá en la parte 5. Por tanto, resultó evidente que las ondas de radiofrecuencia que Hertz estaba generando tenían propiedades similares a las de las ondas de luz, difiriendo únicamente en frecuencia y longitud de onda. Quizá su experimento más convincente fue la medición de la rapidez de esta radiación: reflejó ondas de frecuencia conocida sobre una hoja de metal, lo que crea un patrón de interferencia por ondas estacionarias cuyos puntos nodales pudieron ser detectados. La distancia medida entre los puntos nodales permitió determinar la longitud de onda  $\lambda$ . Utilizando la relación  $v = \lambda f$  (ecuación 16.12) del análisis de modelo para onda viajera, Hertz encontró que  $v$  es muy cercana a  $3 \times 10^8$  m/s, la rapidez conocida  $c$  de luz visible.

Hemos argumentado que los campos eléctricos y magnéticos pueden apoyarse mutuamente en el espacio libre, y los experimentos de Hertz verificaron la existencia de ondas electromagnéticas. Pero, ¿de dónde viene la onda electromagnética en primer lugar? Las cargas estacionarias y las corrientes constantes no pueden producir ondas electromagnéticas. Sin embargo, si la corriente en un cable cambia con el tiempo, el cable emite ondas electromagnéticas. El mecanismo fundamental responsable de esta radiación es la aceleración de una partícula cargada. **Cada vez que una partícula cargada se acelera, la energía se transfiere lejos de la partícula mediante radiación electromagnética.** Ahora investiguemos las propiedades de esas ondas.

## 33.3 Ondas electromagnéticas planas

Las propiedades de las ondas electromagnéticas se pueden deducir a partir de las ecuaciones de Maxwell. Un planteamiento para obtener estas propiedades es resolver la ecuación diferencial de segundo orden obtenida a partir de la tercera y cuarta ecuaciones de Maxwell. Un tratamiento matemático riguroso de esta especie está más allá del ámbito de este texto. Para superar este problema, suponga que los vectores para el campo eléctrico y el campo magnético en una onda electromagnética tienen un comportamiento espacio-tiempo específico que es simple, pero consistente con las ecuaciones de Maxwell.

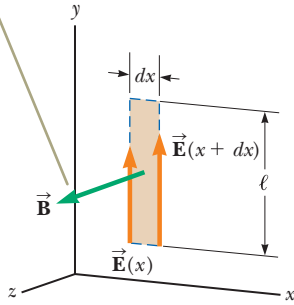
Para comprender la predicción de las ondas electromagnéticas más ampliamente, enfoque su atención en una onda electromagnética que viaja en la dirección  $x$  (la *dirección de propagación*). La figura 30.15 nos muestra que el campo eléctrico generado por un campo magnético variable es perpendicular al campo magnético. La figura 33.2 muestra un campo eléctrico cambiante como una corriente efectiva, que generaría líneas circulares de campo magnético alrededor de las líneas del campo eléctrico. Por tanto, el campo magnético generado por un campo eléctrico cambiante es perpendicular al campo eléctrico. Siguiendo estas sugerencias de perpendicularidad, diseñemos una onda electromagnética simple para la cual el campo eléctrico  $\vec{E}$  se encuentra en la dirección  $y$  y el campo magnético  $\vec{B}$  está en la dirección  $z$ , como se muestra en la figura 33.5. Además, suponga que las magnitudes de campo  $E$  y  $B$  dependen únicamente de  $x$  y  $t$ , no de las coordenadas  $y$  o  $z$ .

La figura 33.5 muestra vectores de campo para una onda que se propaga a lo largo del eje  $x$ , como lo sugiere el vector  $\vec{c}$ , con una magnitud  $c$ , la velocidad de la luz. Imagine una fuente en el plano  $yz$  que emite un gran número de tales ondas desde todas las posiciones en el plano, no solo el origen, con todas las ondas viajando en la dirección  $x$ . Si definimos un rayo igual que en la sección 16.8 como la línea a lo largo de la cual viaja la onda, todos los rayos para estas ondas son paralelos. Esta colección completa de ondas a menudo se llama **onda plana**.

Para generar la predicción de ondas electromagnéticas, se parte de la ley de Faraday, ecuación 33.11 que describe un campo eléctrico generado por un campo magnético variable.

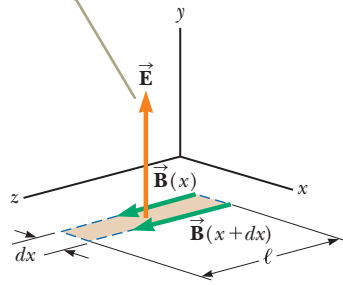
Para aplicar esta ecuación a la onda de la figura 33.5, considere un rectángulo de ancho  $dx$  y altura  $\ell$  que yace en el plano  $xy$ , como se muestra en la figura 33.6. Primero evalúe la integral de línea de  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  alrededor de este rectángulo en el sentido

Esta variación espacial en  $\vec{E}$  da origen a un campo magnético variable en el tiempo a lo largo de la dirección  $z$ , de acuerdo con la ecuación 33.15.



**Figura 33.6** En un instante cuando una onda plana que se mueve en la dirección  $x$  positiva pasa a través de una trayectoria rectangular de ancho  $dx$  que se encuentra en el plano  $xy$ , el campo eléctrico en la dirección  $y$  varía de  $\vec{E}(x)$  a  $\vec{E}(x + dx)$ .

Esta variación espacial en  $\vec{B}$  da origen a un campo eléctrico variable en el tiempo a lo largo de la dirección  $y$ , de acuerdo con la ecuación 33.18.



**Figura 33.7** En un instante cuando una onda plana pasa a través de una trayectoria rectangular de ancho  $dx$  que se encuentra en el plano  $xz$ , el campo magnético en la dirección  $z$  varía de  $\vec{B}(x)$  a  $\vec{B}(x + dx)$ .

de las manecillas del reloj en un instante en el que la onda pasa por el rectángulo. Las aportaciones de lo alto y bajo del rectángulo son cero porque  $\vec{E}$  es perpendicular a  $d\vec{s}$  para estas trayectorias. El campo eléctrico en el lado derecho del rectángulo se expresa como

$$E(x + dx) \approx E(x) + \frac{dE}{dx} \Big|_{\text{constante } t} dx = E(x) + \frac{\partial E}{\partial x} dx$$

donde  $E(x)$  es el campo en el lado izquierdo del rectángulo en este instante.<sup>2</sup> Por tanto, la integral de línea en todo este rectángulo es aproximadamente

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \left[ E(x) + \frac{\partial E}{\partial x} dx \right] \ell - [E(x)] \ell \approx \ell \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right) dx \quad (33.13)$$

Ya que el campo magnético está en la dirección  $z$ , el flujo magnético a través del rectángulo de área  $\ell dx$  es aproximadamente  $\Phi_B = B \ell dx$  (si supone que  $dx$  es muy pequeño en comparación con la longitud de onda). Al tomar la derivada en el tiempo del flujo magnético se obtiene

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \ell dx \frac{dB}{dt} \Big|_{\text{constante } x} = \ell dx \frac{\partial B}{\partial t} \quad (33.14)$$

Al sustituir las ecuaciones 33.13 y 33.14 en la ecuación 33.11 se obtiene

$$\ell \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right) dx = -\ell dx \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (33.15)$$

En forma similar, se deduce una segunda ecuación al comenzar con la cuarta ecuación de Maxwell en el espacio vacío (ecuación 33.12). En este caso, la integral de línea de  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  se evalúa en torno a un rectángulo que yace en el plano  $xz$  y tiene ancho  $dx$  y longitud  $\ell$ , como en la figura 33.7. Observe que la magnitud del campo magnético cambia de  $B(x)$  a  $B(x + dx)$  en todo el ancho  $dx$  y que la dirección para tomar la integral de línea es en el sentido de las manecillas del reloj cuando es vista desde

<sup>2</sup> Ya que  $dE/dx$  en esta ecuación se expresa como el cambio en  $E$  con  $x$  en un instante dado  $t$ ,  $dE/dx$  es equivalente a la derivada parcial  $\partial E/\partial x$ . Del mismo modo,  $dB/dt$  significa el cambio en  $B$  con el tiempo en una posición particular  $x$ ; por tanto, en la ecuación 34.10, se puede sustituir  $dB/dt$  con  $\partial B/\partial t$ .

arriba en la figura 33.7, la integral de línea sobre este rectángulo se encuentra que es aproximadamente

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = [B(x)]\ell - \left[ B(x) + \frac{\partial B}{\partial x} dx \right] \ell \approx -\ell \left( \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx \quad (33.16)$$

El flujo eléctrico a través del rectángulo es  $\Phi_E = E\ell dx$ , que, cuando es derivada respecto al tiempo, produce

$$\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \ell dx \frac{\partial E}{\partial t} \quad (33.17)$$

Al sustituir las ecuaciones 33.16 y 33.17 en la ecuación 33.12 se obtiene

$$-\ell \left( \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx = \mu_0 \epsilon_0 \ell dx \left( \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (33.18)$$

$$\frac{B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Al tomar la derivada de la ecuación 33.15 respecto a  $x$  y combinar el resultado con la ecuación 33.18 produce

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (33.19)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

En la misma forma, al tomar la derivada de la ecuación 33.18 respecto a  $x$  y combinarla con la ecuación 33.15 obtiene

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (33.20)$$

Las ecuaciones 33.19 y 33.20 tienen la forma de la ecuación de onda lineal, ecuación 16.27 de la sección 16.5. En esa ecuación, el coeficiente de la derivada del tiempo es el inverso de la velocidad de la onda. Llamando a esta velocidad  $c$  por luz, vemos que

Rapidez de ondas  
electromagnéticas ▶

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (33.21)$$

Evalúe numéricamente esta rapidez:

$$c = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(8.854 19 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)}} \quad (33.22)$$

$$= 2.997 92 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Debido a que esta rapidez es precisamente la misma que la rapidez de la luz en el espacio vacío, uno puede creer (correctamente) que la luz es una onda electromagnética.

La solución más simple a las ecuaciones 33.19 y 33.20 es una onda sinusoidal para la cual las magnitudes de campo  $E$  y  $B$  varían con  $x$  y  $t$  de acuerdo con las expresiones

$$E = E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \quad (33.22)$$

$$B = B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \quad (33.23)$$

donde  $E_{\text{máx}}$  y  $B_{\text{máx}}$  son los valores máximos de los campos. El número de onda angular es  $k = 2\pi/\lambda$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de acuerdo al modelo de onda viajera. La frecuencia angular es  $\omega = 2\pi f$ , donde  $f$  es la frecuencia de onda. La razón  $\omega/k$  es igual a la rapidez de una onda electromagnética,  $c$ :

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = c$$

Campos eléctrico y magnético  
sinusoidales ▶



donde se usó la ecuación 16.12,  $v = c = \lambda f$  que relaciona rapidez, frecuencia y longitud de onda una onda sinusoidal. La figura 33.8 es una representación pictórica, en un instante, de una onda electromagnética sinusoidal que se mueve en la dirección  $x$  positiva basada en las ecuaciones 33.22 y 33.23. Dicha onda, en la cual los campos eléctricos y magnéticos están restringidos a ser paralelos a un par de ejes perpendiculares, se dice que es una **onda polarizada linealmente**.

Pueden generarse otras representaciones matemáticas del modelo de onda viajera para ondas electromagnéticas. Al tomar derivadas parciales de las ecuaciones 33.22 (respecto a  $x$ ) y 33.23 (respecto a  $t$ ) se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -kE_{\text{máx}} \text{sen}(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_{\text{máx}} \text{sen}(kx - \omega t)$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación 33.15, se demuestra que, en cualquier instante,

$$\begin{aligned} kE_{\text{máx}} &= \omega B_{\text{máx}} \\ \frac{E_{\text{máx}}}{B_{\text{máx}}} &= \frac{\omega}{k} = c \end{aligned}$$

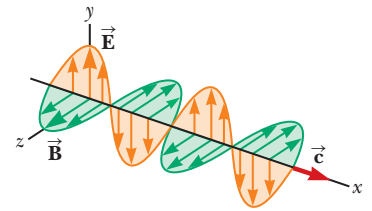
Al usar estos resultados junto con las ecuaciones 33.22 y 33.23 se obtiene

$$\frac{E_{\text{máx}}}{B_{\text{máx}}} = \frac{E}{B} = c \quad (33.24)$$

Es decir: en todo instante, la razón de la magnitud del campo eléctrico con la magnitud del campo magnético en una onda electromagnética es igual a la rapidez de la luz.

**E XAMEN RÁPIDO 33.2** ¿Cuál es la diferencia de fase entre las oscilaciones sinusoidales de los campos eléctrico y magnético en la figura 33.8? (a)  $180^\circ$ , (b)  $90^\circ$ , (c) 0, (d) imposible de determinar.

**E XAMEN RÁPIDO 33.3** Una onda electromagnética se propaga en la dirección  $y$  y negativa. El campo eléctrico en un punto en el espacio se orienta momentáneamente en la dirección  $x$  positiva. ¿En qué dirección se orienta momentáneamente el campo magnético en ese punto? (a) la dirección  $x$  negativa (b) la dirección  $y$  positiva (c) la dirección  $z$  positiva (d) la dirección  $z$  negativa



**Figura 33.8** Una onda sinusoidal electromagnética se desplaza en la dirección  $x$  positiva con una velocidad  $c$ .

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 33.2

¿ $\vec{E}$  más intenso que  $\vec{B}$ ? Ya que el valor de  $c$  es muy grande, algunos estudiantes interpretan de manera incorrecta la ecuación 33.24 y creen que significa que el campo eléctrico es mucho más intenso que el campo magnético. Sin embargo, los campos eléctrico y magnético se miden en diferentes unidades, así que no se pueden comparar directamente. En la sección 33.4 se encontrará que los campos eléctrico y magnético contribuyen igualmente a la energía de la onda.

### Ejemplo 33.2 Una onda electromagnética

Una onda electromagnética sinusoidal de 40.0 MHz de frecuencia viaja en el espacio libre en la dirección  $x$ , como en la figura 33.9.

(A) Determine la longitud de onda y el periodo de la onda.

#### SOLUCIÓN

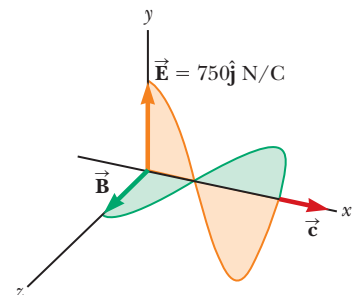
**Conceptualizar** Imagine que la onda de la figura 33.9 se mueve hacia la derecha a lo largo del eje  $x$ , con los campos eléctrico y magnético oscilando en fase.

**Categorizar** Use las representaciones matemáticas del modelo de *onda viajera* para ondas electromagnéticas.

#### Analizar

Resuelva la ecuación 16.12 para encontrar la longitud de onda:  $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{40.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 7.50 \text{ m}$

Encuentre el periodo  $T$  de la onda como el inverso de la frecuencia:  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{40.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 2.50 \times 10^{-8} \text{ s}$



**Figura 33.9** (Ejemplo 33.2) En algún instante, una onda electromagnética plana que se mueve en la dirección  $x$  tiene un campo eléctrico máximo de 750 N/C en la dirección  $y$  positiva.

continúa



## 33.2 continuación

(B) En algún punto y en algún instante, el campo eléctrico tiene su valor máximo de 750 N/C y se dirige a lo largo del eje  $y$ . Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en esta posición y tiempo.

## SOLUCIÓN

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = \frac{750 \text{ N/C}}{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2.50 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Use la ecuación 33.24 para encontrar la magnitud del campo magnético:

Ya que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  deben ser perpendiculares entre sí y a su vez perpendiculares a la dirección de propagación de la onda ( $x$  en este caso), se concluye que  $\vec{B}$  está en la dirección  $z$ .

**Finalizar** Observe que la longitud de onda es de varios metros. Esto es relativamente largo para una onda electromagnética. Como verá en la sección 33.7, esta onda pertenece a la gama de frecuencias de radio.

## 33.4 Energía transportada por ondas electromagnéticas

En la explicación sobre el modelo de un sistema no aislado en la sección 8.1, identificó la radiación electromagnética como un método de transferencia de energía a través de la frontera de un sistema. La cantidad de energía transferida mediante ondas electromagnéticas se representa como  $T_{\text{ER}}$  en la ecuación 8.2. La rapidez de flujo de la energía en una onda electromagnética se representa mediante un vector  $\vec{S}$ , llamado **vector de Poynting**, que se define por la expresión

Vector de Poynting ►

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (33.25)$$

De la definición del producto vectorial (sección 11.1), vemos que el vector  $\vec{S}$  está dirigido en la dirección de propagación de la onda (figura 33.10). Las unidades para  $\vec{S}$  se pueden encontrar mediante análisis dimensional (sección 1.3):

$$[\vec{S}] = \frac{[\vec{E}][\vec{B}]}{[\mu_0]} = \frac{(\text{N/C})(\text{T})}{\text{T} \cdot \text{m/A}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

La magnitud del vector de Poynting representa la *intensidad*, la rapidez a la cual fluye la energía a través de una superficie unitaria perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por tanto, la magnitud  $\vec{S}$  representa *energía por unidad de área*.

Como un ejemplo, evalúe la magnitud de  $\vec{S}$  para una onda electromagnética plana donde  $|\vec{E} \times \vec{B}| = EB$ . En este caso,

$$S = \frac{EB}{\mu_0} \quad (33.26)$$

Ya que  $B = E/c$ , también podemos expresar este resultado como

$$S = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{cB^2}{\mu_0}$$

Estas ecuaciones para  $S$  son aplicables para cualquier instante en el tiempo y representan la rapidez *instantánea* a la cual pasa energía por unidad de área en términos de valores instantáneos de  $E$  y  $B$ .

Lo que es de mayor interés en el caso de una onda electromagnética sinusoidal plana es el promedio en el tiempo de  $S$  en uno o más ciclos, que se llama *intensidad de onda*  $I$ . (La intensidad de las ondas de sonido se explican en el capítulo 16.) Cuando obtiene este promedio, llega a una expresión que involucra el promedio en el tiempo  $\cos^2(kx - t)$ , que tiene un valor de  $\frac{1}{2}$ . En consecuencia, el valor promedio de  $S$  (en otras palabras, la intensidad de la onda) es igual a

Intensidad de la onda ►

$$I = S_{\text{prom}} = \frac{E_{\text{máx}} B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{E_{\text{máx}}^2}{2\mu_0 c} = \frac{cB_{\text{máx}}^2}{2\mu_0} \quad (33.27)$$

## PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 33.3

**Un valor instantáneo** El vector de Poynting dado por la ecuación 33.25 depende del tiempo. Su magnitud varía con el tiempo y alcanza un valor máximo en el mismo momento en que lo hacen las magnitudes de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . La rapidez *promedio* de transferencia de energía está dada por la ecuación 33.27 en la página siguiente.

## PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 33.4

**Radiación** En esta explicación la intensidad se define de la misma manera que en el capítulo 16 (como energía por unidad de área). Sin embargo, en la industria óptica, a la energía por unidad de área se le llama *radiación* y la intensidad radiante se define como la energía en watts por cada unidad de ángulo sólido (medido en esterradianes).



Recuerde que la energía por unidad de volumen, que es la densidad de energía instantánea  $u_E$  asociada con un campo eléctrico, está dada por la ecuación 25.15.

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (33.28)$$

Además la densidad de energía instantánea  $u_B$  asociada con un campo magnético está dada por la ecuación 31.14:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (33.29)$$

Ya que en el caso de una onda electromagnética  $E$  y  $B$  varían con el tiempo, lo mismo ocurre con las densidades de energía. Utilizando las relaciones  $B = E/cy c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ , la expresión para  $u_B$  se convierte

$$u_B = \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0\epsilon_0}{2\mu_0} E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = u_E \quad (33.30)$$

Es decir, la densidad de energía instantánea asociada con el campo magnético de una onda electromagnética es igual a la densidad de energía instantánea asociada con el campo eléctrico. En consecuencia, en un volumen determinado la energía es compartida igualmente entre los dos campos.

La **densidad de energía instantánea total**  $u$  es igual a la suma de las densidades de energía asociadas con los campos eléctrico y magnético:

$$u = u_E + u_B = 2u_E = 2u_B = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \quad (33.31)$$

Cuando promedie esta densidad de energía instantánea total en uno o más ciclos de una onda electromagnética, una vez más se obtiene un factor de  $\frac{1}{2}$ . En consecuencia, para cualquier onda electromagnética, la energía promedio total por unidad de volumen es

$$u_{\text{prom}} = \epsilon_0 (E^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{\text{máx}}^2 = \frac{B_{\text{máx}}^2}{2\mu_0} \quad (33.32)$$

Al comparar este resultado con la ecuación 33.27 para el valor promedio de  $S$ ,

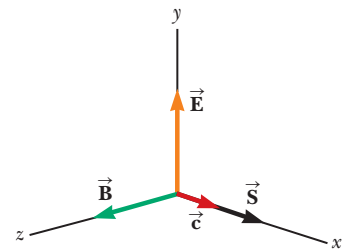
$$I = S_{\text{prom}} = cu_{\text{prom}} \quad (33.33)$$

En otras palabras, la intensidad de una onda electromagnética es igual a la densidad de energía promedio multiplicada por la rapidez de la luz.

El Sol entrega aproximadamente  $10^3 \text{ W/m}^2$  de energía a la superficie de la Tierra vía radiación electromagnética. Calcule la energía total que incide sobre el techo de una casa. Las dimensiones del techo son  $8.00 \text{ m} \times 20.0 \text{ m}$ . Se supone que la magnitud promedio del vector de Poynting para radiación solar en la superficie de la Tierra es  $S_{\text{prom}} = 1\,000 \text{ W/m}^2$ . Este valor promedio representa la potencia por unidad de área, o la intensidad luminosa. Si supone que la radiación incide de manera normal sobre el techo, obtiene

$$P_{\text{prom}} = S_{\text{prom}} A = (1\,000 \text{ W/m}^2)(8.00 \text{ m} \times 20.0 \text{ m}) = 1.60 \times 10^5 \text{ W}$$

Esta potencia es grande comparada con los requerimientos de energía de una casa típica. Si esta potencia se pudiera absorber y hacer disponible para aparatos electrodomésticos, proporcionaría más que suficiente energía para la casa promedio. Sin embargo, la energía solar no se aprovecha tan fácilmente y las perspectivas de conversión a gran escala no son tan inteligentes como parecen a partir de estos cálculos. Por ejemplo, la eficiencia de conversión de energía solar es por lo general de 12-18% para celdas fotovoltaicas, lo que reduce la energía disponible en un orden de magnitud. Otras consideraciones reducen la potencia aún más. Depende de la ubicación, pero es muy probable que la radiación no incida de manera normal sobre el techo e, incluso si es así (en localidades cercanas al ecuador), esta situación existe sólo durante un tiempo breve cerca del mediodía. Ninguna energía está disponible durante aproximadamente la mitad de cada día durante las horas nocturnas y los días



**Figura 33.10** Vector de Poynting  $\vec{S}$  para una onda electromagnética plana orientado a lo largo de la dirección de la propagación de la onda.

◀ Densidad de energía instantánea total de una onda electromagnética

◀ Densidad de energía promedio de una onda electromagnética



nublados reducen todavía más la energía disponible. Por último, aunque la energía llegue en gran proporción durante la mitad del día, parte de ella se debe almacenar para uso posterior, lo que requiere baterías u otros dispositivos de almacenamiento. A pesar de estas dificultades, la conversión de las casas a la operación solar puede ser rentable, y muchos propietarios están haciendo la conversión.

### Ejemplo 33.3 Campos en la página

Estime las magnitudes máximas de los campos eléctrico y magnético de la luz que incide sobre esta página debido a la luz visible proveniente de la lámpara de su escritorio. Trate la lámpara como una fuente puntual de radiación electromagnética que es 5% eficiente para transformar la energía entrante mediante transmisión eléctrica, a energía que sale mediante luz visible.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El filamento en su lámpara emite radiación electromagnética. Mientras más brillante la luz, mayores son las magnitudes de los campos eléctrico y magnético.

**Categorizar** Puesto que la lámpara se tratará como una fuente puntual, la emisión es igual en todas direcciones, así que la radiación electromagnética saliente se modela como una onda esférica.

**Analizar** Recuerde de la ecuación 16.40 que la intensidad de onda  $I$  a una distancia  $r$  desde una fuente puntual es  $I = P_{\text{prom}}/4\pi r^2$ , donde  $P_{\text{prom}}$  es la potencia de salida promedio de la fuente y  $4\pi r^2$  es el área de una esfera de radio  $r$  con centro en la fuente. Esta expresión también es válida para ondas electromagnéticas.

Iguale esta expresión para  $I$  con la intensidad de una onda electromagnética dada por la ecuación 33.27:

$$I = \frac{P_{\text{prom}}}{4\pi r^2} = \frac{E_{\text{máx}}^2}{2\mu_0 c}$$

Resuelva para la magnitud del campo eléctrico:

$$E_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{\mu_0 c P_{\text{prom}}}{2\pi r^2}}$$

Haga algunas suposiciones acerca de los números que entran en esta ecuación. La salida de luz visible de una lámpara de 60 W que opera a 5% de eficiencia es aproximadamente 3.0 W por luz visible. (La energía restante se transfiere fuera de la lámpara por conducción y radiación invisible.) Una distancia razonable desde la lámpara a la página puede ser de 0.30 m.

Sustituya estos valores:

$$\begin{aligned} E_{\text{máx}} &= \sqrt{\frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(3.0 \text{ W})}{2\pi(0.30 \text{ m})^2}} \\ &= 45 \text{ V/m} \end{aligned}$$

Use la ecuación 33.24 para encontrar la magnitud del campo magnético:

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = \frac{45 \text{ V/m}}{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1.5 \times 10^{-7} \text{ T}$$

**Finalizar** Este valor de la magnitud del campo magnético es dos órdenes de magnitud menor que el campo magnético de la Tierra.

## 33.5 Cantidad de movimiento y presión de radiación

Las ondas electromagnéticas transportan cantidad de movimiento lineal, así como energía. Cuando esta cantidad de movimiento es absorbida por alguna superficie, sobre ella se ejerce presión. En esta explicación el supuesto es que la onda electromagnética impacta en la superficie con una incidencia normal perpendicular y transporta a la superficie una energía total  $T_{\text{ER}}$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Maxwell demostró que, si la superficie absorbe toda la energía incidente  $T_{\text{ER}}$  en este intervalo de tiempo (como lo haría un cuerpo negro, lo cual se explica en la sección 19.6), la cantidad de movimiento total  $\vec{P}$  transportada a la superficie tiene una magnitud

$$p = \frac{T_{\text{ER}}}{c} \quad (\text{absorción completa}) \quad (33.34)$$

La presión  $P$  ejercida sobre la superficie se define como fuerza por unidad de área  $F/A$ , que combinada con la segunda ley de Newton da:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt}$$

Cantidad de movimiento transportado a una superficie perfectamente absorbente



Al sustituir la ecuación 33.34 dentro de esta expresión para  $P$  da:

$$P = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{A} \frac{d}{dt} \left( \frac{T_{\text{ER}}}{c} \right) = \frac{1}{c} \frac{(dT_{\text{ER}}/dt)}{A}$$

Se reconocerá  $(dT_{\text{ER}}/dt)/A$  como la rapidez a la cual llega la energía a la superficie por cada unidad de área, que es la magnitud del vector de Poynting. Por tanto, la presión de radiación  $P$  ejercida sobre la superficie perfectamente absorbente es igual a

$$P = \frac{S}{c} \quad (\text{absorción completa}) \quad (33.35)$$

Si la superficie es un reflector perfecto (como un espejo) y la incidencia es normal a la superficie, entonces la cantidad de movimiento transportada a la superficie en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es dos veces la que se obtiene mediante la ecuación 33.34. Es decir, la cantidad de movimiento transferida a la superficie por la luz incidente es  $p = T_{\text{ER}}/c$ , y la cantidad de movimiento transferida por la luz reflejada también es  $p = T_{\text{ER}}/c$ . Por tanto,

$$p = \frac{2T_{\text{ER}}}{c} \quad (\text{reflexión completa}) \quad (33.36)$$

La presión de radiación ejercida sobre una superficie perfectamente reflejante para una incidencia normal de la onda es

$$P = \frac{2S}{c} \quad (\text{reflexión completa}) \quad (33.37)$$

Para una superficie que no es un absorbente perfecto ni un reflector perfecto, podemos escribir la presión como

$$P = (1 + f) \frac{S}{c} \quad (33.38)$$

donde  $f$  es la fracción de la luz incidente que se refleja desde la superficie.

A pesar de que las presiones de radiación son muy pequeñas (aproximadamente  $5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  para la luz solar directa), la *navegación solar* es un medio económico para enviar naves espaciales a los planetas. Extensas láminas experimentarían presión de radiación proveniente de la luz solar y se utilizan en gran parte con la forma de las lonas que se utilizan en los veleros terrestres. En 2010, la Agencia Japonesa de Exploración Aeroespacial (JAXA) lanzó la primera nave espacial que utiliza velas solares como propulsión principal, *IKAROS* (Interplanetary Kite-craft Accelerated por la radiación del Sol). Esta nave espacial completó su misión planificada y ahora está en órbita alrededor del Sol, enviando datos cuando está lo suficientemente cerca del Sol para que los paneles solares proporcionen energía.

- E XAMEN RÁPIDO 33.4** Para maximizar la presión de radiación sobre las velas:
- de una nave espacial que utiliza navegación solar, ¿deberían ser éstas **(a)** de color
  - muy negro para absorber toda la luz posible o **(b)** muy brillantes, para reflejar
  - tanta luz solar como sea posible?

◀ Presión de radiación ejercida sobre una superficie perfectamente absorbente

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 33.5

**Demasiadas  $p$**  Tiene  $p$  para la cantidad de movimiento y  $P$  para la presión, ¡y ambas se relacionan con  $P$  para la potencia! Asegúrese de tener estos conceptos claros.

◀ Presión de radiación ejercida en una superficie perfectamente reflejante

### Ejemplo conceptual 33.4 Barrido del sistema solar

En el espacio interplanetario existe una gran cantidad de polvo. Aunque en teoría estas partículas de polvo varían en tamaño, desde el molecular hasta uno mucho más grande, muy poco del polvo en el sistema solar es menor que aproximadamente  $0.2 \mu\text{m}$ . ¿Por qué?

#### SOLUCIÓN

Las partículas de polvo están sometidas a dos fuerzas significativas: la fuerza gravitacional que las lleva hacia el Sol y la fuerza de presión de radiación que las empuja alejándolas del Sol. La fuerza gravitacional es proporcional al cubo del radio de una partícula de polvo esférica porque es proporcional a la masa y por ende al volumen  $4\pi r^3/3$  de la partícula. La presión de radiación es proporcional al cuadrado del radio porque depende de la sección transversal plana de la partícula. En partículas grandes, la fuerza gravitacional es mayor que la fuerza de la presión de radiación; para partículas que tienen radios menores que  $0.2 \mu\text{m}$ , la fuerza de presión de radiación es mayor que la fuerza gravitacional. Como resultado, la luz del Sol barre estas partículas hacia afuera del sistema solar.

## Ejemplo 33.5 Presión de un apuntador láser

En las presentaciones muchas personas usan un apuntador láser para dirigir la atención de la audiencia a la información en la pantalla. Si un apuntador de 3.0 mW crea una mancha sobre la pantalla que tiene 2.0 mm de diámetro, determine la presión de radiación sobre la pantalla que refleja 70% de la luz que la golpea. La potencia de 3.0 mW es un valor promediado en el tiempo.

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine que las ondas impactan la pantalla y ejercen una presión de radiación sobre ella. La presión no debe ser muy grande. Tenga en cuenta que la radiación de un láser es muy diferente de la debida a una fuente puntual. La fuente puntual envía radiación uniformemente en todas las direcciones, mientras que un láser concentra la radiación en un haz estrecho en una sola dirección.

**Categorizar** Este problema involucra un cálculo de presión de radiación para una superficie que no es un absorbente perfecto ni un reflector perfecto.

**Analizar** Comience por determinar la magnitud del vector de Poynting del haz.

Divida la potencia promediada en el tiempo entregada mediante la onda electromagnética por el área de sección transversal del haz:

$$S_{\text{prom}} = \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{A} = \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{\pi r^2} = \frac{3.0 \times 10^{-3} \text{ W}}{\pi \left( \frac{2.0 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} \right)^2} = 955 \text{ W/m}^2$$

Use la ecuación 33.38 para encontrar la presión sobre la superficie:

$$P_{\text{prom}} = (1 + f) \frac{S_{\text{prom}}}{c} \\ = (1 + 0.70) \frac{955 \text{ W/m}^2}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 5.4 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$$

**Finalizar** La presión tiene un valor extremadamente pequeño, como se esperaba. (Recuerde de la sección 14.2 que la presión atmosférica es aproximadamente  $10^5 \text{ N/m}^2$ .) Considere la magnitud del vector de Poynting,  $S_{\text{prom}} = 955 \text{ W/m}^2$ . Es aproximadamente la misma intensidad de la luz solar en la superficie de la Tierra. Por esta razón, no es seguro dirigir el haz de un apuntador láser a los ojos de una persona, pues puede ser más peligroso que mirar directamente al Sol.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si el apuntador láser se mueve el doble de lejos de la pantalla? ¿Esto afecta la presión de radiación sobre la pantalla?

**Respuesta** Ya que la representación convencional de un haz láser es un haz de luz con sección transversal constante, considere que la intensidad de la radiación y, por tanto, la presión de radiación, es independiente de la distancia desde la pantalla. No obstante, un haz láser no tiene una sección transversal constante en todas las distancias desde la fuente;

en su lugar, existe una pequeña pero mensurable divergencia del haz. Si el láser se aleja más de la pantalla, el área de iluminación sobre la pantalla aumenta, lo que reduce la intensidad. A su vez, la presión de radiación se reduce.

Además, la distancia duplicada desde la pantalla resulta en más pérdida de energía del haz debido a dispersión de moléculas de aire y partículas de polvo conforme la luz viaja desde el láser a la pantalla. Esta pérdida de energía reduce aún más la presión de radiación sobre la pantalla.

## 33.6 Producción de ondas electromagnéticas por una antena

En la sección 33.2 se mencionó que la fuente de las ondas electromagnéticas son las cargas aceleradas. Investiguemos los detalles de ese proceso en la emisión de radiación de cargas en una antena. Considere las ondas electromagnéticas producidas por una *antena de media onda*. En esta configuración, dos varillas conductoras están conectadas a una fuente de voltaje alterno (como un oscilador *LC*), como se muestra en la figura 33.11. La longitud de cada varilla es igual a un cuarto de la longitud de onda de la radiación emitida cuando el oscilador funciona con frecuencia  $f$ . El oscilador obliga a las cargas a acelerarse de ida y vuelta entre las dos varillas. La figura 33.11 muestra la configuración de los campos eléctrico y magnético en algún instante cuando la corriente está hacia arriba. Las líneas de campo eléctrico debidas a la separación de las cargas en las porciones superior e inferior de la antena, se parecen a un dipolo eléctrico. (Como resultado, a este tipo de antena se le conoce a veces como *antena dipolo*.) Ya que estas cargas oscilan en forma continua entre las dos varillas, la antena puede representarse aproximadamente por un dipolo eléctrico oscilante. Las líneas de campo magnético, causadas por la corriente que representa el movimiento de las cargas entre los extremos de la antena, forman círculos concéntricos alrededor





de la antena y perpendiculares a las líneas del campo eléctrico en todos sus puntos. El campo magnético es igual a cero en todos los puntos a lo largo del eje de la antena. Además,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están  $90^\circ$  fuera de fase en el tiempo; por ejemplo, la corriente es cero cuando las cargas en los extremos exteriores de las varillas están al máximo.

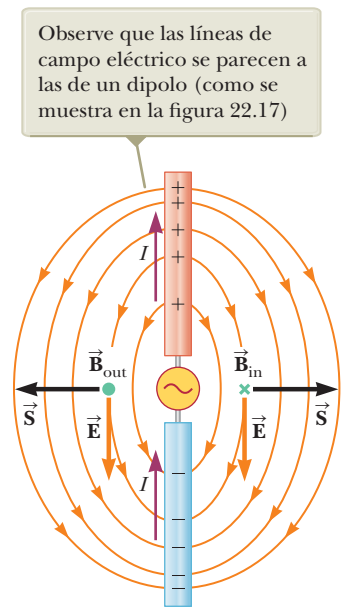
En la figura 33.11, en los dos puntos donde se muestra el campo magnético, el vector de Poynting  $\vec{S}$  se dirige radialmente hacia afuera, esto indica que en ese instante la energía está fluyendo de la antena alejándose. Después, la dirección de los campos y el vector de Poynting se invierten, conforme la corriente se alterna. Ya que en los puntos cercanos al dipolo  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están  $90^\circ$  fuera de fase, el flujo de energía neta es igual a cero. De aquí que se concluya (de manera incorrecta) que el dipolo no emite energía.

No obstante, en efecto se emite energía. Debido a que los campos del dipolo disminuyen en función de  $1/r^3$  (como se muestra en el ejemplo 22.6 para el campo eléctrico de un dipolo estático), son despreciables a grandes distancias de la antena. A estas grandes distancias, hay algo más que genera un tipo de radiación diferente de la que está cerca de la antena. La fuente de esta radiación es la inducción continua de un campo eléctrico causado por la variación en el tiempo de un campo magnético y a la inducción de un campo magnético por la variación en el tiempo de un campo eléctrico, pronosticado en las ecuaciones 33.11 y 33.12. Los campos eléctrico y magnético producidos de esta manera están en fase entre sí y varían en función de  $1/r$ . El resultado es un flujo de energía hacia afuera en todo momento.

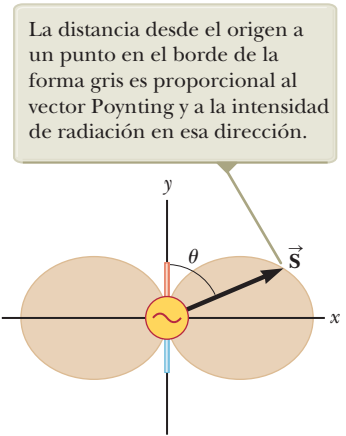
La dependencia angular de la intensidad de radiación producida por una antena dipolo es como se muestra en la figura 33.12. Observe que la intensidad y la energía radiada pasan por un máximo en un plano que es perpendicular a la antena y que pasa por su punto medio. Además, la energía radiada es igual a cero a lo largo del eje de la antena. Una solución matemática a las ecuaciones de Maxwell para una antena dipolo muestra que la intensidad de la radiación varía en función de  $(\sin^2 \theta)/r^2$ , donde  $\theta$  se mide a partir del eje de la antena.

Las ondas electromagnéticas también pueden inducir corrientes en una antena receptora. La respuesta de un dipolo receptor en una posición conocida es máxima cuando el eje de la antena es paralelo al campo en ese punto, y es igual a cero cuando el eje es perpendicular al campo eléctrico.

**E XAMEN RÁPIDO 33.5** Si la antena de la figura 33.11 representa la fuente de una estación de radio lejana, ¿cuál sería la mejor orientación para la antena de un radio portátil localizada a la derecha de la figura?: (a) arriba-abajo a lo largo de la página, (b) izquierda-derecha a lo largo de la página o (c) perpendicular a la página?



**Figura 33.11** Una antena de media onda está constituida por dos varillas metálicas conectadas a una fuente de voltaje alterno. Este diagrama muestra  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en un instante arbitrario cuando la corriente está hacia arriba.



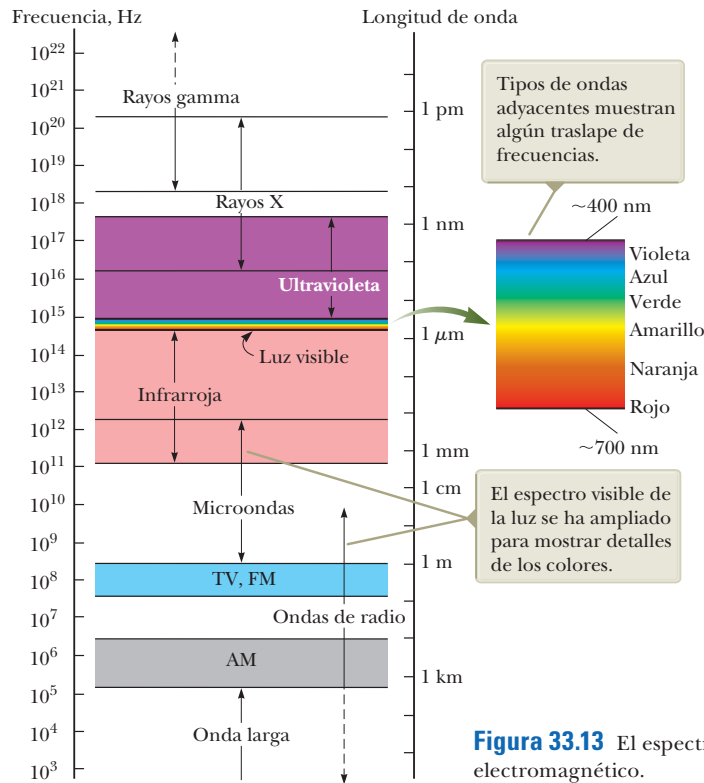
**Figura 33.12** Dependencia angular de la intensidad de radiación producida por un dipolo eléctrico en oscilación.

### 33.7 El espectro de las ondas electromagnéticas

En la figura 33.13 (página 888) se listan los diversos tipos de ondas electromagnéticas que muestra el **espectro electromagnético**. Observe los extensos intervalos de frecuencias y longitudes de onda. No existe una división clara entre un tipo de onda y la siguiente. Recuerde que todas las formas de los diversos tipos de radiación son producidos por el mismo fenómeno: cargas en aceleración. Los nombres que se han dado a cada tipo de onda son simplemente una forma conveniente en la descripción de la región del espectro en el que están.

Como se señaló en la discusión de la ecuación 8.2, la energía puede ser transferida a través de olas electromagnéticas; esta transferencia está representada en la ecuación por el término TER. Demostraremos en los capítulos futuros que la energía transportada por las ondas electromagnéticas es proporcional a la frecuencia. En la figura 33.13, por tanto, el eje de la frecuencia creciente también se puede considerar como un eje de aumento de energía.

Las **ondas de radio**, cuyos intervalos de longitud de onda llegan más allá de  $10^4$  m a casi 0.1 m, son el resultado de cargas que se aceleran en alambres conductores. Estas ondas son generadas por dispositivos electrónicos, como osciladores LC, y se utilizan en los sistemas de radio y televisión.



**Figura 33.13** El espectro electromagnético.

**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 33.6**

**“Rayos de calor”** Los rayos infrarrojos se conocen a menudo con el nombre de “rayos de calor”, pero este término es incorrecto. Aunque la radiación infrarroja se utiliza para incrementar o mantener la temperatura, así como para mantener la comida caliente con “lámparas de calor” en un restaurante de comida rápida, todas las longitudes de onda de la radiación electromagnética contienen energía que puede causar el incremento de la temperatura de un sistema. Como ejemplo, imagine una papa horneándose en un horno de microondas.

**TABLA 33.1** Correspondencia aproximada entre longitudes de onda de luz visible y color

Intervalo de longitud (nm)	Descripción de color
400-430	Violeta
430-485	Azul
485-560	Verde
560-590	Amarillo
590-625	Naranja
625-700	Rojo

*Note:* Aquí los intervalos de longitud de onda son aproximados. Distintas personas describirán los colores de manera diferente

Las **microondas** tienen longitudes de onda clasificadas desde 0.3 m hasta  $10^4$  m y también son generadas por dispositivos electrónicos. Debido a sus longitudes de onda cortas, son muy adecuadas para sistemas de radar y para el estudio de las propiedades atómicas y moleculares de la materia. Los hornos de microondas son una aplicación doméstica interesante de estas ondas. Se ha sugerido que la energía solar podría aprovecharse enviando microondas a la Tierra desde un colector solar en el espacio.

Las **ondas infrarrojas** tienen longitudes de onda clasificadas desde  $10^{-3}$  hasta  $7 \times 10^{-7}$  m, longitud de onda más larga de la luz visible. Estas ondas, producidas por moléculas y objetos a la temperatura ambiente, son fácilmente absorbidas por la mayor parte de los materiales. La energía infrarroja (IR, *infrared*), absorbida por una sustancia, aparece como energía interna, ya que la energía agita los átomos del objeto, lo que incrementa su movimiento vibratorio o de traslación, y da como resultado un incremento en la temperatura. La radiación infrarroja tiene aplicaciones prácticas y científicas en muchas áreas, incluyendo la fisioterapia, la fotografía infrarroja y la espectroscopia vibratoria.

La **luz visible**, que es la forma más familiar de las ondas electromagnéticas, es aquella parte del espectro electromagnético que el ojo humano puede detectar. Se produce mediante la reorganización de los electrones en los átomos y moléculas. Sus diversas longitudes de onda, que corresponden a los diferentes colores, van desde el rojo ( $\lambda \approx 7 \times 10^{-7}$  m) hasta el violeta ( $\lambda \approx 4 \times 10^{-7}$  m). La sensibilidad del ojo humano es una función de la longitud de onda, siendo máxima a una longitud de onda de alrededor de  $5.5 \times 10^{-7}$  m. Con esto en mente, ¿por qué cree usted que las pelotas de tenis tienen a menudo un color verde amarillento? La tabla 33.1 proporciona correspondencias aproximadas entre las longitudes de onda de la luz visible y el color asignado a ella por los humanos. La luz es la base de la ciencia de la óptica y de los instrumentos ópticos, a explicarse en los capítulos 34 al 37.

Las **ondas ultravioleta** cubren longitudes de onda que van desde aproximadamente  $4 \times 10^{-7}$  m hasta  $6 \times 10^{-10}$  m. El Sol es una fuente importante de luz ultravioleta (UV), la cual es la causa principal de las quemaduras de Sol. Recuerde desde el comienzo de esta sección que el aumento de la frecuencia se correlaciona con el aumento de la energía. Para la luz ultravioleta y las siguientes dos categorías, rayos X y rayos gamma, la energía es lo suficientemente alta como para que la radiación penetre en la piel. Las lociones bloqueadoras son transparentes a la luz visible pero absor-

ben la mayor parte de la luz UV. Cuanto mayor sea el factor de protección solar del bloqueador, o SPF, mayor será el porcentaje de luz UV absorbida. A los rayos ultravioleta se les atribuye en parte la formación de cataratas y nubosidad en el lente interno del ojo. Las gafas de sol que bloquean la luz ultravioleta son fundamentales, como se observa en la figura 33.14.

La mayor parte de la luz UV del Sol es absorbida por las moléculas de ozono ( $O_3$ ) en la atmósfera superior de la Tierra, en una capa llamada estratosfera. Este escudo de ozono convierte la radiación UV letal de alta energía a radiación infrarroja, lo que a su vez calienta la estratosfera.

Los **rayos X** tienen longitudes de onda que van de aproximadamente  $10^{-8}$  m a  $10^{-12}$  m. La fuente más común de rayos X es el frenado de electrones de alta energía que impactan un objetivo metálico. Los rayos X se utilizan como una herramienta de diagnóstico en la medicina y como tratamiento para ciertos tipos de cáncer. Ya que los rayos X dañan o destruyen los tejidos y los organismos vivos, se debe tener cuidado para evitar una exposición o sobreexposición innecesaria. Los rayos X también se utilizan en el estudio de la estructura de los cristales ya que las longitudes de onda de los rayos X son comparables con las distancias de separación de los átomos en los sólidos (alrededor de 0.1 nm).

Los **rayos gamma** son ondas electromagnéticas emitidas por núcleos radioactivos y durante ciertas reacciones nucleares. Los rayos gamma de alta energía son un componente de los rayos cósmicos que entran en la atmósfera de la Tierra desde el espacio. Tienen longitudes de onda que van desde aproximadamente  $10^{-10}$  m hasta menos de  $10^{-14}$  m. Son rayos muy penetrantes y producen daños serios si son absorbidos por tejidos vivos. En consecuencia, quienes trabajan cerca de este tipo de radiación peligrosa, deben estar protegidos con materiales de gran absorción, como gruesas capas de plomo.

Entonces, ¿qué está pasando con su señal de Wi-Fi en el “Imagine” de apertura? Una señal de Wi-Fi es una señal de radio, a menudo a 2.4 o 5 GHz. Por tanto, en la figura 33.13, vemos que las señales Wi-Fi se encuentran en la región de microondas, cerca del extremo superior de la flecha vertical larga que representa el rango de ondas de radio. ¿Es una sorpresa que su señal de Wi-Fi atraviese las paredes de su hogar? No, no si piensa en señales de radio que provienen de fuera de su casa a radios portátiles antiguos o señales de televisión que llegan a antenas de interiores antiguas. ¿Por qué la intensidad de la señal Wi-Fi disminuye al alejarse de su casa? Este es solo un ejemplo de la ecuación 16.40; la intensidad cae como el cuadrado de la distancia desde la fuente. De hecho, el símbolo de Wi-Fi en el teléfono en la fotografía de apertura de capítulo sugiere ese efecto: una fuente puntual está enviando ondas esféricas que se extienden en el espacio.

**E XAMEN RÁPIDO 33.6** En muchas cocinas se utilizan hornos de microondas para preparar los alimentos. La frecuencia de las microondas es del orden de  $10^{10}$  Hz. ¿La longitud de onda de estas microondas son del orden de (a) kilómetros, (b) metros, (c) centímetros o (d) micras?

**E XAMEN RÁPIDO 33.7** Una onda de radio de frecuencia del orden de  $10^5$  Hz se utiliza para transportar una onda sonora con una frecuencia del orden de  $10^3$  Hz. ¿La longitud de la onda de radio es del orden de magnitud de (a) kilómetros, (b) metros, (c) centímetros, o (d) micras.



John W. Jewett Jr.

**Figura 33.14** El uso de lentes de sol que carecen de bloqueador de luz ultravioleta (UV) es más dañino para sus ojos que no utilizar. Los lentes de cualquier anteojos para el sol absorben una porción de la luz visible, causando por tanto la dilatación de las pupilas. Si los lentes tampoco bloquean la luz UV, es posible que se produzca más daño en los ojos debido a las pupilas dilatadas. Si no se utilizan lentes de sol, las pupilas se contraen, los ojos se entrecierran, lo que hace que penetre mucha menos luz UV. Los lentes de sol de alta calidad bloquean prácticamente toda la luz UV dañina para el ojo.

## Resumen

### Definiciones

En una región del espacio donde hay un campo eléctrico variable, hay una **corriente de desplazamiento** que se define como

$$I_d \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (33.1)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre (véase la sección 22.3) y  $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$  es el flujo eléctrico.

La rapidez de flujo de energía que cruza un área unitaria mediante radiación electromagnética se describe mediante el **vector de Poynting**  $\vec{S}$ , donde

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (33.25)$$

continúa

## Conceptos y principios

Cuando se usan con la ley de fuerza de Lorentz,  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ , las ecuaciones de Maxwell describen todos los fenómenos electromagnéticos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (33.4)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (33.6)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (33.5)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (33.7)$$

Las ondas electromagnéticas, predichas por las ecuaciones de Maxwell, tienen las siguientes propiedades y se describen por las siguientes representaciones matemáticas del modelo de ondas viajeras para ondas electromagnéticas:

- El campo eléctrico y el campo magnético satisfacen cada uno una ecuación de onda. Estas dos ecuaciones de onda, que se pueden obtener a partir de la tercera y cuarta ecuaciones de Maxwell, son

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (33.19)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad (33.20)$$

- Las ondas viajan a través de un vacío con la rapidez de la luz  $c$ , donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (33.21)$$

- Numéricamente, la rapidez de las ondas electromagnéticas en un vacío es  $3.00 \times 10^8$  m/s.
- Los campos eléctrico y magnético son mutuamente perpendiculares y a su vez, perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.
- Las magnitudes instantáneas de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en una onda electromagnética se relacionan mediante la expresión

$$\frac{E}{B} = c \quad (33.24)$$

- Las ondas electromagnéticas portan energía.
- Las ondas electromagnéticas portan cantidad de movimiento.

Debido a que las ondas electromagnéticas portan cantidad de movimiento, ejercen presión sobre las superficies. Si una onda electromagnética cuyo vector de Poynting es  $\vec{S}$  es absorbida completamente por una superficie sobre la cual incide de manera normal, la presión de radiación sobre dicha superficie es

$$P = \frac{S}{c} \quad (\text{Absorción completa}) \quad (33.35)$$

Si la superficie refleja totalmente una onda que incide de manera normal, la presión se duplica.

El valor promedio del vector de Poynting para una onda electromagnética plana tiene una magnitud

$$S_{\text{prom}} = \frac{E_{\text{máx}} B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{E_{\text{máx}}^2}{2\mu_0 c} = \frac{c B_{\text{máx}}^2}{2\mu_0} \quad (33.27)$$

La intensidad de una onda electromagnética sinusoidal plana es igual al valor promedio del vector de Poynting tomado sobre uno o más ciclos.

Los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética sinusoidal plana que se propaga en la dirección  $x$  positiva se puede escribir como

$$E = E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \quad (33.22)$$

$$B = B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \quad (33.23)$$

donde  $k$  es el número de onda angular y  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda. Estas ecuaciones representan soluciones especiales a las ecuaciones de onda para  $E$  y  $B$ .

El espectro electromagnético incluye ondas que cubren un amplio intervalo de longitudes de onda, desde las ondas largas de radio a más de  $10_4$  m, hasta los rayos gamma a menos de  $10^{-14}$  m.

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

- Usted está trabajando para la NASA y se ha unido al equipo que investiga el concepto de navegación solar. (a) Su supervisor le ha pedido a su equipo que determine el área mínima de una vela solar perfectamente reflejante que será necesaria para mantener alejada una nave espacial solar de 15 000 kg

de la atracción gravitacional del Sol, que tiene una potencia de  $3.85 \times 10^{26}$  W, y luego presentar sus resultados. (b) Después de que su equipo presenta los resultados y sus compañeros de trabajo se sorprenden por el tamaño de la vela necesaria, su supervisor le pregunta: "¿Pero el área necesaria de la vela puede ser más pequeña a medida que nos alejamos del Sol, correcto, porque la fuerza gravitacional disminuiría?" ¿Cómo responde?



2. **ACTIVIDAD** Los planetas que orbitan estrellas que no sea el Sol se llaman exoplanetas. Su grupo ha encontrado la tabla a continuación, que enumera los datos de algunos exoplanetas que se han descubierto, en orden del año del descubrimiento.

Supongamos que la evolución de la vida como la nuestra en la Tierra ocurrirá para una temperatura superficial (sin contar con una atmósfera) entre 250 K y 320 K y para aceleraciones debidas a la gravedad en la superficie del planeta entre  $5.00 \text{ m/s}^2$  y  $15.0 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuántos planetas de arriba son candidatos para la evolución de la vida como la nuestra? Suponga que todos los planetas reflejan 30.0% de la luz que incide sobre ellos. La potencia de salida  $P_{\text{Sol}}$  del Sol es  $3.85 \times 10^{26} \text{ W}$ .

3. Su grupo ha sido contratado como testigos expertos para un equipo de astronautas que, después de regresar a la Tierra, está siendo reprendido por los militares por perder un arma láser muy cara y de alta potencia que se probará desde una posición orbital. Esta es la historia: el equipo estaba observando a su compañera astronauta hacer una caminata espacial para mover el láser a una posición orbital lejos de la Estación Espacial Internacional (EEI) cuando ocurrió un accidente. Mientras todos los demás estaban encerrados de

forma segura dentro de la ISS, ella estaba en su caminata espacial, a 10.0 m de la entrada de la ISS, en reposo con respecto a la estación. Su unidad de maniobra había fallado y no estaba unida con una traba. Su masa total, incluido el traje espacial y todo el equipo, es de 250 kg. Este total incluye el láser de masa 103 kg, que emite un rayo de luz paralelo de potencia  $9.50 \times 10^4 \text{ W}$ . Le dijeron por radio que apuntara el láser lejos del ISS y lo encendiera, ya que actuaría como un cohete de fotones, impulsándola hacia la estación. Ella respondió, sugiriendo un plan alternativo: podía simplemente tirar el láser en una dirección lejos de la estación, lo que provocaría que se moviera hacia la estación. Estimó que podía arrojar el láser a una velocidad de 0.200 m/s en relación con la estación. El equipo discutió las opciones y decidió que ella arrojara el láser. Prepare un razonamiento que pueda apoyar al equipo de astronautas, argumentando que usar el láser como un cohete de fotones hubiera requerido demasiado tiempo porque solo le quedaba 1.00 h de oxígeno en su sistema de soporte vital, y que tirar el láser era la única opción disponible para mantenerla viva. Divida el trabajo entre dos mitades de su grupo y tenga la mitad trabajando en la posibilidad de lanzar el láser y la otra en la posibilidad del cohete de fotones.

Planeta	Masa $M$ ( $M_{\text{Tierra}}$ )	Radio $R$ ( $R_{\text{Tierra}}$ )	Radio orbital $a$ (AU)	Luminosidad $L$ de la estrella ( $P_{\text{Sol}}$ ) $L_{\text{estrellas}}$	Año de descubrimiento
GJ 436b	22.3	4.17	0.028 9	0.025	2004
GJ 674b	12.7	12.4	0.039	0.016	2007
Gliese 581c	5.40	1.50	0.073	0.013	2007
HAT-P-11b	26.2	4.63	0.053	0.26	2009
GJ 3470b	13.9	3.14	0.035 6	0.029	2012
Kepler-42b	2.86	0.768	0.011 6	0.002 4	2012
Kepler-42c	1.91	0.713	0.006 0	0.002 4	2012
Kepler-42d	0.955	0.209	0.015 4	0.002 4	2012
Kepler-138b	21.3	0.571	0.074 6	0.060	2014
HD 219134b	3.82	1.57	0.038 5	0.28	2015
Kepler-452b	2.86	1.50	1.05	1.2	2015

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

### SECCIÓN 33.1 Corriente de desplazamiento y la forma general de la ley de Ampère

1. Una corriente de 0.200 A carga un capacitor que tiene placas circulares de 10.0 cm de radio. Si la separación entre placas es de 4.00 mm, (a) ¿cuál es la rapidez de aumento en el tiempo del campo eléctrico entre las placas? (b) ¿Cuál es el campo magnético entre las placas a 5.00 cm del centro?

### SECCIÓN 33.2 Ecuaciones de Maxwell y los descubrimientos de Hertz

2. Una barra delgada muy larga porta carga eléctrica con densidad lineal de 35.0 nC/m. Se encuentra a lo largo del eje  $x$  y se mueve en la dirección  $x$  con una rapidez de  $1.5 \times 10^7 \text{ m/s}$ . (a) Encuentre el campo eléctrico que la barra crea en

el punto ( $x = 0, y = 20.0 \text{ cm}, z = 0$ ). (b) Encuentre el campo magnético que produce en el mismo punto. (c) Encuentre la fuerza que ejerce sobre un electrón en este punto, que se mueve con una velocidad de  $(2.40 \times 10^8)\hat{i} \text{ m/s}$ .

3. Un protón se mueve a través de un campo eléctrico uniforme dado por  $\vec{E} = 50.0\hat{j} \text{ V/m}$  y un campo magnético uniforme  $\vec{B} = (0.200\hat{i} + 0.300\hat{j} + 0.400\hat{k}) \text{ T}$ . Determine la aceleración del protón cuando tiene una velocidad  $\vec{v} = 200\hat{i} \text{ m/s}$ .

### SECCIÓN 33.3 Ondas electromagnéticas planas

*Nota:* Suponga que el medio es el vacío, salvo que se especifique lo contrario.

4. Una máquina de diatermia, utilizada en fisioterapia, genera radiación electromagnética que da el efecto de "calor profundo" cuando se absorbe en el tejido. Una frecuencia asignada para diatermia es 27.33 MHz. ¿Cuál es la longitud de onda de esta radiación?





5. La distancia a la estrella polar, Polaris, es aproximadamente de  $6.44 \times 10^{18}$  m. (a) Si Polaris se apagara hoy, ¿en qué año la veríamos desaparecer? (b) ¿Cuánto tarda la luz solar en llegar a la Tierra? (c) ¿Cuánto tarda una señal de radar de microondas en desplazarse de la Tierra a la Luna y de regreso?
6. Un pulso de radar vuelve al transmisor-receptor después de un tiempo total de viaje de  $4.00 \times 10^{-4}$  s. ¿Qué tan lejos está el objeto que refleja la onda?
7. La rapidez de una onda electromagnética que se desplaza en una sustancia no magnética transparente es  $v = 1/\sqrt{\kappa\mu_0\epsilon_0}$ , donde  $\kappa$  es la constante dieléctrica de la sustancia. Determine la rapidez de la luz en el agua, que tiene una constante dieléctrica a frecuencias ópticas de 1.78.

**CE** 8. Está trabajando para SETI, la búsqueda de inteligencia extraterrestre. Un día, recibe una comunicación por radio de una inteligencia alienígena. Aunque no puede entender su idioma, han incluido algunas fotos de un episodio de *Yo amo a Lucy*. Las fotos le permiten determinar que es el episodio en el que Lucy hace un comercial de televisión en Vitameavegamin. Este episodio se emitió por primera vez en CBS el 5 de mayo de 1952. Antes de dirigirse a su supervisor para contarle la noticia, usted determina rápidamente qué tan lejos en años luz está la civilización alienígena.

**AMT** 9. **Problema de repaso.** Un horno de microondas funciona mediante un tubo electrónico llamado magnetrón, que genera ondas electromagnéticas de 2.45 GHz de frecuencia. Las microondas entran en el horno y se reflejan en las paredes. El patrón de ondas estacionarias producido en el horno puede cocinar la comida de forma desigual, con puntos calientes en la comida en los antinodos y partes frías en los nodos, por lo que es frecuente utilizar un plato giratorio para hacer girar la comida y distribuir la energía. Si un horno de microondas hecho para utilizarse con una platina se usa con un plato en una posición fija, los antinodos pueden aparecer en forma de quemadura en la comida, como en tiras de zanahoria o de queso. La distancia medida de separación entre las quemaduras es de 6 cm  $\pm 5\%$ . A partir de estos datos, calcule la rapidez de las microondas.

10. Verifique por sustitución que las siguientes ecuaciones son soluciones a las ecuaciones 33.19 y 33.20, respectivamente:

$$E = E_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$B = B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

11. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Una onda electromagnética viaja a través del espacio vacío con campos eléctricos y magnéticos descritos por

$$E = 9.00 \times 10^3 \cos [(9.00 \times 10^6)x - (3.00 \times 10^{15})t]$$

$$B = 3.00 \times 10^{-5} \cos [(9.00 \times 10^6)x - (3.00 \times 10^{15})t]$$

donde todos los valores y las variables numéricas se expresan en unidades del SI.

### SECCIÓN 33.4 Energía transportada por ondas electromagnéticas

12. ¿A qué distancia del Sol la intensidad de la luz solar es tres veces el valor en la Tierra? (La separación media Tierra-Sol es  $1.496 \times 10^{11}$  m.)
- V** 13. Si la intensidad de la luz solar en la superficie de la Tierra bajo un cielo bastante claro es  $1\,000$  W/m<sup>2</sup>, ¿Cuánta energía electromagnética por metro cúbico está contenida en la luz solar?

- CIC** 14. La potencia de la luz solar que llega a cada metro cuadrado de la superficie de la Tierra en un día claro en los trópicos es cercana a  $1\,000$  W. En un día de invierno en Manitoba, la concentración de potencia de la luz solar puede ser de  $100$  W/m<sup>2</sup>. Muchas actividades humanas se describen mediante una potencia por unidad de área en el orden de  $102$  W/m<sup>2</sup> o menos. (a) Considere, por ejemplo, una familia de cuatro que paga \$66 a la compañía eléctrica cada 30 días por 600 kWh de energía transportada por las líneas de transmisión hasta su casa, que tiene dimensiones de planta de 13.0 m por 9.50 m. Calcule la potencia por área medida de este uso de energía. (b) Considere un automóvil de 2.10 m de ancho y 4.90 m de largo que viaja a 55.0 mi/h usando gasolina que tiene 44.0 MJ/kg de “calor de combustión”, con economía de gasolina de 25.0 mi/gal. Un galón de gasolina tiene una masa de 2.54 kg. Encuentre la potencia por unidad de área medida del uso de energía del automóvil. (c) Explique por qué el uso directo de la energía solar no es práctico para un automóvil convencional. (d) ¿Cuáles son algunos usos más prácticos de la energía solar?

- V** 15. En las fábricas se utiliza láser de alta potencia para cortar tela y metal (figura P33.15). Un láser de ese tipo tiene un diámetro de haz de 1.00 mm y genera un campo eléctrico que tiene una amplitud de 0.700 MV/m en el objetivo. Determine (a) la amplitud del campo magnético producido, (b) la intensidad del láser y (c) la potencia entregada por el láser.



Philippe Plailly/SPL/Science Source

Figura P33.15

16. **Problema de repaso.** Represente la onda electromagnética en un horno de microondas como una onda viajera plana que se desplaza hacia la izquierda, con una intensidad de 25.0 kW/m<sup>2</sup>. Un horno contiene dos recipientes cúbicos de masa pequeña, cada uno lleno de agua. Uno tiene una longitud de arista de 6.00 cm y el otro de 12.0 cm. La energía incide perpendicularmente sobre la cara de cada contenedor. El agua en el contenedor más pequeño absorbe 70.0% de la energía que incide sobre él. El agua del contenedor más grande absorbe 91.0%. Esto es, una fracción de 0.300 de la energía de microondas de entrada pasa a través de un cuerpo de agua con un espesor de 6 cm y la fracción  $(0.300)(0.300) = 0.090$  pasa a través de un espesor de 12 cm. Determine el cambio en la temperatura del agua de cada contenedor durante un intervalo de tiempo de 480 s. Suponga que la cantidad de energía que abandona cada recipiente debido al calor es despreciable.
- CE** 17. Usted está sirviendo como testigo experto para el concejo de la ciudad de una comunidad. El concejo está explorando el concepto de resolver las necesidades eléctricas de la comunidad mediante la construcción de una instalación con células fotovoltaicas para convertir la luz solar en energía potencial

eléctrica. Pero se enfrentan a la resistencia de los miembros de la comunidad, que afirman que no hay suficiente espacio abierto en la comunidad para construir dicha instalación. La oposición está avanzando hacia un pleito, que el ayuntamiento quiere evitar. La comunidad requiere 1.00 MW de potencia, y las mejores células fotovoltaicas en el mercado en ese momento tienen una eficiencia del 30.0%. En su comunidad, una intensidad promedio de luz solar durante el día es de 1 000 W/m<sup>2</sup>. Los miembros del concejo no tienen idea de cuánta tierra se necesita, por lo que le han pedido que calcule el área de terreno que se debe encontrar para construir esta instalación.

- 18.** Si la antena de una estación de radio de 10.0 kW emite ondas electromagnéticas esféricas, (a) calcule el valor máximo del campo magnético a 5.00 km de la antena, y (b) compare este valor con el campo magnético superficial de la Tierra.
- 19.** ¿A qué distancia de una onda electromagnética de 100 W una fuente puntual es  $E_{\text{máx}} = 15.0 \text{ V/m}$ ?
- 20.** En alguna ubicación de la Tierra, el valor rms del campo magnético causado por la radiación solar es de 1.80  $\mu\text{T}$ . A partir de este valor, calcule (a) el campo eléctrico rms debido a radiación solar, (b) la densidad de energía promedio del componente solar de la radiación electromagnética en esta ubicación y (c) la magnitud promedio del vector de Poynting para la radiación del Sol.

**SECCIÓN 33.5 Cantidad de movimiento y presión de radiación**

- 21.** Un láser de 25.0 mW y 2.00 mm de diámetro es reflejado en incidencia normal por un espejo que refleja perfectamente. Calcule la presión de la radiación en el espejo.
- 22.** La intensidad de la luz solar a la distancia de la Tierra desde el Sol es de 1 370 W/m<sup>2</sup>. Suponga que la Tierra absorbe toda la luz solar incidente sobre ella. (a) Encuentre la fuerza total que el Sol ejerce sobre la Tierra debido a presión de radiación. (b) Explique cómo se compara esta fuerza con la atracción gravitacional del Sol.
- 23.** Un láser neón-helio de 15.0 mW emite un haz de sección transversal circular con un diámetro de 2.00 mm. (a) Determine el campo eléctrico máximo en el haz. (b) ¿Cuál es la energía total contenida en una longitud de 1.00 m del haz? (c) Determine la cantidad de movimiento que tiene un tramo de 1.00 m de longitud del haz.
- 24.** Un láser neón-helio emite un haz de sección transversal circular con un radio  $r$  y una potencia  $P$ . (a) Determine el campo eléctrico máximo en el haz. (b) ¿Cuál es la energía total contenida en una longitud  $\ell$  del haz? (c) Determine la cantidad de movimiento que tiene un tramo de longitud  $\ell$  del haz.
- 25.** Una onda electromagnética plana, de 6.00 W/m<sup>2</sup> de intensidad, que se mueve en la dirección  $x$ , golpea un pequeño espejo de bolsillo, de 40.0 cm<sup>2</sup> de área, que se mantiene en el plano  $yz$ . (a) ¿Qué cantidad de movimiento transfiere la onda al espejo cada segundo? (b) Encuentre la fuerza que la onda ejerce sobre el espejo. (c) Explique la relación entre las respuestas a los incisos (a) y (b).
- 26.** Suponga que la intensidad de la radiación solar incidente sobre la atmósfera superior de la Tierra es de 1 370 W/m<sup>2</sup> y use los datos de la tabla 13.2 que sean necesarios. Determine (a) la intensidad de la radiación solar incidente sobre Marte, (b) la potencia total incidente sobre Marte y (c) la fuerza de radiación que actúa sobre dicho planeta si absorbe casi

toda la luz. (d) Establezca cómo se compara esta fuerza con la atracción gravitacional ejercida por el Sol sobre Marte. (e) Compare la razón de la fuerza gravitacional a la fuerza de presión luminosa ejercida sobre la Tierra y la razón de estas fuerzas ejercidas sobre Marte, encontrada en el inciso (d).

**SECCIÓN 33.6 Producción de ondas electromagnéticas por una antena**

- 27.** Las ondas de extrema baja frecuencia (ELF, *extremely low frequency*) que pueden penetrar en los océanos son la única forma práctica de establecer comunicación con los submarinos a profundidad. (a) Calcule la longitud de una antena de un cuarto de onda para un transmisor que genera ondas ELF de frecuencia de 75.0 Hz en el aire. (b) ¿Qué tan práctico es este medio de comunicación?
- 28.** Una hoja o lámina plana muy grande conduce una corriente eléctrica uniformemente distribuida con un ancho unitario de corriente  $J_s$ . Esta corriente genera un campo magnético en ambos lados de la hoja, paralelo a la misma y perpendicular a la corriente, con una magnitud  $B = \frac{1}{2}\mu_0 J_s$ . Si la corriente está en la dirección  $y$  y oscila con el transcurso del tiempo de acuerdo a

$$J_{\text{máx}} (\cos \omega t) \hat{j} = J_{\text{máx}} [\cos (-\omega t)] \hat{j}$$

la hoja emite una onda electromagnética. La figura P33.28 muestra que una onda emitida desde un punto de la hoja puede ser el origen. Tales ondas electromagnéticas son emitidas desde todos los puntos en la hoja. El campo magnético de la onda a la derecha de la hoja queda expresado por la función de onda.

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 J_{\text{máx}} [\cos(kx - \omega t)] \hat{k}$$

- (a) Determine la función de onda para el campo eléctrico de la onda. (b) Determine el vector de Poynting como una función de  $x$  y de  $t$ . (c) Determine la intensidad de la onda. (d) **¿Qué pasaría si?** Si la hoja emite radiación en ambas direcciones (normales al plano de la hoja) con una intensidad de 570 W/m<sup>2</sup>, ¿cuál es el valor máximo de la densidad de corriente sinusoidal requerida?

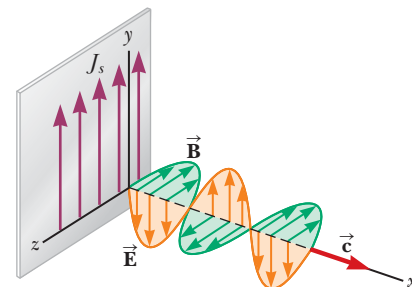


Figura P33.28

- 29. Problema de repaso.** Las cargas en aceleración emiten ondas electromagnéticas radiantes. Calcule la longitud de onda de la radiación producida por un protón en un ciclotrón con un campo magnético de 0.350 T de magnitud.
- 30. Problema de repaso.** Las cargas en aceleración emiten ondas electromagnéticas radiantes. Calcule la longitud de onda de la radiación producida por un protón de masa  $m_p$  que se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético de magnitud  $B$ .



**SECCIÓN 33.7 El espectro de las ondas electromagnéticas**

**31.** Calcule una estimación del orden de magnitud para la frecuencia de una onda electromagnética con una longitud de onda igual a (a) su estatura, o (b) el espesor de esta hoja de papel. ¿Cómo se clasifica cada una de las ondas sobre el espectro electromagnético?

**32.** El anuncio de una noticia importante se transmite por ondas de radio a un auditorio de personas sentadas junto a sus aparatos de radio a 100 km de la estación, y por ondas sonoras a las personas que están sentadas en la sala de noticias, a 3.00 m del locutor. ¿Quién recibe la noticia primero? Explique. Suponga que la velocidad del sonido en el aire es de 343 m/s.

**PROBLEMAS ADICIONALES**

**33.** Suponga que la intensidad de la radiación solar incidente sobre la parte superior de las nubes de la Tierra es de  $1370 \text{ W/m}^2$ . (a) Calcule la energía total radiada por el Sol, considere la distancia promedio entre la Tierra y el Sol como  $1.496 \times 10^{11} \text{ m}$ . Determine los valores máximos de (b) el campo eléctrico y (c) el campo magnético de la luz solar en la ubicación de la Tierra.

**34.** Clasifique las ondas con frecuencias de 2 Hz, 2 kHz, 2 MHz, 2 GHz, 2 THz, 2 PHz, 2 EHz, 2 ZHz y 2 YHz sobre el espectro electromagnético. Clasifique las ondas con longitudes de onda de 2 km, 2 m, 2 mm,  $2 \mu\text{m}$ , 2 nm, 2 pm, 2 fm y 2 am.

**35.** El ojo es más sensible a la luz que tiene una frecuencia de  $5.45 \times 10^{14} \text{ Hz}$ , que es en la región verde-amarilla del espectro electromagnético visible. ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz?

**36.** Escriba expresiones para los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana sinusoidal que tiene una amplitud del campo eléctrico de  $300 \text{ V/m}$  y una frecuencia de  $3.00 \text{ GHz}$  y que viaja en la dirección  $x$  positiva.

**37.** Usted está trabajando como técnico de radio. Un día, configura un patrón de ondas estacionarias con ondas de radio entre dos hojas de metal a  $2.00 \text{ m}$  de distancia. No puede lograr un patrón de onda estacionaria con distancias más pequeñas entre las hojas. A partir de esta información, determine la frecuencia de las ondas de radio.

**38.** Uno de los objetivos del programa espacial ruso es iluminar las oscuras ciudades del norte con luz solar reflejada a la Tierra a partir de una superficie reflejante en órbita con un diámetro de  $200 \text{ m}$ . Ya se han construido y puesto en órbita varios prototipos más pequeños. (a) Suponga que la luz solar con una intensidad de  $1370 \text{ W/m}^2$  cae en el espejo casi perpendicularmente y que la atmósfera de la Tierra permite que  $74.6\%$  de la energía de la luz del sol pase a pesar de que el cielo está despejado. ¿Cuál es la potencia recibida por una ciudad cuando el espejo espacial está reflejando la luz hacia ella? (b) El plan es que la luz solar reflejada cubra un círculo de  $8.00 \text{ km}$  de diámetro. ¿Cuál es la intensidad de la luz (la magnitud media del vector de Poynting) recibida por la ciudad? (c) ¿Qué porcentaje de esta intensidad es de la componente vertical de la luz del sol en San Petersburgo en enero, cuando el sol alcanza un ángulo de  $7.00^\circ$  sobre el horizonte al mediodía?

**39.** La intensidad de la radiación solar en la parte superior de la atmósfera terrestre es de  $1370 \text{ W/m}^2$ . Suponga que  $60\%$  de la energía solar incidente llega a la superficie de la Tierra, y que las personas absorben  $50\%$  de la energía incidente, haga una estimación del orden de magnitud de la cantidad

de energía solar absorbida si toma un baño de sol durante 60 minutos.

**40.** La Tierra refleja aproximadamente  $38.0\%$  de la luz solar incidente debido a las nubes y la corteza terrestre. (a) Dado que la intensidad de la radiación solar es de  $1370 \text{ W/m}^2$ , ¿cuál es la presión de radiación sobre la Tierra, expresada en pascuales, en el punto donde el Sol está directamente en el cenit? (b) Compare este resultado con la presión atmosférica normal o perpendicular a la superficie de la Tierra, que es de  $101 \text{ kPa}$ .

**41.** Considere que una pequeña partícula esférica de radio  $r$  se encuentra en el espacio a una distancia  $R = 3.75 \times 10^{11} \text{ m}$  del Sol. Suponga que la partícula tiene una superficie perfectamente absorbente y una densidad de masa de  $\rho = 1.50 \text{ g/cm}^3$ . Utilice  $S = 214 \text{ W/m}^2$  como el valor de la intensidad solar en la ubicación de la partícula. Calcule el valor de  $r$  para el que la partícula está en equilibrio entre la fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por la radiación solar.

**42.** Considere que una pequeña partícula esférica de radio  $r$  se encuentra en el espacio a una distancia  $R$  del Sol, de masa  $M_s$ . Suponga que la partícula tiene una superficie perfectamente absorbente y una densidad de masa  $\rho$ . El valor de la intensidad solar en la ubicación de la partícula es  $S$ . Calcule el valor de  $r$  para el que la partícula está en equilibrio entre la fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por la radiación solar. Su respuesta debe ser en términos de  $S$ ,  $R$ ,  $\rho$ , y otras constantes.

**43. Problema de repaso.** Un espejo de  $1.00 \text{ m}$  de diámetro enfoca los rayos solares sobre una placa absorbente de  $2.00 \text{ cm}$  de radio, la cual sostiene una lata que contiene  $1.00 \text{ L}$  de agua a  $20.0^\circ\text{C}$ . (a) Si la intensidad solar es de  $1.00 \text{ kW/m}^2$ , ¿cuál es la intensidad sobre la placa absorbente? En la placa ¿cuáles son las magnitudes máximas de los campos (b)  $\vec{E}$  y (c)  $\vec{B}$ ? (d) Si se absorbe  $40.0\%$  de la energía, ¿cuánto tardará el agua en alcanzar el punto de ebullición?

**44.** (a) Una partícula estacionaria cargada en el origen produce un flujo eléctrico de  $487 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ . Encuentre el campo eléctrico que se crea en el espacio vacío alrededor suyo como una función de la distancia radial  $r$  alejándose de la partícula. (b) Una pequeña fuente en el origen emite una onda electromagnética con una sola frecuencia en el vacío, igual en todas direcciones, con potencia de  $25.0 \text{ W}$ . Encuentre la amplitud del campo eléctrico como función de la distancia radial alejándose de la fuente. (c) ¿A qué distancia la amplitud del campo eléctrico en la onda es igual a  $3.00 \text{ MV/m}$ , lo que representa la resistencia dieléctrica del aire? (d) Conforme la distancia se duplica, ¿qué ocurre con la amplitud del campo? (e) Establezca una comparación entre este comportamiento en (d) y del campo en el inciso (a).

**45. Problema de repaso.** (a) Una persona tiene un calentador de agua solar instalado en el techo de su domicilio (figura P33.45). El calentador está constituido por una caja cerrada plana con un aislamiento térmico extraordinariamente bueno. Su interior está pintado de negro y su parte delantera está hecha de vidrio aislante. Suponga que su emisividad para la luz visible es de  $0.900$  y que su emisividad para la luz infrarroja es de  $0.700$ . Suponga que la luz del Sol del mediodía incide perpendicularmente sobre el vidrio con una intensidad de  $1000 \text{ W/m}^2$  y que en la caja no entra ni sale agua. Determine la temperatura en estado estable en el interior de la caja. (b) ¿Qué pasaría si? La persona construye una caja idéntica sin tuberías de agua, que yace plana sobre el suelo frente a la casa y la utilizan como un semillero,





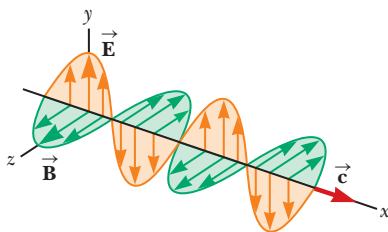
para sembrar a principios de la primavera. Si el mismo Sol de mediodía tiene un ángulo de elevación de  $50.0^\circ$ , determine la temperatura de estado estable en el interior de esta caja cuando su rejilla de ventilación está herméticamente cerrada.



easyshoo/Shutterstock

**Figura P33.45**

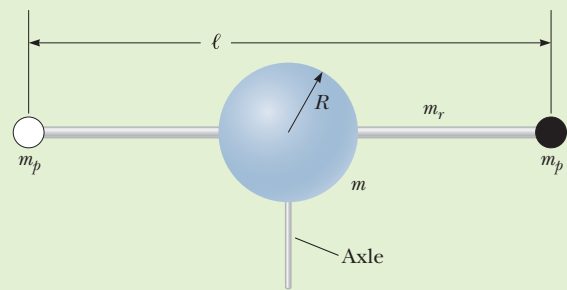
**46.** Es posible que tenga que repasar las secciones 16.4 y 16.8 acerca del transporte de energía por ondas en cuerdas y sonido. La figura 33.46 es una representación gráfica de una onda electromagnética que se mueve en la dirección  $x$ . Deseamos encontrar una expresión para la intensidad de esta onda por medio de un proceso diferente generado desde la ecuación 33.27. (a) Bosqueje una gráfica del campo eléctrico en esta onda en el instante  $t = 0$ , con su papel plano representando el plano  $xy$ . (b) Calcule la densidad de



**Figura P33.46**

energía  $u_E$  en el campo eléctrico como función de  $x$  en el instante  $t = 0$ . (c) Calcule la densidad de energía en el campo magnético  $u_B$  y la densidad de energía total  $u$  como función de  $x$ , en ese instante  $t = 0$ . (d) Calcule la densidad de energía total  $u$  como función de  $x$ , expresada sólo en términos de la amplitud del campo eléctrico. (e) La energía en una “caja de zapatos” de longitud  $\ell$  y área frontal  $A$  es  $E_\lambda = \int_0^\lambda uA dx$ . (El símbolo  $E_\lambda$  para la energía en una longitud de onda imita la notación de la sección 16.4) Realice la integración para calcular la cantidad de esta energía en términos de  $A$ ,  $\ell$ ,  $E_{\text{máx}}$  y constantes universales. (f) Se puede considerar al transporte de energía por toda la onda como una serie de estas cajas de zapatos que pasan como si se llevaran sobre una banda transportadora. Cada ciclo pasa en un intervalo de tiempo definido como el periodo  $T = 1/f$  de la onda. Determine la potencia que la onda porta a través del área  $A$  (g) La intensidad de la onda es la potencia por unidad de área a través de la cual pasa la onda. Calcule esta intensidad en términos de  $E_{\text{máx}}$  y constantes universales. (h) Explique cómo se compara su resultado con el dado en la ecuación 33.27.

**47.** Está trabajando en la NASA, en una división que estudia la posibilidad de rotar pequeñas naves espaciales utilizando la presión de radiación del Sol. Ha construido una maqueta de una nave espacial como se muestra en la figura P33.47. El cuerpo central es un caparazón esférico con una masa  $m = 0.500$  kg y un radio  $R = 15.0$  cm. La varilla delgada que se extiende desde cada lado de la esfera es de masa  $m_r = 50.0$  g y de longitud total,  $\ell = 1.00$  m. En cada extremo de la varilla hay placas circulares de masa  $m_p = 10.0$  g y radio  $r_p = 2.00$  cm, con el centro de cada placa ubicado en el extremo de la varilla. Una placa se refleja perfectamente y la otra absorbe perfectamente. La configuración inicial de este modelo es que está en reposo, montado en un eje vertical con muy baja fricción. Para comenzar la simulación, expone el modelo a la luz del sol de intensidad  $I_s = 1\,000$  W/m<sup>2</sup>, dirigido perpendicularmente a las placas, por un intervalo de tiempo de  $\Delta t = 2.00$  min. La luz del sol se elimina del modelo. Determine la velocidad angular  $\omega$  con la que el modelo gira ahora sobre el eje.



**Figura P33.47**

**48.** La energía electromagnética emitida por una carga puntual  $q$  en movimiento no relativista con una aceleración  $a$  es igual a

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre (también llamado permitividad del vacío) y  $c$  es la rapidez de la luz en el vacío. (a) Demuestre que el lado derecho de esta ecuación está expresado en watts. Un electrón se coloca en un campo eléctrico constante de magnitud 100 N/C. Determine (b) la aceleración del electrón y (c) la energía electromagnética emitida por el mismo. (d) **¿Qué pasaría si?** Se coloca un protón en un ciclotrón de 0.500 m de diámetro con un campo magnético de 0.350 T de magnitud, ¿cuál es la energía electromagnética emitida por este protón?

**49. Problema de repaso.** Una gata negra de 5.50 kg y sus cuatro gatitos negros, cada uno de masa 0.800 kg, duermen acurrucados en una manta durante una noche fresca, formando con sus cuerpos un hemisferio. Suponga que la temperatura superficial es uniforme y de  $31.0^\circ\text{C}$  y que la emisividad es de 0.970 y una densidad uniforme de  $900$  kg/m<sup>3</sup>. (a) encuentre el radio del hemisferio. (b) el área de su superficie curva (c) la intensidad de la radiación emitida por los gatos en su superficie curva y (d) la energía radiada por esta superficie. Es posible pensar que la onda electromagnética emitida tiene una frecuencia predominante única. Determine (e) la amplitud del campo eléctrico en la onda electromagnética justo en el exterior del acogedor montoncito y (f) la amplitud del campo magnético. (g) **¿Qué pasaría si?** La noche siguiente los gatitos duermen separados, enroscándose en hemisferios

individuales, como su madre. Determine la energía total radiada por la familia. (Por simplicidad, ignore por completo la absorción de radiación del entorno por parte de los gatos.)

### PROBLEMAS DE DESAFÍO

**50. Problema de repaso.** En ausencia de cable de entrada o un plato satelital, un televisor puede usar una antena receptora de dipolo para canales VHF y una antena de espira para canales UHF. La antena de VHF consistía en dos varillas de metal rectas que a menudo se llamaban "orejas de conejo". La antena UHF produce una fem a partir del flujo magnético cambiante a través de la espira. La estación de televisión transmite una señal con una frecuencia  $f$  y la señal tiene una amplitud de campo eléctrico  $E_{\text{máx}}$  y una amplitud de campo magnético  $B_{\text{máx}}$  en la posición de la antena receptora. (a) Con la ley de Faraday, deducir una expresión para la amplitud de la fem que aparece en una antena de espira circular de una sola vuelta, con un radio  $r$ , que es pequeña compa-

rada con la longitud de onda de la onda. (b) Si el campo eléctrico en la señal apunta verticalmente, ¿qué orientación de la espira da la mejor recepción?

- 51.** Una onda electromagnética plana varía de manera sinusoidal en 90.0 MHz conforme se desplaza en la dirección positiva de las  $x$ . El valor pico del campo eléctrico es de 2.00 mV/m, y está dirigido a lo largo de la dirección de positiva de  $x$ . Determine (a) la longitud de onda, (b) el periodo y (c) el valor máximo del campo magnético. (d) Escriba expresiones en unidades del SI para las variaciones en el espacio y en el tiempo tanto del campo eléctrico como del magnético. Incluya ambos valores numéricos y subíndices para indicar coordenadas de dirección. (e) Determine la potencia promedio por unidad de área que transporta esta onda a través del espacio. (f) Determine la densidad de energía promedio de la radiación (en joules por metro cúbico). (g) ¿Cuál sería la presión de radiación que esta onda ejercería sobre una superficie perfectamente reflejante, con incidencia normal?





# Luz y óptica

**La luz es básica para casi toda la vida en la Tierra. Por ejemplo, las plantas convierten la energía transferida por la luz solar en energía química a través de la fotosíntesis. Además, la luz es el principal medio por el cual podemos transmitir y recibir información hacia y desde los objetos que nos rodean y en todo el Universo. La luz es una forma de radiación electromagnética y representa la transferencia de energía de la fuente al observador. Está representado por  $T_{ER}$  en la ecuación 8.2.**

Muchos fenómenos en nuestra vida diaria dependen de las propiedades de la luz. Cuando mira un televisor o ve fotos en un monitor de computadora, verá millones de colores formados por combinaciones de solo tres colores que están físicamente en la pantalla: rojo, azul y verde. El color azul del cielo diurno es el resultado del fenómeno óptico de la dispersión de la luz por las moléculas del aire, al igual que los colores rojo y naranja de los amaneceres y puestas de Sol. Ve su imagen en el espejo del baño por la mañana o las imágenes de otros autos en el espejo retrovisor cuando conduce. Estas imágenes son el resultado de la *reflexión* de la luz. Si usa anteojos o lentes de contacto, depende de la *refracción* de la luz para una visión clara. Los colores de un arco iris son el resultado de la *dispersión* de la luz a medida que pasa a través de las gotas de lluvia flotando en el cielo después de una tormenta. Si alguna vez ha visto los círculos de colores que rodean la sombra de su avión en las nubes al volar sobre *ellas*, está viendo un efecto que resulta de la *interferencia* de la luz. Los fenómenos mencionados aquí han sido estudiados por científicos y son bien entendidos. En la introducción al capítulo 34, analizamos brevemente la naturaleza dual de la luz. En algunos casos, es mejor modelar la luz como una corriente de partículas; en otros, un modelo de onda funciona mejor. Los capítulos 34 a 37 se concentran en aquellos aspectos de la luz que se comprenden mejor a través del modelo de ondas de luz. En la Parte 6, investigaremos la naturaleza de partículas de la luz. ■

Los rayos de luz provenientes de las hojas en el fondo de esta escena no formaron una imagen enfocada en la cámara que tomó esta fotografía. En consecuencia, el fondo aparece muy borroso. Sin embargo, los rayos de luz que atraviesan la gota de lluvia, han sido alterados para formar una imagen enfocada de las hojas de fondo para la cámara. Los principios ópticos que estudiamos en esta parte del libro explicarán fenómenos como éste. (Don Hammond/Photography)



# 34

## Naturaleza de la luz y leyes de óptica geométrica

Esta fotografía de un arco iris muestra la gama de colores desde el rojo en la parte superior hasta el violeta en la parte inferior. La aparición del arco iris depende de tres fenómenos ópticos estudiados en este capítulo: reflexión, refracción y dispersión. Los débiles arcos de colores pastel debajo del arco iris principal se llaman arcos supernumerarios.

Están formados por la interferencia entre los rayos de luz que dejan las gotas de lluvia debajo de las que causan el arco iris principal.

(John W. Jewett Jr.)

- 34.1 Naturaleza de la luz
- 34.2 Aproximación de un rayo en óptica geométrica
- 34.3 Modelo de análisis: La onda bajo reflexión
- 34.4 Modelo de análisis: La onda bajo refracción
- 34.5 Principio de Huygens
- 34.6 Dispersión
- 34.7 Reflexión interna total

### IMAGINE

En el capítulo anterior, salió a caminar fuera de su casa para investigar la intensidad de la señal del sistema Wi-Fi de su propiedad. Ahora está parado en la acera contemplando sus resultados. Mira hacia su sombra sobre la hierba incrustada de rocío. Ve un brillo resplandeciente alrededor de la sombra de su cabeza. Asombrado por este efecto, mira hacia arriba y ve un arcoíris en el cielo. Y hay algunas bandas tenues de colores pastel debajo del arcoíris principal, como en la foto de arriba. Piensa que todos estos efectos deben tener algo que ver con el Sol detrás suyo, así que se vuelve para mirar al Sol. Se sorprende al ver dos áreas brillantes en el cielo a ambos lados del Sol. Luego mira por la calle y ve lo que parece ser un charco de agua en el asfalto. Pero la calle está seca en donde está parado. Camina hacia el lugar en el que se vio el charco. ¡La calzada está seca allí también! ¿Qué está pasando? ¿Qué está causando todos estos efectos?

### CONEXIONES

En el capítulo anterior, presentamos la noción de ondas electromagnéticas. En estos próximos capítulos sobre óptica, nos enfocaremos en la luz como nuestra onda electromagnética representativa, porque tenemos experiencia cotidiana con la luz. Este primer capítulo sobre óptica comienza analizando la naturaleza de la luz y los métodos más antiguos para medir su velocidad. A continuación, estudiamos los fenómenos fundamentales de la óptica geométrica: la reflexión de la luz desde una superficie y la refracción cuando la luz cruza el límite entre dos medios. También estudiamos la dispersión de la luz a medida que se refracta en los materiales, lo que resulta en pantallas visuales como el arcoíris. Finalmente, investigamos el fenómeno de la reflexión interna total, que es la base para el funcionamiento de las fibras ópticas y la tecnología de la fibra óptica. Estas investigaciones establecerán

lo que necesitamos para formar imágenes ópticas utilizando espejos y lentes en el capítulo 35. A medida que avancemos en nuestras investigaciones sobre el comportamiento de la luz en estos próximos capítulos, nos prepararemos para nuestros estudios en la Parte 6, donde gran parte de la física cuántica se ocupa de la interacción entre la luz y la materia.

## 34.1 Naturaleza de la luz

Antes de iniciar el siglo XIX, la luz era considerada un flujo de partículas que eran emitidas por un objeto observado o emanaban de los ojos del observador. Newton, principal arquitecto del modelo de las partículas de la luz, afirmaba que éstas eran emitidas por una fuente luminosa y que estimulaban el sentido de la vista al entrar en los ojos del observador. Con esta idea pudo explicar la reflexión y la refracción.

La mayoría de los científicos aceptó esta teoría. De cualquier modo, durante su vida, Newton se propuso otra idea que sostenía que la luz podría ser una clase de movimiento ondulatorio. En 1678, el físico y astrónomo holandés Christian Huygens demostró que una teoría de ondas de luz podría también explicar la reflexión y la refracción.

En 1801, Thomas Young (1773-1829) dio la primera demostración clara de la naturaleza ondulatoria de la luz. Demostró que, bajo condiciones apropiadas, los rayos de luz se interfieren unos con otros de acuerdo con el modelo de interferencias de ondas, al igual que con las ondas mecánicas (capítulo 17). Tal comportamiento no podía ser explicado en aquel tiempo por una teoría de partículas porque no había forma imaginable en que dos o más partículas pudieran unirse y cancelarse entre sí. Desarrollos adicionales durante el siglo XIX condujeron a la aceptación general del modelo de onda de la luz, el resultado más importante de la obra de Maxwell, quien en 1873 afirmó que la luz era una forma de onda electromagnética de alta frecuencia. Como se explicó en el capítulo 33, Hertz proporcionó información experimental de la teoría de Maxwell en 1887 al producir y detectar ondas electromagnéticas.

Estos resultados representan información convincente de que la luz tiene una naturaleza ondulatoria, y los científicos aceptaron la naturaleza ondulatoria de la luz. Sorprendentemente, a principios del siglo XX, nuevos experimentos indicaron que la luz *también* tiene una naturaleza de partículas. Las partículas de luz se llaman *fotones*.

Exploraremos la naturaleza ondulatoria de la luz en estos próximos capítulos sobre óptica y demoraremos el estudio de la naturaleza de partículas de la luz hasta el capítulo 39. Comencemos mirando cómo se midió históricamente la velocidad de la luz.

La luz se desplaza con una velocidad tan alta (a tres dígitos  $c = 3.00 \times 10^8$  m/s) que los primeros intentos por medirla fracasaron. Galileo intentó medirla colocando dos observadores en torres separadas aproximadamente 10 km. Cada observador llevaba una linterna de persianas. Un observador la abría primero y luego lo haría el otro al momento de ver la luz. Galileo explicó que, si conocía el tiempo de tránsito de los rayos de luz de una linterna a la otra y la distancia entre las dos linternas, podría obtener la velocidad. Sus resultados no fueron concluyentes. En la actualidad (como concluyó Galileo) se sabe que es imposible medir la velocidad de la luz de esta manera porque el tiempo de tránsito es mucho menor que el tiempo de reacción de los observadores. Veamos dos métodos posteriores que tuvieron más éxito.

### Método de Roemer

En 1675, el astrónomo danés Ole Roemer (1644-1710) hizo la primera estimación exitosa de la velocidad de la luz. En la técnica de Roemer intervinieron observaciones astronómicas de una de las lunas de Júpiter, Io, que tiene un periodo de revolución alrededor del planeta de aproximadamente 42.5 h. El periodo se mide al observar eclipses de Io mientras gira alrededor de Júpiter.



Historical/Getty Images

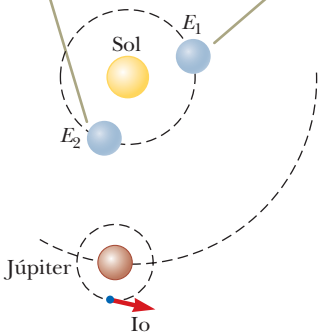
### Christian Huygens

Físico y astrónomo holandés (1629-1695)

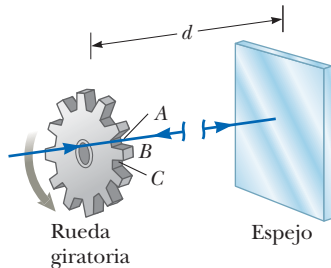
Huygens es mejor conocido por sus aportaciones a los campos de la óptica y la dinámica. Para Huygens, la luz consistía en un tipo de movimiento vibratorio que se dispersa y produce la sensación de luz cuando incide en los ojos. Con base en esta teoría, dedujo las leyes de la reflexión y la refracción y explicó el fenómeno de doble refracción.



Cuando la Tierra está lejos de Júpiter como en la posición  $E_1$ , los eclipses de Io aparecen tarde. Cuando la Tierra está en posiciones como  $E_2$ , los eclipses aparecen antes.



**Figura 34.1** Método de Roemer para medir la velocidad de la luz (el dibujo no está a escala).



**Figura 34.2** Método de Fizeau para medir la velocidad de la luz mediante una rueda dentada giratoria. Se considera que la fuente de luz está en la posición de la rueda; por tanto, la distancia  $d$  es conocida.

Un observador que utilice el movimiento orbital de Io como reloj esperaría que la órbita tuviera un periodo constante. No obstante, Roemer, después de reunir datos durante más de un año, observó una variación sistemática en el periodo de Io. Descubrió que los eclipses eran más tardíos que el promedio cuando la Tierra estaba en una posición en su órbita como  $E_1$  en la figura 34.1 en el lado opuesto del Sol desde Júpiter y lejos de ella, y antes que el promedio cuando la Tierra estaba en el mismo lado del Sol como Júpiter y más cerca de él como en la posición  $E_2$ . Roemer atribuyó esta variación en el periodo observado al intervalo de tiempo extra requerido para que la luz que representa el eclipse viaje a través del diámetro de la órbita de la Tierra.

Con el uso de los datos de Roemer, Huygens estimó que el límite inferior de la velocidad de la luz era aproximadamente  $2.3 \times 10^8$  m/s. Este experimento es importante históricamente porque demostró que la luz tiene una velocidad finita y proporcionó una estimación de esta velocidad.

### Método de Fizeau

El primer método exitoso para medir la velocidad de la luz por medio de técnicas puramente terrestres fue perfeccionado en 1849 por el físico francés Armand H. L. Fizeau (1819-1896). La figura 34.2 representa un diagrama simplificado del aparato de Fizeau. El procedimiento básico es medir el intervalo de tiempo total durante el cual la luz viaja desde cierto punto hacia a un espejo distante y de regreso. Si  $d$  es la distancia entre la fuente de luz (considerada en la posición de la rueda) y el espejo, y si el intervalo de tiempo para un viaje redondo es  $\Delta t$ , la velocidad de la luz es  $c = 2d/\Delta t$ .

Para medir el tiempo de tránsito, Fizeau utilizó una rueda dentada giratoria, que convierte un haz continuo de luz en una serie de pulsos luminosos. Por tanto, la rueda actúa como la fuente de luz y define un extremo de la distancia  $d$ . El observador mira a través de los dientes y determina si la luz reflejada es visible o no. Por ejemplo, si el pulso que viaja hacia el espejo y pasa por la abertura en el punto A de la figura 34.2 regresa a la rueda en el instante en que el diente B ha girado a su posición para cubrir la trayectoria de retorno, el pulso no llegaría al observador. Con mayor rapidez de rotación, la abertura en el punto C podría moverse a su posición para permitir que el pulso reflejado llegue al observador. Al conocer la distancia  $d$ , el número de dientes de la rueda y la rapidez angular de ésta, Fizeau llegó a un valor de  $3.1 \times 10^8$  m/s. Mediciones similares hechas por otros investigadores dieron valores más precisos para  $c$ , que llevó al valor actualmente aceptado de  $2.997\,924\,58 \times 10^8$  m/s.

### Ejemplo 34.1 Medición de la velocidad de la luz con la rueda de Fizeau

Suponga que la rueda de Fizeau tiene 360 dientes y da vueltas a 55.0 rev/s cuando un pulso de luz que pasa a través de la abertura A en la figura 34.2, pasa a través de la abertura C a su regreso. Si la distancia al espejo es de 7500 m, ¿cuál es la velocidad de la luz?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine un pulso de luz que pasa a través de la abertura A en la figura 34.2 y se refleja desde el espejo. Para cuando el pulso llega de regreso a la rueda, el diente B ha pasado y la abertura C ha girado a la posición anteriormente ocupada por la abertura A.

**Categorizar** La rueda es un objeto rígido girando a velocidad angular constante. Modele el pulso de luz como una *partícula bajo velocidad constante*.

**Analizar** La rueda tiene 360 dientes, así que debe tener 360 aberturas. Por tanto, ya que la luz pasa a través de la abertura A pero es bloqueada por el diente inmediatamente adyacente a A, la rueda debe dar vuelta a través de un desplazamiento angular de  $\frac{1}{360}$  rev en el intervalo de tiempo durante el cual el pulso de luz hace su viaje redondo.

A partir del modelo de partícula bajo velocidad constante, encuentre la velocidad del pulso de luz y use la ecuación 10.2 para sustituir el intervalo de tiempo para el viaje redondo del pulso:

$$c = \frac{2d}{\Delta t} = \frac{2d\omega}{\Delta\theta}$$



## 34.1 continuación

Sustituya valores numéricos

$$c = \frac{2(7\,500\text{ m})(55.0\text{ rev/s})}{\frac{1}{360}\text{ rev}} = 2.97 \times 10^8\text{ m/s}$$

**Finalizar** Este resultado está muy cerca del valor real de la velocidad de la luz.

## 34.2 Aproximación de un rayo en óptica geométrica

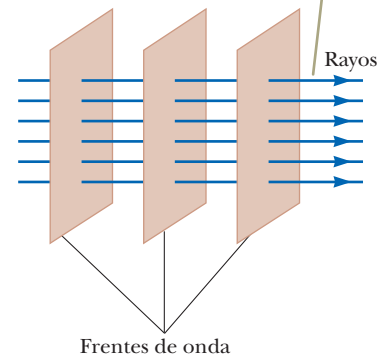
El campo de la **óptica geométrica** abarca el estudio de la propagación de la luz, a partir del supuesto de que la luz se desplaza en una dirección fija y en línea recta cuando pasa por un medio uniforme, y cambia su dirección en el momento en que se encuentra con la superficie de un medio diferente o si las propiedades ópticas del medio no son uniformes ya sea en espacio o en tiempo. A medida que estudie la óptica geométrica aquí y en el capítulo 35, utilizará la **aproximación de un rayo**. Para comprender esta aproximación, primero observe que los rayos de una onda determinada son líneas rectas perpendiculares a los frentes de onda, como se ilustra en la figura 34.3 para una onda plana. En la aproximación de un rayo, una onda que se mueve en un medio se desplaza en línea recta en la dirección de sus rayos.

Si la onda se encuentra con una barrera en la que hay una abertura circular cuyo diámetro es mucho mayor que la longitud de onda, como se ve en la figura 34.4a, la onda que emerge de la abertura continúa moviéndose en línea recta (además de algunos pequeños efectos de borde); por tanto, la aproximación de rayo es válida. Si el diámetro de la abertura es del orden de una longitud de onda, como en la figura 34.4b, las ondas se extienden desde la abertura en todas direcciones. Este efecto se llama *difracción* y se estudiará en el capítulo 37. Por último, si la abertura es mucho menor que la longitud de onda, la abertura se aproxima como una fuente puntual de ondas como muestra la figura 34.4c.

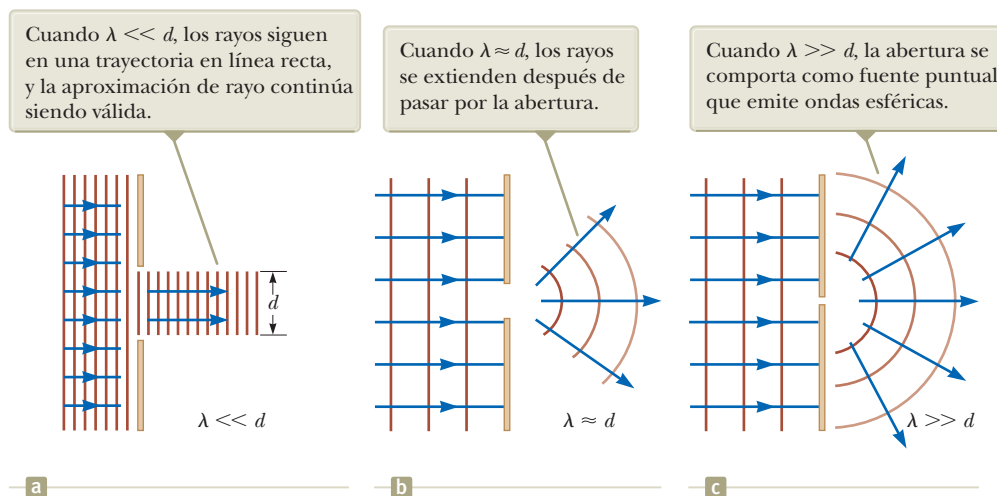
Efectos similares se observan cuando las ondas se encuentran con un objeto opaco de dimensión  $d$ . En este caso, cuando  $\lambda \ll d$ , el cuerpo arroja una sombra nítida.

La aproximación de un rayo y la suposición de que  $\lambda \ll d$  se usan en este capítulo y en el capítulo 35, que tratan la óptica geométrica. Esta aproximación es muy buena para el estudio de espejos, lentes, prismas e instrumentos ópticos asociados, por ejemplo telescopios, cámaras y anteojos. Cuando estudiemos la interferencia, la difracción y la polarización en los capítulos 36 y 37, necesitaremos observar más de cerca las características de onda de la luz.

Observe que los rayos, que siempre apuntan en la dirección de propagación de la onda, son rectas perpendiculares a los frentes de onda.

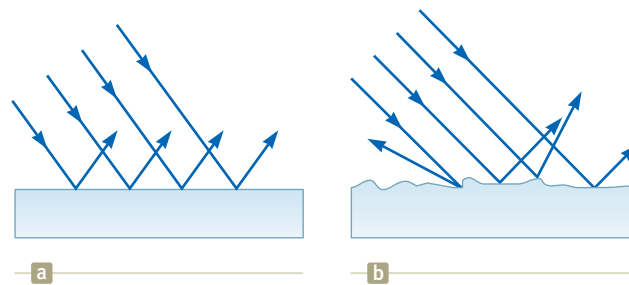


**Figura 34.3** Onda plana que se propaga a la derecha.

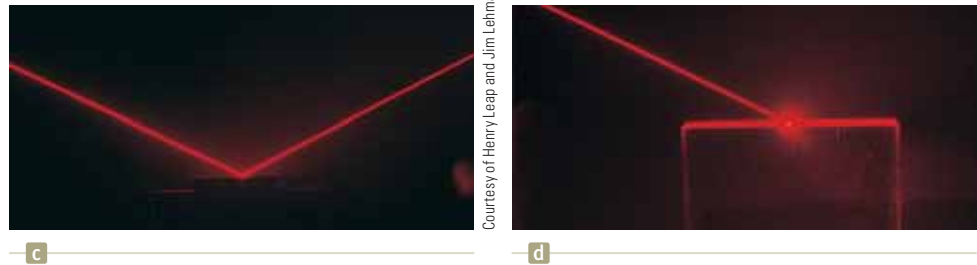


**Figura 34.4** Una onda plana con longitud  $\lambda$  incide sobre una barrera en la que hay una abertura de diámetro  $d$ .





**Figura 34.5** Representación esquemática de (a) reflexión especular, donde todos los rayos reflejados son paralelos entre sí, y (b) reflexión difusa, donde los rayos reflejados viajan en direcciones aleatorias. (c) y (d) Fotografías de reflexión especular y difusa con luz láser.



Courtesy of Henry Leap and Jim Lehman

Courtesy of Henry Leap and Jim Lehman

### 34.3 Modelo de análisis: La onda bajo reflexión

El concepto de reflexión de ondas se introdujo en el análisis de las ondas sobre cuerdas en la sección 17.3. Como con las ondas sobre cuerdas, cuando un rayo de luz que se desplaza en un medio encuentra una frontera con otro medio, parte de la luz incidente se refleja: para ondas sobre una cuerda unidimensional, la onda reflejada necesariamente debe restringirse a una dirección a lo largo de la cuerda; para ondas de luz que viajan en el espacio tridimensional, no se aplican tales restricciones y las ondas de luz reflejadas pueden estar en direcciones distintas de la dirección de las ondas incidentes. La figura 34.5a muestra varios rayos de un haz de luz incidente en una superficie reflectora lisa, semejante a espejo. Los rayos reflejados son paralelos entre sí, como se indica en la figura. La dirección de un rayo reflejado está en el plano perpendicular a la superficie reflectora que contiene al rayo incidente. La reflexión de luz desde esta superficie lisa se denomina **reflexión especular**. Si la superficie reflectora es rugosa, como se ve en la figura 34.5b, la superficie refleja los rayos no como un conjunto paralelo sino en varias direcciones. La reflexión desde cualquier superficie rugosa se conoce como **reflexión difusa**. Una superficie se comporta como superficie lisa mientras las variaciones de superficie son mucho menores que la longitud de onda de la luz incidente. El espejo del baño exhibe una reflexión especular, mientras que la luz que se refleja en esta página experimenta una reflexión difusa.

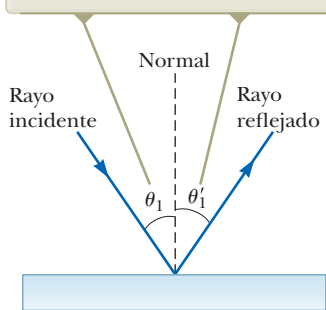
La diferencia entre estas dos clases de reflexión explica por qué le es más difícil ver cuando circula en auto durante una noche lluviosa. Si el pavimento está mojado, la superficie lisa del agua refleja en forma especular casi toda la luz de los faros del auto y los aleja de éste (quizá hacia los ojos de conductores que circulan en sentido contrario). Cuando el pavimento está seco, su superficie rugosa refleja en forma difusa parte de los rayos de luz de los faros, hacia el conductor, lo cual permite ver con más claridad la carretera. En este libro sólo se analiza la reflexión especular y se usa el término *reflexión*, para dar a entender reflexión especular.

Considere un rayo de luz que viaja en el aire y que incide a un ángulo en una superficie plana y lisa, como se ve en la figura 35.6. Los rayos incidente y reflejado forman ángulos  $\theta_1$  y  $\theta'_1$ , respectivamente, donde los ángulos se observan entre la normal y los rayos. (La normal es una recta con trazo perpendicular a la superficie en el punto donde el rayo incidente cae en la superficie.) Experimentos y teoría muestran que **el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia**:

$$\theta'_1 = \theta_1 \tag{34.1}$$

Esta relación se denomina **ley de reflexión**. Debido a que la reflexión de ondas desde una interfaz entre dos medios es un fenómeno común, se identifica un análisis de modelo para esta situación: la **onda bajo reflexión**. La ecuación 34.1 es la representación matemática de este modelo.

El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal todos están en el mismo plano y  $\theta'_1 = \theta_1$ .



**Figura 34.6** Modelo de onda bajo reflexión.

#### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.1

**Notación de subíndices** El subíndice 1 se utiliza para indicar los parámetros para la luz en el medio inicial. Cuando la luz pasa de un medio a otro, se usa el subíndice 2 para los parámetros asociados con la luz en el nuevo medio. En el presente análisis, la luz permanece en el mismo medio, de modo que sólo se usa el subíndice 1.

Ley de reflexión ►



- EJAMEN RÁPIDO 34.1** En un cine, a veces un espectador ve a un actor que
- se mira en un espejo y ve la cara de él en el espejo. Durante la filmación de esta
  - escena, ¿qué ve el actor en el espejo? (a) Su propia cara, (b) la cara de usted, (c) la
  - cara del director, (d) la cámara de cine, o (e) imposible de determinar.

**Ejemplo 34.2 El rayo de luz doblemente reflejado**

Dos espejos forman un ángulo de  $120^\circ$  entre sí, como se ilustra en la figura 34.7a. Un rayo incide sobre el espejo  $M_1$  con un ángulo de  $65^\circ$  con la normal. Encuentre la dirección del rayo después de que se refleja del espejo  $M_2$ .

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** La figura 34.7a ayuda a conceptualizar esta situación. El rayo entrante se refleja del primer espejo, y el rayo reflejado se dirige hacia el segundo espejo. Por tanto, hay una segunda reflexión desde el segundo espejo.

**Categorizar** Ya que las interacciones con ambos espejos son simples reflexiones, se aplica el modelo de *onda bajo reflexión* y algo de geometría.

**Analizar** A partir de la ley de reflexión, el primer rayo reflejado forma un ángulo de  $65^\circ$  con la normal.

Encuentre el ángulo que forma el primer rayo reflejado con la horizontal:

$$\delta = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

A partir del triángulo formado por el primer rayo reflejado y los dos espejos, encuentre el ángulo que el rayo reflejado forma con  $M_2$ :

$$\gamma = 180^\circ - 25^\circ - 120^\circ = 35^\circ$$

Encuentre el ángulo que el primer rayo reflejado forma con la normal a  $M_2$ :

$$\theta_{M_2} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

A partir de la ley de reflexión, encuentre el ángulo que el segundo rayo reflejado forma con la normal a  $M_2$ :

$$\theta'_{M_2} = \theta_{M_2} = 55^\circ$$

**Finalizar** Explore las variaciones en el ángulo entre los espejos como sigue.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Observe que el ángulo entre los rayos incidentes y reflejados en el espejo  $M_1$  es  $65^\circ + 65^\circ = 130^\circ$ . Por tanto, el ángulo por el cual la dirección del rayo de luz cambia desde su dirección original es  $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ . Del mismo modo, para la reflexión en espejo  $M_2$ , el cambio de dirección es  $70^\circ$ . Por tanto, el cambio general en la dirección del rayo de luz para dos reflexiones es  $50^\circ + 70^\circ = 120^\circ$ . ¡Interesante! Este ángulo es el mismo que el existente entre los espejos. ¿Y si el ángulo entre los espejos cambia? ¿El cambio global en la dirección del rayo de luz siempre es igual al ángulo entre los espejos?

**Respuesta** ¡Hacer una afirmación general en términos de un dato puntual o una observación, siempre es una práctica peligrosa! Investigue el cambio en dirección para una situación general. La figura 34.7b muestra los espejos a un ángulo arbitrario  $\phi$  y el rayo de luz entrante que golpea al espejo en un ángulo arbitrario  $\theta$  respecto a la normal a la superficie del espejo. De acuerdo con la ley de reflexión y la suma de los ángulos interiores de un triángulo, el ángulo  $\gamma$  está dado por  $\gamma = 180^\circ - (90^\circ - \theta) - \phi = 90^\circ + \theta - \phi$ .

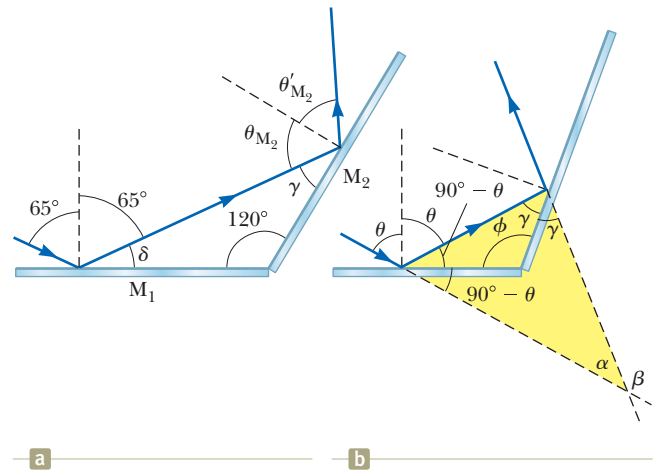
Considere el triángulo resaltado en azul en la figura 35.7b y determine  $\alpha$ :

$$\alpha + 2\gamma + 2(90^\circ - \theta) = 180^\circ \rightarrow \alpha = 2(\theta - \gamma)$$

Observe de la figura 34.7b que el cambio de dirección del rayo de luz es el ángulo  $\beta$ . Use la geometría de la figura para resolver para  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \beta &= 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 2(\theta - \gamma) \\ &= 180^\circ - 2[\theta - (90^\circ + \theta - \phi)] = 360^\circ - 2\phi \end{aligned}$$

Observe que  $\beta$  no es igual a  $\phi$ . Para  $\phi = 120^\circ$ , obtiene  $\beta = 120^\circ$ , que resulta ser el mismo que el ángulo de los espejos; sin embargo, esto es cierto sólo para este ángulo especial entre los espejos. Por ejemplo, si  $\phi = 90^\circ$ , obtiene  $\beta = 180^\circ$ . En este caso, la luz tiene una reflexión en línea recta cuando va de regreso a su origen.



**Figura 34.7** (Ejemplo 34.2) (a) Los espejos  $M_1$  y  $M_2$  forman un ángulo de  $120^\circ$  uno con otro. (b) Geometría para un ángulo de espejo arbitrario.



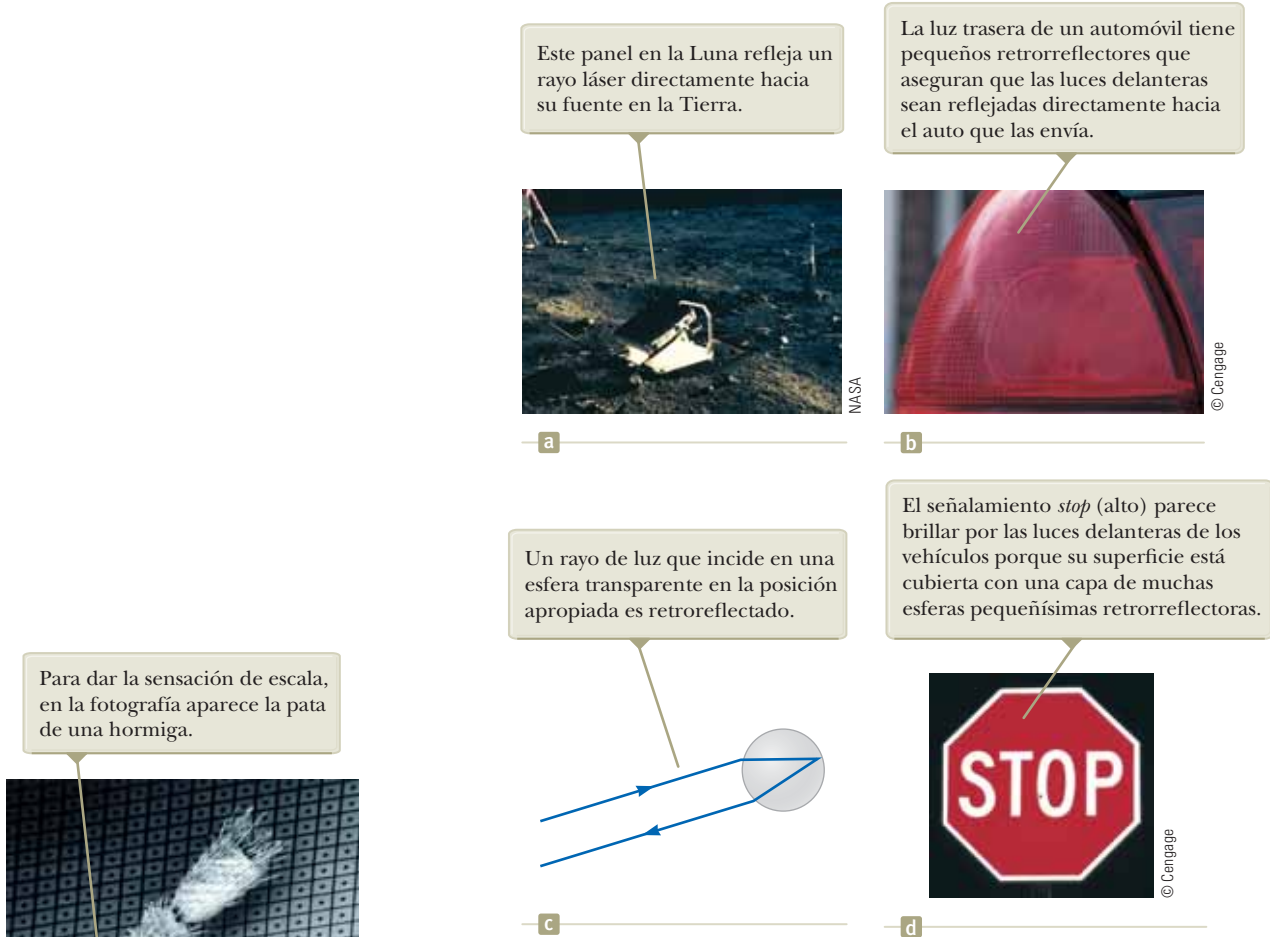


Figura 34.8 Aplicaciones de la retrorreflexión.

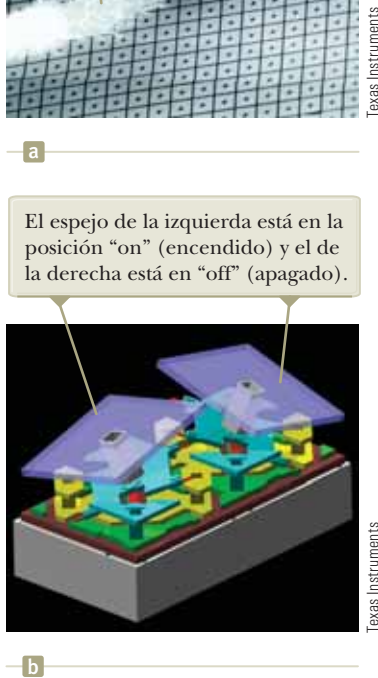


Figura 34.9 (a) Arreglo de espejos sobre la superficie de un dispositivo digital de microespejo. Cada espejo tiene un área de alrededor de  $16 \mu\text{m}^2$  (b) Acercamiento de dos microespejos.

Como se explicó en la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo precedente, si el ángulo entre dos espejos es igual a  $90^\circ$ , el haz reflejado regresa a la fuente paralelo a su trayectoria original. Este fenómeno, llamado *retroreflexión*, tiene muchas aplicaciones prácticas. Si se coloca un tercer espejo perpendicular a los dos primeros, de modo que los tres formen la esquina de un cubo, la retroreflexión funciona en tres dimensiones. En 1969, un panel de numerosos reflectores pequeños fue colocado en la Luna por los astronautas del *Apollo 11* (figura 34.8a). Un rayo láser proveniente de la Tierra se refleja directamente de regreso hacia la misma y se mide el tiempo que tarda en hacer el recorrido. Esta información se emplea para determinar la distancia a la Luna con una incertidumbre de 15 cm. (¡Imagine lo difícil que sería alinear un espejo plano regular para que el rayo láser reflejado incida en un lugar particular en la Tierra!) Una aplicación más común se encuentra en las luces traseras o calaveras de los vehículos. Parte del plástico de las calaveras está formado por numerosas y diminutas esquinas de cubo (figura 34.8b), para que las luces de los faros delanteros de los vehículos que se aproximen por atrás sean reflejadas a los conductores. En lugar de esquinas de cubos, a veces se usan pequeñas salientes esféricas (figura 34.8c). Diminutas esferas transparentes se utilizan en los materiales de recubrimiento que se encuentran en muchos señalamientos de tránsito en los caminos. Debido a la retroreflexión de estas esferas, la señal de *stop* (alto) de la figura 34.8d parece mucho más brillante de lo que sería si fuera simplemente una superficie plana brillante. Los retrorrefletores también se usan para paneles reflectores o zapatos y ropa de corredores que permiten a sus usuarios ser vistos de noche.

Otra aplicación práctica de la ley de reflexión es la proyección digital en cines, programas de televisión y presentaciones de computadora. Un proyector digital utiliza un chip semiconductor óptico llamado *dispositivo digital microespejo*. Este dispositivo contiene un conjunto de pequeños espejos (figura 34.9a) que se inclinan individualmente por medio de señales a un electrodo de dirección situado bajo el borde del espejo. Cada

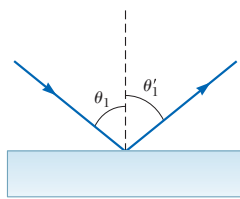
espejo corresponde a un pixel en la imagen proyectada. Cuando el pixel correspondiente a un espejo dado debe ser brillante, el espejo está en la posición “on” (encendido); es decir, orientado para reflejar a la pantalla la luz proveniente de una fuente que ilumine el conjunto (figura 34.9b). Cuando es necesario que el pixel sea oscuro para este espejo, éste estará en “off” (apagado), inclinado para que la luz se refleje alejándose de la pantalla. Esta brillantez del pixel está determinada por el intervalo total en el que el espejo está en la posición “on” durante el despliegue de una imagen.

Los proyectores digitales de cine usan tres dispositivos de microespejos, uno por cada uno de los colores primarios: rojo, azul y verde, lo cual permite ver el cine hasta con 35 billones de colores. Puesto que la información se guarda como datos binarios, una película digital no se degrada con el tiempo, como sucede con las películas de cinta. Además, como la película está totalmente en forma de software computarizado, se proyecta en los cines mediante satélites, discos ópticos o redes de fibras ópticas.

### MODELO DE ANÁLISIS: Onda bajo reflexión

Imagine una onda (electromagnética o mecánica) que viaja a través del espacio y que golpea una superficie plana en un ángulo  $\theta_1$  con respecto a la normal a la superficie. La onda se reflejará desde la superficie en una dirección descrita por la **ley de reflexión**, el ángulo de reflexión  $\theta'_1$  es igual al ángulo de incidencia  $\theta_1$ :

$$\theta'_1 = \theta_1 \quad (34.1)$$



#### Ejemplos:

- Las ondas de sonido de una orquesta se reflejan desde una concha acústica a la audiencia
- El uso un espejo para desviar un haz láser en un espectáculo de luz láser
- El espejo del baño refleja la luz de su rostro de nuevo a hacia usted para formar una imagen de su cara (capítulo 35)
- Los rayos X reflejados de un material cristalino crean un patrón óptico que se puede utilizar para comprender la estructura del sólido (capítulo 37)

## 34.4 Modelo de análisis: La onda bajo refracción

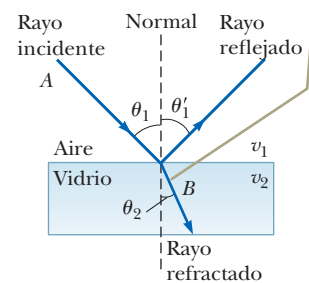
Además del fenómeno de la reflexión explicado para las ondas sobre cuerdas en la sección 17.3, también se encontró que parte de la energía de la onda incidente se transmite en el nuevo medio. Por ejemplo, considere las figuras 17.11 y 17.12, en las que un pulso en una cuerda aproximándose la unión con otra cuerda se refleja desde ambas y es transmitido más allá de la unión y al interior de la segunda cuerda. De igual modo, cuando un rayo de luz que se mueve por un medio transparente encuentra una frontera que lleva a otro medio de igual característica, como se ve en la figura 34.10, parte de la energía se refleja y parte penetra al segundo medio. Como con la reflexión, la dirección de la onda transmitida muestra un comportamiento interesante debido a la naturaleza tridimensional de las ondas de luz. El rayo que penetra al segundo medio se dobla en la frontera y se dice que se **refracta**. El rayo incidente, el rayo reflejado y el rayo refractado todos se encuentran en el mismo plano. El **ángulo de refracción**,  $\theta_2$  de la figura 34.10a, depende de las propiedades de los dos medios y del ángulo de incidencia  $\theta_1$  por medio de la expresión

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \quad (34.2)$$

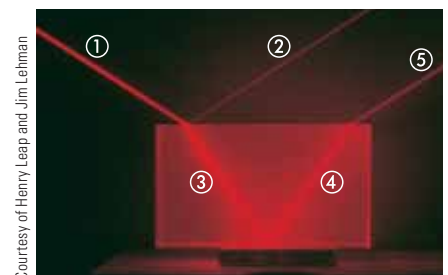
donde  $v_1$  es la velocidad de la luz en el primer medio y  $v_2$  es la velocidad de la luz en el segundo. Hemos establecido esta ecuación sin prueba, pero se deducirá en la sección 34.5.

**EXAMEN RÁPIDO 34.2** Si el rayo es el haz entrante en la figura 34.10b, de las otras cuatro líneas rojas, ¿cuáles son rayos reflejados y cuáles refractados?

El rayo refractado se dobla hacia la normal porque  $v_2 < v_1$ . Todos los rayos y la normal se encuentran en el mismo plano.



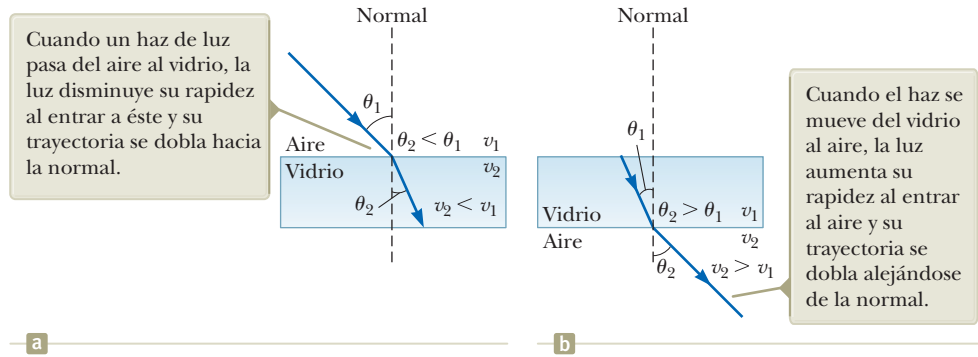
a



b

**Figura 34.10** (a) Modelo de onda bajo refracción. (b) La luz que incide sobre el bloque de Lucite se dobla cuando entra y cuando sale de éste.

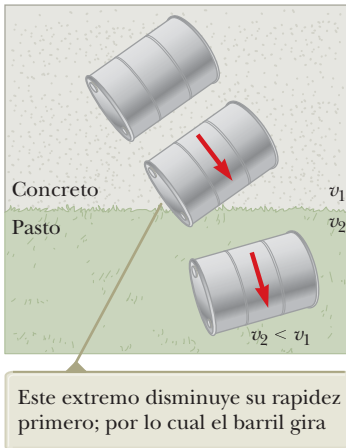




**Figura 34.11** Refracción de la luz conforme (a) se mueve desde el aire hacia el interior del vidrio y (b) del vidrio hacia el aire.

La trayectoria de un rayo de luz que pasa por una superficie refractaria es reversible. Por ejemplo, el rayo que se ilustra en la figura 34.10a pasa del punto *A* al punto *B*. Si el rayo se originó en *B*, viajaría a lo largo de la recta *BA* hasta llegar al punto *A*, y la parte reflejada apuntaría hacia abajo y a la izquierda del vidrio.

A partir de la ecuación 34.2 es posible inferir que cuando la luz se mueve de un material en el que su velocidad es alta a un material en el que su velocidad es menor, como se observa en la figura 34.11a, el ángulo de refracción  $\theta_2$  es menor que el ángulo de incidencia  $\theta_1$ , y el rayo se desvía *hacia* la normal. Si el rayo se mueve de un material en el que la luz se mueve con menos velocidad hacia un material en el que se mueve con más velocidad, como se ve en la figura 34.11b,  $\theta_2$  es mayor que  $\theta_1$  y el rayo se desvía *alejándose* de la normal.



En la figura 34.12 se muestra una analogía mecánica de la refracción. Cuando el extremo izquierdo del barril rodante alcanza el pasto, se ralentiza, mientras que el extremo derecho permanece en el concreto y se mueve a su velocidad original. Esta diferencia de velocidades hace que el barril gire, lo que cambia la dirección de desplazamiento.

El comportamiento de la luz cuando pasa del aire hacia otra sustancia y luego regresa al aire es un tema de confusión frecuente para estudiantes. Cuando la luz se mueve en el aire, su velocidad es de  $3.00 \times 10^8$  m/s, pero esta velocidad se reduce a casi  $2 \times 10^8$  m/s si la luz entra a un bloque de vidrio. Cuando la luz emerge de nuevo hacia el aire, su velocidad aumenta en forma instantánea a su valor original de  $3.00 \times 10^8$  m/s. Esto es muy diferente de lo que sucede, por ejemplo, cuando se dispara un arma de fuego y la bala atraviesa un bloque de madera. En este caso, la velocidad de la bala se reduce cuando se mueve a través de la madera porque parte de su energía original se emplea para separar las fibras de madera. En el momento en que la bala sale de nuevo al aire, lo hace con una velocidad menor de la que tenía cuando entró al bloque de madera, consistente con su energía cinética reducida.

**Figura 34.12** Vista superior de un barril que rueda de concreto a pasto.

Pero la luz es una onda. Su velocidad en el aire es siempre la misma. Por tanto, cuando la luz sale del bloque y entra al aire, *debe* viajar a la velocidad con la que ingresó. Similar a la energía reducida de la bala, la luz también tiene menos energía: es menos *intensa*. El rayo de luz saliente aparecerá más oscuro que el rayo incidente. Parte de la energía se ha absorbido dentro del vidrio.

### Índice de refracción

En general, la velocidad de la luz en cualquier material es *menor* que en el vacío. De hecho, *la luz se desplaza a su máxima velocidad en el vacío*. Es conveniente definir el **índice de refracción** *n* de un medio como la razón

Índice de refracción ►

$$n \equiv \frac{\text{velocidad de la luz en el vacío}}{\text{velocidad de la luz en un medio}} \equiv \frac{c}{v} \quad (34.3)$$

Esta definición muestra que el índice de refracción es un número sin dimensiones mayor que la unidad porque *v* siempre es menor que *c*. Además, *n* es igual a la unidad para el vacío. Los índices de refracción para diferentes sustancias aparecen en la tabla 34.1. Debido a que el valor de *n* para el aire es muy cercano a 1, usaremos *n* = 1 para el aire en este capítulo.





**TABLA 34.1** Índices de refracción

Sustancia	Índice de refracción	Sustancia	Índice de refracción
<i>Sólidos a 20 °C</i>		<i>Líquidos a 20 °C</i>	
Circonio cúbico	2.20	Benceno	1.501
Diamante (C)	2.419	Disulfuro de carbono	1.628
Fluorita (CaF <sub>2</sub> )	1.434	Tetracloruro de carbono	1.461
Cuarzo fundido (SiO <sub>2</sub> )	1.458	Alcohol etílico	1.361
Fosfato de galio	3.50	Glicerina	1.473
Vidrio, sin plomo	1.52	Agua	1.333
Vidrio, con plomo	1.66		
Hielo (H <sub>2</sub> O)	1.309	<i>Gases a 0 °C, 1 atm</i>	
Poliestireno	1.49	Aire	1.000 293
Cloruro de sodio (NaCl)	1.544	Dióxido de carbono	1.000 45

Nota: Todos los valores son para luz cuya longitud de onda sea de 589 nm en el vacío.

Cuando la luz pasa de un medio a otro, su frecuencia no cambia, pero sí lo hace su longitud de onda. Para ver por qué ocurre esto, considere la figura 34.13. Las ondas pasan junto a un observador situado en el punto A en el medio 1 con cierta frecuencia e inciden en la frontera entre el medio 1 y el medio 2. La frecuencia a la que pasan las ondas junto a un observador situado en el punto B en el medio 2 debe ser igual a la frecuencia a la que pasan en el punto A. Si este no fuera el caso, la energía se acumularía o desaparecería en la frontera. Como no hay mecanismo para que esto se presente, la frecuencia debe ser una constante cuando un rayo de luz pasa de un medio a otro. Por tanto, como la relación  $v = \lambda f$  (ecuación 16.12) debe ser válida en ambos medios, y como  $f_1 = f_2 = f$ , se ve que

$$v_1 = \lambda_1 f \quad \text{y} \quad v_2 = \lambda_2 f \tag{34.4}$$

Como  $v_1 \neq v_2$ , se deduce que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  como se muestra en la figura 34.13.

Al dividir la primera ecuación 34.4 entre la segunda y luego usar la ecuación 34.3 se obtiene una relación entre el índice de refracción y la longitud de onda:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{34.5}$$

Esta expresión da

$$\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2$$

Si el medio 1 es el vacío, o aire para fines prácticos, entonces  $n_1 = 1$ . Por esto, se deduce por la ecuación 34.5 que el índice de refracción de cualquier medio se expresa como la razón

$$n = \frac{\lambda}{\lambda_n} \tag{34.6}$$

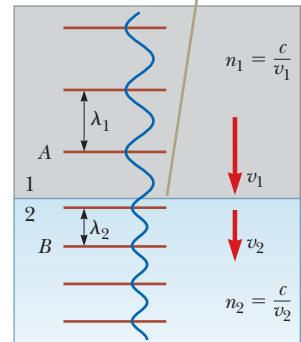
donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz en el vacío y  $\lambda_n$  es la longitud de onda de la luz en el medio cuyo índice de refracción es  $n$ . De la ecuación 34.6, se ve que, como  $n > 1$ ,  $\lambda_n < \lambda$ . Vemos el acortamiento de la longitud de onda en la figura 34.13.

Ahora está en posición de expresar la ecuación 34.2 de una manera alterna. Si sustituye el término  $v_2/v_1$  de la ecuación 34.2 con  $n_1/n_2$  de la ecuación 34.5, obtiene

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{34.7}$$

El descubrimiento experimental de esta relación suele acreditarse a Willebrord Snell (1591-1627), y por ello se conoce como **ley de refracción de Snell**. (Hay alguna evidencia de que la ley fue desarrollada siglos antes en el Medio Oriente).

Como una onda se mueve entre los medios, su longitud de onda cambia pero su frecuencia permanece constante.



**Figura 34.14** Una onda viaja del medio 1 al medio 2, en el que se mueve con una velocidad menor.

**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.2**

**Una relación inversa** El índice de refracción es *inversamente* proporcional a la velocidad de la onda. Cuando la velocidad  $v$  de la onda disminuye, el índice de refracción de  $n$  aumenta. Por tanto, cuanto más alto sea el índice de refracción de un material, más se *reduce su velocidad* de la luz respecto de su velocidad en el vacío. Cuanto más se reduce la velocidad de la luz, más difiere  $\theta_2$  de  $\theta_1$  en la ecuación 34.7.

◀ Ley de refracción de Snell



**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.3**

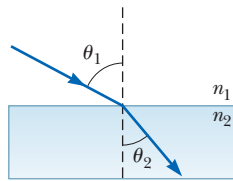
**Aquí,  $n$  no es un entero** El símbolo  $n$  ha sido empleado varias veces como entero, por ejemplo en el capítulo 18, para indicar el modo de onda estacionaria en una cuerda o en una columna de aire. El índice de refracción  $n$  aquí *no* es un entero.

Esta ecuación se expone con más detalle en la sección 34.5. La refracción de las ondas en una interfaz entre dos medios, es un fenómeno común y se puede identificar un análisis de modelo para esta situación: la **onda bajo refracción**. La ecuación 34.7 es la representación matemática de este modelo para la radiación electromagnética. Otras ondas, como las sísmicas o las del sonido también muestran una refracción acorde a este modelo; la representación matemática para estas ondas es la ecuación 34.2.

- EJERCICIO RÁPIDO 34.3** En un material con índice de refracción 1.3 pasa luz
- hacia otro con índice de refracción 1.2. En comparación con el rayo incidente,
  - ¿qué le sucede al rayo refractado? (a) se desvía hacia la normal, (b) no se desvía, o
  - (c) se desvía alejándose de la normal.

**MODELO DE ANÁLISIS: Onda bajo refracción**

Imagine una onda (electromagnética o mecánica) que viaja a través del espacio y que golpea una superficie plana en un ángulo  $\theta_1$  con respecto a la normal a la superficie. Una parte de la energía de la onda se refractará dentro del medio debajo de la superficie en una dirección  $\theta_2$  descrita por la **ley de refracción**:



$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \tag{34.2}$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son las rapidezces de la onda en el medio 1 y 2 respectivamente.

Para ondas de luz, la **ley de refracción de Snell** establece que:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{34.7}$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción en los dos medios.

**Ejemplos:**

- Ondas de sonido moviéndose hacia arriba desde la orilla de un lago se refractan en las capas más cálidas del aire superior por encima del lago y se desplazan hacia abajo a un oyente en un barco, haciendo el sonido de la orilla más fuerte de lo esperado
- Luz desde el cielo acercándose a un camino caliente en un ángulo de incidencia y refracta hacia arriba para dejar la carretera y entrar en los ojos del conductor, dando la ilusión de un charco de agua en el camino distante
- Luz enviada a través de largas distancias en una fibra óptica debido a una diferencia en el índice de refracción entre la fibra y el material circundante (sección 34.7)
- Una lupa forma una imagen ampliada de un sello de correos, debido a la refracción de la luz a través del objetivo (capítulo 35)

**Ejemplo 34.3 Ángulo de refracción para vidrio**

Un rayo de luz, de 589 nm de longitud de onda, que viaja a través de aire, incide sobre una lámina plana y uniforme de vidrio sin plomo con un ángulo de  $30.0^\circ$  con la normal.

**(A)** Encuentre el ángulo de refracción.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Estudie la figura 35.11a, que ilustra el proceso de refracción que se presenta en este problema. Puede esperar que  $\theta_2 < \theta_1$  debido a que la rapidez de la luz en el vidrio es baja.

**Categorizar** Este ejemplo es un problema típico en el que aplicará el *modelo de onda bajo refracción*.

**Analizar** Reordene la ley de refracción de Snell para encontrar  $\sin \theta_2$ :  $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$

Resuelva para  $\theta_2$ :  $\theta_2 = \sin^{-1} \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right)$

Sustituya los índices de refracción a partir de la tabla 34.1 y el ángulo de incidencia:  $\theta_2 = \sin^{-1} \left( \frac{1.00}{1.52} \sin 30.0^\circ \right) = 19.2^\circ$

34.3 continuación

(B) Encuentre la velocidad de esta luz una vez que entra al vidrio.

SOLUCIÓN

Resuelva la ecuación 34.3 para la velocidad de la luz en el vidrio:  $v = \frac{c}{n}$

Sustituya valores numéricos:  $v = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.52} = 1.97 \times 10^8 \text{ m/s}$

(C) ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz en el vidrio?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 34.6 para encontrar la longitud de onda en el vidrio:  $\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{589 \text{ nm}}{1.52} = 388 \text{ nm}$

**Finalizar** En la parte (A), observe que  $\theta_2 < \theta_1$ , congruente con la menor velocidad de la luz encontrada en la parte (B). En la parte (C) se ve que la longitud de onda es más corta en el vidrio que en el aire.

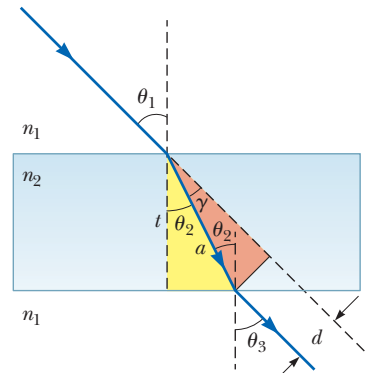
Ejemplo 34.4 Luz a través de una lámina

Un haz de luz pasa desde el medio 1 al medio 2, siendo este último una gruesa lámina de material cuyo índice de refracción es  $n_2$  (figura 34.14). Demuestre que el haz que emerge en el medio 1 desde el otro lado es paralelo al haz incidente.

SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Siga la trayectoria del haz de luz conforme entra y sale de la lámina de material en la figura 34.14, donde supuso que  $n_2 > n_1$ . El rayo se desvía hacia la normal al entrar y se aleja de la normal al salir.

**Figura 34.14** (Ejemplo 34.4) La línea punteada dibujada paralela al rayo saliente del fondo de la losa representa la trayectoria que la luz tomaría si la losa no estuviera ahí.



**Categorizar** Al igual que el ejemplo 34.3, este es otro problema típico en el que se aplica el modelo de *onda bajo refracción*.

**Analizar** Aplique la ley de refracción de Snell a la superficie superior: (1)  $\text{sen } \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \text{sen } \theta_1$

Aplique la ley de Snell a la superficie inferior: (2)  $\text{sen } \theta_3 = \frac{n_2}{n_1} \text{sen } \theta_2$

Sustituya la ecuación (1) en la ecuación (2):  $\text{sen } \theta_3 = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{n_1}{n_2} \text{sen } \theta_1 \right) = \text{sen } \theta_1$

**Finalizar** Por tanto,  $\theta_3 = \theta_1$  y la lámina no altera la dirección del haz. Sin embargo, el haz sobresale paralelo a sí mismo por la distancia  $d$  que se muestra en la figura 34.14.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si el grosor  $t$  de la lámina se duplica? ¿La distancia  $d$  que sobresale también se duplica?

**Respuesta** Considere la región de la trayectoria de luz dentro de la lámina en la figura 34.14. La distancia  $a$  es la hipotenusa de dos triángulos rectángulos.

Encuentre una expresión para  $a$  a partir del triángulo amarillo:  $a = \frac{t}{\cos \theta_2}$

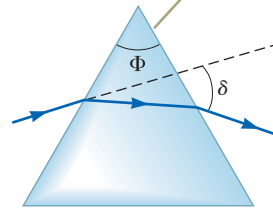
Encuentre una expresión para  $d$  a partir del triángulo rojo:  $d = a \text{sen } \gamma = a \text{sen } (\theta_1 - \theta_2)$

Combine estas ecuaciones:  $d = \frac{t}{\cos \theta_2} \text{sen } (\theta_1 - \theta_2)$

Para un ángulo incidente determinado  $\theta_1$ , el ángulo refractado  $\theta_2$  se determina exclusivamente por el índice de refracción, así que la distancia que sobresale  $d$  es proporcional a  $t$ . Si el grosor se duplica, lo mismo ocurre con la distancia que sobresale.



El ángulo de punta  $\Phi$  es el ángulo entre los lados del prisma a través de los que la luz entra y sale.



**Figura 34.15** Un prisma refracta un rayo de luz de longitud de onda simple a través de un ángulo de desviación  $\delta$ .

En el ejemplo 34.4, la luz pasa a través de una lámina de material con lados paralelos. ¿Qué ocurre cuando la luz golpea un prisma con lados no paralelos, como se muestra en la figura 34.15? En este caso, el rayo saliente no se propaga en la misma dirección que el rayo entrante. Un rayo de luz de longitud de onda simple, incidente en el prisma desde la izquierda, emerge a un ángulo  $\delta$  de su dirección de viaje original. Este ángulo  $\delta$  se llama **ángulo de desviación**. El **ángulo de punta  $\Phi$**  del prisma, que se muestra en la figura, se define como el ángulo entre la superficie a la que entra la luz en el prisma y la segunda superficie que encuentra la luz.

**Ejemplo 34.5 Medición de  $n$  con un prisma**

Aunque no se prueba en este caso, el ángulo de desviación mínimo  $\delta_{\min}$  para un prisma se presenta cuando el ángulo de incidencia  $\theta_1$  es tal que el rayo refractado dentro del prisma forma el mismo ángulo con la normal en las dos caras del prisma<sup>1</sup> como se muestra en la figura 34.16. Obtenga una expresión para el índice de refracción del material del prisma en términos del ángulo de desviación mínimo y el ángulo de punta  $\Phi$ .

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Estudie cuidadosamente la figura 34.16 y asegúrese de comprender por qué el rayo de luz que sale del prisma viaja en una dirección diferente.

**Categorizar** En este ejemplo entra luz a un material a través de una superficie y sale del material en otra superficie. Aplique el modelo de onda bajo refracción a cada superficie.

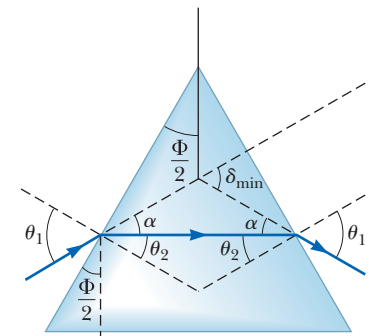
**Analizar** Considere la geometría en la figura 34.16. La reproducción del ángulo  $\Phi/2$  en la posición del rayo de luz entrante muestra que  $\theta_2 = \Phi/2$ . El teorema de que un ángulo exterior de cualquier triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos muestra que  $\delta_{\min} = 2\alpha$ . La geometría también muestra que  $\theta_1 = \theta_2 + \alpha$

Combine estos tres resultados geométricos: 
$$\theta_1 = \theta_2 + \alpha = \frac{\Phi}{2} + \frac{\delta_{\min}}{2} = \frac{\Phi + \delta_{\min}}{2}$$

Aplique el modelo de onda bajo refracción a la superficie izquierda y resuelva para  $n$ : 
$$(1.00) \sin \theta_1 = n \sin \theta_2 \rightarrow n = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

Sustituya para los ángulos incidente y refractado: 
$$n = \frac{\sin \left( \frac{\Phi + \delta_{\min}}{2} \right)}{\sin (\Phi/2)} \tag{34.8}$$

**Finalizar** Al conocer el ángulo de punta  $\Phi$  del prisma y medir  $\delta_{\min}$ , es posible calcular el índice de refracción del material del prisma. Además, se puede usar un prisma hueco para determinar los valores de  $n$  para diferentes líquidos que llenen el prisma.



**Figura 34.16** (Ejemplo 34.5) Rayo de luz que pasa a través de un prisma con el ángulo de desviación mínimo  $\delta_{\min}$ .

<sup>1</sup> Los detalles de esta demostración están disponible en textos acerca de óptica.

## 34.5 Principio de Huygens

Las leyes de la reflexión y la refracción fueron establecidas al inicio de este capítulo sin una demostración. En esta sección se desarrollan las leyes de la reflexión y de la refracción mediante el uso de un método geométrico propuesto por Huygens en 1678. El **principio de Huygens** es una construcción geométrica para usar el conocimiento de un frente de onda anterior, para determinar la posición de un frente de onda nuevo en algún instante:

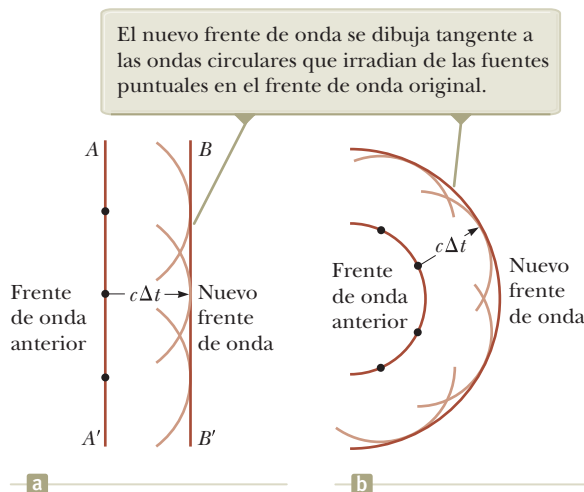
Todos los puntos en un frente de onda determinado se toman como fuentes puntuales para la producción de ondas esféricas secundarias, llamadas trenes de ondas, que se propagan hacia afuera por un medio con magnitudes de velocidad características de ondas en ese medio. Después de algún intervalo de tiempo transcurrido la nueva posición del frente de onda es la superficie tangente a las wavelets.

Primero considere una onda plana que se mueve en el espacio libre, como se muestra en la figura 34.17a. En  $t = 0$ , el frente de onda está indicado por el plano marcado como  $AA'$ . En una construcción de Huygens, cada punto de este frente de onda es considerado fuente puntual. Para hacerlo más claro, sólo se muestran tres puntos en  $AA'$ . Con estos puntos como fuentes para los trenes de ondas, trace círculos, cada uno con un radio  $c\Delta t$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $\Delta t$  es cierto intervalo de tiempo durante el cual se propaga la onda. La superficie trazada tangente a estos trenes de onda es el plano  $BB'$ , que es el frente de onda en un tiempo posterior, y es paralelo a  $AA'$ . De un modo semejante, la figura 34.17b muestra la construcción de Huygens para una onda esférica utilizando cuatro fuentes sobre el frente de onda original.

### Principio de Huygens aplicado a la reflexión y la refracción

A continuación se deducen las leyes de reflexión y refracción con el uso del principio de Huygens.

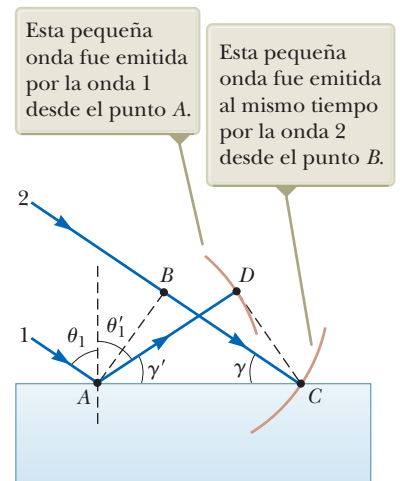
Para la ley de la reflexión, consulte la figura 34.18. La recta  $AB$  representa un frente de onda plana de la luz incidente precisamente cuando el rayo 1 incide en la superficie. En este instante, la onda en  $A$  envía una pequeña onda de Huygens (que aparece más adelante como el arco circular de color marrón de que pasa a través de  $D$ ). La luz reflejada forma un ángulo  $\gamma'$  con la superficie. Al mismo tiempo, la onda en  $B$  emite una pequeña onda de Huygens (el arco circular de color marrón que pasa por  $C$ ) con la luz incidente formando un ángulo  $\gamma$  con la superficie. La figura 34.18 muestra estas pequeñas ondas después de un intervalo  $\Delta t$ , después del cual el rayo 2 incide en la superficie. Como los rayos 1 y 2 se mueven a la misma velocidad, debe obtener  $AD = BC = c\Delta t$ .



**Figura 34.17** Construcción de Huygens para (a) una onda plana que se propaga a la derecha y (b) una onda esférica que se propaga desde un punto fuente.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.4

**¿Para qué sirve el principio de Huygens?** En este punto, no es posible resaltar la importancia del principio de Huygens. Pronosticar la posición de un frente de onda más allá no parece posible, es muy arriesgado de cualquier modo, se aplicará el principio de Huygens en capítulos posteriores para explicar fenómenos de onda adicionales de la luz.



**Figura 34.18** Construcción de Huygens para demostrar la ley de reflexión.



Para realizar el resto del análisis conviene hacerlo mediante la geometría. Observe que los dos triángulos,  $ABC$  y  $ADC$ , son congruentes porque tienen la misma hipotenusa  $AC$  y porque  $AD = BC$ . A partir de la figura 34.18, se tiene

$$\cos \gamma = \frac{BC}{AC} \quad \text{y} \quad \cos \gamma' = \frac{AD}{AC}$$

donde  $\gamma = 90^\circ - \theta_1$  y  $\gamma' = 90^\circ - \theta_1'$ . Como  $AD = BC$ , tenemos

$$\cos \gamma = \cos \gamma'$$

Por tanto,

$$\gamma = \gamma'$$

$$90^\circ - \theta_1 = 90^\circ - \theta_1'$$

y

$$\theta_1 = \theta_1'$$

que es la ley de la reflexión.

Ahora use el principio de Huygens para deducir la ley de la refracción de Snell. Concentre su atención en el instante en que el rayo 1 incide sobre la superficie y el intervalo de tiempo consecutivo hasta que el rayo 2 hace lo mismo como se muestra en la figura 34.19. Durante este intervalo de tiempo, la onda en  $A$  envía una pequeña onda de Huygens (el arco marrón que pasa a través de  $D$ ) y la luz refracta hacia el material formando un ángulo  $\theta_2$  con la normal a la superficie. En el mismo intervalo de tiempo, la onda en  $B$  envía una pequeña onda de Huygens (el arco marrón con centro en  $C$ ) y la luz continúa su propagación en la misma dirección. Ya que estas dos pequeñas ondas se desplazan en medios diferentes, los radios de las pequeñas ondas son diferentes. El radio de las pequeñas ondas desde  $A$  es  $AD = v_2 \Delta t$ , donde  $v_2$  es la velocidad de la onda en el segundo medio. El radio de la pequeña onda desde  $B$  es  $BC = v_1 \Delta t$ , donde  $v_1$  es la velocidad de la onda en el medio original.

A partir de los triángulos  $ABC$  y  $ADC$ , encuentra que

$$\sin \theta_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{v_1 \Delta t}{AC} \quad \text{y} \quad \sin \theta_2 = \frac{AD}{AC} = \frac{v_2 \Delta t}{AC}$$

Si divide la primera ecuación por la segunda, obtiene

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Pero por la ecuación 34.2 sabe que  $v_1 = c/n_1$  y  $v_2 = c/n_2$ . Por tanto,

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

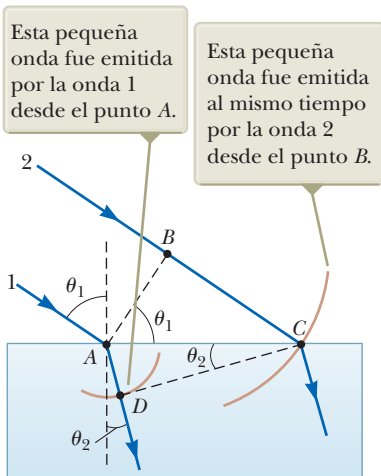
y

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

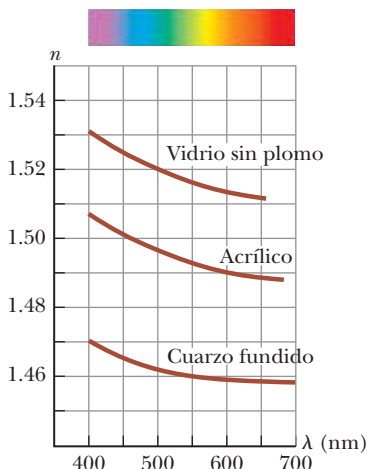
que es la ley de la refracción de Snell, ecuación 34.7.

### 34.6 Dispersión

Una propiedad importante del índice de refracción  $n$  es que, para un material determinado, el índice varía con la longitud de onda de la luz que pase por el material, como muestra la figura 34.20. Este comportamiento se denomina **dispersión**. Como  $n$  es una función de la longitud de onda, la ley de la refracción de Snell indica que luces de diferentes longitudes de onda se retractan a diferentes ángulos cuando inciden sobre un material.

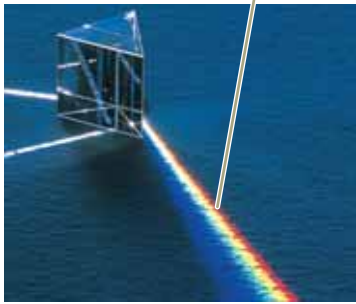


**Figura 34.19** Construcción de Huygens para demostrar la ley de la refracción de Snell.



**Figura 34.20** Variación del índice de refracción con la longitud de onda en el vacío para tres materiales.

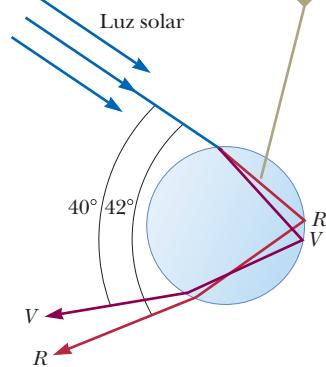
Los colores en el haz refractado están separados porque la dispersión en el prisma provoca diferentes longitudes de onda de la luz que es refractada a distintos ángulos.



David Parker/Science Source

**Figura 34.21** Luz blanca que entra en un prisma de vidrio arriba a la izquierda.

La luz violeta se refracta a ángulos mayores que la luz roja.



**Figura 34.22** Trayectoria de luz solar a través de una gota esférica de lluvia. La luz que sigue esta trayectoria contribuye al arcoíris visible.

La figura 34.20 muestra que el índice de refracción generalmente disminuye con una longitud de onda creciente. Por ejemplo esto significa que la luz violeta se refracta más que la luz roja cuando transita dentro de un material.

Ahora suponga que un haz de *luz blanca* (combinación de todas las longitudes de onda visibles) incide en un prisma, como se ilustra en la figura 34.21. Claramente, el ángulo de desviación  $\delta$  (figura 34.15) depende del índice de refracción  $n$ , entonces, a su vez, depende de la longitud de onda. Los rayos que emergen se dispersan en una serie de colores conocida como **espectro visible**. Estos colores, en orden de longitud de onda decreciente son rojos, naranja, amarillos, verdes, azules y violetas. Newton demostró que cada color tiene un ángulo particular de desviación y que los colores se pueden recombinar para formar la luz blanca original.

La dispersión de luz en un espectro se comprueba con mayor claridad en la naturaleza con la formación de un arco iris, el cual es visto frecuentemente por un observador que está situado entre el Sol y una zona con lluvia. Para comprender como se forma, considere la figura 34.22. Tendremos que aplicar los modelos tanto de la onda bajo reflexión como la onda bajo refracción. Un rayo de luz de sol (luz blanca) incide por arriba en una gota de agua en la atmósfera y es refractado y reflejado de la siguiente manera: primero es refractado en la superficie frontal de la gota, ahí la luz violeta tiene la mayor desviación y la luz roja la menor. En la superficie posterior de la gota, la luz se refleja y regresa a la superficie frontal, donde otra vez se somete a refracción cuando pasa del agua al aire. Los rayos dejan la gota tal que el ángulo entre la luz blanca incidente y el más intenso rayo violeta de retorno es de  $40^\circ$  y el ángulo entre la luz blanca incidente y el rayo rojo más intenso de retorno es de  $42^\circ$ . Esta pequeña diferencia angular entre los rayos de retorno hace posible que se vea un arco de colores.

Ahora suponga que un observador mira un arcoíris, como se muestra en la figura 34.23. Si se observa una gota de lluvia en el cielo, la luz roja más intensa que retorna de la gota llega al observador porque es la que más se desvía y la luz violeta más intensa pasa sobre el observador porque es la que menos se desvía. En consecuencia, el observador ve esta gota de color rojo. Del mismo modo, una gota más baja en el cielo dirigiría la más intensa luz violeta hacia el observador y se vería de color violeta. (La luz roja más intensa de esta gota pasaría por debajo de los ojos del observador y no sería visible.) La más intensa luz de otros colores del espectro llegaría al observador desde gotas de lluvia que estuvieran entre estas dos posiciones extremas.

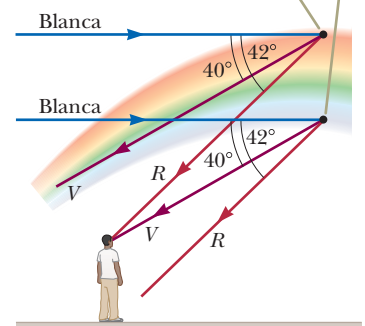
La figura 34.24 (página 914) muestra un *arcoíris doble*. El arcoíris secundario es más tenue que el arcoíris primario y sus colores están invertidos, surge de la luz que provoca dos reflexiones desde la superficie interior antes de salir de la gota de lluvia. En el laboratorio se han observado numerosos arcoíris en los que la luz hace más de

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 34.5

#### Un arcoíris de muchos rayos de luz

Representaciones gráficas como la figura 34.22 normalmente se malinterpretan. La figura muestra un rayo de luz que entra a una gota de lluvia y se somete a reflexión y refracción, saliendo de la gota entre  $40^\circ$  y  $42^\circ$  respecto del rayo que entra. De esto podría interpretarse que *toda* luz que entra a la gota de agua sale en este pequeño margen de ángulos, lo que es incorrecto. En realidad, la luz sale de la gota de lluvia en un margen de ángulos mucho mayor, de  $0^\circ$  a  $42^\circ$ . Un cuidadoso análisis de la reflexión y la refracción desde la gota esférica de lluvia demuestra que el margen de  $40^\circ$  a  $42^\circ$  es donde *la luz de máxima intensidad* sale de la gota de lluvia.

La luz de mayor intensidad que viaja de las gotas de lluvia más altas hacia los ojos del observador es de color rojo, mientras que la luz más intensa de gotas más bajas es violeta.



**Figura 34.23** Formación de un arcoíris visto por un observador situado con el Sol a su espalda.



Mikhail Varentsov/Shutterstock

**Figura 34.24** Esta fotografía de un arcoíris muestra un arcoíris secundario distinto con los colores invertidos.

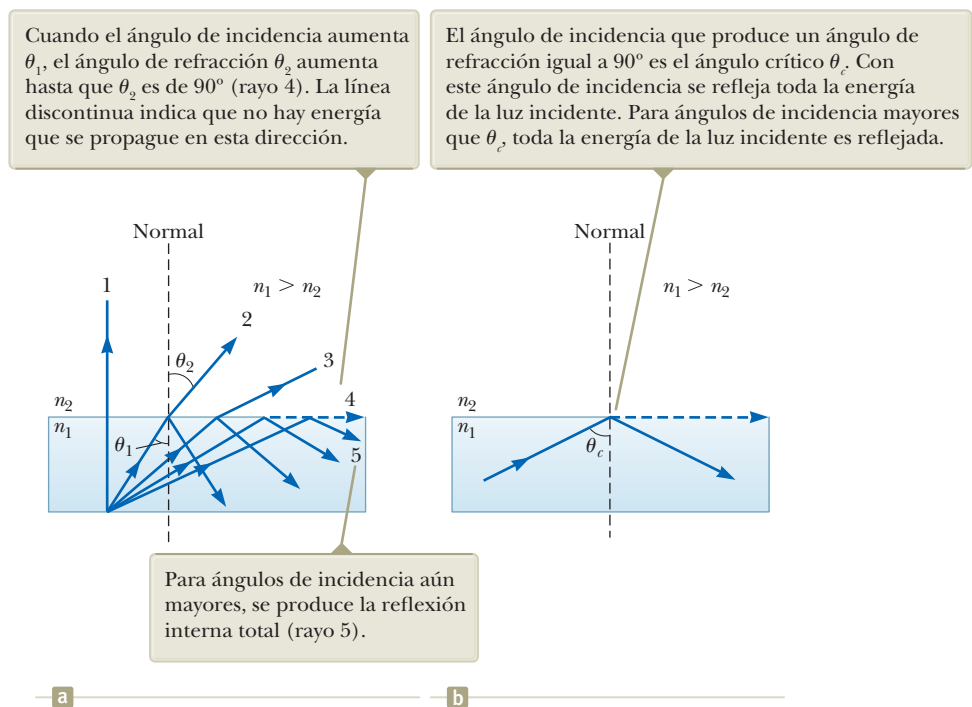
30 reflexiones antes de salir de la gota de agua. Como cada una de estas reflexiones comprende alguna pérdida de luz debido a la refracción de la gota de agua al salir, la intensidad de estos arcoíris de orden superior es pequeña en comparación con la intensidad del arcoíris primario.

Ahora estamos en condiciones de explicar todos los fenómenos ópticos que observa en la semblanza de apertura. Cuando mira su sombra sobre la hierba incrustada de rocío, está observando un *Heiligenschein* o aureola. Este efecto se debe a la retrorreflexión de las gotas de rocío esféricas. Cuando gira y ve el arcoíris, está viendo el fenómeno que acabamos de analizar en esta sección. Las bandas de colores pastel debajo del arcoíris se deben a la interferencia, que se analizarán en el capítulo 36. Al girar hacia el Sol, verá las áreas brillantes, alrededor de un ángulo de  $22^\circ$  a cada lado del Sol. Esto se llama *parhelio* y se debe a la refracción de la luz solar a través de cristales de hielo de forma hexagonal suspendidos en una orientación horizontal en la atmósfera. Si los cristales son más largos, estarán en una variedad de orientaciones, y verá un *halo* completo alrededor del Sol. Cuando mira la calle negra y caliente, ve charcos en la distancia. La luz solar absorbida calienta el aire sobre la superficie y cambia su índice de refracción. La luz que viene del cielo en un ángulo poco profundo hacia usted a lo largo de la calzada experimenta una refracción continua y, de hecho, *pierde* la calle, curvándose hacia arriba para entrar en su ojo. Como resultado, se ve una imagen del cielo en la calle, que lo hace parecer mojado. Este es un *espejismo* común.

- E XAMEN RÁPIDO 34.4** En fotografía, las lentes de una cámara usan refracción para formar una imagen en una superficie sensible a la luz. Lo ideal sería que todos los colores de la luz del objeto que es fotografiado refractaran en la misma cantidad. Entre los materiales que se muestran en la figura 34.20, ¿cual escogería usted para el lente de una cámara de un solo elemento? (a) Vidrio sin plomo, (b) acrílico, (c) cuarzo fundido, (d) imposible de determinar.

### 34.7 Reflexión interna total

Un efecto interesante denominado reflexión interna total se presenta al dirigir luz desde un medio con un índice de refracción determinado hacia otro que tenga un índice de refracción menor. Considere la figura 34.35a, en la cual un rayo de luz se



**Figura 34.25** (a) Los rayos se desplazan de un medio de índice de refracción  $n_1$  hacia un medio de índice de refracción  $n_2$ , donde  $n_2 < n_1$ . (b) El rayo 4 apunta hacia afuera.

desplaza en el medio 1 y se encuentra la frontera entre el medio 1 y el medio 2, donde  $n_1$  es mayor que  $n_2$ . En la figura los niveles 1 al 5 indican varias posibles direcciones del rayo, consistente con el modelo de una onda bajo refracción. Los rayos refractados están doblados alejándose de la normal porque  $n_1$  es mayor que  $n_2$ . En algún ángulo particular de incidencia  $\theta_c$ , denominado ángulo crítico, el rayo de luz refractado se mueve paralelo a la frontera, de modo que  $\theta_2 = 90^\circ$  (figura 34.25b). Para ángulos de incidencia mayores a  $\theta_c$ , el rayo se refleja por completo en la frontera, como lo muestra el rayo 5 de la figura 34.25a.

Use la ley de la refracción de Snell para hallar el ángulo crítico. Cuando  $\theta_1 = \theta_c$ ,  $\theta_2 = 90^\circ$  y la ecuación 34.7 da

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ = n_2$$

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{for } n_1 > n_2) \quad (34.9)$$

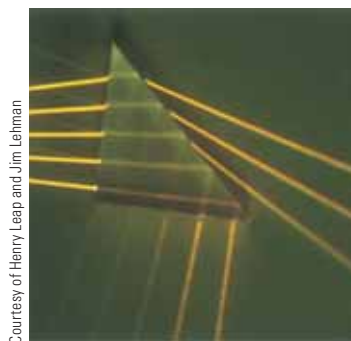
◀ Ángulo crítico para la reflexión total interna

Esta ecuación se usa solo cuando  $n_1$  es mayor que  $n_2$ . Es decir, la reflexión interna total se presenta sólo cuando la luz se dirige de un medio de índice de refracción conocido hacia un medio de índice de refracción menor. Si  $n_1$  fuera menor que  $n_2$ , la ecuación 34.9 daría  $\sin \theta_c > 1$ ; el cual es un resultado sin sentido porque el seno de un ángulo nunca puede ser mayor a la unidad.

El ángulo crítico para la reflexión interna total es pequeño cuando  $n_1$  es considerablemente mayor a  $n_2$ . Por ejemplo, el ángulo crítico para un diamante en el aire es de  $24^\circ$ . Cualquier rayo dentro del diamante que se aproxime a la superficie a un ángulo mayor de  $24^\circ$  se refleja por completo de regreso hacia el interior del cristal. Esta propiedad, combinada con un correcto tallado de caras, hace que el diamante brille. Los ángulos de las caras se cortan de modo que la luz sea “atrapada” dentro del cristal por medio de múltiples reflexiones internas. Estas dan a la luz una trayectoria larga en el medio, y se presenta una dispersión de colores considerable. En el momento en que la luz sale por la superficie superior del cristal, los rayos asociados con diferentes colores ya han sido ampliamente separados unos de otros.

El circonio cúbico también tiene un alto índice de refracción y se puede hacer que brille en forma muy parecida a un diamante legítimo. Si sospecha de una joya sumérgala en jarabe de maíz, la diferencia en  $n$  para el circonio cúbico y la del jarabe es pequeña, y por esa razón el ángulo crítico es mayor. Esto significa que más rayos escapan con mayor rapidez, y el resultado es que desaparece por completo el brillo. Un diamante verdadero no pierde todo su brillo cuando se sumerge en jarabe de maíz.

- E XAMEN RÁPIDO 34.5** En la figura 34.26, cinco rayos de luz entran a un prisma de vidrio desde la izquierda. (i) ¿Cuántos de estos rayos se someten a reflexión interna total en la superficie inclinada del prisma? (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4 y (e) 5. (ii) Suponga que el prisma de la figura 34.26 puede hacerse girar en el plano del papel. Para que los cinco rayos experimenten reflexión interna total desde la superficie inclinada, ¿el prisma debe girarse (a) en el sentido de las manecillas del reloj o (b) en sentido contrario al de las manecillas del reloj?



Courtesy of Henry Leap and Jim Lehman

**Figura 34.26** (Examen rápido 34.5) Cinco rayos de luz no paralelos entran a un prisma de vidrio desde la izquierda.

### Ejemplo 34.6 Vista desde el ojo de un pez

Encuentre el ángulo crítico para una frontera aire-agua. (El índice de refracción del agua es 1.33.)

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Estudie la figura 34.25 para entender el concepto de reflexión interna total y el significado del ángulo crítico.

continúa

34.6 continuación

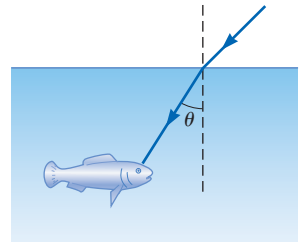
**Categorizar** Al usar los conceptos desarrollados en esta sección, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 34.9 para la interfaz aire-agua:  $\text{sen } \theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1.00}{1.33} = 0.752$

$$\theta_c = 48.8^\circ$$

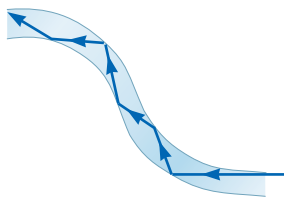
**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Si un pez en un estanque tranquilo mira hacia arriba, hacia la superficie del agua a diferentes ángulos en relación con la superficie, como en la figura 34.27? ¿Que ve?

**Respuesta** Ya que la trayectoria de un rayo de luz es reversible, la luz que viaja del medio 2 al medio 1 en la figura 34.25a sigue las trayectorias mostradas, pero en la dirección *opuesta*. Un pez que mira hacia arriba, hacia la superficie del agua como en la figura 34.27, puede ver fuera del agua si mira hacia la superficie a un ángulo menor que el ángulo crítico. Por tanto, cuando la línea de visión del pez forma un ángulo  $\theta = 40^\circ$  con la normal a la superficie, por ejemplo, la luz proveniente de arriba del agua llega al ojo del pez. A  $\theta = 48.8^\circ$ , el ángulo crítico para el agua, la luz tiene que pasar rozando la superficie del agua antes de refractarse hacia el ojo del pez; a este ángulo, el pez puede, en principio, ver toda la orilla del estanque. Con ángulos mayores que el ángulo crítico, la luz que alcanza al pez llega mediante una reflexión interna total en la superficie. Por tanto, a  $\theta = 60^\circ$ , el pez ve una reflexión del fondo del estanque.



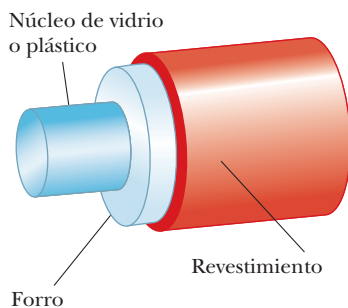
**Figura 34.27** (Ejemplo 34.6) **¿Qué pasaría si?** Un pez mira hacia arriba, hacia la superficie del agua.

**Fibras ópticas**



**Figura 34.28** La luz se desplaza en una varilla curva transparente por reflexiones internas múltiples.

Otra aplicación interesante de reflexión interna total es el uso de varillas de vidrio o plástico transparente para “transportar” luz de un lugar a otro. Como se indica en la figura 34.28, la luz es confinada a moverse dentro de una varilla, incluso alrededor de curvas, como resultado de reflexiones internas totales sucesivas. Este tubo de luz es flexible si se emplean fibras delgadas en lugar de varillas gruesas. Un tubo flexible de luz se denomina **fibra óptica**. Si se utiliza un cable de fibras paralelas para construir una línea de transmisión óptica, se pueden transmitir imágenes de un punto a otro. Una parte del Premio Nobel de Física de 2009 fue ganado por Charles K. Kao (n. 1933) por su descubrimiento sobre cómo transmitir señales a largas distancias a través de delgadas fibras de vidrio. Este descubrimiento condujo al desarrollo de una importante industria conocida como *óptica de fibras*.



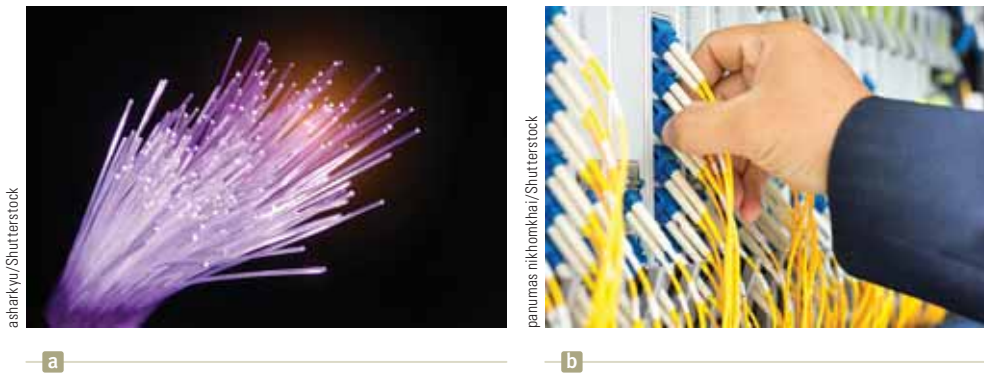
**Figura 34.29** Construcción de una fibra óptica. La luz se desplaza en el núcleo que está rodeado por un revestimiento y un forro protector.

Una fibra óptica práctica está formada por un núcleo transparente rodeado por un *revestimiento*, material que tiene menor índice de refracción que el núcleo. La combinación puede estar rodeada por un *forro* de plástico para evitar daños mecánicos. La figura 34.29 muestra una vista lateral de esta construcción. Debido a que el índice de refracción del revestimiento es menor que el del núcleo, la luz que se desplaza en este experimenta reflexión interna total si llega a la interfaz entre el núcleo y el revestimiento a un ángulo de incidencia mayor al ángulo crítico. En este caso, la luz “rebota” a lo largo del núcleo de la fibra óptica, perdiendo muy poco de su intensidad a medida que se desplaza.

Cualquier pérdida de intensidad en una fibra óptica se debe en esencia a reflexiones de los dos extremos y a la absorción por el material de la fibra. Los dispositivos de fibras ópticas son particularmente útiles para ver objetos en lugares inaccesibles. Por ejemplo, los médicos a veces usan estos dispositivos para examinar órganos internos del cuerpo o para realizar cirugía sin necesidad de grandes incisiones. Los cables de fibra óptica hoy en día sustituyen el alambre de cobre y los cables coaxiales para telecomunicaciones debido a que las fibras llevan un volumen mucho mayor de llamadas telefónicas u otras formas de comunicación de lo que pueden hacerlo los alambres eléctricos.

La figura 34.30a muestra un haz de fibras ópticas unidas dentro de un cable óptico que puede ser utilizado para transportar señales de comunicación. Muchas computadoras y otros equipos electrónicos tienen ahora puertos ópticos así como puertos eléctricos para la transferencia de información (figura 34.30b).





**Figura 34.30** (a) Hebras de fibra óptica de vidrio son utilizadas para llevar señales de voz, video y datos en redes de telecomunicaciones. (b) Un técnico trabaja en conexiones de fibra óptica en un sistema de red de computadoras.

## Resumen

### Definiciones

El **índice de refracción**  $n$  de un medio se define mediante la razón

$$n \equiv \frac{c}{v} \quad (34.3)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en un vacío y  $v$  es la velocidad de la luz en el medio.

### Conceptos y principios

En óptica geométrica se usa la **aproximación de rayo**, en donde una onda viaja a través de un medio uniforme en líneas rectas en la dirección de los rayos.

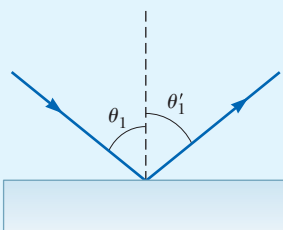
La **reflexión interna total** se presenta cuando la luz viaja de un medio con alto índice de refracción a uno con menor índice de refracción. El **ángulo crítico**  $\theta_c$  para el que se presenta la reflexión interna total en una interfaz está dado por

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{para } n_1 > n_2) \quad (34.9)$$

### Modelo de análisis para resolución de problemas

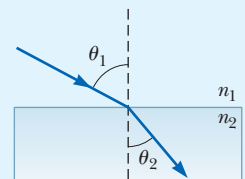
**Onda bajo reflexión.** La ley de **reflexión** afirma que, para un rayo de luz (u otro tipo de onda) incidente sobre una superficie uniforme, el **Ángulo de reflexión**  $\theta'_1$  es igual al **Ángulo de incidencia**  $\theta_1$ :

$$\theta'_1 = \theta_1 \quad (34.1)$$



**Onda bajo refracción.** Una onda que cruza una frontera conforme viaja del medio 1 al medio 2 se **refracta**. El **ángulo de refracción**  $\theta_2$  se relaciona con el **ángulo incidente**  $\theta_1$  mediante la relación

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \quad (34.2)$$




donde  $v_1$  y  $v_2$  son las magnitudes de velocidad de la onda en los medios 1 y 2, respectivamente. El rayo incidente, el rayo reflejado, el rayo refractado y la normal a la superficie se encuentran todos en el mismo plano. Para ondas de luz, la **ley de refracción de Snell** afirma que

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (34.7)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción en los dos medios.



# Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN**  
From Cengage

1. Analice la siguiente situación en su grupo: Tres láminas de plástico tienen índices de refracción desconocidos. Se colocan una sobre la otra de dos en dos y se dirige un rayo láser a las hojas desde arriba. En los tres casos, el rayo láser se ajusta de modo que golpee la interfaz entre la lámina superior y la inferior (no entre el aire y la lámina superior) en un ángulo de  $26.5^\circ$  con la normal. (i) La hoja 1 se coloca encima de la hoja 2. El haz refractado dentro de la hoja 2 forma un ángulo de  $31.7^\circ$  con la normal. (ii) La lámina 3 se coloca encima de la lámina 2. El haz refractado dentro de la lámina 2 forma un ángulo de  $36.7^\circ$  con la normal. (iii) La lámina 1 se coloca encima de la lámina 3. El haz refractado dentro de la lámina 3 forma un ángulo de  $23.1^\circ$  con la normal. Ahora genere una respuesta de consenso en su grupo: ¿Tiene suficiente información para encontrar el índice de refracción para cada hoja?
2. **ACTIVIDAD** Su grupo ha sido asignado para aprender sobre Claudio Ptolomeo (100-170) y analizar sus primeros resultados sobre la refracción de la luz. En su libro *Óptica*, que

sobrevive en una traducción árabe y una traducción latina del árabe, Ptolomeo incluye una tabla de ángulos de incidencia y ángulos refractados para la luz que entra al agua. Este es el conjunto de datos más antiguos que sobreviven de este tipo. Existe cierta controversia sobre si los datos realmente son experimentales o si se generan matemáticamente, pero de cualquier forma, tener datos refractivos del siglo II es notable. Los datos de Ptolomeo se muestran en la siguiente tabla.

Ángulo de incidencia ( $^\circ$ )	Ángulo de refracción ( $^\circ$ )
10.0	8
20.0	15.5
30.0	22.5
40.0	29
50.0	35
60.0	40.5
70.0	45.5
80.0	50

¿Cuál es el índice de refracción del agua según los datos de Ptolomeo?

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN**  
From Cengage

### SECCIÓN 34.1 La naturaleza de la luz

1. En un experimento para medir la rapidez de la luz usando el aparato de Fizeau (véase la figura 34.2), la distancia entre la fuente de luz y un espejo fue de 11.45 km y la rueda tenía 720 ranuras. El experimento determinó el valor de  $c$  en  $2.998 \times 10^8$  m/s cuando la luz emitida pasa a través de una ranura y luego regresa a través de otra. Calcule la rapidez angular mínima de la rueda para este experimento.
2. Los astronautas del *Apollo 11* colocaron un panel de retroreflectores de esquinas cúbicas eficientes en la superficie de la Luna (figura 34.8a). La velocidad de la luz se deduce al medir el intervalo de tiempo necesario para que un láser se dirija desde la Tierra, se refleje en el panel y regrese a la Tierra. Suponga que la medición de este intervalo es 2.51 s a la estación cuando la Luna está en su cenit. Considere la distancia de centro a centro de la Tierra a la Luna en  $3.84 \times 10^8$  m/s. (a) ¿Cuál es la velocidad medida de la luz? (b) Explique si es necesario tomar en cuenta los tamaños de la Tierra y de la Luna en sus cálculos.
3. Como resultado de sus observaciones, Roemer concluyó que los eclipses de Io por Júpiter se retardaban 22 minutos, durante un periodo de seis meses, a medida que la Tierra se movía del punto en su órbita en donde está más cerca de Júpiter al punto diametralmente opuesto donde está más lejos. Con  $1.50 \times 10^8$  km como el radio promedio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, calcule la velocidad de la luz a partir de estos datos.

### SECCIÓN 34.3 Análisis de modelo: La onda bajo reflexión

4. Un salón de baile se construye sin columnas y con un plafón horizontal a 7.20 m sobre el piso. Un espejo plano se sujeta contra una sección del plafón. Después de un temblor, el espejo sigue en su lugar y no está roto. Un ingeniero hace una rápida revisión del plafón para ver si está hundido, dirigiendo un rayo láser vertical en el espejo y observando su reflexión en el piso. (a) Demuestre que si el espejo gira para formar un ángulo  $\phi$  con la horizontal, la normal al espejo forma un ángulo  $\phi$  con la vertical. (b) Demuestre que la luz láser reflejada forma un ángulo de  $2\phi$  con la vertical. (c) Si la luz láser reflejada forma un punto en el piso a 1.40 cm de distancia del punto vertical debajo del láser, encuentre el ángulo  $\phi$ .
5. Está trabajando para una empresa de investigación óptica durante un receso de verano. Parte del aparato en un experimento particular se muestra en la figura 34.7b. De hecho, el experimentador usó este libro de texto para configurar esta parte del experimento, y también usó el resultado de la sección **¿Qué pasaría si?** para determinar el cambio angular en la dirección del haz de luz:

$$\beta = 360^\circ - 2\phi \quad (1)$$

El experimentador se queja constantemente de que el dispositivo de medición para determinar el ángulo  $\phi$  en el interior de los espejos se interpone constantemente en el camino del haz de luz y le dificulta la vida. Dibuja rápidamente la figura P34.5 y luego dice: "Entonces, ¿por qué no usa el dispositivo de medición para medir el ángulo  $\delta$  fuera del espejo, y entonces su dispositivo no se interpondrá en el camino de la luz?"



El experimentador, quien nunca ha pensado en esto, intenta salvar la cara y le dice: "Bueno, sabelotodo, ¡cuéntame cómo el ángulo  $\beta$  depende del ángulo  $\delta$ !". Responda rápidamente.

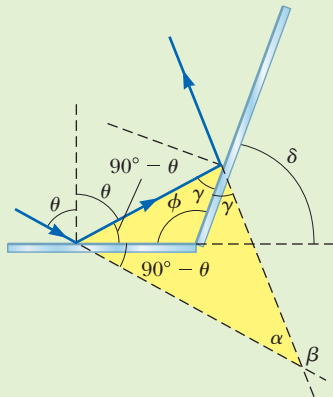


Figura P34.5

6. Las superficies reflectantes de dos espejos planos de intersección se encuentran en un ángulo  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) como se muestra en la figura P34.6. Para un rayo que incide sobre el espejo horizontal, muestran que el rayo emergente se cruzará el rayo incidente en un ángulo  $\beta = 180^\circ - 2\theta$ .

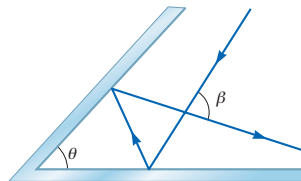


Figura P34.6

7. Los dos espejos que se ilustran en la figura P34.7 forman un ángulo recto. El rayo de luz en el plano vertical indicado por las rectas punteadas incide en el espejo 1, como se muestra. (a) Determine la distancia que el rayo reflejado recorre antes de incidir en el espejo 2. (b) ¿En qué dirección se mueve el rayo de luz después de ser reflejado desde el espejo 2?

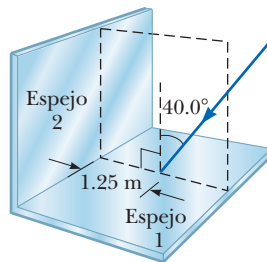


Figura P34.7

8. Dos espejos rectangulares planos, ambos perpendiculares a una hoja de papel horizontal, se colocan borde a borde, con sus superficies reflectoras perpendiculares entre sí. (a) Un rayo de luz en el plano del papel incide en uno de los espejos aun ángulo arbitrario de incidencia  $\theta_1$ . Demuestre que la dirección final del rayo, después de la reflexión desde ambos espejos, es opuesta a su dirección inicial. (b) **¿Qué pasaría si?** El papel es sustituido por un tercer espejo plano que toca los bordes de los otros dos y se coloca perpendicular a ambos creando un retroreflector de esquina de cubo (figura 34.8a). Un rayo de luz incide desde cualquier dirección dentro del octante del espacio limitado por las superficies reflectoras. Demuestre que el rayo se reflejará una vez desde cada espejo y que su dirección final será opuesta a su dirección original. Los astronautas del *Apollo 11* colocaron un panel de retrorreflectores de esquina de cubo en la Luna. El análisis de los datos de sincronización tomados con ese panel revela que el radio de la órbita de la Luna está aumentando en una proporción de 3.8 cm/año, dado que pierde energía cinética debido a la fricción de las mareas.

SECCIÓN 34.4 Análisis de modelo: La onda bajo refracción

Notas: Usted puede buscar índices de refracción en la tabla 34.1. A menos que se indique lo contrario, suponga que el medio que circunda a una pieza de material es aire con  $n = 1.000\ 293$ .

9. Determine la velocidad de la luz en (a) cristal de roca, (b) agua y (c) circonio cúbico.
10. Un rayo de luz incide sobre un bloque plano de vidrio ( $n = 1.50$ ) de 2.00 cm de grueso en un ángulo de  $30.0^\circ$  con la normal. Trace el rayo de luz a través del vidrio y encuentre los ángulos de incidencia y refracción en cada superficie.

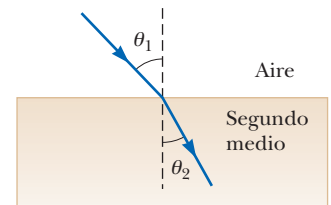


Figura P34.11

11. Un rayo de luz viaja de aire en otro medio, formando un ángulo  $\theta_1 = 45.0^\circ$  con la normal como en la figura P34.11. Encuentre el ángulo de refracción  $\theta_2$  si el segundo medio es (a) cuarzo fundido, (b) disulfuro de carbono y (c) agua.

12. Una onda sonora plana en aire a  $20^\circ\text{C}$ , con longitud de  $589\text{ mm}$ , incide sobre una superficie uniforme de agua a  $25^\circ\text{C}$  a un ángulo de incidencia de  $13.0^\circ$ . Determine (a) el ángulo de refracción para la onda sonora y (b) la longitud de onda del sonido en el agua. Un angosto rayo de luz amarilla de sodio, con longitud de onda de  $589\text{ nm}$  en el vacío, incide desde el aire sobre una superficie uniforme de agua a un ángulo de incidencia de  $13.0^\circ$ . Determine (c) el ángulo de refracción y (d) la longitud de onda de la luz en el agua. (e) Compare y contraste el comportamiento del sonido en este problema.

13. Un haz láser incide en un ángulo de  $30.0^\circ$  respecto a la vertical sobre una solución de jarabe de maíz en agua. El haz se refracta a  $19.24^\circ$  respecto a la vertical. (a) ¿Cuál es el índice de refracción de la solución de jarabe de maíz? Suponga que la luz es roja, con longitudes de onda de vacío  $632.8\text{ nm}$ . Encuentre su (b) longitud de onda, (c) la frecuencia, y (d) rapidez en la solución.

14. Un rayo de luz incide en el punto medio de una de las caras de un prisma de vidrio equiangular ( $60^\circ - 60^\circ - 60^\circ$ ) ( $n = 1.5$ ) con un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ . (a) Trace la trayectoria del rayo de luz a través del vidrio y encuentre los ángulos de incidencia y refracción en cada superficie. (b) Si una pequeña fracción de la luz se refleja en cada superficie, ¿cuáles son los ángulos de reflexión en las superficies?

15. Cuando mira por una ventana, ¿cuánto se tarda la luz que ve, en pasar por vidrio en lugar de aire? Haga una estimación del orden de magnitud con base en los datos que usted especificue. ¿Cuántas longitudes de onda se retrasa?

16. La luz pasa del aire al cristal de roca en un ángulo de incidencia distinto de cero. (a) ¿Es posible que la componente de la velocidad perpendicular a la interfaz se mantenga constante? Explique su respuesta. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿La componente de velocidad paralela a la interfaz puede permanecer constante durante la refracción? Explique su respuesta.

17. Acaba de instalar un baño nuevo en su hogar. Las puertas de la ducha tienen vidrio esmerilado para brindar privacidad a la persona que usa la ducha. La superficie esmerilada se encuentra en el exterior de la puerta de la ducha, mirando

hacia el resto del baño. El esmerilado se realiza mediante grabado ácido de la superficie, de modo que la luz incidente en la superficie rugosa se disemine en todas las direcciones. Orgulloso de su nuevo baño, toma una foto con su teléfono inteligente. Usted nota en la fotografía que puede ver un reflejo del flash en las puertas de la ducha y el reflejo está rodeado por un halo de luz. Curioso, enciende un puntero láser y lo apunta a la puerta de la ducha. Al observar de cerca el reflejo, nuevamente se ve un halo que consiste en un área oscura que rodea el reflejo del puntero y luego un área de brillo fuera de este anillo oscuro. Toma un micrómetro y una regla y mide el grosor del cristal para que sea de 6.35 mm y el radio interior del halo brillante sea de 10.7 mm. A partir de estas medidas, determine el índice de refracción del vidrio.

18. Un prisma triangular de vidrio con ángulo en el ápice de  $60.0^\circ$  tiene un índice de refracción de 1.50. (a) Demuestre que si su ángulo de incidencia sobre la primera superficie es  $\theta_1 = 48.6^\circ$ , la luz pasará simétricamente por el prisma, como se muestra en la figura 34.16. (b) Encuentre el ángulo de desviación  $\delta_{\min}$  para  $\theta_1 = 48.6^\circ$ . (c) **¿Qué pasaría si?** Encuentre el ángulo de desviación si el ángulo de incidencia sobre la primera superficie es de  $45.6^\circ$ . (d) Encuentre el ángulo de desviación si  $\theta_1 = 51.6^\circ$ .

19. Está trabajando en el centro de natación de su universidad. **CE** El departamento de atletismo decide que le gustaría instalar un asta de bandera de 10.0 m de altura en el extremo sur de una de las piscinas al aire libre, que se encuentra a lo largo de un eje norte-sur. La piscina tiene 3.00 m de profundidad y el asta de bandera debe instalarse a 4.00 m del borde sur de la piscina, a mitad de camino a lo largo del borde sur. (a) Su supervisor conoce su experiencia en física y le pide que determine la distancia de la sombra de la punta del asta de bandera sobre el fondo de la piscina desde la pared sur de la piscina en un día de verano cuando el Sol aparece directamente al sur y en un ángulo de  $65.0^\circ$  sobre el horizonte. (b) Su supervisor también pregunta si hay algún momento durante el año en que el asta de bandera no proyecte una sombra a lo largo del fondo de la piscina cuando el Sol esté en dirección sur. Lo más alto que llega el Sol en el cielo en esta ubicación es  $68.5^\circ$  en el solsticio de verano.

20. Una persona que busca en un recipiente vacío es capaz de ver el extremo más alejado de la parte inferior del contenedor como se muestra en la figura P34.20a. La altura del contenedor es  $h$  y su anchura es  $d$ . Cuando el recipiente está completamente lleno de un fluido con índice de refracción  $n$  y vista desde el mismo ángulo, la persona puede ver el centro de una moneda en el centro de la parte inferior del recipiente como se muestra en la figura P34.20b. (a) Demuestre que la razón  $h/d$  está dada por

$$\frac{h}{d} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{4 - n^2}}$$

- (b) Suponga que el contenedor tiene una anchura de 8.00 cm y está lleno de agua, use la expresión anterior para encontrar la altura del recipiente. (c) ¿Para qué rango de valores

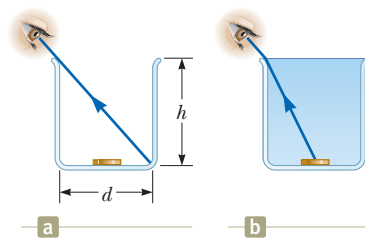


Figura P34.20

de  $n$  la moneda no será visible para cualquier valor de  $h$  y  $d$ ?

21. La figura P34.21 muestra un rayo de luz incidente en una serie de placas que tienen diferentes índices de refracción, donde  $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$ . Observe que la trayectoria del rayo se inclina hacia la normal. Si la variación en  $n$  fuera continua, la ruta podría formar una curva suave. Use esta idea y un diagrama de rayos para explicar por qué se puede ver el sol al atardecer después de que ha caído por debajo del horizonte.

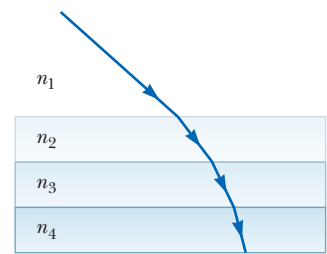


Figura P34.21

22. **PG** Un submarino está a 300 m de distancia de la orilla de un lago de agua dulce y 100 metros por debajo de la superficie del agua. Desde el submarino se envía un rayo láser de tal manera que el haz incide en la superficie del agua a 210 m de la costa. Hay un edificio en la orilla y el haz láser incide en un blanco en la parte superior del edificio. Se desea encontrar la altura del objetivo sobre el nivel del mar. (a) Dibuje un diagrama de la situación, identificando los dos triángulos que son importantes en la búsqueda de la solución. (b) Encuentre el ángulo de incidencia del rayo golpeando la interfaz agua-aire. (c) Encuentre el ángulo de refracción. (d) ¿Qué ángulo forma el rayo refractado con la horizontal? (e) Determine la altura del objetivo sobre el nivel del mar.

23. **S** Un haz de luz se refleja y se refracta en la superficie entre el aire y el vidrio como se muestra en la figura P34.23. Si el índice de refracción del vidrio es  $n_g$ , encuentre el ángulo de incidencia  $\theta_1$  en el aire, tal que el rayo reflejado y el rayo refractado sean perpendiculares entre sí.

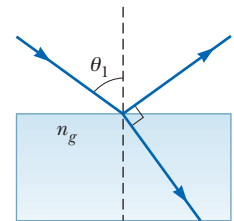


Figura P34.23

**SECCIÓN 34.6 Dispersión**

24. Un haz de luz que contiene longitudes de onda roja y violeta incide sobre una losa de cuarzo en un ángulo de incidencia de  $50.0^\circ$ . El índice de refracción de cuarzo es de 1.455 a 600 nm para la luz roja y de 1.468 a 410 nm para la luz violeta. Encuentre la dispersión de la losa, que se define como la diferencia entre los ángulos de refracción para las dos longitudes de onda.

25. **S** El índice de refracción para luz violeta en vidrio de piedra sílice es  $n_v$  y el de luz roja es  $n_r$ . ¿Cuál es la dispersión angular de luz visible que pasa por un prisma de ángulo en la punta  $\Phi$  si el ángulo de incidencia es de  $\theta$ ? Véase la figura P34.25.

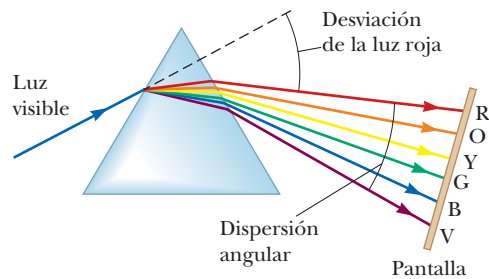


Figura P34.25



26. La velocidad de una ola de agua se describe por  $v = \sqrt{gd}$ , donde  $d$  es la profundidad del agua, que se supone pequeña en comparación con la longitud de la ola. Ya que cambia su velocidad, las olas se refractan cuando se mueven en una región de profundidad diferente. (a) Trace el mapa de la playa de un océano en el lado oriente de la masa de tierra. Muestre las líneas de contorno de profundidad constante bajo el agua, si se trata de una pendiente razonablemente uniforme. (b) Suponga que las olas se aproximan a la costa desde una tormenta situada a lo lejos hacia el norte-noreste. Demuestre que las olas se moverán en forma casi perpendicular a la orilla cuando lleguen a la playa. (c) Trace un mapa de una costa con bahías y puntas alternadas, como se sugiere en la figura P34.26. Calcule de nuevo la forma de las líneas de contorno de profundidad constante. (d) Suponga olas que se aproximan a la costa, que llevan energía con densidad uniforme a lo largo de frentes de onda originalmente rectos. Demuestre que la energía que llega a la orilla se concentra en las puntas y tiene menos intensidad en las bahías.



Figura P34.26

**SECCIÓN 34.7 Reflexión interna total**

27. Para una luz de 589 nm, calcule el ángulo crítico para los siguientes materiales rodeados por aire: (a) circonio cúbico, (b) cristal de roca y (c) hielo.

28. Considere un rayo de luz que viaja entre el aire y un corte diamante en la forma mostrada en la figura P34.28. (a) Encuentre el ángulo crítico para la reflexión interna total de la luz incidente en el diamante en la interfaz entre el diamante y el aire exterior. (b) Considere que el rayo de luz incide normalmente en la superficie superior del diamante, como se muestra en la figura P34.28. Demuestre que la luz que viaja hacia el punto  $P$  en el diamante está totalmente reflejada. **¿Qué pasaría si?** Suponga que el diamante se sumerge en agua. (c) ¿Cuál es el ángulo crítico en la interfaz diamante-agua? (d) Cuando el diamante se sumerge en agua, ¿el rayo de luz que entra en el superficie superior de la figura P34.28 se somete a una reflexión interna total en  $P$ ? Explique. (e) Si el rayo de luz que entra en el diamante sigue siendo vertical como se muestra en la figura P34.28, ¿en qué dirección debe rotarse el diamante en el agua alrededor de un eje perpendicular a la página a través de  $O$  para que la luz salga del diamante en  $P$ ? (f) ¿Con qué ángulo de rotación en el inciso (e) la luz saldrá primero del diamante en el punto  $P$ ?

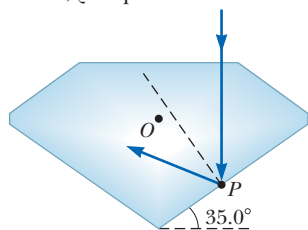


Figura P34.28

29. Una habitación, en la cual la velocidad del sonido es 343 m/s, contiene aire. Las paredes están hechas de concreto, en el que la velocidad del sonido es 1 850 m/s. (a) Encuentre el ángulo crítico para la reflexión interna total del sonido en la frontera entre el concreto y el aire. (b) ¿En qué medio debe moverse el sonido para someterse a una reflexión interna total? (c) “Una pared de concreto desnudo es un espejo altamente eficiente para el sonido”. Dé argumentos a favor o en contra de este enunciado.

30. Hacia 1968, Richard A. Thorud, un ingeniero de la Toro Company inventó un medidor de gasolina para motores pequeños, que se muestra en forma de diagrama en la figura P34.30. El medidor no tiene partes móviles. Está formado por una placa plana de material plástico transparente que se ajusta verticalmente en una ranura en el tapón del tanque de gasolina. Ninguna parte del plástico tiene recubrimiento reflector. El plástico sobresale de la parte superior horizontal, hacia abajo, casi al fondo del tanque opaco. Su borde inferior está cortado con facetas que forman ángulos de 45° con la horizontal. El operador de una podadora de jardín observa desde arriba una frontera entre brillante y oscuro en el medidor. La ubicación de la frontera, de un lado a otro del ancho del plástico, indica la cantidad de gasolina del tanque. (a) Explique cómo funciona el medidor. (b) Explique los requisitos del diseño, si los hay, para el índice de refracción del plástico.

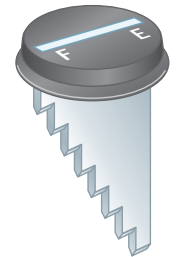


Figura P34.30

31. Una fibra óptica tiene un índice de refracción  $n$  y un diámetro  $d$ , y está rodeada por el vacío. Se envía luz por la fibra a lo largo de su eje, como se ve en la figura P34.31. (a) Encuentre el mínimo radio exterior  $R_{min}$  permitido para una curva en la fibra si no ha de escapar luz. (b) **¿Qué pasaría si?** El resultado del inciso (a), pronostica un comportamiento razonable cuando  $d$  se aproxima a cero. ¿Este comportamiento es razonable? Explique. (c) ¿cuando  $n$  aumenta?, (d) ¿cuando  $n$  se aproxima a 1? (c) Evalúe  $R_{min}$  si el diámetro de la fibra es 100  $\mu\text{m}$  y su índice de refracción es 1.40.

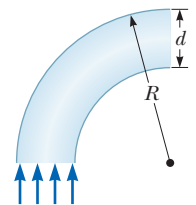


Figura P34.31

**PROBLEMAS ADICIONALES**

32. Considere una interface horizontal entre el aire por encima de un vidrio de índice 1.55. (a) Trace un rayo de luz que incide desde el aire a un ángulo de incidencia de 30.0°. Determine los ángulos de los rayos reflejado y refractado e indíquelos en el diagrama. (b) **¿Qué pasaría si?** Ahora suponga que el rayo de luz incide desde el vidrio a un ángulo de incidencia de 30.0°. Determine los ángulos de los rayos reflejado y refractado y señale los tres rayos en un nuevo diagrama. (c) Para rayos que inciden desde el aire sobre la superficie de aire-vidrio, determine y tabule los ángulos de reflexión y refracción para todos los ángulos de incidencia a intervalos de 10.0° desde 0° hasta 90.0°. (d) Haga lo mismo para rayos de luz que suben a la interface a través del vidrio.

33. **AMT** ¿Cuántas veces es reflejado el haz incidente que se muestra en la figura P34.33 (página 922) por cada uno de los espejos paralelos?



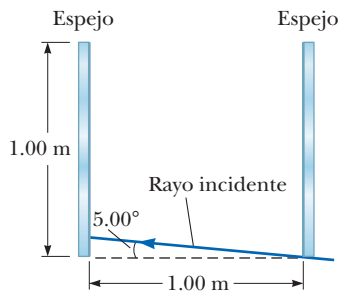


Figura P34.33

34. Considere un rayo de luz que entra desde la izquierda en un prisma de ángulo de vértice  $\Phi$ , como se muestra en la figura P34.34. Se muestran dos ángulos de incidencia,  $\theta_1$  y  $\theta_3$ , así como dos ángulos de refracción,  $\theta_2$  y  $\theta_4$ . Muestre que  $\Phi = \theta_2 + \theta_3$ .

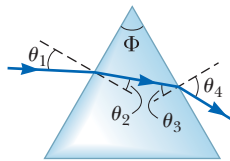


Figura P34.34

35. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Desde el fondo de un lago de agua dulce en calma, un buzo ve el Sol en un ángulo aparente de  $38.0^\circ$  por encima de la horizontal.
36. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un haz láser golpea un extremo de una losa de material de longitud  $L = 42.0$  cm y espesor  $t = 3.10$  mm como se muestra en la figura P34.36 (no a escala). El haz entra en el material por el centro del extremo izquierdo, golpeándolo con un ángulo de incidencia de  $\theta = 50.0^\circ$ . El índice de refracción de la losa es  $n = 1.48$ . La luz hace 85 reflexiones internas desde la parte superior y la parte inferior de la losa antes de salir por el otro extremo.

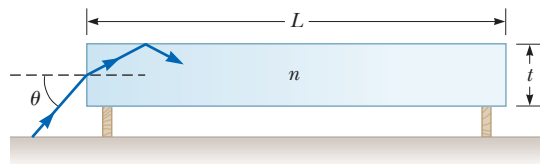


Figura P34.36

37. Cuando la luz incide normalmente en la interfaz entre dos medios ópticos transparentes, la intensidad de la luz reflejada está dada por la expresión

$$S'_1 = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 S_1$$

En esta ecuación,  $S_1$  representa la magnitud media del vector de Poynting en la luz incidente (la intensidad incidente),  $S'_1$  es la intensidad reflejada, y  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción de los dos medios. (a) ¿Qué fracción de la intensidad incidente de luz reflejada de 589-nm incide normalmente en una interfaz entre el aire y el vidrio corona? (b) ¿Tiene importancia en el inciso (a) si la luz está en el aire o en el cristal cuando incide en la interfaz?

38. Consulte el problema 37 para la descripción de la intensidad de la luz incidente que se refleja normalmente en una interfaz entre dos medios transparentes. (a) Para luz normalmente incidente en una interfaz entre el vacío y un medio transparente de índice  $n$ , demuestre que la intensidad  $S_2$  de la luz transmitida viene dada por  $S_2/S_1 = 4n/(n+1)^2$ . (b) La luz viaja perpendicularmente a través de una losa de diamante, rodeada de aire, con superficies paralelas de entrada

y salida. Aplique la fracción de la transmisión en el inciso (a) para encontrar la transmisión global aproximada a través de la placa de diamante, en forma de porcentaje. No haga caso de la luz reflejada de ida y vuelta dentro de la losa.

39. Un rayo de luz entra a la atmósfera de la Tierra y desciende verticalmente a la superficie que está una distancia  $h = 100$  km hacia abajo. El índice de refracción donde la luz entra a la atmósfera es de 1.00 y aumenta linealmente con la distancia a la superficie del planeta, donde tiene un valor de  $n = 1.000\ 293$  en la superficie de la Tierra. (a) ¿Cuánto tarda el rayo en recorrer esta trayectoria? (b) ¿En qué porcentaje es mayor el intervalo que el necesario en la ausencia de la atmósfera de la Tierra?

40. Un rayo de luz entra a la atmósfera de un planeta y desciende verticalmente a la superficie que está una distancia  $h$  hacia abajo. El índice de refracción donde la luz entra a la atmósfera es de 1.00 y aumenta linealmente con la distancia a la superficie, donde tiene un valor de  $n$ . (a) ¿Cuánto tarda el rayo en recorrer esta trayectoria? (b) ¿En qué porcentaje es mayor el intervalo que el necesario en la ausencia de una atmósfera?

41. Un rayo de luz de 589 nm de longitud de onda incide a un ángulo  $\theta$  sobre la superficie superior de un bloque de poliestireno, como se observa en la figura P34.41. (a) Encuentre el valor máximo de  $\theta$  para el cual el rayo refractado experimenta reflexión interna total en el punto P sobre la cara vertical izquierda del bloque. ¿Qué pasaría si? Repita el cálculo para el caso en que el bloque de poliestireno se encuentre inmerso en (b) agua y (c) disulfuro de carbono. Se requiere que explique sus respuestas.

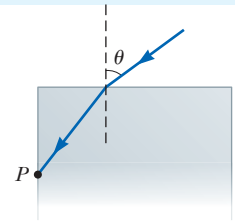


Figura P34.41

42. Una técnica para medir el ángulo de punta de un prisma se muestra en la figura P34.42. Dos rayos paralelos de luz se dirigen hacia la punta del prisma de manera que los rayos se reflejan en las caras opuestas del prisma. Se puede medir la separación  $\gamma$  angular de los dos rayos reflejados. Demuestre que  $\Phi = 1/2 \gamma$ .

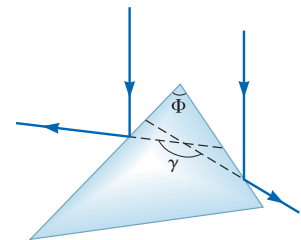


Figura P34.42

43. Un material que tiene un índice de refracción  $n$  está rodeado por vacío y tiene la forma de un cuarto de círculo de radio  $R$  (figura P34.43). Un rayo de luz paralelo a la base del material incide desde la izquierda a una distancia  $L$  por encima de la base y emerge desde el material a un ángulo  $\theta$ . Determine una expresión para  $\theta$  en términos de  $n$ ,  $R$  y  $L$ .

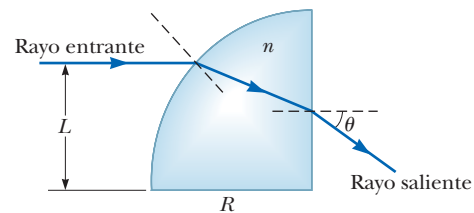


Figura P34.43

44. **Problema de repaso.** Con frecuencia, un espejo se “platea” con aluminio. Al ajustar el grosor de la película metálica, uno puede convertir una hoja de vidrio en un espejo que refleje cualquier cosa entre, por decir, 3% y 98% de la luz incidente, y transmita el resto. Pruebe que es imposible construir un “espejo de una sola vía” que reflejaría 90% de las ondas electromagnéticas incidentes de un lado y reflejaría 10% de las incidentes del otro lado. *Sugerencia:* use el enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica.
45. La figura P34.45 muestra la trayectoria de un haz de luz a través de varias losas con diferentes índices de refracción. (a) Si  $\theta_1 = 30.0^\circ$ , ¿cuál es el ángulo  $\theta_2$  del haz emergente? (b) ¿Cómo debe ser el ángulo incidente  $\theta_1$  para tener reflexión interna total en la superficie entre el medio con  $n = 1.20$  y el medio con  $n = 1.00$ ?

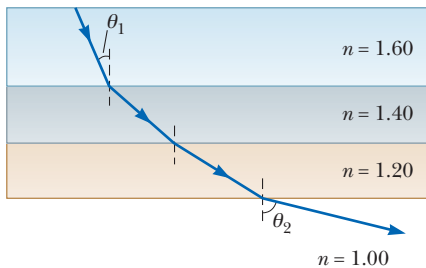


Figura P34.45

46. **CIC** Conforme la luz solar entra a la atmósfera de la Tierra, cambia de dirección debido a la pequeña diferencia entre las rapidez de la luz en el vacío y en el aire. La duración de un día óptico se define como el intervalo de tiempo entre el instante en que la parte superior del Sol naciente es apenas visible sobre el horizonte y el instante en que la parte superior del Sol apenas desaparece bajo el plano horizontal. La duración del día *geométrico* se define como el intervalo de tiempo entre el instante en que una línea matemáticamente recta entre un observador y la parte superior del Sol apenas clarea el horizonte y el instante en que esta línea apenas se hunde bajo el horizonte. (a) Explique cuál es más largo, un día óptico o un día geométrico. (b) Encuentre la diferencia entre estos dos intervalos de tiempo. Modele la atmósfera de la Tierra como uniforme, con índice de refracción 1.000 293, una superficie superior definida con precisión y 8 614 m de profundidad. Suponga que el observador está en el ecuador de la Tierra de modo que la trayectoria aparente del Sol naciente y poniente es perpendicular al horizonte.
47. Un rayo de luz pasa de aire a agua. Para que su ángulo de desviación  $\delta = |\theta_1 - \theta_2|$  sea de  $10.0^\circ$ , ¿cuál debe ser su ángulo de incidencia?

48. **CE** En su trabajo para una empresa de investigación óptica, se le pide que considere el prisma con forma triangular que se muestra en la figura P34.48. La luz ingresa por el lado inclinado izquierdo del prisma desde el aire con una incidencia normal, se refleja desde la superficie superior mediante una reflexión interna total y luego se refracta desde la superficie inclinada derecha. (a) Su supervisor le pide que determine el rango de ángulos sobre los cuales la luz visible sale de la superficie inclinada derecha debido a la dispersión en el material. (b) Un prisma físico real de la forma de la figura P34.48 está hecho a partir de circonio cúbico con  $\alpha = 60^\circ$  y  $\gamma = 30^\circ$ , y no funciona según lo planeado. Explique a su supervisor por qué no.

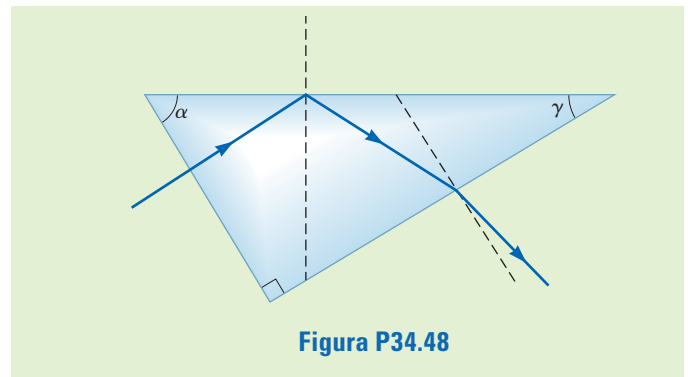


Figura P34.48

49. **CIC** El método de A. H. Pfund para medir el índice de refracción de un vidrio se ilustra en la figura P34.49. Una de las caras de una placa de grosor  $t$  se pinta de blanco, y un pequeño agujero perforado transparente en el punto  $P$  sirve como fuente de rayos divergentes cuando la placa se ilumina desde abajo. El rayo  $PBB'$  incide en la superficie transparente con ángulo crítico y se refleja en su totalidad, así como los rayos  $PCC'$ . Los rayos  $PAA'$  emergen de la superficie transparente. En la superficie pintada aparece un círculo oscuro de diámetro  $d$ , rodeado por una región iluminada, o halo. (a) Deduzca una ecuación para hallar  $n$  en términos de las cantidades medidas  $d$  y  $t$ . (b) ¿Cuál es el diámetro del círculo oscuro si  $n = 1.52$  para una placa de 0.600 cm de espesor? (c) Si se usa luz blanca, la dispersión ocasiona que el ángulo crítico dependa del color. El borde interior del halo blanco, ¿está teñido de luz roja o de luz violeta? Explique.

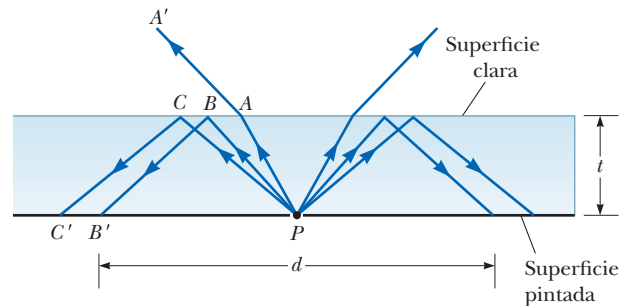


Figura P34.49

50. **S** La figura P34.50 muestra una vista superior de un cerco cuadrado. Las superficies interiores son espejos planos. Un rayo de luz entra por un pequeño agujero en el centro de un espejo. (a) ¿A qué ángulo  $\theta$  debe entrar el rayo para salir por el agujero después de ser reflejado una vez por cada uno de los otros tres espejos? (b) ¿Qué pasaría si? ¿Existen otros valores de  $\theta$  en los cuales el rayo pueda salir después de reflexiones múltiples? Si es así, dibuje las trayectorias de uno de los rayos.

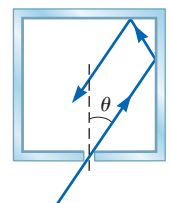


Figura P34.50

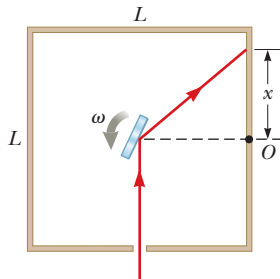
51. Las paredes de la celda de una prisión están perpendiculares a las cuatro direcciones cardinales de la brújula. En el primer día de primavera, la luz del sol naciente entra a una ventana rectangular en la pared oriente. La luz recorre 2.37 m horizontalmente para aparecer en forma perpendicular en la pared opuesta a la ventana. Un joven prisionero observa el área iluminada que se mueve en esta pared poniente. (a) ¿Con qué rapidez se mueve el rectángulo iluminado? (b) El prisionero sostiene un pequeño espejo cuadrado contrala pared en una esquina del rectángulo de luz. El espejo refleja

luz directamente hacia su origen a un lugar en la pared oriente muy cerca de la ventana. ¿Con qué rapidez se mueve el cuadrado de luz de menor tamaño en esa pared? (c) Visto desde una latitud de  $40.0^\circ$  al norte, el Sol naciente se traslada en el cielo a lo largo de una línea que forma un ángulo de  $50.0^\circ$  con el horizonte del sureste. ¿En qué dirección se mueve el rectángulo de luz en la pared poniente de la celda del prisionero? (d) ¿En qué dirección se mueve el cuadrado de luz más pequeño en la pared oriente?

**PROBLEMAS DE DESAFÍO**

**52.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? La distancia perpendicular de una lámpara a partir de un gran espejo plano es el doble de la distancia perpendicular de una persona al espejo. La luz de la lámpara llega a la persona por dos trayectorias: (1) se desplaza hacia el espejo y se refleja desde el espejo a la persona, y (2) que viaja directamente a la persona sin que se refleje del espejo. La distancia total recorrida por la luz en el primer caso es 3.10 veces la distancia recorrida por la luz en el segundo caso.

**53.** La figura P34.53 muestra una vista desde arriba de una habitación de área de piso cuadrada y de lado  $L$ . En el centro de la habitación hay un espejo situado en un plano vertical y que gira sobre un eje vertical a velocidad angular  $\omega$  alrededor de un eje que sale de la página. Un rayo láser de color rojo brillante entra desde el punto central en una pared de la habitación y golpea el espejo. Como el espejo gira, el rayo láser reflejado crea una mancha roja que barre a través de las paredes de la habitación. (a) Cuando el punto de luz en la pared está a una distancia  $x$  desde el punto  $O$ , ¿Cuál es su velocidad? (b) ¿Qué valor de  $x$  se corresponde con el valor mínimo de la velocidad? (c) ¿Cuál es el valor mínimo de la velocidad? (d) ¿Cuál es la velocidad máxima de la mancha en la pared? (e) ¿En qué intervalo de tiempo la mancha cambia de su mínima a su máxima velocidad?

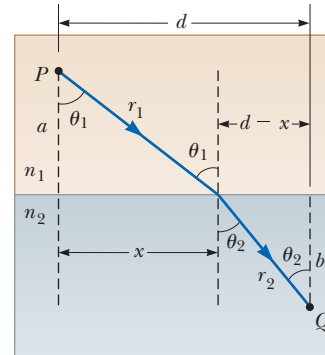


**Figura P34.53**

**54.** Pierre de Fermat (1601-1665) demostró que siempre que la luz viaja desde un punto a otro su trayectoria real es la que requiere el intervalo de tiempo más pequeño. Este enunciado se conoce como *Principio de Fermat*. El ejemplo más simple es para la luz que se propaga en un medio homogéneo; ahí la luz se mueve en una línea recta porque una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos. Deduzca

la ley de refracción de Snell a partir del principio de Fermat. Proceda del modo siguiente: en la figura P34.54, un rayo de luz viaja del punto  $P$  en el medio 1 al punto  $Q$  en el medio 2. Los dos puntos están respectivamente a las distancias perpendiculares  $a$  y  $b$  de la interfaz. El desplazamiento de  $P$  a  $Q$  tiene el componente  $d$  paralelo a la interfaz y se considera que  $x$  representa la coordenada del punto donde el rayo entra al segundo medio. Sea  $t = 0$  el instante cuando la luz entra al segundo medio. (a) Demuestre que el tiempo cuando la luz llega a  $Q$  es

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} = \frac{n_1 \sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c}$$



**Figura P34.54** Problemas 54 y 55.

(b) Para obtener el valor de  $x$  para el que  $t$  tiene su valor mínimo, derive  $t$  respecto a  $x$  e iguale la derivada a cero. Demuestre que el resultado implica

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{n_2 (d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

(c) Demuestre que esta expresión, a su vez, da la ley de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

**55.** Consulte el problema 54 para el enunciado del principio de Fermat de tiempo mínimo. Derive la ley de reflexión (ecuación 34.1) a partir del principio de Fermat.

**56.** Suponga que una esfera luminosa de radio  $R_1$  (por ejemplo el Sol) está rodeada por una atmósfera uniforme de radio  $R_2 > R_1$  y un índice de refracción  $n$ . Cuando la esfera se observa desde lejos en el vacío, ¿cuál es su radio aparente? (a) cuando  $R_2 > nR_1$  y (b) cuando  $R_2 < nR_1$ .

**57.** Este problema se basa en los resultados de los problemas 37 y 38. La luz viaja perpendicularmente a través de una losa de diamante, rodeada de aire, con superficies paralelas de entrada y salida. La intensidad de la luz transmitida ¿qué fracción es de la intensidad incidente? Incluya los efectos de la luz reflejada de ida y vuelta dentro de la losa.



# Formación de las imágenes

# 35



Se puede usar una pantalla de teléfono inteligente y una lupa para realizar experimentos de óptica simple. (iStockphoto.com/alexsl)

## IMAGINE

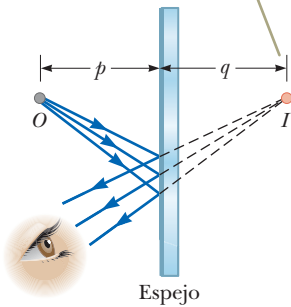
**Al pensar en lo que podría estar surgiendo en este nuevo capítulo, observa una lupa en el cajón de su escritorio. La saca del cajón; ¡Este dispositivo podría ser útil para su estudio de la formación de imágenes! En una habitación oscura, enciende su teléfono inteligente y lo coloca sobre una mesa, mostrador o escritorio para que la pantalla quede hacia arriba. Usted sostiene la lupa horizontalmente a unas pulgadas por encima de la pantalla. Observa que cuando la lente se encuentra en una posición determinada sobre la pantalla, se forma una imagen clara de la pantalla en el techo. Mide la distancia entre la pantalla y la lente. Luego se mueve a una habitación con una ventana y sostiene la lente de la lupa verticalmente cerca de la pared de la habitación opuesta a la ventana. A medida que mueve la lente hacia adelante y hacia atrás, observa que se forma una imagen clara de la ventana y del edificio al otro lado de la calle cuando la lente se encuentra a cierta distancia de la pared. Mide la distancia entre la pared y la lente. ¡Notará que esta distancia horizontal desde la pared es muy similar a la distancia vertical entre su teléfono inteligente y la lente en el primer experimento! Encuentra que las distancias son similares, pero no del todo iguales. ¿Deberían ser lo mismo?**

- 35.1 Imágenes formadas por espejos planos
- 35.2 Imágenes formadas por espejos esféricos
- 35.3 Imágenes formadas por refracción
- 35.4 Imágenes formadas por lentes delgadas
- 35.5 Aberraciones de las lentes
- 35.6 Instrumentos ópticos



**CONEXIONES** En este capítulo, aplicamos las leyes de reflexión y refracción del capítulo 34 para investigar las imágenes que resultan cuando los rayos de luz encuentran superficies planas o curvas entre dos medios. Podemos diseñar espejos y lentes para formar imágenes con las características deseadas. En este estudio, continuamos usando la aproximación de rayos y asumimos que la luz viaja en línea recta. Primero estudiamos la geometría de las imágenes formadas por espejos y lentes, y luego determinamos las técnicas para ubicar una imagen y predecir su tamaño. Después investigamos cómo combinar estos elementos en varios instrumentos ópticos útiles, como microscopios y telescopios. El control de la luz con instrumentos ópticos reflejantes y refractantes es fundamental para la investigación que nos permite comprender el material en los próximos capítulos.

El punto de imagen  $I$  está localizado por detrás del espejo a una distancia perpendicular  $q$  de este. La imagen es virtual.



**Figura 35.1** Imagen formada por reflexión en un espejo plano.

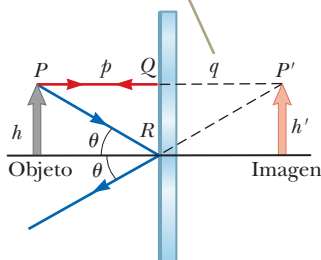
### 35.1 Imágenes formadas por espejos planos

Es posible comprender la formación de imágenes en los espejos a partir del análisis de los rayos de luz que siguen el modelo de onda análisis de reflexión. Empecemos con la consideración del espejo más simple posible: el espejo plano. Imagine una fuente puntual de luz colocada en  $O$  en la figura 35.1, a una distancia  $p$  frente a un espejo plano. En la figura, la superficie del espejo es el borde azul oscuro. La banda azul más clara representa el soporte estructural para la superficie reflejada, como un trozo de vidrio sobre el que se deposita una superficie reflectante plateada. El espejo es perpendicular a la página, por lo que vemos la intersección del espejo con la página. La distancia  $p$  se conoce como **distancia objeto**, el nombre anticipa que colocaremos *objetos* frente a los espejos y estudiaremos sus imágenes. Los rayos luminosos divergentes que salen de la fuente son reflejados por el espejo, obedeciendo la ley de reflexión. Después de reflejarse, los rayos siguen un proceso de divergencia. Las líneas discontinuas de la figura 35.1 son extensiones de los rayos divergentes hacia atrás, hasta un punto de intersección en  $I$ . Para el observador parece que los rayos divergentes surgen del punto  $I$  detrás del espejo. El punto  $I$ , que está a una distancia  $q$  detrás del espejo, se conoce como **imagen** del objeto en  $O$ . A la distancia  $q$  se le llama **distancia de imagen**. Independientemente del sistema en estudio, siempre localizará las imágenes extendiendo hacia atrás los rayos divergentes, hasta el punto en que hacen intersección.

Las imágenes están localizadas ya sea en un punto a partir del cual los rayos luminosos *realmente* divergen o en un punto a partir del cual *parece* que divergen como en la figura 35.1. Esta diferencia nos permite clasificar las imágenes como *reales* o *virtuales*. Una **imagen real** es la que se forma cuando los rayos luminosos pasan a través y divergen del punto de imagen; una **imagen virtual** es la que se forma cuando los rayos luminosos *no* pasan a través del punto de imagen sino que sólo parecen divergir de dicho punto. La imagen formada por el espejo en la figura 35.1 es virtual. En la ubicación de la imagen, no existen rayos de luz desde el objeto detrás del espejo, por lo que los rayos de luz delante del espejo sólo parecen ser divergentes de  $I$ . La imagen de un objeto vista en un espejo plano *siempre* es virtual. Es posible desplegar imágenes reales sobre una pantalla (como en el cine), pero no se puede desplegar imágenes virtuales en una pantalla. En la sección 35.2 encontrará un ejemplo de una imagen real.

La figura 35.1 muestra la imagen de un *objeto puntual*. Nosotros podemos usar la geometría simple de la figura 35.2 para examinar las propiedades de las imágenes de *objetos ampliados* formadas por espejos planos. La flecha gris es el objeto. La imagen de la parte inferior de la flecha se encuentra detrás del espejo a la distancia  $q$ , al igual que el objeto puntual de la figura 35.1. A pesar de que existe un número infinito de posibles direcciones hacia las cuales los rayos luminosos pueden salir de cada punto del objeto, solo es necesario elegir dos rayos dejando la parte superior de la flecha en el punto  $P$  para determinar donde se formara la imagen. El rayo rojo parte de  $P$ , sigue una trayectoria perpendicular al espejo hasta  $Q$  y se refleja sobre sí mismo. El rayo azul sigue la trayectoria oblicua  $PR$  y se refleja como se muestra en la figura 35.2, de acuerdo con las leyes de la reflexión. Un observador frente al espejo extendería los dos rayos reflejados de regreso hacia el punto en el cual parecen haberse originado, es decir, el punto  $P'$  por detrás del espejo. Continuar con este proceso para pun-

Debido a que los triángulos  $PQR$  y  $P'QR$  son congruentes,  $|p| = |q|$  y  $h = h'$ .



**Figura 35.2** Construcción geométrica utilizada para localizar la imagen de un objeto colocado frente a un espejo plano.



tos diferentes de  $P$  sobre el objeto da como resultado una imagen virtual (representada por la flecha rosa) del objeto completo detrás del espejo. Ya que los triángulos  $PQR$  y  $P'QR$  son congruentes,  $PQ = P'Q$ , tal que  $|p| = |q|$  (Aquí usamos signos de valor absoluto porque encontraremos que  $q$  es negativo para este tipo de imagen). Por tanto, la imagen formada por un objeto colocado frente a un espejo plano está tan lejos detrás del espejo como lo está el objeto frente a él.

La geometría en la figura 35.2 también revela que la altura del objeto  $h$  es igual a la altura de la imagen  $h'$ . El **aumento lateral**  $M$  de una imagen se define como sigue

$$M = \frac{\text{Altura del objeto}}{\text{Altura de la imagen}} = \frac{h'}{h} \quad (35.1)$$

Esta definición general del aumento lateral para una imagen a partir de cualquier tipo de espejo también es válida para imágenes formadas por lentes, que se estudiarán en la sección 35.4. Para un espejo plano,  $M = +1$  para cualquier imagen porque  $h' = h$ . El valor positivo de la amplificación significa que la imagen es vertical. (Por vertical se entiende que, si la flecha de objeto apunta hacia arriba, como en la figura 35.2, igual lo hace la flecha de la imagen.)

Observe que un espejo plano produce una imagen con una inversión *aparente* de izquierda a derecha. Es posible detectar esta inversión al colocarse delante del espejo y levantar la mano derecha como se observa en la figura 35.3. La imagen que ve levanta la mano izquierda. De igual manera, la raya de su peinado parece separar el cabello en el lado opuesto al verdadero, y un lunar sobre su mejilla derecha parece estar colocado en su mejilla izquierda.

Esta inversión no es *realmente* una inversión de izquierda a derecha. Imagine, por ejemplo, que usted descansa sobre su lado izquierdo acostado en el piso y que su cuerpo está paralelo a la superficie del espejo. Ahora su cabeza aparece a la izquierda y sus pies a la derecha. Si mueve los pies, ¡la imagen no mueve la cabeza! Si levanta la mano derecha, no obstante, la imagen otra vez levantará la mano izquierda. Por tanto, otra vez el espejo parece producir una inversión de izquierda a derecha, ¡pero en dirección de arriba hacia abajo!

De hecho, esta inversión es realmente una *inversión de adelante hacia atrás*, causada por los rayos luminosos que se mueven hacia el espejo y después se reflejan de nuevo en él. Un ejercicio interesante es colocarse de pie frente a un espejo mientras sujeta un acetato al frente de forma que pueda leer lo que hay escrito en él. También podrá leerlo en la imagen del acetato. Posiblemente haya tenido una experiencia similar al fijar una calcomanía transparente con palabras impresas en el vidrio trasero de su automóvil. Si es posible leer la calcomanía desde afuera del vehículo, también será posible leerlo si lo observa en su espejo retrovisor desde el interior.

**EJEMPLO RÁPIDO 35.1** Imagine que está de pie a aproximadamente dos metros de un espejo, y que éste tiene gotas de agua sobre su superficie. Verdadero o falso: es posible ver simultáneamente en foco las gotas de agua, así como su propia imagen.

### Ejemplo conceptual 35.1 Imágenes múltiples formadas por dos espejos

Dos espejos planos han sido colocados en forma perpendicular entre sí, como se observa en la figura 36.4 y se coloca un objeto en el punto  $O$ . En esta situación se forman varias imágenes. Localice las posiciones de dichas imágenes.

#### SOLUCIÓN

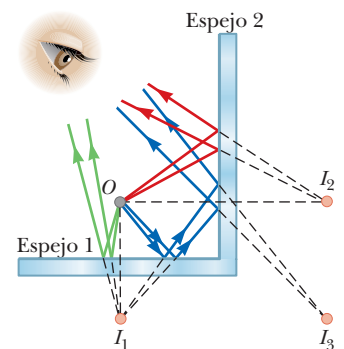
La imagen del objeto está en  $I_1$  en el espejo 1 (rayos verdes) y en  $I_2$  en el espejo 2 (rayos rojos). Además, se forma una tercera imagen en  $I_3$  (rayos azules). Para formar esta imagen en  $I_3$ , los rayos se reflejan dos veces, una vez desde cada espejo, después de dejar

el objeto en  $O$ . Esta tercera imagen se puede considerar como la imagen de  $I_1$  en el espejo 2, como lo indican las líneas discontinuas que salen de  $I_1$  hacia la esquina superior derecha. Es decir, la imagen en  $I_1$  sirve como el objeto para  $I_3$ . También es posible mostrar que  $I_3$  es la imagen de  $I_2$  en el espejo 1.

Observe que el pulgar está del lado izquierdo de las manos verdaderas y del lado izquierdo de la imagen. El hecho de que el pulgar no aparezca del lado derecho de la imagen indica que no existe una inversión de izquierda a derecha.



**Figura 35.3** La imagen de la mano derecha de una persona en el espejo aparece invertida de adelante hacia atrás por lo cual aparece como mano izquierda.



**Figura 35.4** (Ejemplo conceptual 35.1) Cuando se coloca un objeto frente a dos espejos mutuamente perpendiculares, como se muestra en la figura, se forman tres imágenes. Siga los rayos de luz de colores para comprender la formación de cada imagen.

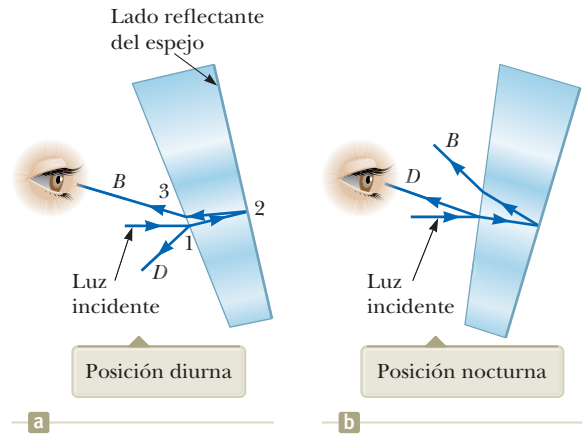
**Ejemplo conceptual 35.2 Espejo retrovisor ajustable**

La mayor parte de los espejos retrovisores en los automóviles tienen una posición diurna y una nocturna. La posición nocturna disminuye de manera importante la intensidad de la imagen para que los faros de los vehículos detrás del automóvil no afecten la visibilidad del conductor. ¿Cómo funciona este espejo?

**SOLUCIÓN**

La figura 35.5 muestra una sección transversal de un espejo retrovisor en cada una de sus posiciones. La unidad tiene una cuna de vidrio con un recubrimiento reflejante en su parte trasera. En la posición diurna (figura 35.5a), la luz proveniente de un objeto detrás del automóvil incide en la cuna de vidrio en el punto 1. La mayor parte de la luz entra en la cuna, refractándose al cruzar la superficie delantera y se refleja en la superficie trasera para volver a la superficie delantera, donde es refractada de nuevo cuando pasa otra vez al aire como rayo *B* (*brillante*). Además, una pequeña porción de la luz se refleja en la superficie delantera del vidrio, como se observa en el rayo *D* (*opaco*).

Esta luz opaca reflejada es responsable de la imagen que se ve cuando el espejo está en la posición nocturna (figura 35.5b). En este caso, la cuna es girada de manera que la trayectoria que sigue la luz brillante (rayo *B*) no se dirige al ojo. Más bien, la que sigue esta dirección es la luz opaca reflejada de la superficie delantera de la cuna, y la brillantez de los faros de los vehículos de atrás no representa un riesgo.



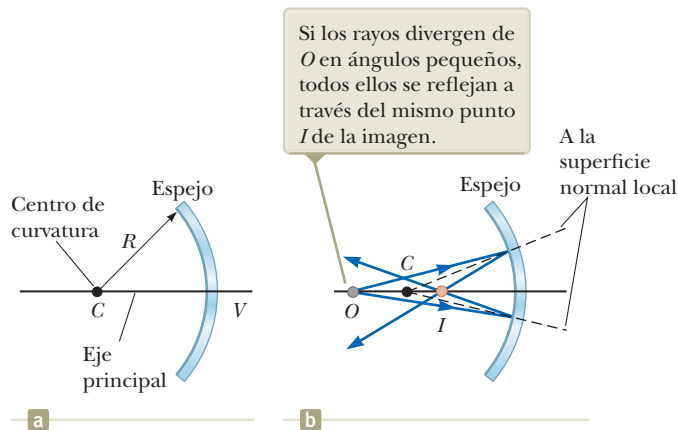
**Figura 35.5** (Ejemplo conceptual 35.2) Vista de sección transversal de un espejo retrovisor.

**35.2 Imágenes formadas por espejos esféricos**

En la sección anterior se consideraron imágenes formadas a partir de espejos planos. Ahora se estudiarán las imágenes formadas por espejos curvos. Aunque son posibles varias curvaturas, la investigación se restringirá a espejos esféricos. Como su nombre implica, un **espejo esférico** tiene la forma de una sección de una esfera.

**Espejos cóncavos**

Primero se considera la reflexión de luz desde la superficie interior cóncava de un espejo esférico, como se muestra en la figura 35.6. En la figura de esta página, la línea curva representa la intersección de la sección de forma cóncava en una esfera. Podemos determinar todas las propiedades de las imágenes formadas por espejos esféricos al considerar solo los rayos en el plano de la página. La línea sólida, que es



**Figura 35.6** (a) Espejo cóncavo de radio *R*. El centro de la curvatura *C* está ubicado sobre el eje principal. (b) Un objeto puntual colocado en *O* frente a un espejo esférico cóncavo de radio *R*, donde *O* es cualquier punto a lo largo del eje principal alejado una distancia mayor que *R* de la superficie del espejo, forma una imagen real en *I*.

la curva y azul oscura, es la superficie reflectante del espejo. Este tipo de superficie reflectora se llama **espejo cóncavo**. La figura 35.6a muestra que el espejo tiene un radio de curvatura  $R$ , y su centro de curvatura es el punto  $C$ . El punto  $V$  es el centro de la sección esférica, y una línea a través de  $C$  y  $V$  se llama **eje principal** del espejo.

Ahora considere una fuente de luz puntual colocada en el punto  $O$  de la figura 35.6b, donde  $O$  es cualquier punto sobre el eje principal, a la izquierda de  $C$ . En la figura se muestran dos rayos divergentes que se originan en  $O$ . Después de reflejarse en el espejo, estos rayos convergen y se cruzan en la imagen que aparece en el punto  $I$ . Después continúan divergiendo alejándose de  $I$  como si en ese punto existiera un objeto. Como resultado, la imagen en el punto  $I$  es real.

En esta sección sólo considerará rayos que divergen del objeto formando un ángulo pequeño con el eje principal. Estos rayos se conocen como **rayos paraxiales**. Todos los rayos paraxiales se reflejan a través del punto imagen. Aquellos rayos que están lejos del eje principal, como los que se muestran en la figura 35.7, convergen en otros puntos del eje principal, y producen una imagen borrosa. Este efecto, que se conoce como *aberración esférica*, está presente con mayor o menor grado en cualquier espejo esférico y se analiza en la sección 35.5.

Si conoce la distancia objeto  $p$  y el radio de curvatura  $R$ , puede calcular la distancia de la imagen  $q$  utilizando la figura 35.8. Por convención, estas distancias se miden a partir del punto  $V$ . La figura 35.8 muestra dos rayos que salen de la punta del objeto. El rayo rojo pasa a través del centro de curvatura  $C$  del espejo e incide en el espejo, perpendicular a la superficie del mismo, reflejándose de regreso sobre sí mismo. El rayo azul incide en el espejo en su centro (punto  $V$ ) y se refleja como se muestra, obediendo con la ley de la reflexión. La imagen de la punta de la flecha se localiza en el punto donde se cruzan ambos rayos. Del triángulo rectángulo grande de color rojo de la figura 35.8, puede ver que  $\tan \theta = h/p$ , y del triángulo rectángulo amarillo se ve que  $\tan \theta = -h'/q$ . El signo negativo se introduce porque la imagen está invertida, por lo que se considera que  $h'$  es negativo. Por tanto, a partir de la ecuación 35.1 y estos resultados, encontramos que la ampliación de la imagen es

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \tag{35.2}$$

Además, observe del triángulo verde en la figura 35.8 y del pequeño triángulo rojo que

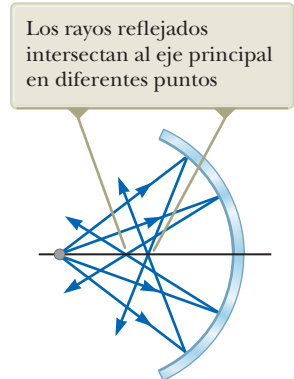
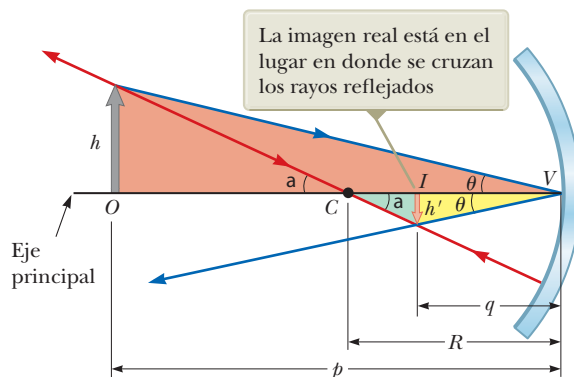
$$\tan \alpha = \frac{-h'}{R - q} \quad \text{y} \quad \tan \alpha = \frac{h}{p - R}$$

de donde surge

$$\frac{h'}{h} = -\frac{R - q}{p - R} \tag{35.3}$$

Si compara las ecuaciones 35.2 y 35.3, obtiene

$$\frac{R - q}{p - R} = \frac{q}{p}$$



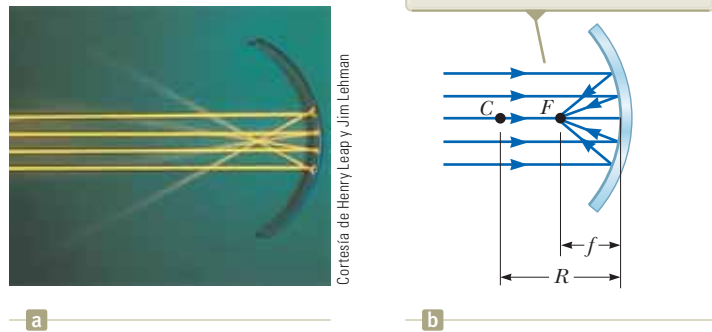
**Figura 35.7** Un espejo esférico cóncavo presenta aberración esférica cuando los rayos de luz forman grandes ángulos con el eje principal.

**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 35.1**

**Amplificación no necesariamente implica aumento** Para elementos ópticos diferentes de los espejos planos, el aumento definido en la ecuación 35.2 puede dar como resultado un número con magnitud mayor o menor que 1. Por lo tanto, a pesar del uso cultural de la palabra *aumento* con el significado de *amplificación*, la imagen puede resultar menor que el objeto.

**Figura 35.8** Imagen formada por un espejo esférico cóncavo cuando el objeto  $O$  yace fuera del centro de curvatura  $C$ . Esta es la construcción geométrica utilizada para deducir la ecuación 35.6.

**Figura 35.9** (a) Los rayos de luz de un objeto a la izquierda son paralelos cuando llegan al espejo. Después de reflexionar, todos pasan por el *punto focal*. (b) La *distancia focal*  $f$  es la mitad del radio de curvatura del espejo.



Cuando el objeto está muy lejos, la distancia de la imagen  $q \approx R/2=f$ , donde  $f$  es la distancia focal del espejo.



**Figura 35.10** Una antena parabólica para satélite es un reflector cóncavo para señales de televisión de un satélite en órbita alrededor de la Tierra. Puesto que el satélite está tan alejado, las señales son transportadas por microondas que resultan paralelas cuando llegan a la antena parabólica. Estas ondas se reflejan del plato y se enfocan en el receptor.

Por simple álgebra, lo anterior se reduce a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \tag{35.4}$$

que se denomina *ecuación del espejo*. En breve se presenta una versión modificada de esta ecuación.

Si el objeto está muy lejos del espejo —es decir, si  $p$  es mucho más grande que  $R$  de forma que se puede decir que  $p$  tiende a infinito— entonces los rayos de luz que llegan al espejo desde el objeto son paralelos. La figura 35.9a muestra los resultados de rayos paralelos en el laboratorio. Los rayos se reflejan desde el espejo y pasan a través de un único punto llamado **punto focal**  $F$ . La figura 35.9b muestra una construcción geométrica para rayos paralelos que inciden en el espejo. De la ley de la reflexión, vemos que el punto focal debe estar entre la superficie del espejo y el centro de curvatura  $C$  del espejo. Si permitimos que  $p$  se acerque al infinito en la ecuación 35.4, vemos que  $q \approx R/2$ . Para rayos paralelos, el punto de la imagen debe ser el punto focal. Por tanto, vemos que el punto focal se encuentra a una distancia del espejo llamada **distancia focal**  $f$ , donde

$$f = \frac{R}{2} \tag{35.5}$$

Distancia focal al espejo ►

La figura 35.10 muestra una aplicación práctica de la situación en la figura 35.9. Las microondas paralelas que transportan señales de televisión desde un satélite muy por encima de la superficie de la Tierra golpean la superficie curva de la antena y se enfocan en un receptor ubicado en el punto focal de la superficie. Combinando las ecuaciones 35.4 y 35.5, la **ecuación espejo** ahora se puede expresar en términos de la distancia focal:

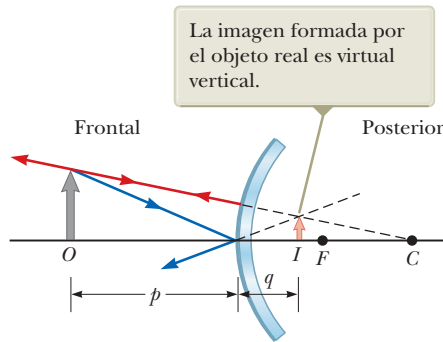
Ecuación del espejo ►

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{35.6}$$

A partir de la ecuación 35.5 observe que la distancia focal de un espejo depende solo de su curvatura y no del material con que esté fabricado, porque la formación de la imagen es el resultado de rayos que se reflejan de la superficie del material. La situación es distinta en el caso de las lentes en que la luz realmente atraviesa el material y la distancia focal depende del tipo de material con que fueron fabricadas. (Véase la sección 35.4.)

### Espejos convexos

La figura 35.11 muestra la formación de una imagen en un **espejo convexo**, es decir, plateado de forma que la luz sea reflejada en la superficie exterior convexa. A veces



**Figura 35.11** Formación de una imagen en un espejo esférico convexo.

éste se conoce como **espejo divergente** porque los rayos de cualquier punto de un objeto divergen después de haberse reflejado, como si vinieran de algún punto de detrás del espejo. La imagen de la figura 35.11 es virtual porque los rayos reflejados solo dan la impresión de originarse en el punto imagen, como se indica mediante las líneas discontinuas. Además, la imagen siempre es vertical y es menor que el objeto. Este tipo de espejo se utiliza con frecuencia en las tiendas para desanimar a los ladrones. Es posible utilizar un solo espejo para obtener una amplia visibilidad, ya que forma una imagen más pequeña del interior de la tienda.

No deducirá ecuaciones para los espejos esféricos convexos, porque puede utilizar las ecuaciones 35.2, 35.4 y 35.6 tanto para espejos cóncavos como convexos, siempre y cuando sigamos el procedimiento siguiente: identifique la región en la cual los rayos luminosos se mueven hacia el espejo como *cara frontal* del mismo y el otro lado como *cara posterior*; por ejemplo, en las figuras 35.8 y 35.11, el lado a la izquierda de los espejos es el delantero y el lado a la derecha, el trasero. La figura 35.12 presenta las reglas para los signos de las distancias objeto e imagen y la tabla 35.1 resume las convenciones de signos para las distancias de objeto e imagen para cualquier tipo de espejo. Un elemento de la tabla, *objeto virtual*, se introduce formalmente en la sección 35.4.

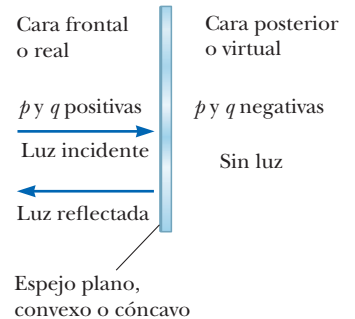
### Diagramas de rayos para espejos

En las figuras 35.2, 35.8 y 35.11, hemos localizado una imagen usando dos rayos: uno rojo golpeando el espejo perpendicular a la superficie y reflejando hacia atrás, y un rayo azul golpeando el espejo en el eje principal y obedeciendo la ley de la reflexión. Si quisiéramos dibujar un diagrama de precisión para ubicar la posición de la imagen cuidadosamente, necesitaríamos un transportador para asegurarnos de que el incidente y los ángulos reflejados en el eje principal son los mismos para el rayo azul. Nuestro nuevo conocimiento del punto focal, sin embargo, hace las cosas más fáciles. Investiguemos la construcción de *diagramas de rayos* que son precisos, pero que no requieren un transportador. Estas construcciones graficas revelan la naturaleza de la imagen y sirven para verificar resultados calculados a partir de las representaciones utilizando las ecuaciones del espejo y del aumento. Para dibujar el diagrama de un rayo, es necesario conocer la posición del objeto y la localización del foco, así como el centro de curvatura del espejo. Después, dibuje tres rayos principales para localizar la imagen como se muestra en los ejemplos de

#### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 35.2

##### El foco no es el punto de enfoque

Por lo general, el foco no es el punto en el cual los rayos luminosos se enfocan para formar una imagen. El foco está determinado sólo por la curvatura del espejo, no depende de la posición del objeto. Por lo común, la imagen se forma en un punto distinto del foco de un espejo (o de una lente) como en la figura 35.8, donde el punto focal está a la derecha de la posición de la imagen. La *única* excepción es cuando el objeto está localizado infinitamente lejos del espejo.



**Figura 35.12** Signos de  $p$  y de  $q$  para todos los tipos de espejos.

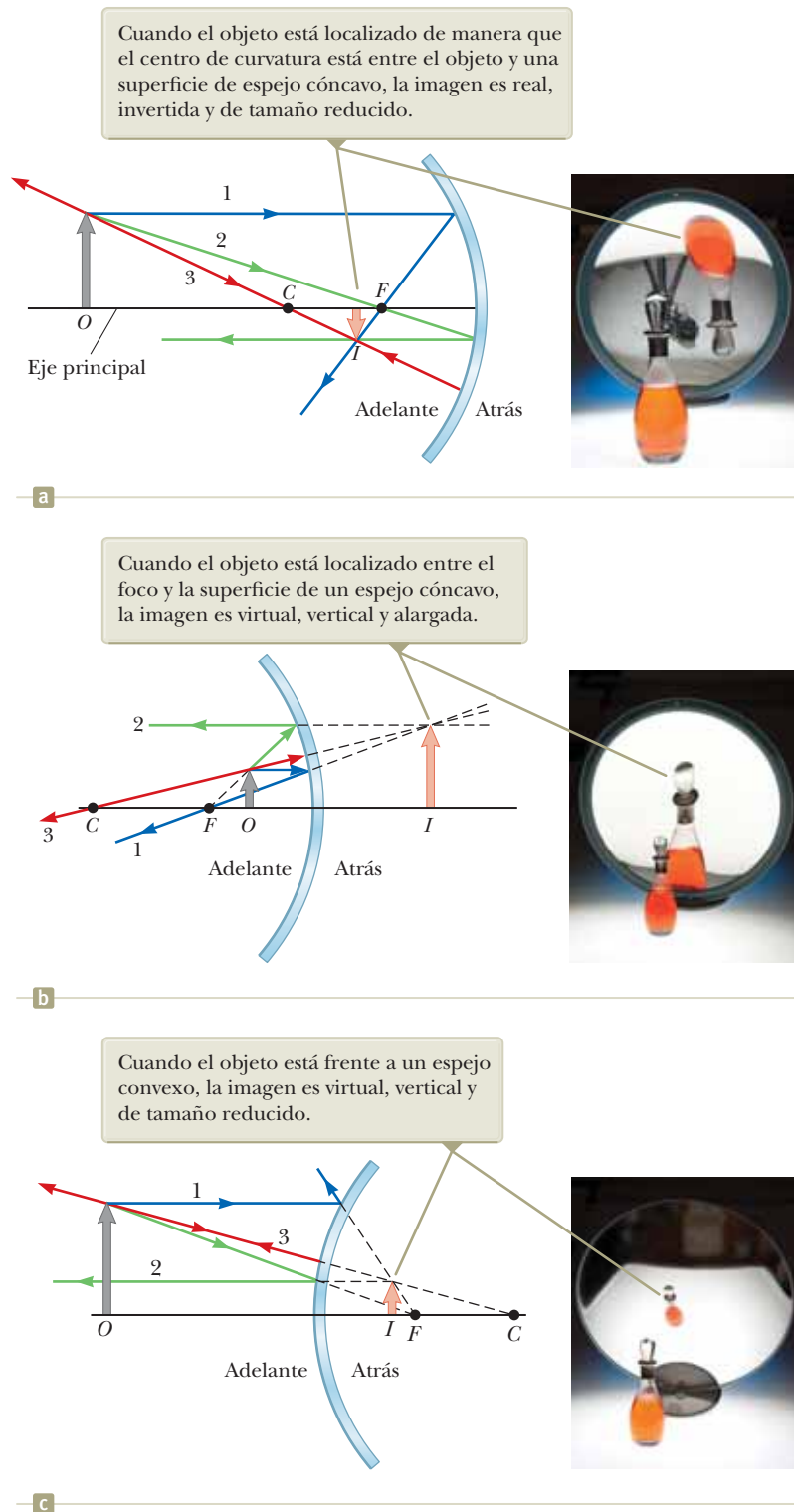
**TABLA 35.1** Reglas para los signos de los espejos

Cantidad	Positivos cuando. . .	Negativos cuando. . .
Localización del objeto ( $p$ )	el objeto está delante de espejo (objeto real)	el objeto está detrás del espejo (objeto virtual)
Localización de la imagen ( $q$ )	la imagen está delante del espejo (imagen real)	la imagen está detrás del objeto (imagen virtual)
Altura de la imagen ( $h'$ )	la imagen está vertical espejo	la imagen está invertida
Distancia focal ( $f$ ) y radio ( $R$ )	el espejo es cóncavo	el espejo es convexo
Aumento ( $M$ )	la imagen está vertical	la imagen está invertida

#### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 35.3

**Cuide sus signos** El éxito en la solución de problemas de espejos (así como problemas con superficies de refracción y lentes delgadas) depende de la correcta elección de signos al sustituir en las ecuaciones. La mejor manera de habituarse a esto es resolviendo por sí mismo una gran cantidad de problemas.





**Figura 35.13** Diagramas de rayos para espejos esféricos junto con fotografías correspondientes de las imágenes de botellas. (a) En esta fotografía, tanto el objeto como la imagen se encuentran frente al espejo, por lo que tendría que enfocar los ojos en los puntos delante del espejo para ver el objeto y la imagen con claridad. (b), (c) En estas fotografías, el objeto está frente al espejo, pero necesitaría enfocar sus ojos en un punto detrás del espejo para ver la imagen con claridad.

Imágenes por cortesía de David Rogers

La figura 35.13. Estos rayos salen todos del mismo punto objeto y se dibujan como sigue. Puede escoger cualquier punto sobre el objeto; aquí, por simplicidad se ha escogido la parte superior. En el caso de espejos cóncavos (véase las figuras 35.13a y 35.13b), trace los tres rayos principales siguientes, observe los colores indicados en la figura 35.13:

- El rayo 1 (azul), se dibuja desde la parte superior del objeto, en paralelo al eje principal, y se refleja a través del foco  $F$ .

- El rayo 2 (verde), se dibuja desde la parte superior del objeto a través del foco (o como si viniera del foco si  $p < f$ ) y se refleja paralelo al eje principal.
- El rayo 3 (rojo), se dibuja desde la parte superior del objeto a través del centro de curvatura  $C$  (si  $p < 2f$ ) y se refleja de regreso sobre sí mismo.

La intersección de cualquiera de estos dos rayos permite ubicar la imagen. El tercero sirve para verificar la construcción. El punto imagen obtenido de esta manera siempre debe concordar con el valor de  $q$  calculado a partir de la ecuación del espejo. En el caso de los espejos cóncavos, observe lo que ocurre cuando se acerca el objeto al espejo. La imagen real invertida de la figura 35.13a se mueve hacia la izquierda y se alarga al acercarse el objeto al centro de curvatura  $C$ . Cuando el objeto está en  $C$ , a una distancia  $p = 2f$  desde el espejo, la ecuación 35.6 muestra que  $q = 2f$ : la imagen se localiza en la ubicación del objeto, con una amplificación de  $-1$ . A medida que el objeto continúa moviéndose desde el centro de curvatura hacia el punto focal, la imagen crece más grande ( $|M| > 1$ ) y se mueve hacia la izquierda. Cuando el objeto está en el punto focal, la imagen queda infinitamente lejos a la izquierda. Sin embargo, cuando el objeto está entre el foco y la superficie del espejo, como se observa en la figura 35.13b, la imagen está hacia la derecha, detrás del objeto y virtual, vertical y alargada. Esta última situación se da cuando se utiliza un espejo para rasurarse o para maquillarse, ya que ambos son cóncavos. Su cara está más cerca del espejo que el foco y lo que se ve es una imagen vertical y alargada de la cara.

En el caso de los espejos convexos (véase la figura 35.13c), trace los tres rayos siguientes:

- El rayo 1 ( azul), se dibuja desde la parte superior del objeto, en paralelo al eje principal, y se refleja *alejado* del foco  $F$ .
- El rayo 2 (verde), se dibuja desde la parte superior del objeto hacia el foco en la cara posterior del espejo y se refleja paralelo al eje principal.
- El rayo 3 (rojo), se dibuja desde la parte superior del objeto hacia el centro de curvatura  $C$  en la cara posterior del espejo y se refleja de regreso sobre sí mismo.

En un espejo convexo la imagen de un objeto es siempre virtual, vertical y de tamaño reducido, como se observa en la figura 35.13c. En este caso, conforme disminuye la distancia del objeto, la imagen virtual aumenta de tamaño y se aleja del foco hacia el espejo conforme el objeto se acerca al espejo. Es conveniente construir otros diagramas para verificar la manera en que varía la posición de la imagen en relación con la posición del objeto.

**E XAMEN RÁPIDO 35.2** Desea prender una fogata, con el reflejo de la luz del sol mediante un espejo sobre papel bajo un cumulo de madera. ¿Cuál sería la mejor selección del tipo de espejo? (a) plano, (b) cóncavo, o (c) convexo.

**E XAMEN RÁPIDO 35.3** Considere la imagen en el espejo que se ve en la figura 35.14. De acuerdo con la apariencia de esta imagen, se podría concluir que (a) el espejo es cóncavo y la imagen real, (b) el espejo es cóncavo y la imagen virtual, (c) el espejo es convexo y la imagen real, o (d) el espejo es convexo y la imagen virtual.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 35.4

**Escoja un número pequeño de rayos.** Una gran cantidad de rayos de luz dejan cada punto en un objeto (y pasan a través de cada punto de la imagen). En un diagrama de rayos, como el que muestra las características de la imagen, elegimos solo unos pocos rayos que siguen las reglas simplemente establecidas. Por cálculo, localiza la imagen y complementa el diagrama.



**Figura 35.14** (Examen rápido 35.3) ¿Qué tipo de espejo se muestra aquí?

### Ejemplo 35.3 Imagen formada por un espejo cóncavo

Un espejo esférico tiene una distancia focal de  $+10.0$  cm.

**(A)** Ubique y describa la imagen para una distancia de objeto de  $25.0$  cm.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Puesto que la distancia focal del espejo es positiva, es un espejo cóncavo (véase la tabla 35.1). Piense en las posibilidades de imágenes real y virtual.

*continúa*

## 35.3 continuación

**Categorizar** Ya que la distancia del objeto en esta parte del problema es mayor que la distancia focal, se espera que la imagen sea real. Esta situación es análoga a la de la figura 35.13a.

**Analizar** Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 35.6:  $\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \rightarrow q = \frac{fp}{p-f}$  (35.7)

Sustituya valores numéricos:

$$q = \frac{(10.0 \text{ cm})(25.0 \text{ cm})}{25.0 \text{ cm} - 10.0 \text{ cm}} = 16.7 \text{ cm}$$

Encuentre el aumento de la imagen a partir de la ecuación 35.2:

$$M = -\frac{q}{p} = -\frac{16.7 \text{ cm}}{25.0 \text{ cm}} = -0.667$$

**Finalizar** El valor absoluto de  $M$  es menor que la unidad, así que la imagen es más pequeña que el objeto, y el signo negativo para  $M$  dice que la imagen está invertida. Ya que  $q$  es positiva, la imagen se ubica en la cara frontal del espejo y es real. Mire en la concavidad de una cuchara pulida o párese lejos de un espejo de afeitarse para ver esta imagen.

**(B)** Ubique y describa la imagen para una distancia de objeto de 5.00 cm.

## SOLUCIÓN

**Categorizar** Ya que la distancia de objeto es menor que la distancia focal, se espera que la imagen sea virtual. Esta situación es análoga a la de la figura 35.13b.

**Analizar** Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 35.7:  $q = \frac{fp}{p-f}$

Sustituya valores numéricos:

$$q = \frac{(10.0 \text{ cm})(5.0 \text{ cm})}{5.0 \text{ cm} - 10.0 \text{ cm}} = -10.0 \text{ cm}$$

Encuentre el aumento de la imagen a partir de la ecuación 35.2:

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-10.0 \text{ cm}}{5.00 \text{ cm}}\right) = +2.00$$

**Finalizar** La imagen es el doble de grande que el objeto y el signo positivo para  $M$  indica que la imagen es vertical (véase la figura 35.13b). El valor negativo de la distancia de imagen dice que la imagen es virtual, como se esperaba. Ponga la cara cerca de un espejo de afeitarse para ver este tipo de imagen.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que usted configura el aparato de botella y espejo que se ilustra en la figura 35.13a descrito aquí en la parte (A). Mientras ajusta el aparato, accidentalmente golpea la botella y comienza a deslizarse hacia el espejo con velocidad  $v_p$ . ¿Qué tan rápido se mueve la imagen de la botella?

**Respuesta** Comience con la ecuación 35.7:

$$q = \frac{fp}{p-f}$$

Derive esta ecuación respecto al tiempo para encontrar la velocidad de la imagen:

$$(1) \quad v_q = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{fp}{p-f} \right) = -\frac{f^2}{(p-f)^2} \frac{dp}{dt} = -\frac{f^2 v_p}{(p-f)^2}$$

Sustituya los valores numéricos de la parte(A):

$$v_q = -\frac{(10.0 \text{ cm})^2 v_p}{(25.0 \text{ cm} - 10.0 \text{ cm})^2} = -0.444 v_p$$

Por tanto, en este caso, la velocidad de la imagen es menor que la del objeto.

Se pueden ver dos comportamientos interesantes de la función para  $v_q$  en la ecuación (1). Primero, la velocidad es negativa sin importar el valor de  $p$  o  $f$ . Por tanto, si el objeto se mueve hacia el espejo, la imagen se mueve hacia la izquierda en la figura 35.13 sin importar el lado del foco en donde se ubica el objeto o si el espejo es cóncavo o convexo. Segundo, en el límite de  $p \rightarrow 0$ , la velocidad  $v_q$  tiende a  $-v_p$ . Conforme el objeto se mueve muy cerca del espejo, el espejo parece como un espejo plano, la imagen está tan lejos detrás del espejo como el objeto está enfrente, y tanto el objeto como la imagen se mueven con la misma velocidad.



**Ejemplo 35.4** Imagen formada por un espejo convexo

Un espejo retrovisor, como se muestra en la figura 35.15, muestra la imagen de un camión ubicado a 50.0 m del espejo. La distancia focal del espejo es  $-0.60$  m.

**(A)** Encuentre la posición de la imagen del camión.

**Figura 35.15** (Ejemplo 35.4) En el espejo convexo del lado derecho de un automóvil se ve un camión que se aproxima. Observe que la imagen del camión está en foco, pero el marco del espejo no lo está, lo que demuestra que la imagen no está en la misma ubicación que la superficie del espejo.



Brian A. Jackson/Shutterstock

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Esta situación se muestra en la figura 35.13c.

**Categorizar** Ya que el espejo es convexo, se espera que forme una imagen virtual reducida y vertical para cualquier posición del objeto.

**Analizar** Encuentre la distancia de la imagen con la ecuación 35.7:  $q = \frac{fp}{p-f} = \frac{(-0.60 \text{ m})(50.0 \text{ m})}{50.0 \text{ m} - (-0.60 \text{ m})} = -0.59 \text{ m}$

**(B)** Encuentre el aumento de la imagen.

**SOLUCIÓN**

**Analizar** Use la ecuación 35.2:

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-0.59 \text{ m}}{50.0 \text{ m}}\right) = +0.012$$

**Finalizar** El valor negativo de  $q$  en la parte (A) indica que la imagen es virtual, o está detrás del espejo, como se muestra en la figura 35.13c. El aumento en la parte (B) indica que la imagen es mucho más pequeña que el camión y es vertical porque  $M$  es positiva. Debido al tamaño pequeño de la imagen, estos espejos llevan la inscripción: "Los objetos en este espejo están más cerca de lo que parecen". Observe su espejo retrovisor o la cara posterior de una cuchara brillante para ver una imagen de este tipo.

**35.3** Imágenes formadas por refracción

En esta sección se describe la manera en que se forman las imágenes cuando los rayos luminosos siguen el modelo de onda bajo refracción en la frontera entre dos materiales transparentes. Considere dos medios transparentes con índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ , donde los límites entre los dos medios forman una superficie esférica de radio  $R$  (figura 35.16). Suponga que el objeto en  $O$  está en el medio cuyo índice de refracción es  $n_1$ . Consideremos los rayos paraxiales que salen de  $O$ . La figura 35.16 es el análogo de refracción a las reflexiones del espejo en la figura 35.6b.

- EJERCICIO RÁPIDO 35.4** En la figura 35.16, ¿qué le pasa al punto imagen  $I$  al mover el punto objeto  $O$  hacia la derecha muy lejos o bien muy cerca de la superficie refractora? **(a)** Siempre estará a la derecha de la superficie. **(b)** Siempre estará a la izquierda de la superficie. **(c)** Comienza a la izquierda y, en cierta posición  $O$ ,  $I$  se traslada al lado derecho de la superficie. **(d)** Comienza a la derecha y, en cierta posición  $O$ ,  $I$  se traslada al lado izquierdo de la superficie.

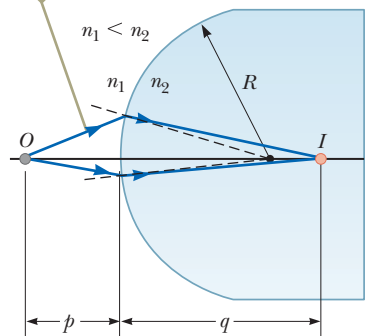
La figura 35.17 (página 936) muestra un rayo simple que sale del punto  $O$  y se refracta hacia el punto  $I$ . La ley de Snell de la refracción aplicada a este rayo da

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

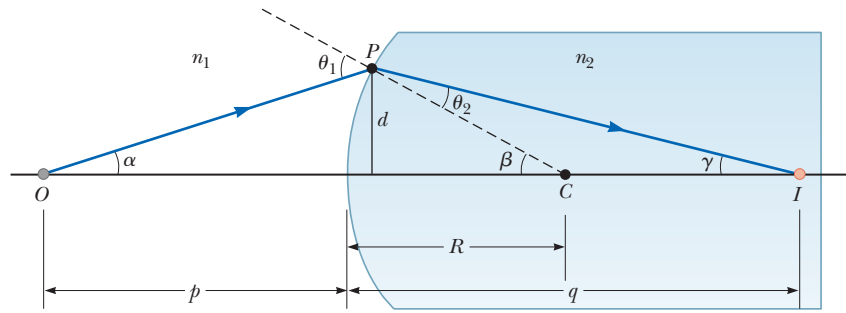
Ya que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se consideran pequeños, utilice la aproximación para ángulos pequeños  $\sin \theta \approx \theta$  (ángulos en radianes) y escriba la ley de Snell como

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$$

Los rayos que forman ángulos pequeños en relación con el eje principal divergen de un punto en el objeto  $O$  y se refractan hasta el punto imagen  $I$ .



**Figura 35.16** Imagen formada por refracción en una superficie esférica.



**Figura 35.17** Geometría utilizada para deducir la ecuación 35.9, suponiendo que  $n_1 < n_2$ .

Sabe que el ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos; así que aplique esta regla a los triángulos  $OPC$  y  $PIC$  de la figura 35.17 y para obtener

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \alpha + \beta \\ \beta &= \theta_2 + \gamma \end{aligned}$$

Si combina las tres expresiones y elimina  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , obtiene

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \tag{35.8}$$

La figura 35.17 exhibe tres triángulos rectángulos que tienen un cateto vertical común de longitud  $d$ . En el caso de los rayos paraxiales (a diferencia del rayo de ángulo relativamente grande que se muestra en la figura 35.17), los catetos horizontales de estos triángulos son aproximadamente  $p$  para el triángulo que contiene el ángulo  $\alpha$ ,  $R$  para el que contiene el ángulo  $\beta$  y  $q$  para el triángulo que contiene el ángulo  $\gamma$ . En la aproximación por ángulos pequeños,  $\tan \theta \approx \theta$ , por lo que puede escribir las relaciones aproximadas de estos triángulos como sigue:

$$\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{d}{p} \quad \tan \beta \approx \beta \approx \frac{d}{R} \quad \tan \gamma \approx \gamma \approx \frac{d}{q}$$

Reemplace estas expresiones en la ecuación 35.8 y después divida por  $d$  para obtener

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{35.9}$$

Relación entre distancia objeto y distancia imagen para una superficie refractora

Para el caso de una distancia objeto  $p$  fija, la distancia imagen  $q$  es independiente del ángulo que forma el rayo con el eje. Este resultado indica que todos los rayos paraxiales se enfocan en el mismo punto  $I$ . La ampliación de una imagen debido a una superficie refractante viene dada por (vea el problema 20)

$$M = -\frac{n_1q}{n_2p} \tag{35.10}$$

Igual que en el caso de los espejos, es necesario utilizar una convención para los signos si desea aplicar la ecuación 35.9 a diferentes casos. El lado de la superficie en el cual se originan los rayos luminosos se define como la cara frontal. El otro se llama cara posterior. A diferencia de los espejos, donde se forman las imágenes reales en la cara frontal de la superficie reflectante, las imágenes se forman por refracción de los rayos de luz en la cara posterior de la superficie. Debido a la diferencia de ubicación de las imágenes reales, las reglas convencionales para los signos de la refracción para  $q$  y  $R$  son opuestas a las reglas para los signos de la reflexión. Por ejemplo, en la figura 35.17,  $q$  y  $R$  son ambas positivas. Las reglas para los signos en superficies refractoras esféricas se resumen en la tabla 35.2.

De la figura 35.17 se deduce la ecuación 35.9, a partir de la hipótesis de que  $n_1 < n_2$ . Esta hipótesis, sin embargo, no es necesaria. La ecuación 35.9 es válida independientemente de cuál de los índices de refracción es mayor.

Para un espejo cóncavo, encontramos que se pueden formar imágenes tanto reales como virtuales, dependiendo de la ubicación del objeto en relación con el punto focal.



**TABLA 35.2** Reglas para signos en superficies refractoras

Cantidad	Positivos cuando . . .	Negativos cuando . . .
Ubicación del objeto ( $p$ )	el objeto está delante de la superficie (objeto real)	el objeto está detrás de la superficie (objeto virtual)
Ubicación de la imagen ( $q$ )	la imagen está detrás de la superficie (imagen real)	la imagen está delante de la superficie (imagen virtual)
Altura de la imagen ( $h'$ )	la imagen es vertical	la imagen está invertida
Radio ( $R$ )	el centro de curvatura está detrás de la superficie	el centro de curvatura está delante de la superficie

Las figuras 35.13a y 35.13b muestran estas posibilidades. Encontramos que también podemos crear imágenes reales y virtuales con una superficie de refracción. La figura 35.18 muestra estas dos posibilidades para una superficie de refracción rodeada por un medio de índice  $n_1$ . Estos dos tipos de imágenes se pueden crear colocando el objeto en diferentes posiciones relativas a la superficie. El valor para  $p$  que determina si una imagen es real o virtual puede encontrarse al dejar  $q \rightarrow \infty$  en la ecuación 35.9. Resolviendo para  $p$ , encontramos

$$p = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$

Cuando el objeto está a esta distancia de la superficie, la imagen está infinitamente lejos. Si el objeto se mueve más lejos del espejo que esta posición, la imagen es real como en la figura 35.18a. Si el objeto se mueve más cerca de la superficie que esta distancia, la imagen es virtual como en la figura 35.18b.

Ahora considere colocar un objeto dentro de un material de índice  $n_1$  y ver la imagen desde un material de índice  $n_2$ , donde  $n_1 > n_2$ . La ecuación 35.9 nos da

$$q = \frac{pR}{\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)p - \frac{n_1}{n_2}R}$$

Para la condición  $n_1 > n_2$ , el valor de  $q$  es siempre negativo. Por tanto, la imagen es siempre virtual. Esto es análogo a todas las imágenes que son virtuales para un espejo convexo, como en la figura 35.13c. Consulte la figura 35.19 y los ejemplos 35.6 y 35.7 para las situaciones en las que el objeto está dentro de un material.

### Superficies refractoras planas

Si una superficie refractora es plana, en tal caso  $R$  es infinito y la ecuación 35.9 se reduce a

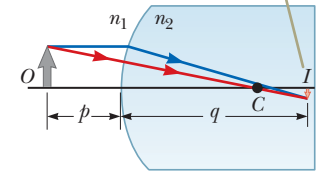
$$\frac{n_1}{p} = -\frac{n_2}{q}$$

$$q = -\frac{n_2}{n_1} p \tag{35.11}$$

De esta expresión, el signo de  $q$  es opuesto al signo de  $p$ . Por tanto, de acuerdo con la tabla 35.2, la imagen formada por una superficie refractora plana está en el mismo lado de la superficie que el objeto, esto se ilustra en la figura 35.19 para el caso en que el objeto está en el medio del índice  $n_1$ , y este es mayor que  $n_2$ . En este caso se forma una imagen virtual entre el objeto y la superficie. Si  $n_1$  es menor que  $n_2$ , los rayos de la cara posterior divergen entre sí en ángulos más pequeños que los de la figura 35.19. Como resultado, se forma la imagen virtual a la izquierda del objeto.

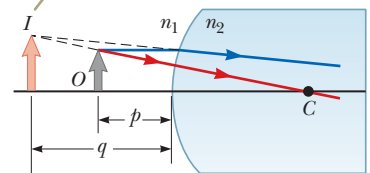
- E XAMEN RÁPIDO 35.5** En la figura 35.19, ¿qué le sucede al punto imagen  $I$  conforme el punto objeto  $O$  se mueve hacia la superficie del lado derecho del material de índice de refracción  $n_1$ ? (a) Permanece siempre entre  $O$  y la superficie, llegando a esta justo en el momento en que lo hace  $O$ . (b) Se mueve hacia la superficie con mayor lentitud que  $O$ , de forma que en algún momento  $O$  se adelanta a  $I$ . (c) Se acerca a la superficie y después se mueve hacia la derecha de la misma.

La imagen de la superficie es real, entonces  $I$  está a la derecha de la superficie.



a

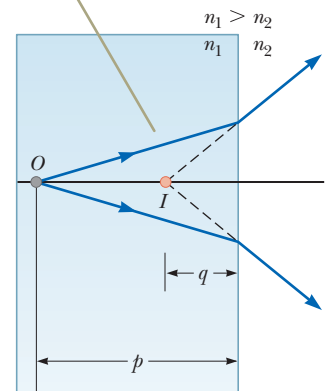
La imagen debido a la superficie es virtual, entonces  $I$  está a la izquierda de la superficie.



b

**Figura 35.18** Una superficie de refracción puede crear una (a) imagen real o una (b) imagen virtual.

La imagen es virtual y en el mismo lado de la superficie que el objeto.



**Figura 35.19** La imagen formada por una superficie refractora plana es virtual y aparece del mismo lado de la superficie que el objeto. Todos los rayos se suponen paraxiales.

**Ejemplo conceptual 35.5 ¡A bucear!**

Es bien sabido que los objetos que se ven por debajo del agua a simple vista aparecen borrosos y fuera de foco; sin embargo, un buceador que utiliza visor tiene una vista clara de los objetos bajo el agua. Explique cómo funciona esto, los índices de refracción de la córnea, del agua y del aire son 1.376, 1.333 y 1.000 29, respectivamente.

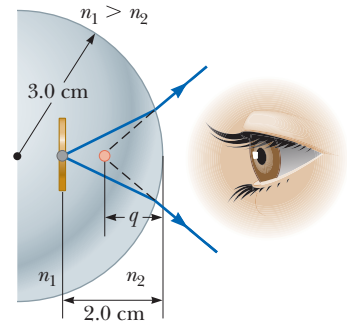
**SOLUCIÓN**

Debido a que la córnea y el agua tienen índices de refracción casi idénticos, se presenta una refracción muy ligera cuando una persona observa los objetos a simple vista por debajo del agua. En este caso, los rayos luminosos provenientes de un objeto se enfocan por detrás de la retina, lo que da como resultado una imagen borrosa. Sin embargo, cuando se utiliza un visor, el espacio de aire entre el ojo y la superficie del visor proporciona la cantidad de refracción normal en la interfaz ojo-aire; en consecuencia, la luz proveniente de los objetos se enfoca en la retina.

**Ejemplo 35.6 Mire fijamente dentro de la bola de cristal**

Un conjunto de monedas está incrustado en un pisapapeles esférico de plástico que tiene un radio de 3.0 cm. El índice de refracción del plástico es  $n_1 = 1.50$ . Una moneda está colocada a 2.0 cm del borde de la esfera (figura 35.20). Encuentre la posición de la imagen de la moneda.

**Figura 35.20** (Ejemplo 35.6) Los rayos de luz provenientes de una moneda incrustada en una esfera de plástico forman una imagen virtual entre la superficie del objeto y la superficie de la esfera. Ya que el objeto está dentro de la esfera, el frente de la superficie refractante es el interior de la esfera.



**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Debido a que  $n_1 > n_2$ , donde  $n_2 = 1.00$  es el índice de refracción del aire, los rayos que se originan en la moneda de la figura 35.20 se refractan alejándose de la normal en la superficie y divergen hacia afuera. Prolongar los rayos salientes hacia atrás muestra un punto de imagen dentro de la esfera.

**Categorizar** Puesto que los rayos de luz se originan en un material y luego pasan a través de una superficie curva hacia otro material, este ejemplo es de una imagen formada por refracción.

**Analizar** Aplique la ecuación 35.9 y note, de la tabla 35.2, que  $R$  es negativo:

$$\frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{p}$$

Sustituya valores numéricos para  $q$ :

$$\frac{1}{q} = \frac{1.00 - 1.50}{-3.0 \text{ cm}} - \frac{1.50}{2.0 \text{ cm}}$$

$$q = -1.7 \text{ cm}$$

**Finalizar** El signo negativo de  $q$  indica que la imagen está enfrente de la superficie; en otras palabras, está en el mismo medio que el objeto, como se muestra en la figura 35.20. En consecuencia, la imagen debe ser virtual. (Véase la tabla 35.2.) La moneda parece estar más cerca de la superficie del pisapapeles de lo que en realidad está.

**Ejemplo 35.7 El que se fue**

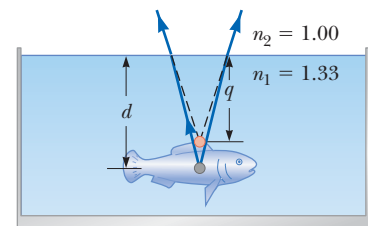
Un pez pequeño nada a una profundidad  $d$  bajo la superficie de un estanque (figura 35.21).

**(A)** ¿Cuál es la profundidad aparente del pez, visto directamente desde arriba?

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Como  $n_1 > n_2$ , donde  $n_2 = 1.00$  es el índice de refracción del aire, los rayos que se originan en el pez en la figura 35.21 se refractan alejándose de la normal en la superficie y divergen hacia afuera. Prolongar los rayos salientes hacia atrás muestra un punto de imagen bajo el agua.

**Categorizar** Ya que la superficie refractante es plana,  $R$  es infinito. Por esto, puede usar la ecuación 35.11 para determinar la ubicación de la imagen, con  $p = d$ .



**Figura 35.21** (Ejemplo 35.7) La profundidad aparente  $q$  del pez es menor que la profundidad verdadera  $d$ . Se supone que todos los rayos son paraxiales.

## 35.7 continuación

**Analizar** Use en la ecuación 35.11 los índices de refracción dados en la figura 35.21:

$$q = -\frac{n_2}{n_1}p = -\frac{1.00}{1.33}d = -0.752d$$

**Finalizar** Puesto que  $q$  es negativa, la imagen es virtual, como indican las líneas discontinuas en la figura 35.21. Cualquier fuente de luz subacuática parece estar más cerca de la superficie. Por tanto, la luz sale de la parte inferior de una corriente, todas las corrientes parecen tener una profundidad que es aproximadamente tres cuartos de profundidad real.

**(B)** Si su cara está a una distancia  $d$  sobre la superficie del agua, ¿a qué distancia aparente sobre la superficie el pez ve su cara?

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine los rayos de luz que salen de su cara y se mueven hacia abajo, hacia el agua. Al entrar al agua, se refractarán hacia lo normal. Dibuja un diagrama de rayos y muestra que tu cara parece ser más alta de lo que realmente es.

**Categorizar** Dado que la superficie refractante es plana,  $R$  es infinito. Por esto, puede usar la ecuación 36.9 para determinar la ubicación de la imagen con  $p = d$ .

$$q = -\frac{n_2}{n_1}p = -\frac{1.33}{1.00}d = -1.33d$$

**Analizar** Use la ecuación 35.11 para encontrar la distancia de imagen:

**Finalizar** El signo negativo para  $q$  indica que la imagen está en el medio desde donde se originó la luz, que es el aire sobre el agua.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si usted observa más cuidadosamente al pez y mide su *altura* aparente desde su aleta superior hasta su aleta inferior? ¿La altura aparente  $h'$  del pez es diferente de la altura real  $h$ ?

**Respuesta** Puesto que todos los puntos sobre el pez parecen estar fraccionalmente más cerca del observador, es de esperar que la altura sea más pequeña. Sea  $d$  la distancia medida en la figura 35.21 hasta la aleta superior, y  $d+h$  la distancia hasta la aleta inferior. En tal caso, las imágenes de las partes superior e inferior del pez se ubican en

$$q_{\text{superior}} = 0.752d$$

$$q_{\text{inferior}} = -0.752(d+h)$$

La altura aparente  $h'$  del pez es

$$h' = q_{\text{superior}} - q_{\text{inferior}} = 0.752d - [0.752(d+h)] = 0.752h$$

Por tanto, el pez parece tener aproximadamente tres cuartos de su altura real.

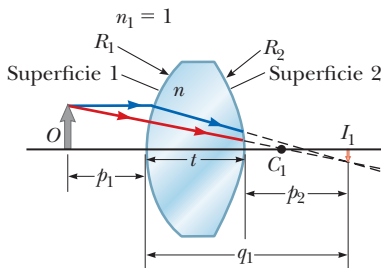
## 35.4 Imágenes formadas por lentes delgadas

Usualmente las lentes se utilizan para formar imágenes por refracción en los instrumentos ópticos, como es el caso de cámaras fotográficas, telescopios y microscopios. Utilice lo que acaba de aprender sobre las imágenes formadas por superficies de refracción para localizar la imagen formada por una lente. La luz que pasa a través de ella experimenta una refracción en dos superficies. El desarrollo a seguir está en función de la creencia de que la imagen formada por una superficie refractora sirve como el objeto para la segunda superficie. Primero analizará una lente gruesa y posteriormente su espesor será aproximadamente igual a cero.

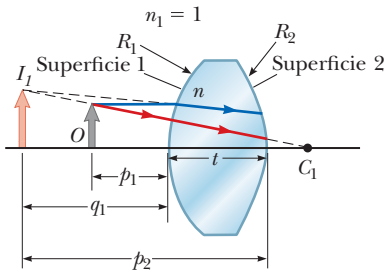
Considere la figura 35.18 e imagine que el lado derecho del material no continúa indefinidamente, sino que termina en otra superficie curva. Entonces tenemos un material de refracción con dos superficies esféricas con radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$ , separados una distancia  $\ell$  como en la figura 35.22 (página 940). (Observe que  $R_1$  es el radio de curvatura de la superficie de la lente que primero atraviesa la luz que proviene del objeto y que  $R_2$  es el radio de curvatura de la otra superficie de la lente.)

La figura 35.22 muestra las imágenes reales y virtuales formadas por la primera superficie, como vimos anteriormente en la figura 35.18. Utilice la ecuación 35.9 y





a



b

**Figura 35.22** Para localizar la imagen formada por una lente, utilice la imagen virtual en  $I_1$  formada por la superficie 1 como el objeto de la imagen formada para la superficie 2. El punto  $C_1$  es el centro de curvatura de la superficie 1.

suponga que  $n_1 = 1$ , porque la lente está rodeada por aire, encontrará que la imagen  $I_1$  formada por la superficie 1 satisface la ecuación

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n - 1}{R_1} \tag{35.12}$$

donde  $q_1$  es la posición de la imagen debida a la superficie 1. Si la imagen debida a la superficie 1 es virtual (figura 35.22a),  $q_1$  es negativa, y si la imagen es real,  $q_1$  es positiva (figura 35.22b).

Ahora aplique la ecuación 35.9 a la superficie 2, con  $n_1 = n$  y  $n_2 = 1$ . (Este cambio en el índice se debe a que los rayos luminosos que se acercan a la superficie 2 están en el material de la lente, y este material tiene un índice de refracción  $n$ .) Si  $p_2$  es la distancia objeto de la superficie 2 y  $q_2$  es la distancia imagen, obtiene

$$\frac{n}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1 - n}{R_2} \tag{35.13}$$

Ahora hay que introducir, en términos matemáticos, el hecho de que la imagen formada por la primera superficie actúa como el objeto para la segunda superficie. Si la imagen en la superficie 1 es real como en la figura 35.22a, observe que la distancia física  $p_2$  es  $q_1 - t$ . Pero  $I_1$  sirve como un objeto virtual para la segunda superficie, porque está a la derecha de la superficie. Para expresar  $p_2$  como una distancia de objeto para fines ópticos, debe ser negativo (tabla 35.2). Por tanto, para fines ópticos, debemos tener  $p_2 = q_1 + t$ . Si la imagen de la superficie 1 es virtual como en la figura 35.22b, vemos que  $p_2 = -q_1 + t$ , donde hemos usado  $-q_1$  porque  $q_1$  es negativo para un objeto virtual. Por tanto, independientemente del tipo de imagen de la superficie 1, la misma ecuación describe la ubicación del objeto para la superficie 2 según la convención de signos. En el caso de una lente *delgada* (cuyo espesor es menor comparado con el radio de curvatura), desprecie  $t$ . En esta aproximación,  $p_2 = q_1$  para cualquiera de los dos tipos de imágenes de la superficie 1. Por esto, la ecuación 35.13 se convierte en

$$-\frac{n}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1 - n}{R_2} \tag{35.14}$$

Al sumar las ecuaciones 35.12 y 35.14, se tiene que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \tag{35.15}$$

En el caso de una lente *delgada*,  $p_1$  es la posición  $p$  del objeto y  $q_2$  es la posición  $q$  de la imagen final como en la figura 35.23. De aquí, puede escribir la ecuación 35.15 en la forma

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \tag{35.16}$$

Esta expresión relaciona la distancia imagen  $q$  de la imagen formada por una lente *delgada* con la distancia objeto  $p$  y con las propiedades de la lente (índice de refracción y radios de curvatura). Sólo es válida para rayos paraxiales y únicamente cuando el espesor de la lente es mucho menor que  $R_1$  y  $R_2$ .

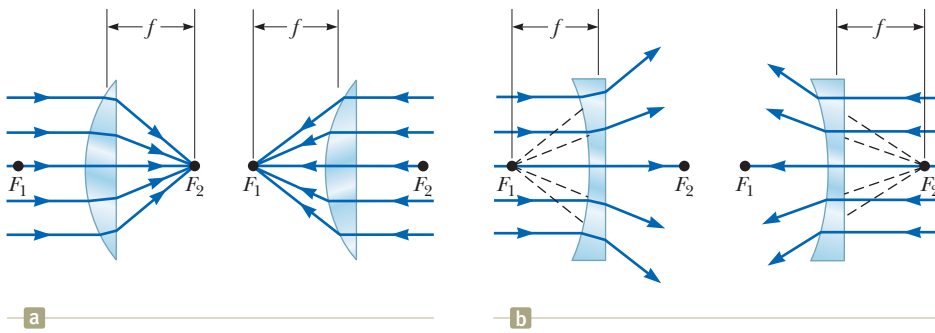
La **distancia focal**  $f$  de una lente *delgada* es la distancia imagen que corresponde a una distancia objeto infinita, lo mismo que ocurre con los espejos. Si en la ecuación 35.16 hace que  $p$  tienda a  $\infty$  y  $q$  tienda a  $f$ , la inversa de la distancia focal de una lente *delgada* es igual a

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \tag{35.17}$$

Esta relación se conoce como la **ecuación de los fabricantes de lentes** porque se utiliza para determinar los valores de  $R_1$  y  $R_2$  necesarios para un índice de refracción dado y una distancia focal  $f$  deseada. A la inversa, si se conocen tanto el índice de refracción como los radios de curvatura de la lente, esta ecuación permite el cálculo de la distancia focal. Si la lente está sumergida en algo diferente del aire, puede utili-

Ecuación de los fabricantes de lentes ▶





**Figura 35.24** Los rayos luminosos paralelos pasan a través de (a) una lente convergente y (b) una lente divergente. La distancia focal es la misma para los rayos luminosos que pasan a través de cierta lente en cualquiera de las direcciones. Los focos  $F_1$  y  $F_2$  están a la misma distancia de la lente.

zar esta misma ecuación, interpretando  $n$  como la razón del índice de refracción del material de la lente con el fluido que la rodea.

Mediante la ecuación 35.17 puede escribir la ecuación 35.16 de manera idéntica a la ecuación 35.6 para los espejos:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (35.18)$$

◀ Ecuación de las lentes delgadas

Esta ecuación, conocida como la **ecuación de las lentes delgadas**, se utiliza para relacionar la distancia imagen con la distancia objeto para una lente delgada.

Puesto que la luz pasa en ambas direcciones a través de una lente, cada lente tiene dos focos, uno para los rayos luminosos que pasan en una dirección y el otro para rayos luminosos que pasan en la otra dirección. Éstos quedan ilustrados en la figura 35.24 para una lente plana convexa (lente convergente) y una lente plana cóncava (lente divergente).

La figura 35.25 resulta útil para obtener los signos de  $p$  y de  $q$ , y la tabla 35.3 contiene las convenciones de signos para lentes delgadas. Observe que estas reglas de signos son las mismas que las superficies refractoras (véase la tabla 35.2).

En la figura 35.26 (página 942) se muestran varias formas de lentes. Observe que una lente convergente es más gruesa en su parte central que en los bordes, en tanto que una lente divergente es más delgada en el centro que en los bordes.

La lupa utilizada en los experimentos descritos en la semblanza de apertura está actuando como una lente delgada para formar imágenes reales. En el problema 35.3 de la sección Piense, dialogue y comparta, tendrá la oportunidad de realizar estos experimentos y responder la pregunta al final de la semblanza.



**Figura 35.25** Diagrama para obtener los signos de  $p$  y de  $q$  para lentes delgadas. (Este diagrama también es aplicable a una superficie refractora.)

### Aumento de las imágenes

Considere una lente delgada a través de la cual pasan los rayos luminosos provenientes de un objeto. Igual que con los espejos (ecuación 35.2), la construcción geométrica demuestra que el aumento lateral de la imagen es

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \quad (35.19)$$

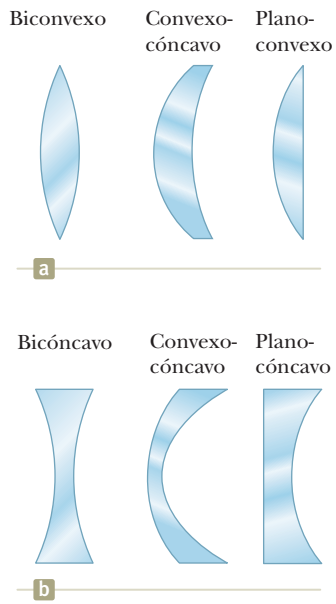
**TABLA 35.3** Reglas convencionales para signos en el caso de lentes delgadas

Cantidad	Positivos cuando . . .	Negativos cuando . . .
Ubicación del objeto ( $p$ )	el objeto está delante de la lente (objeto real)	el objeto está detrás de la lente (objeto virtual)
Ubicación de la imagen ( $q$ )	la imagen está detrás de la lente (imagen real)	la imagen está delante de la lente (imagen virtual)
Altura de la imagen ( $h'$ ) $R_1$ y $R_2$	la imagen es vertical el centro de curvatura está detrás de la lente	la imagen está invertida el centro de curvatura está delante de la lente
Distancia focal ( $f$ )	la lente es convergente	la lente es divergente

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 35.5

**Una lente tiene dos focos pero sólo una distancia focal** Una lente tiene un foco a cada lado, adelante y atrás. Sin embargo, solo tiene una distancia focal; cada foco está ubicado a la misma distancia de la lente (figura 35.24). Como resultado, la lente forma la imagen de un objeto en el mismo punto si se le da vuelta. Es posible que en la práctica esto no ocurra, ya que las lentes en la realidad no son infinitesimalmente delgadas.





**Figura 35.26** Diferentes formas de lentes. (a) Las lentes convergentes tienen una distancia focal positiva y son más gruesas en su parte central. (b) Las lentes divergentes tienen una distancia focal negativa y su parte más gruesa está en los bordes.

Al partir de esta expresión, se deduce que cuando  $M$  es positiva, la imagen es vertical y del mismo lado de la lente que el objeto. Cuando  $M$  es negativa, la imagen aparece invertida y del lado de la lente opuesta al objeto.

### Diagramas de rayos para lentes delgadas

En cuanto a los espejos, los diagramas de rayos son convenientes para ubicar las imágenes formadas por lentes finas o sistemas de lentes. También ayudan a aclarar nuestras convenciones de signos. La figura 35.27 muestra dichos diagramas para tres situaciones de una sola lente. En las figuras 35.23 y 35.24, mostramos la trayectoria de los rayos de luz que se refractan en ambas superficies de la lente. Debido a que modelamos las lentes para que tengan grosor cero, y debido a que conocemos la importancia del punto focal de una lente, en diagramas futuros mostraremos el rayo de luz simplemente refractando en el centro de la lente como se muestra en la figura 35.27.

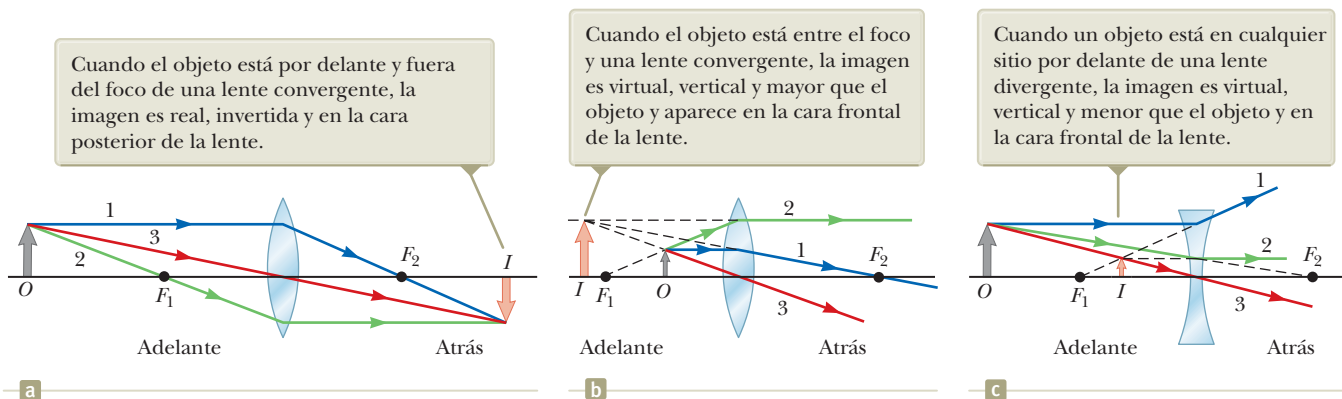
Para localizar la imagen de una lente *convergente* (figuras 35.27a y 35.27b), se trazan los tres rayos siguientes a partir de la parte superior del objeto, tomando nota de los colores indicados en la figura 35.27:

- El rayo 1 (azul), se dibuja paralelo al eje principal. Una vez refractado por la lente, este rayo pasa a través del foco en la cara posterior de la lente.
- El rayo 2 (verde), se dibuja a través del foco en la cara frontal de la lente (o como si saliera del foco en el caso de que  $p < f$ ) y emerge de ésta paralelo al eje principal.
- El rayo 3 (rojo), se dibuja a través del centro de la lente y sigue en línea recta.

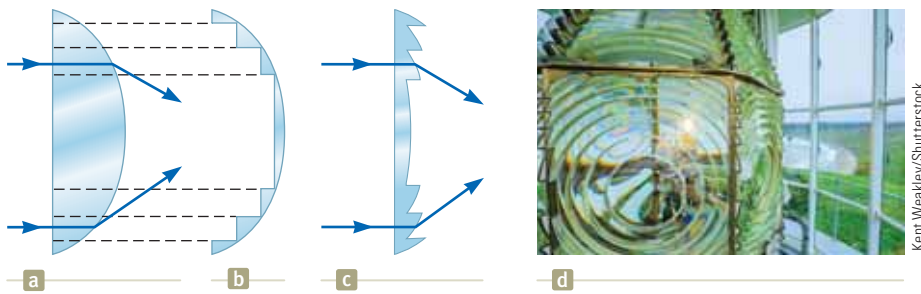
Para localizar la imagen de una lente *divergente* (figura 35.27c), se trazan los tres rayos siguientes a partir de la parte superior del objeto:

- El rayo 1 (azul), se dibuja paralelo al eje principal. Después de ser refractado por la lente, emerge alejándose desde el foco en la cara frontal de la lente.
- El rayo 2 (verde), se dibuja en la dirección hacia el foco en la cara posterior de la lente y emerge de ésta paralelo al eje principal.
- El rayo 3 (rojo), se dibuja a través del centro de la lente y continúa en línea recta.

Para la lente convergente de la figura 35.27a, donde el objeto está a la izquierda del foco ( $p > f$ ), la imagen es real e invertida. Cuando el objeto está entre el foco y la lente ( $p < f$ ), como en la figura 35.27b, la imagen es virtual y vertical. En este caso, las lentes actúan como una lupa, que se estudiará con más detalle en la sección 35.6. Para



**Figura 35.27** Diagramas de rayos para la localización de la imagen formada por una lente delgada.



**Figura 35.28** Una vista lateral de la construcción de una lente de Fresnel. (a) La lente gruesa refracta un rayo de luz como se muestra. (b) El material en la mayor parte de la lente se corta de distancia, dejando sólo el material cerca de la superficie curva. (c) Los pequeños pedazos de material restante se mueven a la izquierda para formar una superficie plana en el lado izquierdo de la lente de Fresnel con crestas en la superficie derecha. Desde una vista frontal, estas crestas serían de forma circular. Esta nueva lente refracta la luz en la misma manera que la lente en (a). (d) Una lente de Fresnel usada en un faro muestra varios segmentos con las crestas analizadas en (c).

una lente divergente (figura 35.27c), la imagen siempre es virtual y hacia arriba, sin importar dónde esté colocado el objeto. Estas construcciones geométricas son razonablemente precisas sólo en el caso en que la distancia entre los rayos y el eje principal sea mucho menor que los radios de las superficies de las lentes.

Observe que la refracción se presenta sólo en la superficie de la lente. El material uniforme dentro de la lente simplemente propaga la luz, pero no afecta la dirección en la que viaja. Un cierto diseño de lentes aprovecha este hecho para producir las *lentes Fresnel*, las cuales son poderosas y muy delgadas. Como únicamente la superficie de la curvatura es importante en las características refractoras de la lente, el material central de una lente Fresnel se retira como se muestra en el corte transversal de las lentes en la figura 35.28. Ya que las orillas de los segmentos curvos provocan algo de distorsión, las lentes Fresnel se utilizan en situaciones en que la calidad de la imagen es menos importante que la ligereza; los proyectores para aulas tienen lentes Fresnel; las orillas circulares entre segmentos de lente pueden apreciarse al ver de cerca la luz proyectada a una pantalla.

**E XAMEN RÁPIDO 35.6** ¿Cuál es la distancia focal de una hoja de vidrio para ventana? (a) cero, (b) infinito, (c) el espesor del vidrio, (d) imposible de determinar.

### Ejemplo 35.8 Imágenes formadas por una lente convergente

Una lente convergente tiene una distancia focal de 10.0 cm.

**(A)** Se coloca un objeto a 30.0 cm de la lente. Construya un diagrama de rayos, encuentre la distancia de la imagen y describa la imagen.

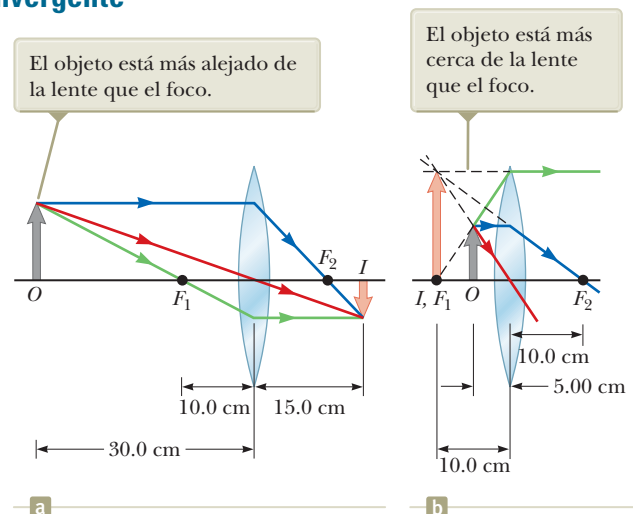
#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Ya que la lente es convergente, la distancia focal es positiva (véase la tabla 35.3). Espere posibilidades de imágenes real y virtual.

**Categorizar** Como la distancia de objeto es mayor que la distancia focal, se espera que la imagen sea real. El diagrama de rayos para esta situación se muestra en la figura 35.29a.

**Analizar** Ya que la ecuación 35.18 es idéntica a la ecuación 35.6 para los espejos. Puede utilizar la ecuación 35.7 para lentes:

$$q = \frac{fp}{p - f} = \frac{(10.0 \text{ cm})(30.0 \text{ cm})}{30.0 \text{ cm} - 10.0 \text{ cm}} = +15.0 \text{ cm}$$



**Figura 35.29** (Ejemplo 35.8) Imagen formada por una lente convergente.

continúa

35.8 continuación

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 35.19:

$$M = -\frac{q}{p} = -\frac{15.0 \text{ cm}}{30.0 \text{ cm}} = -0.500$$

**Finalizar** El signo positivo para la distancia de imagen dice que la imagen de hecho es real y en la cara posterior de la lente. El aumento de la imagen dice que se reduce en altura a la mitad, y el signo negativo para  $M$  dice que la imagen está invertida.

**(B)** Un objeto se coloca a 5.00 cm de la lente. Construya un diagrama de rayos, halle la distancia de imagen y describa la imagen.

SOLUCIÓN

**Categorizar** Como la distancia del objeto es menor que la distancia focal, se espera que la imagen sea virtual. El diagrama de rayos para esta situación se muestra en la figura 35.29b.

**Analizar** Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 35.27:

$$q = \frac{fp}{p - f} = \frac{(10.0 \text{ cm})(5.00 \text{ cm})}{5.00 \text{ cm} - 10.0 \text{ cm}} = -10.0 \text{ cm}$$

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-10.0 \text{ cm}}{5.00 \text{ cm}}\right) = +2.00$$

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 35.19:

**Finalizar** La distancia de imagen negativa dice que la imagen es virtual y se forma en el lado del lente desde donde incide la luz, la cara frontal. La imagen es agrandada y el signo positivo para  $M$  dice que la imagen es vertical.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Si el objeto se mueve en línea recta hacia la superficie de la lente, de modo que  $p \rightarrow 0$ ? ¿Dónde está la imagen?

**Respuesta** En este caso, ya que  $p \ll R$ , donde  $R$  es cualquiera de los radios de las superficies de la lente, la curvatura de la lente se ignora. Debe parecer que las lentes tienen el mismo efecto que una pieza plana de material, lo que sugiere que la imagen está justo en la cara frontal de la lente, en  $q = 0$ . Esta conclusión se verifica matemáticamente al reordenar la ecuación de lente delgada:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

Si se hace  $p \rightarrow 0$ , el segundo término a la derecha se vuelve muy grande en comparación con el primero y se puede despreciar  $1/f$ . La ecuación se convierte en

$$\frac{1}{q} = -\frac{1}{p} \rightarrow q = -p = 0$$

Por tanto,  $q$  está en la cara frontal de la lente (porque tiene el signo opuesto a  $p$ ) y recto en la superficie de la lente.

Ejemplo 35.9 Imágenes formadas por lentes divergentes

Una lente divergente tiene una longitud focal de 10.0 cm.

**(A)** Se coloca un objeto a 15.0 cm de la lente. Construya un diagrama de rayos, encuentre la distancia de imagen y describa la imagen.

SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Debido a que la lente es divergente, la distancia focal es negativa (véase la tabla 35.3). El diagrama de rayos para esta situación se muestra en la figura 35.30a.

**Categorizar** Ya que la lente es divergente, se espera que se forme una imagen virtual reducida vertical para cualquier posición del objeto.

**Analizar** Encuentre la distancia de la imagen con la ecuación 35.7:

$$q = \frac{fp}{p - f} = \frac{(-10.0 \text{ cm})(15.0 \text{ cm})}{15.0 \text{ cm} - (-10.0 \text{ cm})} = -6.00 \text{ cm}$$

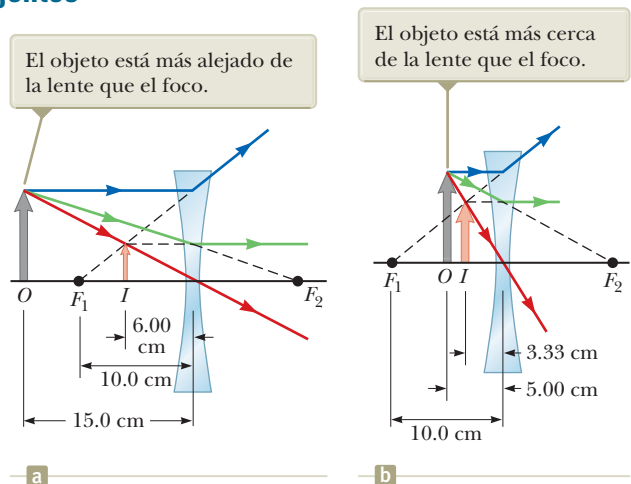


Figura 35.30 (Ejemplo 35.9) Imagen formada por una lente divergente.

## 35.9 continuación

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 35.19:

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-6.00 \text{ cm}}{15.0 \text{ cm}}\right) = +0.400$$

**Finalizar** Este resultado confirma que la imagen es virtual, menor que el objeto y vertical.

**(B)** Se coloca un objeto a 5.00 cm de la lente. Construya un diagrama de rayos, encuentre la distancia de la imagen y describa la imagen

## SOLUCIÓN

El diagrama de rayos para esta situación se muestra en la figura 35.30b.

**Analizar** Encuentre la distancia de imagen con la ecuación 35.7:

$$q = \frac{fp}{p-f} = \frac{(-10.0 \text{ cm})(5.00 \text{ cm})}{5.00 \text{ cm} - (-10.0 \text{ cm})} = -3.33 \text{ cm}$$

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 35.19:

$$M = -\left(\frac{-3.33 \text{ cm}}{5.00 \text{ cm}}\right) = +0.667$$

**Finalizar** Para las dos posiciones del objeto, la posición de imagen es negativa y el aumento es un número positivo menor que 1, lo que confirma que la imagen es virtual, menor que el objeto y vertical.

## Combinación de lentes delgadas

Si dos lentes delgadas se utilizan para formar una imagen, el sistema se trata de la siguiente manera: primero, la imagen formada por la primera lente se localiza como si no estuviera presente la segunda lente. Después se traza un diagrama de rayos para la segunda lente, con la imagen formada por la primera lente como objeto para la segunda. La segunda imagen formada es la imagen final del sistema. Si la imagen formada por la primera lente aparece en la cara posterior de la segunda, esa imagen se trata como un objeto virtual para la segunda lente (es decir, en la ecuación de las lentes delgadas,  $p$  es negativa). Este mismo procedimiento se extiende a sistemas de tres o más lentes. Ya que el aumento debido a la segunda lente se efectúa sobre la imagen aumentada debida a la primera lente, el aumento general de la imagen causada por la combinación de las lentes es el producto de los aumentos individuales.

$$M = M_1 M_2 \quad (35.20)$$

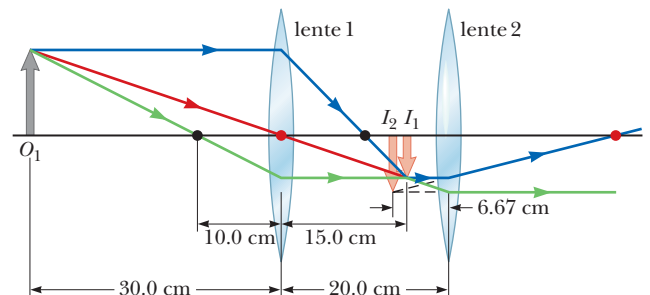
Esta ecuación sirve para combinaciones de elementos ópticos cualesquiera como una lente y un espejo. Para más de dos elementos ópticos, los aumentos debidos a todos los elementos se multiplican juntos.

### Ejemplo 35.10 ¿Dónde está la imagen final?

Dos lentes convergentes delgadas, con distancias focales  $f_1 = 10.0 \text{ cm}$  y  $f_2 = 20.0 \text{ cm}$ , separadas  $d = 20.0 \text{ cm}$ , como se ilustra en la figura 35.31. Un objeto se coloca a  $30.0 \text{ cm}$  a la izquierda de la lente 1. Encuentre la posición y la amplificación de la imagen final.

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine que los rayos de luz pasan a través de la primera lente y forman una imagen real (ya que  $p > f$ ) en ausencia de una segunda lente. La figura 35.31 muestra estos rayos de luz que forman la imagen invertida  $I_1$ . Una vez que los rayos de luz convergen en el punto imagen, no se detienen. Continúan a través del punto de imagen e interactúan con la segunda lente. Los rayos que dejan el punto de imagen se comportan en la misma forma que los rayos que dejan al objeto. Por tanto, la imagen de la primera lente sirve como el objeto de la segunda lente.



**Figura 35.31** (Ejemplo 35.10) Una combinación de dos lentes convergentes. El diagrama de rayos muestra la ubicación de la imagen final ( $I_2$ ) debida a la combinación de lentes. Los puntos negros son los focos de la lente 1 y los puntos rojos son los focos de la lente 2. Observe que el rayo verde para la lente 1 se convierte en el rayo azul para la lente 2. Además, como el punto focal para la lente 2 está en el centro de la lente 1, el rayo rojo para la lente 1 se convierte en el rayo verde para la lente 2.

continúa

## 35.10 continuación

**Categorizar** Este problema se clasifica como uno en el que la ecuación de lente delgada es aplicada de manera gradual a las dos lentes.

**Analizar** Encuentre la ubicación de la imagen formada por la lente 1 a partir de la ecuación de lente delgada:

$$q_1 = \frac{f_1 p_1}{p_1 - f_1} = \frac{(10.0 \text{ cm})(30.0 \text{ cm})}{30.0 \text{ cm} - 10.0 \text{ cm}} = +15.0 \text{ cm}$$

Encuentre el aumento de la imagen a partir de la ecuación 35.19:

$$M_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{15.0 \text{ cm}}{30.0 \text{ cm}} = -0.500$$

La imagen formada por esta lente actúa como el objeto para la segunda lente. Debido a eso, la distancia del objeto para la segunda lente es  $p_2 = d - q_1 = 20.0 \text{ cm} - 15.0 \text{ cm} = 5.00 \text{ cm}$ .

Encuentre la ubicación de la imagen formada por la lente 2 a partir de la ecuación de la lente delgada:

$$q_2 = \frac{f_2 p_2}{p_2 - f_2} = \frac{(20.0 \text{ cm})(5.00 \text{ cm})}{5.00 \text{ cm} - 20.0 \text{ cm}} = -6.67 \text{ cm}$$

Halle el aumento de la imagen a partir de la ecuación 35.19:

$$M_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{(-6.67 \text{ cm})}{5.00 \text{ cm}} = +1.33$$

Halle el aumento global del sistema a partir de la ecuación 35.20:

$$M = M_1 M_2 = (-0.500)(1.33) = -0.667$$

**Finalizar** El signo negativo en el aumento global indica que la imagen final está invertida respecto al objeto inicial. Ya que el valor absoluto del aumento es menor que 1, la imagen final es menor que el objeto.

Debido a que  $q_2$  es negativa, la imagen final está en el lado de enfrente, o izquierdo, de la lente 2. Estas conclusiones son consistentes con el diagrama de rayos de la figura 35.31.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que quiere crear una imagen vertical con este sistema de dos lentes. ¿Cómo debe mover la segunda lente?

**Respuesta** Ya que el objeto está más lejos de la primera lente que la distancia focal de dicha lente, la primera imagen está invertida. En consecuencia, la segunda lente debe invertir la imagen una vez más de modo que la imagen final esté dere-

cha. Una imagen invertida sólo se forma por una lente convergente si el objeto está fuera del foco. Por tanto, la imagen formada por la primera lente debe estar a la izquierda del foco de la segunda lente en la figura 35.31. Para hacer que esto suceda, debe mover la segunda lente al menos tan lejos de la primera lente como la suma  $q_1 + f_2 = 15.0 \text{ cm} + 20.0 \text{ cm} = 35.0 \text{ cm}$ .

Considere el caso especial de un sistema de dos lentes de distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  que están en contacto la una con la otra. Si  $p_1 = p$  es la distancia objeto de la combinación, la aplicación de la ecuación de las lentes delgadas (ecuación 35.18) a la primera lente da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$$

donde  $q_1$  es la distancia imagen para la primera lente. Si trata esta imagen como objeto de la segunda lente, la distancia objeto para ésta debe ser  $p_2 = -q_1$ . (Las distancias son iguales porque las lentes están en contacto y se han supuesto infinitesimalmente delgadas. La distancia objeto es negativa porque el objeto es virtual.) Por tanto, para la segunda lente

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \rightarrow -\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$$

donde  $q = q_2$  es la distancia de imagen final desde la segunda lente, que es la distancia de imagen de la combinación de lentes. Si suma las ecuaciones para las dos lentes, elimine  $q_1$  y eso da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Si la combinación es sustituida con una lente simple que forma una imagen en la misma ubicación, su distancia focal está relacionada con las distancias focales individuales mediante la expresión

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (35.21)$$

Por tanto, dos lentes delgadas en contacto entre sí son equivalentes a una lente simple delgada de distancia focal conocida por la ecuación 35.21.

Distancia focal para una combinación de dos lentes delgadas en contacto





## 35.5 Aberraciones de las lentes

Este análisis de espejos y de lentes supone que los rayos forman ángulos pequeños con el eje principal y que las lentes son delgadas. En este modelo simple, todos los rayos que salen de una fuente puntual se enfocan en un solo punto, produciendo una imagen nítida. Es claro que no siempre sucede así. Cuando las aproximaciones que se utilizan en este análisis ya no son válidas, se forman imágenes imperfectas.

Un análisis preciso de la formación de la imagen requiere trazar cada rayo utilizando la ley de Snell sobre cada superficie de refracción así como las leyes de la reflexión en cada superficie de reflexión. Este procedimiento muestra que los rayos provenientes de un objeto puntual no se enfocan en un solo punto, lo que da como resultado una imagen borrosa. Las desviaciones de imágenes reales del ideal pronosticado en este modelo simplificado, se conocen como **aberraciones**.

### Aberraciones esféricas

Las **aberraciones esféricas** se presentan debido a que los focos de los rayos alejados del eje principal de una lente (o espejo) esférica son diferentes de los focos de rayos con la misma longitud de onda que pasan cerca del eje. La figura 35.32 muestra la aberración esférica para los rayos paralelos que pasan a través de una lente convergente. Los rayos que pasan a través de puntos cercanos al centro de la lente forman una imagen más lejos de la lente que los rayos que pasan a través de puntos cerca de los bordes. La figura 35.7 al inicio de este capítulo mostró aberración esférica para los rayos de luz que salen de un objeto puntual y golpean un espejo esférico.

Muchas cámaras fotográficas tienen una abertura ajustable para controlar la intensidad de la luz y reducir la aberración esférica. (Una abertura es un orificio que controla la cantidad de luz que pasa a través de la lente.) Conforme el tamaño de la abertura disminuye se producen imágenes más nítidas porque, en el caso de una pequeña abertura, sólo la parte central de la lente queda expuesta a la luz y debido a eso, un mayor porcentaje de los rayos son paraxiales. Sin embargo, al mismo tiempo, pasa menos luz a través de la lente. Con la finalidad de compensar esta menor intensidad luminosa, se utiliza más tiempo de exposición.

En el caso de los espejos, la aberración esférica se minimiza mediante una superficie reflejante parabólica en lugar de una superficie esférica. De cualquier modo, las superficies parabólicas se utilizan muy poco, ya que aquellas con una óptica de alta calidad resultan muy costosas de fabricar. Los rayos de luz paralelos que inciden en una superficie parabólica se enfocan en un punto común, independiente de su distancia al eje principal. Estas superficies reflectoras parabólicas se utilizan en muchos telescopios astronómicos a fin de mejorar la calidad de la imagen.

### Aberraciones cromáticas

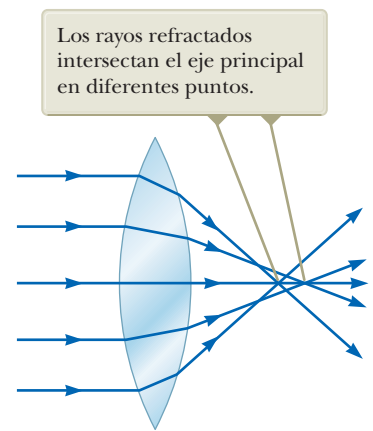
En el capítulo 34 se describe la dispersión, por medio de la cual un índice de refracción de un material se modifica en función de la longitud de onda. Debido a este fenómeno, cuando pasa luz blanca a través de una lente, los rayos violetas se refractan más que los rojos (figura 35.33). La figura muestra que la distancia focal de una lente es mayor para la luz roja que para la violeta. Otras longitudes de onda (que no se muestran en la figura 35.33) tienen focos intermedios entre la luz roja y la violeta, lo que causa una imagen borrosa, llamada **aberración cromática**.

Para el caso de una lente divergente, la aberración cromática también da como resultado una distancia focal más corta para la luz violeta que para la luz roja, pero en la cara frontal de la lente. La aberración cromática puede reducirse de manera significativa al combinar una lente convergente fabricada con una clase de vidrio y con una lente divergente hecha con otra clase de vidrio.

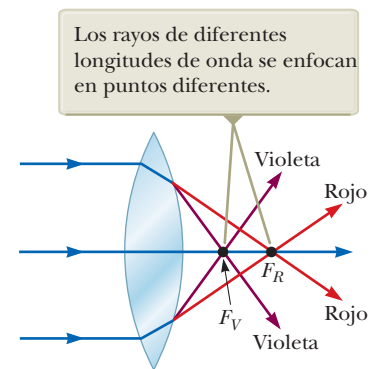
## 35.6 Instrumentos ópticos

### La cámara

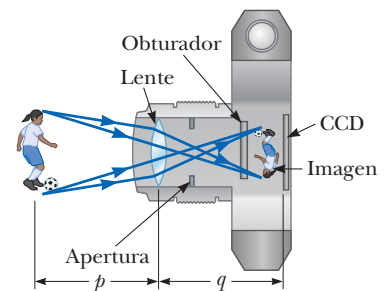
La **cámara** fotográfica es un instrumento óptico sencillo cuyas características esenciales aparecen en la figura 35.34. Está constituida por una cámara hermética a la luz, una lente convergente que produce una imagen real y un componente sensible a la luz por detrás de la lente en el que se forma la imagen.



**Figura 35.32** Aberración esférica causada por una lente convergente. ¿Una lente divergente causa una aberración esférica?



**Figura 35.33** Aberración cromática causada por una lente convergente.



**Figura 35.34** Vista de la sección transversal de una cámara digital sencilla. El CCD es el componente sensible a la luz de la cámara. En cámaras no digitales, la luz cae sobre la película fotográfica. En realidad,  $p \gg q$ .

La imagen de una cámara digital es formada en un *dispositivo acoplado por carga* (CCD, *charge-coupled device*), que digitaliza la imagen, lo que resulta en un código binario. (El CCD se describe en la sección 39.2.) Esta información digital se guarda después en la memoria para reproducirla en la pantalla de la cámara, o puede ser descargada a una computadora. Las cámaras de cine son similares a las cámaras digitales excepto porque la luz forma una imagen en una película sensible a la luz en lugar de un CCD. La película debe procesarse químicamente para producir la imagen en papel. En la siguiente explicación se considera que la cámara es digital.

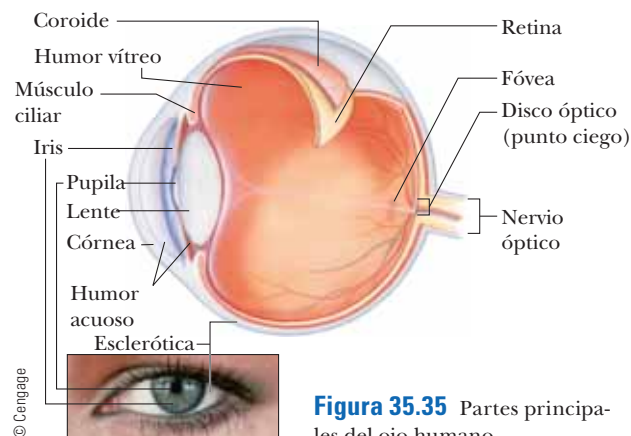
Una cámara se enfoca al variar la distancia entre la lente y el CCD. Para un enfoque adecuado –que es necesario para la formación de imágenes nítidas– la distancia lente a CCD depende de la distancia objeto así como la distancia focal de la lente.

El obturador, colocado por detrás de la lente es un dispositivo mecánico que se abre durante intervalos predeterminados de tiempo, conocidos como *tiempo de exposición*. Es posible fotografiar objetos en movimiento utilizando tiempos de exposición breves o fotografiar escenas oscuras (con bajos niveles de luminosidad) utilizando tiempos de exposición largos. De no tener este ajuste disponible, resultaría imposible registrar fotografías que detienen el movimiento. Por ejemplo, un vehículo que se desplaza rápidamente puede moverse lo suficiente mientras el obturador está abierto como para producir una imagen borrosa. Otra causa principal de imágenes borrosas es que la cámara se mueve mientras el obturador está abierto. A fin de impedir este movimiento, deberán utilizarse tiempos de exposición breves o un trípode, incluso para objetos inmóviles. Las velocidades características de obturador (es decir, tiempos de exposición) son (1/30)s, (1/60)s, (1/125)s y (1/250)s. En la práctica, los objetos estacionarios se fotografían normalmente con una velocidad de obturador intermedia (1/60)s.

## El ojo

Similar a la cámara fotográfica, un ojo normal enfoca la luz y produce una imagen nítida. Sin embargo, los mecanismos mediante los cuales el ojo controla y ajusta la cantidad de luz admitida para producir imágenes correctamente enfocadas, son mucho más complejos, intrincados y efectivos que los de la cámara más avanzada. En todos los aspectos, el ojo es una maravilla fisiológica.

La figura 35.35 muestra los componentes básicos del ojo humano. La luz que entra en el ojo pasa a través de una estructura transparente llamada *córnea* (figura 35.36), por detrás de la cual existen un líquido transparente (el *humor acuoso*), una abertura variable (la *pupila*, que es una vía dentro del *iris*) y el *lente cristalino*. La mayor parte de la refracción se presenta en la superficie externa del ojo, donde la córnea está siempre cubierta por una película de lágrima. En el lente cristalino existe relativamente poca refracción, porque el humor acuoso en contacto con esta lente tiene un índice de refracción promedio similar al de la lente. El iris, que es la parte de color del ojo, es un diafragma muscular que controla el tamaño de la pupila. El iris regula la cantidad de luz que entra en el ojo al dilatar o abrir la pupila en condiciones de luz insuficiente y al contraer o cerrar la pupila en condiciones de elevada luminosidad.



**Figura 35.35** Partes principales del ojo humano.



**Figura 35.36** Acercamiento a la córnea del ojo.

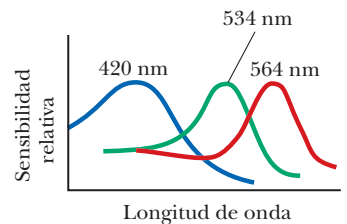
El sistema córnea-lente enfoca la luz en la superficie posterior del ojo, la *retina*, constituida por millones de receptores sensibles, conocidos como *bastones* y *conos*. Al ser estimulados por la luz, estos receptores envían impulsos por el nervio óptico al cerebro, donde se percibe una imagen. Mediante este proceso, se observa una imagen nítida de un objeto cuando su imagen coincide en la retina.

El ojo humano enfoca un objeto al variar la forma del lente dúctil llamado cristalino mediante un proceso maravilloso conocido como **acomodación**. Todos estos ajustes de la lente ocurren con tanta rapidez que ni siquiera es posible darse cuenta del cambio. La acomodación tiene como límite que cuando los objetos están muy cerca del ojo, se producen imágenes borrosas. El **punto proximal** es la menor distancia a la cual el ojo puede acomodarse para enfocar la luz en la retina. Esta distancia por lo general aumenta con el transcurso del tiempo y tiene un valor promedio de 25 cm. Por lo general, a los 10 años el punto proximal del ojo es de aproximadamente 18 cm. Aumenta a cerca de 25 cm a los 20 años, a 50 cm a los 40 años y a 500 cm o más a los 60 años. El **punto lejano** del ojo representa la mayor distancia en la cual la lente del ojo relajado enfoca luz sobre la retina. Una persona con visión normal ve objetos muy lejanos y por tanto tiene un punto lejano que se acerca al infinito.

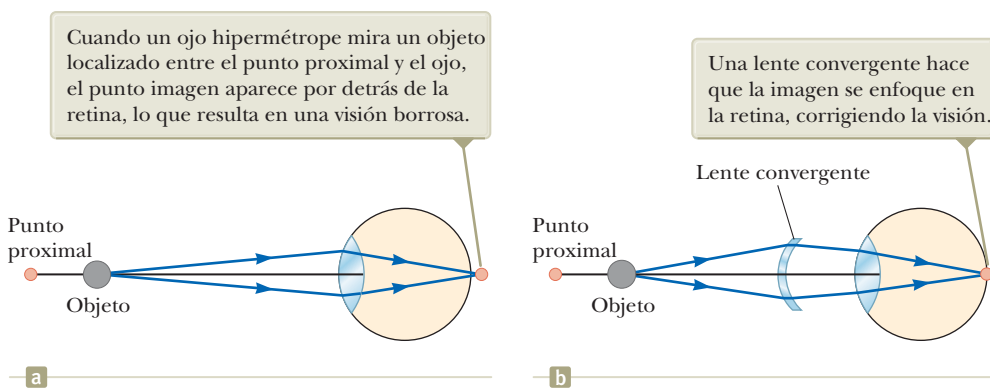
La retina está cubierta con dos tipos de células sensibles a la luz, llamados **conos** y **bastones**. Los bastones no son sensibles al color, pero son más sensibles a la luz que los conos. Son además, responsables de la *visión escotópica* o visión oscura. Los bastones se extienden por toda la retina y permiten una buena visión periférica para todos los niveles de iluminación y detección de movimiento en la oscuridad. Los conos se concentran en la fovea. Estas células son sensibles a diferentes longitudes de onda de la luz. Los tres tipos de células sensibles al color; se conocen como conos rojos, verdes y azules, debido al máximo de la escala cromática a la cual responden (figura 35.37). Si se estimulan simultáneamente los conos rojos y los verdes (como ocurriría si fueran iluminados por una luz amarilla), el cerebro interpreta lo que se está viendo como color amarillo. Si todos los tipos de conos se estimulan mediante rayos independientes de color rojo, azul y verde, aparece el color blanco. Si los tres tipos de conos se estimulan por luz que contiene *todos* los colores, como es por ejemplo la luz solar, de nuevo se ve luz blanca.

Las televisiones y los monitores de computadora aprovechan esta ilusión visual utilizando solo puntos rojos, verdes y azules en la pantalla. Con combinaciones específicas de la brillantez en estos tres colores primarios, se logra que los ojos vean cualquiera de los colores del arco iris. Por tanto, el limón amarillo que observa en un anuncio de televisión, no es realmente amarillo, ¡es rojo y verde! El papel sobre el cual está impresa esta página está constituido por fibras minúsculas aplastadas y traslúcidas que dispersan la luz en todas las direcciones; la mezcla resultante de colores parece blanca para el ojo. La nieve, las nubes y las canas no son realmente blancas. De hecho, no existe un pigmento blanco. La apariencia de estas cosas es una consecuencia de la dispersión de luz que contiene todos los colores y que el cerebro interpreta como blanco.

Cuando el ojo sufre una falta de coincidencia entre el alcance de enfoque del sistema lente-córnea y la longitud real del ojo, con el resultado de que los rayos luminosos provenientes de un objeto cercano llegan a la retina antes de converger para formar una imagen, según se observa en la figura 35.38a, el estado se conoce como **hipermetrópia** (o *hiperopía*). Una persona hipermetrope por lo general puede ver objetos leja-

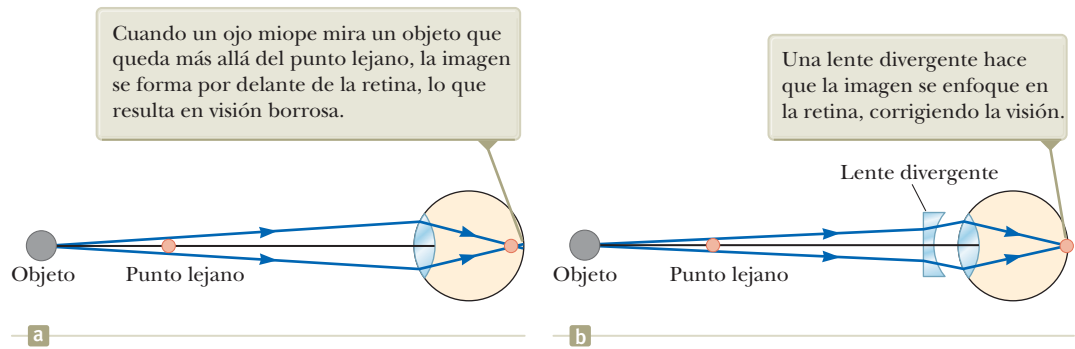


**Figura 35.37** Sensibilidad al color aproximada de los tres tipos de conos presentes en la retina.



**Figura 35.38** (a) Ojo hipermetrope sin corrección. (b) Ojo hipermetrope corregido con una lente convergente.

**Figura 35.39** (a) Ojo miope sin corrección (b) Ojo miope corregido con una lente divergente



nos con claridad, pero no los cercanos. A pesar de que el punto proximal de un ojo humano normal es de aproximadamente 25 cm, el punto proximal de una persona hipermetrope está mucho más alejado. La capacidad de refracción de la córnea y en el cristalino es insuficiente para enfocar la luz de todos los objetos de manera satisfactoria, con excepción de los distantes. Este estado puede ser corregido colocando una lente convergente delante del ojo, según se observa en la figura 36.37b. La lente refracta los rayos incidentes acercándolos más al eje principal antes de que entren en el ojo, permitiendo su convergencia y su enfoque en la retina.

Una persona con visión corta (**o miopía**), otro estado de falta de coincidencia, puede enfocar objetos cercanos pero no los lejanos. El punto lejano del ojo miope no es el infinito y puede ser incluso inferior a un metro. La distancia focal máxima del ojo miope es insuficiente para producir una imagen nítida sobre la retina y los rayos provenientes de un objeto distante convergen en foco por delante de ésta. Después de eso continúan más allá de dicho punto, en divergencia hasta que finalmente llegan a la retina, lo que causa visión borrosa (figura 35.39a). La miopía puede ser corregida mediante una lente divergente, como se observa en la figura 35.39b. La lente refracta los rayos alejándolos del eje principal antes de que entren en el ojo, lo que permite que se enfoquen sobre la retina.

Muchas personas tienen dificultades con el *daltonismo*. Algunos individuos son *dicromáticos*, lo que significa que solo tienen conos funcionales para dos de los tres colores en la figura 35.37. Otro tipo de daltonismo ocurre en personas que son *tricrómicas anómalas*. Para estas personas, el rango de sensibilidad de, con mayor frecuencia, los conos sensibles al rojo y al verde se ha desplazado para que haya más superposición entre las curvas roja y verde en la figura 35.37. Esto hace que sea difícil distinguir el rojo y el verde.

Un nuevo tipo de gafas ofrece cierto alivio para los tricromatos anómalos. Las gafas están diseñadas para filtrar las regiones de longitud de onda en las que se cruzan las curvas de la figura 35.37, lo que permite al individuo ver tres regiones de longitud de onda distintas. Un gran número de personas que prueban estas gafas nuevas notan una mejora notable en su percepción de los colores.

Los optometristas y los oftalmólogos, por lo general prescriben lentes<sup>1</sup> que se miden en **dioptrías**: la **potencia**  $P$  de una lente en dioptrías es igual al inverso de la distancia focal en metros:  $P = 1/f$ . Por ejemplo, una lente convergente de +20 cm de distancia focal tiene una potencia de +5.0 dioptrías, y una lente divergente de -40 cm de distancia focal tiene una potencia de -2.5 dioptrías.

**E XAMEN RÁPIDO 35.7** Dos excursionistas desean prender una fogata durante el día. Uno de ellos es miope y el otro hipermetrope. ¿Los anteojos de cuál de los dos deberán ser utilizados para enfocar los rayos del sol sobre papel para iniciar el fuego? (a) De cualquiera de los excursionistas, (b) del excursionista miope, (c) del excursionista hipermetrope.

<sup>1</sup> La palabra *lente* proviene de *lentil*, el nombre de una legumbre italiana. (Posiblemente ya ha comido sopa de lentejas.) Los primeros anteojos se llamaban "lentejas de vidrio" debido a que la forma biconvexa de sus lentes se parecía a la forma de una lenteja. Los primeros lentes para la hipermetropía y la presbicia aparecieron cerca del año 1280; los anteojos cóncavos para la corrección de la miopía no se descubrieron sino hasta más de 100 años después.

### La lupa simple

La lupa simple o amplificador de vidrio, está constituida por una única lente convergente. Como el nombre implica, este dispositivo aumenta el tamaño aparente de un objeto.

Suponga que se mira un objeto a cierta distancia  $p$  del ojo, según se ilustra en la figura 35.40. El tamaño de la imagen que se forma en la retina depende del ángulo  $\theta$  subtendido por el objeto en el ojo. Conforme el objeto se acerca al ojo,  $\theta$  aumenta y se observa una imagen más grande. Sin embargo, un ojo normal promedio no puede enfocar un objeto que esté más cerca de aproximadamente 25 cm, el punto proximal (figura 35.41a). Por tanto,  $\theta$  es máximo en el punto proximal.

A fin de aumentar aún más el tamaño angular aparente de un objeto, se coloca una lente convergente frente al ojo humano, como en la figura 35.41b, estando el objeto en el punto  $O$ , justo dentro del foco de la lente. En esa ubicación, la lente forma una imagen virtual, ampliada y vertical. La **amplificación angular**  $m$  es la relación del ángulo subtendido por un objeto con la lente que se está usando (ángulo  $\theta$  de la figura 35.41b) al ángulo subtendido por el objeto cuando está colocado en el punto proximal sin lente en uso (ángulo  $\theta_0$  de la figura 35.41a):

$$m \equiv \frac{\theta}{\theta_0} \tag{35.22}$$

La amplificación angular es un máximo cuando la imagen aparece en el punto proximal del ojo humano, es decir, cuando  $q = -25$  cm. A partir de la ecuación de las lentes delgadas se puede calcular la distancia objeto correspondiente a esta distancia imagen,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{-25 \text{ cm}} = \frac{1}{f} \rightarrow p = \frac{25f}{25 + f}$$

donde  $f$  es la distancia focal de la lupa, en centímetros. Si efectúa las aproximaciones por ángulos pequeños

$$\tan \theta_0 \approx \theta_0 \approx \frac{h}{25} \quad \text{y} \quad \tan \theta \approx \theta \approx \frac{h}{p} \tag{35.23}$$

La ecuación 35.22 se convierte en

$$m_{\text{máx}} = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{h/p}{h/25} = \frac{25}{p} = \frac{25}{25f/(25 + f)} \tag{35.24}$$

$$m_{\text{máx}} = 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f} \tag{35.24}$$

Aunque el ojo puede enfocar una imagen formada en cualquier posición entre el punto proximal y el infinito, está más relajado cuando la imagen se encuentra en el infinito. Para que una imagen formada por la lupa aparezca en el infinito, el objeto debe estar en el foco de la lupa. En este caso, las ecuaciones 35.23 se convierten en

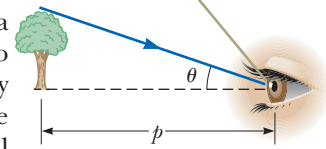
$$\theta_0 \approx \frac{h}{25} \quad \text{y} \quad \theta \approx \frac{h}{f}$$

y la amplificación es igual a

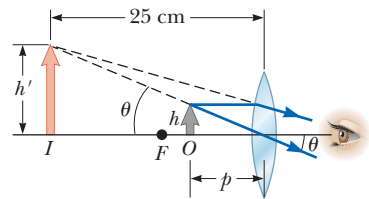
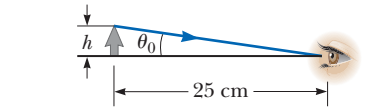
$$m_{\text{min}} = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{25 \text{ cm}}{f} \tag{35.25}$$

Con una sola lente, como la que se muestra en la figura 35.42, es posible obtener ampliaciones angulares de hasta aproximadamente 4 sin aberraciones graves. Se pueden lograr aumentos de hasta 20 utilizando una o dos lentes adicionales para corregir las aberraciones.

El tamaño de la imagen que se forma sobre la retina depende del ángulo  $\theta$  subtendido en el ojo.



**Figura 35.40** Un observador mira un objeto a una distancia  $p$ .

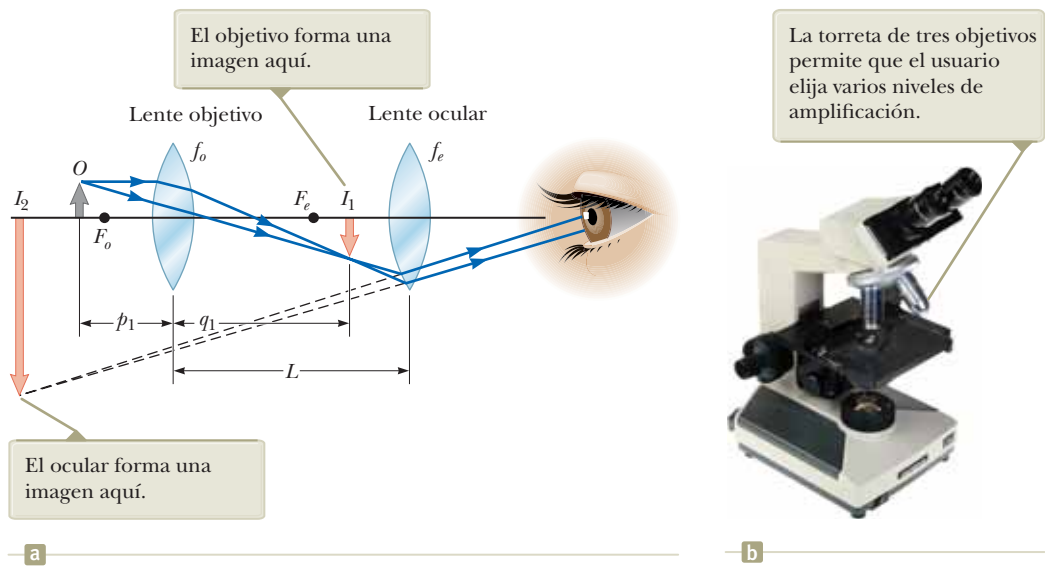


**Figura 35.41** (a) Un objeto colocado en el punto proximal del ojo ( $p = 25$  cm) subtende en el ojo un ángulo  $\theta_0 \approx h/25$ . (b) Un objeto colocado cerca del foco de una lente convergente produce una imagen aumentada que en el ojo subtende un ángulo  $\theta \approx h'/25$ .



**Figura 35.42** Una lente de aumento simple, también conocida como lupa, se utiliza para ver una imagen ampliada de una parte de un mapa.





**Figura 35.43** (a) Diagrama de un microscopio compuesto, constituido de una lente objetivo y de una lente ocular. (b) Microscopio compuesto.

### El microscopio compuesto

Una lente de aumento simple proporciona sólo una ayuda limitada en la inspección detallada de un objeto. Se logra una mayor amplificación combinando dos lentes en un dispositivo que se conoce como **microscopio compuesto**, que aparece en la figura 35.43a. El microscopio compuesto está constituido por una lente, el *objetivo*, que tiene una distancia focal muy corta  $f_o < 1$  cm, y una segunda lente, el *ocular*, que tiene una distancia focal  $f_e$  de unos cuantos centímetros. Las dos lentes están separadas una distancia  $L$  que es mucho mayor que  $f_o$  o que  $f_e$ . El objeto que se coloca justo por fuera del foco de un objetivo forma una imagen real, invertida en  $I_1$ , y queda localizada en, o cerca, del foco del ocular. El ocular, que sirve como una lente de aumento simple, produce en  $I_2$  una imagen virtual amplificada de  $I_1$ . La amplificación lateral  $M_1$  de la primera imagen es  $-q_1/p_1$ . Observe, en la figura 35.43a, que  $q_1$  es aproximadamente igual a  $L$  y que el objeto queda muy cerca del foco del objetivo:  $p_1 \approx f_o$ . Debido a eso, la amplificación lateral que logra el objetivo es igual a

$$M_o \approx -\frac{L}{f_o}$$

La amplificación angular del ocular para un objeto (correspondiente a la imagen en  $I_1$ ) colocado en el foco del ocular es, de acuerdo con la ecuación 35.25,

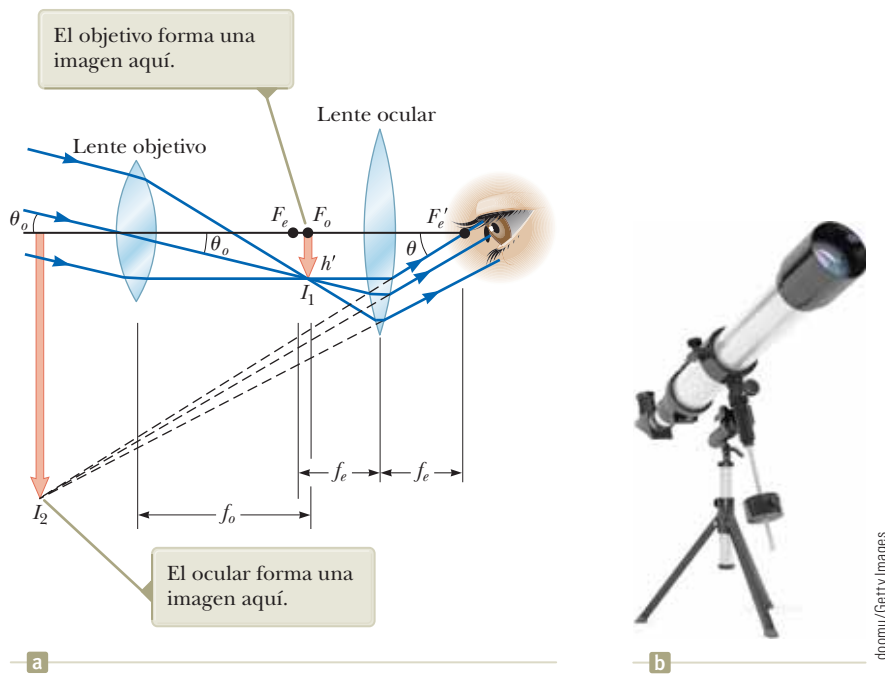
$$m_e = \frac{25 \text{ cm}}{f_e}$$

La amplificación global de la imagen formada por un microscopio compuesto se define como el producto del aumento lateral y amplificación angular:

$$M = M_o m_e = -\frac{L}{f_o} \left( \frac{25 \text{ cm}}{f_e} \right) \tag{35.26}$$

El signo negativo indica que la imagen está invertida.

El microscopio ha extendido la visión del ser humano hasta el punto en que se pueden observar detalles antes desconocidos de objetos increíblemente pequeños. La capacidad de este instrumento se ha venido incrementando con técnicas mejoradas en el pulido de precisión de las lentes. Una pregunta frecuente en relación con los microscopios es: “¿si fuera uno extremadamente paciente y cuidadoso, sería posible construir un microscopio que pudiera hacer visible al ojo humano un átomo?”. La respuesta es no, siempre que se utilice luz para iluminar el objeto. La explicación es que, para que se vea un objeto bajo un microscopio óptico (que utiliza luz visible), debe ser por lo menos tan grande como la longitud de onda de la luz. Porque el diámetro de cualquier átomo es muchas veces menor que las longitudes de onda de la luz visible, los misterios del átomo deberán ser descubiertos mediante otro tipo de “microscopios”.



**Figura 35.44** (a) Organización de lentes en un telescopio de refracción, con el objeto en el infinito. (b) Telescopio de refracción.

## El telescopio

Existen básicamente dos tipos diferentes de **telescopios**: ambos están diseñados para poder ver objetos distantes, como por ejemplo los planetas del sistema solar. El **telescopio de refracción** usa una combinación de lentes para formar una imagen, y el **telescopio de reflexión** usa un espejo curvo y una lente.

Parecido al microscopio compuesto, el telescopio de refracción que se muestra en la figura 35.44a tiene una lente objetivo y una lente ocular. Las dos lentes están colocadas de manera que el objetivo forma una imagen real e invertida de un objeto distante muy cerca del foco del ocular. Debido a que el objeto está esencialmente como si estuviera en el infinito, este punto en el cual se forma  $I_1$  es el foco del objetivo. El ocular forma después, en  $I_2$ , una imagen ampliada e invertida de la imagen en  $I_1$ . A fin de obtener la amplificación más grande posible, la distancia de imagen para el ocular es infinita. Por tanto, la imagen debida a la lente objetivo, que actúa sobre el objeto para la lente ocular, debe localizarse en el foco de ésta. Así, las dos lentes están separadas una distancia  $f_o + f_e$ , que corresponde a la longitud del tubo del telescopio.

La amplificación angular del telescopio se conoce por  $\theta/\theta_0$ , donde  $\theta_0$  es el ángulo subtendido por el objeto en el objetivo y  $\theta$  el ángulo subtendido por la imagen final en el ojo del observador. Considere la figura 35.44a, en la que el objeto está a una distancia muy grande a la izquierda de la figura. El ángulo  $\theta_0$  (a la izquierda del objetivo) subtendido por el objeto en el objetivo es el mismo que el ángulo (a la derecha del objetivo) subtendido por la primera imagen en el objetivo. Por tanto,

$$\tan \theta_o \approx \theta_o \approx -\frac{h'}{f_o}$$

donde el signo menos indica que la imagen está invertida.

El ángulo  $\theta$  subtendido por la imagen final en el ojo del observador es el mismo que forma un rayo proveniente desde la punta de  $I_1$ , y que viaja paralelamente al eje principal, con este eje después de haber pasado a través de la lente. Por tanto,

$$\tan \theta \approx \theta \approx \frac{h'}{f_e}$$

En esta ecuación no hay un signo negativo, porque la imagen final no está invertida; el objeto que crea esta imagen final  $I_2$  es  $I_1$ , y tanto ésta como  $I_2$  apuntan en



**Figura 35.45** (a) Telescopio de reflexión de enfoque newtoniano. (b) Telescopio de reflexión. Este tipo de telescopio es más corto que el de la figura 35.44b.

la misma dirección. En consecuencia, la amplificación angular del telescopio se expresa como

$$m = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{h'/f_e}{-h'/f_o} = -\frac{f_o}{f_e} \tag{35.27}$$

Este resultado muestra que la amplificación angular de un telescopio es igual a la razón entre la distancia focal del objetivo y la distancia focal del ocular. El signo menos indica que la imagen está invertida.

Cuando observa objetos relativamente cercanos a través de un telescopio, como por ejemplo la Luna y los planetas, la amplificación es significativa. Sin embargo, las estrellas de la galaxia están tan lejos que siempre aparecerán como pequeños puntos de luz, cualquiera que sea la amplificación. Un gran telescopio de investigación que se utilice para estudiar objetos muy distantes, debe poseer un diámetro significativo para recolectar toda la luz que sea posible. Las lentes para los telescopios de refracción de gran diámetro son de manufactura difícil y costosa. Otra dificultad con lentes grandes es que su peso crea un pandeo, que es una fuente adicional de aberración.

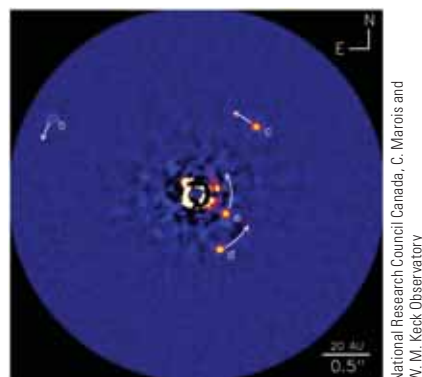
Estos problemas se superan parcialmente remplazando el objetivo por un espejo cóncavo, lo que da como resultado un segundo tipo de telescopio, el **telescopio de reflexión**. Debido a que la luz es reflejada por el espejo y no pasa a través de una lente, este puede tener soportes muy rígidos en la cara posterior. Estos soportes eliminan el pandeo.

La figura 35.45a muestra el diseño de un telescopio de reflexión representativo. Los rayos de luz incidentes son reflejados por un espejo parabólico existente en la base. Estos rayos convergen hacia el punto A en la figura, donde debería formarse una imagen. Sin embargo, antes de que se forme esta imagen, un espejo pequeño y plano M refleja la luz dirigiéndola hacia una abertura en el costado del cuerpo o tubo del telescopio, y pasa a un ocular. Este diseño en particular se dice que tiene un enfoque newtoniano porque fue Newton quien lo desarrolló. La figura 35.45b muestra este tipo de telescopio. Observe que, en el telescopio de refracción, la luz nunca pasa a través de vidrio (solo a través del pequeño ocular). Como resultado, se eliminan virtualmente todos los problemas asociados con la aberración cromática. El telescopio de reflexión se puede fabricar menos largo con el espejo plano orientado para que refleje la luz de regreso hacia el espejo objetivo y que la luz penetre en un ocular en una perforación en el punto medio del espejo.

Los telescopios de reflexión más grandes del mundo son el Gran Telescopio Canarias en las Islas Canarias, España, y el Observatorio Keck en Mauna Kea, Hawái. El sitio de Hawái incluye dos telescopios con diámetro de 10 m, cada uno constituido por 36 espejos de forma hexagonal controlados por computadora que trabajan juntos para formar una superficie de reflexión muy grande. En suma, los dos telescopios pueden trabajar juntos para proporcionar un telescopio con un diámetro efectivo de 85 m. En comparación, el telescopio de refracción más grande del mundo, el del Observatorio Yerkes en Williams Bay, Wisconsin, tiene un diámetro de apenas un metro.

La figura 35.46 muestra una imagen óptica notable desde el Observatorio Keck de un sistema solar alrededor de la estrella HR8799, situada a 129 años luz de la Tierra.

Los planetas marcados b, c, y d se observaron en 2008 y el planeta más interior, etiquetado como e, se observó en diciembre de 2010. Esta fotografía representa la primera imagen directa de otro sistema solar y fue posible gracias a la tecnología de óptica adaptativa utilizada en el Observatorio Keck.



**Figura 35.46** Imagen óptica directa de un sistema solar alrededor de la estrella HR8799, desarrollada en el Observatorio Keck en Hawái.

## Resumen

### Definiciones

El **aumento lateral**  $M$  de la imagen debida a un espejo o lente se define como la razón de la altura de la imagen  $h'$  a la altura del objeto  $h$ . Es igual al negativo de la razón de la distancia de imagen  $q$  a la distancia objeto  $p$ :

$$M \equiv \frac{\text{altura de imagen}}{\text{altura de objeto}} = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \quad (35.1, 35.2, 35.19)$$

La **amplificación angular**  $m$  es la razón del ángulo subtendido por un objeto con un lente en uso (ángulo  $\theta$  en la figura 35.41b), al ángulo subtendido por el objeto colocado en el punto cercano sin lente en uso (ángulo  $\theta_0$  en la figura 35.41a):

$$m \equiv \frac{\theta}{\theta_0} \quad (35.22)$$

### Conceptos y principios

En la aproximación de rayo paraxial, la distancia del objeto  $p$  y la distancia de la imagen  $q$  para un espejo esférico de radio  $R$  se relacionan mediante la ecuación del espejo:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \quad (35.4, 35.6)$$

donde  $f = R/2$  es la **longitud focal** del espejo.

Una imagen se puede formar por refracción de una superficie esférica de radio  $R$ . Las distancias del objeto y la imagen para refracción de tal superficie se relacionan mediante

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (35.9)$$

donde la luz es incidente en el medio para el que el índice de refracción es  $n_1$  y se refracta en el medio para el que el índice de refracción es  $n_2$ .

El inverso de la **distancia focal**  $f$  de una lente delgada rodeada por aire se conoce por la **ecuación del fabricante de lentes**:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (35.17)$$

Las **lentes convergentes** tienen distancias focales positivas, y las **lentes divergentes** tienen distancias focales negativas.

Para una lente delgada, y en la aproximación de rayo paraxial, las distancias del objeto y la imagen se relacionan mediante la **ecuación de lente delgada**:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (35.18)$$

La amplificación máxima de una lente sencilla con distancia focal  $f$  usada como una lupa simple es

$$m_{\text{máx}} = 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f} \quad (35.24)$$

La amplificación global de la imagen formada por un microscopio compuesto es:

$$M = -\frac{L}{f_o} \left( \frac{25 \text{ cm}}{f_e} \right) \quad (35.26)$$

donde  $f_o$  y  $f_e$  son las distancias de las lentes objetivo y ocular, respectivamente, y  $L$  es la distancia entre las lentes.

La amplificación angular de un telescopio de refracción se expresa como

$$m = -\frac{f_o}{f_e} \quad (35.27)$$

donde  $f_o$  y  $f_e$  son las distancias focales de las lentes objetivo y ocular, respectivamente. La amplificación angular de un telescopio de refracción se conoce por la misma expresión donde  $f_o$  es la distancia focal del espejo objetivo.

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

- ACTIVIDAD** En la figura 35.19, estime el valor de  $n_1$  si el aire rodea el material.
- Su grupo está entrenando para convertirse en asistentes de óptica. El técnico óptico que lo está entrenando quiere que diseñe un dispositivo que creará dos imágenes en la

misma posición en el espacio, una vertical y la otra invertida. Cuando el paciente mire dentro del dispositivo, verá ambas imágenes y hará comentarios sobre su color, forma y brillo relativos. Esto le permitirá al técnico llegar a algunas conclusiones sobre las diferencias en la visión entre las partes superior e inferior de la retina. La figura TP35.2 (página 956) muestra el sistema óptico, junto con el objeto único y dos imágenes. El técnico tiene una lente con una distancia focal de lente  $f_{\text{Lente}}$  de 10.0 cm. Él quiere que usted deter-



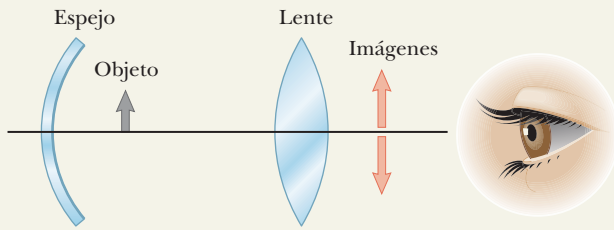


Figura TP35.2

mine la distancia focal del espejo que necesita, dado que tiene una carcasa en la que puede montar el espejo a una

distancia de  $d = 40.0$  cm del objetivo. Trabaje en su grupo para analizar y proporcionar estas cantidades.

3. **ACTIVIDAD** Con su grupo, realice la actividad con la lupa descrita en el "Imagine" de apertura del capítulo. Mida con cuidado las dos distancias indicadas en la descripción de la actividad. A partir de su comprensión del material en el capítulo, construya un argumento para explicar por qué las dos distancias deben ser similares, pero no iguales. A partir de la actividad con la pantalla del teléfono inteligente, ¿puede calcular alguna distancia representativa en la primera actividad que debería ser igual a la distancia medida en la segunda actividad?

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN From Cengage

### SECCIÓN 35.1 Imágenes formadas por espejos planos

- (a) ¿El espejo de su cuarto de baño lo hace ver más viejo o más joven de lo que realmente es? (b) Calcule una estimación del orden de magnitud de la diferencia en edad, en función de los datos que especifique.
- Dos espejos planos tienen sus superficies reflectantes uno frente al otro, con el borde de un espejo en contacto con el borde del otro, de modo que el ángulo entre los espejos es  $\alpha$ . Cuando se coloca un objeto entre los espejos, se forman una serie de imágenes. En general, si el ángulo  $\alpha$  es tal que  $n\alpha = 360^\circ$ , donde  $n$  es un número entero, el número de imágenes formadas es  $n - 1$ . Gráficamente, encuentre todas las posiciones de la imagen para el caso  $n = 6$  cuando un objeto puntual se encuentra entre los espejos (pero no en la bisectriz del ángulo).
- El uso de un periscopio (figura P35.3) es útil para observar objetos que no es posible ver de manera directa. Resulta útil en los submarinos y para observar los torneos de golf o los desfiles entre la muchedumbre. Suponga que un objeto está a una distancia  $p_1$  del espejo superior y que los centros de los dos espejos planos están separados una distancia  $h$ . (a) ¿Cuál es la distancia de la imagen final al espejo inferior? (b) ¿La imagen final es real o virtual? (c) ¿Está vertical o hacia abajo? (d) ¿Cuál es el aumento? (e) ¿La imagen está invertida de izquierda a derecha?

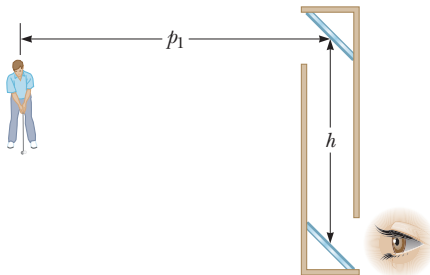


Figura P35.3

4. **CIC** Dos espejos planos están uno frente al otro, a 3.00 m de distancia, y una mujer se interpone entre ellos. La mujer se ve en uno de los espejos desde una distancia de 1.00 m y tiene el brazo izquierdo a un lado de su cuerpo con la palma de la mano frente al espejo más cercano. (a) ¿Cuál es la posición

aparente de la imagen más cercana de su mano izquierda, medida perpendicularmente desde la superficie del espejo frente a ella? (b) ¿Muestra la palma de la mano o el dorso de la mano? (c) ¿Cuál es la posición de la siguiente imagen más cercana? (d) ¿Muestra la palma de la mano o el dorso de la mano? (e) ¿Cuál es la posición de la tercera imagen más cercana? (f) ¿Muestra la palma de la mano o el dorso de la mano? (g) ¿Cuál de las imágenes es real y cuáles virtual?

### SECCIÓN 35.2 Imágenes formadas por espejos esféricos

- Un objeto se coloca 50.0 cm de un espejo esférico cóncavo con distancia focal de magnitud 20.0 cm. (a) Encuentre la ubicación de la imagen. (b) ¿Cuál es el aumento de la imagen? (c) ¿La imagen es real o virtual? (d) ¿La imagen está en posición vertical o invertida?
- Un objeto se coloca 20.0 cm de un espejo esférico cóncavo que tiene una longitud focal de magnitud 40.0 cm. (a) Use papel cuadriculado para construir un diagrama de rayos preciso de esta situación. (b) A partir de su diagrama de rayos, determine la ubicación de la imagen. (c) ¿Cuál es el aumento de la imagen? (d) Compruebe sus respuestas a los incisos (b) y (c) utilizando la ecuación del espejo.
- Un objeto de 2.00 cm de altura se coloca a 30.0 cm de un espejo esférico convexo de distancia focal de magnitud 10.0 cm. (a) Encuentre la ubicación de la imagen. (b) Indique si la imagen es vertical o invertida. (c) Determine la altura de la imagen.
- ¿Por qué no es posible la siguiente situación? En una esquina oculta en un centro comercial al aire libre, un espejo convexo está montado para que los peatones puedan ver alrededor de la esquina antes de llegar allí y toparse con alguien que viaja en dirección perpendicular. Los instaladores del espejo no tuvieron en cuenta la posición del Sol y el espejo concentra los rayos del sol en un arbusto cercano y le prende fuego.
- Una sala de gran tamaño en un museo tiene un nicho en una pared. En el plano del museo aparece como una hendidura semicircular de un radio de 2.50 m. Una persona está de pie en la línea central del nicho, a 2.00 m de su punto más profundo y murmura "Hola". ¿Dónde se concentra el sonido después de haberse reflejado de la pared del fondo del nicho?
- Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de magnitud 24.0 cm. (a) Determine la posición del objeto para el que la imagen resultante está en posición vertical y es



mayor que el objeto por un factor de 3.00. (b) Dibuje un diagrama de rayos para determinar la posición de la imagen. (c) ¿La imagen es real o virtual?

- 11.** Un objeto de 10.0 cm de altura se coloca en la marca cero de un metro de madera. Un espejo esférico, colocado en algún punto sobre el metro, crea una imagen del objeto que está vertical, tiene 4.00 cm de altura y se encuentra en la marca de los 42.0 cm en el metro. (a) ¿El espejo es convexo o cóncavo? (b) ¿Dónde se encuentra? (c) ¿Cuál es su distancia focal?

**12.** Está entrenando para convertirse en asistente de un técnico óptico. Un día, está aprendiendo cómo colocar una lente de contacto en el ojo de un paciente. Realiza una medición con un *queratómetro*, que se utiliza para medir la curvatura de la superficie frontal del ojo, la córnea. Este instrumento coloca un objeto iluminado de tamaño conocido a una distancia conocida  $p$  de la córnea. La córnea refleja algo de luz del objeto, formando una imagen del objeto. La ampliación  $M$  de la imagen se mide utilizando un telescopio de observación pequeño que permite la comparación de la imagen formada por la córnea con una segunda imagen calibrada proyectada en el campo de visión mediante una disposición de prisma. Como parte de su capacitación, el técnico le pidió que no utilizara la calculadora automática asociada con la máquina, pero debe realizar los cálculos usted mismo. Determine el radio de curvatura  $R$  de la córnea para las mediciones que realiza para el paciente:  $p = 30.0$  cm y  $M = 0.013$  0.

- 13.** Cierta decoración navideña está constituido por una esfera plateada de 8.50 cm de diámetro. (a) Determine la ubicación de un objeto en donde el tamaño de la imagen reflejada sea tres cuartas partes las dimensiones del objeto. (b) Use un diagrama de rayos principales para describir la imagen.

**14. Problema de repaso.** Se deja caer una pelota en el tiempo  $t = 0$  desde el reposo a 3.00 m directamente por encima del vértice de un espejo cóncavo que tiene un radio de curvatura de 1.00 m y que yace en un plano horizontal. (a) Describa el movimiento de la imagen de la pelota en el espejo. (b) ¿En qué momento coinciden la pelota y su imagen?

- 15.** De manera subconsciente, el ser humano estima la distancia a un objeto desde el ángulo que subtiende su campo visual. Este ángulo  $\theta$  en radianes está relacionado con la altura lineal  $h$  del objeto y la distancia  $d$ , de acuerdo con  $\theta = h/d$ . Suponga que está manejando un automóvil y que otro vehículo, de 1.50 m de altura está a 24.0 m detrás de usted. (a) Suponga que su automóvil tiene un espejo retrovisor de tipo plano del lado del pasajero, a 1.55 m de los ojos del conductor. ¿A qué distancia de los ojos está la imagen del automóvil que le viene siguiendo? (b) ¿Cuál es el ángulo subtendido por la imagen que aparece en su campo visual? (c) **¿Qué pasaría si?** Ahora suponga que su automóvil tiene un espejo retrovisor convexo con un radio de curvatura de 2.00 m (como sugiere la figura 35.15). ¿Qué tan lejos de sus ojos está la imagen del automóvil que viene atrás? (d) ¿Cuál es el ángulo que subtiende la imagen en sus ojos? (e) En términos de su tamaño angular, ¿qué tan lejos parece estar el automóvil que lo viene siguiendo?

- 16.** Un espejo esférico convexo tiene una distancia focal de magnitud 8.00 cm. (a) ¿Cuál es la ubicación de un objeto para el que la magnitud de la distancia de la imagen equivale a un tercio de la magnitud de la distancia del objeto? (b) Encuentre la ampliación de la imagen, y (c) indique si es vertical o invertida.

**SECCIÓN 35.3 Imágenes formadas por refracción**

- 17.** El extremo de una larga varilla de vidrio ( $n = 1.50$ ) se moldea formando una superficie convexa con un radio de curvatura de 6.00 cm. Un objeto está colocado en el aire a lo largo del eje de la varilla. Determine las posiciones de las imágenes que correspondan a distancias objeto de (a) 20.0 cm, (b) 10.0 cm y (c) 3.00 cm del extremo convexo de la varilla.

- 18.** La magnificación de la imagen formada por una superficie de refracción está dada por

$$M = - \frac{n_1 q}{n_2 p}$$

donde  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $p$ , y  $q$  se definen como son para la figura 35.17 y la ecuación 35.9. Un pisapapeles está hecho de un hemisferio de vidrio sólido con índice de refracción 1.50. El radio de la sección transversal circular es 4.00 cm. El hemisferio se coloca sobre su superficie plana, con el centro directamente sobre una línea dibujada de 2.50 mm de longitud en una hoja de papel. ¿Cuál es la longitud de esta línea, cómo es vista por alguien mirando verticalmente hacia abajo en el hemisferio?

- 19.** Como se muestra en la figura P35.19, Benjamín y Jacobo echan un vistazo a un acuario que tiene un frente curvo de plástico con espesor uniforme y un radio de curvatura de magnitud  $R = 2.25$  m. (a) Localice las imágenes de los peces que se encuentran a (i) 5.00 cm y (ii) 25.0 cm de la pared frontal del acuario. (b) Encuentre la magnificación de las imágenes (i) y (ii) del inciso (a). (Véase el problema 18 para encontrar una expresión para la ampliación de una imagen formada por una superficie refractante.) (c) Explique por qué usted no necesita saber el índice de refracción del plástico para resolver este problema. (d) Si este acuario es muy largo desde el frente hacia atrás, ¿la imagen de un pez pudo estar cada vez más lejos de la superficie frontal que los peces en sí? (e) En caso negativo, explique por qué no. Si es así, dé un ejemplo y encuentre la ampliación.



**Figura P35.19**

- 20.** La figura P35.20 muestra una superficie curva que separa un material con índice de refracción  $n_1$  de un material con índice  $n_2$ . La superficie forma una imagen  $I$  del objeto  $O$ . El rayo que se muestra en azul pasa a través de la superficie a lo largo de la línea radial. Sus ángulos de incidencia y refracción son cero, de modo que su dirección no cambia en la superficie. Para el rayo que se muestra en café, la dirección cambia de acuerdo con  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . Para rayos para-



xiales, se supone que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son pequeños, así que puede escribir  $n_1 \tan \theta_1 = n_2 \tan \theta_2$ . El aumento se define como  $M = h'/h$ . Demuestre que el aumento está dado por  $M = -n_1 q / n_2 p$ .

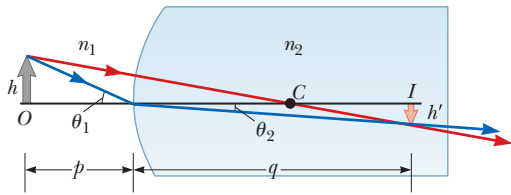


Figura P35.20

**21. CE** Para decorar su dormitorio, ha comprado una pecera de vidrio perfectamente esférica para colocarla en el alféizar de la ventana. Después de colocar la arena, las decoraciones y el agua en la pecera de 40.0 cm de diámetro, transfiere un único pez tropical de una bolsa de plástico a la pecera. Mientras observa el pez, su compañero de cuarto vuelve a casa. También mira el pez y advierte que el tamaño aparente del pez cambia a medida que nada en la pecera. (a) No está tomando un curso de física, por lo que le pide que le diga el rango de aumentos del pez mientras nada a lo largo de una línea desde la parte posterior de la pecera a lo largo de una línea que pasa por el centro de la misma directamente hacia el observador. (b) Su compañero de habitación también le pregunta si el pez podría cocinarse si nada a través de un punto en el que los rayos del Sol se enfocan en algún punto a medida que pasan a través de los lados curvos la pecera. ¿Debería preocuparse de que su pez se cocine? Ignore el efecto de las delgadas paredes de vidrio de la pecera; tome en consideración solo el agua.

**22. CE** Usted está trabajando para una compañía de energía solar. Su supervisor le ha pedido que investigue una nueva idea que se ha propuesto para un colector solar. Una gran esfera de vidrio enfoca la luz en las fotoceldas, como se muestra en la figura P35.22. Las fotoceldas son movidas por electrónicamente a lo largo de la pista curva a la derecha de la esfera. A su supervisor le gustaría construir un prototipo de un material con índice de refracción  $n$ , pero necesita que usted calcule la posición en la que se enfocan los rayos del Sol y, por tanto, que encuentre dónde ubicar la trayectoria curva.



Figura P35.22

**SECCIÓN 35.4 Imágenes formadas por lentes delgadas**

**23.** Un objeto localizado a 32.0 cm por delante de una lente forma una imagen en una pantalla a 8.00 cm por detrás de

la lente. (a) Determine su distancia focal. (b) Determine su amplificación. (c) ¿Es la lente convergente o divergente?

**24.** La distancia de un objeto a partir de una lente convergente es 5.00 veces la distancia focal. (a) Determine la ubicación de la imagen. Expresé la respuesta como una fracción de la distancia focal. (b) Encuentre la ampliación de la imagen e indique si está (c) en posición vertical o invertida, y si es (d) real o virtual.

**25. V** Una lente de contacto está hecha de plástico con un índice de refracción de 1.50. La lente tiene un radio de curvatura exterior de +2.00 cm y un radio de curvatura interior de +2.50 cm. ¿Cuál es su distancia focal?

**26. C/C** Una lente convergente tiene una distancia focal de 10.0 cm. Construya diagramas precisos de rayos para distancias objeto de (i) 20.0 cm y (ii) 5.00 cm. (a) A partir de los diagramas de rayos, determine la ubicación de cada imagen. (b) ¿La imagen es real o virtual? (c) ¿La imagen está en posición vertical o invertida? (d) ¿Cuál es la magnificación de la imagen? (e) Compare los resultados con los valores encontrados algebraicamente. (f) Comente las dificultades en la construcción de la gráfica que podrían dar lugar a diferencias entre las respuestas gráficas y algebraicas.

**27.** Una lente convergente tiene una distancia focal de 10.0 cm. Encuentre el objeto si una imagen real se encuentra a una distancia de la lente de (a) 20.0 cm y (b) 50.0 cm. **¿Qué pasaría si?** Rehaga los cálculos si las imágenes son virtuales y están situadas a una distancia de la lente de (c) 20.0 cm y (d) 50.0 cm.

**28. S** Suponga que un objeto tiene un espesor  $dp$  de manera que sobresale de la distancia objeto  $p$  hasta la distancia  $p + dp$ . (a) Demuestre que el espesor  $dq$  de su imagen se conoce por  $(-q^2/p^2)dp$ . (b) La amplificación longitudinal del objeto es  $M_{\text{long}} = dq/dp$ . ¿Cuáles el aumento lateral  $M$ ?

**29.** Un objeto se coloca a 10.0 cm de una lente divergente de una distancia focal de  $-10.0$  cm. (a) Encuentre la ubicación de la imagen. (b) Encuentre el aumento de la imagen. (c) Comente la diferencia entre esta situación y colocando un objeto a 10.0 cm de una lente convergente de distancia focal de 10.0 cm.

**30. C/C** En la figura P35.30, una lente convergente, delgada con distancia focal de 14.0 cm, forma una imagen del cuadrado  $abcd$ , que tiene de alto  $h_c = h_b = 10.0$  cm y se encuentra entre las distancias de  $p_d = 20.0$  cm y  $p_a = 30.0$  cm del lente. Sean  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  y  $d'$  las respectivas esquinas de la imagen. Sea  $q_a$  la distancia de imagen para los puntos  $a'$  y  $b'$ ,  $q_d$  la distancia de imagen para los puntos  $c'$  y  $d'$ ,  $h'_b$  la distancia desde el punto  $b'$  al eje, y  $h'_c$  la altura de  $c'$ . (a) Determine  $q_a$ ,  $q_d$ ,  $h'_b$  y  $h'_c$ . (b) Elabore un bosquejo de la imagen. (c) El área del objeto es  $100 \text{ cm}^2$ . Al realizar las siguientes etapas, evaluará el área de

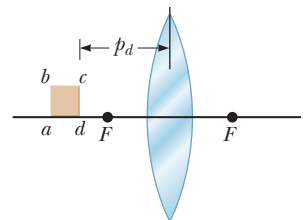


Figura P35.30

la imagen. Sea  $q$  la distancia de imagen de cualquier punto entre  $a'$  y  $d'$ , para el que la distancia del objeto es  $p$ . Sea  $h'$  la distancia desde el eje al punto en el borde de la imagen entre  $b'$  y  $c'$  a la distancia de imagen  $q$ . Demuestre que

$$|h'| = 10.0q \left( \frac{1}{14.0} - \frac{1}{q} \right)$$

donde  $h'$  y  $q$  están en centímetros. (d) Explique por qué el área geométrica de la imagen está dada por

$$\int_{q_a}^{q_b} |h'| dq$$

(e) Realice la integración para encontrar el área de la imagen.

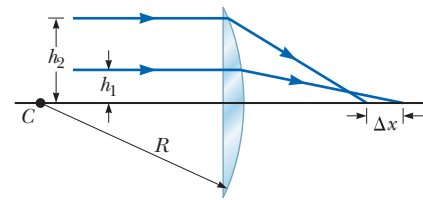


Figura P35.33

**31. CE** Está trabajando para una empresa de electrónica que fabrica dispositivos para el hogar. Su supervisor le ha asignado una tarea para ayudar a diseñar el mecanismo de proyección para la alarma de un reloj de proyección. En este tipo de reloj, se monta un sistema de proyección en el cuerpo del reloj, como se muestra en la figura P35.31a, formado por el cilindro de plata, de radio  $R = 3.25$  cm, montado en el lado izquierdo del reloj. Una lente convergente está colocada en el borde del cilindro. Dentro del cilindro, una pequeña pantalla digital de la hora en caracteres rojos se puede mover desde el centro del cilindro hacia fuera radialmente en dirección de la lente. La luz roja de la pantalla digital se puede ver en la lente en la figura P35.31a. Como resultado, una imagen de la hora se proyecta en rojo en el techo o la pared de una habitación oscura (figura P35.31b). El rango de distancias para las imágenes enfocadas de la pantalla digital es de 0.500 m a 4.00 m, medido desde el centro del cilindro. Para el valor más pequeño del rango, la pantalla digital está en el centro del cilindro. Debe determinar para su supervisor los siguientes parámetros para el diseño del sistema de proyección: (a) la distancia focal de la lente y (b) la distancia de la pantalla digital desde el centro del cilindro para obtener el valor más grande del rango.



Figura P35.31

**32.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un objeto luminoso se coloca a una distancia  $d = 2.00$  m de una pantalla. Mediante la colocación de una lente convergente de distancia focal  $f = 60.0$  cm en dos lugares entre el objeto y la pantalla, se puede formar en la pantalla una imagen nítida y real del objeto. En un lugar de la lente, la imagen es más grande que el objeto y en el otro, la imagen es más pequeña.

**SECCIÓN 35.5 Aberraciones de las lentes**

**33.** Dos rayos que se desplazan en paralelo al eje principal inciden sobre una gran lente plana convexa con un índice de refracción de 1.60 (figura P35.33). Si la cara convexa es esférica, un rayo que pase cerca del borde de la lente no pasa por el foco (se presenta aberración esférica). Suponga que esta cara tiene un radio de curvatura de  $R = 20.0$  cm y que ambos rayos se encuentran a  $h_1 = 0.500$  cm y  $h_2 = 12.0$  cm del eje principal. Encuentre cuál es la diferencia  $\Delta x$  en las posiciones en las cuales cada uno de ellos cruza el eje principal.

**SECCIÓN 35.6 Instrumentos ópticos**

- 34.** Una persona miope no puede ver objetos con claridad más allá de 25.0 cm (su punto distante). Si no tiene astigmatismo y se le prescriben lentes de contacto, (a) ¿de cuántas dioptrías y (b) qué tipo de lente se requiere para corregir su visión?
- 35.** La figura 35.34 representa el diagrama de la sección transversal de una cámara, que tiene una lente simple de 65.0 mm de distancia focal, la cual sirve para formar una imagen en el CCD en la parte posterior de la cámara. Suponga que la posición de la lente ha sido ajustada para enfocar la imagen de un objeto distante. ¿Cuánto y en qué dirección debe moverse la lente para formar una imagen nítida de un objeto que está a 2.00 m de distancia?
- 36. T** El telescopio de refracción de Observatorio Yerkes tiene una lente objetivo de 1.00 m de diámetro y una distancia focal de 20.0 m. Suponga que es utilizado con una lente ocular de 2.5 cm de distancia focal. (a) Determine la ampliación del planeta Marte visto a través de este telescopio. (b) ¿Los casquetes polares de Marte están cabeza arriba o cabeza abajo?
- 37.** La distancia entre las lentes ocular y objetivo en un microscopio compuesto es de 23.0 cm. La distancia focal del ocular es de 2.50 cm y la del objetivo es de 0.400 cm. ¿Cuál es el aumento global del microscopio?
- 38.** ¿Cuál es (a) la ampliación angular máxima que puede ser vista claramente por el ojo humano con una lupa que tiene una distancia focal de 10 cm, y (b) la ampliación angular de la imagen de esta lente cuando el ojo está relajado?
- 39. BIO C/C** Un paciente tiene un punto cercano de 45.0 cm y un punto lejano de 85.0 cm. (a) ¿Puede un solo par de gafas corregir la visión del paciente? Explique las opciones del paciente. (b) Calcule la potencia necesaria de la lente para corregir el punto cercano de manera que el paciente pueda ver objetos a 25.0 cm de distancia. Ignore la distancia ojo-lente. (c) Calcule la potencia necesaria de la lente para corregir el punto lejano del paciente, de nuevo ignore la distancia ojo-lente.
- 40.** La intensidad  $I$  de la luz que llega al CCD en una cámara es proporcional al área de la lente. Debido a que esta área es proporcional al cuadrado del diámetro  $D$ , se tiene que  $I$  también es proporcional a  $D^2$ . Como el área de la imagen es proporcional a  $q^2$  y  $q < f$  (cuando  $p \gg f$ , entonces  $p$  puede aproximarse como infinito), concluimos que la intensidad también es proporcional a  $1/f^2$  y, por tanto,  $I \propto D^2/f^2$ . La relación  $f/D$  se denomina el número  $f$  de una lente. Por tanto,  $I \propto 1/(\text{número } f)^2$ . El número  $f$  a menudo se da como una descripción de la "velocidad" de la lente. Cuanto menor sea el número  $f$ , mayor será la apertura y la velocidad a la que la energía de la luz expone el CCD; por tanto, una lente con un bajo número  $f$  es una lente "rápida". La notación convencional para un número  $f$  es " $f/$ " seguido del número real. Por ejemplo, " $f/4$ " significa un número  $f$  de 4; ¡no significa dividir  $f$  por 4! Supongamos que la lente de una cámara digital tiene una distancia focal de 55 mm y una velocidad de  $f/1.8$ .



Se sabe que el tiempo de exposición correcto para esta velocidad bajo ciertas condiciones es de 1 500 s. (a) Determine el diámetro de la lente. (b) Calcule el tiempo de exposición correcto si el número  $f$  se cambia a  $f/4$  bajo las mismas condiciones de iluminación.

**BIO** 41. El punto cercano de un niño está a 10.0 cm, su punto lejano (con los ojos relajados) está a 125 cm. Cada lente del ojo está a 2.00 cm desde la retina. (a) ¿Entre qué límites, medidos en dioptrías, varía el poder de esta combinación lente-córnea? (b) Calcule la potencia de la lente de las gafas que el niño debe utilizar para la visión relajada a distancia. ¿La lente es convergente o divergente?

**CIC** 42. Los astrónomos con frecuencia toman fotografías utilizando sólo la lente objetivo o el espejo del telescopio, sin el ocular. (a) Demuestre que el tamaño de la imagen  $h'$  de este telescopio se conoce por la expresión  $h' = fh/(f-p)$ , donde  $h$  es el tamaño del objeto,  $f$  la distancia focal del objetivo y  $p$  la distancia al objeto. (b) ¿Qué pasaría si? Simplifique la expresión del inciso a) para el caso en el cual la distancia del objeto es mucho más grande que la distancia focal del objetivo. (c) La "envergadura" de la Estación Espacial Internacional es de 108.6 m, que es el ancho total de la configuración de su panel solar. Determine el ancho de la imagen formada por un objetivo de telescopio con una distancia focal de 4.00 m cuando la estación orbita a una altitud de 407 km.

**BIO** 43. Un modelo simple del ojo humano ignora por completo su lente. La mayoría de lo que el ojo hace a la luz ocurre en la superficie externa de la córnea transparente. Suponga que esta superficie tiene un radio de curvatura de 6.00 mm y que el globo ocular contiene solo un fluido con un índice de refracción de 1.40. Demuestre que se tomarán imágenes de un objeto muy distante en la retina, 21.0 mm detrás de la córnea. Describa la imagen.

**PROBLEMAS ADICIONALES**

44. Un objeto real se ubica en el extremo cero de una regleta de medir. Un gran espejo cóncavo en la marca de 100 cm del extremo de la regleta forma una imagen del objeto en la posición de 70.0 cm. Un pequeño espejo convexo colocado en la marca de 20.0 cm forma una imagen final en el punto de 10.0cm. ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo convexo?

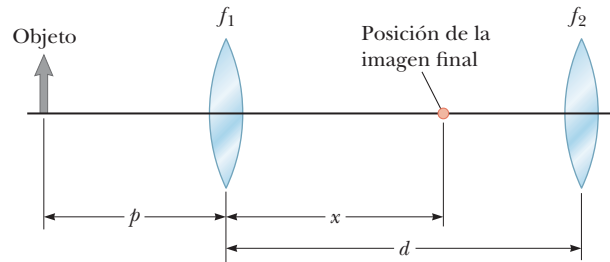
45. La distancia entre un objeto y su imagen vertical es de 20.0 cm. Si la amplificación es de 0.500, ¿cuál es la distancia focal de la lente que se utiliza para formar la imagen?

**S** 46. La distancia entre un objeto y su imagen vertical es  $d$ . Si la amplificación es  $M$ , ¿cuál es la distancia focal de la lente que se utiliza para formar la imagen?

**T** 47. Una persona decide utilizar un viejo par de anteojos para hacer algunos instrumentos ópticos. Él sabe que el punto cercano de su ojo izquierdo está a 50.0 cm y el punto cercano de su ojo derecho está a 100 cm. (a) ¿Cuál es el aumento angular máximo que se puede producir en un telescopio? (b) Si se coloca las lentes a 10.0 cm de distancia, ¿cuál es el aumento global máximo que se puede producir en un microscopio? *Sugerencia:* Vuelva a lo básico y use la ecuación de la lente delgada para resolver el inciso (b).

48. Dos lentes convergentes que tienen longitudes focales  $f_1 = 10.0$  cm y  $f_2 = 20.0$  cm se colocan separadas por una distancia  $d = 50.0$  cm como se muestra en la figura P35.48. La imagen debido a la luz que pasa a través de ambas lentes se encuentra entre las lentes en la posición  $x = 31.0$  cm indicada. (a) ¿En qué valor de  $p$  el objeto debe situarse a la

izquierda de la primera lente? (b) ¿Cuál es el aumento de la imagen final? (c) ¿La imagen final está en posición vertical o invertida? (d) ¿La imagen final es real o virtual?



**Figura P35.48**

**S** 49. Dos lentes hechas a partir de vidrios de diferentes índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$  se colocan juntas para formar lo que se conoce como un *doblete óptico*. Estos dobletes se utilizan a menudo para corregir aberraciones cromáticas en dispositivos ópticos. La primera lente tiene un lado plano y un lado cóncavo de radio de curvatura  $R$ . La segunda tiene dos lados convexos de radios de curvatura de magnitud  $R$ . La segunda lente tiene índice de refracción  $n_2$  y dos lados convexos con radios de curvatura también de magnitud  $R$ . Demuestre que este doblete puede representarse como una lente única delgada con una distancia focal expresada por

$$\frac{1}{f} = \frac{2n_2 - n_1 - 1}{R}$$

**CIC** 50. Un objeto está originalmente en la posición  $x_i = 0$  cm de un metro de madera ubicado sobre el eje  $x$ . Una lente convergente de 26.0 cm de distancia focal está fija en la posición de 32.0 cm. Después el objeto se desliza gradualmente a la posición  $x_f = 12.0$  cm. (a) Encuentre la posición  $x'$  de la imagen del objeto como función de la posición del objeto  $x$ . (b) Describa el patrón de movimiento de la imagen en referencia a una gráfica o una tabla de valores. (c) Conforme el objeto se mueve 12 cm hacia la derecha, ¿a qué distancia se mueve la imagen? (d) ¿En qué dirección o direcciones?

**T** 51. Un objeto está colocado a 12.0 cm a la izquierda de una lente divergente con una distancia focal de  $-6.00$  cm. Una lente convergente con una distancia focal de 12.0 cm se coloca a una distancia  $d$  a la derecha de la lente divergente. Encuentre la distancia  $d$ , de manera que la imagen final quede a la derecha en el infinito.

**S** 52. Un objeto está colocado a una distancia  $p$  a la izquierda de una lente divergente con una distancia focal  $f_1$ . Una lente convergente con una distancia focal  $f_2$  se coloca a una distancia  $d$  a la derecha de la lente divergente. Encuentre la distancia  $d$ , de manera que la imagen final quede a la derecha en el infinito.

**PG** 53. En un cuarto oscuro, se coloca una vela encendida a 1.50 m de una pared blanca. Entre la vela y la pared se coloca una lente en una posición que se forma una imagen mayor e invertida sobre la pared. Cuando la lente está en esta posición, la distancia al objeto es  $p_1$ . Cuando la lente se mueve 90.0 cm hacia la pared, se forma otra imagen. A partir de esta información, deseamos encontrar  $p_1$  y la longitud focal de la lente. (a) A partir de la ecuación de la lente para la primera posición de la lente, escriba una ecuación que relacione la distancia focal  $f$  de la lente con la distancia al objeto  $p_1$ , sin otras variables en la ecuación. (b) A partir de

la ecuación para la segunda posición de la lente, escriba otra ecuación que relacione la distancia focal  $f$  de la lente con la distancia al objeto  $p_1$ . (c) resuelva las ecuaciones en los incisos (a) y (b) al mismo tiempo para encontrar  $p_1$ . (d) Utilice el valor del inciso (c) para encontrar la distancia focal  $f$  de la lente.

**54. CIC** En muchas aplicaciones, es necesario expandir o disminuir el diámetro de un haz de rayos de luz paralelos, lo que se puede lograr utilizando con la combinación de una lente convergente y una lente divergente. Supongamos que tiene una lente convergente de longitud focal de 21.0 cm y una lente divergente de longitud focal de -12.0 cm. (a) ¿Cómo puede organizar estas lentes para aumentar el diámetro de un haz de rayos paralelos? (b) ¿Por qué factor aumentará el diámetro?

**55.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Considere la combinación de lentes de espejos que se muestra en la figura P35.55. La lente tiene una distancia focal  $f_L = 0.200$  m y el espejo tiene una distancia focal  $f_M = 0.500$  m. El objetivo y el espejo se colocan separados por una distancia  $d = 1.30$  m y un objeto se coloca en  $p = 0.300$  m desde la lente. Al mover una pantalla a varias posiciones a la izquierda de la lente, un estudiante encuentra dos posiciones diferentes de la pantalla que producen una imagen nítida del objeto. Una de estas posiciones corresponde a la luz dejando el objeto y desplazándose a la izquierda a través de la lente. La otra posición corresponde a la luz que viaja a la derecha desde el objeto, se refleja desde el espejo y luego pasa a través de la lente.

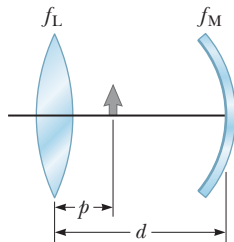


Figura P35.55 Problemas 55 y 57.

**PROBLEMAS DE DESAFÍO**

**56.** Un sistema de lentes zoom es una combinación de lentes que producen una amplificación variable que mantienen a la vez posiciones fijas del objeto y de la imagen. La amplificación se modifica moviendo una o más lentes a lo largo del eje. Aunque en la práctica se utilizan múltiples lentes para obtener imágenes de alta calidad, el efecto de acercamiento de un objeto se puede demostrar con un sistema simple de dos lentes. Sobre un banco de óptica se montan un objeto, dos lentes convergentes y una pantalla. La primera lente, que queda a la derecha del objeto, tiene una distancia focal  $f_1 = 5.00$  cm y la segunda, que está a la derecha de la primera, tiene una distancia focal  $f = 10.0$  cm. La pantalla está a la derecha de la segunda lente. Inicialmente, el objeto se sitúa a una distancia de 7.50 cm a la izquierda de la primera lente,

y la imagen que se forma en la pantalla tiene una amplificación de +1.00. (a) Determine la distancia entre el objeto y la pantalla. (b) Ahora se mueven ambas lentes a lo largo de su eje común hasta que la imagen formada en la pantalla tiene una amplificación de +3.00. Determine el desplazamiento de cada una de las lentes desde su posición inicial en el inciso (a). (c) ¿Es posible desplazar las lentes en más de una forma?

**57. S** Considere el arreglo lentes-espejo que se muestra en la figura P35.55. Hay dos posiciones finales de la imagen a la izquierda de la lente de distancia focal  $f_L$ . Una posición de la imagen se debe a la luz que viaja desde el objeto a la izquierda y pasa a través de la lente. La otra posición de la imagen se debe a la luz que viaja a la derecha desde el objeto, se refleja desde el espejo de distancia focal  $f_M$  y luego pasa a través de la lente. Para una posición  $p$  dada de un objeto entre la lente y el espejo y que se mide con respecto a la lente, hay dos distancias de separación  $d$  entre la lente y el espejo que harán que las dos imágenes descritas arriba estén en la misma ubicación. Encuentre las dos posiciones.

**58. CIC** Se consigue una ilusión óptica de una fresa flotando mediante dos espejos parabólicos, cada uno de ellos con una distancia focal de 7.50 cm, uno frente al otro de manera que sus centros quedan separados 7.50 cm como se muestra en la figura P35.58. Si se coloca una fresa en el espejo inferior, se forma una imagen de la misma en el orificio pequeño que existe en el centro del espejo superior a 7.50 cm sobre el punto más bajo del espejo inferior. La posición del ojo en la figura 35.58a corresponde a la vista del aparato en la figura 35.58b. Considere la trayectoria luminosa marcada como A. La trayectoria marcada como B corresponde al ojo viendo la imagen de la fresa que se forma al abrir la parte superior de aparato. (a) Demuestre que la imagen final se forma en dicha posición y describa sus características. (b) Un efecto muy impactante se consigue si se hace brillar el haz de una linterna sobre esta imagen. Incluso en un ángulo muy inclinado, ¡parecería que el haz de luz incidente se refleja sobre la imagen! Explique.

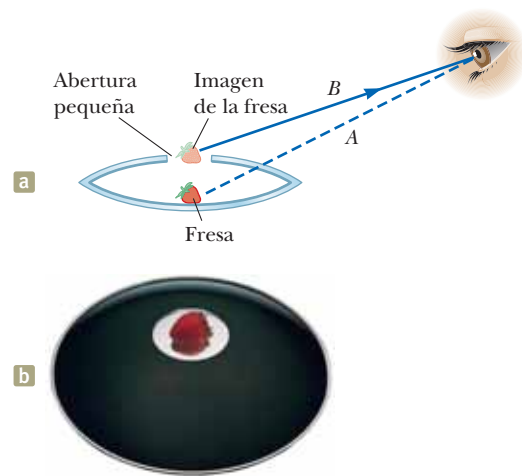


Figura P35.58







Los colores en muchas de las plumas de un colibrí no se deben al pigmento. ¿Cuál cree que sea el origen del pigmento? (Dec Hogan/Shutterstock)

- 36.1 Experimento de doble rendija de Young
- 36.2 Análisis de modelo: Ondas en interferencia
- 36.3 Distribución de intensidad del patrón de interferencia de doble rendija
- 36.4 Cambio de fase debido a reflexión
- 36.5 Interferencia en películas delgadas
- 36.6 El interferómetro de Michelson

### IMAGINE ¡Es hora de tomar un descanso de estudiar física y

simplemente relajarse en el patio trasero! Está tumbado en su diván y disfrutando del agradable día de primavera. De repente, un colibrí entra volando, no se da cuenta y aterriza a solo unos pies de distancia. Usted se queda quieto y lo observa en silencio, asombrado por los hermosos colores en las plumas del pájaro, que parecen brillar. Entonces nota, cuando el pájaro gira un poco, que los colores cambian en su intensidad y tono. Usted piensa, "¡Espera un minuto! ¿Por qué sucedería eso?". Y luego, en contradicción directa con sus esfuerzos por tomar un descanso de la física, piensa: "¿Podría haber algo de física detrás de la aparición de los colores en las plumas de este pájaro?". El pájaro asustado huye aterrorizado cuando usted alcanza su teléfono inteligente y enciende el internet.

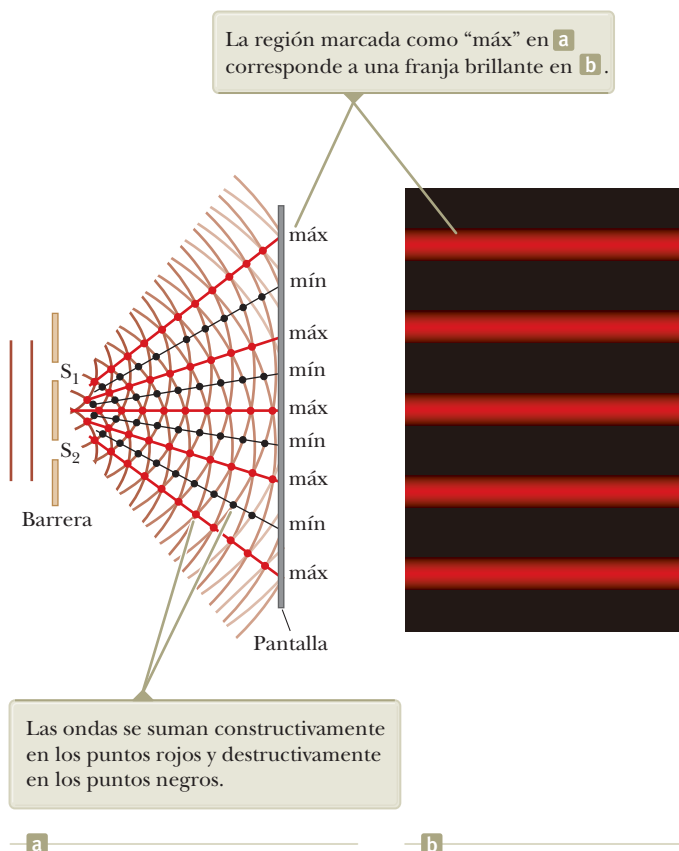
**CONEXIONES** En el capítulo 35, estudiamos los rayos de luz que pasan a través de una lente o que se reflejan desde un espejo para describir la formación de imágenes. Este análisis completó nuestro estudio de *óptica geométrica*. En este capítulo y en el capítulo 37, nos ocupamos de la *óptica ondulatoria*, a veces llamada *óptica física*, el estudio de la interferencia, la difracción y la polarización de la luz. En el capítulo 17 estudiamos la *interferencia* de las ondas de sonido y ahora veremos el efecto comparable para la luz en este capítulo. Presentamos el fenómeno de *difracción* para ondas de luz en la sección 34.2. No analizamos la *polarización* en el capítulo 17 porque las ondas de sonido no pueden polarizarse. Sin embargo, las ondas de luz pueden polarizarse y estudiaremos ese fenómeno en el capítulo 37. Estos tres fenómenos no se pueden explicar adecuadamente con la óptica geométrica utilizada en los capítulos 34 y 35 porque dependen del hecho de que la luz es de naturaleza ondulatoria. El estudio de la interferencia conduce al desarrollo histórico del *interferómetro de Michelson*, una de las herramientas utilizadas para investigar la relatividad, que a su vez conduce al desarrollo de la física moderna, que comienza en el capítulo 38.

## 36.1 Experimento de doble rendija de Young

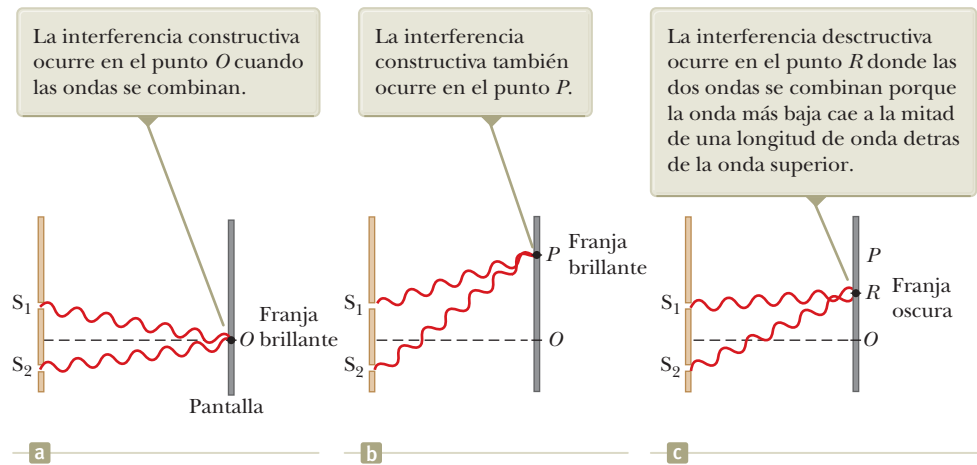
En el capítulo 17 estudió el modelo de interferencia de ondas y se dio cuenta de que la superposición de dos ondas mecánicas puede ser constructiva o destructiva. En la interferencia constructiva, la amplitud de la onda resultante es mayor que una u otra onda individual, mientras que en la interferencia destructiva, la amplitud resultante es menor que la onda más grande. Las ondas de luz también se interfieren entre ellas. Fundamentalmente, toda interferencia asociada con ondas de luz aparece cuando se combinan los campos electromagnéticos que constituyen las ondas individuales.

La interferencia en ondas de luz de dos fuentes fue demostrada primero por Thomas Young en 1801. En la figura 36.1a se ilustra un diagrama del aparato que utilizó Young. Las ondas planas llegan a una barrera que contiene dos rendijas paralelas  $S_1$  y  $S_2$ . La luz de  $S_1$  y  $S_2$  produce, en una pantalla, una configuración visible de bandas brillantes y oscuras paralelas llamadas **franjas** (figura 36.1b). Cuando la luz desde  $S_1$  y desde  $S_2$  llega a un punto tal en la pantalla que ocurre interferencia constructiva en ese lugar, aparece una franja brillante. Cuando la luz de las dos rendijas se combina destructivamente en cualquier lugar sobre la pantalla, resulta una franja oscura.

La figura 36.2 (página 964), muestra algunas de las formas en que dos ondas se pueden combinar en la pantalla. En la figura 36.2a, las dos ondas, que salen de las dos rendijas en fase, inciden en la pantalla en el punto central  $O$ . Ya que ambas ondas recorren la misma distancia, llegan a  $O$  en fase. En consecuencia, se presenta interferencia constructiva en este lugar y se observa una franja brillante. En la figura 36.2b las dos ondas también inician en fase, pero en este caso la onda inferior tiene que recorrer una longitud de onda más que la onda superior para llegar al punto  $P$ . Ya que la onda inferior cae detrás de la superior en exactamente una longitud de onda, todavía llegan en fase en  $P$ , y aparece una segunda franja brillante en este lugar. De cualquier modo, en el punto  $R$  de la figura 36.2c, entre los puntos  $O$  y  $P$ , la onda inferior ha caído media longitud de onda detrás de la onda superior y una cresta de la



**Figura 36.1** (a) Diagrama esquemático del experimento de doble rendija de Young. Las rendijas  $S_1$  y  $S_2$  se comportan como fuentes coherentes de ondas de luz que producen un patrón de interferencia en la pantalla (el dibujo no está a escala). (b) Simulación de una amplificación del centro de un patrón de franjas formado en la pantalla.



**Figura 36.2** Las ondas dejan las rendijas y se combinan en varios puntos en la pantalla (las figuras no están a escala).

onda superior se traslapa con una de la onda inferior, lo que da lugar a interferencia destructiva en el punto  $R$ . Por esta razón se observa una franja oscura en este lugar.

Si dos focos se colocan uno al lado del otro, no se observan efectos de interferencia porque las ondas de luz de cada uno se emiten independientemente de la otra. Las emisiones de los dos focos no mantienen una correspondencia de fase constante entre ellos con el tiempo. Las ondas de luz de una fuente ordinaria, como es un foco, se somete a cambios de fase aleatorios en intervalos menores a un nanosegundo. Por tanto, las condiciones para interferencia constructiva, interferencia destructiva, o algún estado intermedio, se mantienen sólo durante estos intervalos de tiempo. Puesto que el ojo humano no puede seguir cambios tan rápidos, no se observan efectos de interferencia. Se dice que estas fuentes de luz son **incoherentes**.

Para observar interferencia en ondas de dos fuentes, debe cumplir las siguientes condiciones:

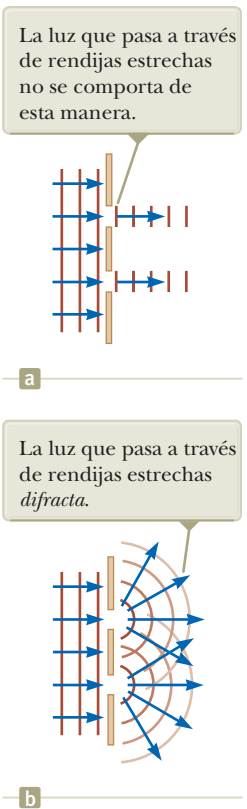
- Las fuentes deben ser **coherentes**, es decir, deben mantener una fase constante respecto de otra.
- Las fuentes deben ser **monocromáticas**, es decir, de una sola longitud de onda.

Por ejemplo, las ondas de sonido de una sola frecuencia emitidas por dos altavoces colocados uno al lado del otro y activados por un solo amplificador pueden interferir entre sí porque los dos altavoces son coherentes, es decir, responden al amplificador de la misma forma en el mismo tiempo.

Un método común para producir dos fuentes de luz coherentes consiste en usar una fuente monocromática para iluminar una barrera que contenga dos pequeñas aberturas, por lo general en forma de rendijas como en el caso del experimento de Young, ilustrado en la figura 36.1 La luz que sale de las dos rendijas es coherente porque una sola fuente produce el rayo de luz original y las dos rendijas sirven sólo para separar el rayo original en dos partes (que, después de todo, es lo que sucede con la señal de sonido desde los dos altavoces anteriores). Cualquier cambio aleatorio en la luz emitida por la fuente se presenta en ambos rayos al mismo tiempo y, en consecuencia, se observan efectos de interferencia cuando la luz de las dos rendijas llega a una pantalla de observación.

Si la luz se mueve sólo en su dirección original después de pasar por las rendijas, como se muestra en la figura 36.3a, las ondas no se traslaparían y no se vería patrón de interferencia alguna. En lugar de ello, como se explicó con un repaso de la figura 34.4, las ondas se extienden desde las rendijas, como se ve en la figura 36.3b. En otras palabras, la luz se desvía de una trayectoria recta y penetra en la región que de otro modo estaría sombreada. Como se observo en la sección 34.2, esta divergencia de luz a partir de su línea inicial de recorrido se denomina **difracción**.

**Figura 36.3** (a) Si las ondas de luz no se extendieran después de pasar por las rendijas, no ocurriría interferencia. (b) Las ondas de luz de las dos rendijas se traslapan cuando se extienden y llenan regiones sombreadas con luz y producen franjas de interferencia en una pantalla colocada a la derecha de las rendijas.



### 36.2 Análisis de modelo: Ondas en interferencia

En la sección 17.1, analizamos el principio de superposición de ondas en cuerdas, lo que lleva a una versión unidimensional de las ondas en el análisis de modelo de interferencia. En el ejemplo 17.1, discutimos brevemente un fenómeno de interferencia de dos dimensiones para el sonido de dos altavoces. Caminando desde el punto  $O$  al punto  $P$  en la figura 17.5, el oyente experimenta un máximo de intensidad de sonido en  $O$  y un mínimo en  $P$ . Esta experiencia es exactamente análoga a un observador que mira en el punto  $O$  en la figura 36.2 y ve una franja brillante y luego barriendo sus ojos hacia arriba al punto  $R$ , donde hay un mínimo en la intensidad de la luz.

Observe con más detalle la naturaleza bidimensional del experimento de Young con ayuda de la figura 36.4 ayuda. La pantalla se coloca a una distancia perpendicular  $L$  de la barrera que contiene dos rendijas,  $S_1$  y  $S_2$  (figura 36.4a). Las rendijas están separadas por una distancia  $d$ , y la fuente es monocromática. Para llegar a cualquier punto arbitrario  $P$  en la mitad superior de la pantalla, una onda de la rendija inferior debe recorrer más que una onda de la rendija superior. Esta distancia extra se llama **diferencia de trayectoria**  $\delta$  (letra griega delta). Si supone que los rayos etiquetados  $r_1$  y  $r_2$  son paralelos (figura 36.4 b), lo que es aproximadamente cierto si  $L$  es mucho mayor que  $d$ , entonces  $\delta$  está dada por

$$\delta = r_2 - r_1 = d \sin \theta \tag{36.1}$$

El valor de  $\delta$  determina si las dos ondas están en fase cuando llegan al punto  $P$ . Si  $\delta$  es cero o algún entero múltiplo de la longitud de onda, las dos ondas están en fase en el punto  $P$  y se obtiene interferencia constructiva. Por tanto, la condición para franjas brillantes, o **interferencia constructiva**, en el punto  $P$  es

$$d \sin \theta_{\text{brillante}} = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{36.2}$$

◀ Condiciones para la interferencia constructiva

El número  $m$  se denomina **número de orden**. Para la interferencia constructiva, el número de orden es el mismo que el de longitudes de onda que representa la diferencia de trayectoria entre las ondas desde las dos rendijas. La franja central brillante en  $\theta_{\text{brillante}} = 0$  se llama *máximo de orden cero*. El primer máximo en cualquiera de los lados, donde  $m = \pm 1$ , se llama *máximo de primer orden*, y así sucesivamente.

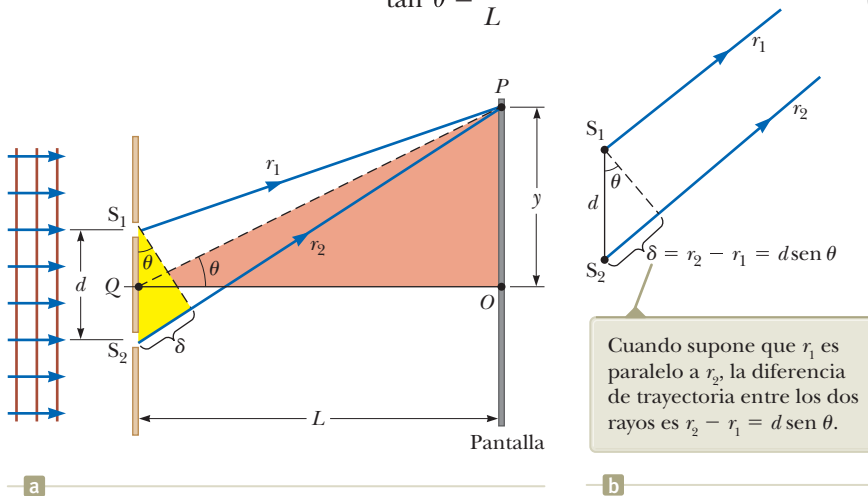
Cuando  $\delta$  es múltiplo impar de  $\lambda/2$ , las dos ondas que lleguen al punto  $P$  están  $180^\circ$  fuera de fase y dan lugar a una interferencia destructiva. Por tanto, la condición para franjas oscuras, o **interferencia destructiva**, en el punto  $P$  es

$$d \sin \theta_{\text{oscura}} = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{36.3}$$

◀ Condiciones para la interferencia destructiva

Estas ecuaciones proporcionan las posiciones *angulares* de las franjas. También es útil obtener expresiones para las posiciones *lineales* observadas a lo largo de la pantalla desde  $O$  hasta  $P$ . A partir del triángulo  $OPQ$  de la figura 36.4a, se ve que

$$\tan \theta = \frac{y}{L} \tag{36.4}$$



**Figura 36.4** (a) Construcción geométrica para describir el experimento de doble rendija de Young (que no está a escala). (b) Las rendijas están representadas como fuentes, y se supone que los rayos que salen hacia el punto  $P$  son paralelos. Para que esta aproximación sea válida, es esencial que  $L \gg d$ .

Al usar este resultado, las posiciones lineales de las franjas brillante y oscura están dadas por

$$y_{\text{brillante}} = L \tan \theta_{\text{brillante}} \quad (36.5)$$

$$y_{\text{oscura}} = L \tan \theta_{\text{oscura}} \quad (36.6)$$

donde  $\theta_{\text{brillante}}$  y  $\theta_{\text{oscura}}$  están dadas por las ecuaciones 36.2 y 36.3.

Cuando los ángulos a las franjas son pequeños, las posiciones de las franjas son lineales cerca del centro del patrón. Esto se puede verificar observando que, para ángulos pequeños,  $\tan \theta \approx \sin \theta$ , de modo que la ecuación 36.5 da las posiciones de las franjas brillantes como  $y_{\text{brillante}} = L \sin \theta_{\text{brillante}}$ . Al incorporar la ecuación 36.2 se obtiene

$$y_{\text{brillante}} = L \frac{m\lambda}{d} \quad (\text{ángulos pequeños}) \quad (36.7)$$

Este resultado muestra que  $y_{\text{brillante}}$  es lineal en el número de orden  $m$ , de modo que las franjas están igualmente espaciadas por ángulos pequeños. De manera similar, para las franjas oscuras

$$y_{\text{oscuro}} = L \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d} \quad (\text{ángulos pequeños}) \quad (36.8)$$

Como se demostró en el ejemplo 36.1, el experimento de la doble rendija de Young proporciona un método para medir la longitud de onda de la luz. De hecho, Young usó esta técnica para hacer precisamente esto. Además, su experimento dio al modelo ondulatorio de la luz una mayor credibilidad. No era concebible que las partículas de luz provenientes a través de las rendijas se pudieran cancelar mutuamente en una forma que explicaría las franjas oscuras.

Los principios que se han explicado en esta sección son la base del análisis de modelo de **ondas en interferencia**. Este modelo se aplicó en el capítulo 17 a las ondas mecánicas en una dimensión. Aquí se ven los detalles de aplicar este modelo en tres dimensiones a la luz.

- E XAMEN RÁPIDO 36.1** De lo siguiente ¿qué provoca que las franjas en un patrón de interferencia de dos rendijas se separen? (a) Reducir la longitud de onda de la luz, (b) reducir la distancia  $L$  de pantalla, (c) reducir la separación  $d$  de rendijas, o (d) sumergir en agua todo el aparato.

## ANÁLISIS DE MODELO: Ondas en interferencia

Imagine un amplio haz de luz que ilumina una rendija doble en un material de otro modo opaco. Un patrón de interferencia de franjas claras y oscuras se crea en una pantalla lejana. La condición para franjas brillantes (**interferencia constructiva**) es

$$d \sin \theta_{\text{brillante}} = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (36.2)$$

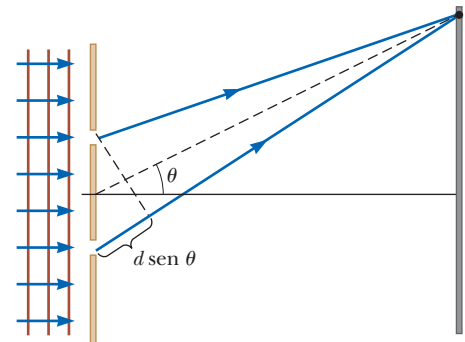
La condición para franjas oscuras (**interferencia destructiva**) es

$$d \sin \theta_{\text{oscuro}} = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (36.3)$$

Al número  $m$  se le denomina **número de orden** de la franja.

### Ejemplos:

- una fina capa de aceite en la parte superior del agua muestra remolinos de color (sección 36.5)
- los rayos x que pasan a través de un sólido cristalino para formar un patrón de Laue (capítulo 37)
- un interferómetro de Michelson (sección 36.6) utilizado para buscar el éter representa el medio a través del cual viaja la luz (capítulo 38)
- los electrones exhiben interferencia al igual que las ondas de luz que pasan a través de una doble rendija (capítulo 39)





**Ejemplo 36.1 Medición de la longitud de onda de una fuente de luz**

Una pantalla de visualización está separada de una doble rendija por 4.80 m. La distancia entre las dos rendijas es 0.030 0 mm. Hacia la doble rendija se dirige luz monocromática y forma una configuración de interferencia sobre la pantalla. La primera franja brillante está a 4.50 cm de la línea central sobre la pantalla.

**(A)** Determine la longitud de onda de la luz.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Estudie la figura 36.4 para asegurarse de que entiende el fenómeno de la interferencia de ondas luminosas. En la figura 36.4 y está a una distancia de 4.50 cm. Debido a que  $L \gg y$ , los ángulos de las franjas son pequeños.

**Categorizar** Este problema es una aplicación sencilla del modelo de *ondas en interferencia*.

**Analizar** Resuelva la ecuación 36.8 para la longitud de onda y sustituya valores numéricos, con  $m = 0$  para la primera franja oscura:

$$\lambda = \frac{y_{\text{oscuro}} d}{(m + \frac{1}{2})L} = \frac{(4.50 \times 10^{-2} \text{ m})(3.00 \times 10^{-5} \text{ m})}{(0 + \frac{1}{2})(4.80 \text{ m})}$$

$$= 5.62 \times 10^{-7} \text{ m} = 562 \text{ nm}$$

**(B)** Calcule la distancia entre franjas brillantes adyacentes.

**SOLUCIÓN**

Encuentre la distancia entre franjas brillantes adyacentes a partir de la ecuación 36.7 y los resultados de la parte (A):

$$y_{m+1} - y_m = L \frac{(m+1)\lambda}{d} - L \frac{m\lambda}{d}$$

$$= L \frac{\lambda}{d} = 4.80 \text{ m} \left( \frac{5.62 \times 10^{-7} \text{ m}}{3.00 \times 10^{-5} \text{ m}} \right)$$

$$= 9.00 \times 10^{-2} \text{ m} = 9.00 \text{ cm}$$

**Finalizar** Para practicar, determine la longitud de onda de sonido del ejemplo 17.1 usando el procedimiento de la parte (A) de este ejemplo.

**Ejemplo 36.2 Separación de dos longitudes de onda en doble rendija**

Una fuente de luz emite luz visible de dos longitudes de onda:  $\lambda = 430 \text{ nm}$  y  $\lambda' = 510 \text{ nm}$ . La fuente se usa en un experimento de interferencia de doble rendija en el que  $L = 1.50 \text{ m}$  y  $d = 0.025 \text{ 0 mm}$ . Encuentre la distancia de separación entre las franjas brillantes de tercer orden para las dos longitudes de onda.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** En la figura 36.4a, imagine que la luz de dos longitudes de onda incide en las rendijas y forma dos configuraciones de interferencia sobre la pantalla. En algunos puntos, las franjas de los dos colores pueden traslaparse, pero en la mayoría de los puntos no.

**Categorizar** Este problema es una aplicación de la representación matemática del análisis de modelo de *ondas en interferencia*.

**Analizar** Use la ecuación 36.7, para encontrar las posiciones de franja correspondientes a estas dos longitudes de onda y réstelas:

$$\Delta y = y'_{\text{brillante}} - y_{\text{brillante}} = L \frac{m\lambda'}{d} - L \frac{m\lambda}{d} = \frac{Lm}{d} (\lambda' - \lambda)$$

Sustituya valores numéricos:

$$\Delta y = \frac{(1.50 \text{ m})(3)}{0.025 \text{ 0} \times 10^{-3} \text{ m}} (510 \times 10^{-9} \text{ m} - 430 \times 10^{-9} \text{ m})$$

$$= 0.014 \text{ 4 m} = 1.44 \text{ cm}$$

**Finalizar** Explore más detalles del patrón de interferencia en el siguiente **¿Qué pasaría si?**

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si se examina todo el patrón de interferencia debido a las dos longitudes de onda y se observa traslape de franjas? ¿Habrán algunas ubicaciones en la pantalla donde las franjas brillantes de las dos longitudes de onda se traslapen exactamente?

*continúa*



## 36.2 continuación

**Respuesta** Encuentre tales ubicaciones al igualar la ubicación de cualquier franja brillante debida a  $\lambda$ , a una debida a  $\lambda'$ , con la ecuación 36.7:

$$L \frac{m\lambda}{d} = L \frac{m'\lambda'}{d} \rightarrow \frac{m'}{m} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

Sustituya las longitudes de onda:

$$\frac{m'}{m} = \frac{430 \text{ nm}}{510 \text{ nm}} = \frac{43}{51}$$

Por tanto, la 51ª franja de la luz de 430 nm se traslapa con la 43ª franja de la luz de 510 nm.

Use la ecuación 36.7 para encontrar el valor de  $y$  para estas franjas:  $y = (1.50 \text{ m}) \left[ \frac{51(430 \times 10^{-9} \text{ m})}{0.0250 \times 10^{-3} \text{ m}} \right] = 1.32 \text{ m}$

Este valor de  $y$  es comparable con  $L$ , así que la aproximación de ángulo pequeño aplicada para la ecuación 36.7 *no* es válida. Esta conclusión sugiere que no se debe esperar que la ecuación 36.7 de el resultado correcto. Si usa la ecuación 36.5, puede demostrar que las franjas brillantes de hecho se traslapan cuando se satisface la misma condición,  $m'/m = \lambda/\lambda'$  (véase el problema 30). Por tanto, la 51ª franja de la luz de 430 nm se traslapa con la 43ª franja de la luz de 510 nm, pero no en la ubicación de 1.32 m. Se le pide encontrar la ubicación correcta como parte del problema 30.

### 36.3 Distribución de intensidad del patrón de interferencia de doble rendija

Observe que los bordes de las franjas brillantes de la figura 36.1b no son nítidos; hay un cambio gradual de brillante a oscuro. Hasta este punto se han explicado las ubicaciones de los centros de las franjas brillantes y oscuras en una pantalla distante. Ahora veamos pongamos nuestra atención en la distribución de intensidad de luz asociada con el patrón de interferencia de doble rendija.

Usando un análisis de los campos eléctricos de la luz de las dos rendijas, podemos mostrar (problema 16) que la intensidad de la luz en la pantalla en la figura 36.4 viene dada por

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \left( \frac{\pi d \text{ sen } \theta}{\lambda} \right) \quad (36.9)$$

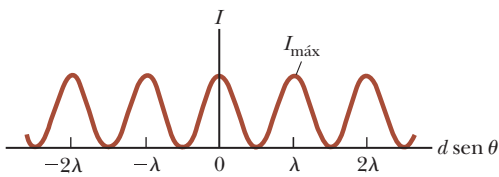
Alternativamente, ya que  $\text{sen } \theta \approx y/L$  para pequeños valores de  $\theta$  en la figura 36.4, puede escribir la ecuación 36.9 en la forma

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda L} y \right) \quad (\text{ángulos pequeños}) \quad (36.10)$$

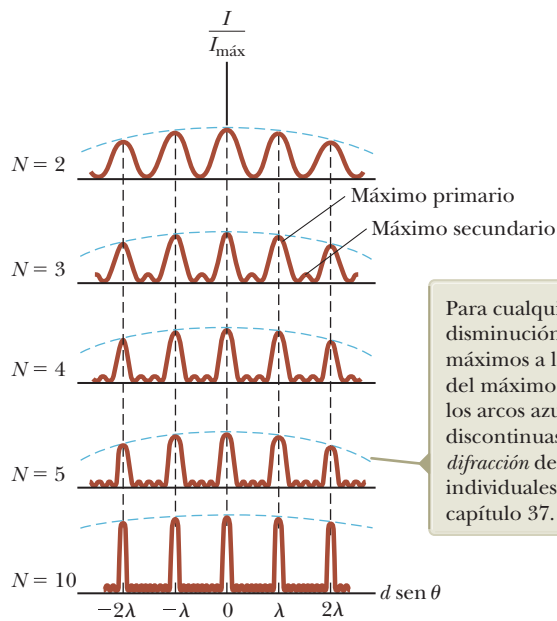
La interferencia constructiva, que produce intensidad de luz máxima, se presenta cuando la cantidad  $\pi dy/\lambda L$  es una integral múltiple de  $\pi$ , correspondiente a  $y = Lm\lambda/d$ , donde  $m$  es el número de orden. Esto es consistente con la ecuación 36.7.

En la figura 36.5 se presenta una gráfica de intensidad de luz en función de  $d \text{ sen } \theta$  utilizando la ecuación 36.9 y se compara con la fotografía del patrón de interferencia. La figura 36.6 muestra gráficas similares de intensidad luminosa en función de  $d \text{ sen } \theta$  para luz que pasa a través de varias rendijas. En este caso, la configuración contiene máximos primario y secundario. Para tres rendijas, note que los máximos primarios son nueve veces más intensos que los máximos secundarios observados por la altura de la curva, porque la intensidad varía como  $E^2$  (vea la ecuación 33.27). Para  $N$  rendijas, la intensidad de los máximos primarios es  $N^2$  veces mayor que la debida a una sola rendija. Conforme el número de rendijas aumenta, los máximos primarios aumentan en intensidad y se vuelven más estrechos, mientras que los máximos secundarios disminuyen en intensidad en relación con los máximos primarios. La figura 36.6 también muestra que, conforme aumenta el número de rendijas, también aumenta el número de máximos secundarios. De hecho, el número de máximos secundarios siempre es  $N - 2$ , donde  $N$  es el número de rendijas. En la sección 37.4 se investigará la configuración para un número muy grande de rendijas, en un dispositivo llamado *rejilla de difracción*.





**Figura 36.5** Intensidad de luz en función  $d \text{ sen } \theta$  para un patrón de interferencia de doble rendija cuando la pantalla está lejos de las dos rendijas ( $L \gg d$ ).



Para cualquier valor de  $N$ , la disminución en intensidad en máximos a la izquierda y derecha del máximo central, indicada por los arcos azules de líneas discontinuas, se debe a *patrones de difracción* de las rendijas individuales, que se estudian en el capítulo 37.

**Figura 36.6** Configuraciones de interferencia de varias rendijas. Cuando aumenta  $N$ , el número de rendijas, los máximos primarios (los picos más altos de cada gráfica) se vuelven más angostos, pero permanecen fijos en posición y aumenta el número de máximos secundarios.

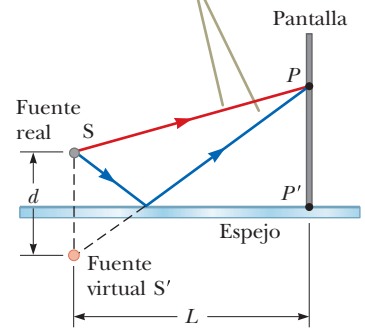
**E XAMEN RÁPIDO 36.2** Con la figura 36.6 como modelo, bosqueje el patrón de interferencia de seis rendijas.

### 36.4 Cambio de fase debido a reflexión

El método de Young para producir dos fuentes de luz coherente consiste en iluminar un par de rendijas con una sola fuente. Otro montaje sencillo, pero ingenioso, para producir una configuración de interferencia con una sola fuente de luz se conoce como *espejo de Lloyd*<sup>1</sup> (figura 36.7). Se coloca una fuente puntual de luz en el punto  $S$  cerca de un espejo, así como una pantalla a cierta distancia y perpendicular a éste. Las ondas de luz pueden llegar al punto  $P$  en la pantalla ya sea directamente de  $S$  a  $P$  (rojo) o por la ruta que implica reflexión desde el espejo (azul). El rayo reflejado puede considerarse un rayo originado por una fuente virtual en el punto  $S'$ , por lo que este montaje es como una fuente de doble rendija donde la distancia  $d$  entre las fuentes  $S$  y  $S'$  en la figura 36.7 es comparable a la longitud  $d$  en la figura 36.4. Por tanto, en los puntos de observación lejos de la fuente ( $L \gg d$ ) se esperan ondas desde  $S$  y  $S'$  para formar una configuración de interferencia exactamente parecida a la que se forma por dos fuentes coherentes reales. Se ve en realidad una configuración de interferencia, pero las posiciones de las franjas oscuras y brillantes están invertidas respecto a la configuración producida por dos fuentes coherentes reales (experimento de Young). Esto solo puede presentarse si las fuentes coherentes en los puntos  $S$  y  $S'$  difieren en fase en  $180^\circ$ .

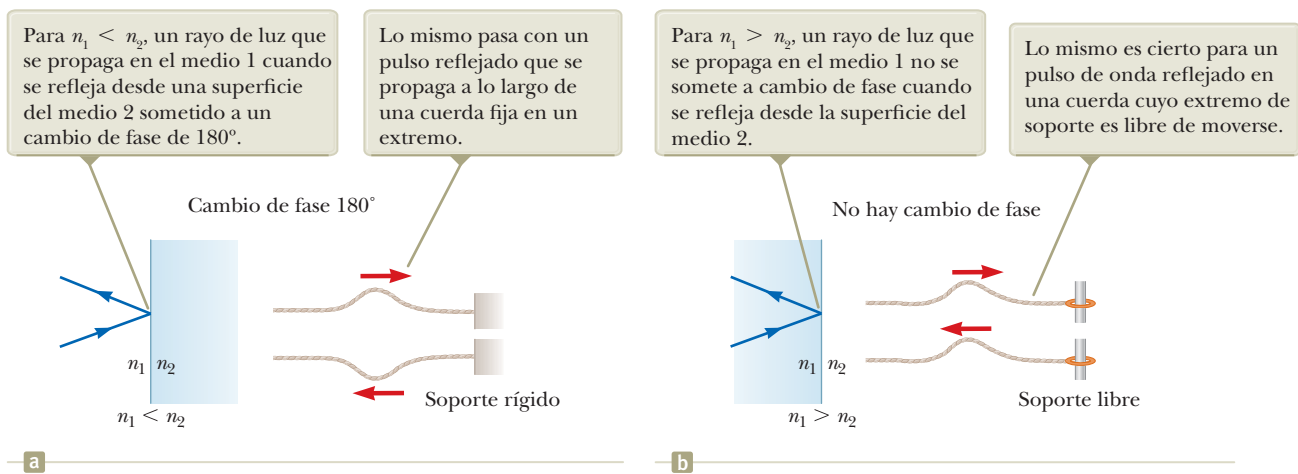
Para ilustrar esto con más detalle, considere el punto  $P'$ , el punto en el cual el espejo se cruza con la pantalla. Este punto está equidistante de los puntos  $S$  y  $S'$ . Si la diferencia de trayectoria fuera la única responsable de la diferencia de fase, habría una franja brillante en el punto  $P'$  (porque la diferencia de trayectoria es cero para este punto), que corresponde a la franja brillante central de la configuración de interferencia de dos rendijas. En lugar de ello, aparece una franja oscura en el punto  $P'$ ; por lo que es necesario que se produzca un cambio de fase de  $180^\circ$  por reflexión desde el espejo. En general, **una onda electromagnética se somete a un cambio de**

Un patrón de interferencia se produce en el punto  $P$  en la pantalla como resultado de la combinación del rayo directo (rojo) y el rayo reflejado (azul).



**Figura 36.7** Espejo de Lloyd. El rayo reflejado se somete a un cambio de fase de  $180^\circ$ .

<sup>1</sup> Creado en 1834 por Humprey Lloyd (1800-1881), profesor de Filosofía Natural y Experimental, Trinity College, Dublin



**Figura 36.8** Comparaciones de las reflexiones de las ondas de luz y las ondas en cuerdas.



MarcelClemens/Shutterstock

**Figura 36.9** Colores en una burbuja de jabón debido a la interferencia.

**fase de  $180^\circ$  al reflejarse desde un medio que tiene un índice de refracción mayor que aquel en el que la onda se propague.**

Es útil representar la analogía entre las ondas de luz reflejadas y las reflexiones de un pulso transversal de onda en una cuerda estirada (sección 17.3). El pulso reflejado en una cuerda se somete a un cambio de fase de  $180^\circ$  cuando se refleja desde la frontera de un medio más denso, pero no se presenta cambio de fase alguno cuando el pulso se refleja desde la frontera de un medio menos denso. Del mismo modo, una onda electromagnética se somete a un cambio de fase de  $180^\circ$  cuando se refleja desde una frontera que lleva a un medio ópticamente más denso (definido como un medio con un índice de refracción más alto), pero no se presenta cambio de fase cuando la onda se refleja desde una frontera que lleva a un medio menos denso. Estas reglas, resumidas en la figura 36.8, se pueden deducir de las ecuaciones de Maxwell, pero el tratamiento está fuera del alcance de este texto.

### 36.5 Interferencia en películas delgadas

Los efectos de interferencia se observan por lo general en películas delgadas, por ejemplo en capas finas de petróleo sobre agua o en la delgada superficie de una burbuja de jabón. Los diversos colores que se observan cuando incide luz blanca sobre estas películas resultan por la interferencia de ondas que se reflejan desde las dos superficies de la película.

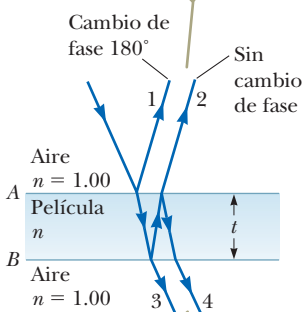
Considere una película de grosor uniforme  $t$  e índice de refracción  $n$ . La longitud de onda de luz  $\lambda_n$  en la película (véase la sección 34.4) es

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz en espacio libre y  $n$  es el Índice de refracción del material de la película. Suponga que los rayos de luz que se desplazan en el aire están muy cerca de la normal a las dos superficies de la película, como se muestra en la figura 36.10.

El rayo reflejado 1, que se refleja desde la superficie superior (A) en la figura 36.10, se somete a un cambio de fase de  $180^\circ$  respecto a la onda incidente. El rayo reflejado 2, que se refleja desde la superficie inferior de la película (B), no pasa por el cambio de fase porque se refleja desde un medio (aire) que tiene un índice de refracción menor. Por tanto, el rayo 1 está  $180^\circ$  fuera de fase en relación con el rayo 2, que es equivalente a una diferencia de trayectoria de  $\lambda_n/2$ . No obstante, también debe considerarse que el rayo 2 se desplaza una distancia extra  $2t$  antes de que las ondas se recombinen en el aire sobre la superficie A. (Recuerde que considera rayos de luz que están cerca de la normal a la superficie. Si los rayos no estuvieran cerca de la normal, la diferencia de trayectoria sería mayor a  $2t$ .) Si  $2t = \lambda_n/2$ , entonces los rayos 1 y 2 se

La interferencia en la luz reflejada desde una película delgada se debe a una combinación de los rayos 1 y 2 reflejados desde las superficies superior e inferior de la película.



Los rayos 3 y 4 provocan efectos de interferencia para la luz que se transmite a través de la película

**Figura 36.10** Trayectoria de la luz a través de una película delgada.

recombinan en fase, y el resultado es interferencia constructiva. En general, la condición para la interferencia *constructiva* en películas delgadas es<sup>2</sup>

$$2t = (m + \frac{1}{2})\lambda_n \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (36.11)$$

Esta condición toma en cuenta dos factores: (1) la diferencia en la distancia de trayectoria para los dos rayos (el término  $m\lambda_n$ ) y (2) el cambio de fase de  $180^\circ$  por reflexión (el término  $\frac{1}{2}\lambda_n$ ). Como  $\lambda_n = \lambda / n$ , podemos escribir la ecuación 36.11 como

$$2nt = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (36.12)$$

Si la distancia extra  $2t$  recorrida por el rayo 2 corresponde a un múltiplo de  $\lambda_n$ , las dos ondas se combinan fuera de fase y el resultado es interferencia destructiva. La ecuación general para la interferencia *destructiva* en películas delgadas es

$$2nt = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (36.13)$$

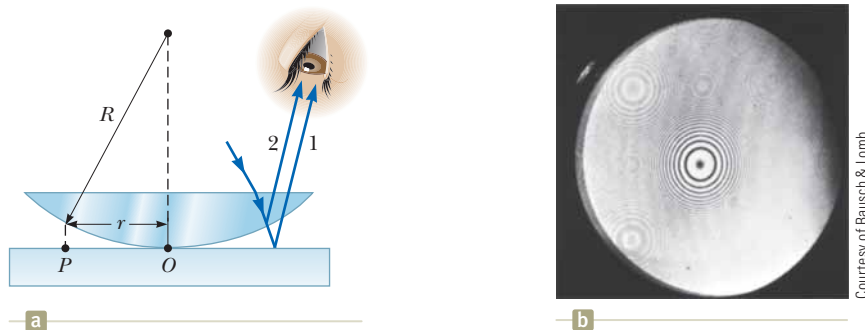
Las condiciones anteriores son válidas para las interferencias constructiva y destructiva cuando el medio que está por encima de la superficie superior de la película es el mismo que el medio por debajo de la superficie inferior o, si existen medios diferentes arriba y abajo de la película, el índice de refracción de ambos es menor a  $n$ . Si la película se coloca entre dos medios diferentes, uno con  $n < n_{\text{película}}$  y el otro con  $n > n_{\text{película}}$ , las condiciones para las interferencias constructiva y destructiva se invierten. En este caso, o bien existe un cambio de fase de  $180^\circ$  para el rayo 1 que se refleja desde la superficie *A* y el rayo 2 que se refleja desde la superficie *B*, o bien no existe cambio de fase para ninguno de ellos; por tanto, el cambio neto en fase relativa debido a las reflexiones es cero. Vea el ejemplo 36.4 para una aplicación práctica de este efecto.

Los rayos 3 y 4 de la figura 36.10 llevan a efectos de interferencia en la luz transmitida a través de la película delgada. El análisis de estos efectos es semejante al de la luz reflejada. Explore la luz transmitida en los problemas 22 y 25.

- E XAMEN RÁPIDO 36.3** Un portaobjetos de microscopio se coloca encima de otro con sus bordes izquierdos en contacto y un cabello humano bajo el borde derecho del portaobjetos superior. En consecuencia, existe una cuna de aire entre los portaobjetos. Cuando se hace incidir luz monocromática en la cuna se genera una configuración de interferencia. ¿Qué hay en los bordes izquierdos de los portaobjetos? (a) Una franja oscura, (b) una franja brillante o (c) imposible de determinar.

## Anillos de Newton

Otro método para observar interferencia en ondas de luz es colocar una lente planoconvexa en la parte superior de una superficie plana de vidrio, como se indica en la figura 36.11a. Con este arreglo, la película de aire entre las superficies de vidrio varía en grosor desde cero en el punto de contacto hasta algún valor  $t$  en el punto  $P$ . Si el radio de curvatura  $R$  de la lente es mucho mayor que la distancia  $r$ , y si el sistema se ve



**Figura 36.11** (a) La combinación de rayos reflejados desde la placa plana y la superficie curva de la lente da lugar a una configuración de interferencia conocida como anillos de Newton. (b) Fotografía de anillos de Newton.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 36.1

**Tenga cuidado con películas delgadas** Cerciérese de incluir *ambos* efectos —distancia de trayectoria y cambio de fase— cuando analice una configuración de interferencia que resulte de una película delgada. El posible cambio de fase es una característica nueva que no había necesitado considerar para la interferencia de doble rendija. También piense acerca del material presente en ambos lados de la película. Puede haber situaciones en las que exista un cambio de fase de  $180^\circ$  en ambas superficies o en ninguna superficie, dependiendo de si hay diferentes materiales en cualquier lado de la película.

<sup>2</sup> El efecto completo de la interferencia en una película delgada exige el análisis de un número infinito de reflexiones en uno y otro sentido entre las superficies superior e inferior de la película. En este caso se concentra únicamente en una reflexión sencilla desde la parte inferior de la película, que da la contribución máxima al efecto de interferencia.



desde arriba, se puede observar una configuración de anillos luminosos y oscuros como en la figura 36.11b. Estas franjas circulares, descubiertas por Newton, se denominan **anillos de Newton**.

Un uso importante de los anillos de Newton está en la prueba de lentes ópticas. Se obtiene una configuración circular como la de la figura 36.11b sólo cuando las lentes están esmeriladas a una curvatura perfectamente simétrica. Variaciones desde esta simetría podrían producir una configuración con franjas que varían a causa de una forma circular uniforme. Estas variaciones indican cómo es que deben volver a esmerilarse y pulirse las lentes para eliminar imperfecciones.

Entonces, ¿qué está pasando con los colores de las plumas de colibrí en el imagine de apertura? La *iridiscencia* que produce los colores brillantes que a menudo aparecen en la garganta y el vientre del ave se debe a un efecto de interferencia causado por la luz que se refleja en las microestructuras de las plumas. Los colores variarán según el ángulo de visión. Otros organismos que exhiben iridiscencia incluyen pavos reales, mariposas Morpho y algunos tipos de escarabajos y conchas marinas.

### ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Interferencia de película delgada

Cuando trabaje con problemas de interferencia de película delgada, debe tener en mente las siguientes características.

- 1. Conceptualizar.** Piense qué ocurre físicamente en el problema. Identifique la fuente de luz y la posición del observador.
- 2. Categorizar.** Confirme que debe usar las técnicas para interferencia de película delgada al identificar la película delgada causante de la interferencia.
- 3. Analizar.** El tipo de interferencia que se presenta se determina mediante la relación de fase entre la porción de la onda reflejada en la superficie superior de la película y la porción reflejada en la superficie inferior. Las diferencias de fase entre las dos porciones de la onda tienen dos causas: diferencias en las distancias recorridas por las dos porciones y cambios de fase que se presentan en la reflexión. Debe considerar *ambas* causas cuando determine cuál tipo de interferencia se presenta. Si los medios arriba y abajo de la película tienen índices de refracción mayores que el de la película, o si ambos índices son menores, use la ecuación 36.12 para interferencia constructiva y la ecuación 36.13 para interferencia destructiva. Si la película se ubica entre dos medios diferentes, uno con  $n < n_{\text{película}}$  y el otro con  $n > n_{\text{película}}$ , invierta estas dos ecuaciones para interferencia constructiva y destructiva.
- 4. Finalizar.** Inspeccione sus resultados finales para ver si físicamente tienen sentido y son de un tamaño adecuado.

### Ejemplo 36.3 Interferencia en una película de jabón

Calcule el grosor mínimo de la película de una burbuja de jabón que resulta en interferencia constructiva en la luz reflejada, si la película se ilumina con luz cuya longitud de onda en el espacio libre es  $\lambda = 600 \text{ nm}$ . El índice de refracción de la película de jabón es 1.33.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine que la película en la figura 36.10 es jabón, con aire en ambos lados.

**Categorizar** El resultado se determina con una ecuación de esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

El mínimo grosor de película para interferencia constructiva en la luz reflejada corresponde a  $m = 0$  en la ecuación 36.12. Resuelva esta ecuación para  $t$  y sustituya valores numéricos:

$$t = \frac{(0 + \frac{1}{2})\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{(600 \text{ nm})}{4(1.33)} = 113 \text{ nm}$$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si la película es el doble de gruesa? ¿La situación produce interferencia constructiva?

**Respuesta** Con la ecuación 36.12, puede resolver para el grosor al que se presenta la interferencia constructiva:

$$t = (m + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2n} = (2m + 1)\frac{\lambda}{4n} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Los valores permitidos de  $m$  muestran que la interferencia constructiva se presenta para múltiplos *impares* del grosor correspondiente a  $m = 0$ ,  $t = 113 \text{ nm}$ . Por tanto, la interferencia constructiva *no* se presenta para una película que es el doble de grueso.

### Ejemplo 36.4 Recubrimientos no reflejantes para celdas solares

Con frecuencia, las celdas solares (dispositivos que generan electricidad cuando se exponen a la luz solar) están recubiertas con una delgada película transparente de monóxido de silicio ( $\text{SiO}$ ,  $n = 1.45$ ) para minimizar las pérdidas por reflejo de la superficie. Suponga que una celda solar de silicio ( $n = 3.5$ ) está recubierta con una delgada película de monóxido de silicio para este propósito (figura 36.12a). Determine el mínimo grosor de película que produce la menor reflexión a una longitud de onda de 550 nm, cerca del centro del espectro visible.

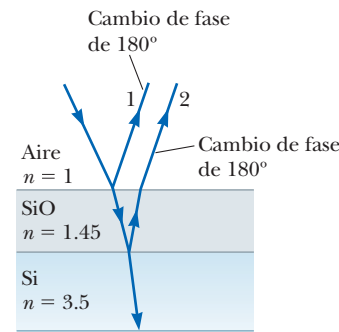
#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 36.12a ayuda a visualizar la trayectoria de los rayos en la película de  $\text{SiO}$  que resultan de la interferencia en la luz reflejada.

**Categorizar** Con la geometría de la capa de  $\text{SiO}$ , este ejemplo se clasifica como un problema de interferencia de película delgada.

**Analizar** La luz reflejada es un mínimo cuando los rayos 1 y 2 en la figura 36.12a satisfacen la condición de interferencia destructiva. En esta situación, *ambos* rayos pasan por un cambio de fase de  $180^\circ$  por reflexión: el rayo 1 de la superficie superior de  $\text{SiO}$  y el rayo 2 de la superficie inferior de  $\text{SiO}$ . Por tanto, el cambio neto en fase debido a reflexión es cero, y la condición para un mínimo de reflexión requiere una diferencia de trayectoria de  $\lambda_n/2$ , donde  $\lambda_n$  es la longitud de onda de la luz en  $\text{SiO}$ . Por esto,  $2nt = \lambda/2$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda en aire y  $n$  es el índice de refracción de  $\text{SiO}$ .

Resuelva la ecuación  $2nt = \lambda/2$  para  $t$  y sustituya valores numéricos:



a



b

**Figura 36.12** (Ejemplo 36.4) (a) Las pérdidas por reflejo de una celda solar de silicio se minimizan al recubrir la superficie de la celda con una película delgada de monóxido de silicio. (b) La luz reflejada de una lente de cámara recubierta con frecuencia tiene una apariencia violeta rojiza.

$$t = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550 \text{ nm}}{4(1.45)} = 94.8 \text{ nm}$$

**Finalizar** Una celda solar no recubierta representativa tiene pérdidas por reflexión tan altas como 30%, pero un recubrimiento de  $\text{SiO}$  puede reducir este valor a casi 10%. Esta disminución significativa en pérdidas por reflexión aumenta la eficiencia de la celda, pues menos reflexión significa que más luz solar entra al silicio para crear portadores de carga en la celda. Ningún recubrimiento jamás puede ser perfectamente no reflector porque el grosor requerido depende de la longitud de onda y la luz incidente cubre una gama amplia de longitudes de onda.

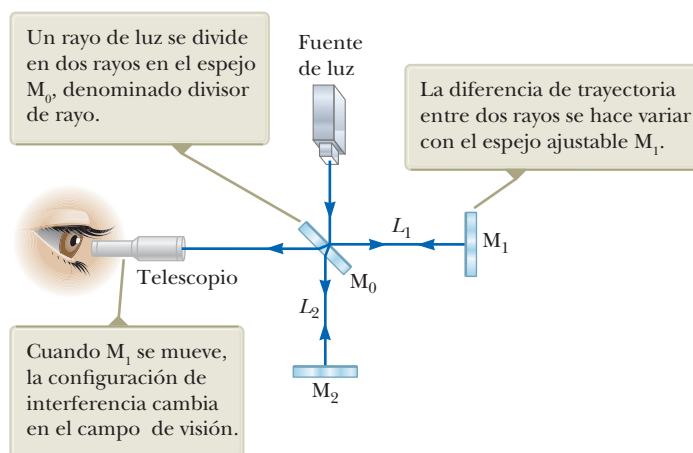
Las lentes de vidrio usadas en las cámaras y otros instrumentos ópticos por lo general están recubiertas con una delgada película transparente para reducir o eliminar la reflexión indeseada y mejorar la transmisión de luz a través de la lente. La lente de la cámara de la figura 36.12b tiene varios recubrimientos (de diferentes grosores) para minimizar la reflexión de las ondas de luz que tienen longitudes de onda cerca del centro del espectro visible. Como resultado, la pequeña cantidad de luz que refleja la lente tiene una mayor proporción de los extremos lejanos del espectro y con frecuencia parece violeta rojizo.

## 36.6 El interferómetro de Michelson

El **interferómetro**, inventado por el físico estadounidense A. A. Michelson (1852-1931), divide un rayo de luz en dos partes y luego los recombina para que formen una configuración de interferencia. El aparato se puede usar para medir longitudes de onda u otras longitudes con gran precisión, porque un desplazamiento grande y medido en forma muy precisa de uno de los espejos está relacionado con un número contable exacto de longitudes de onda de luz.

En la figura 36.13 (página 974), se muestra un esquema del interferómetro. Un rayo de luz procedente de una fuente monocromática es dividido en dos rayos por el espejo  $M_0$ , que está inclinado  $45^\circ$  respecto al rayo de luz incidente. El espejo  $M_0$ , denominado *divisor de rayo*, transmite la mitad de la luz incidente en él y refleja el resto. Un rayo se refleja de  $M_0$  verticalmente hacia arriba al espejo  $M_1$ , y el segundo rayo es transmitido horizontalmente por medio del espejo  $M_0$  hacia el espejo  $M_2$ . Por esto, los dos rayos recorren trayectorias separadas  $L_1$  y  $L_2$ . Después de reflejarse desde  $M_1$  y  $M_2$ , por último los dos rayos se recombinan en  $M_0$  para producir una configuración de interferencia, que se puede ver a través de un telescopio.





**Figura 36.13** Diagrama del interferómetro de Michelson.

La condición de interferencia para los dos rayos está determinada por sus diferencias de distancia de trayectoria. Cuando los dos espejos están exactamente perpendiculares entre sí, el patrón de interferencia es una configuración objetivo de franjas circulares brillantes y oscuras, semejante a los anillos de Newton. Cuando  $M_1$  se mueve, el modelo de franjas colapsa o se expande, dependiendo de la dirección en que se mueve  $M_1$ . Por ejemplo, si un círculo oscuro aparece en el centro de la configuración objetivo (correspondiente a interferencia destructiva) y después  $M_1$  se mueve una distancia  $\lambda/4$  hacia  $M_0$ , la diferencia en la trayectoria cambia en  $\lambda/2$ . Lo que era un círculo oscuro en el centro se convierte ahora en un círculo brillante. Cuando  $M_1$  se mueve una distancia adicional  $\lambda/4$  hacia  $M_0$ , el círculo brillante se convierte de nuevo en círculo oscuro. En esta forma, el modelo de franjas se desplaza media franja cada vez que  $M_1$  se mueve una distancia  $\lambda/4$ . Por tanto, la longitud de onda de luz se mide contando el número de cambios de franja para un cierto desplazamiento dado de  $M_1$ . Si la longitud de onda se conoce con precisión, los desplazamientos del espejo se pueden medir con una tolerancia de una fracción de la longitud de onda.

En la explicación sobre relatividad en el capítulo 38 se describe un importante e histórico uso del interferómetro de Michelson. Los usos modernos incluyen las siguientes aplicaciones: Transformada de Fourier en espectroscopia en infrarrojo y el interferómetro láser en el observatorio de onda gravitacional.

### Transformada de Fourier en espectroscopia en infrarrojo

La espectroscopia es el estudio de la distribución de radiación de longitud de onda desde una muestra que se puede usar para identificar las características de átomos o moléculas en la muestra. La espectroscopia infrarroja es particularmente importante para especialistas en química orgánica para analizar moléculas orgánicas. La espectroscopia tradicional comprende el uso de un elemento óptico, como el prisma (sección 34.4) o una rejilla de difracción (sección 37.4), la cual dispersa varias longitudes de onda de una compleja señal óptica desde la muestra en diferentes ángulos. En esta forma se pueden determinar las diversas longitudes de onda de radiación y sus intensidades en la señal. Esta clase de aparatos son limitados en su resolución y efectividad porque deben ser explorados por medio de diferentes desviaciones angulares de la radiación.

La técnica de la *transformada de Fourier en espectroscopia infrarroja* (FTIR, *Fourier transform infrared spectroscopy*), se emplea para crear un espectro de alta resolución en un intervalo de un segundo, procedimiento que con un espectrómetro estándar pudo haber requerido 30 minutos. Con esta técnica, la radiación de una muestra penetra en un interferómetro de Michelson. El espejo movable pasa a través de la condición de cero diferencia de trayectoria y la intensidad de radiación se registra de la posición de observación. El resultado es un complejo conjunto de datos que relacionan la intensidad de luz como función de la posición del espejo, llamado *interferograma*. Ya que existe una correspondencia entre la posición del espejo y la intensidad de

luz para una longitud de onda determinada, interferógrama contiene información acerca de todas las longitudes de onda de la señal.

En la sección 17.8 se explicó el análisis de Fourier de una onda. La onda es una función que contiene información acerca de todos los componentes individuales de frecuencia que la conforman.<sup>3</sup> La ecuación 17.14 muestra la forma en que se genera la onda a partir de componentes individuales de frecuencia. Del mismo modo, el interferógrama se puede analizar por computadora, en un proceso denominado *transformada de Fourier*, para obtener todos los componentes de longitud de onda. Esta es la misma información generada por espectroscopía tradicional, pero la resolución FTIR es más alta.

## Interferómetro láser en el observatorio de onda gravitacional

La teoría general de la relatividad de Einstein (sección 38.9) pronostica la existencia de *ondas gravitacionales*. Estas ondas se propagan desde el sitio de cualquier perturbación gravitacional, que podría ser periódica y predecible, como la rotación de una estrella doble alrededor de un centro de masa o no predecible, como la explosión supernova de una estrella gigante.

En la teoría de Einstein, la gravedad es equivalente a una distorsión del espacio. Por tanto, una perturbación gravitacional produce una distorsión adicional que se propaga en el espacio de un modo semejante a como lo hacen las ondas mecánicas o electromagnéticas. Cuando las ondas gravitacionales de una perturbación pasan por la Tierra, crean una distorsión del espacio local. El aparato LIGO (*laser interferometer gravitational-wave observatory*) está diseñado para detectar esta distorsión. Utiliza un interferómetro de Michelson que emplea rayos láser con una distancia efectiva de trayectoria de varios kilómetros. Al final de uno de los brazos del interferómetro, se monta un espejo sobre un péndulo pesado. Cuando pasa una onda gravitacional, el péndulo y el espejo montado sobre él se mueven y el patrón de interferencia cambia debido a los rayos láser provenientes de los dos brazos.

En Estados Unidos se han creado dos sitios con interferómetros para posibilitar estudios de coincidencia sobre ondas gravitacionales. Estos sitios se encuentran en Richland, Washington, y Livingston, Louisiana. En la figura 36.14 aparece el de Washington. Los dos brazos del interferómetro de Michelson son evidentes en la fotografía.

A pesar de las dificultades para detectar las muy débiles ondas gravitacionales, el 11 de febrero de 2016 se anunció que los sitios de Washington y Luisiana habían detectado una onda gravitacional el 14 de septiembre de 2015. El análisis mostró que la onda provino de dos agujeros negros masivos a más de mil millones de años luz de distancia girando unos sobre otros rápidamente y luego fusionándose. Tres masas solares de su masa combinada se irradiaron como ondas gravitacionales. Las estimaciones muestran que la producción de potencia máxima del evento fue aproximadamente 50 veces mayor que la potencia de todo el universo observable. Colisiones adicionales de agujeros negros fueron anunciadas por LIGO en junio de 2016 y junio de 2017.



Cortesía Caltech/MIT/LIGO Laboratory

**Figura 36.14** Interferómetro de Láser en el observatorio de Ondas Gravitacionales de (LIGO) cerca de Richland, Washington. Observe los dos brazos perpendiculares del interferómetro de Michelson.

<sup>3</sup> En acústica, es común hablar de los componentes de una señal compleja en términos de frecuencia; en óptica, en términos de longitud de onda.



# Resumen

## ► Conceptos y principios

La **interferencia** en ondas de luz se presenta siempre que dos o más ondas se traslapan en un punto determinado. Se observa un patrón de interferencia si (1) las fuentes son coherentes y (2) las fuentes tienen longitudes de onda idénticas.

Una onda que viaja de un medio con índice de refracción  $n_1$  hacia un medio con índice de refracción  $n_2$  experimenta un cambio de fase de  $180^\circ$  en la reflexión cuando  $n_2 > n_1$  y no experimenta cambio de fase cuando  $n_2 < n_1$ .

La **intensidad** en un punto en un patrón de interferencia de doble rendija es

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \quad (36.9)$$

donde  $I_{\text{máx}}$  es la máxima intensidad sobre la pantalla y la expresión representa el tiempo promedio.

La condición para interferencia constructiva en una película de grosor  $t$  e índice de refracción  $n$  rodeado por aire es

$$2nt = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (36.12)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz en el espacio libre. De igual modo, la condición para interferencia destructiva en una película delgada rodeada por aire es

$$2nt = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (36.13)$$

## ► Análisis de modelo para resolución de problemas

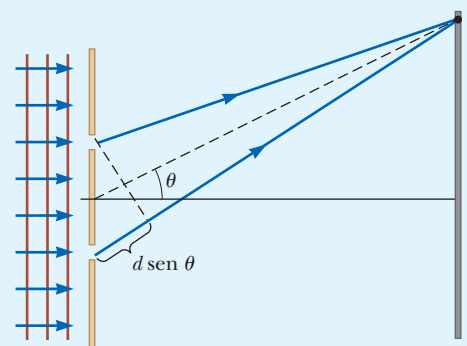
**Ondas en Interferencia.** El experimento de doble rendija de Young sirve como prototipo para fenómenos de interferencia que involucran radiación electromagnética. En este experimento, dos rendijas separadas por una distancia  $d$  se iluminan mediante una fuente de luz de una sola longitud de onda. La condición para franjas brillantes (**interferencia constructiva**) es

$$d \sin \theta_{\text{brillante}} = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (36.2)$$

La condición para franjas oscuras (**interferencia destructiva**) es

$$d \sin \theta_{\text{oscuro}} = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (36.3)$$

El número  $m$  es el **número de orden** de la franja.



# Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN From Cengage

1. Su grupo está estudiando el sistema de aterrizaje por instrumentos utilizado para guiar a los aviones a aterrizajes seguros en algunos aeropuertos cuando la visibilidad es pobre. Resulta que el experimento de doble rendija de Young se usa en este sistema. Un piloto intenta alinear su avión con una pista, como se sugiere en la figura P37.22. Dos antenas de radio (los puntos negros en la figura) están colocadas adyacentes a la pista, separadas una distancia  $d = 40.0$  m. Las antenas transmiten ondas de radio coherentes no moduladas a  $30.0$  MHz. Las líneas rojas en la figura TP36.1 representan trayectorias a lo largo de las cuales existe un patrón de interferencia máxima. (a) Encuentre la longitud de onda de las ondas. El piloto “enlaza” en la señal intensa radiada en conformidad con un máximo de interferencia, y dirige el avión para mantener intensa la señal recibida. Si encuentra

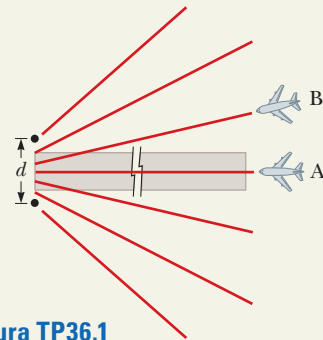


Figura TP36.1

el máximo central, el avión tendrá justo el rumbo correcto para aterrizar cuando llegue a la pista. (b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que el avión vuela a lo largo del primer máximo lateral en vez de hacerlo como en el caso del avión B. ¿A qué distancia de la lateral de la línea de centro de la pista estará el avión cuando esté a  $2.00$  km de las antenas medidos a lo





largo de su dirección de vuelo? (c) Es posible avisarle al piloto que está en el máximo equivocado si se le envían dos señales desde cada antena y se equipa al avión con un receptor de dos canales. La razón entre las dos frecuencias no debe ser la razón entre enteros pequeños (por ejemplo,  $\frac{3}{4}$ ). Explique la forma en que funcionaría este sistema de dos frecuencias y por qué no necesariamente daría resultado si las frecuencias estuvieran relacionadas por una razón de enteros.

2. Su grupo está trabajando en un laboratorio de optoelectrónica. Su supervisor le ha dado la siguiente tarea técnica. Una lámina de plástico transparente que tiene un índice de refracción  $n$  y espesor  $t$  se coloca entre la ranura superior y la pantalla en una orientación tal que la luz pasa a través del plástico perpendicularmente a sus superficies, como se muestra en la figura TP36.2. Cuando se hace esto, el máximo central del patrón de interferencia se mueve hacia arriba en la pantalla por una distancia  $y'$ . Su supervisor le

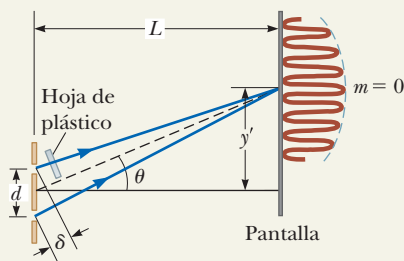


Figura TP36.2

pide a su grupo que investigue esta situación y determine una expresión para la distancia  $y'$  en términos de  $d$ ,  $L$ ,  $n$  y  $t$ .

3. **ACTIVIDAD** Su equipo está trabajando para una empresa química. Su supervisor le pide que realice un experimento para medir la velocidad de evaporación  $dV/dt$  de etanol en mL/s. La configuración física es la siguiente. Una muestra de etanol llena un plato de vidrio poco profundo de radio  $r = 5.00$  cm. Se coloca un láser con una longitud de onda de  $632.8$  nm por encima del plato, con el haz dirigido hacia abajo, de modo que el rayo láser incide sobre la superficie del etanol a una incidencia casi normal. Al lado del láser hay un sistema detector que genera un gráfico de la intensidad de la luz reflejada en función del tiempo, como se muestra en la figura TP36.3. La capa delgada de etanol actúa como una película delgada, de modo que la intensidad de la luz reflejada varía en el tiempo debido a los efectos de interferencia a medida que el espesor de la capa disminuye debido a la evaporación. El índice de refracción de etanol es  $1.361$ .

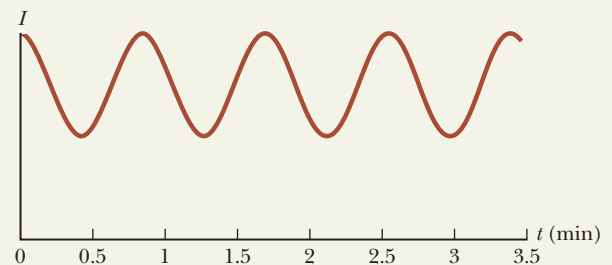


Figura TP36.3

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN From Cengage

### SECCIÓN 36.2 Experimento de doble rendija de Young

*Nota:* Los problemas 1, 4 y 6 y los problemas en línea del capítulo 17, se pueden asignar con esta sección.

- Dos rendijas están separadas por  $0.320$  mm. Un haz de luz de  $500$  nm golpea las ranuras, produciendo un patrón de interferencia. Determine el número de máximos observados en el rango angular  $-30.0^\circ < \theta < 30.0^\circ$ .
- ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Dos rendijas estrechas están separadas por  $8.00$  mm de una pieza de metal. Un haz de microondas golpea el metal perpendicularmente, pasa a través de las dos rendijas y luego procede hacia una pared a cierta distancia. Usted sabe que la longitud de onda de la radiación es de  $1.00$  cm  $\pm 5\%$ , pero se desea medir con más precisión. Mover un detector de microondas a lo largo de la pared para estudiar el patrón de interferencia, se mide la posición de la  $m = 1$  franja brillante, lo que conduce a una medición exitosa de la longitud de onda de la radiación.
- Un haz láser incide en dos rendijas con una separación de  $0.200$  mm, y se coloca una pantalla a  $5.00$  m de las rendijas. Un patrón de interferencia aparece en la pantalla. Si el ángulo de la franja central de la primera franja brillante al lado es  $0.181^\circ$ , ¿cuál es la longitud de onda de la luz láser?
- En el experimento de la doble rendija de Young, dos rendijas paralelas con una separación entre ellas de  $0.100$  mm son iluminadas por luz de longitud de onda de  $589$  nm y el patrón de interferencia es observado en una pantalla situada a  $4.00$  m de las rendijas. (a) ¿Cuál es la diferencia de longitudes de trayectoria de cada una de las rendijas a la ubicación del centro de la franja brillante de tercer orden en la pantalla? (b) ¿Cuál es la diferencia de longitudes de trayectoria de los dos rendijas a la ubicación del centro de la tercera franja oscura lejos del centro del patrón?
- Luz de longitud de onda de  $620$  nm cae en una rendija doble y la primera franja brillante del patrón de interferencia se ve en un ángulo de  $15.0^\circ$  con la horizontal. Encuentre la separación entre las rendijas.
- Por un sistema de doble rendija que tiene una separación entre rendijas  $d = 0.400$  mm pasa luz de  $442$  nm de longitud de onda. Determine a qué distancia debe ponerse una pantalla para que aparezca una franja oscura directamente opuesta a ambas rendijas, con sólo una franja brillante entre ellas.
- Un estudiante sostiene un láser que emite luz de  $632.8$  nm de longitud de onda. El rayo pasa por un par de rendijas separadas  $0.300$  mm, en una placa de vidrio unida al frente del láser. Después el rayo cae perpendicular en una pantalla, produciendo una configuración de interferencia en ella. El estudiante empieza a caminar directamente hacia la pantalla a  $3.00$  m/s. El máximo central en la pantalla es inmóvil. Encuentre la rapidez de los  $50$  máximos de primer orden en la pantalla.

**S** 8. Un estudiante sostiene un láser que emite luz de longitud de onda  $\lambda$ . El rayo pasa por un par de rendijas separadas por una distancia  $d$ , en una placa de vidrio unida al frente del láser. Después el rayo cae perpendicular en una pantalla, produciendo una configuración de interferencia en ella. El estudiante empieza a caminar directamente hacia la pantalla una velocidad  $v$ . El máximo central en la pantalla está inmóvil. Encuentre la rapidez de los  $m$ -ésimos de orden máximo en la pantalla.

9. Rayos de luz coherente de longitud de onda  $\lambda$  inciden en un par de rendijas separadas por una distancia  $d$  a un ángulo  $\theta_1$ , con respecto a la normal al plano que contiene las rendijas como se muestra en la figura P36.9. Los rayos abandonan las rendijas formando un ángulo  $\theta_2$  con respecto a la normal y el máximo de interferencia es formado por aquellos rayos sobre la pantalla que están a una gran distancia de las rejillas. Demuestre que el ángulo  $\theta_2$  está dado por

$$\theta_2 = \text{sen}^{-1} \left( \text{sen } \theta_1 - \frac{m\lambda}{d} \right)$$

donde  $m$  es un entero.

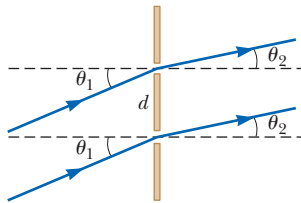


Figura P36.9

**T** 10. En la figura P36.10 (no está a escala), sean  $L = 1.20$  m y  $d = 0.120$  mm, y suponga que el sistema de rendijas está iluminado con luz monocromática de 500 nm. Calcule la diferencia de fase entre los dos frentes de onda que llegan a P cuando (a)  $\theta = 0.500^\circ$  y (b)  $y = 5.00$  mm. (c) ¿Cuál es el valor de  $\theta$  en el que la diferencia de fase es 0.333 rad? (d) ¿Cuál es el valor de  $\theta$  en el que la diferencia de trayectoria es  $\lambda/4$ ?

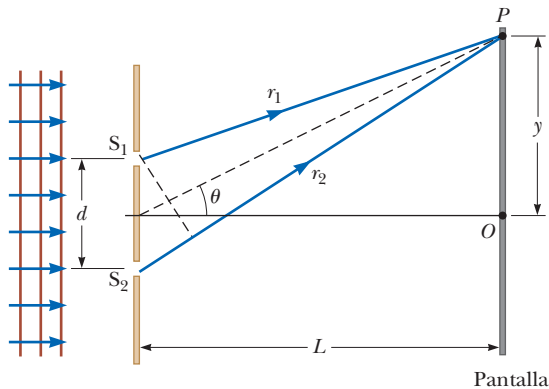


Figura P36.10

**CE** 11. Está trabajando en un laboratorio de investigación óptica. Uno de sus proyectos implica el uso de una doble rendija a través de la cual pasa una luz láser naranja de longitud de onda de 590 nm. Lamentablemente, debido a los recortes presupuestarios, hay muchos investigadores en la misma sala, con muchos equipos metidos en la habitación y, en particular, muchos rayos láser volando por ella. Un día, encuentra que un segundo rayo láser de origen desconocido y color diferente está ingresando a su doble rendija junto con su rayo naranja y está viendo un patrón de interferencia que

es la suma de aquellos debidos a los dos haces. Nota que el patrón combinado es un desastre, ¡pero espere! El máximo  $m = 3$  de su patrón de rayo láser naranja es puro; no hay absolutamente ninguna mezcla del otro color en ese punto. A partir de este hecho, determine la longitud de onda de la luz del láser invasor para que pueda averiguar a qué otro investigador pedirle que modifique la orientación de su láser.

**CE** 12. Usted está operando un nuevo radiotelescopio que ha sido instalado en un alto acantilado frente al océano. Comienza la prueba del telescopio orientando la antena hacia el océano, fijando su longitud de onda de recepción a 125 m, y barriendo su dirección lentamente desde la horizontal directamente hacia el cielo. Cada barrido toma alrededor de una hora. Cuando revisa los datos, observa que la antena no recibió señales cuando apuntaba a un cierto ángulo por encima de la horizontal. Continúa tomando datos comenzando a la misma hora cada noche y descubre que el ángulo en el que no se detectan señales varía de noche a noche. Durante un mes completo, el ángulo en el que no se detectan señales varía de  $24.5^\circ$  a  $25.7^\circ$ . Finalmente se da cuenta de que la pérdida de señal se debe a la interferencia destructiva causada por el reflejo de las ondas de radio de la superficie del océano, y la variación mensual se debe a los cambios causados por las mareas oceánicas. Usted le informa al instituto oceanográfico local que tiene un método novedoso para medir las mareas. Para verificar sus resultados, el instituto pregunta por la variación en las alturas de las mareas durante el mes anterior.

**C/C** **V** 13. En el arreglo de doble rendija de la figura P36.13,  $d = 0.150$  mm,  $L = 140$  cm,  $\lambda = 643$  nm, y  $y = 1.80$  cm. (a) ¿Cuál es la diferencia  $\delta$  en la trayectoria de los rayos de las dos ranuras que llegan a P? (b) Expresar la diferencia de trayectoria en términos de  $\lambda$ . (c) ¿P corresponde a un máximo, un mínimo, o una condición intermedia? Dar evidencia de su respuesta.

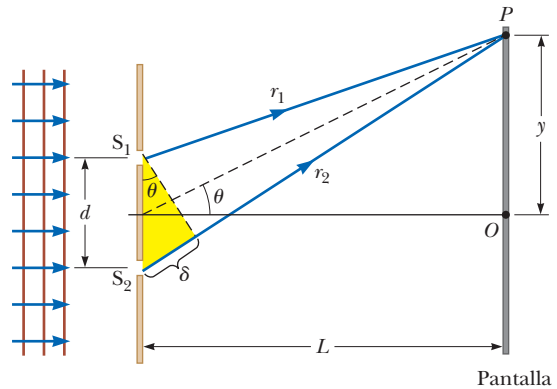


Figura P36.13

**PG** 14. La luz monocromática de longitud de onda  $\lambda$  incide en un par de rendijas separadas por  $2.40 \times 10^{-4}$  m y forma un patrón de interferencia en una pantalla colocada a 1.80 m de las rendijas. La franja brillante de primer orden está en una posición  $y_{\text{brillante}} = 4.52$  mm, medida desde el centro del máximo central. A partir de esta información, se desea predecir dónde se encuentra la franja para  $n = 50$ . (a) Suponiendo que los flecos están dispuestos linealmente a lo largo de la pantalla, encuentre la posición de la franja  $n = 50$  multiplicando la posición de la  $n = 1$  franja por 50.0. (b) Determine la tangente del ángulo que la franja brillante de primer orden hace con respecto a la línea que se extiende desde el punto medio entre las rendijas hasta el centro del

máximo central. (c) Utilizando el resultado del inciso (b) y la ecuación 36.2, calcule la longitud de onda de la luz. (d) Calcule el ángulo para la franja brillante de  $50^\circ$  orden a partir de la ecuación 36.2. (e) Determine la posición de la franja brillante de  $50^\circ$  orden en la pantalla a partir de la ecuación 36.5. (f) Formule observaciones sobre la concordancia entre las respuestas a los incisos (a) y (e).

**SECCIÓN 36.3 Distribución de intensidad del patrón de interferencia de doble rendija**

- 15. Demuestre que las dos ondas con funciones  $E_1 = 6.00 \text{ sen } (100 \pi t)$  y  $E_2 = 8.00 \text{ sen } (100 \pi t + \pi/2)$  se suman para dar una onda con la función  $E_R \text{ sen } (100 \pi t + \phi)$ . Encuentre los valores requeridos para  $E_R$  y  $\phi$ .
- 16. Demuestre que la distribución de la intensidad en un patrón de doble rendija viene dada por la ecuación 36.9. Comience asumiendo que la magnitud total del campo eléctrico en el punto  $P$  en la pantalla de la figura 36.4 es la superposición de dos ondas, con magnitudes de campo eléctrico

$$E_1 = E_0 \text{ sen } \omega t \quad E_2 = E_0 \text{ sen } (\omega t + \phi)$$

El ángulo de fase  $\phi$  en  $E_2$  se debe a la longitud de camino extra recorrido por el haz inferior en la figura 36.4. Recuerde de la ecuación 33.27 que la intensidad de la luz es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico. Además, la intensidad aparente del patrón es la intensidad promediada en el tiempo de la onda electromagnética. Deberá evaluar la integral del cuadrado de la función sinusoidal durante un periodo. Consulte la figura 32.5 para una manera fácil de realizar esta evaluación. También necesitará la identidad trigonométrica

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{ sen} \left( \frac{A + B}{2} \right) \cos \left( \frac{A - B}{2} \right)$$

- 17. Luz verde ( $\lambda = 546 \text{ nm}$ ) ilumina un par de rendijas estrechas y paralelas separadas por  $0.250 \text{ mm}$ . Haga una gráfica de  $I/I_{\text{máx}}$  como una función de  $\theta$  para el patrón de interferencia observado en una pantalla a  $1.20 \text{ m}$  de distancia desde el plano de las rendijas paralelas. Sea  $\theta$  el rango sobre el intervalo de  $-0.3^\circ$  a  $+0.3^\circ$ .
- 18. Luz monocromática coherente de amplitud  $E_0$  y frecuencia angular  $\omega$  pasa a través de tres rendijas paralelas, cada una separada por una distancia  $d$  de su vecina. (a) Demuestre que la intensidad promedio en el tiempo como función del ángulo  $\theta$  es

$$I(\theta) = I_{\text{máx}} \left[ 1 + 2 \cos \left( \frac{2\pi d \text{ sen } \theta}{\lambda} \right) \right]^2$$

(b) Explique cómo describe esta expresión tanto los máximos primarios y los máximos secundarios. (c) Determine la razón entre las intensidades de los máximos primario y secundario. Ver problema 16.

**SECCIÓN 36.5 Interferencia en películas delgadas**

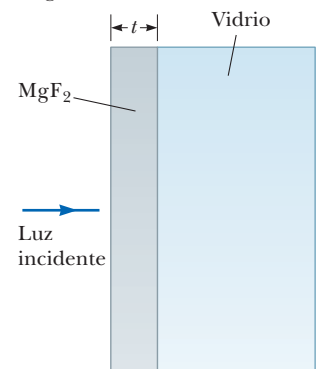
- 19. Un material que tiene un índice de refracción de 1.30 se emplea como recubrimiento anti reflejante en una pieza de vidrio ( $n = 1.50$ ). ¿Cuál debe ser el grosor mínimo de esta película para reducir al mínimo una reflexión de luz de  $500 \text{ nm}$ ?
- 20. Una burbuja de jabón ( $n = 1.33$ ) que flota en el aire tiene la forma de una concha esférica con un espesor de pared de  $120 \text{ nm}$ . (a) ¿Cuál es la longitud de onda de la luz visible que se refleja con más fuerza? (b) Explique cómo una burbuja de diferentes espesores también podría reflejar fuertemente la luz de la misma longitud de onda. (c) Encuentre las dos

películas más pequeñas con espesores mayores de  $120 \text{ nm}$  que pueden producir luz fuertemente reflejada de la misma longitud de onda.

- 21. Una película de  $\text{MgF}_2$  ( $n = 1.38$ ) de un grosor de  $1.00 \times 10^{-5} \text{ cm}$  se usa para recubrir una lente de cámara. (a) ¿Cuáles son las tres longitudes de onda que se intensifican en la luz reflejada? (b) ¿Hay longitudes de onda del espectro visible?
- 22. Una película de aceite ( $n = 1.45$ ) que flota sobre agua es iluminada por luz blanca a incidencia normal. La película es de  $280 \text{ nm}$  de grosor. Encuentre (a) la longitud de onda y el color de la luz del espectro visible que se refleja más intenso y (b) la longitud de onda y el color de la luz del espectro que se transmite con más intensidad. Explique su razonamiento.
- 23. Cuando se introduce un líquido en el espacio de aire entre las lentes y la placa en un aparato de anillos de Newton, el diámetro del décimo anillo cambia de  $1.50$  a  $1.31 \text{ cm}$ . Encuentre el índice de refracción del líquido.

24. Usted está trabajando como testigo experto para un abogado que está demandando a una compañía naviera. La compañía opera barcos que transportan petróleo crudo a través de los océanos. Un barco sufrió un derrame de petróleo, en el que el petróleo derramado se extiende como una *mancha*, formando una película delgada que flota en la superficie del océano. El problema legal es si el barco derramó más o menos de un volumen de  $10.0 \text{ m}^3$  de petróleo en el océano. Está leyendo documentos que describen la marea negra en la superficie del océano. En un documento, descubre que se realizaron pruebas de reflexión en la mancha de petróleo. Estas pruebas mostraron que la superficie del océano mostraba un máximo de interferencia para luz de  $500 \text{ nm}$  sobre un área circular de radio de  $4.25 \text{ km}$  alrededor del lugar donde se produjo el derrame. A distancias más alejadas de la ubicación, la superficie del océano no mostró interferencia constructiva, lo que indica que no había petróleo presente. El tipo de petróleo involucrado tiene un índice de refracción de  $n = 1.25$ . Determine para el abogado la cantidad mínima de petróleo que se derramó.

- 25. Unos astrónomos observan la cromosfera del Sol con un filtro que pasa la línea espectral roja del hidrógeno de longitud  $656.3 \text{ nm}$ , llamada línea  $H_\alpha$ . El filtro está formado por un dieléctrico transparente de grosor  $d$  sostenido entre dos placas de vidrio parcialmente aluminizadas. El filtro se mantiene a temperatura constante. (a) Encuentre el valor mínimo de  $d$  que produzca una transmisión máxima de luz perpendicular  $H_\alpha$ , si el dieléctrico tiene un índice de refracción de 1.378. (b) ¿Qué pasaría si? Si aumenta la temperatura del filtro por encima del valor normal, incrementando su espesor, ¿qué le ocurre a la longitud de onda transmitida? (c) ¿Qué longitud de onda casi visible pasará también el dieléctrico? Una de las placas de vidrio es de color rojo para absorber esta luz.



- 26. Una lente de vidrio ( $n_g = 1.52$ ) está recubierta con una fina capa de  $\text{MgF}_2$  ( $n_s = 1.38$ ) de espesor  $t$ . La luz visible incide normalmente en la lente revestida como en la figura P36.26. (a) ¿Para qué valor mínimo de  $t$  la luz refle-

Figura P36.26

jada de la longitud de onda de 540 nm (en el aire) se pierde?  
 (b) ¿Existen otros valores de  $t$  que reduzcan al mínimo la luz reflejada en esta longitud de onda? Explique.

**SECCIÓN 36.6 El interferómetro de Michelson**

**27.** El espejo  $M_1$  de la figura 36.13 se mueve una distancia  $\Delta L$ .  
**T** Durante este desplazamiento, se cuentan 250 inversiones de franja (formación sucesiva de bandas oscuras a brillantes y viceversa). La luz que se usa tiene una longitud de onda de 632.8 nm. Calcule el desplazamiento  $\Delta L$ .

**PROBLEMAS ADICIONALES**

- 28.** Un radio transmisor A que opera a 60.0 MHz está a 10.0 m de otro transmisor B similar que se encuentra  $180^\circ$  fuera de fase en relación con A. ¿Qué tan lejos deberá moverse un observador de A a B a lo largo de la línea que los conecta para llegar al punto más cercano donde los dos rayos están en fase?
- 29.** En un experimento similar al del ejemplo 36.1, una luz verde con longitud de onda de 560 nm, enviada a través de un par de rendijas separadas 30.0  $\mu\text{m}$ , produce franjas brillantes separadas 2.24 cm sobre una pantalla a 1.20 m de distancia. Calcule la separación de franja para este mismo arreglo y suponga que el aparato se sumerge en un tanque que contiene una solución azucarada con índice de refracción 1.38.
- 30.** En la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 36.2, se indicó que las franjas que se traslapan en una configuración de interferencia de rendijas, para dos longitudes de onda, obedecen la siguiente correspondencia, incluso para valores grandes del ángulo  $\theta$ :

$$\frac{m'}{m} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

(a) Demuestre esta aseveración. (b) Con los datos del ejemplo 36.2, encuentre el valor diferente de cero de  $y$  en la pantalla en la que coinciden primero las franjas de las dos longitudes de onda.

**31.** Dos ondas coherentes, provenientes de fuentes en diferentes ubicaciones, se mueven a lo largo del eje  $x$ . Sus funciones de onda son

$$E_1 = 860 \text{ sen} \left[ \frac{2\pi x_1}{650} - 924\pi t + \frac{\pi}{6} \right]$$

y

$$E_2 = 860 \text{ sen} \left[ \frac{2\pi x_2}{650} - 924\pi t + \frac{\pi}{8} \right]$$

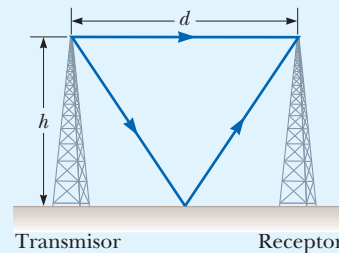
donde  $E_1$  y  $E_2$  están en volts por metro,  $x_1$  y  $x_2$  en nanómetros y  $t$  en picosegundos. Determine la relación entre  $x_1$  y  $x_2$  que produce interferencia constructiva cuando las dos ondas se superponen.

**32.** Levante una mano y manténgala extendida. Considere el espacio entre sus dedos índice y medio como una rendija, y el espacio entre sus dedos medio y anular como una segunda rendija. (a) Considere la interferencia que resulta de enviar luz visible coherente perpendicular a través de este par de aberturas. Calcule un orden estimado de magnitud para el ángulo entre zonas adyacentes de interferencia constructiva. (b) Para hacer que los ángulos de la configuración de interferencia sean fáciles de medir con un transportador de plástico, ¿de qué orden de magnitud debe ser la onda electromagnética usada? (c) ¿Cómo se clasifica esta onda en el espectro electromagnético?

**33.** En un experimento de doble rendija de Young con una luz de longitud de onda  $\lambda$ , una delgada pieza de acrílico con un índice de refracción  $n$  cubre una de las rendijas. Si el punto central de la pantalla es un punto oscuro en lugar de un punto brillante, ¿cuál es el grosor mínimo del acrílico?

**34. Problema de repaso.** Una pieza plana de vidrio se mantiene inmóvil y horizontal arriba del extremo superior plano de una varilla metálica vertical que tiene su extremo inferior de 10 cm de longitud sujeto rígidamente. Se observa que la película delgada de aire entre la varilla y el vidrio está brillante por la luz reflejada cuando es iluminada por luz de 500 nm de longitud de onda. Cuando la temperatura aumenta lentamente en  $25.0^\circ\text{C}$ , la película cambia 200 veces de brillante a oscura y de oscura a brillante. ¿Cuál es el coeficiente de expansión lineal del metal?

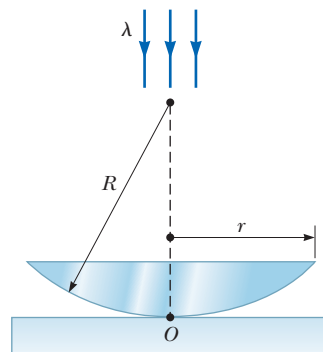
**35.** La figura P36.35 muestra un transmisor de ondas de radio y un receptor separados una distancia  $d = 50.0$  m y ambos a una distancia  $h = 35.0$  m sobre el terreno. El receptor puede recibir señales directas del transmisor e indirectas, de las que se reflejan del suelo. Suponga que el suelo está nivelado entre el transmisor y el receptor y que existe un cambio de fase de  $180^\circ$  en la reflexión. Determine las longitudes de onda más largas que interfieren (a) constructivamente y (b) destructivamente.



**Figura P36.35** Problemas 35 y 36.

**36.** La figura P36.35 muestra un transmisor de ondas de radio y un receptor separados una distancia  $d$  y ambos a una distancia  $h$  sobre el terreno. El receptor puede recibir señales directas del transmisor e indirectas, de las que se reflejan del suelo. Suponga que el suelo está nivelado entre el transmisor y el receptor y que existe un cambio de fase de  $180^\circ$  en la reflexión. Determine las longitudes de onda más largas que interfieren (a) constructivamente y (b) destructivamente.

**37.** En un experimento de anillos de Newton, un vidrio plano convexo ( $n = 1.52$ ) que tiene un diámetro de  $r = 5.00$  cm se coloca sobre una placa plana, como se muestra en la figura P36.37. Cuando luz de longitud de onda  $\lambda = 650$  nm incide normal, se observan 55 anillos brillantes, el último exactamente en el borde de la lente. (a) ¿Cuáles el radio de



**Figura P36.37**



curvatura  $R$  de la superficie convexa de la lente? (b) ¿Cuál es su distancia focal?

38. Se realizan mediciones de la distribución de intensidad dentro de la franja central brillante en un patrón de interferencia de Young (véase la figura 36.5). En un valor particular de  $y$ , se encuentra que  $I/I_{\text{máx}} = 0.810$  cuando se usa luz de  $600 \text{ nm}$ . ¿Qué longitud de onda de luz debería usarse para reducir la intensidad relativa en la misma ubicación al 64.0% de la intensidad máxima?
39. Una lente plana convexa que tiene un índice de refracción de 1.50 se coloca sobre una placa plana de vidrio, como se muestra en la figura P36.39. Su superficie curva, que tiene un radio de curvatura de  $8.00 \text{ m}$ , está sobre el fondo. La lente se ilumina desde arriba con luz amarilla de sodio con una longitud de onda de  $589 \text{ nm}$  y por reflexión se observa una serie de anillos concéntricos brillantes y oscuros. El patrón de interferencia tiene un punto oscuro en el centro, rodeado por 50 franjas oscuras, de las cuales la mayor se encuentra en el borde exterior de la lente. (a) ¿Cuál es el grosor de la capa de aire en el centro del patrón de interferencia? (b) Calcule el radio del anillo oscuro más exterior. (c) Encuentre la distancia focal de la lente.

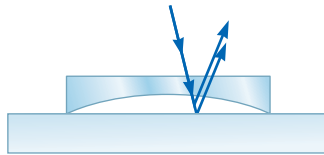


Figura P36.39

40. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Una pieza de material transparente que tiene un índice de refracción  $n = 1.50$  se corta en la forma de una cuña como se muestra en la figura P36.40. Tanto las superficies superior e inferior de la cuña están en contacto con el aire. Luz monocromática de longitud de onda  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  incide normalmente desde arriba, y la cuña se ve desde arriba. Sean  $h = 1.00 \text{ mm}$  que representa la altura de la cuña y  $\ell = 0.500 \text{ m}$  de su longitud. Un patrón de interferencia de película delgada aparece en la cuña debido a la reflexión de las superficies superior e inferior. Se le ha dado a la tarea de contar el número de franjas brillantes que aparecen en toda la longitud de la cuña. Usted encuentra esta tarea tediosa y su concentración se rompe por una distracción ruidosa después de contar con precisión 5 000 franjas brillantes.

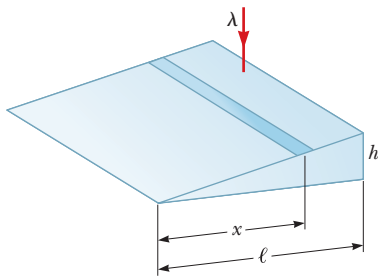


Figura P36.40

41. Las franjas de interferencia se producen con el uso de un espejo de Lloyd y una fuente  $S$  de longitud de onda  $\lambda = 606 \text{ nm}$ , como se muestra en la figura 36.41. En una pantalla a  $L = 2.00 \text{ m}$  de la fuente real  $S$  se forman franjas situadas a  $\Delta y = 1.20 \text{ mm}$  de distancia. Encuentre la distancia vertical  $h$  de la fuente sobre la superficie reflectora.

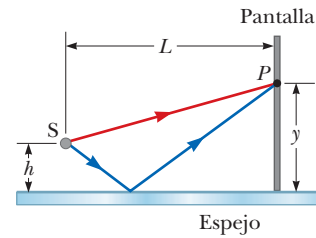


Figura P36.41

42. Una lente plana convexa tiene un índice de refracción  $n$ . El lado curvo de la lente tiene un radio de curvatura  $R$  y se apoya sobre una superficie plana de vidrio con el mismo índice de refracción, con una película de índice  $n_{\text{película}}$  entre ellas, como se ve en la figura 36.42. La lente se ilumina desde arriba por una luz de longitud de onda  $\lambda$ . Demuestre que los anillos oscuros de Newton tienen radios dados aproximadamente por

$$r \approx \sqrt{\frac{m\lambda R}{n_{\text{película}}}}$$

donde  $m$  es un entero y  $r \ll R$ .

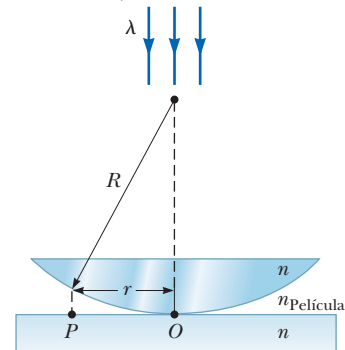


Figura P36.42

43. Está trabajando para una empresa de electrónica que diseña y fabrica unidades y reproductores digitales. Su supervisor desea evaluar la posibilidad de utilizar láseres de longitud de onda más corta que los utilizados en discos Blu-ray ( $405 \text{ nm}$ ) para intentar comenzar una nueva revolución de video con discos de *rayos ultravioleta*. La figura P36.43 muestra la idea general detrás de la lectura digital de CD, DVD y discos Blu-ray. La información se codifica digitalmente en un sustrato de plástico de índice de refracción 1.78 (verde en la figura P36.43). La figura P36.43 muestra las áreas llamadas *planos*, que son partes inalteradas del sustrato, y los *huecos*, que son depresiones en el sustrato que representan la información digital. La superficie del sustrato es

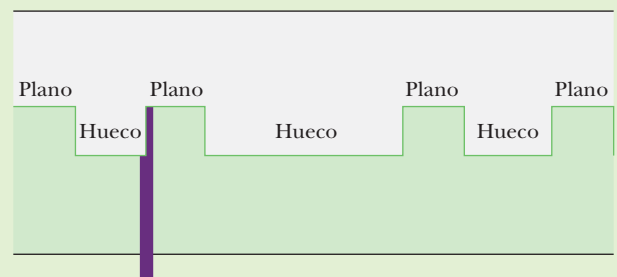


Figura P36.43





cubierta con un revestimiento protector reflejante (gris en la figura P36.43) para proteger la superficie de arañazos. A medida que el disco gira, el rayo láser, que se muestra en violeta entra por debajo del disco, pasa sobre una pista de planos y huecos. Cuando hay un cambio de un plano a un hueco o viceversa, parte del rayo láser se refleja desde el plano y parte del hueco, como se muestra en la figura. La profundidad del hueco está diseñada para que las reflexiones de las dos mitades del rayo láser desde el plano y el hueco experimenten interferencia destructiva. Su supervisor desea usar un láser con una longitud de onda de vacío de 200 nm. La profundidad óptima del hueco es lo más pequeña posible, pero no inferior a la limitación de fabricación de 0.1 μm. Él le pide que determine la profundidad mínima apropiada para un disco de rayos ultravioleta.

- 44.** La cantidad  $nt$  en las ecuaciones 36.12 y 36.13 se llama **CIC** *distancia de trayectoria óptica* que corresponde a la distancia geométrica  $t$  y es análoga a la cantidad  $\Delta$  en la ecuación 36.1; la diferencia de trayectoria. La *distancia de trayectoria óptica* es proporcional a  $n$  porque un índice de refracción más grande acorta la longitud de onda, así que más ciclos de una onda se ajustan en una distancia geométrica particular. (a) Suponga que una mezcla de jarabe de maíz y agua se prepara en un tanque, con su índice de refracción  $n$  aumentando uniformemente de 1.33 en  $y = 20.0$  cm en la parte superior, a 1.90 en  $y = 0$ . Escriba el índice de refracción  $n(y)$  como función de  $y$ . (b) Calcule la distancia de trayectoria óptica correspondiente a la altura de 20 cm del tanque al calcular

$$\int_0^{20 \text{ cm}} n(y) dy$$

(c) Suponga que un haz estrecho de luz se dirige a la mezcla con un ángulo no cero con respecto a la normal a la superficie de la mezcla. Describa cualitativamente su trayectoria.

- 45.** Unos astrónomos observan una fuente de radio de 60.0 MHz directamente y por reflexión del mar como se muestra en la figura P36.45. Si el disco receptor está a 20.0 m sobre el nivel del mar, ¿cuál es el ángulo de la fuente de radio sobre el horizonte en el primer máximo?

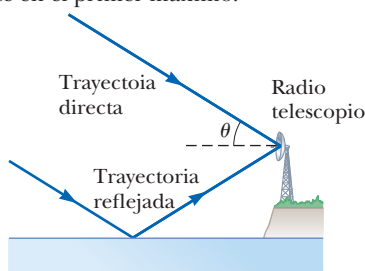


Figura P36.45

**PROBLEMAS DE DESAFÍO**

- 46.** Una lente plana convexa que tiene un radio de curvatura de  $r = 4.00$  m se coloca sobre una superficie cóncava de vidrio cuyo radio de curvatura es  $R = 12.0$  m, como se ve en la figura P36.46. Determine el radio del centésimo anillo brillante, suponiendo que luz de 500 nm incide normal a la superficie plana de la lente.

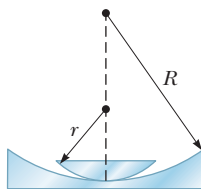


Figura P36.46

- 47.** La explicación de las técnicas para determinar las interferencias constructiva y destructiva por reflexión desde una película delgada en el aire ha sido confinada a rayos que inciden en la película con una incidencia casi normal. **¿Qué pasaría si?** Un rayo incide a un ángulo de  $30.0^\circ$  (respecto de la normal) sobre una película con índice de refracción de 1.38. Calcule el grosor mínimo para que se dé interferencia constructiva de luz de sodio con una longitud de onda de 590 nm.
- 48.** **S** La condición para obtener interferencia constructiva por reflexión desde una película delgada en el aire, como se desarrolló en la sección 36.5, supone incidencia casi normal. **¿Qué pasaría si?** Suponga que la luz incide en la película en un ángulo  $\theta_1$  distinto de cero (con respecto a la normal). El índice de refracción de la película es  $n$ , y la película está rodeada por el vacío. Encuentre la condición para una interferencia constructiva que relacione el espesor  $t$  y el índice de refracción  $n$  de la película, la longitud de onda  $\lambda$  de la luz y el ángulo de incidencia  $\theta_1$ .
- 49.** Ambos lados de una película uniforme que tiene un índice de refracción  $n$  y un grosor  $d$  están en contacto con el aire: con incidencia normal de luz, se observa una intensidad mínima en la luz reflejada en  $\lambda_2$  y una intensidad máxima en  $\lambda_1$ , donde  $\lambda_1 > \lambda_2$ . (a) Si se supone que no se observan mínimos de intensidad entre  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , determine una expresión para el entero  $m$  en las ecuaciones 36.12 y 36.13 en términos de las longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . (b) Determine la mejor estimación para el grosor de la película, suponiendo  $n = 1.40$ ,  $\lambda_1 = 500$  nm y  $\lambda_2 = 370$  nm.
- 50.** En una rendija doble, la rendija 1 es más ancha que la 2, de modo que la luz de la rendija 1 tiene una amplitud 3 veces mayor que la luz de la rendija 2. Demuestre que, para esta situación, la ecuación 36.9 puede sustituirse con la ecuación

$$I = I_{\text{máx}} \left[ 1 + 3 \cos^2 \left( \frac{\pi d \text{sen } \theta}{\lambda} \right) \right]$$

Comience asumiendo que la magnitud total del campo eléctrico en el punto  $P$  en la pantalla de la figura 36.4 es la superposición de dos ondas, con magnitudes de campo eléctrico

$$E_1 = 3E_0 \text{sen } \omega t \quad E_2 = E_0 \text{sen } (\omega t + \phi)$$

El ángulo de fase  $\phi$  en  $E_2$  se debe a la longitud de camino extra recorrido por el haz inferior en la figura 36.4. Deberá evaluar la integral del cuadrado de la función sinusoidal durante un periodo. Consulte la figura 32.5 para una manera fácil de realizar esta evaluación. Puede encontrar útiles las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{sen} \left( \frac{A + B}{2} \right) \cos \left( \frac{A - B}{2} \right)$$

$$\text{sen } (A + B) = \text{sen } A \cos B + \cos A \text{sen } B$$

$$\cos A = 2 \cos^2 \left( \frac{A}{2} \right) - 1$$

# Patrones de difracción y polarización

# 37

Escuche atentamente el sonido de los instrumentos de metal la próxima vez que vea una banda de música. Compare cómo suenan cuando están frente a usted y cómo suenan cuando están detrás.  
(Mark Herreid / Shutterstock)

**IMAGINE** Está en un estadio de fútbol, viendo a la banda durante su actuación previa al juego. A medida que la banda marcha hacia su posición, disfruta de la música rica y bien mezclada. Luego, la banda se da vuelta y se aleja, y dice: "¡Espera un momento!". Todavía puede oír los clarinetes y los saxofones, pero las trompetas y los trombones se han vuelto muy silenciosos. ¿Por qué sucede eso? Está decidido a no perder de vista el fútbol hoy, por lo que deja de lado ese fenómeno. Se sienta en su asiento y, mientras espera que empiece el juego, se pone las gafas de sol polarizadas. Intenta ignorar la molesta pregunta en su mente sobre por qué las gafas de sol deberían estar polarizadas. El hecho de que debe tener algo que ver con la física se cuela en su mente, y saca un lápiz y un trozo de papel. Comienza el juego de fútbol, pero está dibujando diagramas de ondas.

**CONEXIONES** En el capítulo 34, presentamos brevemente la noción de difracción, un fenómeno que ocurre cuando las ondas pasan a través de una abertura o más allá de un borde. En el capítulo 36, comenzamos nuestra investigación sobre la óptica física, en la cual estudiamos los fenómenos particulares que ocurren debido a la naturaleza ondulatoria de la luz. La difracción fue importante para la comprensión de la interferencia de doble rendija en ese capítulo. En este capítulo, ampliaremos esas discusiones y ampliaremos nuestra comprensión de la difracción. También estudiaremos el fenómeno interesante de la polarización, que es importante para las ondas de luz, pero imposible para las ondas de sonido. En nuestro estudio de física cuántica en el capítulo 39, necesitaremos la comprensión de la difracción, porque descubrimos que las partículas también se difractan e interfieren cuando pasan a través de las aberturas.

- 37.1 Introducción a los patrones de difracción
- 37.2 Patrones de difracción provenientes de rendijas angostas
- 37.3 Resolución de una sola rendija y aberturas circulares
- 37.4 Rejilla de difracción
- 37.5 Difracción de los rayos X mediante cristales
- 37.6 Polarización de las ondas luminosas



Douglas C. Johnson/California State Polytechnic University, Pomona

### 37.1 Introducción a los patrones de difracción



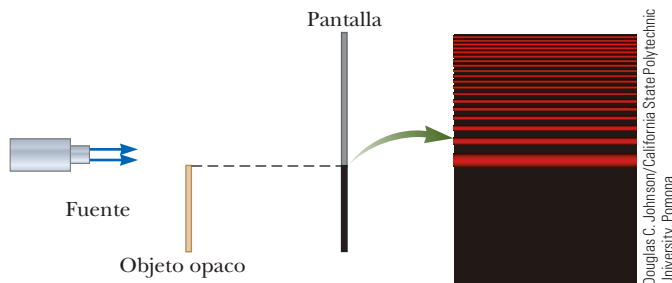
**Figura 37.1** Patrón de difracción que aparece sobre una pantalla cuando pasa luz a través de una rendija vertical angosta. El patrón está constituido por una franja central ancha y una serie de franjas laterales menos intensas y más angostas.

En las secciones 34.2 y 36.1 analizó como luz de una longitud de onda comparable o mayor que el ancho de una rendija se dispersa en todas las direcciones hacia adelante después de pasar a través de la rendija. A este fenómeno le llamamos *difracción*. Este comportamiento indica que la luz, una vez que ha pasado por una rendija angosta, se esparce más allá de la trayectoria definida por ésta en regiones que quedarían en la sombra si la luz se desplazara en línea recta. Otras ondas, como las sonoras y las que se producen en el agua, también tienen esta propiedad de dispersión cuando pasan por aberturas o bordes agudos.

Sería de esperar que la luz que cruza por una abertura pequeña dé como resultado simplemente una amplia región de luz en la pantalla, debido a la dispersión de la luz al pasar por la abertura. Sin embargo, hay algo más interesante. Se observa un **patrón de difracción** formado por áreas iluminadas y áreas oscuras, como se muestra en la figura 37.1, algo similar a lo que ocurre con los patrones de interferencia ya explicados. El patrón está constituido por una banda central ancha y bien iluminada (conocida como **máxima central**) flanqueada por una serie de bandas adicionales, menos intensas y cercanas (llamadas **máximo laterales** o **máximos secundarios**) y una serie de bandas oscuras intermedias (o **mínimas**). La figura 37.2 muestra un patrón de difracción que se asocia con luz que pasa por el borde de un objeto. De nuevo, franjas brillantes y oscuras, una reminiscencia del patrón de interferencia.

La controversia onda-partícula sobre la naturaleza de la luz, descrita al principio del capítulo 34, continuó, incluso después del experimento de interferencia de Thomas Young en 1801. En 1818, la Academia Francesa de Ciencias estableció una competencia para establecer la verdadera naturaleza de la luz. Uno de los partidarios de la óptica geométrica, Simeon Poisson, argumentó que si una nueva teoría de ondas de luz propuesta por Augustin Fresnel para la competencia fuera válida, se debería observar una mancha brillante central a la sombra de un objeto circular iluminado por una fuente puntual de luz. La luz que llega a todos los puntos alrededor del borde del objeto se difracta hacia adentro en la región de sombra (así como también hacia afuera a puntos fuera de la sombra). Debido a que el centro es equidistante de todos los puntos del borde, la luz de todos los puntos interferiría constructivamente allí, causando una mancha brillante. Poisson consideraba que esta posibilidad era absurda, porque, en la teoría de partículas, las partículas de luz serían bloqueadas por el objeto. Además, nunca se había observado una mancha tan brillante. Dominique François-Jean Arago, que era el jefe del comité para la competencia, realizó el experimento sugerido por Poisson y, para gran asombro de Poisson, observó el punto brillante en el centro de la sombra.

La figura 37.3 muestra una versión moderna de este experimento usando un centavo y un láser. El punto brillante es visible en el centro de la sombra del penique. Además, vemos varias franjas circulares que se extienden hacia afuera desde el borde de la sombra.



**Figura 37.2** La luz de una fuente pequeña pasa por el borde de un objeto opaco y continúa hacia una pantalla. En la pantalla aparece en la región sobre el borde del objeto un patrón de difracción formado por franjas brillantes y oscuras.



**Figura 37.3** Patrón de difracción creado por la iluminación de una moneda colocada entre la pantalla y la fuente luminosa.

P. M. Rimard, Am. J. Phys. 44:70 1976



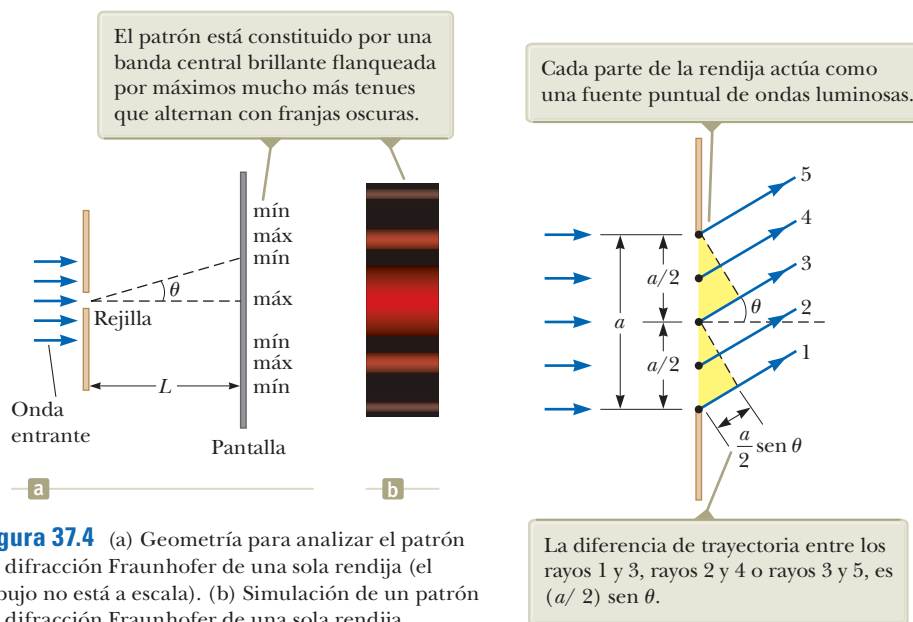
## 37.2 Patrones de difracción provenientes de rendijas angostas

Entendemos un patrón de interferencia producido por la interferencia de luz desde dos ranuras separadas. Pero, ¿cómo obtenemos un patrón similar de franjas claras y oscuras a partir de una sola rendija? Considere una situación común, en donde a través de una abertura angosta, representada como una rendija, pasa luz que posteriormente se proyecta en una pantalla. Para simplificar el análisis, suponga que la pantalla de observación está lejos de la rendija, de manera que los rayos que llegan a la pantalla son aproximadamente paralelos entre sí. (Lo anterior se puede lograr experimentalmente utilizando una lente convergente para enfocar los rayos paralelos sobre una pantalla cercana.) En este modelo, el patrón que aparece sobre la pantalla se conoce como **patrón de difracción Fraunhofer**.<sup>1</sup>

La figura 37.4a muestra luz que entra por una sola rendija desde el lado izquierdo y se difracta conforme se propaga hacia la pantalla. La figura 37.4b es una fotografía de un patrón de difracción Fraunhofer. A lo largo del eje en  $\theta = 0$  se observa una franja brillante, con franjas oscuras y brillantes alternadas a cada lado de la franja central.

Hasta ahora ha supuesto que las rendijas son fuentes puntuales de luz. En esta sección, se abandona esta suposición para ver como el ancho finito de las rendijas es la base para la comprensión de la difracción de Fraunhofer. Es posible explicar algunas características de importancia a partir de este fenómeno si examina las ondas que llegan desde varias partes de la rendija, como se observa en la figura 37.5. De acuerdo con el principio de Huygens, cada parte de la rendija actúa como una fuente de ondas luminosas. Por esto, la luz desde una sección de la rendija puede interferir con la luz desde otra parte, y la intensidad de la luz resultante sobre la pantalla de observación dependerá de la dirección  $\theta$ . Según este análisis, reconocerá que un patrón de difracción es realmente un patrón de interferencia, en el cual ¡las diferentes fuentes de luz son porciones diferentes de una misma rendija! Por tanto, los patrones de difracción que estudiará en este capítulo son aplicaciones del análisis de modelo de ondas en interferencia.

Con la finalidad de analizar el patrón de difracción, resulta conveniente dividir la rendija en dos mitades, como se muestra en la figura 37.5. Recordando que todas las ondas estarán en fase cuando salgan de la rendija, consideremos los rayos 1 y 3. Conforme esos dos rayos se desplazan a la derecha de la figura hacia una pantalla de observación lejana, el rayo 1 se desplaza más lejos que el rayo 3 en una cantidad igual a la diferencia de trayectoria  $(a/2) \sin \theta$ , siendo  $a$  el ancho de la rendija. De manera



**Figura 37.4** (a) Geometría para analizar el patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija (el dibujo no está a escala). (b) Simulación de un patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 37.1

**Difracción y patrón de difracción** La difracción se refiere al comportamiento general de las ondas al dispersarse cuando pasan a través de una rendija. En el capítulo 36 utilizó la difracción para explicar la existencia de un patrón de interferencia. Un *patrón de difracción* es de hecho una manera errónea de designarlo, pero está arraigado muy profundamente en el lenguaje de la física. El patrón de difracción que se ve en una pantalla cuando se ilumina una sola rendija, es realmente otro patrón de interferencia. La interferencia ocurre entre fracciones de la luz incidente que ilumina diferentes regiones de la rendija.

**Figura 37.5** Trayectorias seguidas por los rayos luminosos que se encuentran en una rendija angosta de ancho  $a$  y que se difractan hacia una pantalla en la dirección indicada por el ángulo  $\theta$  (el dibujo no está a escala.)

<sup>1</sup> Si se acerca la pantalla a la rendija (sin utilizar lente alguna), el patrón resultante es un patrón de difracción *Fresnel*. Este patrón es más difícil de analizar, por lo que restringiremos nuestra explicación a la difracción Fraunhofer.

similar, la diferencia en trayectoria entre los rayos 2 y 4 es también  $(a/2) \sin \theta$ , al igual que como ocurre con los rayos 3 y 5. Si esta diferencia de trayectoria es exactamente la mitad de una longitud de onda (lo que corresponde a una diferencia de fase de  $180^\circ$ ), las dos ondas se cancelan entre sí, lo que da como resultado interferencia destructiva. Si esto es válido para dos rayos de este tipo, también es válido para dos rayos cualesquiera que se originen en puntos separados a la mitad del ancho de la rendija, porque la diferencia de fase entre esos dos puntos es de  $180^\circ$ . Por tanto, las ondas provenientes de la mitad superior de la rendija interfieren destructivamente con ondas desde la mitad inferior cuando

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

o, si considera ondas con un ángulo  $\theta$  arriba y abajo de la línea discontinua en la figura 37.5

$$\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{a}$$

Si divide la rendija en cuatro partes iguales y utiliza un razonamiento similar, encontramos que la pantalla de observación también quedará oscura cuando

$$\frac{a}{4} \sin \theta = \pm \frac{\lambda}{2} \rightarrow \sin \theta = \pm 2 \frac{\lambda}{a}$$

De igual manera, si divide la rendija en seis partes iguales demuestra que se obtienen franjas oscuras en la pantalla cuando

$$\frac{a}{6} \sin \theta = \pm \frac{\lambda}{2} \rightarrow \sin \theta = \pm 3 \frac{\lambda}{a}$$

Por tanto, la condición general para la interferencia destructiva es

Condición para la interferencia destructiva en una rendija sencilla ▶

$$\sin \theta_{\text{oscura}} = m \frac{\lambda}{a} \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (37.1)$$

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 37.2

**¡Ojo ecuaciones iguales!** La ecuación 37.1 tiene exactamente la misma forma que la ecuación 36.2, en la cual se usa  $d$  como la separación de la rendija y el ancho de la rendija  $a$  en la ecuación 37.1. Sin embargo, la ecuación 37.2 se refiere a las regiones *brillantes* en un patrón de interferencia de dos rendijas, en tanto que la ecuación 37.1 se refiere a las regiones *oscuras* en un patrón de difracción de una sola rendija.

Esta ecuación proporciona los valores de  $\theta_{\text{oscuro}}$  para los cuales el patrón de difracción tiene una intensidad luminosa igual a cero; es decir cuando se forma una franja oscura. Sin embargo, no dice nada respecto a las variaciones de la intensidad de la luz a lo largo de la pantalla. Las características generales de la distribución de intensidad se muestran en la figura 37.4, en donde se observa una franja central brillante y ancha. Esta franja está flanqueada por franjas de brillo tenues que se alternan con franjas oscuras. Las diversas franjas oscuras se presentan en los valores de  $\theta_{\text{oscuro}}$  que satisfacen la ecuación 37.1. Cada pico de franja brillante yace aproximadamente a la mitad del camino entre las franjas oscuras mínimas limitantes. Observe que el brillo central máximo tiene el doble de ancho que los máximos secundarios. No hay ninguna franja oscura central, representada por la ausencia de  $m = 0$  en la ecuación 37.1

**EJAMEN RÁPIDO 37.1** Suponga que el ancho de la rendija de la figura 37.4 se

- divide a la mitad. La franja central brillante **(a)** se ensancha, **(b)** queda igual, o **(c)**
- se estrecha.

### Ejemplo 37.1 Dónde están las franjas oscuras?

Una luz con una longitud de onda de 580 nm incide sobre una rendija con un ancho de 0.300 mm. La pantalla de observación está a 2.00 m de la rendija. Determine las posiciones de las primeras franjas oscuras, así como el ancho de la franja central brillante.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El enunciado del problema invita a imaginar un patrón de difracción de una sola rendija similar al de la figura 37.4.

**Categorizar** Clasifique esto como una aplicación directa de la explicación de los patrones de difracción de una sola rendija, el cual proviene del análisis de modelo de *ondas en interferencia*.



37.1 continuación

**Analizar** Evalúe numéricamente la ecuación 37.1 para las dos franjas oscuras laterales a la franja central brillante, que corresponde a  $m = \pm 1$ .

$$\text{sen } \theta_{\text{oscura}} = \pm \frac{\lambda}{a}$$

Sea  $y_1$  la posición vertical a lo largo de la pantalla en la figura 37.4a, medida desde el punto en la pantalla directamente detrás de la rendija. Así se tiene que  $\tan \theta_{\text{oscuro}} = y_1/L$ , donde el subíndice 1 se refiere a la primera franja oscura. Dado que  $\theta_{\text{oscuro}}$  es muy pequeña, es posible utilizar la aproximación  $\text{sen } \theta_{\text{oscuro}} \approx \tan \theta_{\text{oscuro}}$ ; por tanto,  $y_1 = L \text{sen } \theta_{\text{oscuro}}$

El ancho de la franja central brillante es el doble del valor absoluto de  $y_1$ :

$$\begin{aligned} 2|y_1| &= 2|L \text{sen } \theta_{\text{oscura}}| = 2 \left| \pm L \frac{\lambda}{a} \right| = 2L \frac{\lambda}{a} = 2(2.00 \text{ m}) \frac{580 \times 10^{-9} \text{ m}}{0.300 \times 10^{-3} \text{ m}} \\ &= 7.73 \times 10^{-3} \text{ m} = 7.73 \text{ mm} \end{aligned}$$

**Finalizar** Observe que este valor es mucho mayor que el ancho de la rendija. Examine qué sucede en el caso de que modifique el ancho de la rendija.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Qué pasaría si se incrementara el ancho de la rendija en un orden de magnitud hasta 3.00 mm? ¿Qué le ocurre al patrón de difracción?

**Respuesta** A partir de la ecuación 37.1, se espera que disminuyan los ángulos en los que aparecen las bandas oscuras conforme  $a$  aumenta. Por tanto, el patrón de difracción se hace más angosto.

Repita los cálculos con el ancho de rendija mayor:  $2|y_1| = 2L \frac{\lambda}{a} = 2(2.00 \text{ m}) \frac{580 \times 10^{-9} \text{ m}}{3.00 \times 10^{-3} \text{ m}} = 7.73 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.773 \text{ mm}$

Observe que esta distancia es *menor* que el ancho de la rendija. En general, para grandes valores de  $a$ , los diversos máximos y mínimos están tan cerca unos de otros que sólo se observa el área central brillante similar a la imagen geométrica de la rendija. Este concepto es muy importante para el desempeño de instrumentos ópticos como los telescopios.

### Intensidad de patrones de difracción de una sola rendija

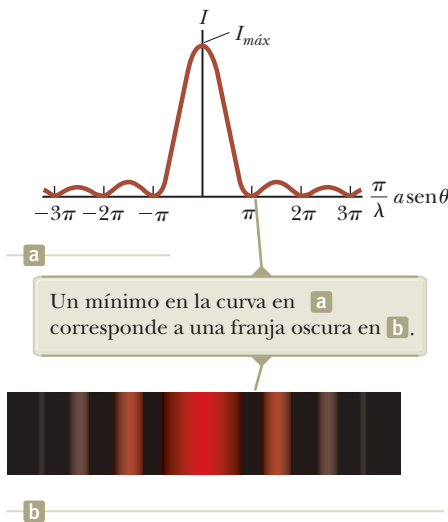
El análisis de la variación de intensidad en un patrón de difracción de una sola rendija de ancho  $a$  muestra que la intensidad está dada por

$$I = I_{\text{máx}} \left[ \frac{\text{sen}(\pi a \text{sen } \theta / \lambda)}{\pi a \text{sen } \theta / \lambda} \right]^2 \tag{37.2}$$

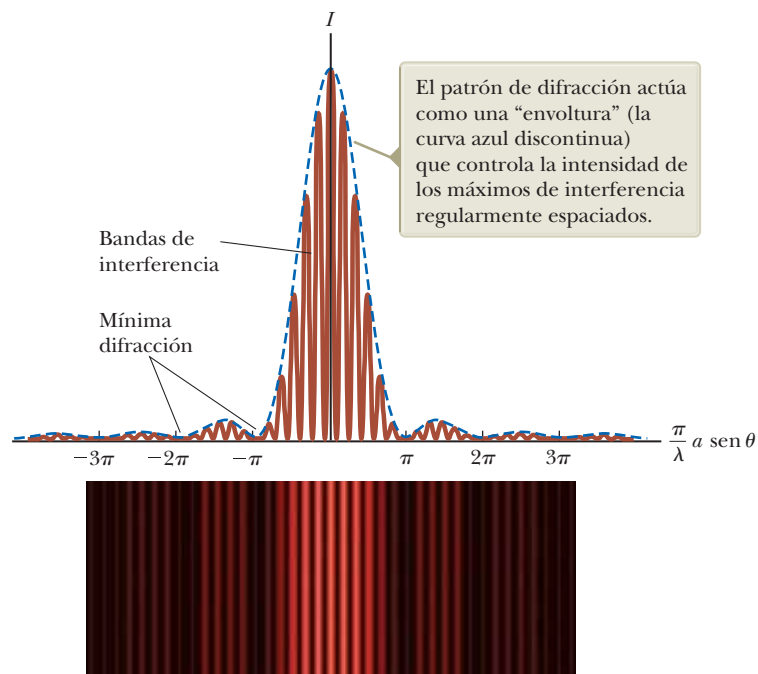
◀ Intensidad de un patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija

donde  $I_{\text{máx}}$  es la intensidad en  $\theta = 0$  (el máximo central) y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz para iluminar la rendija.

La figura 37.6a representa una gráfica de la ecuación 37.2, y la figura 37.6b es una fotografía de un patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija. Observe que la mayor parte de la intensidad luminosa se concentra en la franja brillante.



**Figura 37.6** (a) Gráfica de la intensidad de la luz  $I$  en función de  $(\pi/\lambda)a \text{sen } \theta$  para el patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija. (b) Simulación de un patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija.



**Figura 37.7** Efectos combinados de interferencias debidas a dos rendijas y a una sola rendija. Este es el patrón producido cuando pasan ondas luminosas de 650 nm a través de dos rendijas de 3.0  $\mu\text{m}$ , separadas 18  $\mu\text{m}$ .

### Intensidad de los patrones de difracción de dos rendijas

Cuando se tiene más de una rendija, es necesario considerar no solo patrones de difracción debido a las rendijas individuales, sino también los patrones de interferencia debidos a las ondas desde rendijas diferentes. Observe las líneas discontinuas curvas de la figura 36.6 del capítulo 36, que indican una disminución en la intensidad de los máximos de interferencia conforme  $\theta$  se incrementa. Esta disminución se debe a un patrón de difracción. A fin de determinar los efectos de cada rendija de interferencia y el patrón de difracción de una sola rendija a partir de una perspectiva mayor que en la figura 36.6, combine las ecuaciones 36.9 y 37.2:

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \left[ \frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2 \quad (37.3)$$

A pesar de que esta expresión parece complicada, simplemente representa el patrón de difracción de una sola rendija (el factor incluido en paréntesis cuadrados) que actúa como una "envoltura" para un patrón de interferencia de dos rendijas (el factor coseno cuadrado) como se puede observar en la figura 37.7. La curva discontinua de color azul de la figura 37.7 representa el factor entre corchetes de la ecuación 37.3. El factor que incluye coseno cuadrado daría por sí mismo una serie de picos, todos de la misma altura, como el pico más elevado de la curva marrón de la figura 37.7. De cualquier modo, debido al efecto del factor entre corchetes, estos picos varían en altura como se muestra en la figura.

### 37.3 Resolución de una sola rendija y aberturas circulares

La capacidad que tienen los sistemas ópticos para distinguir entre objetos muy cercanos entre sí, está limitada debido a la naturaleza ondulatoria de la luz. Para comprender esta dificultad, observe la figura 37.8 que muestra dos fuentes de luz alejadas desde una rendija angosta de ancho  $a$ . Las fuentes pueden ser dos fuentes puntuales no coherentes  $S_1$  y  $S_2$ ; por ejemplo, podría ser de dos estrellas lejanas. De no presentarse interferencia al pasar la luz por diferentes partes de la rendija, en la pantalla se observarían dos puntos brillantes distintos (o dos imágenes) donde las líneas rectas azules de la figura 37.8 golpean la pantalla. Sin embargo, debido a dicha interferencia, cada fuente aparece como una región central brillante flanqueada por franjas brillantes tenues y franjas oscuras, es decir, un patrón de difracción. Lo que se

observa en la pantalla es la suma de dos patrones de difracción: uno desde  $S_1$  y el otro desde  $S_2$ .

Si las dos fuentes están suficientemente separadas entre sí de manera que sus máximos centrales no se traslapen, como en la figura 37.8a, se podrán distinguir sus imágenes, y se dice que están *resueltas*. Sin embargo, si las fuentes están muy cercanas entre sí, como en el caso de la figura 37.8b, los dos máximos centrales se sobreponen, y las imágenes no quedan resueltas. Para determinar si dos imágenes están resueltas, a menudo se utiliza la condición siguiente:

Cuando el máximo central de una imagen coincide con el primer mínimo de otra imagen, se dice que las imágenes están apenas resueltas. Esta condición límite de resolución se conoce como **criterio de Rayleigh**.

A partir del criterio de Rayleigh, es posible determinar la separación angular mínima  $\theta_{\min}$  subtendida por las fuentes en la rendija en la figura 37.8, para la cual las imágenes quedan apenas resueltas. La ecuación 37.1 indica que el primer mínimo en un patrón de difracción de una sola rendija se presenta en el ángulo para el cual

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{a} \quad (37.4)$$

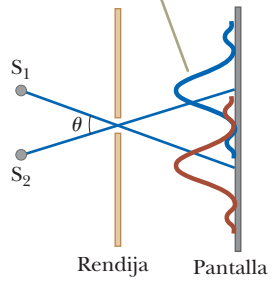
donde  $a$  es el ancho de la rendija. Según el criterio de Rayleigh, esta expresión proporciona la separación angular más pequeña en la cual se resuelven dos imágenes. Ya que en la mayoría de las ocasiones  $\lambda \ll a$ ,  $\text{sen } \theta$  es pequeño y es posible utilizar la aproximación  $\text{sen } \theta \approx \theta$ . Por tanto, el ángulo de resolución límite para una rendija de ancho  $a$  es

$$\theta_{\min} = \frac{\lambda}{a} \quad (37.5)$$

donde  $\theta_{\min}$  está en radianes. Por esto, el ángulo subtendido por las dos fuentes en la rendija debe ser mayor a  $\lambda/a$  si las imágenes quedan resueltas.

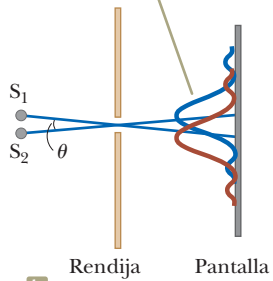
Muchos sistemas ópticos utilizan aberturas circulares en vez de rendijas. El patrón de difracción de una abertura circular, como se muestra en las fotografías de la figura 37.9, está constituido por un disco circular brillante central rodeado por anillos luminosos y oscuros progresivamente más tenues. La figura 37.9 muestra patrones de difracción para tres situaciones en las cuales pasa luz desde dos fuentes puntuales a través de una abertura circular. Cuando las fuentes están alejadas, sus imágenes están bien resueltas (figura 37.9a). Cuando la separación angular de las fuentes satisface el

El ángulo subtendido por las fuentes en la rendija es lo suficientemente grande para que sean distinguibles los patrones de difracción.



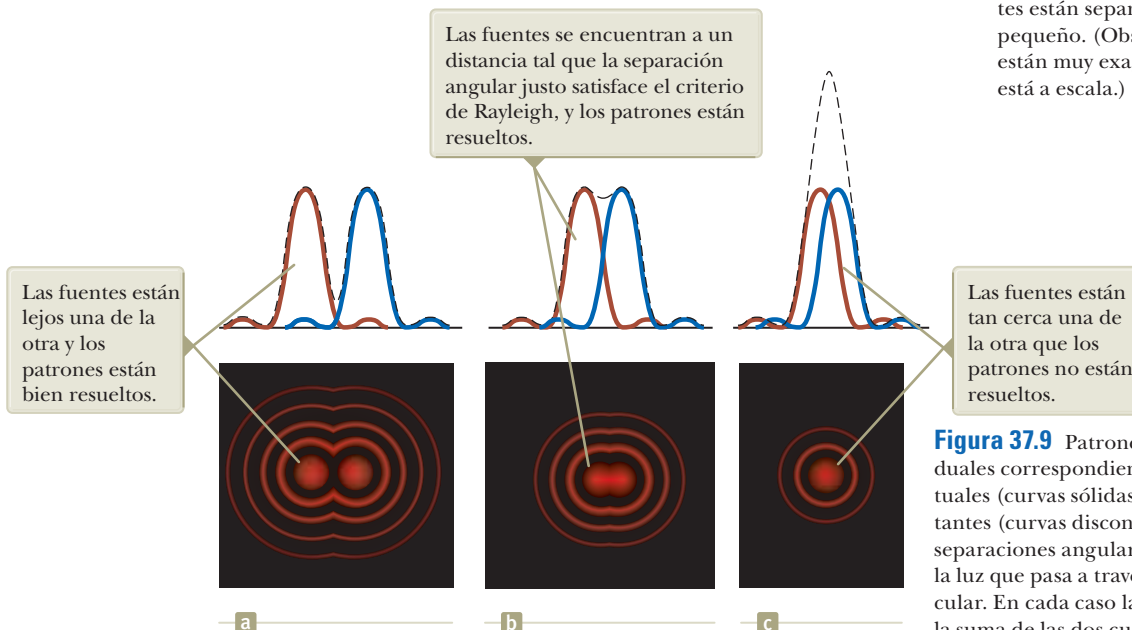
a

El ángulo subtendido es tan reducido que sus patrones de difracción se traslapan y las imágenes no están bien resueltas.



b

**Figura 37.8** Dos fuentes puntuales lejos de una rendija angosta producen cada una un patrón de difracción. (a) Las fuentes están separadas por un ángulo grande. (b) las fuentes están separadas por un ángulo pequeño. (Observe que los ángulos están muy exagerados. El dibujo no está a escala.)



**Figura 37.9** Patrones de difracción individuales correspondientes a dos fuentes puntuales (curvas sólidas) y los patrones resultantes (curvas discontinuas) para diferentes separaciones angulares de las fuentes, como la luz que pasa a través de una abertura circular. En cada caso la curva discontinua es la suma de las dos curvas sólidas.

criterio de Rayleigh, las imágenes están resueltas (figura 37.9b). Por último, cuando las fuentes están cerca una de la otra, se dice que las imágenes no están resueltas (figura 37.9c) y los patrones se parecen a los de una fuente sencilla.

El análisis muestra que el ángulo de resolución límite para una abertura circular es

Ángulo de resolución límite para una abertura circular ▶

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \tag{37.6}$$

donde  $D$  es el diámetro de la abertura. Observe que esta expresión es similar a la ecuación 37.5, excepto por el factor 1.22, que resulta de un análisis matemático de la difracción desde una abertura circular.

La difracción de las aberturas circulares explica la pregunta sobre la banda de marcha en la semblanza de apertura. Si bien nos hemos centrado en las ondas de luz, las ondas de sonido también difractan al pasar por las aberturas. En un instrumento de latón como una trompeta o un trombón, el sonido sale de la *campana* abocinada al final del instrumento. Esta es una abertura relativamente grande, especialmente para altas frecuencias de audio, por lo que solo hay una pequeña cantidad de difracción; gran parte del sonido se dirige hacia delante en un haz concentrado dirigido delante del marcador. Por otro lado, el sonido de instrumentos de viento de madera como clarinetes y saxofones sale de los *agujeros de tono* a lo largo del lado del instrumento; casi nada sale de la campana. Los agujeros de tono son pequeños, por lo que hay una difracción significativa. Además, la columna del instrumento generalmente se mantiene en posición vertical, de modo que hay sonido difractado en todas las direcciones, incluso hacia atrás del marchista. Sin embargo, cuando los músicos de latón dan la vuelta y se alejan de usted, muy poco de su sonido se dirige detrás de ellos.

**E XAMEN RÁPIDO 37.2** Los ojos de los gatos tienen pupilas que pueden modelarse como, rendijas verticales. De noche, ¿tendrán los gatos más éxito en ver (a) los faros de un automóvil lejano o (b) las luces verticalmente separadas sobre el mástil de un barco a la distancia?

**E XAMEN RÁPIDO 37.3** Suponga que observa una estrella binaria a través de un telescopio y que encuentra dificultad para definir ambas estrellas. Decide utilizar un filtro de color para maximizar la resolución. (Un filtro de un color específico sólo transmite dicho color presente en la luz.) ¿Qué color de filtro elegiría? (a) Azul, (b) verde, (c) amarillo, (d) rojo.

**Ejemplo 37.2 Resolución del ojo**

Luz de 500 nm de longitud de onda, cerca del centro del espectro visible, entra a un ojo humano. Aunque el diámetro de la pupila varía de persona a persona, estime un diámetro diurno de 2 mm.

(A) Estime el ángulo de resolución límite para este ojo, si supone que su resolución está limitada solo por difracción.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Identifique la abertura a través de la cual viaja la luz como en la pupila del ojo. La luz que pasa a través de esta pequeña abertura hace que en la retina se presenten patrones de difracción.

**Categorizar** El resultado se determina con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

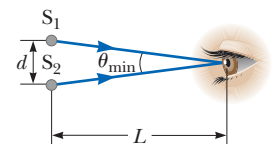
Use la ecuación 37.6, sea  $\lambda = 500 \text{ nm}$  y  $D = 2 \text{ mm}$ :

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \left( \frac{5.00 \times 10^{-7} \text{ m}}{2 \times 10^{-3} \text{ m}} \right) = 3 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 1 \text{ minuto de arco}$$

donde 1 minuto de arco equivale a 1/60 de grado.

(B) Determine la distancia de separación mínima  $d$  entre dos fuentes puntuales que el ojo puede distinguir, si las fuentes puntuales están a una distancia  $L = 25 \text{ cm}$  del observador (figura 37.10).

**Figura 37.10** (Ejemplo 38.2) dos fuentes puntuales separadas por una distancia  $d$ , según observa el ojo.



## 37.2 continuación

## SOLUCIÓN

Considerando que  $\theta_{\min}$  es pequeño, encuentre  $d$ :

$$\sin \theta_{\min} \approx \theta_{\min} \approx \frac{d}{L} \rightarrow d = L\theta_{\min}$$

Sustituya valores numéricos:

$$d = (25 \text{ cm})(3 \times 10^{-4} \text{ rad}) = 8 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

Este resultado es aproximadamente igual al grosor de un cabello humano.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Qué pasaría si ves a alguien en el otro extremo del campo de un estadio de fútbol? ¿Podrías reconocerlo? Respuesta. Una característica típica de la cara de alguien podría ser de un tamaño de 3.0 cm, o incluso menos. La cara, si está al otro extremo del campo de fútbol, por lo menos esta a 120 yardas o a 120 m de distancia. Por tanto, la característica subtiende a un ángulo de  $0.030 \text{ m}/120 \text{ m} = 2.5 \times 10^{-4} \text{ rad}$ . Está en el orden de la resolución límite del ojo, encontrado en la parte (A), entonces es poco probable que pueda reconocer la cara de la persona.

## Ejemplo 37.3 Resolución de un telescopio

Cada uno de los dos telescopios en el Observatorio Keck en Mauna Kea, Hawái, tiene un diámetro efectivo de 10 m. ¿Cuál es su ángulo de resolución límite para luz de 600 nm?

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Identifique la abertura a través de la cual viaja la luz como la abertura del telescopio. La luz que pasa a través de esta abertura hace que se presenten patrones de difracción en la imagen final.

**Categorizar** El resultado se evalúa con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \left( \frac{6.00 \times 10^{-7} \text{ m}}{10 \text{ m}} \right) \\ &= 7.3 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 0.015 \text{ s de arc} \end{aligned}$$

Use la ecuación 37.6, con  $\lambda = 6.00 \times 10^{-7} \text{ m}$  y  $D = 10 \text{ m}$ :

donde 1 segundo de arco equivale a 1/60 de minuto =  $(1/60)^2$  de grado. Cualesquiera dos estrellas que subtiendan un ángulo mayor que o igual a este valor están resueltas (si las condiciones atmosféricas son ideales).

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si considera radiotelescopios? Éstos son mucho más grandes en diámetro que los telescopios ópticos, ¿pero tienen resoluciones angulares mejores que los telescopios ópticos? Por ejemplo, el radiotelescopio en Arecibo, Puerto Rico, tiene un diámetro de 305 m y está diseñado para detectar longitudes de onda de radio de 0.75 m. ¿Cómo se compara esta resolución con la del telescopio Keck?

**Respuesta** El aumento en diámetro puede sugerir que los radiotelescopios tendrían mejor resolución que el telescopio Keck, pero la ecuación 37.6 muestra que  $\theta_{\min}$  depende tanto del diámetro como de la longitud de onda. Al calcular el ángulo de resolución mínimo para el radiotelescopio, se encuentra

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \left( \frac{0.75 \text{ m}}{305 \text{ m}} \right) \\ &= 3.0 \times 10^{-3} \text{ rad} \approx 10 \text{ min de arc} \end{aligned}$$

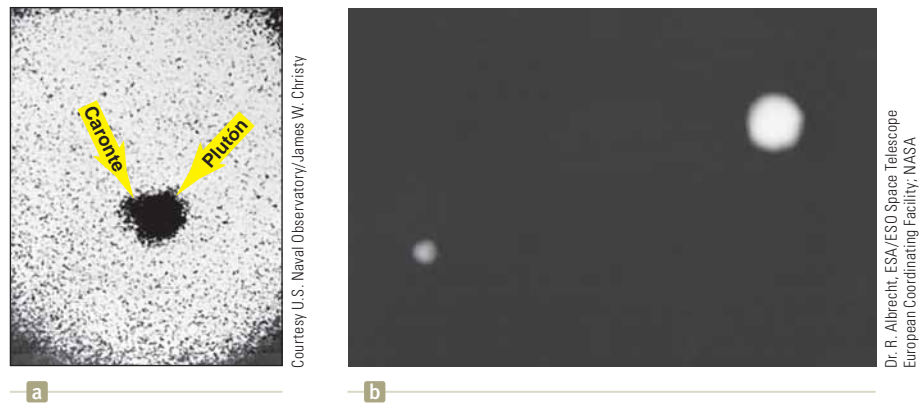
Este ángulo de resolución límite se mide en *minutos* de arco en lugar de *segundos* de arco para el telescopio óptico. Por tanto, el cambio en longitud de onda compensa el aumento en diámetro. El ángulo de resolución límite para el radiotelescopio de Arecibo es más de 40 000 veces mayor (esto es, *peor*) que el mínimo Keck.

El telescopio como el explicado en el ejemplo 37.3 nunca puede alcanzar su límite de difracción porque el ángulo de resolución límite siempre se ajusta por desenfoco atmosférico en longitudes de onda ópticas. Este límite en la visualización usualmente es de más o menos 1 s de arco y nunca es menor que casi 0.1 s de arco. El desenfoco atmosférico es causado por variaciones en el índice de refracción con las variaciones de temperatura en el aire.





**Figura 37.11** (a) Fotografía con la cual se descubrió en el año de 1978 a Caronte, el satélite de Plutón, tomada por un telescopio terrestre. La visión borrosa atmosférica hace que Caronte aparezca sólo como una pequeña protuberancia en el borde de Plutón. (b) Fotografía de Plutón y de Caronte tomada desde el telescopio espacial Hubble, donde aparecen los dos objetos claramente definidos.



Como ejemplo de los efectos de visión atmosférica borrosa mencionados considere las imágenes telescópicas de Plutón y de su satélite Caronte. La figura 37.11a muestra la imagen tomada en el año de 1978 cuando fue descubierto Caronte. En esta fotografía, tomada desde un telescopio terrestre, la turbulencia atmosférica provoca que la imagen aparezca como sólo una protuberancia en el borde de Plutón. En comparación, la figura 38.11b muestra una fotografía tomada por el telescopio espacial Hubble. En ausencia de problemas de turbulencia atmosférica, Plutón y su satélite se observan claramente.

La distorsión causada por borrosidad atmosférica se puede reducir con el proceso de la óptica adaptativa. Esta técnica combina el análisis por computadora con elementos ópticos adicionales para mejorar la imagen. Con la óptica adaptativa, la resolución del telescopio Keck mejora de 1 segundo de arco a 30-60 milisegundos de arco, aproximadamente un factor de 20 de mejora. La imagen de la figura 35.46 es posible gracias a la óptica adaptativa.

### 37.4 Rejilla de difracción

#### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 37.3

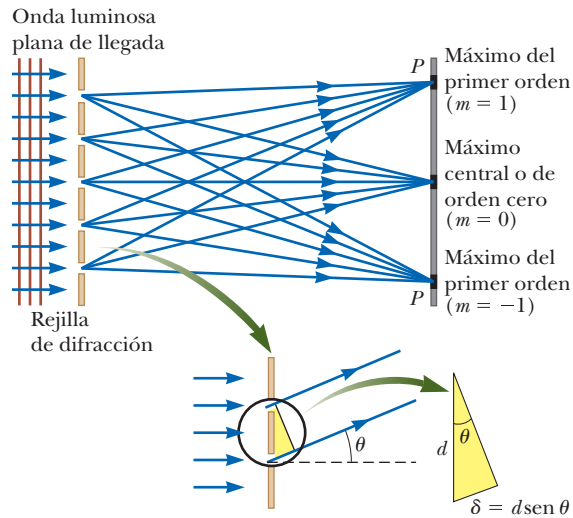
**Una rejilla de difracción es una rejilla de interferencia** Al igual que en el caso del *patrón de difracción*, la *rejilla de difracción* es un nombre incorrecto, pero está profundamente arraigado en el lenguaje de los físicos. La rejilla de difracción se basa en la difracción de la misma forma que la doble rendija, dispersando la luz de forma que la luz desde rendijas diferentes puede interferir. Sería más correcto identificarla como una *rejilla de interferencia*, pero el nombre que se usa es *rejilla de difracción*.

La **rejilla de difracción**, un útil aparato para el análisis de las fuentes luminosas, está constituida por un elevado número de rendijas paralelas separadas entre sí a una misma distancia. También es posible fabricar una *rejilla de transmisión* tallando ranuras paralelas en la placa de vidrio utilizando una maquina rayadora de precisión. Los espacios entre surcos son transparentes para la luz y, por esto, actúan como rendijas independientes. Se puede construir una *rejilla de reflexión* tallando ranuras paralelas sobre la superficie de un material que refleja. La reflexión de la luz de los espacios entre las ranuras es especular, y la reflexión de las ranuras cortadas en el material son difusas. Por lo tanto, los espacios entre ranuras actúan como fuentes paralelas de luz reflejada, al igual que las rendijas en una rejilla de transmisión. La tecnología actual puede producir rejillas con espaciamientos de rendija muy pequeños. Por ejemplo, una rejilla típica rayada con 5000 ranuras por centímetro tiene un espaciamiento entre rendijas  $d = (1/5000)$  cm, lo que es igual a  $2.00 \times 10^{-4}$  cm.

En la figura 37.12 se ilustra una sección de una rejilla de difracción. Desde el lado izquierdo incide una onda plana, normal al plano de la rejilla. El patrón observado sobre la pantalla en el extremo derecho de la rejilla es el resultado de los efectos combinados de la interferencia y de la difracción. Cada rendija produce difracción y los rayos difractados interfieren entre sí para producir el patrón final.

Las ondas de todas las rendijas están en fase al salir de las mismas. Sin embargo, para alguna dirección arbitraria  $\theta$  observada desde la horizontal, las ondas deben viajar diferentes distancias de trayectoria antes de llegar a la pantalla. Observe en la figura 37.12 que la diferencia de trayectorias  $\delta$  entre rayos desde dos rendijas adyacentes cualesquiera es igual a  $d \sin \theta$ . Si esta diferencia en la trayectoria resulta igual a una longitud de onda o a algún múltiplo entero de una longitud de onda, se observan las ondas de todas las rendijas en fase en la pantalla y una franja brillante.





**Figura 37.12** Vista lateral de una rejilla de difracción. La separación entre rendijas es  $d$ , y la diferencia en trayectorias entre rendijas adyacentes es igual a  $d \sin \theta$ .

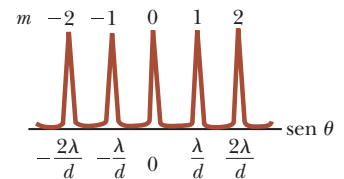
Por tanto, la condición para los máximos en el patrón de interferencia en el ángulo  $\theta_{\text{brillante}}$  es

$$d \sin \theta_{\text{brillante}} = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (37.7)$$

Es posible utilizar esta expresión para calcular la longitud de onda si se sabe cuál es el espaciamiento  $d$  y el ángulo  $\theta$  brillante. Si la radiación incidente contiene varias longitudes de onda, el máximo de orden  $m$  para cada longitud de onda se presenta en un ángulo específico. Todas las longitudes de onda son visibles en  $\theta = 0$ , lo que corresponde a  $m = 0$ , que es el máximo de orden cero. El máximo de primer orden ( $m = 1$ ) se observará en un ángulo que satisfaga la relación  $\sin \theta_{\text{brillante}} = \lambda/d$ ; el máximo de segundo orden ( $m = 2$ ) será visto en un ángulo más grande  $\theta_{\text{brillante}}$ , y así sucesivamente. Para valores más pequeños representativos de  $d$  en una rejilla de difracción, los ángulos  $\theta_{\text{brillante}}$  son grandes, como se ve en el ejemplo 37.5.

La distribución de intensidad de una rejilla de difracción obtenida utilizando una fuente monocromática aparece en la figura 37.13. Observe la nitidez de los máximos principales y la anchura de las áreas oscuras comparadas con las anchas franjas brillantes del patrón de interferencia causado por dos rendijas (véase la figura 36.5). También vale la pena observar de nuevo la figura 36.6, que muestra que el ancho de los máximos de intensidad disminuye conforme aumenta el número de rendijas. Ya que los máximos principales son tan nítidos, resultan mucho más brillantes que los máximos de interferencia causados por dos rendijas.

◀ Condición para máximos de interferencia en una rejilla



**Figura 37.13** Intensidad en función de  $\sin \theta$  para una rejilla de difracción. También se muestran los máximos de orden cero, primero y segundo.

- E XAMEN RÁPIDO 37.4** Una luz ultravioleta de longitud de onda de 350 nm
- incide en una rejilla de difracción con un espaciamiento  $d$  entre rendijas, forma
  - un patrón de interferencia sobre una pantalla que esta a una distancia  $L$ . Las
  - posiciones angulares  $\theta_{\text{brillante}}$  de los máximos de interferencia son numerosas. La
  - localización de las franjas brillantes se marca en la pantalla. Acto seguido se uti-
  - liza una luz roja con una longitud de onda de 700 nm con una rejilla de difracción
  - para formar otro patrón de difracción sobre la pantalla. Las franjas brillantes de
  - este patrón se harán de forma tal que se localicen en las marcas en la pantalla (a)
  - moviendo la pantalla a una distancia  $2L$  de la rejilla, (b) moviendo la pantalla a
  - una distancia  $L/2$  de la rejilla, (c) reemplazando la rejilla por otra con un espacia-
  - miento entre rendijas de  $2d$ , (d) reemplazando la rejilla por otra que tenga un espa-
  - ciamiento entre rejillas de  $d/2$ , o (e) si no se cambia nada.

### Ejemplo conceptual 37.4 Un disco de video es una rejilla de difracción

La luz reflejada desde la superficie de un disco de video es multicolorida, como muestra la figura 37.14 (página 994). Los colores y sus intensidades dependen de la orientación del DVD con relación en el ojo y en relación con la fuente de luz. Explique cómo funciona esto.

continúa

37.4 continuación

SOLUCIÓN

La superficie de un DVD tiene una pista ranurada en espiral (con ranuras adyacentes que tienen una separación del orden de 1 μm). Por tanto, la superficie actúa como una rejilla de reflexión. La luz reflejada desde las regiones entre estas ranuras cercanamente espaciadas interfiere de manera constructiva solo en ciertas direcciones que dependen de la longitud de onda y la dirección de la luz incidente. Cualquier sección del DVD sirve como rejilla de difracción para luz blanca, enviando colores distintos en diferentes direcciones. Los diferentes colores que se ven al observar una sección cambian cuando la fuente de luz, el DVD o usted cambian de posición. Este cambio en posición hace que se alteren el ángulo de incidencia o el ángulo de luz difractada. El problema 23 describe un experimento que puede realizar, en el que se utiliza un puntero láser para ver los máximos individuales en el patrón de difracción de un DVD.



Carlos E. Santa María/Shutterstock

**Figura 37.14** (Ejemplo conceptual 37.4) Disco de video observado bajo luz blanca. Los colores observados en la luz reflejada y sus intensidades dependen de la orientación del DVD en relación con el ojo y con la fuente de luz.

Ejemplo 37.5 Órdenes de una rejilla de difracción

Luz monocromática de un láser helio-neón ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ) incide de manera normal sobre una rejilla de difracción que contiene 6000 ranuras por centímetro. Encuentre los ángulos a los que se observan los máximos de primero y segundo orden.

SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Estudie la figura 37.12 e imagine que la luz que viene desde la izquierda se origina en el laser helio neón. Evalúe los posibles ángulos  $\theta$  para una interferencia constructiva.

**Categorizar** Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Calcule la separación de rendija como el inverso del número de ranuras por centímetro:

$$d = \frac{1}{6\,000} \text{ cm} = 1.667 \times 10^{-4} \text{ cm} = 1\,667 \text{ nm}$$

Resuelva la ecuación 37.7 para  $\sin \theta$  y sustituya valores numéricos par el máximo de primer orden ( $m = 1$ ) para encontrar  $\theta_1$ :

$$\theta_m = \sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{632.8 \text{ nm}}{1\,667 \text{ nm}} m\right) = \sin^{-1}(0.379\,6m)$$

$$\theta_1 = \sin^{-1}[(0.379\,6)(1)] = 22.31^\circ$$

Repita para el máximo de segundo orden ( $m = 2$ ):

$$\theta_2 = \sin^{-1}[(0.379\,6)(2)] = 49.39^\circ$$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si usted busca el máximo de tercer orden? ¿Lo encontraría?

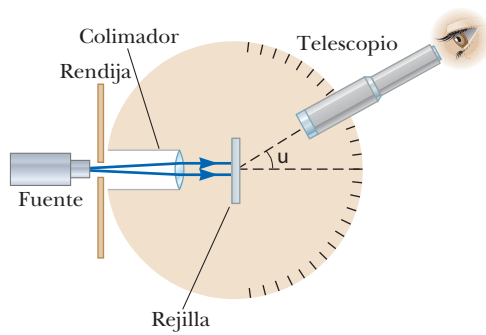
**Respuesta** Para  $m = 3$ , se encuentra  $\sin \theta_3 = \sin^{-1}(1.139)$ . Ya que  $\sin \theta$  no puede exceder la unidad, este resultado no representa una solución real. Así, para esta situación solo se observan máximos de orden cero, primero y segundo.

Aplicaciones de las rejillas de difracción

En la figura 37.15 se muestra un dibujo esquemático de un aparato simple que se usa para medir ángulos en un patrón de difracción. Este aparato es un *espectrómetro de rejilla de difracción*. La luz a analizar pasa a través de una rendija, y un haz colimado de luz incide sobre la rejilla. La luz difractada deja la rejilla a ángulos que satisfacen la ecuación 37.7, y se usa un telescopio para ver la imagen de la rendija. La longitud de onda se puede determinar al medir los ángulos precisos a los que aparecen las imágenes de la rendija para los diferentes órdenes.

El espectrómetro es una herramienta útil en la *espectroscopia atómica*, en la que se analiza la luz de un átomo para encontrar las longitudes de onda componentes.





**Figura 37.15** Diagrama de un espectrómetro de rejilla de difracción.

Dichas longitudes de onda componentes se utilizan para identificar el átomo. En el capítulo 41 se investigarán los espectros atómicos.

Otra interesante aplicación de las rejillas de difracción es la **holografía**, la producción de imágenes tridimensionales de objetos. La física de la holografía la desarrolló Dennis Gabor (1900-1979) en 1948 y resultó en el Premio Nobel de Física para Gabor en 1971. El requisito de luz coherente para la holografía demoró la realización de imágenes holográficas a partir del trabajo de Gabor hasta el desarrollo del láser en la década de 1960. La figura 37.16 muestra un holograma simple visto desde dos posiciones diferentes y el carácter tridimensional de su imagen. Observe en particular la diferencia en la vista a través de la lupa en las figuras 37.16a y 37.16b.

La figura 37.17 muestra cómo se hace un holograma. La luz del láser se divide en dos partes mediante un espejo medio-plateado en *B*. Una parte del haz se refleja en el objeto a fotografiar e incide una película fotográfica ordinaria. La otra mitad del haz diverge mediante la lente  $L_2$ , se refleja de los espejos  $M_1$  y  $M_2$ , y por último incide en la película. Los dos haces se traslapan para formar un patrón de interferencia extremadamente complicado sobre la película. Tal patrón de interferencia se puede

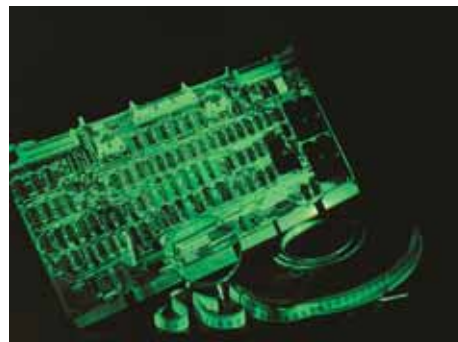
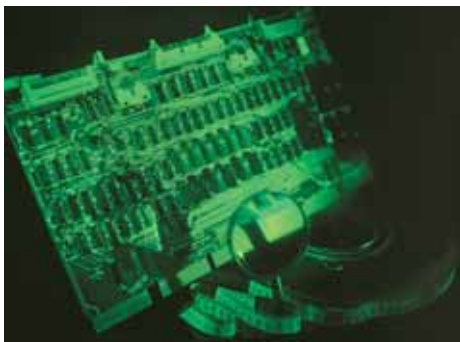
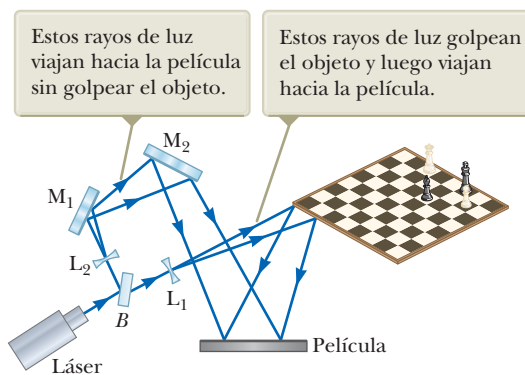


Photo by Ronald R. Erickson; hologram by Nicklaus Phillips

**Figura 37.16** En este holograma se muestran dos vistas diferentes de un tablero de circuito. Observe la diferencia en la apariencia de la cinta de medir y la vista a través de las lupas en (a) y (b).



**Figura 37.17** Arreglo experimental para producir un holograma.

producir sólo si la correspondencia de fase de las dos ondas es constante en todas las partes de la exposición de la película. Esta condición se satisface al iluminar la escena con luz que pasa a través del orificio de un alfiler o con radiación láser coherente. El holograma registra no sólo la intensidad de la luz dispersada del objeto (como en una fotografía convencional), sino también la diferencia de fase entre el haz de referencia y el haz dispersado del objeto. Debido a esta diferencia de fase, se forma un patrón de interferencia que produce una imagen en la que se guarda toda la información tridimensional disponible desde la perspectiva de cualquier punto en el holograma.

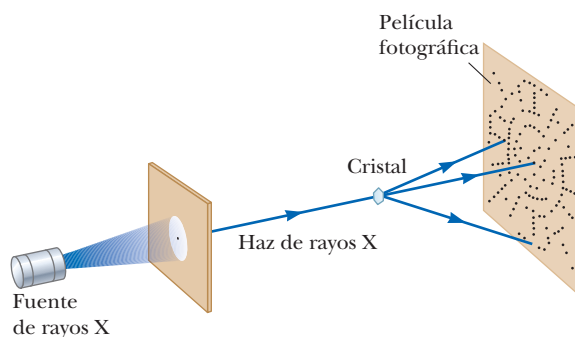
En una imagen fotográfica normal se usa una lente para enfocar la imagen de modo que cada punto en el objeto corresponda a un solo punto en la película. Observe que en la figura 37.17 no se usa lente para enfocar la luz en la película. Por tanto, la luz desde cada punto en el objeto alcanza *todos* los puntos en la película. Como resultado, cada región de la película fotográfica en la que se registra el holograma contiene información acerca de todos los puntos iluminados sobre el objeto, lo que conduce a un resultado notable: si una pequeña sección del holograma se corta de la película, ¡la imagen completa se puede formar a partir del pedazo pequeño! (La calidad de la imagen se reduce, pero toda la imagen está presente.)

Los hologramas encuentran numerosas aplicaciones. Usted puede tener un holograma en su tarjeta de crédito. Este tipo especial de hologramas se llama *holograma arco iris* y está diseñado para verse en luz blanca reflejada.

### 37.5 Difracción de los rayos X mediante cristales

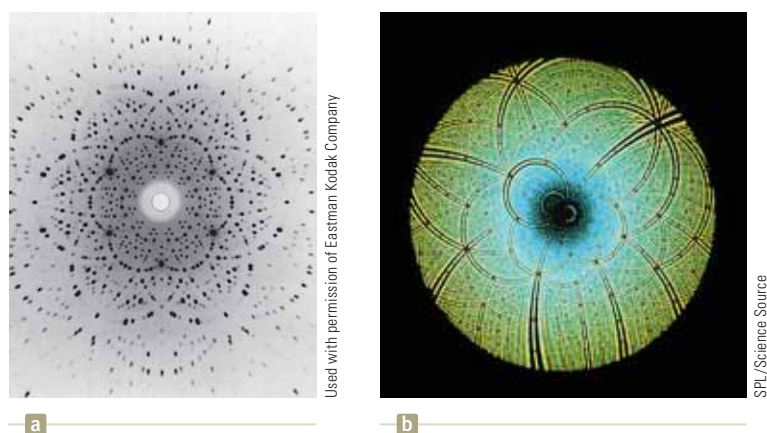
En principio, es posible determinar la longitud de onda de cualquier onda electromagnética, si se dispone de una rejilla con un espaciamiento entre rendijas adecuado (del orden de  $\lambda$ ). Los rayos X, descubiertos en el año 1895 por Wilhelm Roentgen (1845-1923), son ondas electromagnéticas de una longitud de onda muy reducida (del orden de 0.1 nm). Sería imposible, utilizando el proceso de corte descrito al principio de la sección 37.4, construir una rejilla con un espaciamiento tan pequeño. Sin embargo, el espaciamiento atómico en un sólido es de aproximadamente 0.1 nm. En el año de 1913, Max von Laue (1879-1960) sugirió que la organización normal de los átomos en un cristal pudiera funcionar como una rejilla de difracción tridimensional para los rayos X. Experimentos consecutivos confirmaron esta predicción. Los patrones de difracción de cristales son complejos debido a la naturaleza tridimensional de la estructura cristalina. A pesar de esto, la difracción de los rayos X ha demostrado ser una técnica invaluable para aclarar estas estructuras y para un mejor discernimiento de la estructura de la materia.

La figura 37.18 muestra un arreglo experimental para la observación de la difracción de los rayos X mediante un cristal. Sobre el cristal incide un haz colimado de rayos X monocromáticos. Los rayos difractados son muy intensos en ciertas direcciones, que corresponden a la interferencia constructiva de ondas reflejadas de las capas de átomos del cristal. Los rayos difractados, que pueden ser detectados sobre una película fotográfica, forman un arreglo de puntos conocido como *patrón de Laue*, como en la figura 37.19a. Es posible deducir la estructura cristalina al analizar las posiciones relativas y las intensidades de los diversos puntos en el patrón. La figura



**Figura 37.18** Diagrama esquemático de la técnica utilizada para observar la difracción de rayos X mediante un cristal. El arreglo de manchas formadas sobre la película se llama patrón de Laue.





**Figura 37.19** (a) Un patrón Laue de un cristal simple del mineral berilio (aluminosilicato de berilio). Cada punto representa un lugar de interferencia constructiva. (b) Patrón Laue de la enzima Rubisco, producida mediante un espectro de rayos X de banda ancha. Esta enzima está presente en las plantas y forma parte de la fotosíntesis. El patrón Laue es utilizado para determinar la estructura cristalina del Rubisco.

37.19b muestra un patrón de Laue correspondiente a una enzima cristalina, utilizando una amplia gama de longitudes de onda de manera que el resultado es un patrón en remolino.

En la figura 37.20 se muestra la organización de los átomos en un cristal de cloruro de sodio (NaCl). Cada celda unitaria (el sólido geométrico que se repite en todo el cristal) es un cubo de arista  $a$ . Un examen cuidadoso de la estructura del NaCl muestra que los iones yacen en planos discretos (las áreas sombreadas de la figura 37.20). Ahora suponga que un rayo X incidente forma un ángulo  $\theta$  con uno de los planos, como en la figura 37.21. El rayo puede reflejarse tanto del plano superior como del inferior, sin embargo, el rayo reflejado del plano inferior se desplaza más que el rayo reflejado proveniente del plano superior. La diferencia en la trayectoria efectiva es igual a  $2d \sin \theta$ . Los dos haces se refuerzan (interferencia constructiva) cuando esta diferencia de trayectoria es igual a algún múltiplo entero de  $\lambda$ . Lo mismo es también cierto para la reflexión de toda la familia de planos paralelos. De ahí que la condición para una interferencia *constructiva* (máximos en el rayo reflejado) es igual a

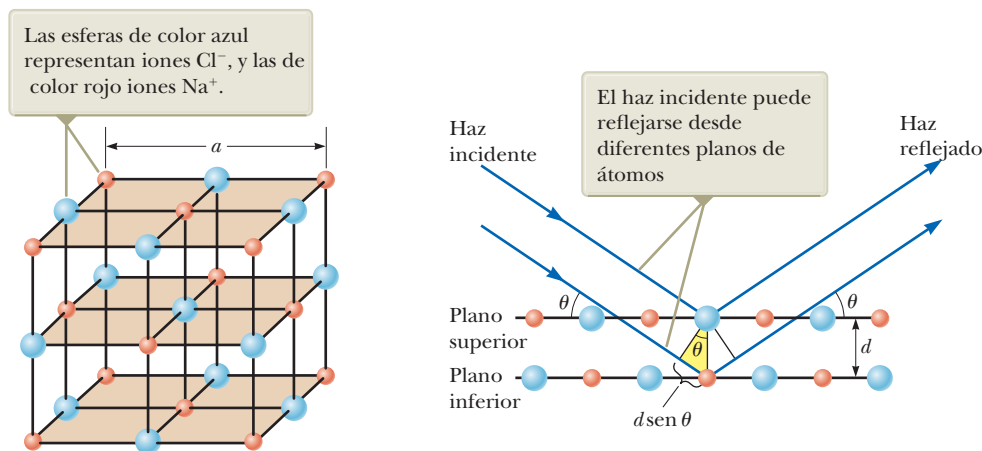
$$2d \sin \theta = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (37.8)$$

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 37.4

**Diferentes ángulos** Observe que en la figura 37.21 el ángulo  $\theta$  se observa a partir de la superficie reflectante, antes que desde la normal, como en el caso de la ley de la reflexión del capítulo 34. En el caso de las rendijas y las rejillas de difracción, también el ángulo  $\theta$  se midió a partir de la normal al arreglo de las rendijas. En la ley de Bragg de la difracción, por razones de tradición histórica, el ángulo se mide de una forma distinta, por lo que es necesario interpretar la ecuación 37.8 con mucho cuidado.

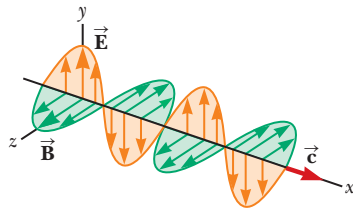
◀ Ley de Bragg

Esta condición se conoce como **Ley de Bragg**, en honor a W. L. Bragg (1890-1971), quien fue el primero en deducir la relación. Si se mide la longitud de onda y el ángulo de difracción, es posible usar la ecuación 37.8 para calcular el espaciamiento entre los planos atómicos.



**Figura 37.20** Estructura cristalina del cloruro de sodio (NaCl). La longitud de la arista del cubo es igual a  $a = 0.562\ 737$  nm.

**Figura 37.21** Descripción en dos dimensiones de la reflexión de un haz de rayos X de dos planos cristalinos paralelos separados una distancia  $d$ . El haz reflejado por el plano inferior viaja más, una distancia igual a  $2d \sin \theta$ , que el que se refleja por el plano superior.



**Figura 37.22** Diagrama esquemático de una onda electromagnética que se propaga con una velocidad  $\vec{c}$  en la dirección x. El campo eléctrico vibra en el plano xy y el campo magnético vibra en el plano xz.

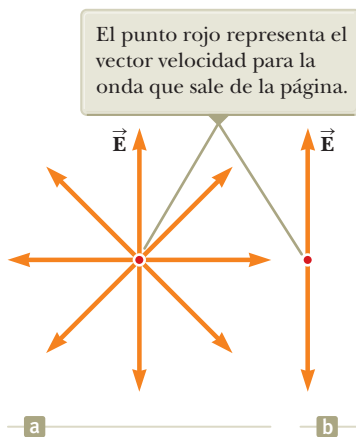
## 37.6 Polarización de las ondas luminosas

En el capítulo 33 se describió la naturaleza transversal de las ondas de luz y todas las demás ondas electromagnéticas. Una prueba firme de esta naturaleza transversal es la polarización de la luz, que es el tema de análisis de esta sección.

Un haz normal de luz está formado por un gran número de ondas emitidas por los átomos de la fuente luminosa. Cada átomo produce una onda que tiene una orientación particular del vector del campo eléctrico  $\vec{E}$ , correspondiente a la dirección de la vibración atómica. La *dirección de polarización* de cada una de las ondas individuales se define como la dirección en la que vibra su campo eléctrico. En la figura 37.22, esta dirección ocurre a lo largo del eje y. Sin embargo, una onda electromagnética individual podría tener su vector  $\vec{E}$  sobre el plano yz, con lo que podría formarse cualquier ángulo posible con el eje y. Debido a que es factible cualquier dirección de vibración de la fuente de las ondas, la onda electromagnética resultante es una superposición de ondas que vibran en muchas direcciones distintas. El resultado es un rayo de luz **no polarizado**, como el que se ilustra en la figura 37.23a. La dirección de la propagación de las ondas en esta figura es perpendicular a la página. Las flechas muestran unas cuantas direcciones posibles de los vectores del campo eléctrico que conforman el haz resultante. En algún punto e instante en el tiempo, todos esos vectores individuales se suman para dar el vector de campo eléctrico resultante.

Se dice que un rayo de luz está **linealmente polarizado** si *en todo momento* el campo eléctrico resultante  $\vec{E}$  vibra en la misma dirección en un punto en particular, como se muestra en la figura 37.23b. (Algunas veces, a este tipo de onda se le llama *plana polarizada*, o simplemente *polarizada*.) El plano formado por  $\vec{E}$  y la dirección de propagación se conoce como el *plano de polarización* de la onda. Si la onda de la figura 37.22 representara la resultante de todas las ondas individuales, el plano de polarización sería el plano xy.

Es posible obtener un haz linealmente polarizado, partiendo de un haz no polarizado, al retirar todas las ondas del haz con excepción de aquellas cuyos vectores de campo eléctrico oscilan en un solo plano. Ahora se explicarán cuatro procesos para la producción de luz polarizada a partir de luz no polarizada.



**Figura 37.23** (a) Representación de un haz de luz no polarizado, visto a lo largo de la dirección de propagación. El campo eléctrico transversal puede vibrar con la misma probabilidad en cualquier dirección dentro del plano de la página. (b) Rayo de luz linealmente polarizado con su campo eléctrico vibrando en dirección vertical.

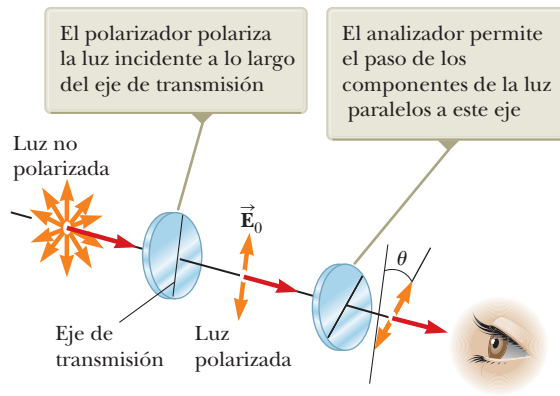
### Polarización por absorción selectiva

La técnica más común para producir luz polarizada es usar material que transmita ondas cuyos campos eléctricos vibren en un plano paralelo a cierta dirección y que absorba las ondas cuyos campos eléctricos estén vibrando en todas las demás direcciones.

En el año de 1938, E. H. Land (1909-1991) descubrió un material, que llamó *polaroid*, que polariza la luz mediante la absorción selectiva. Este material se fabrica en hojas delgadas de hidrocarburos de cadena larga. Las láminas u hojas son estiradas durante su fabricación de forma que las moléculas de la cadena larga se alinean. Después de haber sumergido la hoja en una solución que contiene yodo, las moléculas se vuelven buenos conductores eléctricos. Esta conducción ocurre principalmente a lo largo de las cadenas de hidrocarburos, ya que los electrones se pueden desplazar con facilidad a lo largo de sus cadenas. Si la luz cuyo vector de campo eléctrico es paralelo a las cadenas incide en el material, el campo eléctrico acelera los electrones a lo largo de las cadenas y se absorbe energía a causa de la radiación. Por tanto, la luz no pasa a través del material. La luz cuyo vector de campo eléctrico es perpendicular a las cadenas pasa a través del material porque los electrones no pueden moverse desde una molécula a la próxima. Como resultado, cuando incide luz no polarizada en el material, la luz que sale es polarizada perpendicular a las cadenas moleculares.

Es común referirse a la dirección perpendicular de las cadenas moleculares como el *eje de transmisión*. En un polarizador ideal, se transmite toda la luz cuya  $\vec{E}$  sea paralela al eje de transmisión se absorbe toda la luz cuya  $\vec{E}$  sea perpendicular al eje de transmisión.

La figura 37.24 presenta un rayo de luz no polarizada que incide sobre una primera hoja polarizadora, conocida como *polarizador*. Debido a que en la figura el eje de transmisión está orientado en sentido vertical, la luz transmitida a través de esta hoja esta polarizada verticalmente. Este rayo es interceptado



**Figura 37.24** Dos láminas polarizadoras cuyos ejes de transmisión forman un ángulo  $\theta$ . Sólo se transmite hacia el observador una fracción de la luz polarizada que incide sobre el analizador.

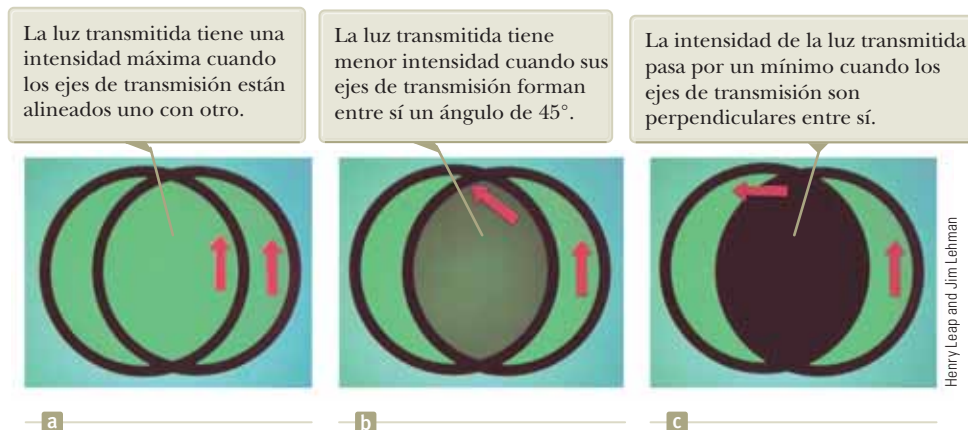
por una segunda hoja polarizadora, el *analizador*. En la figura 37.24, el eje de transmisión del analizador se ajusta de manera que forma un ángulo  $\theta$  en relación con el eje del polarizador. Se denomina  $\vec{E}_0$  al vector de campo eléctrico del primer rayo transmitido. La componente de  $\vec{E}_0$  perpendicular al eje del analizador es absorbida en su totalidad. La componente de  $\vec{E}_0$  paralela al eje del analizador, es decir,  $E_0 \cos \theta$ , pasa a través de este último. En vista de que la intensidad del rayo transmitido varía en función del cuadrado de su magnitud, se concluye que la intensidad  $I$  del rayo (polarizado) que se transmite a través del analizador varía en función de

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \theta \quad (37.9) \quad \leftarrow \text{Ley de Malus}$$

donde  $I_{\text{máx}}$  es la intensidad del rayo polarizado que incide sobre el analizador. Esta expresión, conocida como **ley de Malus**,<sup>2</sup> es aplicable para cualquier par de materiales polarizantes cuyos ejes de transmisión formen entre sí un ángulo  $\theta$ . Esta expresión muestra que la intensidad del rayo transmitida es máxima cuando los ejes de transmisión son paralelos ( $\theta = 0$  o  $180^\circ$ ) y es igual a cero (absorción completa por el analizador) cuando los ejes son perpendiculares entre sí. En la figura 37.25 se ilustra la variación de la intensidad transmitida por un par de hojas polarizadoras. Debido a que el valor promedio de  $\cos^2 \theta$  es  $\frac{1}{2}$ , la intensidad de la luz inicialmente no polarizada se reduce por un factor de un medio a medida que la luz pasa a través de un polarizador ideal simple.

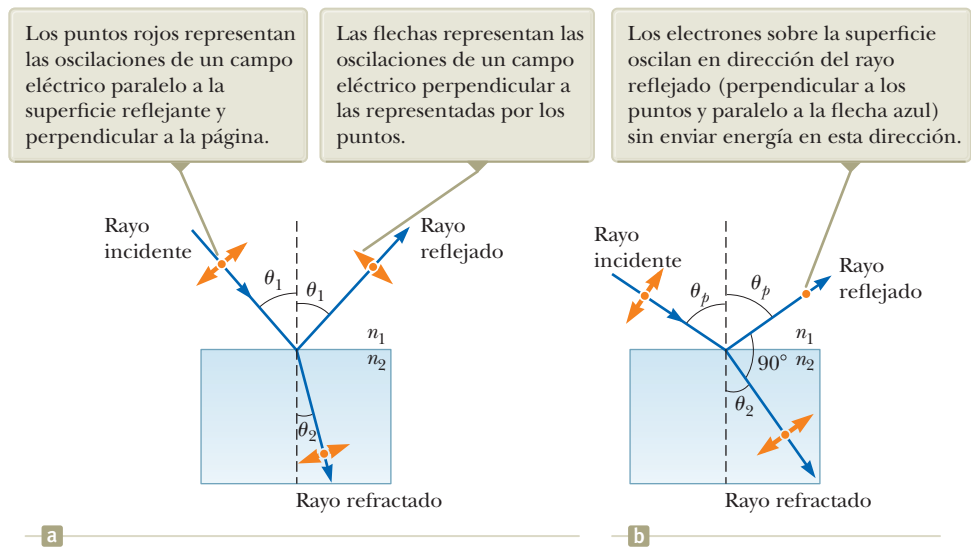
### Polarización por reflexión

Cuando un rayo de luz no polarizado se refleja desde una superficie, la luz reflejada puede estar totalmente polarizada, parcialmente polarizada, o no polarizada, dependiendo del ángulo de incidencia. Si el ángulo de incidencia es igual a  $0^\circ$ , el rayo



**Figura 37.25** La intensidad de la luz transmitida a través de dos materiales polarizadores depende de la orientación relativa de sus ejes de transmisión. Las flechas rojas indican los ejes de transmisión de los polarizadores.

<sup>2</sup> Llamado así en honor a su descubridor, E. I. Malus (1775-1812). Malus descubrió que la luz reflejada estaba polarizada al observarla a través de un cristal de calcita ( $\text{CaCO}_3$ ).



**Figura 37.26** (a) Cuando una luz no polarizada incide sobre una superficie reflejante, los rayos reflejados y refractados están parcialmente polarizados. (b) El rayo reflejado está totalmente polarizado cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de polarización  $\theta_p$ , lo que satisface la ecuación 37.10. En este ángulo de incidencia, los rayos reflejados y refractados son perpendiculares entre sí.

reflejado no es un rayo polarizado. Para otros ángulos de incidencia, la luz reflejada estará polarizada hasta cierto grado, y para un ángulo particular de incidencia, la luz reflejada quedará totalmente polarizada. Analice ahora la reflexión en este ángulo especial.

Suponga que un rayo de luz no polarizada incide sobre una superficie, como en la figura 37.26a. Cada uno de los vectores de campo eléctrico individuales puede descomponerse en dos componentes: una paralela a la superficie (y perpendicular a la página en el caso de la figura 37.26, y que aparece representada mediante puntos), y la otra componente (representada en la figura por las flechas color naranja) perpendicular tanto a la primera componente como a la dirección de propagación. Debido a eso, es posible describir la polarización de todo el rayo mediante dos componentes de campos eléctricos en esas direcciones. Se ha encontrado que la componente paralela se refleja con mayor intensidad que la componente perpendicular, y ello da como resultado un rayo reflejado parcialmente polarizado. Lo que es más, el rayo refractado también está parcialmente polarizado.

Ahora suponga que el ángulo de incidencia  $\theta_1$  se modifica hasta que el ángulo que se forma entre los rayos reflejado y refractado es de  $90^\circ$ , como en la figura 37.26b. En este ángulo de incidencia en particular, el rayo reflejado está totalmente polarizado (con su vector de campo eléctrico paralelo a la superficie), y el rayo refractado está todavía sólo parcialmente polarizado. El ángulo de incidencia en que se presenta la polarización se conoce como **ángulo de polarización**  $\theta_p$ .

Mediante la figura 37.26b puede obtener una expresión que relacione el ángulo de polarización con el índice de refracción de la sustancia reflejante. A partir de esta figura observe que  $\theta_p + 90^\circ + \theta_2 = 180^\circ$ ; por consiguiente  $\theta_2 = 90^\circ - \theta_p$ . Con la ley de Snell para la refracción (ecuación 34.7) obtiene

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{\text{sen } \theta_p}{\text{sen } \theta_2}$$

Como  $\text{sen } \theta_2 = \text{sen } (90^\circ - \theta_p) = \text{cos } \theta_p$ , escriba esta expresión de la forma  $n_2/n_1 = \text{sen } \theta_p / \text{cos } \theta_p$ , lo que quiere decir que

Ley de Brewster ▶

$$\tan \theta_p = \frac{n_2}{n_1} \tag{37.10}$$

La expresión se conoce como **ley de Brewster**, y en ocasiones también al ángulo de polarización  $\theta_p$  se le llama **ángulo de Brewster**, en honor a su descubridor, David Brewster (1781-1868). Dado que una sustancia específica  $n$  varía en función de la longitud de onda, el ángulo de Brewster es también una función de la longitud de onda.

Es posible lograr un discernimiento correcto de la polarización por reflexión si imagina que el campo eléctrico de la luz incidente pone en oscilación los electrones



de la superficie del material de la figura 37.26b. Las direcciones de las componentes de la oscilación son: (1) paralelas a las flechas que se muestran en el rayo de luz refractado y (2) perpendiculares a la página. Los electrones en oscilación hacen el papel de antenas emitiendo luz con una polarización paralela a la dirección de oscilación. Consulte la figura 33.12, que muestra el patrón de radiación de una antena dipolo. Observe que no hay radiación a un ángulo  $\theta = 0$ , esto es, a lo largo de la dirección de oscilación de la antena. Por tanto, para las oscilaciones en la dirección (1) no existe radiación en la dirección perpendicular, es decir, a lo largo del rayo reflejado. Para las oscilaciones en la dirección (2), los electrones emiten luz con una polarización perpendicular a la página, por lo que la luz reflejada de la superficie en este ángulo es una luz totalmente polarizada paralela a la superficie.

La polarización por reflexión es un fenómeno común. La luz solar, cuando se refleja en el agua, en el vidrio y en la nieve es una luz parcialmente polarizada. Si la superficie es horizontal, el vector del campo eléctrico de la luz reflejada tiene una componente horizontal intensa. Los anteojos de sol fabricados de un material polarizador reducen el brillo de la luz reflejada. Los ejes de transmisión de las lentes están orientados verticalmente de forma que absorben la componente horizontal intensa de la luz reflejada. Si gira sus anteojos de sol  $90^\circ$ , ya no resultarán tan efectivos para bloquear el brillo o resplandor desde superficies horizontales brillantes.

## Polarización por refracción doble

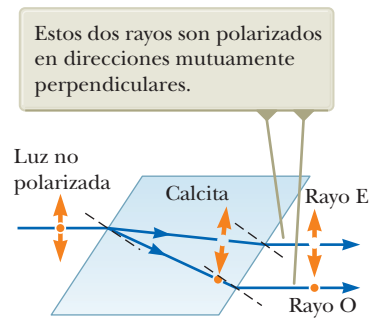
Los sólidos pueden ser clasificados sobre la base de su estructura interna. Aquellos en los cuales los átomos están organizados con un orden específico se llaman *cristalinos*. La estructura del NaCl de la figura 37.20 es un ejemplo de un sólido cristalino. Aquellos sólidos en los cuales los átomos están distribuidos al azar se llaman *amorfo*. Cuando la luz se desplaza a través de un material amorfo, como por ejemplo el vidrio, se desplaza con una rapidez que es la misma en cualquier dirección. Es decir, el vidrio tiene un solo índice de refracción. No obstante, en ciertos materiales cristalinos, como por ejemplo la calcita y el cuarzo, la rapidez de luz no es la misma en todas direcciones. En estos materiales la rapidez de la luz depende de la dirección de propagación y del plano de polarización de la luz. Estos materiales se caracterizan por tener dos índices de refracción, por lo que a menudo se les llama materiales de **doble refracción o birrefringentes**.

Cuando la luz no polarizada entra en un material birrefringente, puede dividirse en un **rayo ordinario (O)** y un **rayo extraordinario (E)**. Estos dos rayos tienen polarizaciones mutuamente perpendiculares y viajan con magnitudes de velocidades diferentes a través del material. Las dos magnitudes de velocidad corresponden a dos índices de refracción,  $n_o$  para el rayo ordinario y  $n_e$  para el rayo extraordinario.

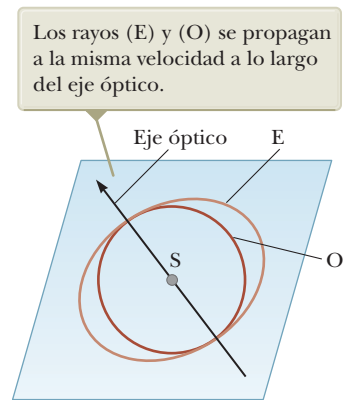
Existe una dirección, denominada **eje óptico**, junto con los rayos ordinario y extraordinario que tienen la misma rapidez. De cualquier modo, si entra luz a un material birrefringente en un ángulo al eje óptico, los índices de refracción diferentes ocasionarán que los dos rayos polarizados se dividan y viajen en direcciones diferentes como se muestra en la figura 37.27.

El índice de refracción  $n_o$  para el rayo ordinario es el mismo en todas direcciones. Si se pudiera colocar una fuente puntual de luz dentro del cristal como en la figura 37.28, las ondas ordinarias se dispersarían desde la fuente como esferas. El índice de refracción  $n_e$  varía con la dirección de propagación. Una fuente puntual envía una onda extraordinaria que tiene frentes de onda elípticos de sección transversal. La diferencia en rapidez para los dos rayos es un máximo en la dirección perpendicular al eje óptico. Por ejemplo, en la calcita,  $n_o = 1.658$  con una longitud de onda de 589.3 nm y  $n_e$  varía desde 1.658 a lo largo del eje óptico hasta 1.486 perpendicular al eje óptico. Los valores para  $n_o$  y el valor extremo  $n_e$  de diferentes cristales de doble refracción se proporcionan en la tabla 31.1 (página 1002).

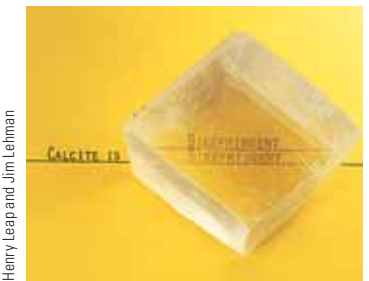
Si coloca un cristal de calcita sobre una hoja de papel y mira a través de éste cualquier cosa escrita sobre papel, verá dos imágenes, como se muestra en la figura 37.29. Como puede observar de la figura 37.27, estas dos imágenes corresponden a una formada por el rayo ordinario y otra por el rayo extraordinario. Si las dos imágenes son observadas a través de una hoja de vidrio giratoria polarizante, estas imágenes apa-



**Figura 37.27** La luz no polarizada que incide en un ángulo al eje óptico en un cristal de calcita se divide en un rayo ordinario (O) y un rayo extraordinario (E). Estos dos rayos están polarizados en direcciones mutuamente perpendiculares. (El dibujo no está a escala.)



**Figura 37.28** Una fuente puntual S en el interior de un cristal de doble refracción produce un frente de onda esférico que corresponde al rayo ordinario (O) y un frente de onda elíptico que corresponde al rayo extraordinario (E).



**Figura 37.29** Un cristal de calcita produce una imagen doble debido a que se trata de un material birrefringente (de doble refracción).



**TABLA 37.1** Índices de refracción para algunos cristales de doble refracción a una longitud de onda de 589.3 nm.

Cristal	$n_o$	$n_E$	$n_o/n_E$
Calcita ( $\text{CaCO}_3$ )	1.658	1.486	1.116
Cuarzo ( $\text{SiO}_2$ )	1.544	1.553	0.994
Nitrato de sodio ( $\text{NaNO}_3$ )	1.587	1.336	1.188
Sulfito de sodio ( $\text{NaSO}_3$ )	1.565	1.515	1.033
Cloruro de zinc ( $\text{ZnCl}_2$ )	1.687	1.713	0.985
Sulfuro de zinc ( $\text{ZnS}$ )	2.356	2.378	0.991

recen y desaparecen de manera alterna porque los rayos ordinario y extraordinario están polarizados en un plano a lo largo de direcciones mutuamente perpendiculares.

### Polarización por dispersión

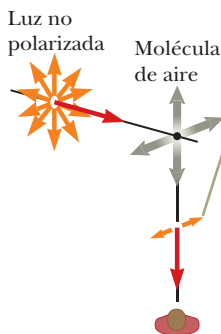
Cuando incide la luz sobre cualquier material, los electrones del material absorben y vuelven a enviar parte de la luz. Esta absorción y rerradiación de la luz por los electrones de las moléculas de gas que forman el aire es lo que hace que la luz solar que llega hasta un observador sobre la Tierra esté parcialmente polarizada. Se puede observar este efecto —conocido como **dispersión**— mirando directamente hacia el cielo a través de anteojos de sol cuyas lentes estén fabricadas de un material polarizador. En ciertas orientaciones, pasa menos luz por las lentes que en otras.

La figura 37.30 ilustra la forma en que la luz solar se polariza al dispersarse. El fenómeno es similar al de la creación de una luz totalmente polarizada al reflejarse de una superficie en el ángulo de Brewster. Un haz de luz solar no polarizado que viaja en dirección horizontal (paralelo a la tierra) incide sobre una molécula de uno de los gases que conforman el aire, originando la vibración de sus electrones. Estas cargas en vibración actúan como las cargas vibratorias de una antena. La componente horizontal del vector del campo eléctrico de la onda incidente crea una componente horizontal de la vibración de las cargas, y la componente vertical del vector da como resultado una componente vertical de la vibración. Si el observador de la figura 37.30 mira directo hacia arriba (perpendicularmente a la dirección original de propagación de la luz), las oscilaciones verticales de las cargas no emiten radiación alguna hacia él (véase la figura 33.12). Por tanto, esta persona verá una luz totalmente polarizada en la dirección horizontal, como lo indican las flechas cafés. Si mirara en otras direcciones, la luz estaría parcialmente polarizada en la dirección horizontal.

Variaciones en el color de la luz dispersada en la atmósfera se pueden entender como sigue. Cuando incide luz de diversas longitudes de onda  $\lambda$  sobre moléculas de gas de diámetro  $d$ , donde  $d \ll \lambda$ , la intensidad relativa de la luz dispersa varía en función de  $1/\lambda^4$ . La condición  $d \ll \lambda$  se cumple para la dispersión a causa de moléculas de oxígeno ( $\text{O}_2$ ) y de nitrógeno ( $\text{N}_2$ ) en la atmósfera, cuyos diámetros son cercanos a 0.2 nm. Por esto las longitudes de onda corta (luz violeta) se dispersan con mayor eficiencia que las longitudes de onda larga (luz roja). En consecuencia, cuando la luz solar es dispersada por las moléculas de gas que existen en el aire, la radiación de longitud de onda corta (violeta) se dispersa con mayor intensidad que la radiación de longitud de onda larga (rojo).

Cuando mira hacia el cielo en una dirección que no sea hacia el Sol, lo que se ve es la luz dispersa, que es predominantemente violeta. De cualquier modo, sus ojos no son muy sensibles a la luz violeta. La luz del siguiente color en el espectro, azul, se dispersa con menos intensidad que el violeta, pero sus ojos son más sensibles a la luz azul que a la luz violeta. Por esto, observa un cielo azul. Si mira hacia el Sol en el ocaso (o hacia el este al amanecer), estará mirando en dirección hacia el Sol y viendo luz que ha pasado a través de una gran distancia de aire. La mayor parte de la luz azul ha sido dispersada por el aire entre usted y el Sol. La luz que supera este recorrido a través del aire ha dispersado la mayor parte de su componente azul y, debido a eso difícilmente está cargado hacia el extremo rojo del espectro; como resultado, se ven los colores rojo y naranja en el ocaso.

La luz dispersa que se desplaza perpendicular a la luz incidente es una luz polarizada en un plano porque las vibraciones verticales de las cargas en las moléculas de aire no emiten luz en esa dirección.



**Figura 37.30** Dispersión de la luz solar no polarizada causada por las moléculas de aire.



- E XAMEN RÁPIDO 37.5** Es posible fabricar un polarizador para microondas utilizando una rejilla de alambres metálicos paralelos separados aproximadamente 1 cm. ¿El vector del campo eléctrico para las microondas transmitidas a través de este polarizador es (a) paralelo o (b) perpendicular a los alambres metálicos?
- E XAMEN RÁPIDO 37.6** Está caminando a través de un pasillo largo que tiene muchas lámparas en el techo y un piso muy brillante, recién encerado. En el piso puede ver la reflexión de todas las lámparas. Ahora, utilizando anteojos polarizados, ya no es posible ver algunas de las reflexiones de las lámparas. (¡Pruébelo!) Las reflexiones que desaparecen son aquellas que (a) están más cerca del observador, (b) más lejos del observador o (c) a una distancia intermedia.

## Resumen

### ► Conceptos y principios

La **difracción** es la desviación de la luz de una trayectoria en línea recta cuando la luz pasa a través de una abertura o alrededor de un obstáculo. La difracción se debe a la naturaleza ondulatoria de la luz.

El **patrón de difracción Fraunhofer** que se produce mediante una sola rendija de ancho  $a$  sobre una pantalla distante consiste en una franja brillante central y franjas brillantes y oscuras alternantes de mucho menor intensidad. Los ángulos  $\theta_{\text{oscuro}}$  a los que el patrón de difracción tiene intensidad cero, que corresponden a interferencia destructiva, están dados por

$$\sin \theta_{\text{oscuro}} = m \frac{\lambda}{a} \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (37.1)$$

El **criterio de Rayleigh**, que es una condición límite de resolución, afirma que dos imágenes formadas por una abertura apenas son distinguibles si el máximo central del patrón de difracción para una imagen cae en el primer mínimo del patrón de difracción para la otra imagen. El ángulo de resolución límite para una rendija de ancho  $a$  es  $\theta_{\text{min}} \lambda/a$ , y el ángulo de resolución límite para una abertura circular de diámetro  $D$  está dado por  $\theta_{\text{min}} = 1.22\lambda/D$ .

Una **rejilla de difracción** consiste en un gran número de rendijas idénticas igualmente espaciadas. La condición para máximos de intensidad en el patrón de interferencia de una rejilla de difracción para incidencia normal es

$$d \sin \theta_{\text{brillante}} = m \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (37.7)$$

donde  $d$  es el espaciamiento entre rendijas adyacentes y  $m$  es el número de orden del máximo de intensidad.

Cuando se emite luz polarizada de intensidad  $I_{\text{máx}}$  y luego incide sobre un analizador, la luz transmitida a través del analizador tiene una intensidad igual a  $I_{\text{máx}} \cos^2 \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre los ejes de transmisión del polarizador y el analizador.

En general, la luz reflejada se polariza parcialmente. Sin embargo, la luz reflejada está completamente polarizada cuando el ángulo de incidencia es tal que el ángulo entre los haces reflejado y refractado es de  $90^\circ$ . Este ángulo de incidencia, llamado **ángulo de polarización**  $\theta_p$ , satisface la **ley de Brewster**:

$$\tan \theta_p = \frac{n_2}{n_1} \quad (37.10)$$

donde  $n_1$  es el índice de refracción del medio donde viaja inicialmente la luz y  $n_2$  es el índice de refracción del medio reflector.

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage.

1. Su equipo está trabajando en un laboratorio de investigación óptica. Parte del aparato en el que está trabajando involucra haces de luz polarizados. Su supervisora quiere rotar el plano de polarización de un haz polarizado en  $45.0^\circ$ . Puede hacerlo insertando un solo polarizador a  $45.0^\circ$  del plano de polarización del haz original, pero, de acuerdo con la ley de Malus, pierde 50% de la intensidad de la luz. Ella le da la tarea de diseñar una pila de polarizadores, cada uno con su eje en el mismo ángulo con el eje del polarizador anterior, que girará el plano de polarización del haz sin perder más del 10.0% de la intensidad del haz original. Ella quiere saber al salir esta noche (a) cuántos polarizadores necesita en la pila y (b) el ángulo entre los polarizadores adyacentes.
2. **ACTIVIDAD** Un haz de luz no polarizada se dirige a través de una pila de tres polarizadores. El primer polarizador está en un ángulo  $\theta_1$  con respecto a una dirección de referencia que se define como  $0^\circ$ . El tercer polarizador está en un ángulo  $\theta_3$  con respecto a la dirección de referencia. El ángulo  $\theta_2$  del segundo polarizador comienza en la dirección de referencia  $0^\circ$  y se gira  $180^\circ$ . El gráfico de la figura TP37.2 muestra el comportamiento de la intensidad de la luz que pasa a través



de la pila de polarizadores en función de la dirección del segundo polarizador. (a) Discuta esta situación en su grupo y encuentre los ángulos que hacen el primer y tercer polarizador con respecto a la dirección de referencia. (b) ¿Puedes determinar cuál de los ángulos de la parte (a) corresponde al primer polarizador y cuál al tercero?

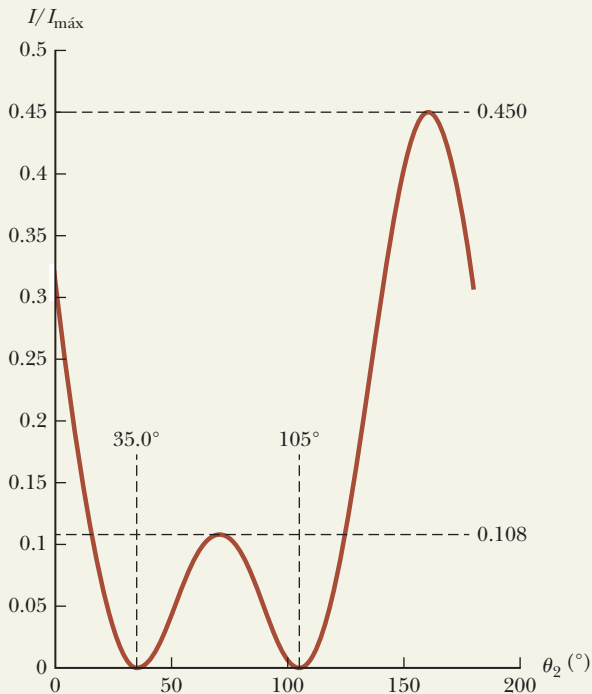


Figura TP37.2

3. **ACTIVIDAD** Su grupo está realizando un experimento en el que una luz de longitud de onda de 632.8 nm ilumina una sola rendija, y se forma un patrón de difracción en una pantalla a 1.00 m de la rendija. Usted registra la intensidad relativa como una función de la distancia desde el máximo central y genera los datos en la siguiente tabla. (a) Trace los datos en la tabla. (b) De su trazado, determine el ancho  $a$  de la rendija simple.

Posición relativa al máximo central (mm)	Intensidad relativa
0	1.00
0.8	0.95
1.6	0.80
3.2	0.39
4.8	0.079
6.5	0.003
8.1	0.036
9.7	0.043
11.3	0.013
12.9	0.000 3
14.5	0.012
16.1	0.015
17.7	0.004 4
19.3	0.000 3

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN From Cengage

### SECCIÓN 37.2 Patrones de difracción provenientes de rendijas angostas

- Una luz láser de helio-neón ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ) se envía a través de una sola rendija de  $0.300 \text{ mm}$  de ancho. ¿Cuál es el ancho del máximo central sobre una pantalla que está a  $1.00 \text{ m}$  de la rendija?
- A partir de la ecuación 37.2, encuentre una expresión para el seno de los ángulos a los que se produce la intensidad mínima en un patrón de difracción de rendija única. Compare el resultado con la ecuación 37.1.
- Luz de longitud de onda de  $540 \text{ nm}$  pasa a través de una rendija de anchura de  $0.200 \text{ mm}$ . (a) La anchura del máximo central en una pantalla es  $8.10 \text{ mm}$ . ¿Qué tan alejada está la pantalla de la rendija? (b) Determine la anchura de la primera franja brillante al lado del máximo central.
- En la figura 37.7, demuestre matemáticamente cuántos máximos de interferencia están encerrados por el máximo de difracción central en el patrón. Tenga en cuenta que el diagrama se genera utilizando luz de  $650 \text{ nm}$  para iluminar dos rendijas de  $3.0 \mu\text{m}$  separadas por  $18 \mu\text{m}$ .

- Suponga que pasa luz con una longitud de onda de  $650 \text{ nm}$  a través de dos rendijas de  $3.00 \mu\text{m}$  de ancho, con sus centros separados  $9.00 \mu\text{m}$ . Elabore un bosquejo de los patrones de difracción e interferencia combinados en la forma de una gráfica de intensidad en función de  $\phi = (\pi a \sin \theta)/\lambda$ . Puede usar la figura 37.7 como punto de partida.
- ¿Qué pasaría si? Suponga que la luz de la figura 37.6 llega a una rendija única de ancho  $a$  en un ángulo  $\beta$  desde la dirección perpendicular. Demuestre que la ecuación 37.1, que es la condición de interferencia destructiva, deberá modificarse para que se lea

$$\begin{aligned} \sin \theta_{\text{oscura}} &= m \frac{\lambda}{a} - \sin \beta \\ m &= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

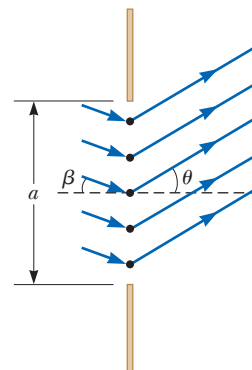


Figura P37.6

- Un patrón de difracción se forma sobre una pantalla a  $120 \text{ cm}$  de distancia de una rendija de  $0.400 \text{ mm}$  de ancho. Se usa luz monocromática de  $546.1 \text{ nm}$ . Calcule la intensidad fraccionaria  $I/I_{\text{máx}}$  en

un punto en la pantalla a 4.10 mm del centro del máximo principal.

- 8.** Se envió una luz coherente de 501.5 nm de longitud de onda a través de dos rendijas paralelas un material opaco. Cada rendija tiene 0.700  $\mu\text{m}$  de ancho. Su centros están separados 2.80  $\mu\text{m}$ . La luz incide sobre una pantalla semicilíndrica, con su eje en el punto medio entre las rendijas. Se desea describir el aspecto del patrón de la luz visible en la pantalla. (a) Encuentre la dirección de cada una de las dos rendijas de máxima interferencia en la pantalla como un ángulo lejos de la bisectriz de la línea que une las rendijas. (b) ¿Cuántos ángulos hay que representan dos rendijas máximos de interferencia? (c) Halle la dirección de cada rendija única de mínima interferencia en la pantalla como un ángulo lejos de la bisectriz de la línea que une las rendijas. (d) ¿Cuántos ángulos hay que representan una rejilla única de interferencias mínimas? (e) ¿Cuántos de los ángulos del inciso (d) son idénticos a los del inciso (a)? (f) ¿Cuántas franjas brillantes son visibles en la pantalla? (g) Si la intensidad de la franja central es  $I_{\text{máx}}$ , ¿cuál es la intensidad de la última franja visible en la pantalla?

### SECCIÓN 37.3 Resolución de una sola rendija y aberturas circulares

*Nota:* En los problemas 11, 15 y 16, y el problema en línea 37.9, se puede utilizar el criterio de Rayleigh para el ángulo límite de la resolución de un ojo. La norma puede ser demasiado optimista para la visión humana.

- 9.** La lente del objetivo de cierto telescopio refractor tiene un diámetro de 58.0 cm. El telescopio está montado en un satélite que orbita la Tierra a una altitud de 270 km para ver objetos en la superficie de terrestre. Suponiendo una longitud de onda media de 500 nm, encuentre la distancia mínima entre dos objetos en el suelo si sus imágenes deben ser resueltas por este objetivo.
- 10.** Para ver un objeto bajo un microscopio se usa luz amarilla de 589 nm de longitud de onda. El diámetro del objetivo es 9.00 mm. (a) ¿Cuál es el ángulo de resolución límite? (b) Suponga que es posible usar luz visible de cualquier longitud de onda. ¿Qué color debe elegir para dar el menor ángulo de resolución posible, y cuál es este ángulo? (c) Suponga que el espacio entre el objeto y el objetivo está lleno de agua. ¿Qué efecto tiene este cambio sobre la potencia resolutive cuando se usa luz de 589 nm?
- 11.** ¿Cuáles son las dimensiones aproximadas del objeto más pequeño en la Tierra que los astronautas pueden definir a simple vista cuando orbitan a 250 km sobre la Tierra? Suponga  $\lambda = 500$  nm y un diámetro de pupila de 5.00 mm.
- 12.** Un láser de helio-neón emite luz con una longitud de onda de 632.8 nm. La abertura circular por donde sale el rayo tiene un diámetro de 0.500 cm. Estime el diámetro del rayo a 10.0 km del láser.
- 13.** Para aumentar el poder de resolución de un microscopio, el objeto y el objetivo se sumergen en aceite ( $n = 1.5$ ). Si el ángulo límite de resolución sin el aceite es de 0.60  $\mu\text{rad}$ , ¿cuál es el ángulo límite de resolución con el aceite? *Sugerencia:* El aceite cambia la longitud de onda de la luz.
- 14.** Está trabajando para un nuevo profesor asistente de astronomía que está interesado en exoplanetas. Un día, un rumor científico comienza a circular que hay un planeta del tamaño de Júpiter alrededor de Alfa Centauri, a 4.28 años luz de distancia. Su profesor tiene acceso a privilegios de vi-

sualización para el Telescopio Espacial Hubble (diámetro de apertura 2.4 m, 100 nm a 2 400 nm), el Telescopio Hale en Monte Palomar en California (diámetro de apertura 5.08 m, luz visible), el Telescopio Keck en Mauna Lea, Hawái (diámetro de apertura 10.0 m, luz visible) y el Radio Telescopio de Arecibo en Puerto Rico (diámetro de apertura 305 m, ondas de radio de 75 cm). Él le pide que le aconseje lo antes posible qué telescopio debe pedir tiempo para resolver una imagen del planeta.

- 15.** El pintor impresionista Georges Seurat creaba pinturas utilizando una enorme cantidad de puntos de pigmentos puros, cada uno de ellos con un diámetro de 2.00 mm, aproximadamente. La idea era poner colores adyacentes, como el rojo y el verde, para formar un lienzo centellante como en su obra maestra *A Sunday Afternoon on the Island of la Grande Jatte* (figura P37.15). ¿Más allá de qué distancia ya no sería posible discernir puntos individuales sobre el lienzo? Suponga que  $\lambda = 500$  nm y que el diámetro de la pupila es de 5.00 mm.



Figura P37.15

- 16.** Estrechos tubos brillantes, paralelos y llenos de gas en varios colores forman bloques de letras para presentar el nombre de un centro nocturno. Los tubos adyacentes están separados 2.80 cm. Los tubos que forman una letra están llenos con neón y emiten predominantemente luz roja con una longitud de onda de 640 nm. Para otra letra, los tubos emiten predominantemente luz azul a 440 nm. La pupila del ojo de una observadora, adaptada a la oscuridad, tiene 5.20 mm de diámetro. (a) ¿Cuál color es más fácil que defina? Establezca cómo decidir. (b) Si ella está alejada en cierto intervalo de distancias, la observadora puede definir los tubos separados de un color, pero no los otros. ¿La distancia de la observadora debe estar en qué intervalo para que ella defina los tubos sólo de uno de estos dos colores?

### SECCIÓN 37.4 Rejilla de difracción

*Nota:* En los problemas que aparecen a continuación, suponga que la luz incide normalmente sobre las rejillas.

- 17.** Considere un arreglo de alambres paralelos con espaciamiento uniforme de 1.30 cm entre centros. En aire a 20 °C, ultrasonido con una frecuencia de 37.2 kHz de una fuente distante cae perpendicularmente sobre el arreglo. (a) Calcule el número de direcciones en el otro lado del arreglo en el que hay un máximo de intensidad. (b) Encuentre el ángulo para cada una de estas direcciones con respecto a la dirección del haz incidente.
- 18.** Tres líneas espectrales discretas se producen en ángulo de 10.1°, 13.7° y 14.8° en el espectro de primer orden de un es-



pectrómetro de rejilla. (a) Si la rejilla tiene 3 660 cortes / cm, ¿cuáles son las longitudes de onda de la luz? (b) ¿A qué ángulos se encuentran estas líneas en el espectro de segundo orden?

19. Una rejilla con 250 ranuras/mm se utiliza con una fuente de luz incandescente. Suponga que el espectro visible abarca un intervalo en longitudes de onda de 400 a 700 nm. ¿En cuántos ordenes es posible ver (a) la totalidad del espectro visible y (b) la región de longitudes de onda cortas?
20. Demuestre que, sin importar qué luz blanca se hace pasar a través de una rejilla de difracción con cualquier tamaño de espaciamento, el extremo violeta del espectro visible continuo en el tercer orden siempre se sobrepone con la luz roja del otro extremo del espectro de segundo orden.
21. La luz desde un láser de argón incide sobre una rejilla de difracción que tiene 5310 ranuras por cada centímetro. Los máximos central y de primer orden aparecen separados 0.488 m sobre una pared a 1.72 m de la rejilla. Determine la longitud de onda de la luz láser.

22. Un rayo ancho de luz láser con una longitud de onda de 632.8 nm está dirigido a través de varias rendijas paralelas y angostas, separadas 1.20 mm, e incide sobre una hoja de película fotográfica que está a 1.40 m de distancia. El tiempo de exposición se ha escogido de manera que la película se expone sólo en la región central de cada franja brillante. (a) Determine la distancia entre estos máximos de interferencia. La película se imprime como transparencia; se ve opaca en toda su extensión excepto en las líneas expuestas. Posteriormente, el mismo rayo de luz láser se dirige a través de la transparencia, haciendo que incida sobre una pantalla que está a una distancia de 1.40 más allá. (b) Compruebe que en la pantalla aparecerán varias regiones brillantes paralelas angostas, separadas 1.20 mm, como imágenes reales de las rendijas originales. Si se retira la pantalla, la luz divergirá de las imágenes de las rendijas originales con los mismos frentes de onda reconstruidos que produjeron las rendijas originales. (Un razonamiento semejante condujo a Dennis Gabor, en un juego de fútbol soccer, a la invención de la holografía).

23. Está trabajando como asistente de demostración para un profesor de física. Para una próxima conferencia sobre redes de difracción, desea realizar una demostración en la que él hace brillar un puntero láser con una incidencia normal sobre la superficie grabada de un DVD colocado sobre la mesa de demostración. (a) Le pide que determine cuántos máximos adicionales más allá del reflejo normal (que será bloqueado por su mano sosteniendo el puntero láser) se proyectarán en el techo o las paredes de la habitación si usa un puntero láser con una longitud de onda de 632.8 nm (b) También le pregunta si puede mostrar más máximos usando un puntero láser de otro color visible. Las pistas de hoyos en un DVD están separadas por 0.800 mm.

### SECCIÓN 37.5 Difracción de los rayos X mediante cristales

24. Rayos X monocromáticos ( $\lambda = 0.166$  nm) de un blanco de níquel inciden en la superficie de un cristal de cloruro de potasio (KCl). El espaciado entre los planos de átomos en KCl es 0.314 nm. ¿A qué ángulo (con relación a la superficie) debe ser dirigido el haz por un máximo de segundo orden para ser observado?
25. Para un cristal que tiene un espaciado entre los planos de átomos de 0.250 nm, la difracción de primer orden máxima se observó a  $12.6^\circ$ . (a) ¿Qué longitud de onda de rayos

X se utiliza para observar este patrón de primer orden? (b) ¿Cuántos órdenes se pueden observar en este cristal para esta longitud de onda?

26. Está realizando una investigación en un laboratorio de difracción de rayos X. En uno de sus experimentos, usted desea estudiar la difracción de rayos X de un cristal de NaCl usando rayos X de longitud de onda de 0.136 nm. (a) ¿Para cuántos ángulos espera detectar un máximo de difracción del cristal si sus rayos X se reflejan desde los planos sombreados en la figura 37.20? (b) En otro experimento, el cristal se gira para que los reflejos de los rayos X surjan de planos paralelos de sodio y iones de cloro. La figura P37.26 muestra partes de estos planos que contienen átomos dentro de la celda unidad. Imagine extender estas porciones hacia fuera para formar planos grandes, uno con solo iones de sodio y el otro con solo iones de cloro. Teniendo en cuenta estos planos, ¿para cuántos ángulos espera detectar un máximo de difracción del cristal utilizando los mismos rayos X?

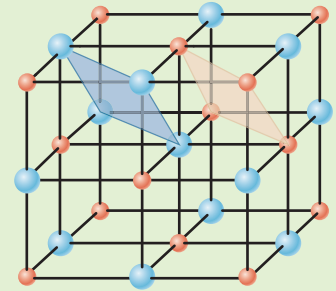


Figura P37.26

### SECCIÓN 37.6 Polarización de las ondas luminosas

El problema en línea 33.25 puede asignarse a esta sección.

27. Dos transeptores de radio de mano con antenas dipolo están separados por una gran distancia fija. Si la antena de transmisión es vertical, ¿qué fracción de la potencia máxima recibida aparecerá en la antena receptora cuando se está inclinado respecto a la vertical por (a)  $15.0^\circ$ , (b)  $45.0^\circ$ , y (c)  $90.0^\circ$ ?
28. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un técnico está midiendo el índice de refracción de un material sólido mediante la observación de la polarización de la luz reflejada de su superficie. Se da cuenta de que cuando se proyecta un haz de luz de aire sobre la superficie del material, la luz reflejada es totalmente polarizada paralela a la superficie cuando el ángulo de incidencia es  $41.0^\circ$ .
29. El ángulo crítico para la reflexión interna total para el zafiro rodeado por aire es de  $34.4^\circ$ . Calcule su ángulo de polarización.
30. Para un medio transparente específico rodeado por aire, determine el ángulo de polarización  $\theta_p$  en términos del ángulo crítico para la reflexión interna total  $\theta_c$ .
31. Está trabajando en un laboratorio láser, asistiendo con un experimento que involucra láseres de gas. Su supervisor explica que los extremos del tubo de vidrio que contiene el gas láser están sellados con ventanas de Brewster. La figura P37.31 muestra dicha ventana en un extremo de un tubo de láser de vidrio. La luz láser reflejada desde la primera superficie se muestra como la línea punteada en la figura, y está completamente polarizada paralela al plano de la superficie (perpendicular a la página). La luz que se transmite a la ventana de Brewster y luego al otro lado está parcialmente polarizada paralela a la página. (a) Su supervisor le pide que determine el ángulo  $\theta$  que debe hacer una ventana de Brewster hecha de ZnSe ( $n = 2.67$ ) con la horizontal para que se cumplan estas condiciones. El índice de refracción del gas



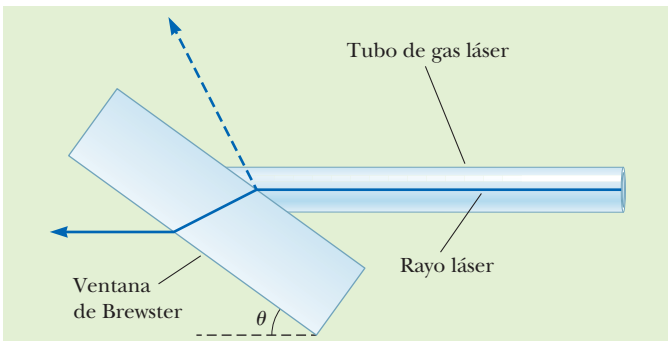


Figura P37.31

en el tubo es 1.00. (b) Después de informar su ángulo a su supervisor, él dice que ha visto un posible problema: ¿qué pasa con el reflejo en la segunda superficie, cuando el rayo deja la ventana de Brewster? Teme que parte de la polarización deseada del haz (paralela a la página) se pierda en esa superficie. Convéncelo de que no necesita preocuparse por ese problema.

- 32. C I C** Un haz de luz no polarizada incide sobre una pila de filtros polarizadores ideales. El eje del primer filtro es perpendicular al eje del último filtro en la pila. Encuentre la fracción en la que se reduce la intensidad del haz transmitido en los siguientes tres casos. (a) En la pila hay tres filtros cada uno con su eje de transmisión a  $45.0^\circ$  en relación con el filtro precedente. (b) En la pila hay cuatro filtros, cada uno con su eje de transmisión a  $30.0^\circ$  en relación con el filtro precedente. (c) En la pila hay siete filtros, cada uno con su eje a  $15.0^\circ$  en relación con el filtro precedente. (d) Comente acerca de la comparación de los incisos (a), (b) y (c).

**PROBLEMAS ADICIONALES**

- 33.** En un patrón de difracción de una rendija, suponga que cada máximo lateral está a la mitad entre los mínimos adyacentes encuentre la razón de la intensidad (a) del máximo lateral de primer orden y (b) del máximo lateral de segundo orden a la intensidad del máximo central.
- 34. C I C** Luz láser con una longitud de onda de 632.8 nm se dirige a través de una rendija o dos rendijas y se le permite caer sobre una pantalla 2.60 m más allá. La figura P37.34 muestra el patrón sobre la pantalla, con una regla en centímetros bajo ella. (a) ¿La luz pasa a través de una rendija o de dos rendijas? Explique cómo puede decirlo. (b) Si es una rendija, encuentre su ancho. (c) Si son dos rendijas, encuentre la distancia entre sus centros.

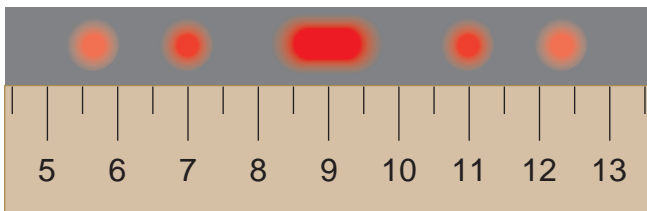


Figura P37.34

- 35.** En una superficie de agua de una profundidad uniforme se soporta un muelle ancho sobre pilotes en varias hileras paralelas separadas 2.80 m. Proveniente del océano, se presenta un oleaje de una longitud de onda uniforme, que se desplaza en una dirección que forma un ángulo de  $80.0^\circ$  con las hileras de pilotes. Determine las tres longitudes de onda

más largas de las olas que serán reflejadas con fuerza por los pilotes.

- 36. C I C V** Dos motocicletas separadas lateralmente 2.30 m se están aproximando a un observador quien sostiene un "husmeador de campo" sensible a luz infrarroja de longitud de onda de 885 nm (a) Suponga que la luz se propaga a través del aire uniforme y perfectamente estable. ¿Qué diámetro de abertura se requiere si los faros delanteros de la motocicleta se definen a una distancia de 12.0 km? (b) Comente qué tan real es esta consideración.

- 37. B I O** El *Very Large Array* (VLA) es un conjunto de 27 antenas parabólicas que están dispuestas en los condados de Caton y de Socorro, en Nuevo México (figura P37.37). Las antenas pueden separarse utilizando rieles de ferrocarril y sus señales combinadas consiguen un poder de resolución correspondiente a una abertura sintética de 36.0 km de diámetro. (a) Si los detectores están sintonizados a una frecuencia de 1.40 GHz, ¿cuáles la resolución angular del VLA? (b) Las nubes de hidrógeno siderales emiten a esta frecuencia. ¿Cuál debe ser la distancia de separación de dos nubes que estén a 26 000 años luz de la Tierra en el centro de la galaxia, si es preciso definir las? (c) ¿Qué pasaría si? Conforme un telescopio observa el cielo, un halcón acecha desde lo alto volando en círculos. Determine la resolución angular del ojo del halcón. Suponga que el halcón es altamente sensible a la luz verde de 500 nm de longitud de onda y que tiene un diámetro de pupila de 12.0 mm. (d) Entierra, 30 m debajo, se encuentra un ratón. ¿Qué separación deben tener los bigotes del ratón para que los pueda definir el halcón?



Figura P37.37

- 38. S** Dos longitudes de onda  $\lambda$  y  $\lambda + \Delta\lambda$  (con  $\Delta\lambda \ll \lambda$ ) inciden sobre una rejilla de difracción. Demostrar que la separación angular entre las líneas espectrales en el espectro de  $m$ -ésimo orden es

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{(d/m)^2 - \lambda^2}}$$

donde  $d$  es el espaciado de la rejilla y  $m$  es el número de orden.

- 39. Problema de repaso.** Un rayo de luz de 541 nm incide sobre una rejilla de difracción que tiene 400 ranuras/mm. (a) Determine el ángulo del rayo de segundo orden. (b) ¿Qué pasaría si? Todo el aparato se sumerge en el agua, ¿cuál sería el nuevo ángulo de difracción de segundo orden? (c) Demuestre que los dos rayos difractados de los incisos (a) y (b) están relacionados entre sí mediante la ley de la refracción.

40. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un técnico está enviando luz láser de longitud de onda de 632.8 nm a través de un par de rendijas separadas por 30.0 μm. Cada rendija es de 2.00 μm de ancho. La pantalla en la que se proyecta el modelo no es lo suficientemente amplia, por lo que la luz de máxima interferencia  $m = 15$  pierde el borde de la pantalla y pasa a la siguiente estación de laboratorio, sorprendiendo a un compañero de trabajo.

41. La luz en el aire golpea una superficie de agua en el ángulo de polarización. La parte del haz refractada en el agua golpea una losa sumergida de material con índice refractivo  $n = 1.62$ , como se muestra en la figura P37.41. La luz reflejada de la superficie superior de la losa es completamente polarizada. Encuentre el ángulo  $\theta$  entre la superficie del agua y la superficie de la losa.

42. La luz en el aire (suponga  $n = 1$ ) golpea una superficie de un líquido con índice de refracción  $n_l$  en el ángulo de polarización. La parte del haz refractada en el líquido golpea una losa sumergida de material con índice refractivo  $n$ , como se muestra en la figura P37.41. La luz reflejada de la superficie superior de la losa es completamente polarizada. Encuentre el ángulo  $\theta$  entre la superficie del agua y la superficie de la losa como una función de  $n$  y  $n_l$ .

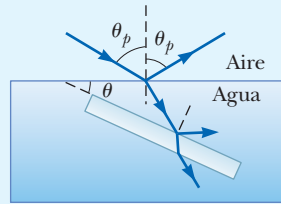


Figura P37.41 Problemas 41 y 42.

43. Una cámara de abertura diminuta sin lente tiene una abertura circular pequeña de diámetro  $D$ . La luz desde los objetos distantes pasa a través de la abertura al interior de una caja oscura, e incide sobre una pantalla colocada a una distancia  $L$ . Si  $D$  es demasiado grande, el despliegue sobre la pantalla estará borroso, ya que un punto brillante en el campo de visión emitirá luz en un círculo de diámetro ligeramente mayor que  $D$ . Por otra parte, si  $D$  es demasiado pequeño, la difracción hará borroso el despliegue. La pantalla mostrará una imagen razonablemente nítida si el diámetro del disco central del patrón de difracción, especificado por la ecuación 38.6, es igual a  $D$  en la pantalla. (a) Demuestre que para el caso de una luz monocromática con frentes de onda planos y  $L \gg D$ , la condición para una imagen nítida se cumple cuando  $D^2 = 2.44 \lambda L$ . (b) Determine el diámetro óptimo de la abertura para una luz de 500 nm proyectada en una pantalla a 15.0 cm.

44. En la figura P37.44a se muestran las plumas iridiscentes del pavo real. La superficie de una bábula microscópica está compuesta de queratina transparente que soporta barras de melanina de color marrón oscuro en una red regular, representada en la figura P37.44b. (Sus uñas están hechas de que-



Drop of Light/Shutterstock

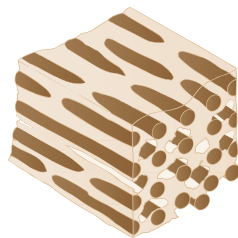


Figura P37.44

ratina, y la melanina es el pigmento oscuro que da color a la piel humana.) En una parte de la pluma que puede aparecer turquesa (azul-verde), suponga que las barras de melanina están uniformemente separadas por 0.25 mm, con aire entre ellos. (a) Explique cómo esta estructura puede aparecer turquesa cuando no contiene pigmento azul o verde. (b) Explique cómo también puede aparecer violeta si la luz cae sobre ella en una dirección diferente. (c) Explique cómo puede presentar simultáneamente diferentes colores a sus ojos, lo cual es una característica de la iridiscencia. (d) Un disco compacto puede parecer de cualquier color del arcoíris. Explique por qué la porción de la pluma en la figura P37.44b no puede aparecer amarilla o roja. (e) ¿Qué podría ser diferente sobre la variedad de barras de melanina en una parte de la pluma que parece ser roja?

45. La escala de un mapa está dada en kilómetros por centímetro, especificando la distancia sobre la Tierra que representa cualquier distancia en el mapa. La escala de un espectro es su dispersión, dada en nanómetros por centímetro, que define el cambio en longitud de onda que representa una distancia en el espectro. Es necesario conocer cuál es la dispersión, a fin de poder comparar un espectro con otro y efectuar mediciones de (por ejemplo) un corrimiento Doppler. Haga que  $y$  represente la posición relativa con el centro de un patrón de difracción proyectado en una pantalla plana a una distancia  $L$  por una rejilla de difracción con un espaciamiento de rendijas  $d$ . La dispersión es igual a  $d\lambda/dy$ . (a) Demuestre que la dispersión está dada por

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{L^2 d}{m(L^2 + y^2)^{3/2}}$$

(b) Calcule la dispersión en el primer orden para una luz con una longitud de onda media de 550 nm, analizada mediante una rejilla que tiene 8000 ranuras/cm y proyectada sobre una pantalla a 2.40 m de distancia.

46. Una luz que viaja en un medio con un índice de refracción  $n_1$  incide formando un ángulo  $\theta$  con la superficie de un medio de índice  $n_2$ . El ángulo entre los rayos reflejado y refractado es igual a  $\beta$ . Demuestre que

$$\tan \theta = \frac{n_2 \sin \beta}{n_1 - n_2 \cos \beta}$$

(b) ¿Qué pasaría si? Demuestre que esta expresión para  $\tan \theta$  se reduce a la ley de Brewster en el caso de que  $\beta = 90$ .

47. El patrón de difracción de una sola rendija se describe mediante la ecuación

$$I = I_{\max} \frac{\text{sen}^2 \phi}{\phi^2}$$

donde  $\phi = (\pi a \text{sen } \theta)/\lambda$ . El máximo central está en  $\phi = 0$ , y los máximos laterales están aproximadamente en  $\phi = (m + \frac{1}{2})\pi$  para  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Determine con más precisión (a) la ubicación del primer máximo lateral, donde  $m = 1$ , y (b) la ubicación del segundo máximo lateral. Observe en la figura 37.6a que la gráfica de intensidad con  $\phi$  tiene una tangente horizontal en máximos y también en mínimos.

48. ¿Cuál es la separación que experimenta un haz de luz por difracción? Una respuesta cuantitativa es todo el ancho a la mitad del máximo del máximo central del patrón de difracción Fraunhofer de una sola rendija. Puede evaluar este ángulo de dispersión en este problema y en el siguiente. (a) En la ecuación 37.2, defina  $\pi a \text{sen } \theta/\lambda = \phi$  y demuestre que, en el punto donde  $I = 0.5 I_{\max}$ , debe tener  $\phi = \sqrt{2} \text{sen } \phi$ .



(b) Sea  $y_1 = \sin \phi$  y  $y_2 = \phi/\sqrt{2}$ . Grafique  $y_1$  y  $y_2$  sobre el mismo juego de ejes en un intervalo desde  $\phi = 1$  rad hasta  $\phi = \pi/2$  rad. Determine  $\phi$  desde el punto de intersección de las dos curvas. (c) Demuestre después que, si la fracción  $\lambda/a$  no es grande, todo el ancho angular a la mitad del máximo de difracción central es  $\theta = 0.885 \lambda/a$ . (d) **¿Qué pasaría si?** Otro método para resolver la ecuación trascendental  $\phi = \sqrt{2} \sin \phi$  del inciso (a) es estimar un primer valor para  $\phi$ , utilizando una computadora o una calculadora para ver cómo coincide, y continuar la actualización de su estimación hasta que la ecuación se equilibre. ¿Cuántas etapas (iteraciones) serán necesarias?

49. Dos rayos de luz de longitud de onda muy próxima inciden sobre una rejilla de difracción. (a) Partiendo de la ecuación 37.7, demuestre que la dispersión angular de la rejilla está dada por

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$$

(b) Una rejilla cuadrada de 2.00 cm de lado y que contiene 8000 rendijas uniformemente separadas, es utilizada para analizar el espectro del mercurio. Dos líneas muy próximas emitidas por este elemento tienen 579.065 nm y 576.959 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la separación angular de estas dos longitudes de onda en el espectro de segundo orden?

**PROBLEMAS DE DESAFÍO**

50. Un satélite espía está constituido esencialmente de un espejo cóncavo de gran diámetro que forma una imagen en un detector de cámara digital y envía, mediante ondas de radio, la imagen a un receptor en Tierra. En efecto, se trata de un telescopio astronómico en órbita, mirando hacia abajo y no hacia arriba. (a) ¿Un satélite espía puede leer las placas de un vehículo?, (b) ¿la fecha en una moneda? Para defender sus respuestas efectúe un cálculo del orden de magnitud y especifique la información que sea necesaria.
51. La figura P37.51a es un dibujo tridimensional de un cristal birrefringente. Las líneas discontinuas ilustran cómo una placa delgada de material colocada paralela se podría cortar del espécimen más grande y que tenga el eje óptico del cristal paralelo a las caras de la placa. A la sección del cristal cortada de esta manera, se le conoce como *placa de retardo*. Cuando un rayo de luz incide sobre la placa perpendicular a la dirección del eje óptico, como se muestra en la figura P37.51b, el rayo O y el rayo E viajan a lo largo de una sola

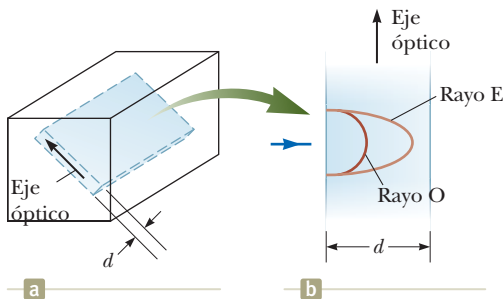


Figura P37.51

línea recta, pero con rapidez diferente. (a) Suponga que  $d$  es el espesor de la placa y demuestre que la diferencia de fase entre los rayos O y E es igual a

$$\theta = \frac{2\pi d}{\lambda} |n_o - n_e|$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda en el aire. (b) En un caso específico, la luz incidente tiene una longitud de onda de 550 nm. Determine el valor mínimo de  $d$  para una placa de cuarzo en la cual  $\theta = \pi/2$ . Este tipo de placa se conoce como placa de *cuarto de onda*. Use los valores de  $n_o$  y  $n_e$  de la tabla 37.1.

52. En la figura P37.52, suponga que los ejes de transmisión de los discos polarizadores de izquierda y derecha son mutuamente perpendiculares. Además, el disco central gira sobre el eje común con una velocidad angular  $\omega$ . Demuestre que, si luz no polarizada incide sobre el disco izquierdo con una intensidad  $I_{\text{máx}}$ , la intensidad del haz que sale del disco derecho es

$$I = \frac{1}{16} I_{\text{máx}} (1 - \cos 4\omega t)$$

Este resultado significa que la intensidad del haz emergente se modula con una rapidez cuatro veces la rapidez de rotación del disco central. *Sugerencia:* Use las identidades trigonométricas  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$  y  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ .

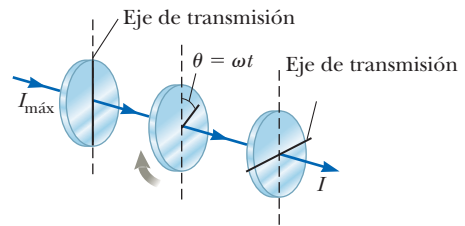


Figura P37.52

53. Considere una onda de luz que pasa a través de una rendija y se propaga hacia una pantalla distante. La figura 37.53 muestra la variación de la intensidad para el patrón en la pantalla. Dé un argumento matemático de que más de 90% de la energía transmitida está en el máximo central del patrón de difracción. *Sugerencia:* No es necesario que calcule el porcentaje preciso, pero explique las etapas de su razonamiento. Puede usar la identificación

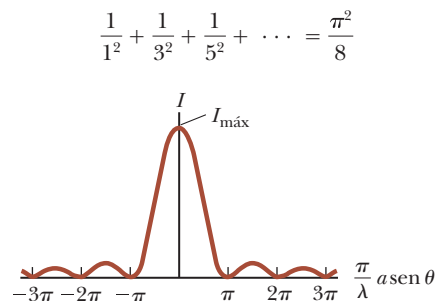


Figura P37.53





# Física moderna

**A finales del siglo XIX, muchos científicos creían que habían** aprendido la mayor parte de lo que había que saber sobre física. La cinemática y la dinámica, la gravitación universal, los principios de la electricidad y el magnetismo, las leyes de la termodinámica y la teoría cinética, y los principios de la óptica tuvieron mucho éxito al explicar una variedad de fenómenos. Hasta ahora en este libro, hemos estudiado estas ideas y hemos descubierto que podemos describir fenómenos físicos con conjuntos separados de modelos de análisis basados en modelos de simplificación, muchos basados en partículas y otros en ondas.

Sin embargo, a comienzos del siglo XX, una gran revolución sacudió el mundo de la física. En 1900, Max Planck proporcionó las ideas básicas que llevaron a la formulación de la teoría cuántica, y en 1905, Albert Einstein formuló su *teoría especial de la relatividad*. Ambas teorías tendrían un profundo efecto en nuestra comprensión de la naturaleza.

La relatividad nos dice que los conceptos de cinemática y dinámica no son los que pensamos cuando consideramos velocidades cercanas a la de la luz. ¡Uno de los resultados más asombrosos de la teoría cuántica nos dice que entidades como los electrones (partículas) y la luz (ondas) tienen propiedades similares a partículas y ondas!

En el capítulo 38, presentaremos la teoría especial de la relatividad. Aunque las predicciones de esta teoría a menudo violan nuestro sentido común, la teoría describe correctamente los resultados de los experimentos que involucran velocidades cercanas a la velocidad de la luz. La versión ampliada de este libro de texto, *Física para Ciencias e Ingeniería con Física moderna*, cubre los conceptos básicos de la mecánica cuántica y su aplicación a la física atómica y molecular, la física de la materia condensada, la física nuclear, la física de partículas y la cosmología.

A pesar de que la física que se desarrolló durante el siglo XX ha llevado a una multitud de logros tecnológicos importantes, la historia aún está incompleta. Los descubrimientos continuarán evolucionando durante nuestras vidas. ■

El detector *Compact Muon Solenoid* (CMS) es parte del Gran Colisionador de Hadrones en el Laboratorio Europeo de Física de Partículas operado por el CERN. Es uno de los diversos detectores para la búsqueda de las partículas elementales. Para darse una idea de la escala, observe la estructura verde a la izquierda del detector que se extiende hasta la parte superior a cinco pisos de altura. (CERN)







En este capítulo, discutimos la paradoja de los gemelos, un ejemplo estándar de los efectos de la relatividad. ¡Quizás estas hermanas gemelas jóvenes serán las primeras en probarlo! ¡Parece que ya están discutiendo! (eukukulka / Shutterstock)

- 38.1 Principio de la relatividad galileano
- 38.2 Experimento de Michelson-Morley
- 38.3 Principio de la relatividad de Einstein
- 38.4 Consecuencias de la teoría especial de la relatividad
- 38.5 Ecuaciones de transformación de Lorentz
- 38.6 Ecuaciones de transformación de velocidad de Lorentz
- 38.7 Cantidad de movimiento lineal relativista
- 38.8 Energía relativista
- 38.9 Teoría general de la relatividad

### IMAGINE Está emocionado por comenzar su estudio de física moderna.

Al mirar hacia adelante en el capítulo 38, verá un análisis sobre la paradoja de los gemelos, donde un gemelo permanece en la Tierra y el otro viaja a una estrella distante y luego de vuelta a casa a una velocidad cercana a la de la luz. Cuando el gemelo viajero llega a casa, ¡sus edades son diferentes! Sueña con realizar este experimento y probar los resultados. ¡Por supuesto, quiere ser el gemelo viajero, para que pueda visitar otra estrella! Debería recibir pagos por sus servicios, para que pueda mantenerse una vez que regrese a la Tierra. Esto lo hace pensar. Para registrar sus turnos diarios de trabajo y documentar cuál debe ser su salario, ¿debe llevar su tarjeta de tiempo junto con usted e ir a buscar trabajo diariamente, o debe dejar su tarjeta de tiempo en su casa y hacer que su jefe se ponga en contacto con usted todos los días?

**CONEXIONES** Nuestras experiencias y observaciones cotidianas involucran objetos que se mueven a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz. La mecánica newtoniana se formuló al observar y describir el movimiento de tales objetos, y este formalismo tiene mucho éxito al describir una amplia gama de fenómenos que ocurren a bajas velocidades. No obstante, no describe adecuadamente el movimiento de los objetos cuyas velocidades se aproximan a las de la luz. Aunque Albert Einstein hizo muchas otras contribuciones importantes a la ciencia, la teoría especial de la relatividad por sí sola representa uno de los mayores logros intelectuales de todos los tiempos. Con esta teoría, las observaciones experimentales pueden predecirse correctamente en el rango de velocidades desde  $v = 0$  hasta velocidades cercanas a la velocidad de la luz. Este capítulo brinda una introducción a la teoría especial de la relatividad, con énfasis en algunas de sus predicciones. Además de su conocido y esencial papel en la física teórica, la teoría especial de la relatividad tiene aplicaciones prácticas, que incluyen el diseño de plantas de energía nuclear y

unidades modernas del sistema de posicionamiento global (GPS). Estos dispositivos, y otros que vemos en los próximos capítulos, dependen de principios relativistas para un diseño y operación adecuados.

### 38.1 Principio galileano de la relatividad

En la sección 4.6, estudiamos observaciones hechas a partir de diferentes marcos de referencia. En el capítulo 5, vimos que un marco de referencia *inercial* es aquel en el que se observa que un objeto no tiene aceleración cuando no actúan fuerzas sobre él. Además, cualquier sistema que se mueva con velocidad constante respecto a un marco inercial también debe estar en un marco inercial.

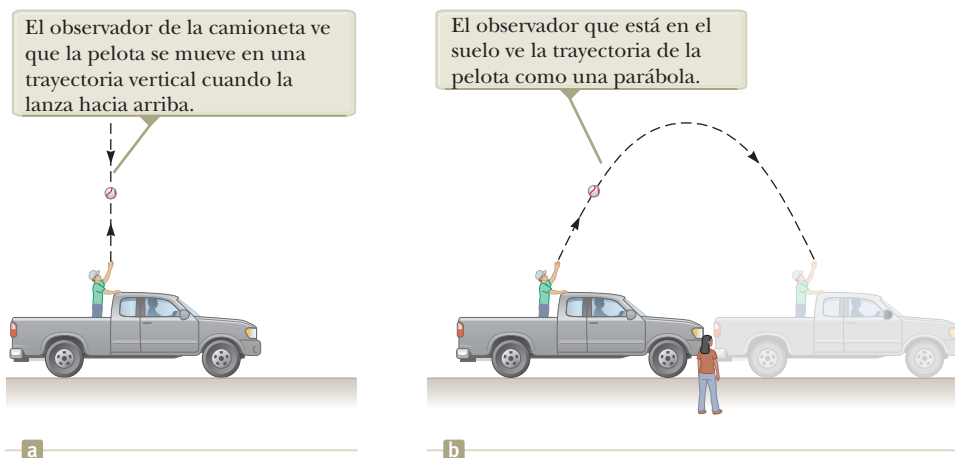
No hay marco inercial absoluto de referencia. En consecuencia, los resultados de un experimento realizado en un vehículo que se mueve con velocidad uniforme serán idénticos a los resultados del mismo experimento realizado en un vehículo inmóvil. El enunciado formal de este resultado se denomina **principio de la relatividad galileano**:

Las leyes de la mecánica deben ser las mismas en todos los marcos inerciales de referencia.

◀ Principio galileano de la relatividad

Es importante señalar que esta afirmación dice que las leyes son las mismas, no los resultados de un experimento. Consideremos una observación que ilustra la equivalencia de las leyes de la mecánica en diferentes marcos inerciales. La camioneta de la figura 38.1a se mueve con velocidad constante con respecto al suelo. Si un pasajero en ella lanza una pelota directamente hacia arriba, y si se desprecian los efectos del aire, el pasajero observará que la pelota se mueve en una trayectoria vertical. El movimiento de la pelota parece ser exactamente igual que si la pelota fuera lanzada por una persona en reposo en el suelo. La ley de la gravitación universal y las ecuaciones de movimiento bajo aceleración constante se cumplen ya sea que la camioneta se encuentre en reposo o en movimiento uniforme.

Considere también, que uno de los observadores está en el suelo como en la figura 38.1b. Ambos observadores coinciden con las leyes de física: el observador en la camioneta lanza una pelota hacia arriba, se eleva y cae de nuevo en su mano de acuerdo con el modelo de partícula bajo aceleración constante. ¿Los observadores coinciden en la trayectoria de la pelota lanzada por el observador en el camión? El observador que está en el suelo ve la trayectoria de la pelota como una parábola, como se ve en la figura 39.1b, mientras que, como se mencionó, el observador de la camioneta ve que la pelota se mueve en trayectoria vertical. Además, de acuerdo con el observador que está en el suelo, la pelota tiene una componente horizontal de velocidad igual a la de la camioneta y el movimiento horizontal de la pelota se describe con el modelo de una partícula en movimiento con velocidad constante. Aun cuando los dos obser-

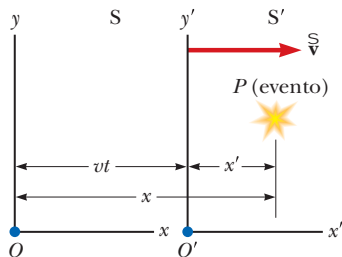


**Figura 38.1** Dos observadores miran la trayectoria de la pelota lanzada y obtienen resultados diferentes.



vadores no están de acuerdo con ciertos aspectos, *coinciden en la validez de las leyes de Newton* y en los resultados al aplicar apropiadamente los análisis de modelos que han aprendido. Este acuerdo implica que no hay experimento mecánico que pueda detectar diferencia alguna entre los dos marcos inerciales. Lo único que se puede detectar es el movimiento relativo de un marco respecto al otro.

**E XAMEN RÁPIDO 38.1** ¿Cuál de los dos observadores de la figura 38.1 ve la trayectoria *correcta* de la pelota? (a) El observador de la camioneta, (b) el observador en tierra o (c) ambos.



**Figura 38.2** Se presenta un evento en el punto  $P$ . El evento es visto por dos observadores en marcos inerciales  $S$  y  $S'$ , donde  $S'$  se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  respecto a  $S$ .

Suponga que se presenta algún fenómeno físico, que llamará *evento*, el cual es observado por alguien en reposo en un marco inercial de referencia. Al decir que un observador está “en un marco”, significa que está en reposo respecto al origen de ese marco. La ubicación y tiempo del evento pueden ser especificados por las cuatro coordenadas  $(x, y, z, t)$ . Lo deseable es poder transformar las coordenadas de un observador en un marco inercial a las de otro en un marco que se mueve con velocidad relativa uniforme en comparación con el primer marco.

Considere dos marcos inerciales  $S$  y  $S'$  (figura 38.2). El marco  $S'$  se mueve con una velocidad constante  $\vec{v} = v\hat{i}$  a lo largo de los ejes comunes  $x$  y  $x'$ , donde  $\vec{v}$  se mide respecto a  $S$ . Suponga que los orígenes de  $S$  y  $S'$  coinciden en  $t = 0$  y que se presenta un evento en el punto  $P$  en el espacio en algún instante. Por simplicidad, se muestra al observador  $O$  en el marco de  $S$  y al observador  $O'$  en el marco de  $S'$  con los puntos azules en el origen de sus marcos de coordenadas en la figura 38.2, pero esto no es necesario: un observador podría estar en cualquier punto fijo de su marco. El observador  $O$  describe el evento con coordenadas espacio-tiempo  $(x, y, z, t)$ , mientras que un observador  $O'$  en  $S'$  usa las coordenadas  $(x', y', z', t')$  para describir el mismo evento. Modele el origen de  $S'$  como una partícula bajo velocidad constante relativa al origen de  $S$ . Como muestra la geometría de la figura 38.2, las relaciones entre estas coordenadas se escriben como

Transformada Galileana para la ecuación de velocidad

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t \tag{38.1}$$

Éstas son las **ecuaciones de transformación galileanas del espacio-tiempo**. Observe que el tiempo se supone el mismo en ambos marcos inerciales; es decir, dentro de la estructura de la mecánica clásica, todos los relojes funcionan al mismo ritmo, cualquiera que sea su velocidad, de modo que el tiempo en el que se presenta un evento para un observador en  $S$  es el mismo tiempo para el mismo evento en  $S'$ . En consecuencia, el intervalo de tiempo entre dos eventos sucesivos debe ser el mismo para ambos observadores. Aun cuando esta suposición puede parecer evidente, resulta incorrecta en situaciones donde  $v$  es comparable a la rapidez de la luz.

Ahora suponga que una partícula se mueve en un desplazamiento de magnitud  $dx$  a lo largo del eje  $x$  en un intervalo  $dt$  medido por un observador en  $S$ . Se deduce, de las ecuaciones 38.1, que el correspondiente desplazamiento  $dx'$  medido por un observador en  $S'$  es  $dx' = dx - v dt$ , donde el marco  $S'$  se mueve con una rapidez  $v$  en la dirección  $x$  respecto al marco  $S$ . Debido a que  $dt = dt'$ , se obtiene

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

o bien

$$u'_x = u_x - v$$

donde  $u_x$  y  $u'_x$  son las componentes  $x$  de la velocidad de la partícula medida por los observadores en  $S$  y  $S'$ , respectivamente. (Se usa el símbolo  $u$  para la velocidad de partícula en lugar de  $v$ , que se usa para la velocidad relativa de dos marcos de referencia.) Escribimos la ecuación anterior en forma de vector y la resolvemos para la velocidad de la partícula como lo ve el observador en el marco no preparado:

$$\vec{u}_x = \vec{u}'_x + \vec{v} \tag{38.2}$$

**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 38.1**

**Relación entre los marcos S y S'**

**S'** Muchas de las representaciones matemáticas de este capítulo son verdaderas *sólo* para la relación especificada entre los marcos  $S$  y  $S'$ . Los ejes  $x$  y  $x'$  coinciden, excepto en que sus orígenes son diferentes. Los ejes  $y$  y  $y'$  (y los ejes  $z$  y  $z'$ ) son paralelos, pero no coinciden debido al desplazamiento del origen de  $S'$  respecto al de  $S$ . Se escoge el tiempo  $t = 0$  como el instante en el que coinciden los orígenes de los dos sistemas de coordenadas. Si el marco  $S'$  se mueve en la dirección  $x$  positiva respecto a  $S$ ,  $v$  es positiva; de otro modo es negativa.

Ecuación galileana de transformación de la velocidad



La ecuación 38.2 es la **ecuación galileana de transformación de la velocidad**, la cual es consistente con la noción intuitiva de tiempo y espacio, así como con la explicación de la sección 4.30. Sin embargo, como pronto verá, conduce a serias contradicciones cuando es aplicada a ondas electromagnéticas.

- E XAMEN RÁPIDO 38.2** Un *pitcher* de beisbol con una bola rápida de 90 mi/h
- lanza una pelota cuando está de pie en una plataforma de ferrocarril que se
  - mueve a 110 mi/h. La pelota es lanzada en la misma dirección que la velocidad del
  - tren. Al aplicar la ecuación galileana de la transformación de velocidad, la rapidez
  - de la pelota respecto a la Tierra es (a) 90 mi/h, (b) 110 mi/h, (c) 20 mi/h, (d) 200
  - mi/h, o (e) imposible de determinar.

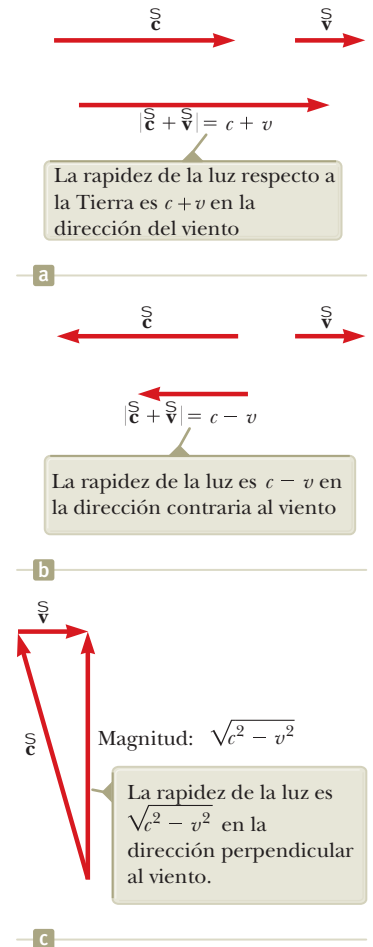
## La rapidez de la luz

Es natural preguntar si el principio de la relatividad galileana también se aplica a la electricidad, el magnetismo y la óptica. Experimentos realizados indican que la respuesta es negativa. Recuerde del capítulo 33 que Maxwell demostró que la rapidez de la luz en el espacio libre es  $c = 3.00 \times 10^8$  m/s. Los físicos de fines del siglo XIX pensaban que las ondas de luz se movían en un medio llamado *éter* y que la rapidez de la luz era  $c$  sólo en un marco absoluto, especial y en reposo respecto al éter. Se esperaba que se cumpliera la ecuación de transformación de velocidad galileana para observaciones de luz hechas en cualquier marco que se moviera a una rapidez  $v$  respecto al marco absoluto de éter.

Ya que la existencia de un marco preferente absoluto del éter mostraría la semejanza de la luz en relación con otras ondas clásicas y que las ideas de Newton de un marco absoluto eran verdaderas, se consideró importante establecer la existencia del marco de éter. Antes de fines del siglo XIX, en experimentos de desplazamiento de la luz, en los medios que permitían las más altas magnitudes de velocidades de laboratorio realizables en aquel tiempo, no fue posible detectar diferencias de magnitud entre  $c$  y  $c \pm v$ . A inicios de 1880, algunos científicos decidieron usar la Tierra como el marco en movimiento en un intento de mejorar sus oportunidades de detectar estos pequeños cambios en la rapidez de la luz.

Los observadores fijos en la Tierra, pueden considerar la perspectiva de que están inmóviles y que el marco absoluto del éter que contiene el medio para propagación de la luz se mueve más allá de los observadores a una rapidez  $v$ . En la ecuación 38.2, la entidad observada que se está moviendo es liviana, así que sea  $\vec{u}' = \vec{c}$ , donde el marco real está unido al éter. Entonces la velocidad de la luz medida por un observador en la Tierra, el marco falso o erróneo, es  $\vec{u}_x = \vec{c} + \vec{v}$ , donde  $\vec{v}$  es la velocidad del éter con respecto a la Tierra. Determinar la rapidez de la luz bajo estas circunstancias es similar a determinar la rapidez de un avión que vuela en una corriente de aire en movimiento o viento; en consecuencia, se trata de un “viento de éter” que sopla a través del aparato fijo a la Tierra.

Un método directo para detectar un viento de éter usaría un aparato fijo a la Tierra para medir la influencia del viento de éter sobre la rapidez de la luz. Si  $v$  es la rapidez de éter respecto a la Tierra, la luz debe tener su máxima rapidez  $c + v$  cuando se propague en la dirección del viento, como se ve en la figura 38.3a. Del mismo modo, la rapidez de la luz debe tener su valor mínimo  $c - v$  cuando la luz se propague contra el viento, como en la figura 38.3b, y un valor intermedio  $(c^2 - v^2)^{1/2}$  en la dirección perpendicular al viento de éter, como se ve en la figura 38.3c. En este último caso, el vector  $\vec{c}$  debe ser dirigido aguas arriba de manera que la velocidad resultante es perpendicular al viento, como el barco en la figura 4.22b. Si se supone que el Sol está en reposo en el éter, la velocidad del viento de éter será igual a la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol, que tiene una magnitud de aproximadamente 30 km/s o  $3 \times 10^4$  m/s. Como  $c = 3 \times 10^8$  m/s, es necesario detectar un cambio en la rapidez de alrededor una parte en  $10^4$  para mediciones en las direcciones contra el viento y a favor del viento. No obstante, mientras que este cambio es mensurable experimentalmente, todos los intentos por detectar estos cambios y establecer la existencia del viento de éter (y por esto el marco absoluto) ¡resultaron inútiles! En la sección 38.2 se explica la investigación clásica experimental.



**Figura 38.3** Si la velocidad del viento de éter respecto a la Tierra es  $\vec{v}$ , y la velocidad de la luz respecto al éter es  $\vec{c}$ , la rapidez de la luz relativa a la Tierra depende de la dirección de la velocidad de Tierra.



El principio de la relatividad galileana se refiere sólo a las leyes de la mecánica. Si se supone que las leyes de la electricidad y el magnetismo son las mismas en todos los marcos inerciales, surge una paradoja acerca de la rapidez de la luz. Es posible entender esto al reconocer que las ecuaciones de Maxwell parecen implicar que la rapidez de la luz siempre tiene el valor fijo de  $3.00 \times 10^8$  m/s en todos los marcos inerciales, un resultado que está en contradicción directa a lo que se espera en términos de la ecuación galileana de transformación de la velocidad. Según la relatividad galileana, la rapidez de la luz *no debe* ser la misma en todos los marcos inerciales.

Para resolver esta contradicción de las teorías, debe concluir que (1) las leyes de la electricidad y el magnetismo no son las mismas en todos los marcos inerciales o (2) la ecuación galileana de transformación de la velocidad es incorrecta. Si supone lo primero, debe existir un marco de referencia preferencial en el que la rapidez de la luz tenga el valor  $c$  y la rapidez medida sea mayor o menor que este valor en cualquier marco de referencia, según la ecuación galileana de transformación de la velocidad. Si supone lo segundo, está forzado a abandonar las nociones de tiempo absoluto y longitud absoluta que forman la base de las ecuaciones galileanas de transformación del espacio-tiempo.

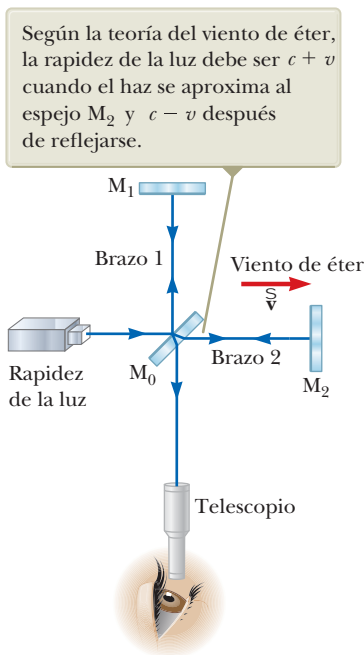
## 38.2 Experimento de Michelson-Morley

El experimento más famoso diseñado para detectar pequeños cambios en la rapidez de la luz fue realizado primero en 1881 por Albert A. Michelson (véase la sección 36.6) y después repetido en diversas condiciones por Michelson y Edward W. Morley (1838-1923). Al inicio se expresó que el resultado del experimento contradujo la hipótesis del éter.

El experimento fue diseñado para determinar la velocidad de la Tierra respecto a la del hipotético éter. La herramienta experimental empleada fue el interferómetro de Michelson, que se estudió en la sección 36.6 y se muestra otra vez en la figura 38.4. El brazo 2 está alineado a lo largo de la dirección del movimiento de la Tierra en el espacio. La Tierra, que se mueve por el éter a una rapidez  $v$ , es equivalente al éter que circula junto a ella en dirección opuesta con rapidez  $v$ . Este viento de éter que sopla en la dirección opuesta a la del movimiento de la Tierra debe hacer que la rapidez de la luz, medida en el marco de la Tierra, sea  $c - v$  cuando la luz se aproxima al espejo  $M_2$  y  $c + v$  después de reflejarse, donde  $c$  es la rapidez de la luz en el marco de éter.

Los dos haces luminosos se reflejan en  $M_1$  y  $M_2$  y se recombinan y se forma un patrón de interferencia, como se explicó en la sección 36.6. El patrón de interferencia se observa mientras el interferómetro se hace girar un ángulo de  $90^\circ$ . Esta rotación intercambia la rapidez del viento de éter entre los brazos del interferómetro. La rotación debe hacer que el patrón de franjas se desplace en forma ligera pero mensurable. Sin embargo, ¡las mediciones no mostraron ningún cambio en el patrón de interferencia! El experimento de Michelson-Morley se repitió en tiempos diferentes del año cuando se esperaba que el viento de éter cambiara de dirección y magnitud, pero los resultados siempre fueron los mismos: *jamás* se observó desplazamiento alguno de franja de la magnitud requerida.<sup>1</sup>

Los resultados negativos del experimento de Michelson-Morley no sólo contradijeron la hipótesis del éter sino que también demostraron que era imposible medir la velocidad absoluta de la Tierra respecto al marco de éter. No obstante, Einstein ofreció un postulado para esta teoría especial de la relatividad que indica una interpretación diferente sobre estos resultados nulos. En años posteriores, cuando se supo más acerca de la naturaleza de la luz, se abandonó la idea del éter que permea todo. Ahora se entiende que la luz es una onda electromagnética que no requiere ningún medio para propagarse. En consecuencia, fue innecesaria la idea de un éter en el cual viajan estas ondas.



**Figura 38.4** En un intento por detectar el viento de éter, se utiliza un interferómetro de Michelson.

<sup>1</sup>Desde el punto de vista de un observador en la Tierra, los cambios en la rapidez y dirección de movimiento de la Tierra en el curso de un año son vistos como desplazamientos en el viento de éter. Incluso si la rapidez de la Tierra respecto a éter fuera cero en algún tiempo, seis meses después la rapidez de la Tierra sería 60 km/s respecto al éter y, por tanto, debería observarse un desplazamiento en las franjas. De cualquier modo, jamás se ha observado desplazamiento alguno.



Se hicieron muchos esfuerzos para explicar los resultados nulos del experimento de Michelson-Morley y para guardar el concepto de marco de éter y la ecuación de transformación de velocidad de Galileo para la luz. Se ha demostrado que todas las propuestas resultantes de estos esfuerzos son incorrectas. Ningún experimento en la historia de la física recibió esfuerzos tan valientes para explicar la ausencia de un resultado esperado como lo hizo el experimento de Michelson Morley. El escenario estaba listo para Einstein, quien resolvió el problema en 1905 con su teoría especial de la relatividad.

### Detalles del experimento de Michelson-Morley

Para comprender la consecuencia del experimento de Michelson-Morley, suponga que los dos brazos del interferómetro de la figura 38.4 son de igual longitud  $L$ . Analice la situación como si hubiera viento de éter, porque eso era lo que Michelson y Morley esperaban hallar. Como ya observó anteriormente, la rapidez del haz luminoso a lo largo del brazo 2 debería ser  $c + v$  cuando el haz se aproxima a  $M_2$  y  $c - v$  después de que el haz se refleje. Un pulso de luz se modela como una partícula a velocidad constante, por tanto, el intervalo para el desplazamiento a la derecha por el pulso es  $\Delta t = L/(c + v)$ , y el intervalo de tiempo para viajar a la izquierda es  $\Delta t L/(c - v)$ . El intervalo total de tiempo para un viaje ida y vuelta a lo largo del brazo 2 es

$$\Delta t_{\text{brazo 2}} = \frac{L}{c + v} + \frac{L}{c - v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$

Ahora considere el haz de luz que viajando a lo largo del brazo 1, perpendicular al viento de éter. Puesto que la rapidez del haz respecto a la Tierra es  $(c^2 - v^2)^{1/2}$  en este caso (véase la figura 38.3c), el intervalo de tiempo para moverse para cada una de las mitades del viaje es  $\Delta t = L/(c^2 - v^2)^{1/2}$ , y el intervalo total para el viaje redondo es

$$\Delta t_{\text{brazo 1}} = \frac{2L}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

La diferencia de tiempo  $\Delta t$  entre el viaje redondo horizontal (brazo 2) y el viaje redondo vertical (brazo 1) es

$$\Delta t = \Delta t_{\text{brazo 2}} - \Delta t_{\text{brazo 1}} = \frac{2L}{c} \left[ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right]$$

Ya que  $v^2/c^2 \ll 1$ , simplifique esta expresión con la siguiente expansión binomial después de cancelar todos los términos de orden superior al segundo:

$$(1 - x)^n \approx 1 - nx \quad (\text{para } x \ll 1)$$

En este caso,  $x = v^2/c^2$ , y se obtiene

$$\Delta t = \Delta t_{\text{brazo 2}} - \Delta t_{\text{brazo 1}} \approx \frac{Lv^2}{c^3} \quad (38.3)$$

Esta diferencia de tiempo entre los dos instantes en que los haces reflejados llegan al telescopio de observación dan lugar a una diferencia de fase entre los haces, produciendo un patrón de interferencia cuando se combinan en la posición del telescopio. Deberá detectar un desplazamiento en el patrón de interferencia cuando el interferómetro se haga girar  $90^\circ$  en un plano horizontal, de modo que los dos haces intercambian sus papeles. Esta rotación resulta en una diferencia de tiempo doble de la que proporcionó la ecuación 38.3. Por eso, la diferencia de trayectoria que corresponde a esta diferencia de tiempo es

$$\Delta d = c(2\Delta t) = \frac{2Lv^2}{c^2}$$

Debido a que un cambio en la longitud de trayectoria de una longitud de onda corresponde al desplazamiento de una franja, el correspondiente desplazamiento de franja es igual a esta diferencia de trayectoria dividida entre la longitud de onda de la luz:

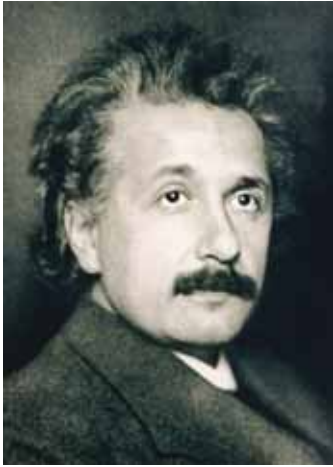
$$\text{Desplazamiento} = \frac{2Lv^2}{\lambda c^2} \quad (38.4)$$



En los experimentos realizados por Michelson y Morley, cada uno de los haces luminosos se reflejaba muchas veces mediante espejos para obtener una longitud de trayectoria efectiva  $L$  de aproximadamente 11 m. Con el uso de este valor y tomando  $v$  igual a  $3.0 \times 10^4$  m/s (la rapidez de la Tierra alrededor del Sol) y utilizando 500 nm para la longitud de onda de la luz, se espera un desplazamiento de franja

$$\text{Desplazamiento} = \frac{2(11 \text{ m})(3.0 \times 10^4 \text{ m/s})^2}{(5.0 \times 10^{-7} \text{ m})(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 0.44$$

El instrumento empleado por Michelson y Morley podía detectar desplazamientos de franja de sólo 0.01. No obstante, **¡no detectó desplazamiento alguno en el patrón de franjas!** Desde ese tiempo el experimento ha sido repetido numerosas veces por varios científicos bajo diferentes condiciones, y jamás se ha detectado desplazamiento alguno de franja. Por tanto, se concluyó que el movimiento de la Tierra respecto al postulado del éter no se puede detectar.



Mary Evans Picture Library/Getty

### Albert Einstein

Físico alemán-estadounidense (1879-1955)

Einstein, uno de los físicos más grandes de todos los tiempos, nació en Ulm, Alemania. En 1905, a los 26 años de edad, publicó cuatro ensayos científicos que revolucionaron la física. Dos de estos ensayos se referían a lo que ahora se considera su aportación más importante: la teoría especial de la relatividad.

En 1916, Einstein publicó su obra sobre la teoría general de la relatividad en el *Annalen der Physik*. El pronóstico más impresionante de esta teoría es el grado en el cual la luz es desviada por un campo gravitacional. En 1919 diversos astrónomos realizaron mediciones sobre estrellas brillantes cerca del Sol eclipsado que confirmaron la predicción de Einstein y como resultado el científico alemán se convirtió en celebridad mundial. Einstein estaba profundamente preocupado por el perfeccionamiento de la mecánica cuántica en la década de los veinte, a pesar de su propio papel como científico revolucionario. En particular, nunca aceptó la sucesión probabilística de eventos en la naturaleza, característica esencial de la teoría cuántica. Dedicó las últimas décadas de su vida a una infructuosa búsqueda de una teoría unificada que pudiera combinar la gravitación y el electromagnetismo.

## 38.3 Principio de la relatividad de Einstein

En la sección previa se observa la imposibilidad de medir la rapidez del éter respecto a la Tierra y el fracaso de la ecuación galileana de transformación de la velocidad en el caso de la luz. Einstein propuso una teoría que de manera audaz eliminó estas dificultades y al mismo tiempo alteró por completo la noción de espacio y tiempo.<sup>2</sup> Él basó su teoría especial de la relatividad en dos postulados:

1. **El principio de la relatividad:** las leyes físicas deben ser las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.
2. **La invariabilidad de la rapidez de la luz:** la rapidez de la luz en el vacío tiene el mismo valor,  $c = 3.00 \times 10^8$  m/s, en todos los marcos inerciales, cualquiera que sea la velocidad del observador o la velocidad de la fuente que emita la luz.

El primer postulado afirma que *todas* las leyes de física —las que se refieran a mecánica, electricidad y magnetismo, óptica, termodinámica, etcétera—, son las mismas en todos los marcos de referencia que se muevan con velocidad constante unos respecto a otros. Este postulado es una generalización radical del principio de la relatividad galileana, que se refiere sólo a las leyes de la mecánica. Desde un punto de vista experimental, el principio de la relatividad de Einstein significa que cualquier clase de experimento (medir la rapidez de la luz, por ejemplo) realizado en un laboratorio en reposo debe dar el mismo resultado cuando se realice en un laboratorio que se mueva con una velocidad constante respecto al primero. Por esto, no existe un marco de referencia inercial que sea preferenciado y es imposible detectar movimiento absoluto.

Observe que el postulado 2 es requerido por el postulado 1: si la rapidez de la luz no fuera igual en todos los marcos inerciales, las mediciones de diferentes magnitudes de rapidez harían imposible distinguir entre marcos inerciales; en consecuencia, podría ser identificado un marco absoluto, preferenciado, en contradicción con el postulado 1.

Aun cuando el experimento de Michelson-Morley fue realizado antes de que Einstein publicara su obra sobre la relatividad, no se sabe si Einstein conocía los detalles del experimento. No obstante, el resultado nulo del experimento se puede entender fácilmente dentro de la estructura de la teoría de Einstein. Según su principio de la relatividad, las premisas del experimento de Michelson-Morley eran incorrectas. Cuando se intentó explicar los resultados del experimento se dijo que cuando la luz se desplazaba contra el viento de éter su rapidez era  $c + v$ , de acuerdo con la ecuación galileana de transformación de la velocidad. Sin embargo, si el estado de movimiento del observa-

<sup>2</sup> A. Einstein, "On the Electrodynamics of Moving Bodies," *Ann. Physik* 17:891, 1905. Para una traducción al inglés de este artículo y otras publicaciones de Einstein, vea el libro de H. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski y H. Weyl, *The Principle of Relativity*, (New York: Dover, 1958).

donde  $v$  es la velocidad de la fuente no tiene influencia en el valor encontrado para la rapidez de la luz, uno siempre mide el valor como  $c$ . Del mismo modo, la luz hace el viaje de regreso después de reflejarse desde un espejo a una rapidez  $c$ , no a  $c - v$ . En consecuencia, el movimiento de la Tierra no tiene influencia sobre el patrón de franjas observado en el experimento de Michelson-Morley y debería esperarse un resultado nulo.

Si se acepta la teoría de la relatividad de Einstein, se debe concluir que el movimiento relativo es irrelevante cuando se mide la rapidez de la luz. Al mismo tiempo, es necesario alterar la noción de sentido común del espacio y tiempo y estar preparado para algunas consecuencias sorprendentes. Usted podrá encontrar de utilidad leer las páginas siguientes, para tener en mente que las ideas de sentido común están en función de toda una vida de experiencias diarias y no en observaciones de cuerpos que se mueven a cientos de miles de kilómetros por segundo. Por tanto, estos resultados parecerán extraños, pero eso es solo porque no se tiene experiencia alguna con ellos.

## 38.4 Consecuencias de la teoría especial de la relatividad

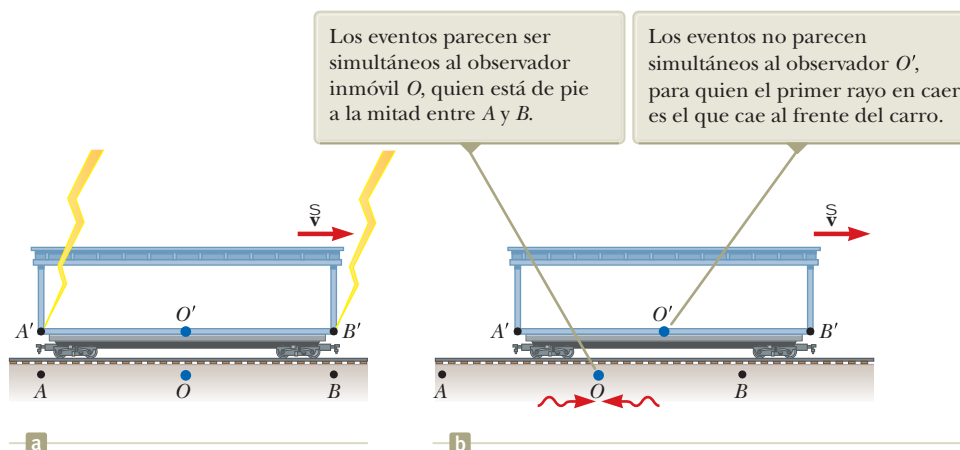
Cuando examine algunas de las consecuencias de la relatividad en esta sección, la explicación se restringirá a los conceptos de simultaneidad, intervalos de tiempo y longitudes, los cuales son diferentes en la mecánica relativista respecto a lo que son en la mecánica de Newton.

### Simultaneidad y relatividad de tiempo

Una premisa básica de la mecánica de Newton es que existe una escala universal de tiempo que es la misma para todos los observadores. Newton y sus seguidores simplemente dieron por sentada la simultaneidad. En su teoría especial de la relatividad Einstein abandonó esta suposición.

Einstein ideó el siguiente experimento mental para ilustrar este punto: un furgón de ferrocarril se mueve con velocidad uniforme y dos rayos inciden en sus extremos, como se ilustra en la figura 38.5a, dejando marcas en el furgón y en el suelo. Las marcas en el furgón están señaladas como  $A'$  y  $B'$ , y las del suelo están como  $A$  y  $B$ . Un observador  $O'$  que se mueve con el furgón está a la mitad entre  $A'$  y  $B'$ , y un observador  $O$  en el suelo está entre  $A$  y  $B$ . Los eventos registrados por los observadores son la descarga de dos rayos en el furgón.

Las señales luminosas emitidas de  $A$  y  $B$  en el instante en que los dos rayos caen llegan al observador  $O$  al mismo tiempo, como se indica en la figura 38.5b. Este observador se da cuenta de que las señales se han movido con la misma rapidez en distancias iguales, por lo que, deduce que los eventos  $A$  y  $B$  se presentaron simultáneamente. Ahora considere los mismos eventos vistos por el observador  $O'$ . Para el tiempo en el que las señales han llegado al observador  $O$ , el observador  $O'$  se ha movido como se indica en la figura 38.5b. Por tanto, la señal desde  $B$  ya ha pasado junto a  $O$ , pero la señal desde  $A'$  aún no ha llegado a  $O'$ . En otras palabras,  $O'$  ve la señal desde  $B$  antes de ver la señal de  $A'$ .



**Figura 38.5** (a) Dos rayos caen en los extremos de un furgón en movimiento. (b) la señal de luz que se mueve a la izquierda ya ha pasado a  $O'$  pero la señal que se mueve a la derecha todavía no ha llegado a  $O'$ .

**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 38.2**

**¿Quién está en lo correcto?** Usted podría preguntarse cuál de los observadores de la figura 38.5 está en lo correcto respecto a los dos rayos. *Ambos son correctos*, porque el principio de relatividad expresa que *no hay marco de referencia inercial preferencial*. Aun cuando los dos observadores llegan a diferentes conclusiones, ambos tienen razón en su propio marco de referencia porque el concepto de simultaneidad no es absoluto. Este es, en efecto, el punto central de la relatividad: se puede usar cualquier marco de referencia en movimiento uniforme para describir eventos y hacer física.

De acuerdo con Einstein, *los dos observadores pudieron ver que la luz viajó con la misma rapidez*. En consecuencia, el observador  $O'$  concluye que el rayo cae frente al furgón *antes* de caer en el otro extremo.

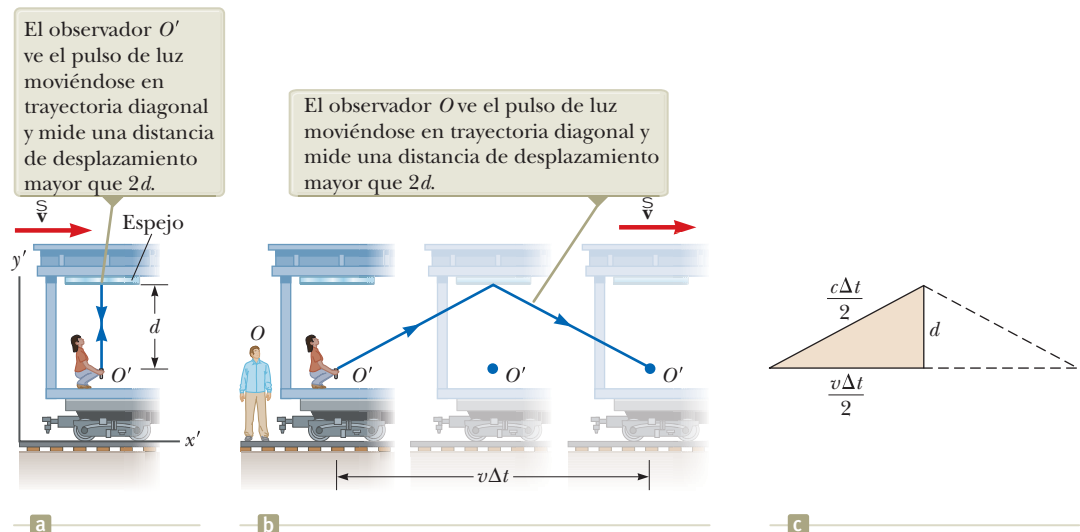
Este experimento mental demuestra claramente que los dos eventos que parecen ser simultáneos al observador  $O$  *no* parecen ser simultáneos al observador  $O'$ . Simultaneidad no es un concepto absoluto sino más bien uno que depende del estado de movimiento del observador. El experimento mental de Einstein demuestra que dos observadores pueden no estar de acuerdo sobre la simultaneidad de dos eventos. Este desacuerdo, sin embargo, depende del tiempo de tránsito de la luz a los observadores y, por tanto, *no* demuestra el significado más profundo de la relatividad. En análisis relativistas de situaciones de alta velocidad, se muestra que la simultaneidad es relativa incluso cuando el tiempo de tránsito se resta. De hecho, todos los efectos relativistas que se estudian aquí supondrán que se soslayan diferencias causadas por el tiempo de tránsito de la luz a los observadores.

**Dilatación del tiempo**

Es posible ilustrar el hecho de que observadores situados en diferentes marcos inerciales pueden medir distintos intervalos entre un par de eventos si considera un vehículo que se mueve a la derecha con rapidez  $v$ , como el furgón que se ilustra en la figura 38.6a. Un espejo está fijo en el techo del vehículo, y el observador  $O'$  en reposo en el marco que está unido al vehículo sostiene una linterna a una distancia  $d$  bajo el espejo. En algún instante, la linterna emite un pulso de luz directamente hacia el espejo (evento 1), y tiempo después, una vez que se ha reflejado desde el espejo, el pulso regresa a la linterna (evento 2). El observador  $O'$  lleva un reloj y lo emplea para medir el intervalo  $\Delta t_p$  entre estos dos eventos. (El subíndice  $p$  es por *propio*, como verá en un momento.) El pulso de luz se modela como una partícula bajo rapidez constante ya que el pulso de luz tiene una rapidez  $c$ , el intervalo necesario para que el pulso recorra de  $O'$  al espejo y regrese es

$$\Delta t_p = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{velocidad de la luz}} = \frac{2d}{c} \tag{38.5}$$

Ahora considere el mismo par de eventos vistos por el observador  $O$  en un segundo marco, como se muestra en la figura 38.6b. De acuerdo con este observador, el espejo y la linterna se mueven a la derecha con rapidez  $v$ , y como resultado de esto la secuencia de eventos parece enteramente diferente. Para el tiempo en que la luz de la lin-



**Figura 38.6** (a) Un espejo está fijo a un vehículo en movimiento y la observadora  $O$  en reposo en el vehículo envía un pulso de luz. (b) Respecto a un observador inmóvil  $O$  de pie al lado del vehículo, el espejo y  $O'$  se mueven con rapidez  $v$ . (c) Triángulo rectángulo para calcular la relación entre  $\Delta t$  y  $\Delta t_p$ .

terna llega al espejo, éste se ha movido a la derecha una distancia  $v\Delta t/2$ , donde  $\Delta t$  es el intervalo necesario para que la luz viaje de  $O'$  al espejo y regrese a  $O'$ , observado por  $O$ . En otras palabras,  $O$  concluye que, debido al movimiento del vehículo, si la luz ha de incidir en el espejo, debe salir de la linterna a un ángulo respecto a la dirección vertical. Al comparar la figura 38.6a y con la 38.6b, la luz debe avanzar más en (b) que en (a). (Note que ningún observador “sabe” que está en movimiento. Cada uno está en reposo en su propio marco inercial.)

De acuerdo con el segundo postulado de la teoría especial de la relatividad, ambos observadores deben medir  $c$  como la rapidez de la luz. Ya que la luz se desplaza más según  $O$ , se deduce que el intervalo  $\Delta t$  medido por  $O$  es más largo que el intervalo  $\Delta t_p$  medido por  $O'$ . Para obtener una relación entre estos dos intervalos de tiempo, es conveniente usar el triángulo rectángulo que se muestra en la figura 38.6c. El teorema de Pitágoras da

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2$$

Al resolver para  $\Delta t$  resulta

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{38.6}$$

Ya que  $\Delta t_p = 2d/c$ , este resultado se expresa

$$\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_p \tag{38.7}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{38.8}$$

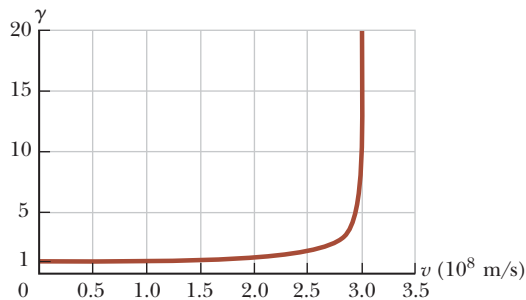
Ya que  $\gamma$  siempre es mayor que 1, la ecuación 38.7 muestra que el intervalo  $\Delta t$  medido por un observador que se mueve respecto a un reloj es más largo que el intervalo  $\Delta t_p$  medido por un observador en reposo respecto al mismo reloj. Este efecto se conoce como **dilatación del tiempo**.

La dilatación del tiempo no se observa en la práctica, y puede ser entendida al considerar el factor  $\gamma$ . Este factor se desvía considerablemente desde un valor de 1 sólo para magnitudes de velocidad muy altas, como se ve en la figura 38.7 y en la tabla 38.1. Todos nosotros, incluidos los astronautas, hemos pasado nuestras vidas entre las dos primeras entradas en la tabla 38.1 y en un punto en el eje horizontal del gráfico en la figura 38.7, es decir, basado en la escala de la figura, dentro del grosor de la línea utilizada para representar el eje vertical. Para una velocidad de  $0.1c$ , que es mucho más alta que cualquier velocidad que los humanos hayan experimentado, el

**TABLA 38.1** Valores aproximados para  $\gamma$  a diferentes magnitudes de velocidad

$v/c$	$\gamma$
0	1
0.001 0	1.000 000 5
0.010	1.000 05
0.10	1.005
0.20	1.021
0.30	1.048
0.40	1.091
0.50	1.155
0.60	1.250
0.70	1.400
0.80	1.667
0.90	2.294
0.92	2.552
0.94	2.931
0.96	3.571
0.98	5.025
0.99	7.089
0.995	10.01
0.999	22.37

◀ Dilatación del tiempo



**Figura 38.7** Gráfica de  $\gamma$  en función de  $v$ . Cuando la rapidez se aproxima a la de la luz,  $\gamma$  aumenta rápidamente.





### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 38.3

**El intervalo de tiempo característico** Es muy importante en cálculos relativistas identificar correctamente al observador que está midiendo el intervalo de tiempo característico. Dicho intervalo entre dos eventos es siempre el intervalo de tiempo medido por un observador para quien los dos eventos tienen lugar en la misma posición.

valor de  $\gamma$  es 1.005. Por tanto, hay una dilatación temporal de solo 0.5% a una décima parte de la velocidad de la luz.

El intervalo de tiempo  $\Delta t_p$  en las ecuaciones 38.5 y 38.7 se denomina **intervalo de tiempo característico**. (En alemán, Einstein usó el término *Eigenzeit*, que significa “nuestro tiempo”.) En general, el intervalo de tiempo característico es el intervalo entre dos eventos medidos por un observador *que ve que los eventos se presentan en el mismo punto en el espacio*.

Si un reloj es móvil respecto al lector, el intervalo de tiempo entre el tic-tac del reloj móvil se observa más largo que el intervalo de tiempo entre el tic-tac de un reloj idéntico en el marco de referencia de usted. Así, a veces se dice que un reloj en movimiento funciona más lentamente que otro en el marco de referencia de usted, en un factor  $\gamma$ . Es posible generalizar este resultado al decir que todos los procesos físicos, incluso los mecánicos, químicos y biológicos, reducen su velocidad cuando esos procesos se presentan en un marco que se mueve respecto al observador. Por ejemplo, el ritmo cardíaco de un astronauta que se mueve en el espacio marcará el tiempo con un reloj dentro de la nave. Tanto el reloj como el ritmo cardíaco del astronauta se medirán con una velocidad reducida, según un observador en la Tierra que compara intervalos con su propio reloj (aun cuando el astronauta no tendrá la sensación de que su vida disminuya en velocidad dentro de la nave).

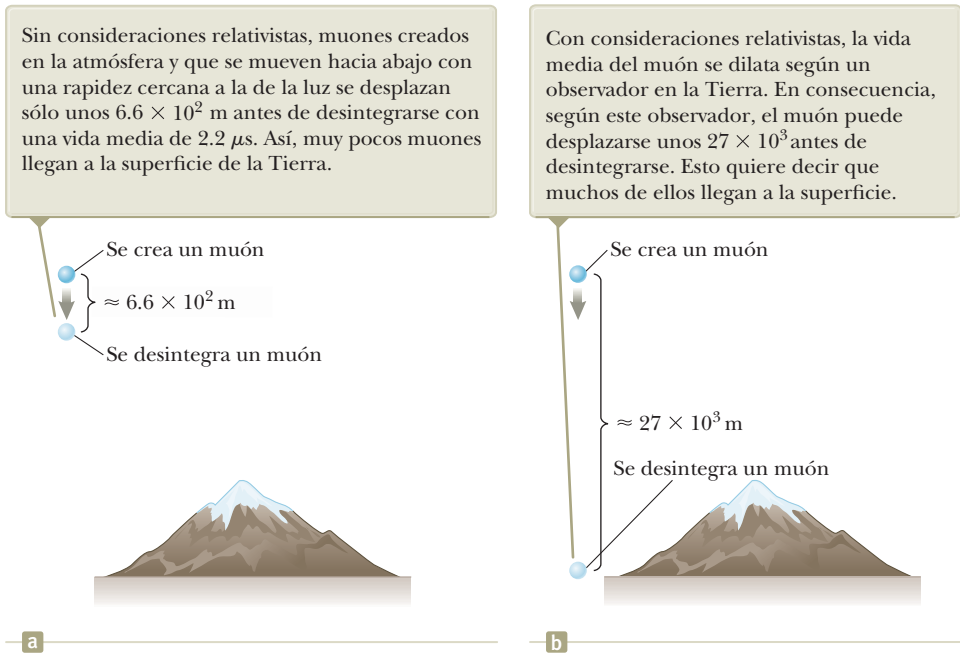
**E XAMEN RÁPIDO 38.3** Suponga que el observador  $O'$  del tren de la figura 38.6 dirige su linterna hacia la pared del otro extremo del furgón y la enciende y la apaga, enviando así un pulso de luz hacia la pared opuesta;  $O'$  y  $O$  miden el intervalo entre el momento de salida del pulso de la linterna y su llegada a la pared distante. ¿Cuál observador mide el intervalo de tiempo característico entre estos dos eventos? (a)  $O'$ , (b)  $O$ , (c) ambos observadores o (d) ninguno de ellos.

**E XAMEN RÁPIDO 38.4** Un tripulante ve una película de dos horas de duración en una nave espacial que se mueve con alta velocidad a través del espacio. Para un observador desde la Tierra, que también ve la película mediante un potente telescopio, la duración de la película, es de (a) más de dos horas, (b) menos de dos horas, o (c) igual a dos horas?

Un interesante ejemplo de la dilatación del tiempo comprende la observación de *muones*, partículas elementales inestables que tienen una carga igual a la del electrón y una masa 207 veces la del electrón. Se pueden producir muones por la colisión de radiación cósmica con átomos a grandes alturas en la atmósfera. Muones de lento movimiento en el laboratorio tienen una vida media que al medirse se encuentra que es el intervalo de tiempo característico  $\Delta t_p = 2.2 \mu\text{s}$ . Si  $2.2 \mu\text{s}$  es el promedio de la vida media de un muón y supone que su rapidez es cercana a la rapidez de la luz, encontrará que estas partículas pueden desplazarse una distancia de aproximadamente  $(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})(2.2 \times 10^{-6} \text{ s}) \approx 6.6 \times 10^2 \text{ m}$  antes de desintegrarse (figura 38.8a). En consecuencia, es improbable que lleguen a la superficie de la Tierra desde las grandes alturas de la atmósfera en donde se producen. No obstante, experimentos demuestran que un gran número de muones *sí* llega a la superficie. El fenómeno de la dilatación del tiempo explica este efecto. Según sean medidos por un observador en la Tierra, los muones tienen una vida media dilatada igual a  $\gamma\Delta t_p$ . Por ejemplo, para  $v = 0.9997c$ ,  $\gamma \approx 41$  y  $\gamma\Delta t_p \approx 90 \mu\text{s}$ . En consecuencia, la distancia promedio recorrida por los muones en este tiempo medido por un observador en la Tierra es alrededor de  $(0.9997)(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})(90 \times 10^{-6} \text{ s}) \approx 27 \times 10^3 \text{ m}$ , como se indica en la figura 38.8b.

En 1976, en el laboratorio del Consejo Europeo para la Investigación Nuclear (CERN), en Ginebra, se inyectaron muones en un enorme anillo de almacenamiento, alcanzando magnitudes de velocidad de aproximadamente  $0.9994c$ . Se detectaron electrones producidos por los muones en desintegración mediante contadores colocados alrededor del anillo, lo cual hizo posible que los científicos midieran la rapidez de desintegración y por tanto la vida media del muón. La vida media de los muones en movimiento se midió y se encontró que era aproximadamente 30 veces más que la de un muón inmóvil, de acuerdo con el pronóstico de la relatividad a no más de dos partes entre mil.





**Figura 38.8** Viajes de muones desde la perspectiva de un observador situado en la Tierra.

**Ejemplo 38.1** ¿Cuál es el periodo del péndulo?

El periodo de un péndulo se observa que es de 3.00 s, en el marco de referencia del péndulo. ¿Cuál es el periodo cuando lo mide un observador que se mueve con una rapidez de  $0.960c$  en relación con el péndulo?

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Cambie los marcos de referencia. En lugar del observador en movimiento a  $0.960c$ , puede tomar el punto de vista equivalente de que el observador está en reposo y el péndulo se mueve con  $0.960c$  más allá del observador inmóvil. Por tanto, el péndulo es un ejemplo de un reloj que se mueve con gran rapidez respecto a un observador. Debido a que el péndulo está en reposo en el marco de referencia del reloj que midió su periodo, el periodo de 3.00 es el intervalo de tiempo apropiado, y el observador que ve el péndulo moviéndose medirá un intervalo de tiempo dilatado.

**Categorizar** Respecto a la etapa Conceptualizar, este problema se clasifica como uno de sustitución que involucra dilatación del tiempo relativista.

El intervalo de tiempo característico, medido en el marco en reposo del péndulo, es  $\Delta t_p = 3.00 \text{ s}$ .

Use la ecuación 38.7 para encontrar el intervalo de tiempo dilatado:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0.960c)^2}{c^2}}} \Delta t_p = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.9216}} \Delta t_p$$

$$= 3.57(3.00 \text{ s}) = 10.7 \text{ s}$$

Este resultado muestra que un péndulo en movimiento que tarda más en completar un periodo que lo que tarda un péndulo en reposo. El periodo aumenta por un factor de  $\gamma = 3.57$ .

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si la rapidez del observador aumenta en 4.00%? ¿El intervalo de tiempo dilatado aumenta en 4.00%?

**Respuesta** En términos del comportamiento enormemente no lineal de  $\gamma$  como función de  $v$  en la figura 38.7, se supondría que el aumento en  $\Delta t$  sería diferente de 4.00%.

Encuentre la nueva rapidez si aumenta 4.00%:

$$v_{\text{nuevo}} = (1.040)(0.960c) = 0.9984c$$

Realice de nuevo el cálculo de dilatación del tiempo:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0.9984c)^2}{c^2}}} \Delta t_p = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.9968}} \Delta t_p$$

$$= 17.68(3.00 \text{ s}) = 53.1 \text{ s}$$

Por tanto, ¡el aumento de 4.00% en rapidez resulta en casi 400% de aumento en el tiempo dilatado!

## Ejemplo 38.2 ¿Cuánto duró su viaje?

Suponga que usted conduce su automóvil en un viaje de negocios y que viaja a 30 m/s. Su jefe, quien espera su llegada, considera que el viaje durará 5.0 h. Cuando usted llega tarde, su excusa es que el reloj de su automóvil registró el paso de 5.0 h, pero que usted conducía rápido así que su reloj corrió más lentamente que el reloj en la oficina de su jefe. Si el reloj de su automóvil en realidad indicaba un viaje de 5.0 h, ¿cuánto tiempo pasó en el reloj de su jefe, que estaba en reposo en la Tierra?

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El observador es su jefe que está de pie en reposo en la Tierra. El reloj está en su automóvil, que se mueve a 30 m/s respecto a su jefe.

**Categorizar** La baja rapidez de 30 m/s sugiere que este problema se puede clasificar como uno en el que se usan conceptos y ecuaciones clásicos. Sin embargo, de acuerdo con el enunciado del problema en el sentido de que el reloj que se mueve corre más lentamente que un reloj inmóvil, este problema se clasificó como uno que involucra dilatación del tiempo.

**Analizar** El intervalo de tiempo característico, medido en el marco en reposo del automóvil, es  $\Delta t_p = 5.0$  h.

Use la ecuación 38.8 para evaluar  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(3.0 \times 10^1 \text{ m/s})^2}{(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 10^{-14}}}$$

Si usted intenta determinar este valor en su calculadora, probablemente obtendrá  $\gamma = 1$ . En vez de ello, realiza una expansión binomial:

$$\gamma = (1 - 10^{-14})^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(10^{-14}) = 1 + 5.0 \times 10^{-15}$$

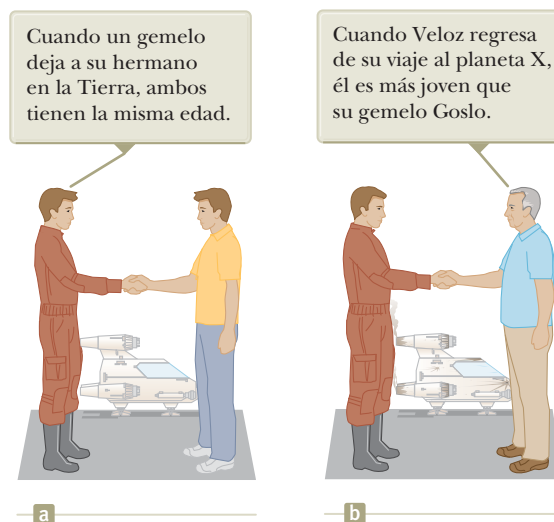
Use la ecuación 38.7 para encontrar el intervalo de tiempo dilatado medido por su jefe:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \gamma \Delta t_p = (1 + 5.0 \times 10^{-15})(5.0 \text{ h}) \\ &= 5.0 \text{ h} + 2.5 \times 10^{-14} \text{ h} = 5.0 \text{ h} + 0.090 \text{ ns} \end{aligned}$$

**Finalizar** El reloj de su jefe sólo estaría adelantado 0.090 ns en relación con el reloj de su automóvil. ¡Tal vez quiera pensar en otra excusa!

## La paradoja de los gemelos

Una consecuencia misteriosa de la dilatación del tiempo es la llamada *paradoja de los gemelos* (figura 38.9). Considere un experimento en donde intervienen los gemelos llamados Veloz y Goslo. Cuando tienen 20 años de edad, Veloz, el más aventurero de los dos, parte en un épico viaje al planeta X, que se encuentra a 20 años luz de la Tierra. Un año luz es la distancia que la luz recorre en el espacio libre en un año. Además, la nave de Veloz es capaz de alcanzar una rapidez de  $0.95c$  respecto al marco inercial de su hermano gemelo en casa en la Tierra. Después de llegar al planeta X,



**Figura 38.9** La paradoja de los gemelos. Veloz viaja a una estrella que está a 20 años luz de distancia y regresa a la Tierra.

Veloz se enferma y de inmediato regresa a la Tierra con la misma rapidez de  $0.95c$ . A su regreso, Veloz se sorprende al descubrir que Goslo ha envejecido 42 años y ahora tiene 62 años. Veloz, por su parte, solo ha envejecido 13 años.

La paradoja *no* es que los gemelos tengan edades diferentes. La paradoja es que desde el marco de referencia de Goslo, él estaba en reposo mientras que su hermano viajaba a alta velocidad alejándose de él y luego regresa. Sin embargo, según Veloz, él permaneció inmóvil mientras que Goslo y la Tierra se alejaban de él y luego regresaban. Por tanto, se podría esperar que Veloz reclame que Goslo envejeció más lentamente que él mismo. Esta situación parece simétrica desde dos puntos de vista. ¿Cuál gemelo *realmente* envejeció más lentamente?

La situación en este problema realmente no es simétrica. Considere un tercer observador móvil con una rapidez constante en relación con Goslo. De acuerdo con el tercer observador Goslo jamás cambia de marco inercial. La rapidez de Goslo en relación con el tercer observador siempre es la misma. No obstante, el tercer observador nota, que Veloz acelera durante su viaje cuando disminuye su velocidad e inicia su regreso a la Tierra, *cambiando marcos de referencia en el proceso*. A partir de la perspectiva del tercer observador, existe algo muy diferente acerca del movimiento de Goslo en comparación con Veloz. Por tanto no existe paradoja; únicamente Goslo, quien siempre está en un marco inercial simple, puede hacer predicciones correctas en términos de relatividad espacial. Goslo encontró que en lugar de envejecer 42 años, Veloz envejeció únicamente  $(1 - v^2/c^2)^{1/2}(42 \text{ años}) = 13 \text{ años}$ . De estos 13 años, Veloz gastó 6.5 años viajando al planeta X y 6.5 años de regreso.

Entonces, en el imagine de apertura, ¿a quién le debería haber marcado la tarjeta de tiempo si es el gemelo que viaja? Definitivamente debería dejar la tarjeta de tiempo en casa y que tu jefe cheque. ¡Más tiempo pasará en la Tierra que para usted, y terminará siendo mucho más rico! Habrá acumulado 42 años de paga, pero solo ha envejecido por 13 años, ¡así que le quedan muchos años para gastar su tesoro!

## Contracción de longitud

La distancia medida entre dos puntos en el espacio también depende del marco de referencia del observador. **La longitud característica  $L_p$**  de un objeto es la longitud medida por alguien *en reposo respecto al objeto*. La longitud de un objeto medida por alguien en un marco de referencia que se mueve respecto al objeto siempre es menor que la longitud característica. Este efecto se conoce como **contracción de longitud**.

Para comprender la contracción de longitud considere una nave espacial que vuela con una rapidez  $v$  de una estrella a otra. Hay dos observadores: uno en la Tierra y el otro en la nave. El observador en reposo en la Tierra (que también se supone en reposo respecto a las dos estrellas) mide que la distancia entre las estrellas es la longitud característica  $L_p$ . Según este observador, el intervalo de tiempo necesario para que la nave complete el viaje es  $\Delta t = L_p/v$ . La travesía de la nave por las dos estrellas se presentó en la misma posición para el viajero espacial. Por tanto, éste mide el intervalo de tiempo característico  $\Delta t_p$ . Debido a la dilatación del tiempo, el intervalo de tiempo característico está relacionado con el intervalo de tiempo medido en la Tierra por medio de  $\Delta t_p = \Delta t/\gamma$ . Como el viajero espacial llega a la segunda estrella en el tiempo  $\Delta t_p$ , concluye que la distancia  $L$  entre las estrellas es

$$L = v \Delta t_p = v \frac{\Delta t}{\gamma}$$

Como la longitud característica es  $L_p = v \Delta t$ , se ve que

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = L_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

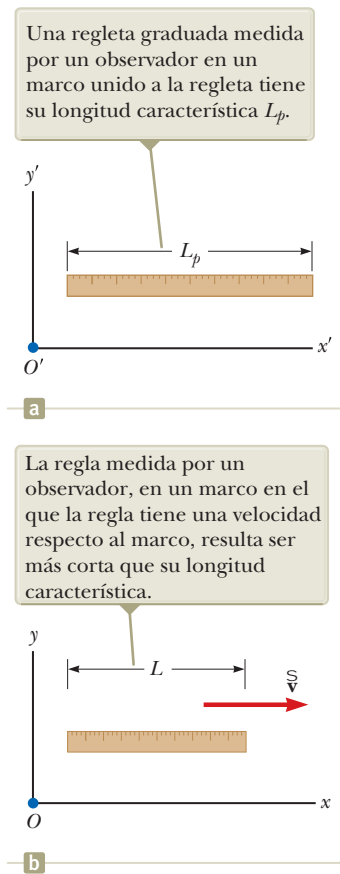
(38.9) ◀ Contracción de longitud

donde  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  es un factor menor a la unidad. Si un objeto tiene una longitud característica  $L_p$  cuando es medido por un observador en reposo respecto al objeto, su longitud  $L$  cuando se mueve con rapidez  $v$  en una dirección paralela a su longitud, es más corta según la ecuación 38.9.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 38.4

**La longitud propia** Al igual que con el intervalo de tiempo característico, es *muy* importante en cálculos relativistas identificar correctamente al observador que mide la longitud característica. La longitud característica entre dos puntos en el espacio es siempre la longitud medida por un observador en reposo respecto a los puntos. A veces el intervalo de tiempo característica y la longitud característica *no* son medidos por el mismo observador.





**Figura 38.10** La longitud de una regla es medida por dos observadores.

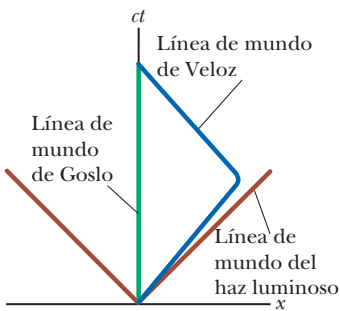
Por ejemplo, suponga que una regla graduada se mueve con una rapidez  $v$  más allá de un observador inmóvil en la Tierra, como se ve en la figura 38.10. La longitud de la regla, medida por un observador en un marco unido a la regla, es la longitud característica  $L_p$  que se muestra en la figura 38.10a. La longitud  $L$  de la regla medida por el observador en la Tierra es más corta que  $L_p$  en un factor  $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  como sugiere la figura 38.10b. Observe que la contracción de longitud tiene lugar sólo a lo largo de la dirección de movimiento.

La contracción de la longitud también se puede aplicar a la paradoja de los gemelos. Veloz mide la distancia al Planeta X como  $L = L_p(1 - v^2/c^2)^{1/2} = (20 \text{ ly})[1 - (0.95)^2]^{1/2} = 6.2 \text{ ly}$ . A una velocidad de  $0.95c$ , este viaje requiere un intervalo de tiempo de  $(6.2 \text{ al}) / [(0.95) (1 \text{ al/año})] = 6.6 \text{ años}$ . Multiplicar por 2 para incluir los viajes de ida y vuelta da 13 años, como descubrimos usando la dilatación del tiempo.

La longitud característica y el intervalo de tiempo característico se definen de modo diferente. La longitud característica es medida por un observador para quien los puntos extremos de la longitud permanecen fijos en el espacio. El intervalo de tiempo característico es medido por alguno para quien los dos eventos tienen lugar en la misma posición en el espacio. Como ejemplo de este punto, regrese a los muones que se desintegran y se mueven con magnitudes de velocidades cercanas a la de la luz. Un observador en el marco de referencia del muón mediría la vida media característica, mientras que un observador en la Tierra mediría la longitud característica (la distancia desde la creación a la desintegración en la figura 38.8b). En el marco de referencia del muón no hay dilatación de tiempo, pero la distancia de recorrido a la superficie se observa más corta cuando se mide en este marco. Del mismo modo, en el marco de referencia del observador en la Tierra hay dilatación de tiempo, pero la distancia de recorrido se mide como la longitud característica. Por tanto, cuando los cálculos sobre el muón se efectúan en ambos marcos, el resultado del experimento en un marco es el mismo que el resultado en el otro marco: más muones llegan a la superficie de los que se pronosticarían sin efectos relativistas.

- E XAMEN RÁPIDO 38.5** Usted prepara la maleta para un viaje a otra estrella.
- Durante el viaje, usted vuela a  $0.99c$ . Usted trata de decidir si debe comprar ropa de tallas más pequeñas, porque estará más delgado en el viaje debido a la contracción de longitud. Igualmente, está considerando ahorrar dinero al reservar un compartimento más pequeño para dormir, porque será menos largo cuando se acueste. ¿Debe (a) comprar tallas más pequeñas, (b) reservar un compartimento más pequeño, (c) nada de esto, o (d) hacer ambas cosas?

- E XAMEN RÁPIDO 38.6** Está observando una nave móvil alejándose y mide que la distancia es más corta que cuando estaba en el suelo en reposo a su lado. También ve un reloj por una ventanilla de la nave y observa que el paso del tiempo en el reloj se mide y es más lento que en el reloj de pulsera que lleva. En comparación a cuando la nave estaba en la Tierra, ¿cuáles son sus mediciones si la nave cambia de dirección y viene *hacia usted* con la misma rapidez? (a) La nave se mide y es más larga, y el reloj se adelanta. (b) La nave se mide y es más larga, y el reloj se atrasa. (c) La nave se mide y es más corta, y el reloj se adelanta. (d) La nave se mide y es más corta, y el reloj se atrasa.



**Figura 38.11** Paradoja de los gemelos en una gráfica de espacio-tiempo. El gemelo que se queda en la Tierra tiene una línea de mundo a lo largo del eje  $ct$  (verde). La trayectoria del gemelo que viaja en el espacio-tiempo está representada por una línea de mundo que cambia de dirección (azul). Las líneas de color rojo-marrón se encuentran las líneas mundiales de haces de luz que viajan en la dirección  $x$  positiva (a la derecha) o la dirección  $x$  negativa (a la izquierda).

### Gráficas de espacio-tiempo

A veces es útil representar una situación física con una **gráfica de espacio-tiempo**, en donde  $ct$  es la ordenada y la posición  $x$  es la abscisa. La paradoja de los gemelos se ilustra en la gráfica de la figura 38.11 desde el punto de vista de Goslo. Una trayectoria en el espacio-tiempo se denomina **línea de mundo**. En el origen, las líneas de mundo de Veloz y de Goslo coinciden porque los dos gemelos están en el mismo lugar al mismo tiempo. Después de que Veloz sale a su viaje, su línea de mundo diverge de la de su hermano. La línea de mundo de Goslo es vertical porque él sigue fijo en el lugar. Al reunirse, las dos líneas de mundo se juntan nuevamente. Observe que sería imposible para Veloz tener una línea de mundo que cruzara la trayectoria de un haz luminoso que saliera de la Tierra al momento en que salió. Para hacer esto se requeriría que él tuviera una rapidez mayor a  $c$  (que no es posible, como se ve en las secciones 38.6 y 38.7).



Las líneas de mundo para haces luminosos se trazan como líneas diagonales en las gráficas de espacio-tiempo, por lo general inclinadas a  $45^\circ$  a la derecha o a la izquierda de la vertical (si se supone que tanto el eje  $x$  como el  $ct$  tienen las mismas escalas), dependiendo de si el haz luminoso se desplaza en la dirección de  $x$  creciente o decreciente. Todos los posibles acontecimientos futuros para Goslo y Veloz yacen sobre el eje  $x$ , y entre las líneas de color rojo-marrón en la figura 38.11, porque ningún gemelo puede viajar más rápido que la luz. Los únicos eventos del pasado que Goslo y Veloz podrían haber experimentado se producen entre dos líneas de mundo similares a  $45^\circ$  que se acercan al origen por debajo del eje  $x$ .

Si se hace girar la figura 38.11 alrededor del eje  $ct$ , las líneas de color rojo-marrón barren un cono, llamado *cono de luz*, que se generaliza en la figura 38.11 a dos dimensiones espaciales. Puede imaginarse que el eje  $y$  sale de la página. Todos los eventos futuros para un observador situado en el origen deben estar dentro del cono de luz. Podría imaginar otro giro para generalizar el cono de luz a las tres dimensiones del espacio para incluir  $z$ , pero debido a la exigencia de cuatro dimensiones (tres dimensiones espaciales y el tiempo), no es posible representar esta situación en un plano de dos dimensiones en el papel o en una pantalla de computadora.

### Ejemplo 38.3 Un viaje a Sirio

Un astronauta realiza un viaje a Sirio, que se ubica a una distancia de 8 años luz de la Tierra. El astronauta mide el tiempo del viaje de ida en 6 años. Si la nave espacial se mueve con una rapidez constante de  $0.8c$ , ¿cómo se puede reconciliar la distancia de 8 al con el tiempo de viaje de 6 años medido por el astronauta?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Un observador en la Tierra mide que la luz requiere 8 años en viajar de la Tierra a Sirio. El astronauta mide un intervalo de tiempo de solo 6 años. ¿El astronauta viaja más rápido que la luz?

**Categorizar** Ya que el astronauta mide una longitud de espacio entre la Tierra y Sirio, que está en movimiento respecto a ella, este ejemplo se clasifica como un problema de contracción de la longitud. También puede modelar al astronauta como una *partícula bajo velocidad constante*.

**Analizar** La distancia de 8 años luz representa la longitud característica de la Tierra a Sirio, medida por un observador en la Tierra que ve ambos objetos casi en reposo.

Calcule la longitud contraída medida por el astronauta, con la ecuación 38.9:

$$L = \frac{8 \text{ ly}}{\gamma} = (8 \text{ ly}) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (8 \text{ ly}) \sqrt{1 - \frac{(0.8c)^2}{c^2}} = 5 \text{ ly}$$

Use el modelo de partícula bajo velocidad constante para encontrar el tiempo de viaje observado en el reloj del astronauta:

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{5 \text{ ly}}{0.8c} = \frac{5 \text{ ly}}{0.8(1 \text{ ly/yr})} = 6 \text{ años}$$

**Finalizar** Observe que se usó el valor para la rapidez de la luz como  $c = 1$  al/año. El viaje tarda un intervalo de tiempo más corto que 8 años para el astronauta porque, para él, la distancia entre la Tierra y Sirio fue medida como más corta.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si un técnico en el Control de Misión en la Tierra observa el viaje con un telescopio muy poderoso? ¿En qué tiempo el técnico *verá* que el astronauta llegó a Sirio?

**Respuesta** El intervalo de tiempo que mide el técnico para que el astronauta llegue es

$$\Delta t = \frac{L_p}{v} = \frac{8 \text{ ly}}{0.8c} = 10 \text{ años}$$

Para que el técnico vea el arribo, la luz de la escena de llegada debe viajar de regreso a la Tierra y entrar al telescopio. Este viaje requiere un intervalo de tiempo de

$$\Delta t = \frac{L_p}{v} = \frac{8 \text{ ly}}{c} = 8 \text{ años}$$

Por tanto, el técnico ve la llegada después de  $10 \text{ años} + 8 \text{ años} = 18 \text{ años}$ . Si el astronauta inmediatamente da vuelta y regresa a casa, llega, de acuerdo con el técnico, 20 años después de partir, ¡solo 2 años *después de que el técnico lo vio llegar!* Además, el astronauta habría envejecido solo 12 años.



### Ejemplo 38.4 La paradoja de la pértiga en el granero

La paradoja de los gemelos, discutida anteriormente, es una “paradoja” clásica de la relatividad. Otra “paradoja” clásica es la siguiente. Suponga que un corredor que se mueve a  $0.75c$  lleva una pértiga horizontal de 15 m de largo hacia un granero que tiene 10 m de largo. El granero tiene puertas frontal y trasera que inicialmente están abiertas. Un observador en el suelo instantánea y simultáneamente puede cerrar y abrir las dos puertas mediante un control remoto. Cuando el corredor y la pértiga están dentro del granero, el observador en tierra cierra y luego abre ambas puertas, de modo que el corredor y la pértiga momentáneamente quedan capturados dentro del granero y luego procede a salir del granero por la puerta trasera. ¿Tanto el corredor como el observador en tierra están de acuerdo con que el corredor pasa con seguridad a través del granero?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** A partir de su experiencia cotidiana, usted se sorprendería de ver que una pértiga de 15 m ajusta dentro de un granero de 10 m, pero nos estamos acostumbrando a resultados sorprendentes en situaciones relativistas.

**Categorizar** La pértiga está en movimiento respecto al observador en tierra, de modo que el observador mide su longitud como contraída, mientras que el granero inmóvil tiene una longitud propia de 10 m. Este ejemplo se clasifica como un problema de contracción de la longitud. El corredor transportando la pértiga puede ser modelado como una *partícula bajo velocidad constante*.

**Analizar** Use la ecuación 38.9 para encontrar la longitud contraída de la pértiga, de acuerdo con el observador en tierra:

$$L_{\text{pértiga}} = L_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (15 \text{ m}) \sqrt{1 - (0.75)^2} = 9.9 \text{ m}$$

Por tanto, el observador en tierra mide que la pértiga es ligeramente más corta que el granero y no hay problema con capturar momentáneamente la pértiga dentro de él. La “paradoja” surge cuando se considera el punto de vista del corredor.

Use la ecuación 38.9 para encontrar la longitud contraída del granero, de acuerdo con el observador que corre:

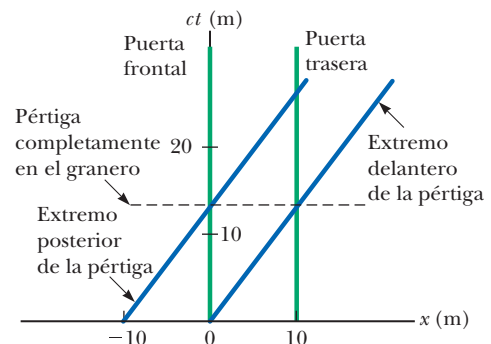
$$L_{\text{granero}} = L_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (10 \text{ m}) \sqrt{1 - (0.75)^2} = 6.6 \text{ m}$$

Ya que la pértiga está en el marco en reposo del corredor, el corredor mide que tiene su longitud propia de 15 m. ¿Cómo una pértiga de 15 m puede encajar dentro de un granero de 6.6 m? Aunque esta pregunta es la clásica que siempre se plantea, no es la pregunta que se formuló porque no es la importante. Se preguntó: “¿El corredor pasa con seguridad a través del granero?”.

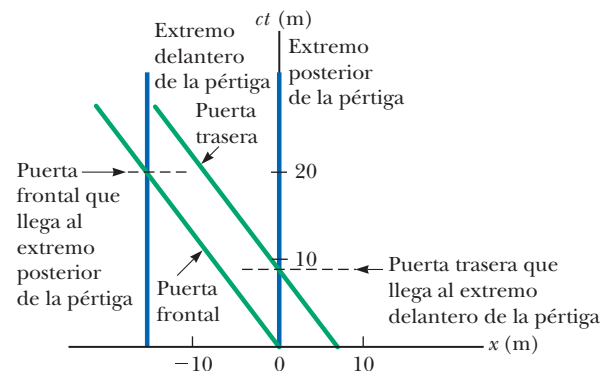
La resolución de la “paradoja” se encuentra en la relatividad de la simultaneidad. El cierre de las dos puertas se mide como simultáneo por el observador en tierra. Sin embargo, ya que las puertas están en diferentes posiciones, no se cierran simultáneamente como mide el corredor. La puerta trasera se cierra y luego se abre primero, lo que permite salir el extremo delantero de la pértiga. La puerta frontal del granero no se cierra hasta que el extremo posterior de la pértiga pasa por ahí.

Esta “paradoja” se puede analizar usando una gráfica espacio-tiempo. La figura 38.12a es una gráfica espacio tiempo desde el punto de vista del observador en tierra. Elija  $x = 0$  como la posición de la puerta frontal del granero y  $t = 0$  como el instante en que el extremo delantero de la pértiga se ubica en la puerta frontal del granero. Las líneas de mundo para las dos puertas del granero están separadas 10 m y son verticales porque el granero no se mueve en relación con este observador. Para la pértiga, se siguen dos líneas de mundo inclinadas, una para cada extremo de la pértiga en movimiento. Estas líneas de mundo están separadas 9.9 m horizontalmente, que es la longitud contraída vista por el observador en tierra. Como se ve en la figura 38.12a, la pértiga está completamente dentro del granero en un instante.

La figura 38.12b muestra la gráfica espacio-tiempo de acuerdo con el corredor. En este caso, las líneas de mundo para la pértiga están separadas 15 m y son verticales porque la pértiga está en reposo en el marco de referencia del corredor. El granero se lanza hacia el corredor, de modo que las líneas de mundo para las puer-



a



b

**Figura 38.12** (Ejemplo 38.4) Gráficas espacio-tiempo para la paradoja de la pértiga en el granero. (a) Desde el punto de vista del observador y (b) Desde el punto de vista del corredor.

## 38.4 continuación

tas frontal y trasera del granero están inclinadas hacia la izquierda. Las líneas de mundo para el granero están separadas 6.6 m, la longitud contraída como la ve el corredor. El extremo delantero de la pértiga sale por la puerta trasera del granero mucho antes de que el extremo posterior de la pértiga entre al granero. En consecuencia, la apertura de la puerta trasera se presenta antes del cierre de la puerta frontal.

Desde el punto de vista del observador en tierra, use el modelo de partícula bajo velocidad constante para encontrar el tiempo después de  $t = 0$  cuando el extremo trasero de la pértiga entra al granero:

$$(1) \quad t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{9.9 \text{ m}}{0.75c} = \frac{13.2 \text{ m}}{c}$$

Desde el punto de vista del corredor, use el modelo de partícula bajo velocidad constante para encontrar el tiempo cuando el extremo delantero de la pértiga sale del granero:

$$(2) \quad t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{6.6 \text{ m}}{0.75c} = \frac{8.8 \text{ m}}{c}$$

Encuentre el tiempo cuando el extremo posterior de la pértiga entra a la puerta frontal del granero:

$$(3) \quad t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{15 \text{ m}}{0.75c} = \frac{20 \text{ m}}{c}$$

**Finalizar** A partir de la ecuación (1), la pértiga debería estar completamente dentro del granero en un tiempo que corresponde a  $ct = 13.2 \text{ m}$ . Esta situación es consistente con el punto en el eje  $ct$  de la figura 38.12a donde la pértiga está dentro del granero. A partir de la ecuación (2), el extremo delantero de la pértiga sale del granero en  $ct = 8.8 \text{ m}$ . Esta situación es consistente con el punto en el eje  $ct$  de la figura 38.12b donde la puerta trasera del granero llega al extremo delantero de la pértiga. La ecuación (3) da  $ct = 20 \text{ m}$ , que concuerda con el instante que se muestra en la figura 38.12b cuando la puerta frontal del granero llega al extremo posterior de la pértiga. Las puertas se cierran justo después de este instante.

## El efecto Doppler relativista

Otra importante consecuencia de la dilatación del tiempo es el desplazamiento en la frecuencia observada por la luz que emiten átomos en movimiento, en oposición a la luz emitida por átomos en reposo. Este fenómeno, conocido como efecto Doppler, fue explicado en el capítulo 16 porque está relacionado con las ondas de sonido. En el caso del sonido, la velocidad  $v_s$  desde la fuente respecto al medio de propagación se puede distinguir del movimiento del observador respecto al medio. Las ondas de luz deben ser analizadas de modo diferente, no obstante, porque *no requieren medio de propagación* y no existe ningún método para distinguir el movimiento de una fuente de luz respecto al movimiento del observador. La única velocidad medible es la velocidad relativa  $v$  entre la fuente y el observador.

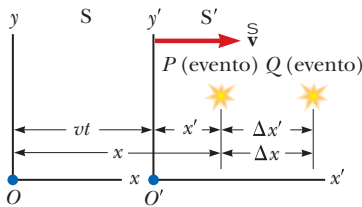
Si una fuente de luz y un observador se aproximan entre sí con rapidez relativa  $v$ , la frecuencia  $f_{\text{obs}}$  medida por el observador es

$$f' = \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} f \quad (38.10)$$

donde  $f$  es la frecuencia de la fuente medida en su marco en reposo. Adverta que esta ecuación de corrimiento Doppler relativista, a diferencia de la ecuación de corrimiento Doppler para el sonido, depende sólo de la rapidez relativa  $v$  de la fuente y el observador, y se cumple para magnitudes de velocidad relativas de hasta  $c$ . Como es de esperarse, la ecuación predice que  $f' > f$  cuando la fuente y el observador se aproximan entre ellos (es decir, cuando  $v$  es positiva). Tal cambio a frecuencias más altas, o longitudes de onda más bajas, se llama *corrimiento hacia el azul*. Obtiene la expresión para el caso en el que la fuente y el observador se alejan uno del otro al sustituir valores negativos para  $v$  en la ecuación 38.10. En este caso, el cambio es a frecuencias más bajas, o longitudes de onda más largas, y se describe como un *corrimiento hacia el rojo*.

El uso más espectacular e impresionante del efecto Doppler relativista es la medición del desplazamiento en la frecuencia de luz emitida por un cuerpo astronómico en movimiento, como lo es una galaxia. La luz emitida por átomos y que normalmente se encuentra en la región extrema violeta del espectro se corre hacia el extremo rojo del espectro para átomos de otras galaxias, lo cual indica que estas galaxias *se alejan*. El astrónomo estadounidense Edwin Hubble (1889-1953) realizó gran cantidad de mediciones de este corrimiento hacia el rojo para confirmar que casi todas las galaxias se alejan de la Tierra, lo que indica que el Universo está en expansión (capítulo 44).





**Figura 38.13** Se presentan eventos en los puntos  $P$  y  $Q$  y son contemplados por un observador en reposo en el marco  $S$  y otro en el marco  $S'$ , que se mueve a la derecha con una rapidez  $v$ .

## 38.5 Ecuaciones de transformación de Lorentz

Examinamos los intervalos de tiempo y longitudes en la sección 38.4. Ahora revisemos las observaciones de posiciones específicas en el espacio e instantes de tiempo hechas por diferentes observadores, con el objetivo de reemplazar con algo más general las ecuaciones de transformación de Galileo.

Suponga que dos eventos se presentan en los puntos  $P$  y  $Q$  y son reportados por dos observadores, uno en reposo en un marco  $S$  y otro en un marco  $S'$  que se mueve a la derecha con una rapidez  $v$ , como se ve en la figura 38.13. El observador en  $S$  reporta el evento con coordenadas de espacio-tiempo  $(x, y, z, t)$ , mientras que el observador en  $S'$  reporta el mismo evento con las coordenadas  $(x', y', z', t')$ . La ecuación 38.1 predice, que, la distancia entre los dos puntos en el espacio en el que se presentan los eventos no depende del movimiento del observador:  $\Delta x = \Delta x'$ . Como la predicción es contradictoria con la noción de contracción de la longitud, la transformación galileana no es válida cuando  $v$  se aproxima a la rapidez de la luz. En esta sección se expresan las ecuaciones de transformación correctas que aplican para todas las velocidades en el intervalo  $0 < v < c$ .

Las ecuaciones que son válidas para todas las magnitudes de velocidades y hacen posible transformar coordenadas de  $S$  a  $S'$  son las **ecuaciones de transformación de Lorentz**:

Transformación de Lorentz para  $S \rightarrow S'$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (38.11)$$

Estas ecuaciones de transformación fueron desarrolladas por Hendrik A. Lorentz (1853-1928) en 1890 en relación con el electromagnetismo. Sin embargo, fue Einstein quien reconoció su importancia física y percibió la etapa bien definida de interpretarlas dentro de la estructura de la teoría especial de la relatividad.

Observe la diferencia entre las ecuaciones de tiempo galileanas y de Lorentz. En el caso de las galileanas,  $t = t'$ , pero en el caso de Lorentz el valor para  $t$ , asignado a un evento por un observador  $O'$  en el marco  $S'$  de la figura 38.13, depende del tiempo  $t$  y de la coordenada  $x$  medida por un observador  $O$  en el marco  $S$ , esto es consistente con la noción de que un evento está caracterizado por cuatro coordenadas espacio-tiempo  $(x, y, z, t)$ . En otras palabras, en la relatividad, el espacio y el tiempo *no son* conceptos separados sino que más bien estén estrechamente vinculados entre ellos en algo llamado *espacio-tiempo*.

Si desea transformar coordenadas del marco  $S'$  a coordenadas del marco  $S$ , simplemente sustituya  $v$  con  $-v$  e intercambie las coordenadas con prima y sin prima en las ecuaciones 38.11:

Transformación inversa de Lorentz para  $S' \rightarrow S$

$$x = \gamma(x' + vt') \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \quad (38.12)$$

Cuando  $v \ll c$ , las ecuaciones de transformación de Lorentz deben reducirse a las ecuaciones galileanas. Para verificar esto, advierta que cuando  $v$  se aproxima a cero,  $v/c \ll 1$ ; por tanto,  $\gamma \rightarrow 1$ , y las ecuaciones 38.11 se reducen a las ecuaciones de transformación de espacio-tiempo galileanas en la ecuación 38.1.

En muchas situaciones, es deseable saber la diferencia en las coordenadas entre dos eventos o el intervalo entre dos eventos considerado por los observadores  $O$  y  $O'$ . A partir de las ecuaciones 38.11 y 38.12, es posible expresar las diferencias entre las cuatro variables  $x, x', t$  y  $t'$  en la forma

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v \Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x\right) \end{aligned} \right\} S \rightarrow S' \quad (38.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v \Delta t') \\ \Delta t &= \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'\right) \end{aligned} \right\} S' \rightarrow S \quad (38.14)$$



donde  $\Delta x' = x'_2 - x'_1$  y  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  son las diferencias medidas por el observador  $O'$  y  $\Delta x = x_2 - x_1$  y  $\Delta t = t_2 - t_1$  son las diferencias medidas por el observador  $O$ . (No se han incluido las expresiones para relacionar las coordenadas  $y$  y  $z$  porque no resultan afectadas por el movimiento a lo largo de la dirección  $x$ ).<sup>3</sup>

### Ejemplo 38.5 Nueva visita a la simultaneidad y la dilatación del tiempo

**(A)** Use las ecuaciones de transformación de Lorentz en forma de diferencia para demostrar que la simultaneidad no es un concepto absoluto.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine dos eventos que son simultáneos y separados en el espacio medidos en el marco de  $S'$  tales que  $\Delta t' = 0$  y  $\Delta x' \neq 0$ , de acuerdo con un observador  $O'$  que se mueve con rapidez  $v$  en relación con  $O$ .

**Categorizar** El enunciado del problema dice que este ejemplo se clasifica como uno que involucra la transformación de Lorentz.

**Analizar** A partir de la expresión para  $\Delta t$  dada en la ecuación 38.14, encuentre el intervalo de tiempo  $\Delta t$  medido por el observador  $O$ :

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = \gamma \left( 0 + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = \gamma \frac{v}{c^2} \Delta x'$$

**Finalizar** El intervalo de tiempo para los mismos dos eventos como los observa  $O$  son distintos de cero, así que los eventos no parecen ser simultáneos para  $O$ .

**(B)** Use las ecuaciones de transformación de Lorentz en forma de diferencia para demostrar que un reloj en movimiento es preciso al funcionar más lentamente que un reloj que está en reposo respecto a un observador.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine que el observador  $O'$  lleva un reloj que usa para medir un intervalo de tiempo  $\Delta t'$ . Él encuentra que dos eventos se presentan en el mismo lugar en su marco de referencia ( $\Delta x' = 0$ ), pero en diferentes tiempos ( $\Delta t \neq 0$ ). El observador  $O'$  se mueve con rapidez  $v$  en relación con  $O$ .

**Categorizar** El enunciado del problema pide clasificar este ejemplo como uno que involucra la transformación de Lorentz.

**Analizar** A partir de la expresión para  $\Delta t$  dada en la ecuación 38.14, encuentre el intervalo de tiempo  $\Delta t$  medido por el observador  $O$ :

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = \gamma \left[ \Delta t' + \frac{v}{c^2} (0) \right] = \gamma \Delta t'$$

**Finalizar** Este resultado es la ecuación para dilatación de tiempo encontrada anteriormente (ecuación 38.7), donde  $\Delta t' = \Delta t_p$  es el intervalo de tiempo característico registrado por el reloj que lleva el observador  $O'$ . Por tanto,  $O$  mide que el reloj en movimiento funciona lento. Observe que los dos eventos deben ocurrir *en la misma ubicación* en  $S'$  para reproducir la ecuación 38.7.

## 38.6 Ecuaciones de transformación de velocidad de Lorentz

Ahora que hemos modificado la ecuación 38.1 para que sea correcta relativísticamente, veamos cómo modificar la transformación de velocidad galileana en la ecuación 38.2. Suponga que dos individuos en movimiento relativo uno respecto del otro observan un objeto en movimiento. Previamente se definió a un evento como algo que se presenta en un instante de tiempo. Ahora, interprete el “evento” como el movimiento del objeto. Sabe que la transformación de velocidad galileana (ecuación 38.2) es válida para velocidades bajas. ¿Cómo es que las mediciones de los observadores de la velocidad de un objeto se relacionan entre ellas si la rapidez del cuerpo es cercana a la de la luz? Una vez más,  $S'$  es el marco que se mueve con una rapidez  $v$  respecto a

<sup>3</sup> Aun cuando el movimiento relativo de dos marcos a lo largo del eje  $x$  no cambia las coordenadas  $y$  y  $z$  de un objeto, sí cambia las componentes de velocidad  $y$  y  $z$  de un objeto que se mueve en cualquiera de estos marcos, como se vio en la sección 38.6.



S. Suponga que un objeto tiene una componente de velocidad  $u'_x$  medido en el marco  $S'$ , donde

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad (38.15)$$

Usando la ecuación 38.11, se tiene

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - v dt) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right) \end{aligned}$$

La sustitución de estos valores en la ecuación 38.15 da

$$u'_x = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}$$

De cualquier modo, el término  $dx/dt$  es simplemente la componente de velocidad  $u_x$  del objeto bien proporcionado por un observador en  $S$ , y por tanto esta expresión se convierte en

Transformación de velocidad de Lorentz para  $S \rightarrow S'$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (38.16)$$

Si el objeto tiene componentes de velocidad a lo largo de los ejes  $y$  y  $z$ , las componentes medidas por un observador en  $S'$  son

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad \text{y} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad (38.17)$$

Observe que  $u'_y$  y  $u'_z$  no contienen el parámetro  $v$  en el numerador porque la velocidad relativa es a lo largo del eje  $x$ .

Cuando  $v$  es mucho menor que  $c$  (el caso no relativista), el denominador de la ecuación 38.16 se aproxima a la unidad y, por tanto,  $u'_x \approx u_x - v$ , que es la ecuación de transformación de velocidad galileana. En otro extremo, cuando  $u_x = c$ , la ecuación 38.16 se convierte en

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{1 - \frac{v}{c}} = c$$

Este resultado, muestra que una rapidez calculada como  $c$  por un observador en  $S$  también es medida como  $c$  por un observador en  $S'$ , independiente del movimiento relativo de  $S$  y  $S'$ . Esta conclusión es consistente con el segundo postulado de Einstein, de que la rapidez de la luz debe ser  $c$  respecto a todos los marcos inerciales de referencia. Además, la rapidez de un objeto nunca puede calcularse más grande que  $c$ . Es decir, la *rapidez de la luz* es la *rapidez máxima*. Regresará a este punto más adelante.

Para obtener  $u_x$  en términos de  $u'_x$ , sustituya  $v$  con  $-v$  en la ecuación 38.16 e intercambie los papeles de  $u_x$  y  $u'_x$ :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \quad (38.18)$$

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 38.5

**¿En qué pueden estar de acuerdo los observadores?** Ha visto varias mediciones en las que *no* están de acuerdo los dos observadores  $O$  y  $O'$ : (1) el intervalo de tiempo entre eventos que tienen lugar en la misma posición en uno de los marcos, (2) la distancia entre dos puntos que permanecen fijos en uno de sus marcos, (3) las componentes de velocidad de una partícula en movimiento y (4) si dos eventos que se presentan en diferentes lugares en ambos marcos son simultáneos o no lo son. Los dos observadores *pueden* estar de acuerdo en (1) su rapidez relativa de movimiento  $v$  respecto uno de otro, (2) la rapidez  $c$  de cualquier rayo de luz y (3) la simultaneidad de dos eventos que tienen lugar en la misma posición y tiempo en algún marco.

- EJERCICIO RÁPIDO 38.7** Usted viaja en auto en una autopista con una rapidez relativista. (i) Justo frente a usted, un técnico que está de pie en el suelo enciende un faro y el haz de luz se mueve exactamente en forma vertical hacia arriba, como lo ve el técnico. Usted observa el haz luminoso y mide la magnitud de la compo

- nente vertical de su velocidad como (a) igual a  $c$ , (b) mayor que  $c$  o (c) menor que  $c$ .
- (ii) Si el técnico apunta el faro directamente a usted en lugar de hacia arriba, usted mide la magnitud de la componente horizontal de su velocidad como (a)
- igual a  $c$ , (b) mayor que  $c$  o (c) menor que  $c$ .

### Ejemplo 38.6 Velocidad relativa de dos naves espaciales

Dos naves espaciales A y B se mueven en direcciones opuestas como se muestra en la figura 38.14. Un observador en la Tierra mide la rapidez de la nave espacial A en  $0.750c$  y la rapidez de la nave espacial B en  $0.850c$ . Encuentre la velocidad de la nave espacial B como la observa la tripulación de la nave espacial A.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Existen dos observadores, uno en la Tierra ( $O$ ) y uno ( $O'$ ) en la nave espacial A. El evento es el movimiento de la nave espacial B.

**Categorizar** Debido a que el problema pide encontrar una velocidad observada, este ejemplo se clasifica como uno que requiere la transformación de velocidad de Lorentz.

**Analizar** El observador con base en la Tierra, en reposo en el marco S, hace dos mediciones, una de cada nave espacial. Se quiere encontrar la velocidad de la nave espacial B medida por la tripulación de la nave espacial A. Por tanto,  $u_x = -0.850c$ . La velocidad de la nave espacial A también es la velocidad del observador en reposo en la nave espacial A (el marco  $S'$ ) relativo al observador en reposo en la Tierra. Por tanto,  $v = 0.750c$ .

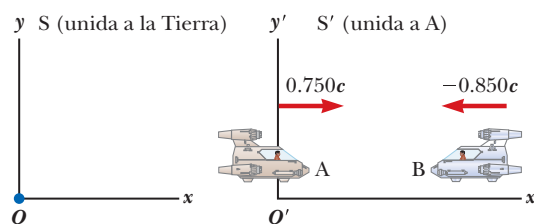
Obtenga la velocidad  $u'_x$ , de la nave espacial B en relación con la nave espacial A con la ecuación 38.16:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{-0.850c - 0.750c}{1 - \frac{(-0.850c)(0.750c)}{c^2}} = -0.977c$$

**Finalizar** El signo negativo indica que la nave espacial B se mueve en la dirección  $x$  negativa, como observa la tripulación de la nave espacial A. ¿Esto es consistente con su expectativa a partir de la figura 38.14? Note que la rapidez es menor que  $c$ . Es decir: un objeto cuya rapidez es menor que  $c$  en un marco de referencia debe tener una rapidez menor que  $c$  en cualquier otro marco de referencia. (De haber usado la ecuación galileana de transformación de velocidad en este ejemplo, habría encontrado que  $u'_x = u_x - v = -0.850c - 0.750c = -1.60c$ , que es imposible. La ecuación galileana de transformación no funciona en situaciones relativistas.)

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si las dos naves espaciales pasan una junto a la otra? ¿Ahora cuál es su rapidez relativa?

**Respuesta** El cálculo con la ecuación 38.16 involucra solo las velocidades de las dos naves espaciales y no depende de sus posiciones. Después de que pasan una a la otra, tienen las mismas velocidades, de modo que la velocidad de la nave espacial B, como la observa la tripulación en la nave espacial A, es la misma,  $-0.977c$ . La única diferencia después de que pasan es que la nave espacial B se aleja de la nave espacial A, mientras que se aproximaba a ella antes de pasar.



**Figura 38.14** (Ejemplo 38.6) Dos naves espaciales, A y B, se mueven en direcciones opuestas. La rapidez de la nave espacial B en relación con la nave espacial A es menor que  $c$  y se obtiene a partir de la ecuación de transformación de velocidad relativista.

### Ejemplo 38.7 Líderes de la prisa relativistas

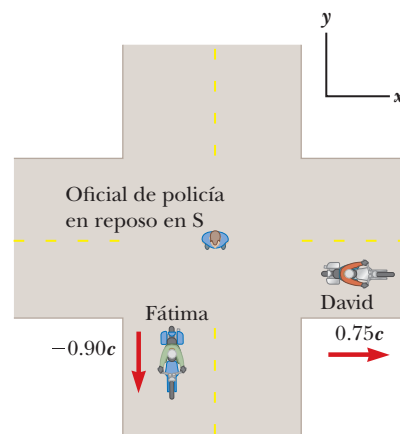
Dos conductores de motocicleta llamados David y Fátima corren con rapidez relativista a lo largo de trayectorias perpendiculares, como se muestra en la figura 38.15. ¿Qué tan rápido se aleja Fátima, según ve David sobre su hombro derecho?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Los dos observadores son David y el oficial de policía en la figura 38.15. El evento es el movimiento de Fátima. La figura 38.15 representa la situación como la ve el oficial de policía en reposo en el marco S. El marco  $S'$  se mueve junto con David.

**Categorizar** Ya que el problema pide encontrar una velocidad observada, este problema se clasifica como uno que requiere la transformación de velocidad de Lorentz. El movimiento tiene lugar en dos dimensiones.

**Figura 38.15** (Ejemplo 38.7) David se mueve hacia el este con una rapidez de  $0.75c$  relativa al oficial de policía y Fátima viaja hacia el sur con una rapidez de  $0.90c$  relativa al oficial.



continúa

## 38.7 continuación

**Analizar** Identifique las componentes de velocidad para David y Fátima de acuerdo con el oficial de policía:

Con las ecuaciones 38.16 y 38.17, calcule  $u'_x$  y  $u'_y$  para Fátima, según mide David:

Con el teorema de Pitágoras, encuentre la rapidez de Fátima como la mide David:

$$\text{David: } v_x = v = 0.75c \quad v_y = 0$$

$$\text{Fátima: } u_x = 0 \quad u_y = -0.90c$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{0 - 0.75c}{1 - \frac{(0)(0.75c)}{c^2}} = -0.75c$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{(0.75c)^2}{c^2}} (-0.90c)}{1 - \frac{(0)(0.75c)}{c^2}} = -0.60c$$

$$u' = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2} = \sqrt{(-0.75c)^2 + (-0.60c)^2} = 0.96c$$

**Finalizar** Esta rapidez es menor que  $c$ , como requiere la teoría especial de la relatividad.

### 38.7 Cantidad de movimiento lineal relativista

En las últimas secciones, hemos investigado versiones relativistas de variables cinemáticas: tiempo, posición y velocidad. Pasemos ahora al reino de la dinámica y veamos qué cambios deben hacerse para generalizar los conceptos de momento y energía en la relatividad. Descubriremos que necesitamos nuevas definiciones de estas dos cantidades. Estas definiciones generalizadas deben reducirse a las definiciones clásicas (no relativistas) para  $v \ll c$ .

Primero, recuerde que en un modelo de un sistema aislado cuando dos partículas (u objetos que se pueden modelar como partículas) chocan, la cantidad de movimiento total lineal del sistema aislado de las dos partículas permanece constante. Suponga que observa esta colisión en un marco de referencia  $S$  y confirma que se conserva la cantidad de movimiento del sistema. Ahora imagine que las cantidades de movimiento de las partículas son medidas por un observador en un segundo marco de referencia  $S'$ , que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  respecto al primer marco. Con el uso de la ecuación de transformación de velocidad de Lorentz y la definición clásica de cantidad de movimiento lineal,  $\vec{p} = m\vec{u}$  (donde  $\vec{u}$  es la velocidad de una partícula), encuentra que la cantidad de movimiento lineal, de acuerdo con las mediciones del observador en  $S'$ , no se conserva. No obstante, como las leyes de la física son las mismas en todos los marcos inerciales, la cantidad de movimiento lineal del sistema debe conservarse en todos los marcos, por lo que tiene una contradicción. En vista de esta contradicción, y suponiendo que la ecuación de la transformación de velocidad de Lorentz es correcta, debe modificar la definición de cantidad de movimiento lineal así que la cantidad de movimiento lineal de un sistema aislado debe conservarse para todos los observadores. Para cualquier partícula, la ecuación relativista correcta para una cantidad de movimiento lineal que satisface estas condiciones es

Definición de cantidad de movimiento lineal relativista ▶

$$\vec{p} \equiv \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{u} \quad (38.19)$$

donde  $\vec{u}$  es la velocidad de la partícula y  $m$  es su masa. Cuando  $u$  es mucho menor que  $c$ ,  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$  se aproxima a la unidad y  $\vec{p}$  se aproxima a  $m\vec{u}$ . Por tanto, la ecuación relativista para  $\vec{p}$  se reduce a la expresión clásica cuando  $u$  es mucho menor que  $c$ .

La fuerza relativista  $\vec{F}$  que actúa sobre una partícula cuya cantidad de movimiento lineal es  $\vec{p}$  se define como

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (38.20)$$



donde  $\vec{p}$  está dado por la ecuación 38.19. Esta expresión, que es la forma relativista de la segunda ley de Newton, es razonable porque conserva la mecánica clásica en el límite de bajas velocidades, y es consistente con la conservación de la cantidad de movimiento lineal para un sistema aislado ( $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ ), tanto en forma relativista como clásica.

El problema 54 se deja como problema de final del capítulo para demostrar que, bajo condiciones relativistas, la aceleración  $\vec{a}$  de una partícula disminuye bajo la acción de una fuerza constante, en cuyo caso  $a \propto (1 - u^2/c^2)^{3/2}$ . Esta proporcionalidad, muestra que cuando la rapidez de la partícula se aproxima a  $c$ , la aceleración causada por cualquier fuerza finita se aproxima a cero. En consecuencia, es imposible acelerar una partícula desde el reposo hasta una rapidez  $u \geq c$ . Este argumento fortalece que la rapidez de la luz es la máxima rapidez, el límite de la rapidez del Universo. Es la velocidad máxima posible para una partícula con masa así como para la transferencia de información.

### Ejemplo 38.8 Cantidad de movimiento lineal de un electrón

Un electrón, que tiene una masa de  $9.11 \times 10^{-31}$  kg, se mueve con una rapidez de  $0.750c$ . Encuentre la magnitud de su cantidad de movimiento relativista y compare este valor con la cantidad de movimiento calculada a partir de la expresión clásica.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine un electrón que se mueve con rapidez alta. El electrón porta cantidad de movimiento, pero la magnitud de su cantidad de movimiento no está dada por  $p = mu$  porque la rapidez es relativista.

**Categorizar** Este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución que involucra una ecuación relativista.

Use la ecuación 38.19 con  $u = 0.750c$  para encontrar la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} p &= \frac{m_e u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ p &= \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(0.750)(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})}{\sqrt{1 - \frac{(0.750c)^2}{c^2}}} \\ &= 3.10 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

La expresión clásica (usada incorrectamente en este caso) da  $p_{\text{clásica}} = m_e u = 2.05 \times 10^{-22}$  kg · m/s. Por tanto, ¡el resultado relativista correcto es 50% mayor que el resultado clásico!

## 38.8 Energía relativista

Ha visto que la definición de cantidad de movimiento lineal requiere una generalización para hacerla compatible con los postulados de Einstein. Esta conclusión implica que, con toda probabilidad, la definición de energía cinética también debe modificarse.

Para deducir la forma relativista del teorema del trabajo y energía cinética, imagine una partícula que se mueve en una dimensión a lo largo del eje  $x$ . Una fuerza en la dirección  $x$  hace que la cantidad de movimiento de la partícula cambie según la ecuación 38.20. A continuación suponga que la partícula se acelera desde el reposo hasta alguna rapidez final  $u$ . El trabajo invertido por la fuerza  $F$  sobre la partícula es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx \quad (38.21)$$

Para efectuar esta integración y hallar el trabajo realizado sobre la partícula y la energía cinética relativista como función de  $u$ , primero evalúe  $dp/dt$ :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{du}{dt}$$



Al sustituir esta expresión para  $dp/dt$  y  $dx = u dt$  en la ecuación 38.21

$$W = \int_0^t \frac{m}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{du}{dt} (u dt) = m \int_0^u \frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} du$$

donde se usan los límites 0 y  $u$  en la integral porque la variable de integración ha sido cambiada de  $t$  a  $u$ . Al evaluar la integral, encontramos que

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 \tag{38.22}$$

Recuerde del capítulo 7, que el trabajo realizado por una fuerza que actúa sobre un sistema formado por una sola partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula:  $W = \Delta K$ . Ya que supuso que la rapidez inicial de la partícula es cero, su energía cinética inicial es cero, así  $W = K - K_i = K - 0 = K$ . Por tanto, el trabajo  $W$  de la ecuación 38.22 es equivalente a la energía cinética relativista  $K$ :

Energía cinética relativista ▶

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \tag{38.23}$$

Esta ecuación se confirma normalmente por experimentos que usan aceleradores de partículas de alta energía.

Con rapidez baja, donde  $u/c \ll 1$ , la ecuación 38.23 debe reducirse a la expresión clásica  $K = \frac{1}{2}mu^2$ . Esto se comprueba al usar la expansión binomial  $(1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots$  para  $\beta \ll 1$ , donde las potencias de orden superior de  $\beta$  se ignoran en la expansión. (En tratamientos de relatividad,  $\beta$  es un símbolo común empleado para representar  $u/c$  o  $v/c$ ). En nuestro caso,  $\beta = u/c$ , por lo cual

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

Al sustituir esto en la ecuación 38.23

$$K \approx \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) - 1 \right] mc^2 = \frac{1}{2}mu^2 \quad (\text{para } u/c \ll 1)$$

que es la expresión clásica para la energía cinética. En la figura 38.16 se presenta una gráfica que compara las expresiones relativista y no relativista. En el caso relativista, la rapidez de la partícula nunca excede de  $c$ , cualquiera que sea la energía cinética. Las dos curvas están en concordancia con  $u \ll c$ .

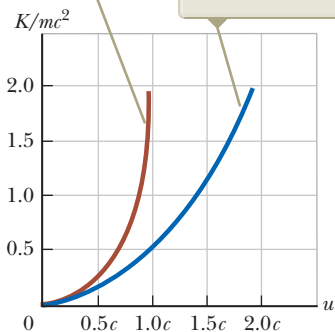
El término constante  $mc^2$  de la ecuación 38.23, que es independiente de la rapidez de la partícula, se denomina **energía en reposo**  $E_R$  de la partícula:

$$E_R = mc^2 \tag{38.24}$$

La ecuación 38.24 muestra que **la masa es una forma de energía**, donde  $c^2$  es simplemente un factor de conversión constante. Esta expresión también exhibe que una masa pequeña corresponde a una cantidad considerable de energía, un concepto fundamental de la física nuclear y de partículas elementales.

El cálculo relativista utilizando la ecuación 38.23, correctamente muestra que  $u$  siempre es menor que  $c$ .

El cálculo no relativista utilizando  $K = \frac{1}{2}mu^2$ , pronostica una curva parabólica y la rapidez  $u$  crece sin límite.



**Figura 38.16** Gráfica que compara energía cinética relativista y no relativista de una partícula en movimiento. Las energías se grafican como función de la rapidez  $u$  de la partícula.





El término  $\gamma mc^2$  en la ecuación 38.23, que depende de la rapidez de la partícula, es la suma de las energías cinética y en reposo, y se le llama **energía total**  $E$ :

Energía total = energía cinética + energía en reposo

$$E = K + mc^2 \quad (38.25)$$

o bien,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \quad (38.26)$$

◀ Energía total de una partícula relativista

En muchas situaciones, se mide la cantidad de movimiento lineal o energía de una partícula más bien que su rapidez. Por tanto, es útil tener una expresión que relacione la energía total  $E$  a la cantidad de movimiento lineal relativista  $p$ . Esto se logra al usar las expresiones  $E = \gamma mc^2$  y  $p = \gamma mu$ . Al elevar al cuadrado estas ecuaciones y restar, es posible eliminar  $u$  (problema 36). El resultado, después de un poco de álgebra, es<sup>4</sup>

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2 \quad (38.27)$$

◀ Relación de energía y cantidad de movimiento para una partícula relativista

Cuando la partícula está en reposo,  $p = 0$ , entonces  $E = E_R = mc^2$ .

En la sección 34.1 aparece el concepto de una partícula de luz, denominada **fotón**. Para partículas que tienen masa cero, como los fotones,  $m = 0$  en la ecuación 38.27 y

$$E = pc \quad (38.28)$$

◀ Relación de energía y cantidad de movimiento para un fotón

Esta ecuación es una expresión exacta que relaciona la energía total y la cantidad de movimiento lineal para fotones, que siempre se desplazan a la rapidez de la luz (en el vacío).

Por último, observe que, como la masa  $m$  de una partícula es independiente de su movimiento,  $m$  debe tener el mismo valor en todos los marcos de referencia. Por esta razón, con frecuencia  $m$  se denomina **masa invariante**. Por otra parte, debido a que la energía total y la cantidad de movimiento lineal de una partícula dependen de la velocidad, estas cantidades dependen del marco de referencia en el que se miden.

Cuando se relaciona con partículas subatómicas, es conveniente expresar su energía en electrón volts (sección 24.1) porque las partículas por lo general adquieren esta energía por aceleración mediante una diferencia de potencial. El factor de conversión, como debe recordar de la ecuación 24.5, es

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Por ejemplo, la masa de un electrón es  $9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ . Por esto, la energía en reposo del electrón es

$$\begin{aligned} m_e c^2 &= (9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}) (2.998 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 8.187 \times 10^{-14} \text{ J} \\ &= (8.187 \times 10^{-14} \text{ J}) (1 \text{ eV} / 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}) = 0.511 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Otra forma de representar esta misma idea es expresar la masa en unidades de  $\text{MeV}/c^2$  dividiendo ambos lados de la ecuación anterior por  $c^2$ :

$$m_e = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 38.6

#### Cuidado con la "masa relativista"

Algunos de los tratamientos más antiguos de la relatividad sostenían que la conservación del principio de movimiento a alta velocidad mediante el uso de un modelo en el que la masa de una partícula aumenta con la velocidad. Puede que aún se encuentre esta noción de "masa relativista" en otras lecturas, especialmente en libros antiguos. Tenga en cuenta que en la actualidad ya no es aceptada ampliamente esta noción; la masa se considera como invariable independiente de la velocidad.

La masa de un objeto en todos los marcos se considera que es la medición de un observador en reposo con respecto al objeto que es la masa

<sup>4</sup>Una forma de recordar esta relación es trazar un triángulo rectángulo que tenga una hipotenusa de longitud  $E$  y catetos de longitudes  $pc$  y  $mc^2$ .



- E XAMEN RÁPIDO 38.8** Los siguientes *pares* de energía representan la energía en reposo y la energía total de tres partículas diferentes: partícula 1:  $E$ ,  $2E$ ; partícula 2:  $E$ ,  $3E$ ; partícula 3:  $2E$ ,  $4E$ . Clasifique las partículas, de mayor a menor, según su (a) masa, (b) energía cinética, y (c) rapidez.

### Ejemplo 38.9 La energía de un protón correlón

(A) Encuentre la energía en reposo de un protón en unidades de electrón volt.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Incluso si el protón no se mueve, tiene energía asociada con su masa. Si se mueve, el protón posee más energía, siendo la energía total la suma de su energía en reposo y su energía cinética.

**Categorizar** La frase “energía en reposo” sugiere que se debe tomar un planteamiento relativista en lugar de uno clásico a este problema.

**Analizar** Use la ecuación 38.24 para encontrar la energía en reposo:  $E_R = m_p c^2 = (1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})^2$   
 $= (1.503 \times 10^{-10} \text{ J}) \left( \frac{1.00 \text{ MeV}}{1.602 \times 10^{-13} \text{ J}} \right) = 938 \text{ MeV}$

(B) Si la energía total de un protón es tres veces su energía en reposo, ¿cuál es la rapidez del protón?

#### SOLUCIÓN

Use la ecuación 38.26 para relacionar la energía total del protón con la energía en reposo:

Resuelva para  $u$ :

$$E = 3m_p c^2 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \rightarrow 3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{9} \rightarrow \frac{u^2}{c^2} = \frac{8}{9}$$

$$u = \frac{\sqrt{8}}{3} c = 0.943c = 2.83 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(C) Determine la energía cinética del protón en unidades de electrón volt.

#### SOLUCIÓN

Use la ecuación 38.25 para encontrar la energía cinética del protón:  $K = E - m_p c^2 = 3m_p c^2 - m_p c^2 = 2m_p c^2$   
 $= 2(938 \text{ MeV}) = 1.88 \times 10^3 \text{ MeV}$

(D) ¿Cuál es la cantidad de movimiento del protón?

#### SOLUCIÓN

Use la ecuación 38.27 para calcular la cantidad de movimiento:

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_p c^2)^2 = (3m_p c^2)^2$$

$$p^2 c^2 = 9(m_p c^2)^2 - (m_p c^2)^2 = 8(m_p c^2)^2$$

$$p = \sqrt{8} \frac{m_p c^2}{c} = \sqrt{8} \frac{938 \text{ MeV}}{c} = 2.65 \times 10^3 \text{ MeV}/c$$

**Finalizar** La unidad de cantidad de movimiento en la parte (D) se escribe MeV/c, que es una unidad común en física de partículas. Para comparar, puede resolver este ejemplo con ecuaciones clásicas.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** En física clásica, si la cantidad de movimiento de una partícula se duplica, la energía cinética aumenta por un factor de 4. ¿Qué ocurre con la energía cinética del protón en este ejemplo, si su cantidad de movimiento se duplica?

**Respuesta** De acuerdo con lo que ha visto hasta el momento en relatividad, es probable que prediga que su energía cinética no aumenta en un factor de 4.

Encuentre la cantidad de movimiento duplicada:

$$p_{\text{nuevo}} = 2 \left( \sqrt{8} \frac{m_p c^2}{c} \right) = 4\sqrt{2} \frac{m_p c^2}{c}$$

## 38.9 continuación

Use este resultado en la ecuación 38.27 para encontrar la nueva energía total:

$$E_{\text{nuevo}}^2 = p_{\text{nuevo}}^2 c^2 + (m_p c^2)^2$$

$$E_{\text{nuevo}}^2 = \left(4\sqrt{2} \frac{m_p c^2}{c}\right)^2 c^2 + (m_p c^2)^2 = 33(m_p c^2)^2$$

$$E_{\text{nuevo}} = \sqrt{33} m_p c^2 = 5.7 m_p c^2$$

Use la ecuación 38.25 para encontrar la nueva energía cinética:

$$K_{\text{nuevo}} = E_{\text{nuevo}} - m_p c^2 = 5.7 m_p c^2 - m_p c^2 = 4.7 m_p c^2$$

Este valor es un poco más del doble de la energía cinética que se encontró en la parte (C), no cuatro veces. En general, el factor por el que aumenta la energía cinética si la cantidad de movimiento se duplica, depende de la cantidad de movimiento inicial, pero tiende a 4 conforme la cantidad de movimiento tiende a cero. En esta última situación, la física clásica describe correctamente la situación.

## 38.9 Teoría general de la relatividad

Hasta este punto, se ha evitado un curioso acertijo. La masa tiene dos propiedades aparentemente diferentes: la *atracción gravitacional* que ejerce sobre otras masas y la propiedad *inercial*, que representa una resistencia a la aceleración. Primero discutimos estos dos atributos para masa en la sección 5.5. Para designar estos dos atributos, se usan los subíndices  $g$  e  $i$  para las masas y se escriben versiones modificadas de las ecuaciones 5.6 y 5.2

$$\text{Propiedad gravitacional (ecuación 5.6)} \quad F_g = m_g g$$

$$\text{Propiedad inercial (ecuación 5.2)} \quad \sum F = m_i a$$

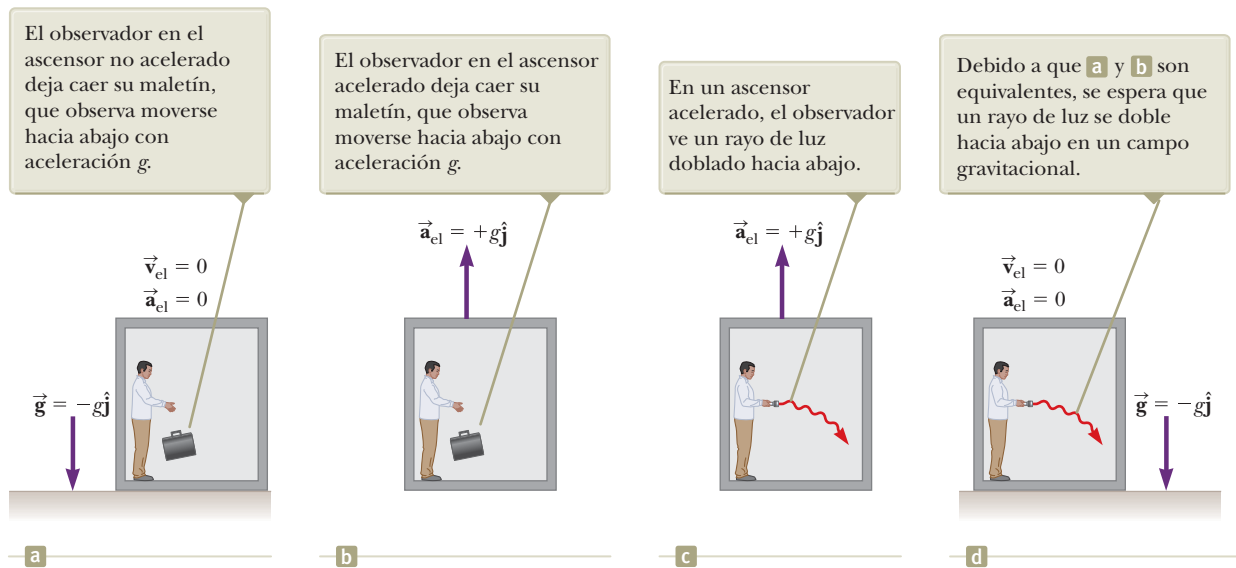
El valor para la constante gravitacional  $G$  se escogió para hacer numéricamente iguales las magnitudes de  $m_g$  y de  $m_i$ . Cualquiera que sea la forma en que se escoja  $G$ , no obstante, la proporcionalidad estricta de  $m_g$  y  $m_i$  se ha establecido experimentalmente a un grado extremadamente alto: unas cuantas partes en  $10^{12}$ . Por tanto, parece que la masa gravitacional y la masa inercial pueden ser exactamente proporcionales.

Pero, ¿por qué? Se involucran dos conceptos por completo diferentes: una fuerza de atracción gravitacional mutua entre dos masas y la resistencia de una sola masa a ser acelerada. Esta pregunta, que desconcertó a Newton y a muchos otros físicos durante años, fue contestada por Einstein en 1916 cuando publicó su teoría sobre la gravitación en *Annalen der Physik*, conocida como *teoría general de la relatividad*. Ya que es una teoría compleja desde el punto de vista matemático, aquí se ofrece sólo una sugerencia de su elegancia e intuición.

Desde el punto de vista de Einstein, el comportamiento doble de la masa era evidencia de una muy íntima y básica conexión entre los dos comportamientos. El señaló que ningún experimento mecánico (por ejemplo, dejar caer un objeto) podría distinguir entre las dos situaciones ilustradas en las figuras 38.17a y 38.17b (página 1040). En la figura 38.17a, una persona está de pie en un elevador sobre la superficie de un planeta, y se siente presionado en el piso debido a la fuerza gravitacional. Si suelta su portafolios, observa que se mueve hacia el piso con aceleración  $\vec{g} = -g \hat{j}$ . En la figura 38.17b, la persona está en un elevador en espacio vacío acelerando hacia arriba con  $\vec{a}_{\text{el}} = +g \hat{j}$ . La persona se siente presionada hacia el piso con la misma fuerza que en la figura 38.17a. Si suelta su maletín, observa que se mueve hacia el piso con aceleración  $g$ , exactamente como en la situación previa. En cada situación, un objeto soltado por el observador experimenta una aceleración hacia abajo de magnitud  $g$  en relación con el piso. En la figura 38.17a, la persona está en reposo en un marco inercial en un campo gravitacional debido al planeta. En la figura 38.17b, la persona está en un marco no inercial que acelera en espacio libre de gravedad. La afirmación de Einstein es que estas dos situaciones son completamente equivalentes.

Einstein llevó esta idea más lejos y propuso que *ningún* experimento, mecánico o de otro tipo, podría distinguir entre los dos casos. Esta extensión para incluir todos los fenómenos (no sólo mecánicos) tiene consecuencias interesantes. Por ejemplo,





**Figura 38.17** (a) El observador está en reposo en un elevador en un campo gravitacional uniforme  $\vec{g} = -g\hat{j}$ , dirigido hacia abajo. (b) El observador está en una región donde la gravedad es despreciable, pero el elevador se mueve hacia arriba con una aceleración  $\vec{a}_{el} = +g\hat{j}$ . De acuerdo con Einstein, los marcos de referencia en (a) y (b) son equivalentes. Ningún experimento local puede distinguir alguna diferencia entre los dos marcos. (c) Un observador mira un rayo de luz en el elevador acelerándose. (d) Predicción de Einstein del comportamiento de un rayo de luz en un campo gravitacional.

suponga que un pulso de luz es enviado horizontalmente en un elevador que se acelera hacia arriba en un espacio vacío, como se muestra en la figura 38.17c. Desde el punto de vista de un observador en un marco inercial fuera del elevador, la luz se desplaza en línea recta mientras que el piso del elevador acelera hacia arriba. Según el observador que está en el elevador, sin embargo, la trayectoria del pulso de luz se dobla hacia abajo cuando el piso del elevador (y el observador) acelera hacia arriba. Por tanto, en términos de la igualdad de los incisos (a) y (b) de la figura, Einstein propuso que un rayo de luz también debería ser doblado hacia abajo por un campo gravitacional, como se ve en la figura 38.17d. Experimentos realizados han verificado el efecto, aun cuando el doblamiento es pequeño. Un láser que apunta al horizonte cae menos de 1 cm después de recorrer 6 000 km. (Este doblamiento no se pronosticó en la teoría de gravitación de Newton.)

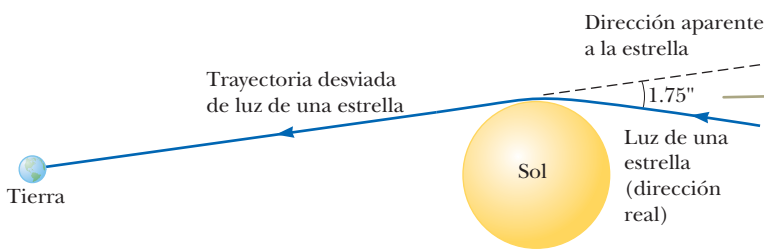
Los dos postulados de la **teoría general de la relatividad** de Einstein son:

- Todas las leyes de la naturaleza tienen la misma forma para observadores en cualquier marco de referencia, acelerados o no.
- En la cercanía de cualquier punto, un campo gravitacional es equivalente a un marco de referencia acelerado en ausencia de efectos gravitacionales. (Este es el **principio de equivalencia**.)

Un interesante efecto pronosticado por la teoría general es que el tiempo es alterado por la gravedad. Un reloj en presencia de gravedad funciona más lentamente que uno colocado donde la gravedad es insignificante. Por tanto, las frecuencias de radiación emitidas por átomos en presencia de un campo gravitacional intenso están *corridas hacia el rojo* a frecuencias menores cuando se comparan con las mismas emisiones en presencia de un campo débil. Este corrimiento hacia el rojo gravitacional ha sido detectado en líneas espectrales emitidas por átomos en estrellas pesadas. También se ha verificado en la Tierra al comparar las frecuencias de rayos gamma emitidos desde núcleos separados verticalmente unos 20 metros.

El segundo postulado sugiere que un campo gravitacional puede ser “transformado” en cualquier punto si se escoge un apropiado marco de referencia acelerado: uno en caída libre. Einstein ideó un ingenioso método para describir la aceleración necesaria para hacer “desaparecer” el campo gravitacional. Especificó un concepto, la *curvatura del espacio-tiempo*, que describe el efecto gravitacional en todo punto. En la sección 38.5, se mencionó que el espacio y el tiempo no son conceptos separados, sino





En su teoría general de relatividad, Einstein calculó que la luz de una estrella que apenas roce la superficie del Sol debe ser desviada por un ángulo de 1.75 s de arco.

**Figura 38.18** Desviación de la luz de una estrella que pasa cerca del Sol. Debido a este efecto, el Sol, o cualquier otro cuerpo remoto, puede actuar como *lente gravitacional*.

que están entretejidos. El modelo de *espacio-tiempo* describe el universo como teniendo cuatro dimensiones inseparables, con tres que representan nuestra noción clásica de espacio y la cuarta relacionada con el tiempo. De hecho, la *curvatura del espacio-tiempo* sustituye por completo la teoría gravitacional de Newton. Según Einstein, no hay nada como la fuerza gravitacional. Más bien, la presencia de una masa produce alrededor de ella una curvatura del espacio-tiempo, y esta curvatura dicta la trayectoria del espacio-tiempo que deben seguir todos los cuerpos en caída libre. Por lo tanto, la noción de masa gravitacional no es necesaria. Un objeto sigue un camino de acuerdo con su masa inercial en el espacio-tiempo curvo.

Como ejemplo de los efectos de la curvatura del espacio-tiempo, imagine dos viajeros que se mueven en trayectorias paralelas a unos pocos metros de distancia entre ellos, sobre la superficie de la Tierra, y conservando un rumbo exacto al norte a lo largo de dos líneas longitudinales. Cuando se ven el uno al otro cerca del ecuador, dirán que sus trayectorias son exactamente paralelas. Sin embargo, cuando se aproximan al polo norte, observarán que se están moviendo cada vez más cerca uno del otro y de hecho se encontrarán en el polo norte. Por lo tanto, dirán que se movieron a lo largo de trayectorias paralelas, pero uno hacia el otro, *como si hubiera una fuerza de atracción entre ellos*. Los viajeros llegarán a esta conclusión de acuerdo con su experiencia diaria de moverse en superficies planas, pero a partir de una representación mental verán que están caminando en una superficie curva y que es la geometría de la superficie curva la que los hace converger, en lugar de una fuerza de atracción. De igual forma, la relatividad general sustituye la noción de fuerzas con el movimiento de cuerpos en el espacio-tiempo curvado.

Una predicción de la teoría general de la relatividad es que un haz luminoso que pase cerca del Sol debe desviarse en el espacio-tiempo curvado producido por la masa del Sol. Esta predicción fue confirmada cuando astrónomos detectaron el doblamiento de la luz de una estrella cercana al Sol durante un eclipse solar total que ocurrió poco después de la Primera Guerra Mundial (figura 38.18). Cuando se anunció este descubrimiento, Einstein se hizo una celebridad internacional.

Si la concentración de masa se vuelve muy grande, como se cree que ocurre cuando una estrella pesada agota su combustible nuclear y se colapsa a un volumen muy pequeño, se puede formar un **agujero negro** como se analizó en el capítulo 13. En este caso, la curvatura del espacio-tiempo es tan grande que, dentro de cierta distancia del centro del agujero negro, toda la materia y la luz quedan atrapadas, como se explicó en la sección 13.6.

## Resumen

### Definiciones

La expresión relativista para la **cantidad de movimiento lineal** de una partícula que se mueve con una velocidad  $\vec{u}$  es

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{u} \quad (38.19)$$

La fuerza relativista  $\vec{F}$  que actúa sobre una partícula cuya cantidad de movimiento lineal es  $\vec{p}$  se define como

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (38.20)$$

*continúa*



## ► Conceptos y principios

Los dos postulados básicos de la teoría de la relatividad especial son los siguientes:

- Las leyes de la física deben ser las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.
- La rapidez de la luz en el vacío tiene el mismo valor,  $c = 3.00 \times 10^8$  m/s, en todos los marcos inerciales, sin importar la velocidad del observador o la velocidad de la fuente que emite la luz.

Para satisfacer los postulados de la relatividad especial, las ecuaciones de transformación galileana se deben sustituir por las **ecuaciones de transformación de Lorentz**:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (38.11)$$

donde  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  y el marco  $S'$  se mueven en la dirección  $x$  a una velocidad  $v$  en relación con el marco  $S$ .

La expresión relativista para la **energía cinética** de una partícula es

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \quad (38.23)$$

La **energía total**  $E$  de una partícula está dada por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \quad (38.26)$$

Tres consecuencias de la teoría de la relatividad especial son las siguientes:

- Los eventos que se observan como simultáneos para un observador no necesariamente se observan como simultáneos para otro observador que está en movimiento en relación con el primero.
- Los relojes en movimiento relativo a un observador se mide que funcionan más lentos en un factor  $= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Este fenómeno se conoce como **dilatación del tiempo**.
- La longitud de los objetos en movimiento se observa como contraída en la dirección de movimiento en un factor  $1/\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . Este fenómeno se conoce como **contracción de la longitud**.

La forma relativista de la **ecuación de transformación de velocidad de Lorentz** es

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (38.16)$$

donde  $u'_x$  es la componente  $x$  de la velocidad de un objeto observado en el marco  $S'$  y  $u_x$  es su componente observada en el marco  $S$ .

El término constante  $mc^2$  en la ecuación 38.23 se llama energía en reposo  $E_R$  de la partícula:

$$E_R = mc^2 \quad (38.24)$$

La cantidad de movimiento lineal relativista de una partícula se relaciona con su energía total a través de la ecuación

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2 \quad (38.27)$$

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

1. Su equipo está trabajando en la detección de ondas gravitacionales. La primera detección de ondas gravitacionales ocurrió en septiembre de 2015 y se anunció en febrero de 2016. Los datos de la detección indicaron que dos agujeros negros de 29 y 36 masas solares se habían combinado para formar un agujero negro de 62 masas solares. El colapso final se produjo en un intervalo de tiempo de 0.2 s, lo que llevó a su equipo a afirmar que la potencia de salida del colapso durante ese intervalo de tiempo fue 50 veces mayor que la de todas las estrellas del universo observable. En junio de 2016, se anunció la detección de una segunda combinación de agujeros negros. En este caso, los agujeros negros de 14.2 y 7.5 masas solares se combinaron en un agujero negro de 20.8 masas solares en 1.0 s. Trabaje nuevamente con su equipo para determinar lo siguiente: ¿Cuántas veces mayor es la potencia liberada en este segundo evento en comparación con la de todas las estrellas en el universo observable?

2. **ACTIVIDAD** Se consideró inicialmente que el neutrino tenía masa cero. Si el neutrino no tuviera masa, viajaría a la velocidad de la luz, independientemente de la energía. Sin embargo, experimentos posteriores, indican que el neutrino tiene una energía de reposo muy pequeña y, por tanto, una masa pequeña, pero finita. Una prueba para la masa de neutrinos proviene de la llegada de neutrinos de una explosión de supernova. Considere los siguientes datos sobre los tiempos de llegada en una instalación basada en la Tierra de dos neutrinos de una explosión de supernova. La supernova se produjo en una estrella situada a  $1.64 \times 10^5$  años luz de la Tierra.

Tiempo de llegada	Energía del neutrino (MeV)
7:35:41.37	38
7:35:46.96	24

Discuta estos datos en su grupo y determine una estimación de la masa del neutrino.



# Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

## SECCIÓN 38.1 Principio de la relatividad galileana

Los problemas 28-31 y 45 en el capítulo 4, así como los problemas en línea 4.23 y 4.24 se pueden asignar a esta sección.

- En el marco de referencia de un laboratorio, un observador ve que la segunda ley de Newton es válida. Suponga que las fuerzas y la masa miden lo mismo en cualquier marco de referencia para rapidezces pequeñas comparadas con la rapidez de la luz. (a) Demuestre que la segunda ley de Newton también es válida para un observador que se mueve a una rapidez constante, pequeña en comparación con la rapidez de la luz, relativa al marco del laboratorio. (b) Demuestre que la segunda ley de Newton *no* es válida en un marco de referencia que se mueve más allá del marco del laboratorio del problema 1 con una aceleración constante.
- AMT** Un auto de masa 2 000 kg que se desplaza con una rapidez de 20.0 m/s choca y queda trabado con un auto de 1 500 kg en reposo en un semáforo. Demuestre que se conserva la cantidad de movimiento en un marco de referencia que se mueve a 10.0 m/s en la dirección del auto en movimiento.

## SECCIÓN 38.4 Consecuencias de la teoría especial de la relatividad

El problema 51 del capítulo 4 se puede asignar a esta sección.

- CIC** Una regla moviéndose a  $0.900c$  en relación con la superficie de la Tierra se acerca a un observador en reposo con respecto a la misma superficie. (a) ¿Cuál es la longitud de la regla como la mide el observador? (b) Cualitativamente, ¿cómo sería la respuesta al inciso (a) cambiar si el observador empezó a correr hacia la regla?
- Un muón formado a grandes alturas de la atmósfera de la Tierra se desplaza con una rapidez  $v = 0.990c$  una distancia de 4.60 km antes de desintegrarse en un electrón, un neutrino y un antineutrino ( $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$ ). (a) ¿Cuánto dura el muón, observado en su marco de referencia? (b) ¿Cuánto se desplaza la Tierra, observada en el marco del muón?
- Un vehículo de espacio profundo se aleja de la Tierra a una rapidez de  $0.800c$ . Un astronauta en el vehículo mide un intervalo de tiempo de 3.00 s para girar su cuerpo a través de 1.00 rev mientras flota en el vehículo. ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para este giro según un observador en la Tierra?
- BIO** Una astronauta viaja en un vehículo espacial que tiene una rapidez de  $0.500c$  respecto a la Tierra. La astronauta observa su ritmo cardíaco a 75.0 latidos por minuto. Señales generadas por los latidos de la astronauta son radiadas a la Tierra cuando el vehículo se mueve en una dirección perpendicular a la línea que conecta el vehículo con un observador en la Tierra. (a) ¿Qué ritmo cardíaco mide el observador en la Tierra? (b) ¿Qué pasaría si? ¿Cuál sería el ritmo cardíaco si la rapidez del vehículo espacial aumentara a  $0.990c$ ?
- ¿Para qué valor de  $v$  es que  $\gamma = 1.010$ ? Observe que para magnitudes de velocidad menores que este valor, la dilatación de tiempo y contracción de longitud son efectos que suman menos de 1%.

- CE** Usted ha sido contratado como testigo experto para un abogado que representa a un conductor que conduce a alta velocidad. El conductor del automóvil recibió una multa por pasar una luz roja en una intersección. Según el conductor, que ha llevado algunos cursos de física, cuando miraba la luz roja al acercarse a la intersección, el efecto Doppler hizo que la luz de longitud de onda de 650 nm pareciera ser luz verde de una longitud de onda de 520 nm. Por tanto, de acuerdo con el conductor, no debería acusársele de encender una luz roja porque le parecía verde. ¿Qué consejo le da al abogado?

- AMT** **T** Una nave espacial con una longitud característica de 300 m tarda  $0.750 \mu\text{s}$  en pasar frente a un observador en la Tierra. Determine la rapidez de la nave espacial medida por dicho observador.

- S** Una nave espacial con una longitud adecuada  $L_p$  pasa por un observador en la Tierra. Según este observador, se necesita un intervalo de tiempo  $\Delta t$  para que la nave pase por un punto fijo. Determine la rapidez del objeto como la mide el observador basado en la Tierra

- Una fuente de luz se aleja de un observador con una rapidez  $v_{\text{fuente}}$  que es pequeña en comparación con  $c$ . (a) Demuestre que el corrimiento fraccionario en la longitud de onda medida está dado por la expresión aproximada de

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v_s}{c}$$

Este fenómeno se conoce como corrimiento hacia el rojo, porque la luz visible se corre hacia el rojo. (b) Mediciones espectroscópicas de luz a  $\lambda = 397 \text{ nm}$  que provienen de una galaxia en la Osa Mayor dejan ver un corrimiento hacia el rojo de 20.0 nm. ¿Cuál es la rapidez con la que se aleja la galaxia?

- Un cubo de acero tiene un volumen de  $1.00 \text{ cm}^3$  y una masa de 8.00 g cuando está en reposo sobre la Tierra. Si este cubo tiene ahora una rapidez  $u = 0.900c$ , ¿cuál es su densidad, medida por un observador estacionario? Tenga en cuenta que la densidad relativista se define como  $E_R/c^2V$ .

- CIC** **Problema de repaso.** En 1963 el astronauta Gordon Cooper de la nave Mercury le dio 22 vueltas a la Tierra. La prensa dijo que en cada vuelta él envejeció 2 millonésimas de segundo menos de lo que hubiera envejecido en la Tierra. (a) Si se supone que él se encontraba a 160 km sobre la Tierra en una órbita circular, determine la diferencia de tiempo entre alguien en la Tierra y el astronauta en órbita para las 22 vueltas. Necesitará usar la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

para  $x$  pequeña. (b) ¿La prensa reportó información precisa? Explique por qué.

- CE** Tiene una ayudantía con un profesor de matemáticas en un mundo futuro en el que los viajes espaciales son comunes y las naves espaciales regularmente alcanzan velocidades cercanas a la de la luz. Recientemente, una nave espacial despegó para llevar individuos a colonizar un planeta parecido a la Tierra alrededor de una estrella cercana. Su profesor, que permanece en la Tierra, está enseñando a los estudiantes en la nave espacial a través de la versión futura de aprendizaje a distancia. Es hora de que los estudiantes en la nave espacial



tomen un examen de matemáticas. El profesor desea que los estudiantes tengan un intervalo de tiempo  $\Delta t_p = 2.00$  h para completar el examen, de modo que justo cuando la nave espacial pasa a la Tierra en su último viaje alrededor del Sol en su constante CR cruzado de  $0.960c$ , envía una señal al supervisor para que los estudiantes comiencen el examen. Conociendo su experiencia en cursos de física, el profesor le pide que determine el intervalo de tiempo durante el cual debe esperar antes de enviar una señal de radio a la nave espacial que se va para decirle al supervisor que los estudiantes dejen de trabajar en el examen.

15. Un radar de la policía detecta la siguiente rapidez de un auto (figura P38.15). Microondas de una frecuencia conocida con gran precisión se emiten hacia el auto. El auto en movimiento refleja las microondas con un corrimiento Doppler. Las ondas reflejadas se reciben y combinan con una versión atenuada de la onda transmitida. Se presentan batimientos entre las dos señales de microondas. Se mide la frecuencia de los batimientos. (a) Para una onda electromagnética reflejada a su fuente desde un espejo que se aproxima con una rapidez  $v$ , demuestre que la onda reflejada tiene una frecuencia de

$$f' = \frac{c + v}{c - v} f$$

donde  $f$  es la frecuencia de la fuente. (b) Considerando que  $v$  es mucho menor que  $c$ , demuestre que la frecuencia de pulsación puede escribirse como  $f_{\text{pulsación}} = 2v/\lambda$ . (c) ¿Qué frecuencia de pulsación se observa para una rapidez de  $30.0$  m/s de un auto si las microondas tienen una frecuencia de  $10.0$  GHz? (d) Si la medición de la frecuencia de pulsación en (c) es precisa a  $\pm 5$  Hz, ¿qué tan precisa es la medición de rapidez?



Figura P38.15

### SECCIÓN 38.5 Ecuaciones de transformación de Lorentz

16. Shannon observa dos pulsos de luz que han de emitirse desde la misma ubicación, pero separados un tiempo de  $3.00$   $\mu\text{s}$ . Kimmie ve la emisión de los dos pulsos con una separación en el tiempo de  $9.00$   $\mu\text{s}$ . (a) ¿Con qué rapidez se mueve Kimmie respecto a Shannon? (b) Según Kimmie, ¿cuál es la separación en el espacio de los dos pulsos?

17. Se observa que una varilla en movimiento tiene una longitud de  $2.00$  m y está orientada con un ángulo  $\theta = 30^\circ$  respecto a la dirección del movimiento, como se muestra en la figura P38.17. La varilla tiene una rapidez de  $0.995c$ . (a) ¿Cuál es la longitud de la varilla? (b) ¿Cuál es el ángulo de orientación en el marco característico?

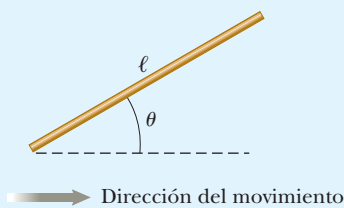


Figura P38.17

18. Una varilla que se mueve con una rapidez  $v$  a lo largo de la dirección horizontal se observa que tiene longitud  $\ell$  y forma un ángulo  $\theta$  con respecto a la dirección de movimiento como se muestra en la figura P39.29. (a) Demuestre que la longitud de la varilla como la mide un observador en reposo con respecto a la varilla es,  $\ell_p = \ell[1 - (v^2/c^2) \cos^2\theta]^{1/2}$ . (b) Demuestre que el ángulo  $\theta_p$  que la varilla de forma con el eje  $x$  de acuerdo a un observador en reposo con respecto a la varilla, se puede encontrar a partir de  $\tan\theta_p = \gamma \tan\theta$ . Estos resultados muestran que la varilla observada es contraída y hecha girar. (Tome el extremo inferior de la varilla como el origen del sistema de coordenadas en el que la varilla está en reposo.)

19. Una luz roja destella en la posición  $x_R = 3.00$  m y en un tiempo  $t_R = 1.00 \times 10^{-9}$  s, y una luz azul centellea en  $x_B = 5.00$  m y  $t_B = 9.00 \times 10^{-9}$  s, todos observados en el marco de referencia S. El marco de referencia S' tiene su origen en el mismo punto que  $t = t' = 0$ ; el marco S' se mueve uniformemente a la derecha. Se observa que ambos destellos se presentan en el mismo lugar en S'. (a) Encuentre la rapidez relativa entre S y S'. (b) Encuentre la ubicación de los dos destellos en el marco S'. (c) ¿En qué tiempo se presenta el destello rojo en el marco S'?

### SECCIÓN 38.6 Ecuaciones de transformación de velocidad de Lorentz

20. Ha sido contratado como testigo experto en el futuro por un abogado que representa al conductor de una nave espacial. El conductor es acusado de exceder el límite galáctico de velocidad de  $0.700c$  en relación con la Tierra mientras es perseguido por una nave espacial galáctica de la policía. El conductor afirma que es inocente, que su velocidad estaba muy por debajo de ese límite. Se le han proporcionado los siguientes datos: la nave espacial de la policía viajaba a  $0.600c$  mientras perseguía al conductor y un técnico de la nave espacial de la policía midió que la supuesta nave espacial viajaba a  $0.300c$  en relación con la nave espacial de la policía. ¿Qué consejo debería darle al abogado?

21. La figura P38.21 muestra un chorro de material (arriba a la derecha) que está siendo expulsado por la galaxia M87 (abajo a la izquierda). Se cree que estos chorros son la evidencia de agujeros negros súper masivos en el centro de una galaxia. Suponga que dos chorros de material son expulsados en direcciones opuestas desde el centro de una galaxia. Ambos chorros se mueven con una velocidad de  $0.750c$  respecto al centro de la galaxia. Determine la rapidez de un chorro respecto al otro.



Figura P38.21

22. Una nave espacial es lanzada desde la superficie de la Tierra con una velocidad de  $0.600c$  en un ángulo de  $50.0^\circ$  por encima del eje horizontal  $x$  positivo. Otra nave espacial que está en movimiento pasa con una velocidad de  $0.700c$  en la dirección  $x$  negativa. Determine la magnitud y dirección de la velocidad de la primera nave espacial como la mide el piloto de la segunda nave espacial.

**SECCIÓN 38.7 Cantidad de movimiento lineal relativista**

**23.** Calcule la cantidad de movimiento de un electrón que se mueve con una rapidez de (a)  $0.0100c$ , (b)  $0.500c$  y (c)  $0.900c$ .

**24.** Demuestre que la rapidez de un objeto que tiene una cantidad de movimiento de magnitud  $p$  y masa  $m$  es

$$u = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc/p)^2}}$$

**25.** (a) Calcule la cantidad de movimiento clásico de un protón que viaja a  $0.990c$ , dejando de lado los efectos relativistas. (b) Repita el cálculo al incluir los efectos relativistas. (c) ¿Tiene sentido despreciar la relatividad a tales rapidezces?

**26.** La rapidez límite en cierta autopista es de  $90.0$  km/h. Suponga que las multas por alta rapidez se hacen proporcionales a la cantidad por la que la cantidad de movimiento de un vehículo supera la cantidad de movimiento que tendría cuando viaja a la rapidez límite. La multa por conducir a  $190$  km/h (esto es,  $100$  km/h por arriba de la rapidez límite) es de  $80$  dólares. En tal caso, ¿cuál será la multa por viajar (a) a  $1090$  km/h? (b) ¿A  $1\,000\,000\,090$  km/h?

**27.** Una partícula inestable en reposo se descompone en dos fragmentos de masa desigual. La masa del primer fragmento es  $2.50 \times 10^{-28}$  kg, y la del otro es  $1.67 \times 10^{-27}$  kg. Si el fragmento más ligero tiene una rapidez de  $0.893c$  después de la separación, ¿cuál es la rapidez del fragmento más pesado?

**SECCIÓN 38.8 Energía relativista**

**28.** (a) Determine la energía cinética de una nave espacial de  $78.0$  kg lanzada fuera del sistema solar a una rapidez  $106$  km/s utilizando la ecuación clásica  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . (b) ¿Qué pasa si? Calcule su energía cinética mediante la ecuación relativista. (c) Explique el resultado de la comparación de las respuestas de los incisos (a) y (b).

**29.** Determine la energía requerida para acelerar un electrón a partir de (a)  $0.500c$  a  $0.900c$  y (b)  $0.900c$  a  $0.990c$ .

**30.** Demuestre que, para cualquier cuerpo que se mueva a menos de una décima de la rapidez de la luz, la energía cinética relativista coincide con el resultado de la ecuación clásica  $K = \frac{1}{2}mv^2$  en una variación menor a  $1\%$ . Por tanto, para la mayor parte de los casos, la ecuación clásica es lo suficientemente buena para describir estos objetos.

**31.** Los protones de un acelerador en el Laboratorio Nacional Fermi, cerca de Chicago, son acelerados a una energía total que es  $400$  veces su energía en reposo. (a) ¿Cuál es la rapidez de los protones en términos de  $c$ ? (b) ¿Cuál es su energía cinética en MeV?

**32.** Usted está trabajando para una compañía de energía alternativa. Su supervisor tiene una idea para una nueva fuente de energía. Quiere construir un reactor de materia y antimateria que convierta toda la masa de materia y antimateria en energía recuperable, sin desperdicio. Él tiene ideas elevadas y quiere que su reactor suministre energía a *todo* el mundo, reemplazando carbón, combustibles fósiles, plantas hidroeléctricas, eólicas, térmicas y fuentes de energía nuclear en todos los países. (a) Le pide que determine las cantidades de suministro de materia y antimateria que deberán combinarse para satisfacer las necesidades mundiales durante un año. (b) También le pide que determine qué tan grandes deben ser los contenedores para almacenar un suministro de  $5.0$  años de materia y antimateria mientras aguarda ser utilizado en el reactor. El consumo de energía actual en todo el mundo es

de  $4.0 \times 10^{20}$  J por año, y la materia y la antimateria tendrán aproximadamente la densidad de aluminio,  $2.70$  g/cm<sup>3</sup>.

**33.** La energía total de un protón es el doble de su energía en reposo. Determine la cantidad de movimiento del protón en unidades MeV/c.

**34.** Cuando  $1.00$  g de hidrógeno se combina con  $8.00$  g de oxígeno, se forman  $9.00$  g de agua. Durante esta reacción química se liberan  $2.86 \times 10^5$  J de energía. (a) ¿La masa del agua es mayor o menor que la masa de los reactantes? (b) ¿Cuál es la diferencia en masa? (c) Explique si es posible detectar el cambio de masa.

**35.** La energía en reposo de un electrón es de  $0.511$  MeV. La energía en reposo de un protón es de  $938$  MeV. Suponga que ambas partículas tienen energía cinética de  $2.00$  MeV. Encuentre la rapidez de (a) el electrón y (b) el protón. (c) ¿En qué factor supera la rapidez del electrón a la del protón? (d) Repita los cálculos de los incisos (a) – (c) si supone que ambas partículas tienen energías cinéticas de  $2000$  MeV.

**36.** Demuestre que la relación de energía y cantidad de movimiento en la ecuación  $38.27 E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$  se sigue de las expresiones  $E = \gamma mc^2$  y  $p = \gamma mu$ .

**37.** Las estrellas masivas terminan sus vidas en explosiones de supernovas que producen los núcleos de todos los átomos en la mitad inferior de la tabla periódica por la fusión de los núcleos más pequeños. Este problema modela aproximadamente ese proceso. Una partícula de masa  $m = 1.99 \times 10^{-26}$  kg que se mueve con una velocidad  $\vec{u} = 0.500c\hat{i}$  choca de frente y se adhiere a una partícula de masa  $m' = m/3$  que se mueve con la velocidad  $\vec{u}' = -0.500c\hat{i}$ . ¿Cuál es la masa de la partícula resultante?

**38.** Las estrellas masivas terminan sus vidas en explosiones de supernovas que producen los núcleos de todos los átomos en la mitad inferior de la tabla periódica por la fusión de los núcleos más pequeños. Este problema modela aproximadamente ese proceso. Una partícula de masa  $m$  que se mueve a lo largo del eje  $x$  con una componente de velocidad  $+u$  choca frontalmente y se pega a una partícula de masa  $m/3$  en movimiento a lo largo del eje  $x$  con componente de velocidad  $-u$ . (a) ¿Cuál es la masa  $m$  de la partícula resultante? (b) Evalúe la expresión del inciso (a) en el límite de  $u \rightarrow 0$ . (c) Explique si el resultado está de acuerdo con lo que cabe esperar de la física relativista.

**39.** Considere un automóvil que se mueve con rapidez de autopista  $u$ . ¿Su energía cinética real es mayor o menor que  $\frac{1}{2}mu^2$ ? Realice una estimación del orden de magnitud de la cantidad en la que su energía cinética real difiere de  $\frac{1}{2}mu^2$ . En su solución, establezca las cantidades que toma como datos y los valores que midió o estimó para ellos. Puede encontrar útil el apéndice B.5.

**40.** Una partícula inestable, con masa  $m = 3.34 \times 10^{-27}$  kg está inicialmente en reposo. La partícula decae en dos fragmentos que vuelan fuera a lo largo del eje  $x$  con componentes de velocidad  $u_1 = 0.987c$  y  $u_2 = -0.868c$ . A partir de esta información, se desea determinar las masas de los fragmentos 1 y 2. (a) ¿el sistema inicial de la partícula inestable, se convierte en el sistema de los dos fragmentos, aislado o no aislado? (b) En función de su respuesta al inciso (a), ¿cuáles dos análisis de modelos son apropiados para esta situación? (c) Halle los valores de  $\gamma$  de los dos fragmentos después del decaimiento. (d) Use uno de los análisis de modelos en el inciso (b) para encontrar una relación entre las masas  $m_1$  y  $m_2$  de los fragmentos. (e) Con el segundo análisis de modelo en el inciso



- (b), encuentre una segunda relación entre las masas  $m_1$  y  $m_2$ .  
 (f) Resuelva las relaciones en los incisos (d) y (e) de forma simultánea para las masas  $m_1$  y  $m_2$ .

### SECCIÓN 38.9 Teoría general de la relatividad

- 41. Problema de repaso.** Un satélite de la Tierra empleado en el sistema de posicionamiento global (GPS) se mueve en órbita circular con un periodo de 11 h 58 min. (a) Determine el radio de su órbita. (b) Determine su rapidez. (c) El satélite contiene un oscilador que produce la señal principal no militar GPS. Su frecuencia es 1575.42 MHz en el marco de referencia del satélite. Cuando esta frecuencia es recibida por un receptor GPS (figura P38.41) en la superficie terrestre, ¿cuál es el cambio fraccionario en ella debido a la dilatación del tiempo, como lo describe la relatividad especial? (d) El corrimiento hacia el azul gravitacional de la frecuencia, según la relatividad general, es un efecto separado. Se llama corrimiento hacia el azul para indicar un cambio a frecuencia alta. La magnitud del cambio fraccionario está dado por

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta U_g}{mc^2}$$

donde  $U_g$  es el cambio en la energía potencial gravitacional de un sistema objeto-Tierra cuando el objeto de masa  $m$  se mueve entre los dos puntos donde se observa la señal. Calcule este cambio fraccionario en la frecuencia. (e) ¿Cuál es el cambio fraccionario general en la frecuencia debido a la dilatación del tiempo y al corrimiento hacia el azul gravitacional?



Figura P38.41

### PROBLEMAS ADICIONALES

- 42.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? En su 40 cumpleaños, los gemelos Veloz y Goslo se despiden cuando Veloz se va a un planeta que está a 50 al de distancia. Viaja a una rapidez constante de  $0.85c$  e inmediatamente se da la vuelta y regresa a la Tierra después de llegar al planeta. Al llegar de nuevo a la Tierra, Veloz tiene una alegre reunión con Goslo.
- 43.** Un astronauta desea visitar la galaxia de Andrómeda, haciendo un viaje de ida que le llevará 30.0 años en el marco de referencia de la nave espacial. Suponga que la galaxia está de 2.00 millones de años luz de distancia y su rapidez es constante. (a) ¿A qué velocidad se debe viajar con relación a la Tierra? (b) ¿Cuál será la energía cinética de la nave espacial, que tiene una masa de  $1.00 \times 10^6$  kg? (c) ¿Cuál es

el costo de esta energía si se compra a un precio típico de consumo de energía eléctrica, 13.0 ¢ por kWh? La siguiente aproximación será útil:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} \text{ para } x \ll 1$$

- 44.** La ecuación



$$K = \left( \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1 \right) mc^2$$

da la energía cinética de una partícula que se mueve con rapidez  $u$ . (a) Resuelva la ecuación para  $u$ . (b) A partir de la ecuación para  $u$ , identifique el valor mínimo posible de rapidez y la correspondiente energía cinética. (c) Identifique la máxima rapidez posible y la correspondiente energía cinética. (d) Derive la ecuación para  $u$  respecto al tiempo para obtener una ecuación que describa la aceleración de una partícula como función de su energía cinética y la potencia de entrada a la partícula. (e) Observe que, para una partícula no relativista, se tiene  $u = (2K/m)^{1/2}$ , y que derivar esta ecuación respecto al tiempo da  $a = P/(2mK)^{1/2}$ . Establezca la forma límite de la expresión en el inciso (d) a baja energía. Establezca cómo se compara con la expresión no relativista. (f) Establezca la forma límite de la expresión en el inciso (d) a alta energía. (g) Considere una partícula con potencia de entrada constante. Explique cómo la respuesta al inciso (f) ayuda a explicar la respuesta al inciso (c).

- 45.** Considere al astronauta planeando el viaje a Andrómeda en el problema 43. (a) A tres cifras significativas, ¿cuál es el valor de  $\gamma$  para la rapidez hallada en el inciso (a) del problema 43? (b) Justo cuando el astronauta se va en su viaje a rapidez constante, un haz de luz se envía también en la dirección de Andrómeda. De acuerdo con el observador en la Tierra, ¿cuánto más tarde llega el astronauta a Andrómeda después de la llegada del rayo de luz?

- 46.** El movimiento de un medio transparente influye en la rapidez de la luz. Este efecto lo observó por primera ocasión Fizeau en 1851. Considere un haz de luz en agua que se mueve con rapidez  $v$  en una tubería horizontal. Suponga que la luz viaja en la misma dirección que el agua. La rapidez de la luz respecto al agua es  $c/n$ , donde  $n = 1.33$  es el índice de refracción del agua. (a) Use la ecuación de transformación de velocidad para demostrar que la rapidez de la luz medida en el marco del laboratorio es

$$u = \frac{c}{n} \left( \frac{1 + nv/c}{1 + v/n} \right)$$

(b) Demuestre que para  $v \ll c$ , la expresión del inciso (a) se convierte, a una buena aproximación, en

$$u \approx \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2}$$

(c) Argumente a favor o en contra de la visión de que se debe esperar que el resultado sea  $u = (c/n) + v$ , de acuerdo con la transformación galileana, y que la presencia del término  $-v/n^2$  representa un efecto relativista que aparece incluso a rapideces “no relativistas”. (d) Evalúe  $u$  en el límite cuando la rapidez del agua tiende a  $c$ .

- 47.** Un objeto se desintegra en dos fragmentos. Uno de los fragmentos tiene una masa de  $1.00$  MeV/ $c^2$  y una cantidad de movimiento  $1.75$  MeV/ $c$  en la dirección  $x$  positiva. El otro



fragmento tiene una masa de  $1.50 \text{ MeV}/c^2$  y una cantidad de movimiento de  $2.00 \text{ MeV}/c$  en la dirección y positiva. Encuentre (a) la masa y (b) la rapidez del objeto original.

48. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un experimentador está acelerando electrones para uso en la prueba de un material. Se encuentra que cuando los acelera a través de una diferencia de potencial de  $84.0 \text{ kV}$ , los electrones tienen la mitad de la rapidez que desea. Se cuadruplica la diferencia de potencial de  $336 \text{ kV}$ , y los electrones acelerados a través de esta diferencia de potencial tienen la rapidez deseada.
49. **Problema de repaso.** Alrededor del núcleo de un reactor nuclear protegido por una gran fosa de agua, la radiación Cerenkov aparece como un resplandor azul. (Vea la figura P16.39 en la página 448.) La radiación Cerenkov se produce cuando una partícula viaja más rápido a través de un medio que la velocidad de la luz en ese medio. Es el equivalente electromagnético de una ola de proa o de una explosión sónica. Un electrón viaja a través del agua a una velocidad  $10.0\%$  más rápido que la velocidad de la luz en el agua. Determine: (a) la energía del total del electrón, (b) la energía cinética y (c) la cantidad de movimiento. (d) Halle el ángulo entre la onda de choque y la dirección de movimiento del electrón.
50. (a) Elabore una gráfica de la energía cinética relativista y la energía cinética clásica, ambas como función de la rapidez, para un objeto con una masa de su elección. (b) ¿A qué rapidez subestima la energía cinética clásica el valor experimental en  $1\%$ ? (c) ¿En  $5\%$ ? (d) ¿En  $50\%$ ?
51. Imagine que todo el Sol, de masa  $M$ , se colapsa a una esfera de radio  $R_g$ , de manera que el trabajo necesario para remover una pequeña masa  $m$  desde la superficie sería igual a su energía en reposo  $mc^2$ . Este radio se denomina *radio gravitacional*. (a) Utilice este método para demostrar que  $R_g = GM_s/c^2$ . (b) Hallar el valor numérico de  $R_g$ .
52. Un núcleo de  $^{57}\text{Fe}$  en reposo emite un fotón de  $14.0 \text{ keV}$ . Use la conservación de la energía y la cantidad de movimiento para deducir la energía cinética del núcleo de retroceso en electrón volts. Utilice  $Mc^2 = 8.60 \times 10^{-9} \text{ J}$  para el estado final del núcleo de  $^{57}\text{Fe}$ .

## PROBLEMAS DE DESAFÍO

53. La creación y el estudio de nuevas partículas elementales es una parte importante de la física contemporánea. En especial es interesante el descubrimiento de una partícula muy pesada. Para crear una partícula de masa  $M$  es necesaria una energía  $Mc^2$ . Con suficiente energía, es posible crear una partícula exótica al dejar que una partícula de materia ordinaria en rápido movimiento, por ejemplo un protón, choque con una partícula similar a un objetivo. Considere una colisión perfectamente inelástica entre dos protones: un protón incidente con masa  $m_p$ , energía cinética  $K$  y magnitud  $p$  de cantidad de movimiento, se une con un protón objetivo originalmente inmóvil para formar una sola partícula producto de masa  $M$ . podría pensar que la creación de una nueva partícula, nueve veces más pesada que en un experimento previo, haría necesaria precisamente nueve veces más energía para el protón incidente. Por desgracia, no toda la energía cinética total del protón entrante está disponible para crear la partícula producto, porque la conservación de la cantidad de

movimiento exige que después de la colisión el sistema en su conjunto todavía debe tener energía cinética. En consecuencia sólo una fracción de la energía de la partícula incidente está disponible para crear una partícula nueva. En este problema determine la forma en que la energía disponible para la creación de la partícula depende de la energía del protón en movimiento. Demuestre que la energía existente para crear una partícula producto está dada por

$$Mc^2 = 2m_p c^2 \sqrt{1 + \frac{K}{2m_p c^2}}$$

Este resultado muestra que cuando la energía cinética  $K$  del protón incidente sea grande en comparación con su energía en reposo  $m_p c^2$ ,  $M$  se aproxima a  $(2m_p K)^{1/2}/c$ . Por tanto, si la energía del protón entrante se incrementa en un factor de nueve, la masa creada aumenta sólo en un factor de tres y no en un factor de nueve como se esperaba. (b) Este problema puede ser aliviado mediante el uso de *rayos colisionadores* como es el caso de casi todos los aceleradores modernos. Aquí la cantidad total de movimiento de un par de partículas que interactúan puede ser cero. El centro de masa puede estar en reposo después de la colisión, de modo que en principio toda la energía cinética inicial se puede usar para crear partículas. Demuestre que

$$Mc^2 = 2mc^2 \left( 1 + \frac{K}{mc^2} \right)$$

donde  $K$  es la energía cinética total de dos partículas idénticas que colisionan entre sí. En este caso, si  $K \gg mc^2$ ,  $M$  es directamente proporcional a  $K$ , como es de esperarse.

54. Una partícula con carga eléctrica  $q$  se mueve a lo largo de una recta en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  con una rapidez  $u$ . La fuerza eléctrica ejercida sobre la carga es  $q\vec{E}$ . El movimiento y el campo eléctrico están en la dirección  $x$ . (a) Demuestre que la aceleración de la partícula en la dirección  $x$  está dada por

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{qE}{m} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{3/2}$$

(b) Analice la importancia de la dependencia de la aceleración sobre la rapidez. (c) **¿Qué pasaría si?** La partícula arranca desde el reposo en  $x = 0$  y  $t = 0$ , ¿qué haría usted para hallar la rapidez de la partícula y su posición en el tiempo  $t$ ?

55. **CIC** Suponga que el Sol está a punto de explotar. En un esfuerzo por escapar, lo hace en una nave espacial a  $v = 0.800 c$  y se dirige hacia la estrella Tau Ceti, a  $12.0$  años luz de distancia. Cuando llega al punto medio del viaje desde la Tierra, ve que el Sol explota y, desafortunadamente, en el mismo instante también Tau Ceti explota. (a) En el marco de referencia de la nave espacial, ¿debe concluir que las dos explosiones se presentan en forma simultánea? Si no es así, ¿cuál ocurrió primero? (b) **¿Qué pasaría si?** En un marco de referencia en el que el Sol y Tau Ceti están en reposo, ¿explotaron simultáneamente? Si no es así, ¿cuál explotó primero?



# 39

El filamento de este foco brilla con un resplandor anaranjado. ¿A qué se debe esto? La física clásica no es capaz de explicar la distribución de la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida por un objeto caliente que se observa en experimentos. En el año 1900 se propuso una teoría que describe la radiación emitida por dichos objetos, y que se considera el amanecer de la física cuántica. (Imágenes de Steve Cole/Getty)



## Introducción a la Física cuántica

- 39.1 Radiación de cuerpo negro e hipótesis de Planck
- 39.2 Efecto fotoeléctrico
- 39.3 Efecto Compton
- 39.4 Naturaleza de las ondas electromagnéticas
- 39.5 Propiedades ondulatorias de las partículas
- 39.6 Un nuevo modelo: La partícula cuántica
- 39.7 Revisión del experimento de doble rejilla
- 39.8 El principio de incertidumbre

### **IMAGINE** Es hora de jugar en su garaje nuevamente y tratar de

distraerse de las constantes preguntas de física que surgen de sus observaciones diarias. Decide limpiar una caja de equipo viejo que tiene en un rincón y tirar cosas que no necesita. Mientras revisa el equipo, se encuentra con algo que no sabía que estaba allí: un viejo transformador variable. Puede conectar un dispositivo eléctrico a su salida y luego marcar el voltaje de CA que desee aplicar: 0–120 voltios. Agarra una lámpara vieja, la conecta al transformador y atornilla un foco incandescente a la lámpara. Fija el transformador en su voltaje más alto y lo enciende. La lámpara se enciende. Ahora baja lentamente el voltaje del transformador. El foco permanece encendido, casi hasta cero volts. A medida que cae el voltaje, la luz del filamento se vuelve más tenue, ¡pero también cambia de color! A altos voltajes, la luz es de color amarillo-blanco, pero se vuelve más naranja a medida que cae el voltaje, como en la foto de arriba. ¿Por qué sucede eso? Usted abandona su trabajo de limpieza en el garaje e ingresa a su casa para leer el capítulo 39.

**CONEXIONES** En el capítulo 38, explicamos que la mecánica newtoniana debe ser remplazada por la teoría de la relatividad especial de Einstein cuando se trata de velocidades de partículas comparables a la velocidad de la luz. Sin embargo, para muchos otros problemas, ni la relatividad ni la física clásica podrían proporcionar un acuerdo entre teoría y experimento. Cuando los físicos buscaron nuevas formas de resolver estos rompecabezas, se produjo otra revolución en la física entre 1900 y 1930. Una nueva teoría llamada mecánica cuántica tuvo un gran éxito al explicar el comportamiento de las partículas de tamaño microscópico. Al igual que la teoría especial de la relatividad, la teoría cuántica requiere una modificación de nuestras ideas sobre el mundo físico. Debido a que un extenso estudio de la teoría cuántica está más allá del alcance de este libro, este capítulo es simplemente una introducción a sus principios subyacentes. Pero usaremos estos principios en nuestras investigaciones a lo largo del resto de este libro.

## 39.1 Radiación de cuerpo negro e hipótesis de Planck

Comencemos pensando en el filamento brillante en la historia de apertura. Un objeto a cualquier temperatura emite ondas electromagnéticas en la forma de **radiación térmica** desde la superficie, como se explicó en la sección 19.6. Las características de esta radiación dependen de la temperatura y de las propiedades de la superficie del objeto. Estudios cuidadosos muestran que la radiación consiste en una distribución de longitudes de onda continuas desde todas las partes del espectro electromagnético. Si el objeto se encuentra a temperatura ambiente, la radiación térmica tendrá longitudes de onda principalmente en la región infrarroja y, por esto, no podrá ser detectada a simple vista. Conforme aumenta la temperatura superficial del objeto, llegará un momento en que éste comenzará a resplandecer con un color rojo visible. A temperaturas suficientemente altas, el objeto resplandeciente parece blanco, como en el caso del filamento caliente de tungsteno de un foco.

Desde un punto de vista clásico, la radiación térmica tiene su origen a causa de las partículas con carga y aceleradas en los átomos que están cerca de la superficie del objeto; estas partículas con carga emiten abundante radiación como lo hacen pequeñas antenas. Las partículas agitadas térmicamente tienen una distribución de energía que explica el espectro continuo de radiación emitido por el objeto. Sin embargo, hacia finales del siglo XIX, fue evidente que la teoría clásica de la radiación térmica era inadecuada. El problema básico era comprender la distribución observada de longitudes de onda de la radiación emitida por un cuerpo negro. Como se definió en la sección 19.6, un **cuerpo negro** es un sistema ideal que absorbe toda radiación incidente. La radiación electromagnética emitida por un cuerpo negro se conoce como **radiación de cuerpo negro**.

Una buena aproximación a un cuerpo negro es un orificio pequeño que conduce al interior de un objeto hueco, como se muestra en la figura 39.1. Toda la radiación que incide en el orificio desde el exterior de la cavidad penetra en la abertura y es reflejada varias veces por las paredes internas de la cavidad, por esto, el orificio funciona como un absorbente perfecto. La naturaleza de la radiación que abandona la cavidad a través del orificio depende solo de la temperatura de las paredes de la cavidad y no del material del que las paredes están fabricadas. Los espacios entre carbones ardientes (figura 39.2) emiten una luz que es muy similar a la radiación de un cuerpo negro.

La radiación emitida por los osciladores en las paredes de la cavidad (figura 39.1) experimenta condiciones de frontera. Como la radiación se refleja desde las paredes de la cavidad, se establecen ondas electromagnéticas estacionarias dentro del espacio tridimensional en el interior de la cavidad. Existen muchos modos de onda estacionaria posibles, y la distribución de la energía dentro de la cavidad entre estos diferentes modos determina la distribución de longitudes de onda de la radiación que sale de la cavidad a través del orificio.

La distribución de las longitudes de onda de la radiación desde las cavidades fue estudiada experimentalmente a finales del siglo XIX. La figura 39.3 (página 1050) muestra cómo varía la intensidad de la radiación de un cuerpo negro en relación con la temperatura y la longitud de onda. Los dos descubrimientos experimentales siguientes se consideraron especialmente significativos:

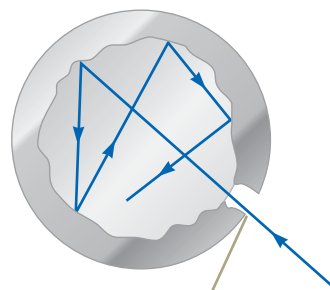
1. **La potencia total de la radiación emitida aumenta con la temperatura.** Este comportamiento se explicó brevemente en el capítulo 20, cuando se presentó la **ley de Stefan**:

$$P = \sigma A e T^4 \quad (39.1)$$

donde  $P$  es la potencia en watts radiada en todas las longitudes de onda desde la superficie de un objeto,  $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$  es la constante Stefan-Boltzmann,  $A$  es el área de la superficie del objeto en metros cuadrados,  $e$  es la emisividad de la superficie y  $T$  es la temperatura de la superficie en grados kelvin. En el caso de un cuerpo negro, el valor de emisividad es exactamente  $e = 1$ .

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 39.1

**Espera ser desafiado** Si las explicaciones de la física cuántica en este y capítulos subsiguientes le parecen extrañas y confusas, se debe a que toda su vida ha transcurrido en el mundo macroscópico, donde los efectos cuánticos no son evidentes.



La abertura hacia la cavidad en el interior de un objeto hueco es una buena aproximación de lo que es un cuerpo negro: el agujero actúa como un absorbente perfecto.

**Figura 39.1** Modelo físico de un cuerpo negro.



**Figura 39.2** El resplandor que emana de los espacios entre estas briquetas de carbón ardientes es una buena aproximación a la radiación de un cuerpo negro. El color de la luz sólo depende de la temperatura de las briquetas.

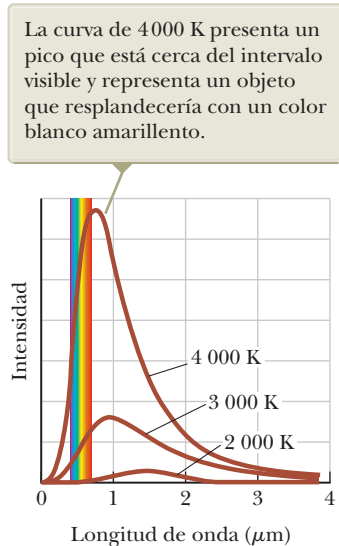
◀ Ley de Stefan

**2. El pico de la distribución de la longitud de onda se desplaza hacia longitudes de onda más cortas conforme aumenta la temperatura.** Este comportamiento se describe mediante la correspondencia siguiente, conocida como **ley de desplazamiento de Wien**:

Ley de desplazamiento de Wien ►

$$\lambda_{\text{máx}} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (39.2)$$

donde  $\lambda_{\text{máx}}$  es la longitud de onda en la que la curva tiene un máximo y  $T$  es la temperatura absoluta de la superficie del objeto que emite la radiación. La longitud de onda en el pico de la curva es inversamente proporcional a la temperatura absoluta; es decir, conforme la temperatura aumenta, el pico se “desplaza” hacia longitudes de onda más cortas (figura 39.3).



Estos resultados experimentales son consistentes con el comportamiento del filamento en el imagina de apertura. A temperatura ambiente, no parece resplandecer porque el pico está en la región infrarroja del espectro electromagnético. Cuando se aplica un voltaje total al filamento, su temperatura es del orden de 3 000 K. La mayor parte de la radiación del filamento está en el infrarrojo, pero, como se puede ver en la curva central de la figura 39.3, una cantidad significativa de se emite radiación visible en todas las longitudes de onda, dando un resultado blanco amarillento. Cuando se cae la tensión, el filamento funciona a una temperatura más baja. Se vuelve más tenue, debido a la ley de Stefan, y el pico en la distribución se mueve hacia la derecha en la figura 39.3. Como se puede ver desde la curva más baja a 2 000 K, la radiación visible proviene principalmente del extremo rojo del espectro, dando al filamento la apariencia de un brillo naranja.

**EXAMEN RÁPIDO 39.1** La figura 39.4 muestra dos estrellas en la constelación de Orión. Betelgeuse emite un resplandor rojo, en tanto que Rigel tiene un color azul. ¿Cuál de las estrellas tiene una temperatura superficial más elevada? (a) Betelgeuse, (b) Rigel, (c) ambas poseen la misma temperatura superficial, o (d) imposible de determinar.

**Figura 39.3** Intensidad de la radiación de un cuerpo negro en función de la longitud de onda en tres temperaturas diferentes. El intervalo visible de longitudes de onda está entre  $0.4 \mu\text{m}$  y  $0.7 \mu\text{m}$ . A la temperatura de aproximadamente 6000 K, el pico aparece en el centro de las longitudes de onda visibles y el objeto parece blanco.

Una teoría adecuada para la radiación de cuerpo negro debe predecir la forma de las curvas de la figura 39.3, la dependencia con la temperatura expresada en la ley de Stefan y el corrimiento del pico en función de la temperatura descrito por la ley de desplazamiento de Wien. Los primeros intentos que utilizaron ideas clásicas para explicar las formas de estas curvas de la figura 39.3 fallaron.

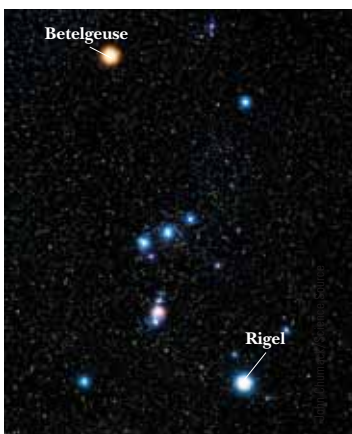
Considere uno de estos primeros intentos. Para describir la distribución de la energía de un cuerpo negro, resulta útil definir  $I(\lambda, T) d\lambda$  como la intensidad o la potencia por unidad de área emitida en el intervalo de longitud de onda  $d\lambda$ . El resultado del cálculo según la teoría clásica de la radiación de un cuerpo negro, conocido como **ley de Rayleigh-Jeans** es

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi ck_B T}{\lambda^4} \quad (39.3)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. El cuerpo negro se representa como un orificio que conduce a una cavidad (figura 39.1), que contiene muchos modos de oscilación del campo electromagnético causados por cargas aceleradas en las paredes de la cavidad, lo que da como resultado la emisión de ondas electromagnéticas en todas las longitudes de onda. En la teoría clásica empleada para deducir la ecuación 39.3, la energía promedio de cada longitud de onda de los modos de ondas estacionarias se supone proporcional a  $k_B T$ , en función del teorema de equipartición de la energía explicado en la sección 20.1.

En la figura 39.5 aparece una curva experimental del espectro de radiación de un cuerpo negro, junto con la predicción teórica de la ley de Rayleigh-Jeans. En el caso de longitudes de onda largas, la ley de Rayleigh-Jeans coincide razonablemente con la información experimental, pero en longitudes de onda cortas la diferencia es apreciable.

Observe que conforme  $\lambda$  se aproxima a cero, la función  $I(\lambda, T)$  dada por la ecuación 39.3 tiende al infinito. Por esto, de acuerdo con la teoría clásica, no sólo deben



**Figura 39.4** (Examen rápido 39.1) ¿Cuál de estas estrellas está más caliente?



predominar las longitudes de onda corta en el espectro de un cuerpo negro, sino que también la energía emitida por cualquier cuerpo negro debe tender al infinito en el límite de una longitud de onda cero. En contraste con esta predicción, los datos experimentales graficados en la figura 39.5 muestran que, conforme  $\lambda$  se aproxima a cero,  $I(\lambda, T)$  también se aproxima a cero. Esta falta de coincidencia entre teoría y experimentación, resultaba tan desconcertante que los científicos le dieron el nombre de *catástrofe ultravioleta*. (Esta “catástrofe” energía infinita— se presenta conforme la longitud de onda se aproxima a cero; se le añadió la palabra “ultravioleta” porque las ondas ultravioleta son cortas.)

En el año 1900, Max Planck desarrolló una teoría para la radiación de un cuerpo negro que conduce a una ecuación para  $I(\lambda, T)$  que está en total acuerdo con los resultados experimentales a todas las longitudes de onda. Al hablar de esta teoría, se utiliza el esquema de propiedades de los modelos estructurales introducidos en el capítulo 20:

1. *Componentes físicos:*

Planck supuso que la radiación de la cavidad llega a causa de osciladores atómicos en las paredes de la cavidad de la figura 39.1 al igual que en el enfoque de Rayleigh-Jeans.

2. *Comportamiento de los componentes:*

(a) La energía de un oscilador sólo puede tener ciertos valores discretos  $E_n$ :

$$E_n = nhf \quad (39.4)$$

donde  $n$  es un entero positivo conocido como **número cuántico**,<sup>1</sup>  $f$  es la frecuencia de la oscilación y  $h$  es un parámetro introducido por Planck y que hoy se conoce como la **constante de Planck**. Ya que la energía de cada oscilador sólo puede tener valores discretos conocidos por la ecuación 39.4, se dice que la energía está **cuantizada**. Cada uno de los valores discretos de energía corresponde a un **estado cuántico** diferente, representado por el número cuántico  $n$ . Cuando el oscilador se encuentra en el estado cuántico  $n = 1$ , su energía es igual a  $hf$ ; cuando se encuentra en el estado cuántico  $n = 2$ , la energía es igual a  $2hf$ ; y así sucesivamente.

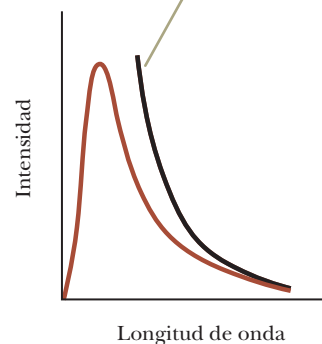
(b) Los osciladores emiten o absorben energía cuando realizan una transición de un estado cuántico a otro. Toda la diferencia de energía entre los estados inicial y final de la transición es emitida o absorbida como un sólo cuanto de radiación. Si la transición es a causa de un estado a otro inmediatamente inferior, por ejemplo, del estado  $n = 3$  al estado  $n = 2$ , la ecuación 39.4 muestra que la cantidad de energía emitida por el oscilador es igual a

$$E = hf \quad (39.5)$$

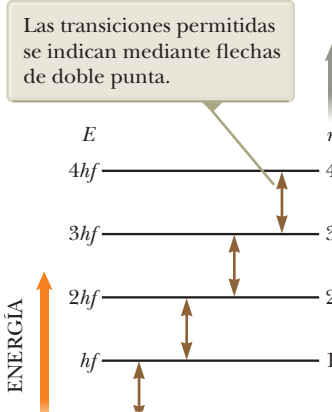
De acuerdo con la propiedad 2(b), un oscilador emite o absorbe energía sólo cuando cambia de estado cuántico. Si permanece en un mismo estado cuántico, no existe emisión o absorción de energía. La figura 39.6 es un **diagrama de nivel de energía** que muestra los niveles cuantizados de energía y las transiciones posibles, según la propuesta de Planck. Esta es una representación semigráfica de importancia, que es utilizada a menudo en la física cuántica.<sup>2</sup> El eje vertical es lineal respecto a la energía, y los niveles de energía permitidos están representados por líneas horizontales. El sistema cuantizado sólo puede tener representadas energías mediante líneas horizontales.

El punto clave en la teoría de Planck es la hipótesis radical de los estados cuantizados de la energía. Este desarrollo representó una clara separación de la física clásica y marcó el nacimiento de la teoría cuántica. En el modelo de Rayleigh-Jeans, la energía promedio asociada con una longitud de onda específica de las ondas estacionarias existentes en la cavidad es la misma para todas las longitudes de onda y es igual a  $k_B T$ . Planck utilizó las mismas ideas clásicas que en el modelo de Rayleigh-Jeans para llegar con la densidad de energía para una longitud de onda determinada como un

La teoría clásica (curva marrón) muestra la intensidad creciente sin límite para longitudes de onda cortas, a diferencia de los datos experimentales (curva azul).



**Figura 39.5** Comparación de los resultados experimentales con la curva que establece la ley Rayleigh-Jeans para la distribución de la radiación de un cuerpo negro.



**Figura 39.6** Niveles de energía permitidos para un oscilador con frecuencia  $f$ .

<sup>1</sup> Un número cuántico por lo general es un número entero (aunque pueden presentarse números cuánticos de medio entero) que describe un estado permitido en un sistema, como por ejemplo los valores de  $n$ , que describen los modos normales de oscilación de una cuerda fija en ambos extremos, como se explicó en la sección 17.4.

<sup>2</sup> En la sección 20.3, aparece por primera vez un diagrama de niveles de energía.



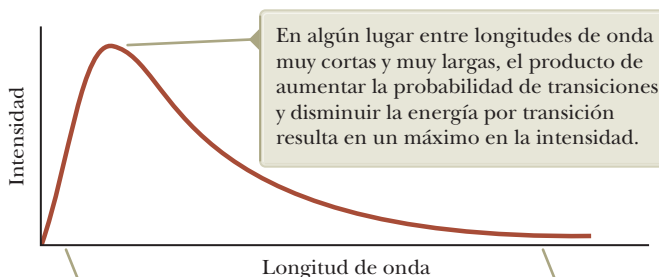


Bettmann/Getty Images

**Max Planck**

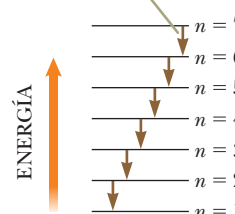
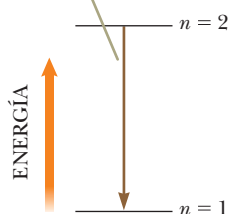
Físico alemán (1858-1947)

Planck introdujo el concepto de "cuanto de acción" (la constante de Planck,  $h$ ) en un intento por explicar la distribución espectral de la radiación de un cuerpo negro, concepto que estableció los cimientos de la teoría cuántica. En 1918 se le otorgó el premio Nobel, por ser el descubridor de la naturaleza cuantizada de la energía.



En longitudes de onda cortas, hay una gran separación entre los niveles de energía, lo que lleva a una baja probabilidad de estados excitados y pocas transiciones hacia abajo. La baja probabilidad de transición conduce a baja intensidad.

En longitudes de onda largas, hay una pequeña separación entre los niveles de energía, lo que lleva a una alta probabilidad de estados excitados y muchas transiciones descendentes. El bajo consumo de energía en cada paso lleva a una baja intensidad.



**Figura 39.7** En el modelo de Planck, la energía promedio asociada con una longitud de onda particular es el producto de la energía de una transición y de un factor relacionado con la probabilidad de que ocurra dicha transición.

**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 39.2**

**De nuevo  $n$  es un entero** En los capítulos anteriores sobre óptica, se utilizó el símbolo  $n$  como índice de refracción, el cual no era un número entero. Aquí se utiliza otra vez  $n$  como en el capítulo 17, para indicar el modo de onda estacionaria presente en una cuerda o en una columna de aire. En la física cuántica  $n$  se utiliza a menudo como un número cuántico entero para identificar el estado cuántico particular de un sistema.

producto de valores constantes y la energía promedio, pero la energía promedio no se proporciona por el teorema de equipartición. La energía promedio de una onda es la diferencia de energía promedio entre los niveles del oscilador, *ponderados de acuerdo con la probabilidad de la onda que se está emitiendo*. Esta ponderación a partir de la ocupación de estados de energía más elevada, como se describe en la ley de distribución de Boltzmann, se explicó en la sección 20.5. De acuerdo con esta ley, la probabilidad de que un estado este ocupado es proporcional al factor  $e^{-E/k_B T}$ , donde  $E$  es la energía del estado.

A frecuencias bajas (longitudes de onda largas), de acuerdo con la propiedad 2(a), los niveles de energía están separados por huecos de tamaño  $hf$  (ecuación 39.5), y muy juntos, como se observa a la derecha de la figura 39.7, y la mayoría de los estados de energía están excitados porque el factor de Boltzmann  $e^{-E/k_B T}$  es relativamente grande para estos estados. Por tanto, existen muchas contribuciones a la radiación de salida, si bien cada contribución tiene muy poca energía. Considere ahora una radiación de alta frecuencia, esto es, una radiación con longitud de onda corta. Para obtener esta radiación, en la ecuación 39.5 el valor de  $hf$  es grande y las energías permitidas están muy separadas, como se ve a la izquierda de la figura 39.7. La probabilidad de que una agitación térmica excite estos altos niveles de energía es pequeña, debido a que para valores grandes de  $E$  el valor del factor de Boltzmann es pequeño. A frecuencias altas, la baja probabilidad de excitación da como resultado una muy pequeña contribución a la energía total, a pesar de que cada cuanto tiene una gran energía. Esta baja probabilidad "invierte la curva" y la lleva a cero una vez más en longitudes de onda corta.

Utilizando este procedimiento, Planck generó una expresión teórica para la distribución de la longitud de onda que coincide notablemente con las curvas experimentales de la figura 39.3:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} \tag{39.6}$$

Esta función incluye el parámetro  $h$  que Planck ajustó de manera que su curva coincidiera con la información experimental en todas las longitudes de onda. Se determinó que este parámetro es independiente del material con el cual está hecho el cuerpo negro e independiente de la temperatura; se trata de una constante fundamental de la naturaleza. El valor de  $h$ , la constante de Planck, es

Función de distribución de las longitudes de onda de Planck



$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (39.7) \quad \blacktriangleleft \text{ Constante de Planck}$$

En longitudes de onda largas, la ecuación 39.6 se reduce a la expresión de Rayleigh-Jeans, ecuación 39.3 (véase el problema 10) y a longitudes de onda cortas predice una reducción exponencial en  $I(\lambda, T)$  con una disminución de la longitud de onda, que concuerda con los resultados experimentales.

Cuando Planck presentó su teoría, la mayoría de los científicos (¡Planck incluido!) no consideró la idea del cuanto como realista. Creyeron que se trataba de un truco matemático que casualmente daba los resultados correctos. En consecuencia, Planck y los demás continuaron buscando una explicación más “racional” de la radiación de los cuerpos negros. Sin embargo, desarrollos posteriores demostraron que una teoría según el concepto del cuanto (antes que en conceptos clásicos) tendría que ser utilizada para explicar no solamente la radiación de cuerpo negro, sino también para explicar varios fenómenos más a nivel atómico.

En 1905, Einstein volvió a deducir los resultados de Planck al suponer que las oscilaciones de la cavidad del campo electromagnético estaban cuantizadas. En otras palabras, propuso que la cuantización es una propiedad fundamental de la luz y de otras radiaciones electromagnéticas. Esto condujo al concepto de fotones, como se explicó en la sección 39.2. Un factor crítico para el éxito de la teoría cuántica o de los fotones es la relación entre la energía y la frecuencia (ecuación 39.5), que fracasó completamente en predecir la teoría clásica.

Es posible que un doctor en su consultorio mida la temperatura corporal con un *termómetro óptico*, el cual lee la temperatura en cuestión de segundos (figura 39.8). Este tipo de termómetro mide la cantidad de radiación infrarroja emitida por el tímpano. Después convierte la radiación en una lectura de temperatura. Este termómetro es muy sensible porque en la ley de Stefan la temperatura aparece elevada a la cuarta potencia. Suponga que tiene una temperatura de  $1^\circ\text{C}$  por encima de lo normal. Ya que las temperaturas absolutas se determinan agregando 273 a las temperaturas Celsius, la relación de su temperatura febril con la temperatura normal de su cuerpo de  $37^\circ\text{C}$  es

$$\frac{T_{\text{fiebre}}}{T_{\text{normal}}} = \frac{38^\circ\text{C} + 273^\circ\text{C}}{37^\circ\text{C} + 273^\circ\text{C}} = 1.003$$

lo que representa sólo un incremento de temperatura de 0.32%. De cualquier modo, el incremento en energía radiada es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura, así que

$$\frac{P_{\text{fiebre}}}{P_{\text{normal}}} = \left( \frac{38^\circ\text{C} + 273^\circ\text{C}}{37^\circ\text{C} + 273^\circ\text{C}} \right)^4 = 1.013$$

Esto representa un incremento de 1.3% en energía radiada, que es fácilmente medida por los modernos sensores de radiación infrarroja.



© Cengage

**Figura 39.8** Un termómetro óptico mide la temperatura de un paciente al detectar la intensidad de la radiación infrarroja emitida por el tímpano.

### Ejemplo 39.1 Radiación térmica de diferentes objetos

**(A)** Encuentre la longitud de onda máxima de la radiación de cuerpo negro emitida por el cuerpo humano cuando la temperatura de la piel es de  $35^\circ\text{C}$ .

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Desde la superficie de cualquier objeto se emite radiación térmica. La longitud de onda máxima se relaciona con la temperatura superficial a través de la ley de desplazamiento de Wien (ecuación 39.2).

**Categorizar** Los resultados se evalúan con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 39.2 para  $\lambda_{\text{máx}}$ :

$$(1) \quad \lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{T}$$

Sustituya la temperatura superficial en grados kelvin:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{(273 + 35) \text{ K}} = 9.41 \mu\text{m}$$

Dicha radiación está en la región infrarroja del espectro y es invisible al ojo humano. Algunos animales (como las serpientes, por ejemplo) son capaces de detectar radiación de esta longitud de onda y por tanto localizar presas de sangre caliente incluso en la oscuridad.

*continúa*

## 39.1 continuación

(B) Encuentre la longitud de onda máxima de la radiación de cuerpo negro emitida por el filamento de tungsteno de un foco, que opera a 2000 K.

## SOLUCIÓN

Sustituya la temperatura del filamento en la ecuación (1):

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{2000 \text{ K}} = 1.45 \mu\text{m}$$

Esta radiación también está en el infrarrojo, lo que significa que la mayor parte de la energía emitida por un foco no es visible para los humanos.

(C) Encuentre la longitud de onda máxima de la radiación de cuerpo negro emitida por el Sol, que tiene una temperatura superficial de aproximadamente 5800 K.

## SOLUCIÓN

Sustituya la temperatura superficial en la ecuación (1):

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{5800 \text{ K}} = 0.500 \mu\text{m} = 500 \text{ nm}$$

Esta radiación está cerca del centro del espectro visible, cerca del color de una pelota de tenis amarillo verdosa. Debido a que es el color más frecuente en la luz solar, los ojos humanos evolucionaron para ser más sensibles a la luz de aproximadamente esta longitud de onda.

## Ejemplo 39.2 El oscilador cuantizado

Un bloque de 2.00 kg se une a un resorte sin masa que tiene una constante de fuerza de  $k = 25 \text{ N/m}$ . El resorte se estira 0.40 m desde su posición de equilibrio y se libera desde el reposo.

(A) Encuentre la energía total del sistema y la frecuencia de oscilación de acuerdo con cálculos clásicos.

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Los detalles del movimiento del bloque se comprenden a partir del estudio del movimiento armónico simple del capítulo 15. Repase el material si lo cree necesario.

**Categorizar** La frase “de acuerdo con cálculos clásicos” pide clasificar esta parte del problema como un análisis clásico del oscilador. El bloque se modela como una *partícula en movimiento armónico simple*.

**Analizar** En términos de la manera en que el bloque se pone en movimiento, su amplitud es de 0.400 m.

Evalúe la energía total del sistema bloque-resorte con la ecuación 15.21:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(25.0 \text{ N/m})(0.400 \text{ m})^2 = 2.00 \text{ J}$$

Evalúe la frecuencia de oscilación a partir de la ecuación 15.14:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{25.0 \text{ N/m}}{2.00 \text{ kg}}} = 0.563 \text{ Hz}$$

(B) Si supone que la energía del oscilador está cuantizada, encuentre el número cuántico  $n$  para el sistema que oscila con esta amplitud.

## SOLUCIÓN

**Categorizar** Esta parte del problema se clasifica como un análisis cuántico del oscilador. El sistema bloque-resorte se modela como un oscilador de Planck:

**Analizar** Resuelva la ecuación 39.4 para el número cuántico  $n$ :

$$n = \frac{E_n}{hf}$$

Sustituya valores numéricos:

$$n = \frac{2.00 \text{ J}}{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(0.563 \text{ Hz})} = 5.36 \times 10^{33}$$

**Finalizar** Observe que  $5.36 \times 10^{33}$  es un número cuántico muy grande, que es representativo para sistemas macroscópicos. A continuación se exploran los cambios entre estados cuánticos para el oscilador.

## ¿QUÉ PASARÍA SI?

Suponga que el oscilador realiza una transición desde el estado  $n = 5.4 \times 10^{33}$  hasta el estado que corresponde a  $n = 5.4 \times 10^{33} - 1$ . ¿En cuánto cambia la energía del oscilador en este cambio de un cuanto?

## 39.2 continuación

**Respuesta** A partir de la ecuación 39.5, la energía retirada debido a la transición entre estados que difieren en  $n$  por 1 es

$$E = hf = (6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(0.563 \text{ Hz}) = 3.73 \times 10^{-34} \text{ J}$$

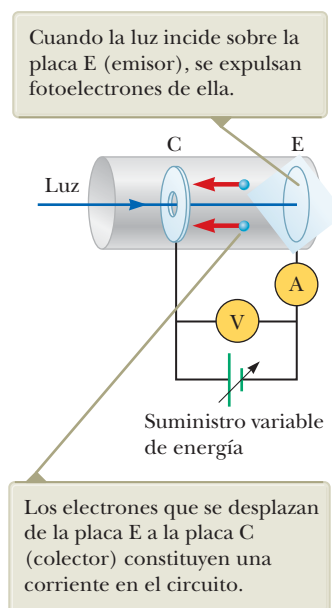
Este cambio de energía debido a un cambio de un cuanto es fraccionalmente igual a  $3.73 \times 10^{-34} \text{ J}/2.0 \text{ J}$ , ¡o en el orden de una parte en  $10^{34}$ ! Esta es una fracción tan pequeña de la energía total del oscilador que no se puede detectar. Por tanto, aun cuando la energía de un sistema bloque-resorte macroscópico este cuantizada y de hecho disminuya mediante pequeños saltos cuánticos, los sentidos humanos perciben la disminución como continua. Los efectos cuánticos se vuelven importantes y detectables solo a nivel submicroscópico de átomos y moléculas.

## 39.2 Efecto fotoeléctrico

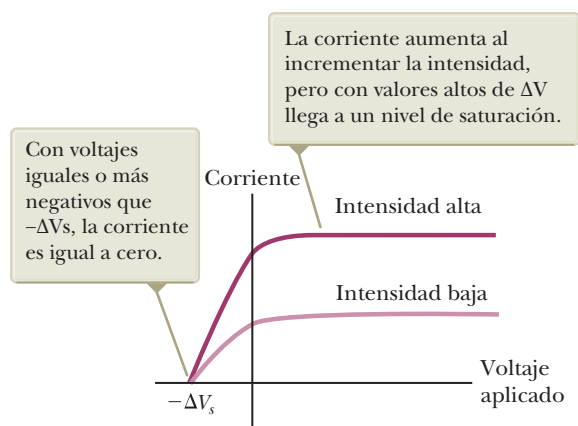
El primer fenómeno explicado a partir del modelo cuántico fue la radiación de cuerpo negro. A finales del siglo XIX, mientras se recolectaba información sobre la radiación térmica, algunos experimentos demostraron que una luz incidente sobre ciertas superficies metálicas provoca la emisión de electrones de esas superficies. Este fenómeno, se conoce como **efecto fotoeléctrico** y los electrones emitidos se conocen como **fotociones**.<sup>3</sup>

La figura 39.9 es un diagrama de un aparato diseñado para el estudio del efecto fotoeléctrico. Un tubo de vidrio o de cuarzo al vacío contiene una placa metálica E (emisor) conectada a la terminal negativa de una batería, y otra placa metálica C (colector) conectada a la terminal positiva de la batería. Cuando el tubo se conserva en la oscuridad, el amperímetro lee cero, lo que indica que no hay corriente en el circuito. Sin embargo, cuando se ilumina la placa E mediante luz con una longitud de onda apropiada, el amperímetro detecta una corriente, lo cual indica que existe un flujo de cargas a través del espacio entre las placas E y C. Esta corriente surge a causa de los fotociones emitidos por la placa E y recolectados en la placa C.

La figura 39.10 es un diagrama de la corriente fotoeléctrica en función de la diferencia de potencial  $\Delta V$  aplicada entre las placas E y C para dos intensidades de luz. Con valores grandes de  $\Delta V$ , la corriente alcanza un valor máximo; todos los electrones emitidos por E son recolectados en C, y la corriente no puede aumentar más. Además, la corriente máxima aumenta conforme se incrementa la intensidad de la luz incidente, como podría esperarse, ya que una luz de mayor intensidad emite mayor cantidad de electrones. Por último, cuando  $\Delta V$  es negativo, es decir, cuando se invierte la batería del circuito haciendo que la placa E sea positiva y la placa C negativa, la corriente cae porque muchos de los fotociones emitidos por E son repelidos por la placa C, que ahora es negativa. En esta situación, sólo aquellos fotociones que



**Figura 39.9** Diagrama del circuito para estudiar el efecto fotoeléctrico.



**Figura 39.10** Corriente fotoeléctrica en función de la diferencia de potencial aplicada a dos intensidades de luz.

<sup>3</sup>Los fotociones no son diferentes de otros electrones. Se les ha dado este nombre únicamente porque han sido emitidos de un metal por luz debido al efecto fotoeléctrico.

tengan una energía cinética mayor que  $e|\Delta V|$  llegan a la placa C, en donde  $e$  es la magnitud de la carga del electrón. Cuando  $\Delta V$  es igual o más negativo que  $-\Delta V_s$ , siendo  $\Delta V_s$  el **potencial de frenado**, ningún fotoelectrón llega a C, con lo cual la corriente es igual a cero.

Modele la combinación del campo eléctrico entre las placas y un electrón expulsado de la placa E es un sistema aislado. Suponga que este electrón se detiene justo cuando llega a la placa C. Como es un sistema aislado, la reducción apropiada de la ecuación 8.2 es:

$$\Delta K + \Delta U_E = 0$$

donde la configuración inicial se refiere al instante en que el electrón abandona el metal con una energía cinética  $K_i$  y la configuración final hace referencia al momento en que el electrón se frena, justo antes de tocar la placa C. Si define igual a cero la energía potencial eléctrica del sistema en la configuración inicial, tiene

$$(0 - K_i) + [(q)(\Delta V) - 0] = 0 \rightarrow K_i = q\Delta V = -e\Delta V$$

Ahora, suponga que incrementa la diferencia de potencial  $\Delta V$  en la dirección negativa, justo hasta que la corriente es cero en  $\Delta V = -\Delta V_s$ . En este caso, el electrón que se frena justo antes de alcanzar la placa C tendrá la energía cinética máxima posible al abandonar la superficie metálica. En tal caso la ecuación anterior puede escribirse como:

$$K_{\text{máx}} = e\Delta V_s \quad (39.8)$$

Esta ecuación permitirá medir  $K_{\text{máx}}$  en forma experimental, al determinar el voltaje  $\Delta V_s$ , en el cual la corriente disminuye hasta cero.

A continuación se mencionan varias características del efecto fotoeléctrico. Para cada una se hace la comparación entre las predicciones realizadas con el método clásico, utilizando el modelo ondulatorio de la luz, y los resultados experimentales.

1. Dependencia de la energía cinética del fotoelectrón en relación con la intensidad de la luz.  
*Predicción clásica:* Los electrones absorben energía continuamente de las ondas electromagnéticas. Conforme aumenta la intensidad de la luz que incide sobre un metal, se transfiere energía al metal en una proporción considerable y los electrones se expulsan con más energía cinética.  
*Resultado experimental:* La energía cinética máxima de los fotoelectrones es *independiente* de la intensidad de la luz. Esto se muestra en la figura 39.10, en donde ambas curvas llegan al valor cero para el *mismo* voltaje negativo.
2. Intervalo de tiempo entre la incidencia de la luz y la expulsión de los fotoelectrones.  
*Predicción clásica:* A bajas intensidades de luz, debe transcurrir un intervalo de tiempo medible entre el instante en que se enciende la luz y el momento en que el electrón es expulsado del metal. Este intervalo de tiempo es necesario para que el electrón absorba la radiación incidente antes de adquirir la energía suficiente para escapar del metal.  
*Resultado experimental:* Los electrones son emitidos de la superficie metálica casi *de manera instantánea* (menos de  $10^{-9}$  s después de que se ilumina la superficie), incluso con intensidades de luz muy bajas.
3. Dependencia de expulsión de electrones en relación con la frecuencia de la luz.  
*Predicción clásica:* Los electrones se expulsan del metal con luz incidente de cualquier frecuencia, siempre y cuando la intensidad sea lo suficientemente elevada, porque la energía se transfiere al metal sin importar la frecuencia de la luz incidente.  
*Resultado experimental:* No existe emisión de electrones si la frecuencia de la luz incidente disminuye por debajo de cierta **frecuencia de corte**  $f_c$ , cuyo valor es característico del material iluminado. No existe expulsión de electrones por debajo de esta frecuencia de corte, independiente de la intensidad de luz.





4. Dependencia de la energía cinética del fotoelectrón en relación con la frecuencia de la luz.

*Predicción clásica:* No existe *ninguna* correspondencia entre la frecuencia de la luz y la energía cinética del electrón. La energía cinética debe estar relacionada con la intensidad de la luz.

*Resultado experimental:* La energía cinética máxima de los fotoelectrones aumenta al incrementarse la frecuencia de la luz.

Para estas características los resultados experimentales contradicen *las cuatro* predicciones clásicas. En 1905 Einstein aportó una explicación exitosa del efecto fotoeléctrico, en el mismo año en que publicó su teoría especial de la relatividad. Como parte de su trabajo general sobre la radiación electromagnética, por el cual recibió el premio Nobel en 1921, Einstein amplió el concepto de cuantización de Planck a las ondas electromagnéticas, como se mencionó en la sección 39.1. Supuso que la luz (o cualquier otra onda electromagnética) de frecuencia  $f$  se puede considerar un flujo de cuantos, independientemente de la fuente de la radiación. Hoy en día a esos cuantos les llamamos **fotones**. Cada fotón tiene una energía  $E$ , dada por la ecuación 40.5,  $E = hf$ , y se mueve en el vacío a la rapidez de la luz  $c$ , donde  $c = 3.00 \times 10^8$  m/s.

- E XAMEN RÁPIDO 39.2** Cuando por la tarde usted se encuentra fuera de su casa, está expuesto a los cuatro siguientes tipos de radiaciones electromagnéticas:
- luz amarilla de los arbotantes de luz de sodio de la calle, ondas de radio de una
  - estación de radio AM, ondas de radio de una estación de radio FM y microondas
  - de la antena de un sistema de comunicaciones. Ordene de menor a mayor estos
  - tipos de ondas en función de su energía fotónica.

Organicemos el modelo de Einstein del efecto fotoeléctrico usando las propiedades de los modelos estructurales:

1. *Componentes físicos:*

Imagine que el sistema consiste de dos componentes físicos: (1) un electrón que es expulsado por un fotón entrante y (2) el remanente del metal.

2. *Comportamiento de los componentes:*

(a) En el modelo de Einstein, un fotón de la luz incidente transfiere *toda* su energía  $hf$  a un electrón *particular* en el metal. Por tanto, la absorción de energía por parte de los electrones no es un proceso de absorción continuo, como se asumía en el modelo ondulatorio, sino un proceso discontinuo en el cual la energía es entregada a los electrones en paquetes discretos. La transferencia de energía se lleva a cabo mediante un evento que incluye un fotón y un electrón.<sup>4</sup>

(b) Podemos describir la evolución del sistema en el tiempo mediante la aplicación del modelo de sistema no aislado para la energía durante un intervalo de tiempo que incluye la absorción de un fotón y la expulsión de la electrónica correspondiente. La energía se transfiere en el sistema por la radiación electromagnética, el fotón. El sistema tiene dos tipos de energía: la energía potencial del sistema de metal-electrón y la energía cinética del electrón expulsado. Por tanto, podemos escribir la ecuación de conservación de la energía (ecuación 8.2) como

$$\Delta K + \Delta U_E = T_{ER} \quad (39.9)$$

La transferencia de energía en el sistema es la que el fotón,  $T_{ER} = hf$ . Durante el proceso, la energía cinética de los electrones aumenta desde cero hasta su valor final, que suponemos es el máximo valor posible  $K_{m\acute{a}x}$ . La energía potencial del sistema aumenta debido a que el electrón se separa del metal al que es atraído. Definimos la energía potencial del sistema cuando el electrón se encuentra fuera del metal como cero. La

<sup>4</sup>En principio, es posible que dos fotones se combinen para entregar un electrón con sus energías combinadas. No obstante, esto es muy poco probable sin el auxilio de una elevada intensidad de radiación, que sólo está disponible en laser muy potentes.



energía potencial del sistema cuando el electrón se encuentra en el metal es de  $U_E = -\phi$ , donde  $\phi$  es la **función de trabajo** del metal. La función de trabajo representa la energía mínima con la que un electrón está ligado en el metal y está en el orden de unos pocos electrón-volts. La tabla 39.1 lista los valores seleccionados. El aumento en la energía potencial del sistema cuando el electrón es removido del metal es la función de trabajo  $\phi$ . Sustituyendo estas energías en la ecuación 39.9, se obtiene

$$(K_{\text{máx}} - 0) + [0 - (-\phi)] = hf$$

$$K_{\text{máx}} + \phi = hf \quad (39.10)$$

Si el electrón colisiona con otros electrones o iones metálicos a medida que es expulsado, parte de la energía entrante se transfiere al metal y el electrón es expulsado con menos energía cinética que  $K_{\text{máx}}$ .

La predicción hecha por Einstein es una ecuación para la energía cinética máxima de un electrón expulsado como una función de la frecuencia de la radiación de iluminación. Esta ecuación se puede encontrar reordenando la ecuación 39.10:

Ecuación del efecto  
fotoeléctrico ▶

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi \quad (39.11)$$

Con el modelo estructural de Einstein, es posible explicar las características observadas del efecto fotoeléctrico que no eran posibles de comprender a partir de los conceptos clásicos:

**TABLA 39.1** Funciones trabajo de metales seleccionados

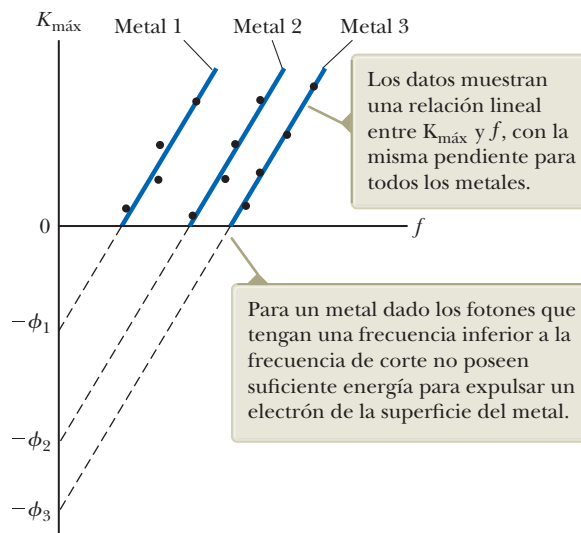
Metal	$\phi$ (eV)
Na	2.46
Al	4.08
Fe	4.50
Cu	4.70
Zn	4.31
Ag	4.73
Pt	6.35
Pb	4.14

*Nota:* Los valores son representativos para los metales listados. Los valores reales pueden variar dependiendo de si el metal es un solo cristal o es policristalino. Los valores también dependen de la cara desde la cual son expulsados los electrones de los metales cristalinos. Además, procedimientos experimentales diferentes producen distintos valores.

- Dependencia que tiene la energía cinética del fotoelectrón con la intensidad de la luz.  
La ecuación 39.11 muestra que  $K_{\text{máx}}$  es independiente de la intensidad de la luz. La energía cinética máxima de cualquier electrón individual, que es igual a  $hf - \phi$ , depende sólo de la frecuencia de la luz y de la función trabajo. Si se duplica la intensidad de la luz, lo mismo pasa con la cantidad de fotones que llegan por unidad de tiempo, lo que duplica la rapidez a la cual se emiten los fotoelectrones. Sin embargo, la energía cinética máxima de cualquier fotoelectrón individual se conserva sin cambio.
- Intervalo entre la incidencia de la luz y la expulsión de fotoelectrones.  
Una emisión casi instantánea de los electrones es consistente con el modelo fotónico de la luz. La energía incidente se presenta en pequeños paquetes, y existe una interacción uno a uno entre fotones y electrones. Incluso si la luz incidente es de muy baja intensidad, puede haber muy pocos fotones llegando por unidad de intervalo de tiempo; no obstante, cada fotón tiene la energía suficiente como para expulsar de inmediato un electrón.
- Dependencia que tiene la expulsión de electrones con la frecuencia de la luz.  
Debido a que el fotón debe tener una energía superior a la función trabajo  $\phi$  al expulsar un electrón, el efecto fotoeléctrico no se observa abajo de cierta frecuencia de corte. Si la energía de un fotón que está llegando no cumple este requisito, no será posible la expulsión de ningún electrón de la superficie, sin importar el nivel de intensidad luminosa.
- Dependencia que tiene la energía cinética del fotoelectrón con la frecuencia de la luz.  
Un fotón de frecuencia superior lleva más energía y debido a eso expulsa un fotoelectrón de energía más elevada que un fotón de frecuencia inferior como lo describe la ecuación 39.11.

El modelo de Einstein anticipa una relación lineal (ecuación 39.11) entre la energía cinética máxima del electrón  $K_{\text{máx}}$  y la frecuencia de la luz  $f$ . Una comprobación definitiva de la teoría de Einstein sería observar experimentalmente la relación lineal entre  $K_{\text{máx}}$  y  $f$ . En realidad, se observa dicha relación lineal, como se bosqueja en la figura 39.11, donde la pendiente de las líneas de dicha gráfica  $h$  es la constante de Planck. La intersección con el eje horizontal representa la frecuencia de corte por





**Figura 39.11** Gráfica de  $K_{\text{máx}}$  de los fotoelectrones en función de la frecuencia de la luz incidente, correspondiente a un experimento representativo de efecto fotoeléctrico.

debajo de la cual no se emiten electrones. Haciendo  $K_{\text{máx}} = 0$  en la ecuación 39.11, podemos determinar que la frecuencia de corte está relacionada con la función trabajo según la correspondencia  $f_c = \phi/h$ . La frecuencia de corte corresponde a **la longitud de onda de corte**  $\lambda_c$ , donde

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{c}{\phi/h} = \frac{hc}{\phi} \quad (39.12) \quad \leftarrow \text{Longitud de onda de corte}$$

y  $c$  es la rapidez de la luz. Longitudes de onda superiores a  $\lambda_c$  que inciden sobre un material que tiene una función trabajo  $\phi$  no dan como resultado la emisión de fotoelectrones.

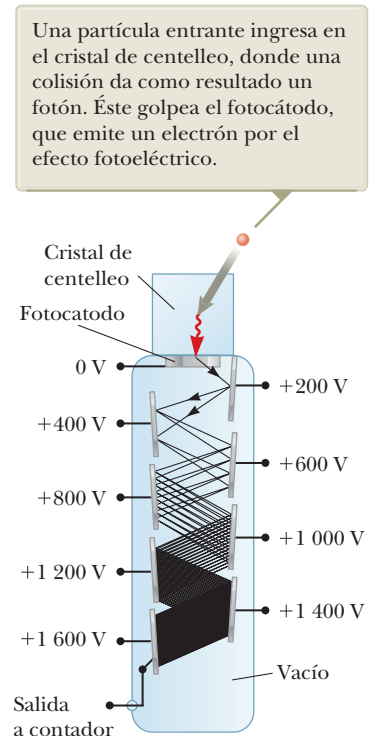
La combinación  $hc$  en la ecuación 39.12 se presenta con frecuencia al relacionar la energía de un fotón con su longitud de onda. Un método abreviado común para la resolución de problemas es expresar esta combinación en unidades útiles, según la aproximación siguiente:

$$hc = 1\,240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$$

Uno de los primeros usos prácticos del efecto fotoeléctrico fue como detector en el medidor de luz de una cámara fotográfica. La luz que refleja el objeto que se desea fotografiar incide sobre una superficie fotoeléctrica en el medidor, generando la emisión de fotoelectrones que acto seguido pasan a través de un amperímetro sensible. La magnitud de la corriente del amperímetro depende de la intensidad de la luz.

El fototubo, otra de las primeras aplicaciones del efecto fotoeléctrico, actúa de manera muy parecida a un interruptor en un circuito eléctrico. Produce una corriente en el circuito cuando una luz con una frecuencia suficientemente alta incide sobre una placa de metal del fototubo, pero en la oscuridad no produce corriente. Estos fototubos eran utilizados en alarmas contra robo así como en la detección de la pista sonora en las películas sonoras. Hoy en día modernos dispositivos semiconductores han ido remplazando aparatos más antiguos de acuerdo con el efecto fotoeléctrico.

El efecto fotoeléctrico se usa actualmente en la operación de tubos fotomultiplicadores. La estructura de uno de estos dispositivos se esboza en la figura 39.12. Un fotón al incidir sobre un fotocátodo expulsa un electrón debido al efecto fotoeléctrico. Este electrón es acelerado debido a una diferencia de potencial existente entre el fotocátodo y el primer *dínodo*, que aparece en la figura 39.12 con una diferencia de potencial de +200 V en relación con el fotocátodo. Este electrón de alta energía incide en el dínodo y expulsa varios electrones más. Este proceso se repite a través de una serie de dínodos cada uno con un potencial cada vez más elevado, hasta que se produce un pulso eléctrico cuando inciden sobre el último dínodo millones de electrones. Por tanto, al tubo se le denomina *multiplicador*: un fotón en la entrada ha dado como resultado millones de electrones en la salida.



**Figura 39.12** La multiplicación de electrones en un tubo fotomultiplicador.

El tubo fotomultiplicador se usa en los detectores nucleares para localizar fotones producidos por la interacción de partículas cargadas de energía o de rayos gama con ciertos materiales. También se utiliza en astronomía, en una técnica que se conoce como *fotometría fotoeléctrica*. En esta técnica, la luz recolectada por un telescopio desde una sola estrella se deja incidir durante un cierto intervalo sobre un tubo fotomultiplicador. El tubo mide la energía total de la luz transferida durante ese intervalo, que posteriormente puede convertirse en la luminosidad de la estrella.

En muchas observaciones astronómicas el tubo fotomultiplicador está siendo reemplazado por un *dispositivo acoplado por cargas* (CCD, *charged-coupled device*), que es el mismo dispositivo que se utiliza en las cámaras digitales (sección 35.6). La mitad del Premio Nobel de Física 2009 fue otorgado a Willard S. Boyle (nacido en 1924) y George E. Smith (nacido en 1930), por su invención del dispositivo de carga acoplada en 1969. En un CCD se forma una matriz de píxeles sobre una superficie de silicio de un circuito integrado (sección 42.7). Cuando esta superficie se expone a la luz desde una escena astronómica a través de un telescopio o de una escena terrestre a través de una cámara digital, los electrones generados por el efecto fotoeléctrico quedan retenidos en “trampas” por debajo de la superficie. La cantidad de electrones está relacionada con la intensidad de la luz que incide sobre la superficie. Un procesador de señales mide el número de electrones asociados con cada píxel y convierte esta información a un código digital que utiliza una computadora para reconstruir y desplegar la escena.

- E XAMEN RÁPIDO 39.3** Considere una de las curvas de la figura 39.10. Suponga
- que la intensidad de la luz incidente se conserva fija, pero su frecuencia aumenta.
  - El potencial de frenado de la figura 39.10 (a) se mantiene fijo, (b) se mueve hacia la derecha o (c) se mueve hacia la izquierda.
- E XAMEN RÁPIDO 39.4** Suponga que a los físicos clásicos se les hubiera ocurrido la idea de predecir cuál sería la apariencia de una gráfica de  $K_{\text{máx}}$  en función de  $f$ , como se muestra en la figura 39.11. Dibuje una gráfica que se parezca al resultado esperado, según el modelo ondulatorio de la luz.

### Ejemplo 39.3 El efecto fotoeléctrico para el sodio

Una superficie de sodio se ilumina con luz que tiene una longitud de onda de 300 nm. La función de trabajo para el metal sodio es 2.46 eV.

**(A)** Encuentre la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine un fotón que golpea la superficie metálica y expulsa un electrón. El electrón con la máxima energía es uno cerca de la superficie que no experimenta interacciones con otras partículas en el metal que reduciría su energía en su ruta fuera del metal.

**Categorizar** Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este problema se clasifica como un problema de sustitución.

Encuentre la energía de cada fotón en el haz de luz iluminante a partir de la ecuación 39.5:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

A partir de la ecuación 39.11, halle la energía cinética máxima de un electrón:

$$K_{\text{máx}} = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{1\,240\text{ eV} \cdot \text{nm}}{300\text{ nm}} - 2.46\text{ eV} = 1.67\text{ eV}$$

$$\lambda_c = \frac{hc}{\phi} = \frac{1\,240\text{ eV} \cdot \text{nm}}{2.46\text{ eV}} = 504\text{ nm}$$

**(B)** Encuentre la longitud de onda de corte  $\lambda_c$  para el sodio.

#### SOLUCIÓN

Calcule  $\lambda_c$  con la ecuación 39.12:

### 39.3 Efecto Compton

La interpretación del efecto fotoeléctrico en términos de fotones que interactúan con electrones en el objetivo de metal resultó ser el primero de varios mecanismos en los que los fotones interactúan con la materia. En esta sección, estudiamos otra interacción de este tipo, el efecto Compton, en el cual el fotón interactúa con electrones en un núcleo objetivo. En el capítulo 41, mostramos que los espectros atómicos observados de los gases se deben a la emisión o absorción de fotones por los átomos del gas y amplían la hipótesis de Planck para describir las transiciones de energía permitidas y las correspondientes energías y longitudes de onda de los fotones. Finalmente, en la sección 44.2, exploramos la producción de partículas de materia y antimateria debido a las colisiones de fotones entre sí o con núcleos pesados en un proceso llamado producción de pares. Tanto la radiación del cuerpo negro como el efecto fotoeléctrico son experimentos cuya explicación teórica involucra conceptos cuánticos y depende del mismo parámetro  $h$ . ¡Parece que no es un truco como sospechaba Planck! Veamos ahora el efecto Compton.

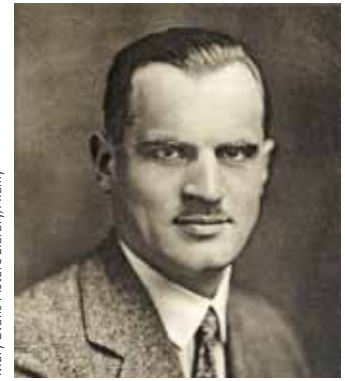
En 1919 Einstein llegó a la conclusión de que un fotón de energía  $E$  se desplaza en una misma dirección y tiene una cantidad de movimiento igual a  $E/c = hf/c$  (vea las ecuaciones 38.28 y 39.5). En 1923 Arthur Holly Compton (1892-1962) y Peter Debye (1884-1966), cada uno por su lado, desarrollaron aún más la idea de la cantidad de movimiento del fotón de Einstein.

Antes de 1922, Compton y sus colegas habían acumulado evidencia que demostraba que la teoría ondulatoria clásica de la luz no podía explicar la dispersión de los rayos X a causa los electrones. De acuerdo con la teoría clásica, las ondas electromagnéticas de frecuencia  $f$  que inciden sobre los electrones tienen dos efectos: (1) la presión de radiación (véase la sección 33.5) debe hacer que los electrones se aceleren en la dirección de la propagación de las ondas y (2) el campo eléctrico oscilante de la radiación incidente debería poner en oscilación a los electrones a la frecuencia aparente  $f'$ , donde  $f$  es la frecuencia en el marco de los electrones en movimiento. Esta frecuencia aparente  $f$  es diferente de la frecuencia  $f$  de la radiación incidente, debido al efecto Doppler (véase la sección 38.4). Primero cada electrón absorbe radiación como una partícula en movimiento y después vuelve a radiar como una partícula en movimiento, exhibiendo por tanto dos corrimientos Doppler en la frecuencia de radiación.

Dado que cada electrón se mueve a una rapidez diferente después de la interacción, dependiendo de la cantidad de energía absorbida a causa de las ondas electromagnéticas, la frecuencia de la onda dispersa en un ángulo determinado en relación con la radiación de llegada debe mostrar una distribución de valores con corrimiento Doppler. Contrariamente a esta predicción, los experimentos de Compton demostraron que, en un ángulo determinado, sólo se observa *una* frecuencia de radiación.

¿Cómo explicamos este desacuerdo entre teoría y experimento? Compton y sus colegas se dieron cuenta de que podían explicar estos experimentos si trataban los fotones no como ondas, sino más bien como partículas puntuales de energía  $hf$  y con una cantidad de movimiento  $hf/c$ , y suponiendo que se conserva tanto la energía como la cantidad de movimiento en el sistema aislado del par fotón-electrón en colisión. Compton adoptó un modelo de partícula para algo que era bien conocido como una onda, y hoy por hoy este fenómeno de dispersión es conocido como **efecto Compton**. La figura 39.13 muestra la imagen cuántica de la colisión entre un fotón individual de rayos X de frecuencia  $f_0$  y un electrón. En el modelo cuántico el electrón es desviado un ángulo  $\phi$  respecto a esta dirección, como si se tratara de una colisión parecida a la que ocurre con las bolas de billar. (El símbolo  $\phi$  aquí utilizado es un ángulo y no debe confundirse con la función trabajo, que se vio en la sección anterior.) Compare la figura 39.13 con la colisión bidimensional mostrada en la figura 9.12.

La figura 39.14 (página 1062) es un diagrama del aparato utilizado por Compton. Los rayos X, desviados a causa de un blanco de grafito, se analizaron utilizando un espectrómetro de cristal giratorio, y la intensidad se midió con una cámara de ionización generadora de una corriente proporcional a la intensidad. El haz incidente estaba constituido por rayos X monocromáticos de longitud de onda  $\lambda_0 = 0.071$  nm. Las gráficas experimentales de intensidad en función de la longitud de onda observadas por Compton para cuatro ángulos de dispersión (correspondientes a  $\theta$  en la figura 39.13)

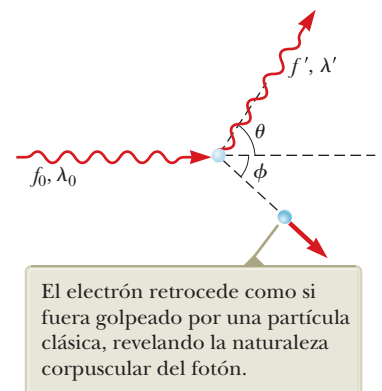


Mary Evans Picture Library/Alamy

#### Arthur Holly Compton

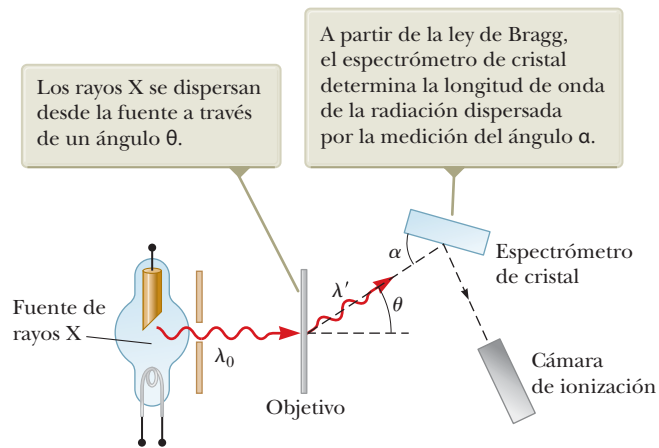
*Físico estadounidense (1892-1962)*

Compton nació en Wooster, Ohio, y estudió en el Wooster College y en la Universidad de Princeton. Llegó a ser el director del laboratorio en la Universidad de Chicago, donde se efectuaban trabajos experimentales relacionados con reacciones nucleares sostenidas en cadenas. Su trabajo resultó de importancia central para la construcción de la primera arma nuclear. Su descubrimiento del efecto Compton lo llevó a compartir el premio Nobel de Física de 1927 con Charles Wilson.



**Figura 39.13** Modelo cuántico para la dispersión de rayos X a causa de un electrón.





**Figura 39.14** Diagrama del aparato de Compton.

aparecen en la figura 39.15. Las gráficas para los tres ángulos distintos de cero muestran dos picos, uno en  $\lambda_0$  y el otro en  $\lambda > \lambda_0$ . El pico desplazado en  $\lambda'$  está causado por la dispersión de los rayos X de los electrones libres, y Compton anticipó que dependería del ángulo de dispersión como sigue:

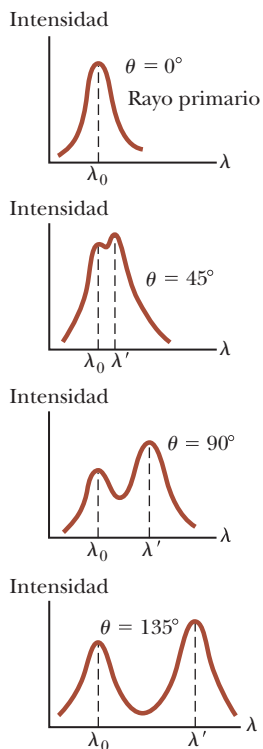
Ecuación de desplazamiento Compton ►

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (39.13)$$

Longitud de onda Compton ►

donde  $m_e$  es la masa del electrón. Esta expresión se conoce como **ecuación de desplazamiento Compton**, y describe correctamente las posiciones de los picos de la figura 39.15. El factor  $h/m_e c$  se le conoce como **longitud de onda Compton** del electrón, el cual tiene un valor actualmente aceptado de

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 0.002\,43\text{ nm} \quad (39.14)$$



**Figura 39.15** Intensidad de rayos X desviados en función de la longitud de onda para la dispersión Compton en  $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  y  $135^\circ$ .

Podemos aplicar un argumento de energía para ver por qué la longitud de onda del fotón aumenta en la dispersión de Compton. La energía se transfiere desde el fotón entrante al electrón en el proceso. Debido a que  $E = hf$ , la frecuencia del fotón disperso disminuye, y porque  $\lambda = c/f$ , su longitud de onda aumenta. A medida que aumenta el ángulo de dispersión, se transfiere más energía del fotón incidente al electrón. Como resultado, la energía dispersa del fotón, disminuye al aumentar el ángulo de dispersión.

El pico sin corrimiento en  $\lambda_0$  de la figura 39.15 se genera por rayos X que son dispersados por causa de los electrones fuertemente unidos a los átomos blanco. Este pico sin corrimiento también está previsto por la ecuación 39.13 si la masa del electrón es remplazada por la masa de un átomo de carbono, que es aproximadamente 23 000 veces la masa del electrón. Por tanto, existe un corrimiento de la longitud de onda debido a la dispersión a causa de un electrón unido a un átomo, pero es de una magnitud tan reducida que en el experimento de Compton no fue detectada.

Las mediciones de Compton coincidieron extraordinariamente bien con las predicciones de la ecuación 39.13. Ya hemos visto tres experimentos que requieren una explicación cuántica para armonizar la teoría con los resultados experimentales. Los resultados del experimento Compton fueron los primeros que realmente convencieron a muchos físicos de la validez fundamental de la teoría cuántica.

- E XAMEN RÁPIDO 39.5** Observe que para cualquier ángulo  $\theta$  de dispersión determinado, la ecuación 39.13 da el mismo valor para el corrimiento de Compton en cualquier longitud de onda. Teniendo presente lo anterior, ¿para cuál de los siguientes tipos de radiación es máximo el corrimiento fraccionario en la longitud de onda en un ángulo determinado de dispersión? (a) Las ondas de radio, (b) las microondas, (c) la luz visible o (d) los rayos X.

**Ejemplo 39.4** **Dispersión Compton a 45°**

De un bloque de material se dispersan rayos X con longitud de onda  $\lambda_0 = 0.200\,000\text{ nm}$ . Los rayos X dispersados se observan en un ángulo de  $45.0^\circ$  con el haz incidente. Calcule su longitud de onda.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Imagine el proceso de la figura 39.13, con el fotón dispersado a  $45^\circ$  de su dirección original.

**Categorizar** El resultado se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 39.13 para la longitud de onda de los rayos X dispersados:

$$(1) \quad \lambda' = \lambda_0 + \frac{h(1 - \cos \theta)}{m_e c}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\begin{aligned} \lambda' &= 0.200\,000 \times 10^{-9} \text{ m} + \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(1 - \cos 45.0^\circ)}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})} \\ &= 0.200\,000 \times 10^{-9} \text{ m} + 7.10 \times 10^{-13} \text{ m} = \mathbf{0.200\,710 \text{ nm}} \end{aligned}$$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si el detector se mueve de modo que los rayos X dispersados se detectan a un ángulo mayor de  $45^\circ$ ? ¿La longitud de onda de los rayos X dispersados aumenta o disminuye conforme aumenta el ángulo  $\theta$ ?

**Respuesta** En la ecuación (1), si el ángulo  $\theta$  aumenta,  $\cos \theta$  disminuye. En consecuencia, el factor  $(1 - \cos \theta)$  aumenta. Por tanto, la longitud de onda dispersada aumenta.

**39.4** **La naturaleza de las ondas electromagnéticas**

En la sección 34.1, se introdujo el concepto de modelos de competencia de la luz: las partículas y ondas. Vamos a ampliar la discusión anterior. Fenómenos como el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton representan una evidencia a prueba de fuego de que cuando la luz (y otras formas de radiación electromagnética) interactúa con la materia, se comporta como si estuviera compuesta de partículas con una energía  $hf$  y con una cantidad de movimiento  $h/\lambda$ . ¿Cómo es posible considerar la luz como un fotón (en otras palabras como una partícula) cuando sabe que se trata de una onda? Por otra parte, la luz se describe en términos de fotones con cierta energía y cantidad de movimiento a partir de la sección 39.1 hasta la 39.3. También, por otra parte, la luz y otras ondas electromagnéticas exhiben efectos de interferencia y de difracción descritos en los capítulos 36 y 37, que son entendibles sólo mediante una interpretación ondulatoria.

¿Cuál de los modelos es el correcto? ¿La luz es una onda o una partícula? La respuesta dependerá del fenómeno que se esté observando. Algunos experimentos se explican mejor con el modelo del fotón, en tanto que otros se explican mejor únicamente con el modelo ondulatorio. El resultado final es que necesita aceptar ambos modelos y admitir que no es posible describir la naturaleza verdadera de la luz en función de ninguna concepción clásica única. El mismo rayo de luz puede expulsar fotoelectrones de un metal (lo que quiere decir que el haz está formado de fotones) y también puede ser difractado por una rendija (lo que quiere decir que el haz es una onda). En otras palabras, el modelo de partícula y el modelo ondulatorio de la luz se complementan.

El éxito que tiene el modelo de partícula de la luz para explicar el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton plantea muchas otras preguntas. Si la luz es una partícula, ¿qué quiere decir la “frecuencia” y “la longitud de onda” de la partícula, y cuál de estas dos propiedades determina su energía y su cantidad de movimiento? ¿La luz es *simultáneamente* una onda y una partícula? A pesar de que los fotones no tienen energía en reposo (una cantidad imposible de observar, ¡ya que el fotón no puede estar en reposo!), ¿existe alguna expresión sencilla para la *masa efectiva* de un fotón en movimiento? Si los fotones tienen una masa efectiva, ¿experimentan atracción gravitacional? ¿Cuál es la extensión espacial de un fotón, y cómo es posible que un electrón absorba o disperse un fotón? ¿Cuál es la extensión espacial de un fotón y cómo absorbe o dispersa un electrón un fotón? Algunas de estas preguntas se pueden contestar, pero otras demandan una visión de procesos atómicos que resultan demasiado pictóricos y literales. Muchas de estas preguntas se generan debido a analogías clásicas como la colisión de bolas de billar y el rompimiento de las olas en una playa. La mecánica cuántica le da a la luz una





Science &amp; Society Picture Library/Getty Images

### Louis de Broglie

Físico francés 1892–1987

De Broglie nació en Dieppe, Francia, estudió Historia en la Sorbona de París en preparación para lo que esperaba sería una carrera en el Cuerpo Diplomático. El mundo de la ciencia tiene suerte de que cambiara su carrera para convertirse en un físico teórico. En el año de 1929 le fue otorgado el premio Nobel debido a su predicción de la naturaleza ondulatoria de los electrones.

naturaleza más flexible al considerar el modelo de partícula y el modelo ondulatorio de la luz tanto necesarios como complementarios. No se puede utilizar de manera exclusiva ninguno de los modelos para describir todas las propiedades de la luz. Un discernimiento completo del comportamiento observado de la luz sólo se puede obtener si se combinan ambos modelos de una manera complementaria.

## 39.5 Propiedades ondulatorias de las partículas

Los estudiantes que se inician en la naturaleza dual de la luz, con frecuencia encuentran este concepto difícil de aceptar. Se está acostumbrado a considerar cosas como los bates de beisbol como partículas y otras cosas, como las ondas sonoras, únicamente como una forma de movimiento ondulatorio. Todas las observaciones a gran escala pueden ser interpretadas considerando ya sea una explicación ondulatoria o una explicación de partículas, pero en el mundo de los fotones y de los electrones, esta distinción no está hecha con tanta claridad.

Todavía más desconcertante es el hecho de que, bajo ciertas condiciones, estas que sin ninguna ambigüedad se identifican como “partículas” exhiben características ondulatorias. En su disertación doctoral en el año de 1923, Louis de Broglie postuló que ya que los fotones tienen a la vez características ondulatorias y de partículas, es posible que todas las formas de la materia tengan ambas propiedades. Esta era una idea en extremo revolucionaria que en esas fechas no tenía confirmación experimental. Según De Broglie, los electrones, justo igual que la luz, tienen una naturaleza dual partícula-onda.

Combinando las ecuaciones 38.28, 39.5 y 16.12, encontramos que el impulso de un fotón se puede expresar como

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Esta ecuación muestra que la longitud de onda del fotón puede especificarse por su cantidad de movimiento:  $\lambda = h/p$ . De Broglie sugirió que las partículas materiales que tengan una cantidad de movimiento  $p$  tienen una longitud de onda característica dada por la *misma expresión*. Ya que  $p = mu$  es la magnitud de la cantidad de movimiento de una partícula de masa  $m$  y de rapidez  $u$ , la **longitud de onda de De Broglie** de dicha partícula es igual a<sup>5</sup>

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu} \quad (39.15)$$

Longitud de onda de De Broglie de una partícula ▶

Además, en analogía con los fotones, De Broglie postuló que las partículas obedecen la relación de Einstein  $E = hf$ , donde  $E$  es la energía total de la partícula. En tal caso, la frecuencia de una partícula es

$$f = \frac{E}{h} \quad (39.16)$$

Frecuencia de una partícula ▶

La naturaleza dual de la materia resulta evidente en estas dos últimas ecuaciones, ya que cada una contiene a la vez conceptos de partículas ( $p$  y  $E$ ) y cantidades ondulatorias ( $\lambda$  y  $f$ ).

Comprender la naturaleza dual de la materia y de la radiación es conceptualmente difícil, porque los dos modelos parecen contradecirse. Este problema, en lo que se refiere a la luz, ya se explicó. El **principio de complementariedad** dice que

los modelos ondulatorios y de partículas, ya sea de la materia o de radiaciones, se complementan entre sí.

Ninguno de los modelos puede utilizarse de manera exclusiva para describir adecuadamente ya sea la materia o la radiación. Ya que los seres humanos tienden a generar imágenes mentales en términos de sus experiencias en el mundo real, se utilizan ambas descripciones en forma complementaria para explicar algún conjunto determinado de datos causa del mundo cuántico.

<sup>5</sup>La longitud de onda De Broglie para una partícula móvil a cualquier rapidez  $u$  es  $\lambda = h/\gamma mu$ , siendo  $\gamma = [1 - (u^2/c^2)]^{-1/2}$ .

## El experimento Davisson-Germer

La propuesta hecha en 1923 por De Broglie en el sentido de que la materia exhibe propiedades a la vez ondulatorias y de partícula, fue considerada una simple especulación. Si las partículas como los electrones tuvieran propiedades ondulatorias, bajo las condiciones adecuadas, deberían exhibir efectos de difracción. Sólo tres años después, C. J. Davisson (1881-1958) y L. H. Germer (1896-1971) lograron medir la longitud de onda de los electrones. Este importante descubrimiento fue la primera confirmación experimental de las ondas de la materia propuestas por De Broglie.

Es interesante observar que la intención inicial del experimento de Davisson-Germer no era confirmar las hipótesis de De Broglie. De hecho, su descubrimiento se hizo accidentalmente (como ocurre con frecuencia). El experimento involucraba la dispersión de electrones de baja energía (aproximadamente de 54 eV) desde una placa de señal de níquel en el vacío. Durante uno de los experimentos, la superficie de níquel se oxidó en extremo debido a una ruptura accidental del sistema de vacío. Después de haber calentado la placa de señal en una corriente de hidrógeno, a fin de eliminar el recubrimiento de óxido, los electrones dispersados por dicha placa exhibieron intensidades máximas y mínimas en ángulos específicos. Por último, los responsables del experimento finalmente se dieron cuenta de que al calentarse al níquel se le formaron grandes regiones cristalinas y que los planos a distancias regulares de esas regiones servían como rejilla de difracción para electrones. (Véase en la sección 37.5 la explicación de difracción de rayos X por medio de cristales.)

Poco tiempo después, Davisson y Germer llevaron a cabo mediciones de difracción más amplias sobre electrones dispersos a partir de objetos de un solo cristal. Sus resultados mostraron de manera concluyente la naturaleza ondulatoria de los electrones y confirmó la correspondencia de De Broglie  $p = h/\lambda$ . Ese mismo año, el escocés G. P. Thomson (1892-1975) también observó patrones de difracción de electrones al hacerlos pasar a través de hojas muy delgadas de oro. Se han observado patrones de difracción en la dispersión de átomos de helio, átomos de hidrógeno y en neutrones. En resumen, se ha establecido de diversas maneras la naturaleza de onda de las partículas.

- E XAMEN RÁPIDO 39.6** Un electrón y un protón que se mueven con magnitudes de velocidad no relativistas tienen la misma longitud de onda de De Broglie. ¿Cuáles de las características siguientes también son iguales para ambas partículas? (a) Rapidez, (b) energía cinética, (c) cantidad de movimiento o (d) frecuencia.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 39.3

**¿Qué oscila?** Si las partículas tienen propiedades ondulatorias, ¿qué oscila? Son familiares las ondas de las cuerdas, ondas muy concretas. Las ondas sonoras son más abstractas, pero lo probable es que se sienta cómodo con ellas. Las ondas electromagnéticas son aun más abstractas, pero se describen en función de variables físicas y de campos eléctrico y magnético. En contraste, las ondas asociadas con las partículas son totalmente abstractas y no es posible asociarlas con una variable física. En el capítulo 40 se describe la onda asociada con una partícula en términos de probabilidad.

### Ejemplo 39.5 Longitudes de onda para objetos micro y macroscópicos

**(A)** Calcule la longitud de onda de De Broglie para un electrón ( $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$  kg) que se mueve a  $1.00 \times 10^7$  m/s.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine al electrón que se mueve a través del espacio. Desde un punto de vista clásico, es una partícula bajo velocidad constante. Desde el punto de vista cuántico, el electrón tiene una longitud de onda asociada con él.

**Categorizar** El resultado se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la longitud de onda con la ecuación 39.15:

$$\lambda = \frac{h}{m_e u} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.00 \times 10^7 \text{ m/s})} = 7.27 \times 10^{-11} \text{ m}$$

La naturaleza de la onda de este electrón puede ser detectada por técnicas de difracción como las que se utilizaron en el experimento de Davisson-Germer.

**(B)** Una roca de 50 g de masa se lanza con una rapidez de 40 m/s. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie?

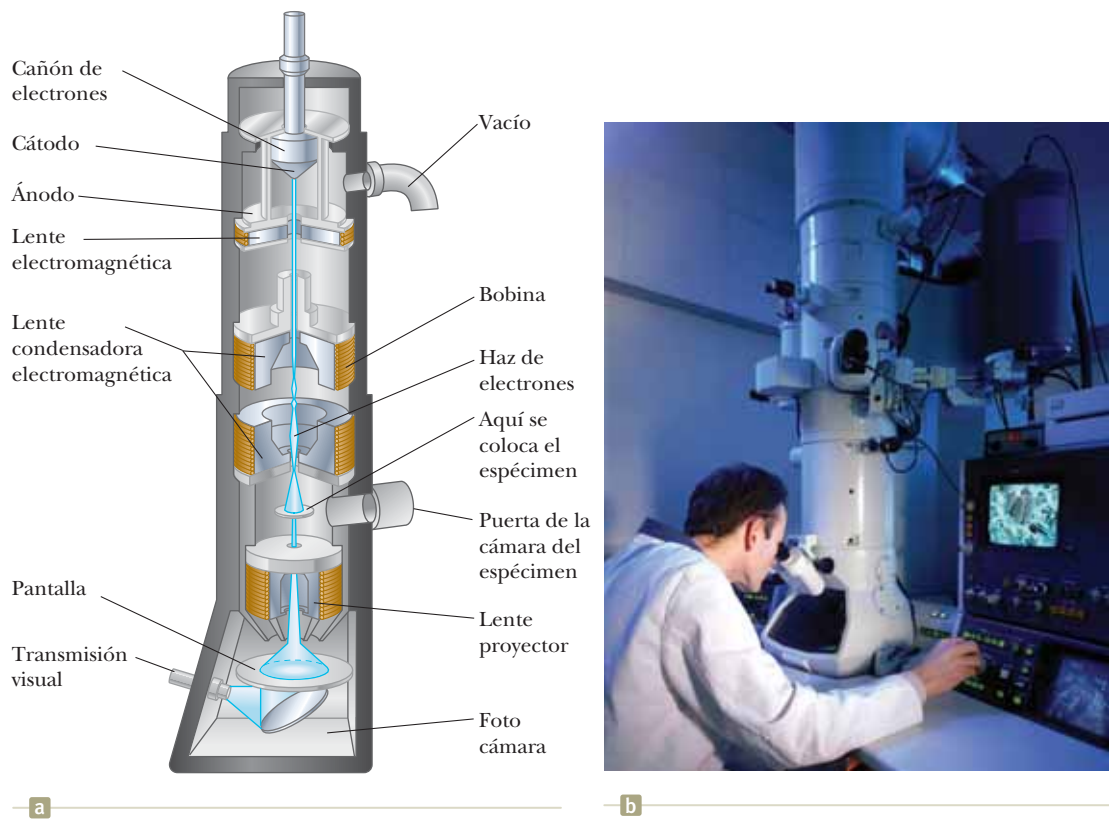
#### SOLUCIÓN

Evalúe la longitud de onda de De Broglie con la ecuación 39.15:

$$\lambda = \frac{h}{mu} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(50 \times 10^{-3} \text{ kg})(40 \text{ m/s})} = 3.3 \times 10^{-34} \text{ m}$$

Esta longitud de onda es mucho menor que cualquier abertura a través de la cual posiblemente pudiera pasar la roca. Por esto, no se podrían observar efectos de difracción y, como resultado, las propiedades ondulatorias de objetos a gran escala no se pueden observar.





**Figura 39.16** (a) Diagrama de un microscopio electrónico de transmisión para estudiar una muestra muy delgada. Las “lentes” que controlan el haz de electrones son en realidad bobinas de deflexión magnética. (b) Microscopio electrónico en uso.

## El microscopio electrónico

Un aparato práctico que se basa en las características ondulatorias de los electrones es el **microscopio electrónico**. En la figura 39.16 aparece un microscopio electrónico de *transmisión* (TEM) que se utiliza para estudiar muestras planas y delgadas. En muchos aspectos es similar a un microscopio óptico, sin embargo, el microscopio electrónico tiene un poder de resolución mucho mayor porque puede acelerar electrones hasta energías cinéticas muy altas, con lo que se logran longitudes de onda muy cortas. Ningún microscopio tiene la capacidad de definir detalles que sean significativamente menores que la longitud de onda de las ondas utilizadas para iluminar el objeto. Las longitudes de onda cortas de los electrones son cerca de 1000 veces mejores que las de la luz visible utilizada en los microscopios ópticos. Como consecuencia, un microscopio electrónico con lentes ideales sería capaz de distinguir detalles aproximadamente 1000 veces más pequeños que un microscopio óptico. (La radiación electromagnética con la misma longitud de onda que los electrones de un microscopio electrónico se presenta en la región de rayos X del espectro.)

El haz de electrones en un microscopio electrónico se controla mediante desviación electrostática o magnética, que actúa sobre los electrones para enfocar el haz y formar una imagen. En vez de examinar la imagen a través de un ocular, como ocurre en un microscopio óptico, el observador estudia una imagen formada en un monitor o en algún otro tipo de pantalla de despliegue. La figura 39.17 pone de manifiesto el asombroso detalle disponible al utilizar un microscopio electrónico de barrido (SEM) que explora las características de la superficie, a diferencia del TEM, en el que los electrones pasan a través de la muestra.



Clouds Hill Imaging Ltd./Science Source

**Figura 39.17** Fotografía con un microscopio electrónico de color mejorado que muestra el detalle significativo de un ácaro de bodega *Lepidoglyphus destructor*. Este ácaro es tan pequeño (longitud máxima de 0.75 mm), que los microscopios ordinarios no pueden definir sus diminutos detalles anatómicos.





## 39.6 Un nuevo modelo: La partícula cuántica

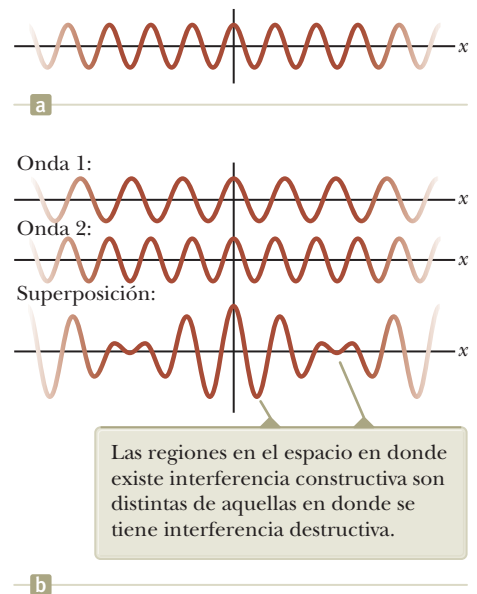
Ya que en el pasado se consideraba que los modelos de partícula y onda eran diferentes, la explicación presentada en secciones previas es posible que sea completamente inquietante. La idea de que tanto la luz como las partículas de la materia tienen propiedades a la vez de partícula y de onda no encaja con esta distinción. No obstante, la evidencia experimental muestra que esta conclusión es exactamente la que se debe aceptar. El reconocimiento de esta naturaleza dual lleva a un nuevo modelo, la **partícula cuántica**, la cual es una combinación del modelo de partícula presentado en el capítulo 2 y el modelo de onda visto en el capítulo 16. En este nuevo modelo las entidades tienen características a la vez de partículas y de ondas, y debe elegir un comportamiento apropiado —partícula u onda— a fin de comprender un fenómeno en particular.

En esta sección se explora este modelo de manera que pueda llegar a sentirse mejor con la idea, para lo cual se demostrará que es posible construir a partir de ondas una entidad que exhiba las propiedades de una partícula.

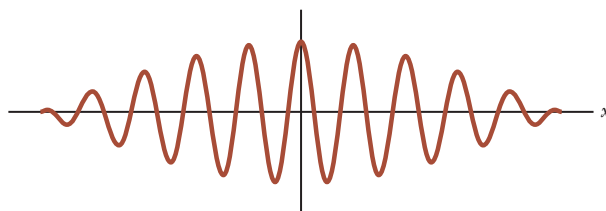
Primero recuerde algunas de las características de las partículas y de las ondas ideales. Una partícula ideal tiene de tamaño cero dimensiones. Debido a eso, una característica esencial de una partícula es que está *localizada* en el espacio. Una onda ideal tiene una sola frecuencia y es infinitamente larga, como lo sugiere la figura 39.18a. Por tanto, una onda ideal *no se localiza* en el espacio. Se puede construir una entidad localizada a partir de ondas infinitamente largas. Imagine que dibuja una a lo largo del eje  $x$ , con una de sus crestas localizada en  $x = 0$ , como en la parte superior de la figura 39.18b. Ahora dibuje una segunda onda, de la misma amplitud, pero con una frecuencia distinta, y que también tiene una de sus crestas localizada en  $x = 0$ . El resultado de la superposición de estas dos ondas es un *batimiento*, ya que las ondas están alternativamente en y fuera de fase. (Los batimientos fueron analizados en la sección 17.7.) La curva inferior de la figura 39.18b muestra el resultado de la superposición de estas dos ondas.

Observe que ya se ha introducido alguna localización gracias a la superposición de dos ondas. Una onda individual tiene la misma amplitud en cualquier sitio del espacio, no existe ningún punto en el espacio diferente de cualquier otro punto. Sin embargo, cuando se añade una segunda onda, existe alguna diferencia relativa a los puntos en fase en comparación con los que están fuera de fase.

Ahora imagine que se agregan más y más ondas a las dos originales, donde cada nueva onda tiene una nueva frecuencia. Cada onda nueva se agrega de forma que una de sus crestas esté en  $x = 0$ , con el resultado de que todas las ondas se suman constructivamente en  $x = 0$ . Cuando se considera un gran número de ondas, la probabilidad de que exista un valor positivo de una función de onda en cualquier punto  $x \neq 0$  es igual a la probabilidad de que se tenga un valor negativo, y existe interferencia destructiva *en todos los sitios* excepto cerca de  $x = 0$ , donde se sobrepusieron todas las crestas. El resultado de esto se ilustra en la figura 39.19. La pequeña región de interferencia constructiva se conoce como **paquete de ondas**. Se trata de una región localizada en el espacio que es diferente de todas las demás regiones. Se identifica el paquete de ondas como una partícula porque ¡tiene la naturaleza localizada de una partícula! La localización del paquete de ondas corresponde a la posición de la partícula.



**Figura 39.18** (a) Una onda idealizada de una única frecuencia exacta es igual a todo en todas las partes del espacio y del tiempo. (b) Si se combinan dos ondas ideales con frecuencias ligeramente distintas, el resultado es una pulsación (sección 18.7).



**Figura 39.19** Si se combina un gran número de ondas, el resultado es un paquete de ondas que representa una partícula.

La naturaleza localizada de esta entidad es la *única* característica de una partícula que fue generada mediante este proceso. Aún no se ha encarado la forma en que el paquete de ondas logra tener características de partícula como masa, carga eléctrica y espín. Por tanto, quizás aún no esté totalmente convencido de que ha construido una partícula. Como evidencia adicional de que el paquete de ondas puede representar la partícula, se prueba que tiene otra característica de ésta.

A fin de hacer sencilla la representación matemática, regrese a la combinación de dos ondas. Considere dos ondas de igual amplitud pero de frecuencias angulares diferentes  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . La representación matemática de estas ondas es

$$y_1 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad y \quad y_2 = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

donde, igual que en el capítulo 16,  $k = 2\pi/\lambda$  y  $\omega = 2\pi f$ . Utilizando el principio de superposición, se añaden las ondas:

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Es conveniente escribir lo anterior de manera que se utilice la identidad trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Haciendo que  $a = k_1 x - \omega_1 t$  y  $b = k_2 x - \omega_2 t$ , se tiene

$$y = 2A \cos\left[\frac{(k_1 x - \omega_1 t) - (k_2 x - \omega_2 t)}{2}\right] \cos\left[\frac{(k_1 x - \omega_1 t) + (k_2 x - \omega_2 t)}{2}\right]$$

$$y = \left[2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right)\right] \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (39.17)$$

donde  $\Delta k = k_1 - k_2$  y  $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$ . El segundo factor coseno representa una onda con un número y una frecuencia iguales a los promedios de los valores de las ondas individuales.

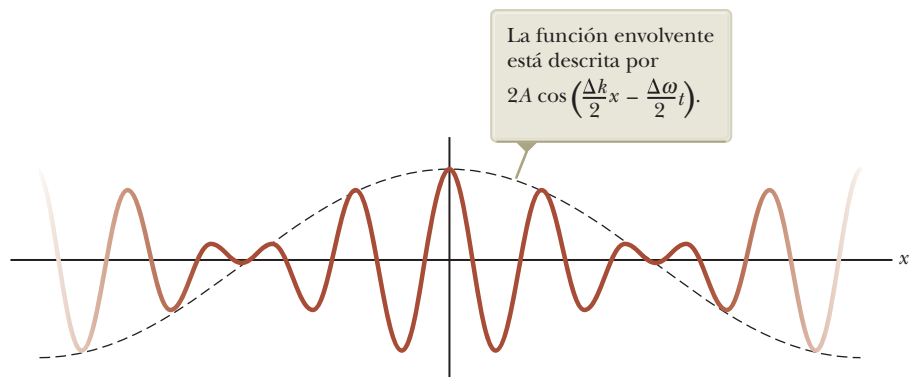
En la ecuación 39.17, el factor entre paréntesis cuadrados representa la envolvente de la onda, como por ejemplo la curva discontinua de la figura 39.20. Observe que este factor también tiene la forma matemática de una onda. Esta envolvente, resultado de la combinación, puede moverse a través del espacio a una rapidez distinta de la de las ondas individuales. Como un ejemplo extremo de esta posibilidad, imagine dos ondas idénticas pero que se mueven en direcciones opuestas. Ambas ondas se mueven con la misma rapidez, pero la rapidez de su envolvente es *cero*, ya que se ha generado una onda estacionaria, la cual fue analizada en la sección 17.2.

Para una onda individual, su rapidez se conoce por la ecuación 16.11,

Rapidez de fase de una onda en un paquete de ondas ►

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k} \quad (39.18)$$

Esta rapidez se conoce como **rapidez de fase** ya que se trata de la relación de avance de una cresta en una sola onda, que es un punto de una fase fija. La ecuación 39.18 se interpreta como: la rapidez de fase de una onda es la relación del coeficiente variable



**Figura 39.20** Patrón de batimiento de la figura 39.18b, con la superposición de una función envolvente (curva discontinua).

en el tiempo  $t$  con el coeficiente variable en el espacio  $x$  en la ecuación de la onda,  $y = A \cos(kx - \omega t)$ .

El factor entre paréntesis de la ecuación 39.17 tiene la forma de una onda, por lo que se mueve con una rapidez conocida por esta misma razón:

$$v_g = \frac{\text{coeficiente variable en el tiempo } t}{\text{coeficiente variable en el espacio } x} = \frac{(\Delta\omega/2)}{(\Delta k/2)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

El subíndice  $g$  de la rapidez indica que a este término por lo común se le conoce como **rapidez de grupo**, es decir, la rapidez del paquete de ondas (el *grupo* de ondas) que se ha construido. Se ha generado esta expresión por una simple adición de dos ondas. Para la superposición de una gran cantidad de ondas para formar un paquete de ondas, esta razón se convierte en una derivada:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (39.19) \quad \leftarrow \text{Rapidez de grupo de un paquete de ondas}$$

Multiplique tanto el numerador como el denominador por  $\hbar$ , donde  $\hbar = h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  da:

$$v_g = \frac{\hbar d\omega}{\hbar dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} \quad (39.20)$$

Considere los términos en el paréntesis de la ecuación 39.20, de manera separada. En el caso del numerador,

$$\hbar\omega = \frac{h}{2\pi}(2\pi f) = hf = E$$

Para el denominador,

$$\hbar k = \frac{h}{2\pi} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) = \frac{h}{\lambda} = p$$

Por tanto, la ecuación 39.20 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$v_g = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} \quad (39.21)$$

Dado que se está explorando la posibilidad de que la envolvente de las ondas combinadas represente la partícula, piense en una partícula libre con una rapidez  $u$  que es pequeña en comparación con la rapidez de la luz. La energía de esta partícula es su energía cinética:

$$E = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{p^2}{2m}$$

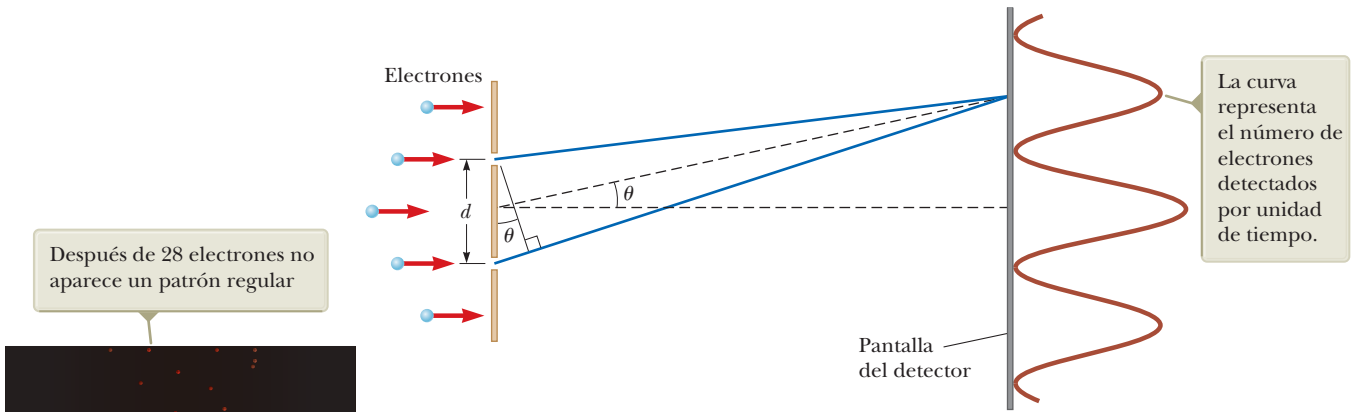
Al derivar esta ecuación respecto a  $p$

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \left( \frac{p^2}{2m} \right) = \frac{1}{2m}(2p) = u \quad (39.22)$$

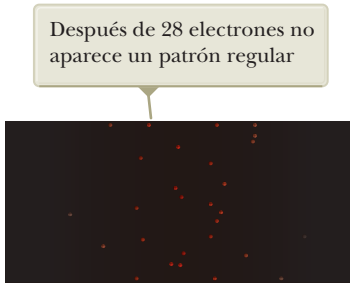
Por tanto, la rapidez de grupo del paquete de ondas es idéntica a la rapidez de la partícula que se modela en su representación! Esto permite confiar más en el hecho de que el paquete de ondas es una forma razonable de generar una partícula.

**E XAMEN RÁPIDO 39.7** Como una analogía a los paquetes de ondas, considere un “paquete de automóvil” que se presenta cerca de la escena de un accidente en una autopista. La rapidez de fase es análoga a la rapidez individual de los automóviles cuando se mueven a través de la acumulación causada por el accidente. La rapidez de grupo puede ser identificada como la rapidez del borde de adelante del paquete de automóviles. Para el paquete de automóviles, la rapidez de grupo **(a)** es la misma que la rapidez de fase, **(b)** menor que la rapidez de fase, **(c)** mayor que la rapidez de fase.





**Figura 39.21** Interferencia de los electrones. La separación  $d$  entre las rejillas es mucho mayor que el ancho de cada una y mucho menor que la distancia entre rejillas y el detector.



a



b



c



d

**Figura 39.22** (a)-(c). Patrones de interferencia simulados por computadora de un haz de electrones que inciden sobre una doble rejilla. (d) Fotografía de un patrón de interferencia de doble rejilla producido por electrones.

### 39.7 Revisión del experimento de doble rejilla

El hecho de que la luz y las partículas materiales tengan un comportamiento tanto de onda como de partículas se denomina **dualidad onda-partícula**. Este ya es ahora un concepto firmemente aceptado, reforzado por resultados experimentales, incluyendo los del experimento Davisson-Germer. Sin embargo, de manera similar a los postulados de la relatividad especial, a menudo esta idea conduce a contradicciones con los patrones familiares de pensamiento recibidos de la experiencia cotidiana. Desafíemos estas ideas diciendo: "De acuerdo, si los electrones tienen características de onda, muéstrame electrones en interferencia".

¡Es un gran desafío! Establezcamos un experimento y veamos qué sucede. Considere un haz paralelo de electrones mono-energéticos incidentes en una doble rendija como en la figura 39.21. Supongamos que los anchos de rendija son pequeños en comparación con la longitud de onda del electrón, por lo que no debemos preocuparnos por los máximos y mínimos de difracción como se discutió para la luz en la sección 37.2. Una pantalla de detector de electrones está situada lejos de las ranuras a una distancia mucho mayor que  $d$ , la distancia de separación de las ranuras.

Encendemos el aparato y esperamos a que las llegadas de electrones se acumulen en la pantalla. Después de un intervalo de tiempo suficientemente largo, ¡encontramos un patrón de interferencia de onda! Si medimos los ángulos  $\theta$  en que la intensidad máxima de electrones llega a la pantalla del detector en la figura 39.21, encontramos que están descritos exactamente por la misma ecuación que para la luz,  $d \sin \theta = m\lambda$  (ecuación 36.2), donde  $m$  es el número de orden y  $\lambda$  es la longitud de onda del electrón. Por tanto, la naturaleza dual del electrón se muestra claramente en este experimento: los electrones son detectados como partículas en un punto localizado en la pantalla del detector en algún instante de tiempo, ¡pero la probabilidad de llegar a ese punto se determina al encontrar la intensidad de dos ondas que interfieren!

Ahora imagine que a un haz de electrones con intensidades extremadamente bajas, llega un electrón por vez a la doble rendija. Es tentador suponer que el electrón pasa a través de la rendija 1 o la rendija 2. Puede argumentar que no hay efectos de interferencia porque no hay un segundo electrón que pase a través de la otra rendija para interferir con el primero. Sin embargo, esta suposición pone demasiado énfasis en el modelo de partícula del electrón. ¡Sólo se observa el patrón de interferencia si el intervalo de tiempo para la medición es suficientemente grande para que muchos electrones lleguen a la pantalla del detector! Esta situación se ilustra por los patrones simulados por computadora en la figura 39.22, donde el patrón de interferencia se vuelve más claro conforme aumenta el número de electrones que llegan a la pantalla del detector. Por esto, la suposición de que el electrón se localiza y pasa sólo a través de una rendija, cuando ambas rendijas están abiertas, debe ser incorrecta (¡una conclusión dolorosa!).

Para interpretar estos resultados, se está forzado a concluir que un electrón interactúa con ambas rendijas *simultáneamente*. Si usted intenta determinar experimental-

mente por cuál rendija pasa el electrón, el acto de medir destruye el patrón de interferencia. Es imposible determinar por cual rendija pasa el electrón. En efecto, ¡solo se puede decir que el electrón pasa a través de *ambas* rendijas! El mismo argumento se aplica a los fotones.

Si se restringe usted mismo a un modelo de partícula puro, es una noción incómoda que el electrón pueda estar presente en ambas rendijas al mismo tiempo. Sin embargo, a partir del modelo de partícula cuántica, la partícula se puede considerar construida por ondas que existen en todo el espacio. Por tanto, las componentes ondulatorias del electrón están presentes en ambas rendijas al mismo tiempo, y este modelo conduce a una interpretación más cómoda de este experimento.

## 39.8 El principio de incertidumbre

Siempre que se mida la posición o la velocidad de una partícula en cualquier momento, habrá incertidumbres experimentales incluidas en las mediciones. Según la mecánica clásica, no existe una barrera básica que impida un refinamiento adicional de los aparatos o de los procedimientos experimentales de medición. En otras palabras, es posible llevar a cabo, en principio, dichas mediciones con una incertidumbre arbitrariamente pequeña. Sin embargo, la teoría cuántica dice que básicamente es imposible medir, simultáneas, la posición y la cantidad de movimiento de una partícula con una precisión infinita.

En el año de 1927 Werner Heisenberg (1901-1976) introdujo este concepto, que ahora se conoce como el **principio de incertidumbre de Heisenberg**:

Si se hace una medición con una incertidumbre  $\Delta x$  de la posición de una partícula y de manera simultánea se hace una medición con una incertidumbre  $\Delta p_x$  de su componente en  $x$  de la cantidad de movimiento, el producto de ambas incertidumbres no puede ser nunca menor de  $\hbar/2$ :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (39.23)$$

Es decir, físicamente es imposible medir de manera simultánea la posición exacta y la cantidad de movimiento exacto de una partícula. Heisenberg tuvo cuidado en hacer notar que las incertidumbres inevitables  $\Delta x$  y  $\Delta p_x$  no se presentan debido a imperfecciones en los instrumentos reales de medición. Más bien, las incertidumbres se presentan debido a la estructura cuántica de la materia.

A fin de comprender el principio de incertidumbre, suponga que se conoce *con exactitud* la longitud de onda de una partícula. Según la relación de De Broglie,  $\lambda = h/p$ , sabría por tanto que la cantidad de movimiento sería precisamente igual a  $p = h/\lambda$ . En realidad, una onda de una sola longitud existiría en todo el espacio. Cualquier región junto a esta onda es la misma que cualquier otra (figura 39.18a). Si fuera necesario preguntar, “¿dónde está la partícula representada por esta onda?”, no existe una ubicación especial en el espacio junto a la onda que pueda ser identificada con la partícula; todos los puntos a lo largo de la onda son iguales. Por tanto, se tiene incertidumbre *infinita* respecto a la posición de la partícula, y no se sabe nada respecto a su ubicación. Obtener el conocimiento perfecto de la cantidad de movimiento de la partícula ha costado toda la información referente a su localización.

En comparación, considere ahora una partícula cuya cantidad de movimiento es incierta, por lo que tiene un intervalo de valores posibles de cantidad de movimiento. Según la relación de De Broglie, esto da como resultado un intervalo de longitudes de onda. En consecuencia, la partícula no está representada por una sola longitud de onda, sino por una combinación de longitudes de onda dentro de este intervalo. Esta combinación forma un paquete de ondas, como se vio en la sección 39.6 y como se ilustró en la figura 39.19. Si se le pide determinar la localización de la partícula, sólo podrá decir que está en alguna parte en la región definida por el paquete de ondas, ya que existe una diferencia muy clara entre esta región y el resto del espacio. Por tanto, al renunciar a parte de la información respecto a la cantidad de movimiento de la partícula, ha ganado información en relación con su posición.



Sueddeutsche Zeitung/Alamy

### Werner Heisenberg

*Físico teórico alemán (1901-1976)*

Heisenberg obtuvo su doctorado en 1923 en la Universidad de Múnich. Mientras otros científicos intentaban desarrollar modelos físicos de los fenómenos cuánticos, Heisenberg desarrolló un modelo matemático abstracto que se conoce como *mecánica matricial*. Los modelos físicos más ampliamente aceptados demostraron tener una equivalencia con la mecánica matricial. Heisenberg hizo muchas otras contribuciones significativas a la física, incluyendo su famoso principio de incertidumbre debido al cual fue galardonado con el premio Nobel en el año de 1932, por la predicción de dos formas de hidrógeno molecular y por los modelos teóricos del núcleo.



### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 39.4

#### El principio de incertidumbre

Algunos estudiantes interpretan de manera incorrecta que el principio de incertidumbre significa que una medición interfiere con el sistema. Por ejemplo, si en un experimento hipotético se observa un electrón usando un microscopio óptico, el fotón utilizado para observarlo entra en colisión con él y hace que se mueva, lo que le da incertidumbre en la cantidad de movimiento. Ésta no es la idea en el principio de incertidumbre. El principio de incertidumbre es independiente del proceso de medición y está en función de la naturaleza ondulatoria de la materia.

Si perdiera  *toda* información en relación con la cantidad de movimiento, estaría sumando ondas de todas las longitudes de onda posibles. Esto daría como resultado un paquete de ondas con una longitud igual a cero. Por tanto, si no sabe nada respecto a la cantidad de movimiento, sabe exactamente dónde está la partícula.

La forma matemática del principio de incertidumbre afirma que el producto de las incertidumbres en posición y en la cantidad de movimiento, es siempre mayor que cierto valor mínimo. Este valor puede ser calculado a partir de los argumentos arriba explicados y que resultan en el valor de  $\hbar/2$  de la ecuación 39.23.

Si reconsidera la figura 39.19, es posible generar otra forma de principio de incertidumbre. Imagine que el eje horizontal es el tiempo y no la posición en el espacio  $x$ . Ahora desarrolle los mismos argumentos que utilizó respecto al conocimiento de la longitud de onda y de la posición, pero en el dominio del tiempo. Las variables correspondientes serían la frecuencia y el tiempo. Debido a que la frecuencia está relacionada con la energía de la partícula mediante la expresión  $E = hf$ , en esta forma el principio de incertidumbre es

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (39.24)$$

Esta forma del principio de incertidumbre dada en la ecuación 39.24 sugiere que puede parecer que se ha violado la conservación de la energía en una cantidad  $\Delta E$ , siempre y cuando sea durante un breve intervalo de tiempo  $\Delta t$  consistente con la ecuación. En el capítulo 44 se utilizará esta idea para estimar las energías de reposo de las partículas.

- EJEMPLO RÁPIDO 39.8** Se observa la localización de una partícula y se concluye
- que está exactamente en  $x = 0$ , con una incertidumbre *cero* en la dirección de las  $x$ .
  - ¿De qué manera afecta lo anterior la incertidumbre de su componente de velocidad en la dirección  $y$ ? (a) No la afecta. (b) Se hace infinita. (c) Se hace igual a cero.

### Ejemplo 39.6 Localización de un electrón

La rapidez de un electrón es  $5.00 \times 10^3$  m/s con una exactitud de 0.003 00%. Encuentre la incertidumbre mínima para determinar la posición de este electrón.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El valor fraccionario dado por la exactitud de la rapidez del electrón se puede interpretar como la incertidumbre fraccionaria en su cantidad de movimiento. Esta incertidumbre corresponde a una incertidumbre mínima en la posición del electrón a través del principio de incertidumbre.

**Categorizar** El resultado se evalúa con conceptos desarrollados en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Suponga que el electrón se mueve junto al eje  $x$  y encuentre la incertidumbre en  $p_x$ , con  $f$  representando la exactitud de la medición de su rapidez:

$$\Delta p_x = m \Delta v_x = m f v_x$$

Resuelva la ecuación 39.23 para la incertidumbre en la posición del electrón y sustituya valores numéricos:

$$\begin{aligned} \Delta x &\geq \frac{\hbar}{2 \Delta p_x} = \frac{\hbar}{2 m f v_x} = \frac{1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(0.003 00)(5.00 \times 10^3 \text{ m/s})} \\ &= 3.86 \times 10^{-4} \text{ m} = \mathbf{0.386 \text{ mm}} \end{aligned}$$

### Ejemplo 39.7 El ancho de línea de emisiones atómicas

Los átomos tienen niveles de energía cuantizados similares a los de los osciladores de Planck, aunque los niveles de energía de un átomo por lo general no están igualmente espaciados. Cuando un átomo hace una transición entre estados separados en energía por  $\Delta E$ , se emite energía en la forma de un fotón de frecuencia  $f = \Delta E/h$ . Aunque un átomo excitado puede radiar en cualquier momento de  $t = 0$  a  $t = \infty$ , el intervalo de tiempo promedio después de la excitación durante el cual un átomo radia se llama **vida media**  $\tau$ . Si  $\tau = 1.0 \times 10^{-8}$  s, use el principio de incertidumbre para calcular el ancho de línea  $\Delta f$  producido por este tiempo de vida finito.

## 39.7 continuación

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La vida media  $\tau$  determinada por el estado excitado se interpreta como la incertidumbre  $\Delta t$  en el tiempo cuando se presenta la transición. Esta incertidumbre corresponde a una incertidumbre mínima en la frecuencia del fotón radiado a través del principio de incertidumbre.

**Categorizar** El resultado se evalúa con conceptos desarrollados en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 39.5 para relacionar la incertidumbre en la frecuencia del fotón con la incertidumbre en su energía:

$$E = hf \rightarrow \Delta E = h \Delta f \rightarrow \Delta f = \frac{\Delta E}{h}$$

Use la ecuación 39.24 para sustituir la incertidumbre en la energía del fotón, dado el valor mínimo de  $\Delta f$ :

$$\Delta f \geq \frac{1}{h} \frac{\hbar}{2 \Delta t} = \frac{1}{h} \frac{h/2\pi}{2 \Delta t} = \frac{1}{4\pi \Delta t} = \frac{1}{4\pi\tau}$$

Sustituya para la vida media del estado excitado:

$$\Delta f \geq \frac{1}{4\pi(1.0 \times 10^{-8} \text{ s})} = 8.0 \times 10^6 \text{ Hz}$$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si esta misma vida media se asociara con una transición que emite una onda de radio en lugar de una onda de luz visible desde un átomo? ¿El ancho de línea fraccionaria  $\Delta f/f$  es mayor o menor que para la luz visible?

**Respuesta** Puesto que se supone la misma vida media para ambas transiciones,  $\Delta f$  es independiente de la frecuencia de la radiación. Las ondas de radio tienen frecuencias menores <sup>dónde</sup> que las ondas de luz, así que la relación  $\Delta f/f$  será mayor para las ondas de radio. Si supone una frecuencia de onda de luz  $f$  de  $6.00 \times 10^{14}$  Hz, el ancho de línea fraccionaria es

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{8.0 \times 10^6 \text{ Hz}}{6.00 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 1.3 \times 10^{-8}$$

Este estrecho ancho de línea fraccionaria se puede medir con un interferómetro sensible. Sin embargo, por lo general los efectos de temperatura y presión ensombrecen el ancho de línea natural y ensancha la línea a través de un mecanismo asociado con el efecto Doppler y las colisiones.

Si supone una frecuencia de onda de radio  $f$  de  $94.7 \times 10^6$  Hz, el ancho de línea fraccionaria es

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{8.0 \times 10^6 \text{ Hz}}{94.7 \times 10^6 \text{ Hz}} = 8.4 \times 10^{-2}$$

Por tanto, para la onda de radio, este mismo ancho de línea absoluto corresponde a un ancho de línea fraccionario de más de 8%.

## Resumen

## ► Conceptos y principios

Las características de la **radiación de cuerpo negro** no se explican con conceptos clásicos. Planck introdujo el concepto cuántico y la constante de Planck  $h$  cuando supuso que los osciladores atómicos que sólo existían en estados de energía discretos fueron los responsables de esta radiación. En el modelo de Planck, la radiación se emite en paquetes cuantizados simples, siempre que un oscilador haga una transición entre estados de energía discretos. La energía de un paquete es

$$E = hf \quad (39.5)$$

donde  $f$  es la frecuencia del oscilador. Einstein extendió exitosamente la hipótesis cuántica de Planck a las ondas estacionarias de la radiación electromagnética en una cavidad usada en el modelo de radiación de cuerpo negro.

El **efecto fotoeléctrico** es un proceso mediante el cual se expulsan electrones de una superficie metálica cuando la luz incide sobre dicha superficie. En el modelo de Einstein la luz se ve como una corriente de partículas o **fotones**, cada uno con energía  $E = hf$ , donde  $h$  es la constante de Planck y  $f$  es la frecuencia. La máxima energía cinética del fotoelectrón expulsado es

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi \quad (39.11)$$

donde  $\phi$  es la **función trabajo** del metal.

Los rayos X se dispersan en diferentes ángulos por electrones en un objetivo. En tal evento de dispersión, se observa un corrimiento de la longitud de onda para los rayos X dispersados, un fenómeno conocido como **efecto Compton**. La física clásica no predice el comportamiento correcto en este efecto. Si el rayo X se trata como un fotón, la conservación de energía y la cantidad de movimiento lineal aplicadas a las colisiones fotón-electrón producen, para el corrimiento Compton,

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (39.13)$$

donde  $m_e$  es la masa del electrón,  $c$  es la rapidez de la luz y  $\theta$  es el ángulo de dispersión.



La luz tiene una naturaleza dual en cuanto a que tiene características tanto de onda como de partícula. Algunos experimentos se explican mejor o exclusivamente por el modelo corpuscular, mientras que otros se explican mejor o exclusivamente por el modelo ondulatorio.

Al combinar un gran número de ondas se puede crear una región de interferencia constructiva llamada **paquete de onda**. El paquete de onda tiene la característica de localización como las partículas, pero tiene propiedades ondulatorias porque está construida a partir de ondas. Para una onda individual en el paquete de onda, la **rapidez de fase** es

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k} \quad (39.18)$$

Para el paquete de onda como un todo, la **rapidez de grupo** es

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (39.19)$$

Para un paquete de onda que representa una partícula, se demuestra que la rapidez de grupo es la misma que la rapidez de la partícula.

Todo objeto de masa  $m$  y cantidad de movimiento  $p = mu$  tiene propiedades ondulatorias, con una **longitud de onda De Broglie** dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu} \quad (39.15)$$

El **principio de incertidumbre de Heisenberg** afirma que, si una medida de la posición de una partícula se hace con incertidumbre  $\Delta x$  y una medición simultánea de su cantidad de movimiento lineal se hace con incertidumbre  $\Delta p_x$ , el producto de las dos incertidumbres se restringe a

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (39.23)$$

Otra forma del principio de incertidumbre relaciona mediciones de energía y tiempo:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (39.24)$$

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

1. La Tierra recibe energía del Sol por radiación visible. También emite energía, principalmente en el infrarrojo, desde su superficie debido a que esta tiene una temperatura. Supongamos que la emisividad de la superficie de la Tierra es  $e$  para todo tipo de ondas electromagnéticas, y que es la misma en toda la superficie de la Tierra. A la distancia de la Tierra  $R_E$  del Sol, la intensidad de la radiación solar es  $I_S = 1\,370 \text{ W/m}^2$ . La Tierra normalmente absorbe el 70.0% de la radiación solar sobre su sección transversal circular  $\pi R_E^2$ , el otro 30.0% es reflejada por las nubes y las características de la superficie. La Tierra emite radiación infrarroja de forma uniforme al espacio desde toda su superficie  $4\pi R_E^2$ . Discuta en su grupo y responda a lo siguiente. (a) Si  $e = 1$ , e ignoramos los efectos de la atmósfera de la Tierra, demuestre que la temperatura de equilibrio de la superficie de la Tierra es de 255 K. (b) Ahora,  $e$  disminuye por debajo de 1 para modelar el efecto de la atmósfera, ya que la atmósfera capta la energía emitida desde el suelo para que no sea expulsada al espacio. Este proceso de captura aumenta la temperatura de la superficie. ¿A qué valor de  $e$  su cálculo proporciona la temperatura superficial real

actual de 288 K? (c) Como modelo para el cambio climático, permita que  $e$  se vuelva aún más pequeño. Si  $e$  es 5.00% más pequeño que el encontrado en el inciso (b), ¿cuál es la temperatura de equilibrio de la superficie de la Tierra?

2. **ACTIVIDAD** Los datos para proporcionar un gráfico como el de la figura 39.11 fueron tomados por Robert Millikan e informados en 1916. Los datos de Millikan sobre el sodio aparecen en la tabla a continuación. Con esta información, trabaje en su grupo para preparar un gráfico como el de la figura 39.11 y encuentre el valor estimado de la constante de Planck a partir de los datos.

Longitud de onda de luz que golpea el emisor (nm)	Potencial de frenado (V)
546.1	0.53
433.9	1.08
404.7	1.27
365.0	1.66
312.6	2.20
253.5	3.11

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

### SECCIÓN 39.1 Radiación de cuerpo negro e hipótesis de Planck

1. Los relámpagos producen una máxima temperatura de aire del orden de  $10^4 \text{ K}$ , mientras una explosión nuclear produce una temperatura del orden de  $10^7 \text{ K}$ . (a) Use la ley de des-

plazamiento de Wien para encontrar el orden de magnitud de la longitud de onda de los fotones térmicamente producidos radiados con mayor intensidad por cada una de estas fuentes. (b) Mencione la parte del espectro electromagnético donde esperaría que cada uno emita más intensamente.

2. **CIC** Modele el filamento de tungsteno de una lámpara como un cuerpo negro a 2900 K de temperatura. (a) Determine la longitud de onda de la luz que emite más intensamente. (b) Explique por qué la respuesta al inciso (a) sugiere que

más energía de la lámpara va a radiación infrarroja que a luz visible.

**3.** Un transmisor de radio de FM tiene una potencia de salida de 150 kW y con una frecuencia de 99.7 MHz. ¿Cuántos fotones por segundo emite el transmisor?

**4.** La figura P39.4 muestra el espectro de luz emitido por una luciérnaga. (a) Determine la temperatura de un cuerpo negro que emitirá radiación con pico a la misma longitud de onda. (b) Según su resultado, explique si la radiación de la luciérnaga es radiación de cuerpo negro.

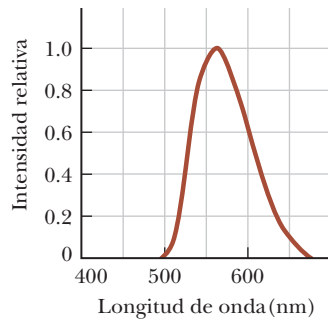


Figura P39.4

**5.** El radio del Sol es de  $6.96 \times 10^8$  m, y su energía total emitida es de  $3.85 \times 10^{26}$  W. (a) Suponiendo que la superficie del Sol radia como si fuera un cuerpo negro, calcule la temperatura de su superficie. (b) Utilizando el resultado del inciso (a), determine la  $\lambda_{\text{máx}}$  para el Sol.

**6.** (i) Calcule en electrón volts la energía de un fotón cuya frecuencia es (a) 620 THz, (b) 3.10 GHz y (c) 46.0 MHz. (ii) Determine las longitudes de onda correspondientes a estos fotones y diga cómo se clasifica cada uno de ellos en el espectro electromagnético.

**7. Problema de repaso.** Este problema es acerca de qué tan fuertemente se acopla la materia a la radiación, el tema con el que comenzó la mecánica cuántica. Para un modelo simple, considere una esfera sólida de hierro de 2.00 cm de radio. Suponga que su temperatura siempre es uniforme en todo su volumen. (a) Encuentre la masa de la esfera. (b) Suponga que la esfera está a 20 °C y tiene emisividad 0.860. Encuentre la potencia con la que emite ondas electromagnéticas. (c) Si estuviese sola en el Universo, ¿con qué rapidez cambiaría la temperatura de la esfera? (d) Suponga que la ley de Wien describe la esfera. Encuentre la longitud de onda  $\lambda_{\text{máx}}$  de radiación electromagnética que emite más fuertemente. Aunque emite un espectro de ondas que tienen diferentes longitudes, suponga que su salida de potencia se transporta mediante fotones de longitud de onda  $\lambda_{\text{máx}}$ . Encuentre (e) la energía de un fotón y (f) el número de fotones que emite cada segundo.

**8.** Considere un cuerpo negro con 20.0 cm<sup>2</sup> de superficie y con una temperatura de 5000 K. (a) ¿Cuánta potencia irradia? (b) ¿A qué longitud de onda irradia con una máxima intensidad? Determine la potencia espectral por longitud de onda en (c) esta longitud de onda y en longitudes de onda de (d) 1.00 nm (un rayo X o un rayo gama), (e) 5.00 nm (luz ultravioleta o rayos X), (f) 400 nm (en el límite entre la luz ultravioleta y la luz visible), (g) 700 nm (en el límite entre la luz visible y la luz infrarroja), (h) 1.00 mm (la luz infrarroja o una microonda) e (i) 10.0 cm (una microonda o una onda de radio). (j) ¿Aproximadamente cuánta energía irradia el objeto como luz visible?

**9.** Un pulso láser de rubí emite luz a 694.3 nm. Para un pulso 14.0-ps que contiene 3.00 J de energía, encontrar (a) la longitud física del pulso a medida que viaja a través del espacio y (b) el número de fotones en el mismo. (c) Suponiendo que el haz tiene una sección transversal de 0.600 cm de diáme-

tro circular, encontrar el número de fotones por milímetro cúbico.

**10.** Demuestre que en las longitudes de onda larga, la ley de la radiación de Planck (ecuación 39.6) se reduce a la ley de Rayleigh-Jeans (ecuación 39.3).

**SECCIÓN 39.2 Efecto fotoeléctrico**

**11.** El molibdeno tiene una función trabajo de 4.20 eV. (a) Determine la longitud de onda y la frecuencia de corte para el efecto fotoeléctrico. (b) ¿Cuál es el potencial de frenado si la luz incidente tiene una longitud de onda de 180 nm?

**12.** A partir de la dispersión de la luz solar, J.J. Thomson calculó el radio clásico del electrón de  $2.82 \times 10^{15}$  m. Sobre un disco de este radio incide luz solar con una intensidad de 500 W/m<sup>2</sup>. Suponga que la luz es una onda clásica y que la luz que incide sobre el disco se absorbe totalmente. (a) Calcule el intervalo de tiempo requerido para acumular 1.00 eV de energía. (b) Explique cómo se compara su resultado en (a) con la observación de que los fotoelectrones se emiten con prontitud (en un tiempo inferior a  $10^{-9}$  s)?

**13.** La función de trabajo para el zinc es de 4.31 eV. (a) Halle la longitud de onda de corte para el zinc. (b) ¿Cuál es la frecuencia más baja de luz que incide sobre el zinc que libera fotoelectrones de su superficie? (c) Si los fotones de 5.50 eV de energía inciden en el zinc, ¿cuál es la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados?

**14.** La función de trabajo para el platino es 6.35 eV. Luz ultravioleta de longitud de onda de 150 nm incide sobre la superficie limpia de una muestra de platino. Se desea predecir el voltaje de frenado necesario para los electrones emitidos desde la superficie. (a) ¿Cuál es la energía de los fotones de la luz ultravioleta? (b) ¿Cómo sabe que estos fotones expulsan electrones de platino? (c) ¿Cuál es la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados? (d) ¿Qué voltaje se requeriría para detener la corriente de fotoelectrones?

**SECCIÓN 39.3 Efecto Compton**

**15.** Un fotón con un longitud de onda  $\lambda$  se dispersa por un electrón libre en el punto A (figura P39.15) y produce un segundo fotón con una longitud de onda  $\lambda'$ . Este fotón a su vez se dispersa por colisión con otro electrón libre en el punto B, produciendo un tercer fotón de longitud de onda  $\lambda''$  y que se mueve en una dirección directamente opuesta a la del fotón original, como se muestra en la figura. Determine el valor numérico de  $\Delta\lambda = \lambda'' - \lambda$ .

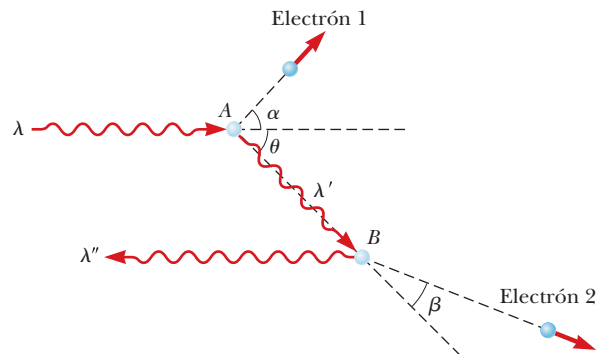


Figura P39.15

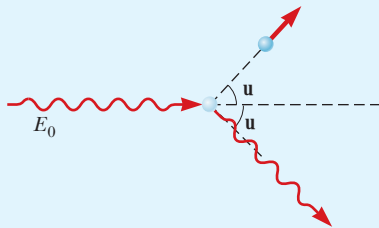
**16.** Rayos X con una longitud de onda de 120.0 pm se someten a dispersión Compton. (a) Encuentre las longitudes de onda de los fotones dispersados con ángulos de 30.0°, 60.0°,

90.0°, 120°, 150° y 180°. (b) Encuentre la energía del electrón dispersado en cada caso. (c) ¿Cuál de los ángulos de dispersión proporciona al electrón la mayor energía? Explique si podría responder esta pregunta sin hacer cálculo alguno.

**17.** Un fotón de 0.001 60 nm se dispersa de un electrón libre. **T** ¿Para qué (fotón) ángulo de dispersión del electrón en retroceso tiene una energía cinética igual a la energía del fotón disperso?

**18.** Está trabajando en un laboratorio de rayos X. Usted tiene **CE** una fuente de rayos X con una longitud de onda de 0.115 nm. En el experimento que está realizando, necesita rayos X con una longitud de onda ligeramente más larga que esta. Decide utilizar la dispersión Compton a partir de electrones para aumentar la longitud de onda de los rayos X. Para el experimento, debe determinar (a) a qué ángulo se dispersarán los rayos X con una longitud de onda 1.2% mayor que los de su fuente. (b) También necesita determinar la longitud de onda más larga que puede lograr con la dispersión de Compton.

**19.** Un fotón de  $E_0 = 0.880$  MeV es dispersado por un electrón **V** libre inicialmente en reposo de manera que el ángulo de dispersión del electrón dispersado es igual al del fotón dispersado como se muestra en la figura 39.19. Determine (a) el ángulo de dispersión del fotón y del electrón, (b) la energía y la cantidad de movimiento del fotón dispersado y (c) la energía cinética y la cantidad de movimiento del electrón dispersado.



**Figura P39.19**  
Problemas 19 y 20

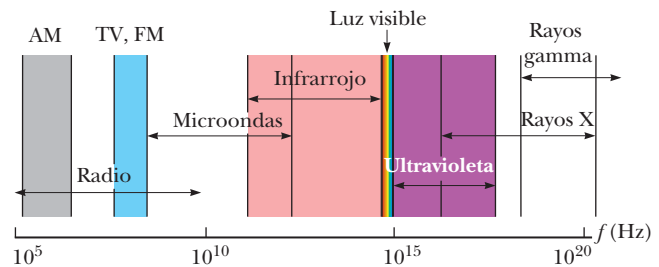
**20.** Un fotón con energía  $E_0$  es dispersado por un electrón **S** libre inicialmente en reposo de manera que el ángulo de dispersión del electrón dispersado es igual al del fotón dispersado como se muestra en la figura 39.19. Determine (a) el ángulo  $\theta$ , (b) la energía y la cantidad de movimiento del fotón dispersado y (c) la energía cinética y la cantidad de movimiento del electrón dispersado.

**21.** En un experimento de dispersión Compton, un fotón de rayos X se dispersa en un ángulo de 17.4° a causa de un electrón libre inicialmente en reposo. El electrón retrocede con una rapidez de 2180 km/s. Calcule (a) la longitud de onda del fotón incidente y (b) el ángulo en el cual se dispersa el electrón.

**22.** En un experimento de dispersión Compton, un fotón se **CIC** dispersa en un ángulo de 90.0° y el electrón se pone en movimiento en una dirección a un ángulo de 20.0° a la dirección original del fotón. (a) Explique si esta información es suficiente para determinar de manera única la longitud de onda del fotón dispersado y (b) encuentre esta longitud de onda.

### SECCIÓN 39.4 Naturaleza de las ondas electromagnéticas

**23.** Una onda electromagnética es llamada **CIC** *radiación ionizante* si su energía de fotones es superior a, 10.0 eV, por lo que un fotón individual tiene suficiente energía para romper un átomo.



**Figura P39.23**

mo. En referencia a la figura 39.23, explique qué región o regiones del espectro electromagnético que se ajustan a esta definición de radiación ionizante y también las que no se ajustan. (Si desea consultar la versión completa de la figura P39.23, vea la figura 33.13)

**24.** **Problema de repaso.** Un láser de helio neón produce un haz **V** que tiene un diámetro de 1.75 mm, y que entrega  $2.00 \times 10^{18}$  fotones/s. Cada fotón tiene una longitud de onda de 633 nm. Calcule las amplitudes de (a) el campo eléctrico y (b) el campo magnético en el interior del haz. (c) Si el haz brilla en forma perpendicular sobre una superficie perfectamente reflectante, ¿cuál es la fuerza que ejerce sobre la superficie? (d) Si el haz es absorbido por un bloque de hielo a 0°C durante 1.50 h, ¿cuál es la masa de hielo que se funde?

### SECCIÓN 39.5 Propiedades ondulatorias de las partículas

**25.** (a) Calcule la cantidad de movimiento de un fotón cuya longitud de onda es  $4.00 \times 10^{-7}$  m. (b) Encuentre la rapidez de un electrón con el mismo impulso que el fotón en el inciso (a).

**26.** El poder de resolución de un microscopio depende de la longitud de onda utilizada. Si quisiera “ver” un átomo, sería necesario tener una resolución de aproximadamente  $1.00 \times 10^{-11}$  m. (a) Si se utilizan electrones (en un microscopio electrónico), ¿cuál es la energía cinética mínima necesaria para los electrones? (b) **¿Qué pasaría si?** Si se utilizan fotones, ¿cuál es la energía mínima necesaria para obtener la resolución requerida?

**27.** Robert Hofstadter ganó el Premio Nobel de Física en 1961, **CIC** por su trabajo pionero en el estudio de la dispersión de electrones de 20 GeV desde el núcleo. (a) ¿Cuál es el factor  $g$  para un electrón con energía total de 20.0 GeV, definido por  $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ ? (b) Encuentre la cantidad de movimiento del electrón. (c) Encuentre la longitud de onda del electrón. Establezca cómo se compara con el diámetro de un núcleo atómico, representativo en el orden de  $10^{-14}$  m.

**28.** El núcleo de un átomo tiene un diámetro del orden de  $10^{-14}$  **CIC** m. Para que un electrón se quede confinado en un núcleo, su longitud de onda de De Broglie tiene que estar en ese orden de magnitud o menor. (a) ¿Cuál sería la energía cinética de un electrón confinado en esa región? (b) Estime el orden de magnitud de la energía potencial eléctrica del sistema de un electrón en un núcleo atómico. (c) ¿Qué esperaría para encontrar un electrón en el núcleo? Explique.

**29.** Ha logrado su sueño de convertirse en profesor de física **CE** y obtuvo una cátedra de asistente en una universidad pequeña. Tiene una próxima conferencia sobre la dualidad onda-partícula. Desea generar una demostración en la que bombardea una rendija doble de ancho  $d = 50.0$  mm con ambos electrones y luz roja de longitud de onda  $\lambda_{\text{rojo}} = 632.8$  nm, y hacer que los estudiantes observen ambos patrones de



interferencia en una pantalla especial que mostrará la llegada de la luz y los electrones. Debe determinar la diferencia de potencial a través de la cual debe acelerar los electrones para que los patrones de las franjas tanto de la luz como de los electrones tengan exactamente el mismo aspecto.

- 30.** (a) Demuestre que la frecuencia  $f$  y la longitud de onda  $\lambda$  de una partícula cuántica con un movimiento libre están relacionadas mediante la expresión

$$\left(\frac{f}{c}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda_C^2}$$

donde  $\lambda_C = h/mc$  es la longitud de onda Compton de la partícula. (b) ¿Será posible alguna vez para una partícula de masa diferente de cero tener la misma longitud de onda y la misma frecuencia que un fotón? Explique su respuesta.

- 31.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Después de aprender sobre la hipótesis de De Broglie que las partículas materiales de impulso se mueven como ondas con longitudes de onda  $\lambda = h/p$ , un estudiante de 80 kg ha crecido preocupado porque será difractado al pasar por una puerta de anchura  $W = 75$  cm. Suponga que se produce una difracción significativa cuando la anchura de la abertura de difracción es inferior a diez veces la longitud de onda de la onda a ser difractada. Junto con sus compañeros de clase, el estudiante lleva a cabo experimentos de precisión y descubre que en efecto experimenta una difracción medible.

**SECCIÓN 39.6 Un nuevo modelo: La partícula cuántica**

- 32.** Considere una partícula cuántica en movimiento libre de masa  $m$  y rapidez  $u$ . Su energía es igual a  $E = K = \frac{1}{2} mu^2$ . (a) Determine la rapidez de fase de la onda cuántica que representa la partícula y (b) demuestre que es diferente de la rapidez a la cual transporta masa y energía.
- 33.** Para una partícula cuántica relativista libre que se mueve con una rapidez  $u$ , la energía total es igual a  $E = hf = \hbar\omega = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$  y la cantidad de movimiento es igual a  $p = h/\lambda = \hbar k = \gamma mu$ . Para la onda cuántica que representa la partícula, la rapidez de grupo es igual a  $v_g = d\omega/dk$ . Demuestre que la rapidez de grupo de la onda es igual a la rapidez de la partícula.

**SECCIÓN 39.7 Revisión del experimento de doble rejilla**

**34.** Está trabajando como asistente de demostración para una profesora de física. Ella quiere demostrar a sus alumnos la acumulación del patrón de interferencia para electrones individuales que pasan a través de una doble rendija, como se muestra en la figura 39.22. Su fuente de electrones será un determinado tubo de vacío, en el que los electrones se evaporan de un cátodo caliente a un ritmo lento y constante y aceleran desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 45.0 V. Después de ser acelerados, viajan a una región sin campo y evacuada antes de que pasen a través de las ranuras dobles y caigan en una pantalla para producir un patrón de interferencia. Para asegurarse de que solo pasa un electrón a la vez a través de las rendijas, quiere que los electrones se separen en el espacio por  $d = 1.00$  cm (perpendicular a la barrera que contiene las rendijas) a medida que se aproximan a la rendija. Ella le pide que determine el valor máximo de la corriente del haz que garantizará que solo un electrón a la vez pase a través de las rendijas.

- 35.** Para llevar a cabo un experimento de interferencia de electrones se utiliza un osciloscopio modificado. Los electrones

inciden sobre un par de rejillas estrechas separadas  $0.060$   $\mu\text{m}$ . Sobre una pantalla colocada a  $20.0$  cm de las rejillas, las bandas brillantes del patrón de interferencia aparecen separadas  $0.400$  mm. Determine la diferencia de potencial a través de la cual se aceleraron los electrones para obtener este patrón.

**SECCIÓN 39.8 El principio de incertidumbre**

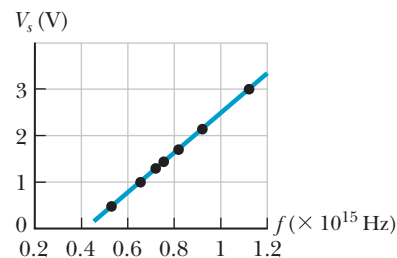
- 36.** Está realizando una investigación sobre las fluctuaciones cuánticas en el espacio vacío. En un tipo de fluctuación, un par electrón-positrón (sección 44.2) aparece en el espacio vacío. Este proceso parece violar el principio de conservación de la energía, ya que la energía en reposo de las partículas se ha creado a partir de la nada. Sin embargo, de acuerdo con la ecuación 39.24, esta violación de la conservación de la energía puede existir siempre que las partículas se aniquilen entre sí en un intervalo de tiempo consecuente con la versión de tiempo de energía del principio de incertidumbre. Use este principio para estimar cuánto tiempo pueden existir el electrón y el positrón antes de aniquilarse.
- 37.** La vida media de un muón es de  $2 \mu\text{s}$ . Estime la incertidumbre mínima en la energía en reposo de un muón.
- 38.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un rifle de aire es utilizado para disparar partículas de  $1.00$  g con una rapidez de  $v_x = 100$  m/s. El cañón del rifle tiene un diámetro de  $2.00$  mm. El rifle está montado sobre un soporte perfectamente rígido de manera que se dispara exactamente de la misma manera cada vez. Sin embargo, debido al principio de incertidumbre, después de muchos disparos, el diámetro de la pulverización de gránulos sobre un blanco de papel es  $1.00$  cm.
- 39.** Use el principio de incertidumbre a fin de demostrar que si un electrón estuviera confinado en el interior de un núcleo atómico de un diámetro del orden de  $10^{-14}$  m, tendría que estar desplazándose de manera relativista, en tanto que un protón confinado en el mismo núcleo podría estarse desplazando de manera no relativista.

**PROBLEMAS ADICIONALES**

- 40.** Un fotón con una energía inicial  $E_0$  se somete a dispersión Compton con un ángulo  $\theta$  a causa de un electrón libre (de masa  $m_e$ ), que inicialmente está en reposo. Deduzca la relación siguiente para la energía final  $E'$  del fotón disperso:

$$E' = \frac{E_0}{1 + \left(\frac{E_0}{m_e c^2}\right)(1 - \cos \theta)}$$

- 41.** La figura P39.41 muestra el potencial de frenado en función de la frecuencia del fotón incidente para el efecto fotoeléctrico en el sodio. Use la gráfica para determinar (a) la fun-



**Figura P39.41**



ción trabajo del sodio, (b) la razón  $h/e$  y (c) la longitud de onda de corte. Los datos se han tomado de R. A. Millikan, *Physical Review* 7:362(1916).

42. Deduzca la ecuación de desplazamiento de Compton, ecuación 39.13, aplicando los principios de conservación de energía y cantidad de movimiento a la colisión que se muestra en la figura 39.13. Suponga que el electrón está libre e inicialmente está en reposo.
43. Un mesón  $\pi^0$  es una partícula inestable producto de las colisiones entre partículas de alta energía. Su energía en reposo es de aproximadamente 135 MeV, y tiene una existencia con un tiempo de vida media de sólo  $8.70 \times 10^{-17}$  s antes de decaer, formando dos rayos gamma. Utilizando el principio de incertidumbre, estime la incertidumbre fraccionaria  $\Delta m/m$  en su determinación de la masa.
44. Demuestre que la razón de la longitud de onda Compton  $\lambda_C$  con la longitud de onda de De Broglie  $\lambda = h/p$  en el caso de un electrón relativista es igual a

$$\frac{\lambda_C}{\lambda} = \left[ \left( \frac{E}{m_e c^2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

donde  $E$  es la energía total del electrón y  $m_e$  es su masa.

45. Luz ultravioleta, con una sola longitud de onda y con intensidad de  $550 \text{ W/m}^2$ , incide de manera normal sobre la superficie de un metal que tiene una función trabajo de 3.44 eV. Se emiten fotoelectrones con una rapidez máxima de 420 km/s. (a) Encuentre la rapidez máxima posible de emisión de fotoelectrones desde  $1 \text{ cm}^2$  de la superficie al imaginar que cada fotón produce un fotoelectrón. (b) Encuentre la corriente eléctrica que constituyen estos electrones. (c) ¿Cómo supone que se compara la corriente real con esta corriente máxima posible?
46. El neutrón tiene una masa de  $1.67 \times 10^{-27}$  kg. Los neutrones que se emiten en reacciones nucleares se pueden desacelerar mediante colisiones con la materia. Se conocen como neutrones térmicos en cuanto llegan a un equilibrio térmico con lo que los rodea. La energía cinética promedio ( $3/2 k_B T$ ) de un neutrón térmico es de aproximadamente 0.04 eV. (a) Calcule la longitud de onda de De Broglie de un neutrón que tiene una energía cinética de 0.040 eV. (b) ¿Cómo se compara esto con el espaciado atómico característico de un cristal? (c) Explique si debe esperar que los neutrones térmicos exhiban efectos de difracción al ser dispersados por un cristal.

### PROBLEMAS DE DESAFÍO

47. **Problema de repaso.** Una fuente luminosa que emite radiación en  $7.00 \times 10^{14}$  Hz no es capaz de expulsar fotoelectrones de un cierto metal. En un intento por utilizar esta fuente para expulsar fotoelectrones del metal, se le imprime a la fuente una velocidad dirigida hacia el metal. (a) Explique la forma en que este procedimiento produce fotoelectrones.

(b) Cuando la rapidez de la fuente luminosa es igual a  $0.280c$ , apenas empiezan a ser expulsados del metal los fotoelectrones. ¿Cuáles la función trabajo del metal? (c) Cuando se incrementa la rapidez de la fuente luminosa hasta  $0.900c$ , determine la energía cinética máxima de los fotoelectrones.

48. Una mujer de pie sobre una escalera deja caer píldoras pequeñas hacia un objetivo puntual en el piso. (a) Demuestre que, según el principio de incertidumbre, la distancia promedio de error debe ser por lo menos

$$\Delta x_f = \left( \frac{2\hbar}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{2H}{g} \right)^{1/4}$$

donde  $H$  es la altura inicial de cada píldora desde el piso y  $m$  es la masa de cada píldora. Suponga que la dispersión en los puntos de impacto está dada por  $\Delta x_f = \Delta x_i (\Delta v_x) t$ . (b) Si  $H = 2.00 \text{ m}$  y  $m = 0.500 \text{ g}$ , ¿cuál es valor de  $\Delta x_f$ ?

49. La potencia total por unidad de área emitida por un cuerpo negro a una temperatura  $T$  es el área bajo la curva  $I(\lambda, T)$  en función de  $\lambda$ , como se observa en la figura 39.3. (a) Demuestre que esta potencia por unidad de área es igual a

$$\int_0^\infty I(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4$$

donde  $I(\lambda, T)$  está dada por la ley de radiación de Planck y  $\sigma$  es una constante independiente de  $T$ . Este resultado se conoce como la ley de Stefan (véase la sección 19.6). A fin de efectuar la integración, es necesario hacer el cambio de variable  $x = hc/\lambda k_B T$  y utilizar

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

(b) Demuestre que la constante  $\sigma$  de Stefan-Boltzmann tiene el valor de

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

50. Utilizando los principios de conservación, demuestre que un fotón no puede transferir toda su energía a un electrón libre.
51. Deduzca la ley de desplazamiento de Wien a partir de la ley de Planck. Proceda como sigue. En la figura 39.3 observe que la longitud de onda a la cual el cuerpo negro emite con la máxima intensidad es la longitud de onda para la cual la gráfica de  $I(\lambda, T)$  en función de  $\lambda$  tiene una tangente horizontal. De la ecuación 39.6 evalúe la derivada  $dI/d\lambda$ . Establézcala igual a cero. Resuelva numéricamente la ecuación trascendental resultante para demostrar que  $hc/\lambda_{\text{máx}} k_B T = 4.965 \dots$ , o bien  $\lambda_{\text{máx}} T = hc/4.965 k_B$ . Evalúe la constante con la mayor precisión posible y compárela con el valor experimental de Wien.



# Mecánica cuántica

# 40

La superficie del grafito se "ve" con un microscopio de efecto túnel. Este tipo de microscopio permite a los científicos ver detalles con una resolución lateral de aproximadamente 0.2 nm y una resolución vertical de 0.001 nm. Los contornos que se ven aquí representan la disposición similar a un anillo de átomos de carbono individuales en la superficie del cristal. (Foto cortesía de Paul K. Hansma, Universidad de California, Santa Bárbara)

## IMAGINE Está descansando en su sala de estar, tratando de recuperarse

de los impactantes desarrollos del capítulo 39. La dualidad onda-partícula es fascinante para usted. En particular, encuentra su aplicación en el microscopio electrónico muy interesante. Al leer sobre un microscopio de este tipo, verá una comparación entre las imágenes de un microscopio electrónico y un microscopio de efecto túnel. Usted dice: "¡Espera un minuto! ¿Qué es un microscopio de efecto túnel?". Verá la imagen de arriba para este capítulo y se sorprenderá de que el microscopio pueda resolver capas de átomos. Se dice a sí mismo que necesita aprender más sobre la física detrás de tal dispositivo. ¡La mejor manera de hacerlo, por supuesto, es leer el capítulo 40!

**CONEXIONES** En el capítulo 39, estudiamos los primeros experimentos que combinaban conceptos clásicos de muchos de los capítulos anteriores de este libro con nuevos conceptos cuánticos. Una vez que los físicos se convencieron de que el comportamiento cuántico era real, se abrió una nueva vía para la investigación teórica, que condujo al desarrollo de la *mecánica cuántica*. Esta es una teoría extremadamente exitosa para explicar el comportamiento de las partículas microscópicas. En este capítulo, veremos cómo se puede construir la teoría a partir de nuestros nuevos conceptos cuánticos en combinación con material sobre ondas del capítulo 16 y las ondas bajo el modelo de condiciones de frontera del capítulo 17. Una vez que hayamos establecido esta teoría, se convertirá en la base para nuestra comprensión de átomos, moléculas, núcleos y partículas elementales en los capítulos restantes de este libro.

## 40.1 La función de onda

En el capítulo 39 se presentaron algunas ideas nuevas y extrañas. En particular, se concluyó, con base en evidencia experimental, que la materia y la radiación electromagnética a veces se modelan mejor como partículas y a veces como ondas, dependiendo del fenómeno que se observe. Es posible mejorar la comprensión de la física cuántica si se hace otro enlace conceptual entre partículas y ondas, con el uso de la noción de probabilidad.

- 40.1 La Función de onda
- 40.2 Análisis de modelo: La partícula cuántica bajo condiciones de frontera
- 40.3 La ecuación de Schrödinger
- 40.4 Una partícula en un pozo de altura finita
- 40.5 Efecto túnel a través de una barrera de energía potencial
- 40.6 Aplicaciones del efecto túnel
- 40.7 El oscilador armónico simple



Primero hay que explicar la radiación electromagnética con el modelo de las partículas. La probabilidad por unidad de volumen de hallar un fotón en una región determinada del espacio en un instante, es proporcional al número  $N$  de fotones por unidad de volumen en ese tiempo:

$$\frac{\text{Probabilidad}}{V} \propto \frac{N}{V}$$

El número de fotones por unidad de volumen es proporcional a la intensidad de la radiación:

$$\frac{N}{V} \propto I$$

Ahora, se enlaza el modelo de partícula y el modelo de onda recordando que la intensidad de radiación electromagnética es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico  $E$  para la onda electromagnética (ecuación 33.27):

$$I \propto E^2$$

Igualando el principio y el fin de esta sucesión de proporcionalidades, tiene

$$\frac{\text{Probabilidad}}{V} \propto E^2 \quad (40.1)$$

Por tanto, para la radiación electromagnética la probabilidad por unidad de volumen de hallar una partícula asociada con esta radiación (el fotón) es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda electromagnética asociada.

Al reconocer la dualidad onda-partícula de la radiación electromagnética y la materia, se debería sospechar una proporcionalidad paralela para una partícula material: la probabilidad por unidad de volumen de hallar la partícula es proporcional al cuadrado de la amplitud de una onda que represente la partícula. En el capítulo 39 aprendió que hay una onda de De Broglie asociada con cualquier partícula. La amplitud de la onda de De Broglie asociada con una partícula no es una cantidad que se pueda medir, porque la función de onda que representa una partícula es, por lo general, una función compleja, como se verá a continuación. En contraste, el campo eléctrico para una onda electromagnética es una función real. La cuestión análoga a la ecuación 40.1 relaciona el cuadrado de la amplitud de la onda con la probabilidad por unidad de volumen de hallar la partícula. En consecuencia, a la amplitud de la onda asociada con la partícula se le llama simplemente **amplitud de probabilidad**, o **función de onda**, y se simboliza con  $\Psi$ . Para las partículas materiales,  $\Psi$  desempeñaría el papel de  $E$  en la ecuación 40.1.

En general, la función de onda completa  $\Psi$  para un sistema depende de las posiciones de todas las partículas del sistema y del tiempo, por lo cual se escribe  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_j, \dots, t)$  donde  $\vec{r}_j$  es el vector de posición de la  $j$ -ésima partícula del sistema. Para muchos sistemas de interés, incluso los que se estudian en este texto, la función de onda  $\Psi$  es matemáticamente separable en espacio y tiempo y se puede escribir como un producto de una función de espacio  $\psi$  para una partícula del sistema y una función del tiempo compleja:<sup>1</sup>

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_j, \dots, t) = \psi(\vec{r}_j) e^{-i\omega t} \quad (40.2)$$

Función de onda  $\Psi$  dependiente del espacio y del tiempo

donde  $\omega (= 2\pi f)$  es la frecuencia angular de la función de onda e  $i = \sqrt{-1}$ .

Para cualquier sistema en el que la energía potencial sea independiente del tiempo y dependa sólo de las posiciones de las partículas dentro del sistema, la información importante acerca del sistema está contenida dentro de la parte espacial de la función de onda. La parte del tiempo es simplemente el factor  $e^{-i\omega t}$ . Debido a eso, es fundamental entender  $\Psi$  en cualquier problema.

<sup>1</sup>La forma estándar de un número complejo es  $a + ib$ . La notación  $e^{i\theta}$  es equivalente a la forma estándar como sigue:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

Por tanto, la notación  $e^{-i\omega t}$  de la ecuación 41.2 es equivalente a  $\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t) = \cos\omega t - i \sin\omega t$ .





La función de onda  $\psi$  con frecuencia es una estimación compleja. El cuadrado absoluto  $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ , donde  $\psi^*$  es el complejo conjugado<sup>2</sup> de  $\psi$ , es siempre real y positivo, y es proporcional a la probabilidad por unidad de volumen de hallar una partícula en un punto determinado en algún instante. La función de onda contiene en su interior toda la información que se pueda conocer acerca de la partícula.

Aunque  $\psi$  no se puede observar, se puede medir la cantidad real  $|\psi|^2$ , que se interpreta como sigue. Si  $\psi$  representa una sola partícula, entonces  $|\psi|^2$ ; conocida como **densidad de probabilidad**, es la probabilidad relativa por cada unidad de volumen que la partícula encontrará en cualquier punto determinado en el volumen. Esta interpretación también se puede establecer de la manera siguiente: si  $dV$  es un elemento de volumen pequeño rodeando algún punto, la probabilidad de hallar la partícula en el elemento de volumen es

$$P(x, y, z)dV = |\psi|^2 dV \quad (40.3)$$

Esta interpretación probabilística de la función de onda fue sugerida primero por Max Born (1882-1970) en 1928. En 1926, Erwin Schrödinger (1887-1961) propuso una ecuación de onda que describe la manera en que la función de onda cambia en el espacio y el tiempo. La *ecuación de onda de Schrödinger*, que se examina en la sección 40.3, representa un elemento clave en la teoría de la mecánica cuántica.

En la sección 39.5, encontramos que la ecuación de De Broglie relaciona el momento de una partícula con su longitud de onda a través de la relación  $p = h/\lambda$ . Si una partícula libre ideal tiene un momento  $p_x$  precisamente conocido, su función de onda es una onda sinusoidal infinitamente larga de longitud de onda  $\lambda = h/p_x$  y la partícula tiene la misma probabilidad de estar en cualquier punto a lo largo del eje  $x$  (figura 39.18a). La función de onda  $\psi$  para tal partícula libre que se mueve a lo largo del eje  $x$  se puede escribir como

$$\psi(x) = Ae^{ikx} \quad (40.4)$$

donde  $A$  es una amplitud constante y  $k = 2\pi/\lambda$  es el número de onda angular (ecuación 16.8) de la onda que representa la partícula.<sup>3</sup>

Los conceptos de mecánica cuántica, que a veces parecen extraños, se crearon a partir de ideas clásicas. De hecho, cuando sus técnicas de mecánica cuántica se aplican a sistemas macroscópicos, los resultados son en esencia idénticos a los de la física clásica. Esta mezcla de los dos planteamientos se presenta cuando la longitud de onda de De Broglie es pequeña en comparación con las dimensiones del sistema. La situación es similar al acuerdo existente entre la mecánica relativista y la mecánica clásica cuando  $v \ll c$ .

**E XAMEN RÁPIDO 40.1** Considere la función de onda para la partícula libre, ecuación 40.4. ¿En qué valor de  $x$  es más probable que la partícula se encuentre en un tiempo determinado? (a) En  $x = 0$ , (b) a pequeños valores de  $x$ , (c) a grandes valores de  $x$ , o (d) en cualquier punto a lo largo del eje  $x$ .

## Funciones de onda unidimensionales y valores permitidos

Esta sección expone únicamente sistemas unidimensionales, donde la partícula debe estar ubicada a lo largo del eje  $x$ , de modo que la probabilidad  $|\psi|^2 dV$  en la ecuación 40.3 se modifica para convertirse en  $|\psi|^2 dx$ . La probabilidad de que la partícula se encuentre en el intervalo infinitesimal  $dx$  alrededor del punto  $x$  es

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 40.1

**La función de onda pertenece a un sistema** Lo común en mecánica cuántica es asociar una función de onda con una partícula. La función de onda, sin embargo, está determinada por la partícula y su interacción con su entorno, de modo que pertenece más propiamente a un sistema. En muchos casos la partícula es la única parte del sistema que experimenta un cambio, por lo que se ha desarrollado dicha asociación. En el futuro el estudiante verá ejemplos en los que es más correcto considerar la función de onda del sistema que la función de onda de la partícula.

◀ Función de onda para partícula libre

<sup>2</sup>Para un número complejo  $z = a + ib$ , el complejo conjugado se encuentra al cambiar  $i$  a  $-i$ :  $z^* = a - ib$ . El producto de un número complejo y su complejo conjugado es siempre real y positivo: es decir  $z^*z = (a - ib)(a + ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - (i)^2b^2 = a^2 + b^2$ .

<sup>3</sup>Para la partícula libre, la función de onda completa, con base en la ecuación 40.2, es

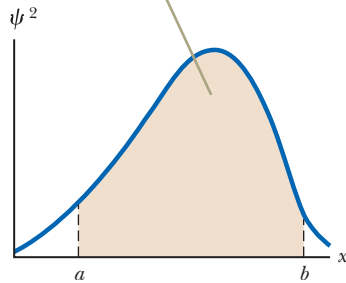
$$\Psi(x, t) = Ae^{ikx}e^{-i\omega t} = Ae^{i(kx - \omega t)} = A[\cos(kx - \omega t) + i\sin(kx - \omega t)]$$

La parte real de esta función de onda tiene la misma forma que las ondas unidas para formar paquetes de onda en la sección 39.6.





La probabilidad de que una partícula se encuentre en el intervalo  $a \leq x \leq b$  es el área bajo la curva de densidad de probabilidad de  $a$  a  $b$ .



**Figura 40.1** Curva de densidad de probabilidad arbitraria para una partícula.

Condición de normalización sobre  $\psi$

$$P(x)dx = \psi^2 dx \tag{40.5}$$

Aun cuando no es posible especificar la posición de una partícula con completa certeza, es posible por medio de  $|\psi|^2$  especificar la probabilidad de observarla en una región que rodea un punto  $x$  determinado. La probabilidad de hallar la partícula en el intervalo arbitrario  $a \leq x \leq b$  es

$$P_{ab} = \int_a^b |\psi|^2 dx \tag{40.6}$$

La probabilidad  $P_{ab}$  es el área bajo la curva de  $|\psi|^2$  en función de  $x$  entre los puntos  $x = a$  y  $x = b$ , como en la figura 40.1.

Experimentalmente, existe la probabilidad finita de hallar una partícula en un intervalo cerca de algún punto en algún instante. El valor de esa probabilidad debe encontrarse entre los límites 0 y 1. Por ejemplo, si la probabilidad es 0.30, hay 30% de probabilidad de hallar la partícula en el intervalo.

Debido a que la partícula debe estar en algún lugar a lo largo del eje  $x$ , la suma de las probabilidades en todos los valores de  $x$  debe ser 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \tag{40.7}$$

Cualquier función de onda que satisfaga la ecuación 40.7 se dice que está **normalizada**. La normalización quiere decir, simplemente, que la partícula existe en algún punto en el espacio.

Una vez conocida la función de onda para una partícula, es posible calcular la posición promedio a la que se espera hallarla después de muchas mediciones. Esta posición promedio se denomina **valor esperado** de  $x$  y está definido por la ecuación

Valor esperado para la posición  $x$

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx \tag{40.8}$$

(Se usan paréntesis  $\langle \dots \rangle$  para indicar valores permitidos.) Además, es posible hallar el valor esperado de cualquier función  $f(x)$  asociado con una partícula si se usa la siguiente ecuación:<sup>4</sup>

Valor esperado para una función  $f(x)$

$$\langle f(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x) \psi dx \tag{40.9}$$

**Ejemplo 40.1 Una función de onda para una partícula**

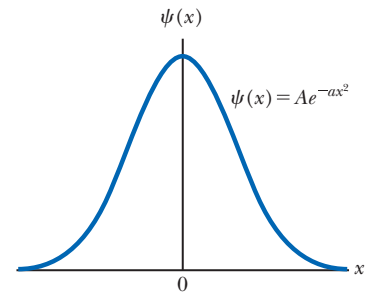
Considere una partícula cuya función de onda se grafica en la figura 40.2 y está dada por

$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

**(A)** ¿Cuál es el valor de  $A$  si se normaliza esta función de onda?

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** La partícula no es una partícula libre porque la función de onda no es una función sinusoidal. La figura 40.2 indica que la partícula está restringida a permanecer cerca de  $x = 0$  en todo momento. Piense en un sistema físico en el que la partícula siempre permanece cerca de un punto determinado. Los ejemplos de tales sistemas son un bloque en un resorte, una canica en el fondo de un tazón y la plumada de un péndulo simple.



**Figura 40.2** (Ejemplo 40.1) Una función de onda simétrica para una partícula, dada por  $\psi(x) = Ae^{-Ax^2}$ .

<sup>4</sup>Los valores esperados son análogos a los “promedios ponderados”, en los que cada valor posible de una función se multiplica por la probabilidad de la ocurrencia de dicho valor antes de sumar sobre todos los posibles valores. El valor esperado se escribe como  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x) \psi dx$  en lugar de  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi^2 dx$ , porque  $f(x)$  se puede representar mediante un operador (como una derivada) en lugar de una simple función multiplicativa en tratamientos más avanzados de mecánica cuántica. En estas situaciones, el operador se aplica sólo a  $\psi$  y no a  $\psi^*$ .

## 40.1 con tinuación

Si bien muchas funciones de onda son funciones complejas, esta es real, por lo que  $\psi^* = \psi$ .

**Categorizar** Ya que el enunciado del problema describe la naturaleza ondulatoria de una partícula, este ejemplo requiere un planteamiento cuántico en lugar de uno clásico.

**Analizar** Aplique la condición de normalización, ecuación 40.7, para la función de onda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (Ae^{-ax^2})^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx = 1$$

Expresé la integral como la suma de dos integrales:

$$(1) \quad A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx = A^2 \left( \int_0^{\infty} e^{-2ax^2} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-2ax^2} dx \right) = 1$$

Cambie la variable de integración de  $x$  a  $-x$  en la segunda integral:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-2ax^2} dx = \int_{\infty}^0 e^{-2a(-x)^2} (-dx) = -\int_{\infty}^0 e^{-2ax^2} dx$$

Invierta el orden de los límites, lo que introduce un signo negativo:

$$-\int_{\infty}^0 e^{-2ax^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-2ax^2} dx$$

Sustituya esta expresión para la segunda integral en la ecuación (1):

$$A^2 \left( \int_0^{\infty} e^{-2ax^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-2ax^2} dx \right) = 1$$

Evalúe la integral con la ayuda de la tabla B.6 en el apéndice B:

$$(2) \quad 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2ax^2} dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

Sustituya este resultado en la ecuación (2) y resuelva para  $A$ :

$$2A^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \right) = 1 \rightarrow A = \left( \frac{2a}{\pi} \right)^{1/4}$$

**(B)** ¿Cuál es el valor esperado de  $x$  para esta partícula?

## SOLUCIÓN

Evalúe el valor esperado con la ecuación 40.8:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} (Ae^{-ax^2}) x (Ae^{-ax^2}) dx \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2ax^2} dx \end{aligned}$$

Como en la parte (A), exprese la integral como una suma de dos integrales:

$$(3) \quad \langle x \rangle = A^2 \left( \int_0^{\infty} x e^{-2ax^2} dx + \int_{-\infty}^0 x e^{-2ax^2} dx \right)$$

Cambie la variable de integración de  $x$  a  $-x$  en la segunda integral:

$$\int_{-\infty}^0 x e^{-2ax^2} dx = \int_{\infty}^0 -x e^{-2a(-x)^2} (-dx) = \int_{\infty}^0 x e^{-2ax^2} dx$$

Invierta el orden de los límites, lo que introduce un signo negativo:

$$\int_{\infty}^0 x e^{-2ax^2} dx = -\int_0^{\infty} x e^{-2ax^2} dx$$

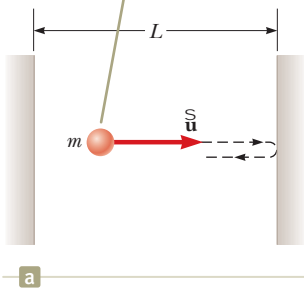
Sustituya esta expresión para la segunda integral en la ecuación (3):

$$\langle x \rangle = A^2 \left( \int_0^{\infty} x e^{-2ax^2} dx - \int_0^{\infty} x e^{-2ax^2} dx \right) = 0$$

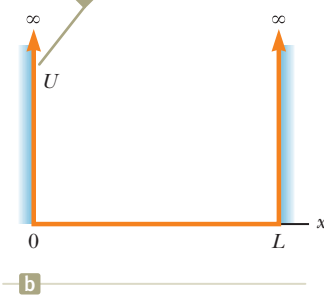
**Finalizar** Dada la simetría de la función de onda en torno a  $x = 0$  en la figura 40.2, no es de sorprender que la posición promedio de la partícula está en  $x = 0$ . En la sección 40.7, se mostró que la función de onda estudiada en este ejemplo representa el estado de menor energía del oscilador armónico cuántico.



Esta figura es una *representación gráfica* que muestra a la partícula de masa  $m$  y rapidez  $u$ , confinada a rebotar entre dos paredes impenetrables separadas por una distancia  $L$ .



Esta figura es una *representación gráfica* que muestra al energía potencial del sistema partícula-caja. Las áreas en azul, clásicamente están prohibidas.



**Figura 40.3** (a) Partícula en una caja. (b) Función de energía potencial para el sistema.

## 40.2 Análisis de modelo: La partícula cuántica bajo condiciones de frontera

En el capítulo 17, investigamos los resultados de la imposición de condiciones de contorno en ondas, tanto en cadenas como en columnas de aire. Descubrimos que la imposición de condiciones de contorno daba como resultado frecuencias cuantificadas a las que el sistema podía oscilar. Veamos los resultados de imponer condiciones de frontera en partículas cuánticas. La partícula libre expuesta en la sección 40.1 no tiene condiciones de frontera; puede estar en cualquier parte del espacio. La partícula en el ejemplo 40.1 no es una partícula libre. La figura 40.2 muestra que la partícula siempre está restringida a posiciones cerca de  $x = 0$ . En esta sección se investigarán los efectos de las restricciones sobre el movimiento de una partícula cuántica.

### Una partícula en una caja

En esta sección se aplican algunas de las ideas desarrolladas para un simple problema físico: una partícula confinada a una región unidimensional del espacio, un problema de una *partícula en una caja* (aun cuando la “caja” ¡sea en una sola dimensión!). Desde el punto de vista clásico, si una partícula rebota elásticamente hacia atrás y hacia adelante lo largo del eje  $x$  entre dos paredes impenetrables separadas por una distancia  $L$ , como se muestra en la figura 40.3a, se modela como una partícula bajo rapidez constante. Si la rapidez de la partícula es  $u$ , la magnitud de su cantidad de movimiento  $mu$  permanece constante, al igual que su energía cinética. (Recuerde que en el capítulo 38 se usó  $u$  para la rapidez de la partícula y distinguirla de  $v$ , la rapidez de un marco de referencia.) La física clásica no impone restricciones a los valores de la cantidad de movimiento y energía de una partícula. El planteamiento mecánico cuántico para este problema es muy diferente y requiere que se encuentre la función de onda apropiada que sea consistente con las condiciones de esta situación.

Ya que las paredes son impenetrables, no existe probabilidad alguna de hallar la partícula fuera de la caja, de modo que la función de onda  $\psi(x)$  debe ser cero para  $x < 0$  y para  $x > L$ . Para ser una función que trabaje bien matemáticamente,  $\psi(x)$  debe ser continua en el espacio. No deben existir saltos discontinuos en el valor de la función de onda en cualquier punto.<sup>5</sup> Por tanto, si  $\psi$  es cero fuera de las paredes, también debe ser cero *en* las paredes, esto es,  $\psi(0) = 0$  y  $\psi(L) = 0$ . Sólo se permiten las funciones de onda que satisfagan estas condiciones de frontera.

La figura 40.3b, una representación gráfica del problema de la partícula en una caja, muestra la energía potencial del sistema partícula-entorno como función de la posición de la partícula. Mientras la partícula está dentro de la caja, la energía potencial del sistema no depende de la ubicación de la partícula y es posible escoger su valor igual a cero. Fuera de la caja, debe asegurarse de que la función de onda sea cero. Puede hacer esto al definir la energía potencial del sistema como infinitamente grande si la partícula estuviera fuera de la caja. Por tanto, la única forma de que una partícula pueda estar fuera de la caja es si el sistema tiene una cantidad infinita de energía, lo que es imposible.

La función de onda para una partícula en la caja se expresa como una función sinusoidal real:<sup>6</sup>

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (40.10)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de De Broglie asociada con la partícula. Esta función de onda debe satisfacer las condiciones de frontera en las paredes. La condición de

<sup>5</sup> Si la función de onda no fuera continua en un punto, la derivada de la función de onda en ese punto sería infinita. El resultado lleva a dificultades en la ecuación de Schrödinger, por lo cual la función de onda es una solución, como se explicó en la sección 40.3.

<sup>6</sup> Esto se demuestra explícitamente en la sección 40.3.

frontera en  $\psi(0) = 0$  ya está satisfecha porque la función seno es cero cuando  $x = 0$ . Para la condición de frontera en  $\psi(L) = 0$ , se tiene

$$\psi(L) = 0 = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)$$

que sólo puede ser verdadera si

$$\frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi \rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \tag{40.11}$$

donde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Por tanto, sólo se permiten ciertas longitudes de onda para la partícula. Cada una de las longitudes de onda permitidas corresponde a un estado cuántico para el sistema, y  $n$  es el número cuántico. Incorporando la ecuación 40.11 en la ecuación 40.10 da como resultado

$$\psi_n(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{2L/n}\right) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{40.12}$$

◀ Funciones de onda para una partícula en una caja

Al normalizar esta función de onda se demuestra que  $A = \sqrt{2/L}$ . (Vea el problema 10.) Por tanto, la función de onda normalizada para la partícula en una caja es

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

◀ Función de onda normalizada para una partícula en una caja

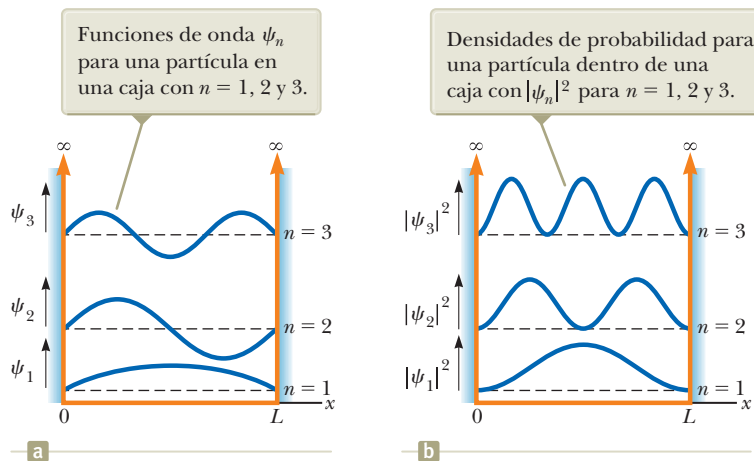
Las figuras 40.4a y b son representaciones gráficas de  $\psi$  en función de  $x$  y  $|\psi|^2$  en función de  $x$  para  $n = 1, 2$  y  $3$  para la partícula en una caja.<sup>7</sup> Observe que aun cuando  $\psi$  puede ser positiva o negativa,  $|\psi|^2$  siempre es positiva. Como  $|\psi|^2$  representa una densidad de probabilidad, un valor negativo para  $|\psi|^2$  no tendría sentido.

Lo que estamos discutiendo aquí podría comenzar a sonar familiar para usted. Compare los tres gráficos de la figura 40.4a con las tres partes de la figura 17.14. Compare la ecuación 40.11 con la ecuación 17.5. Mucho de lo que estamos haciendo aquí es muy similar a las ondas estacionarias en las cuerdas.

Una inspección más a fondo de la figura 40.4b muestra que  $|\psi|^2$  es cero en las fronteras, lo cual satisface las condiciones de frontera. Además,  $|\psi|^2$  es cero en otros puntos, dependiendo del valor de  $n$ . Para  $n = 2$ ,  $|\psi_2|^2 = 0$  en  $x = L/2$ ; para  $n = 3$ ,  $|\psi_3|^2 = 0$  en  $x = L/3$  y en  $x = 2L/3$ . El número de puntos cero aumenta en uno cada vez que el número cuántico aumente en uno.

**PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 40.2**

**Recordatorio: La energía pertenece a un sistema** Con frecuencia se hace referencia a la energía de una partícula en un lenguaje común. Al igual que en la prevención de riesgos ocultos 40.1, en realidad se describe la energía del sistema de la partícula y cualquier medio que tenga que ver con el establecimiento de las paredes impenetrables. Para la partícula en una caja, el único tipo de energía es la energía cinética que pertenece a la partícula, que es el origen de la descripción común.



**Figura 40.4** Primeros tres estados permitidos para una partícula confinada a una caja de una dimensión. Los estados se muestran sobrepuestos en la función de energía potencial de la figura 40.3b. Las funciones de onda y las densidades de probabilidad se grafican verticalmente desde ejes separados que están corridos verticalmente para mayor claridad. Las posiciones de estos ejes sobre la función de energía potencial sugieren las energías relativas de los estados.

<sup>7</sup> Observe que  $n = 0$  no se permite porque, según la ecuación 40.12, la función de onda sería  $\psi = 0$ . Esta no es una función de onda físicamente razonable; por ejemplo, no puede ser normalizada porque  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (0) dx = 0$  pero la ecuación 40.7 dice que esta integral debe ser igual a 1.

Debido a que las longitudes de onda de la partícula están restringidas por la condición  $\lambda = 2L/n$ , la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula también está restringida a valores específicos que se hallan a partir de la expresión para la longitud de onda de De Broglie, la ecuación 39.15:

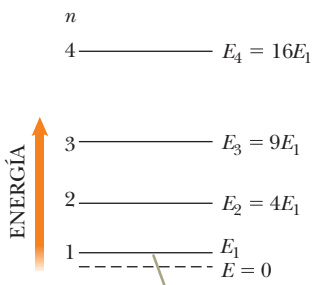
$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L/n} = \frac{nh}{2L}$$

Se opta porque la energía potencial del sistema sea igual a cero cuando la partícula está dentro de la caja. Por tanto, los valores permitidos de la energía del sistema, que simplemente es la energía cinética de la partícula, están dados por

$$E_n = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{(nh/2L)^2}{2m}$$

$$E_n = \left( \frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (40.14)$$

Energías cuantizadas para una partícula en una caja ▶



La mínima energía de estado fundamental permitida es  $E_1 = h^2/8mL^2$ .

**Figura 40.5** Diagrama del nivel de energía para una partícula confinada a una caja unidimensional de longitud  $L$ .

Esta expresión muestra que la energía de la partícula está cuantizada. La energía mínima corresponde al **estado fundamental**, que es el estado de energía mínima para cualquier sistema. Para la partícula en una caja, el estado fundamental corresponde a  $n = 1$ , para el cual  $E_1 = h^2/8mL^2$ . Como  $E_n = n^2E_1$ , los **estados excitados** correspondientes a  $n = 2, 3, 4, \dots$  tienen energías dadas por  $4E_1, 9E_1, 16E_1, \dots$

La figura 40.5 es un diagrama del nivel de energía que describe los valores de energía de los estados permitidos. Porque la menor energía de una partícula en la caja es diferente de cero, según la mecánica cuántica, la partícula nunca puede estar en reposo. La mínima energía que puede tener, corresponde a  $n = 1$  y se denomina **energía del estado fundamental**. Este resultado contradice el punto de vista clásico, en el que  $E = 0$  es un estado aceptable, como son *todos* los valores positivos de  $E$ .

- E XAMEN RÁPIDO 40.2** Considere un electrón, un protón y una partícula alfa (un núcleo de helio), cada una atrapada por separado en cajas idénticas. (i) ¿Cuál partícula corresponde al estado de energía más alto? (a) El electrón, (b) el protón, (c) la partícula alfa, (d) la energía de estado fundamental es la misma en los tres casos. (ii) ¿Cuál partícula tiene la mayor longitud de onda cuando el sistema está en el estado fundamental? (a) El electrón, (b) el protón, (c) la partícula alfa, (d) las tres partículas tienen la misma longitud de onda.
- E XAMEN RÁPIDO 40.3** Una partícula está en una caja de longitud  $L$ . De pronto, la longitud de la caja se aumenta a  $2L$ . ¿Qué ocurre con los niveles de energía que se muestran en la figura 40.5? (a) Nada, no se ven afectados. (b) Se separan más. (c) Se acercan más entre sí.

### Ejemplo 40.2 Partículas micro y macroscópicas en cajas

**(A)** Un electrón está confinado entre dos paredes impenetrables con una separación de 0.200 nm. Determine los niveles de energía para los estados  $n = 1, 2$  y 3.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** En la figura 40.3a, imagine que la partícula es un electrón y las paredes están muy juntas.

**Categorizar** Los niveles de energía se evalúan con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 40.14 para el estado  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{h^2}{8m_e L^2} (1)^2 = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2.00 \times 10^{-10} \text{ m})^2} \\ &= 1.51 \times 10^{-18} \text{ J} = 9.42 \text{ eV} \end{aligned}$$



## 40.2 continuación

Con la ecuación  $E_n = n^2 E_1$ , encuentre las energías de los estados  $n = 2$  y  $n = 3$ :

$$E_2 = (2)^2 E_1 = 4(9.42 \text{ eV}) = 37.7 \text{ eV}$$

$$E_3 = (3)^2 E_1 = 9(9.42 \text{ eV}) = 84.8 \text{ eV}$$

**(B)** Encuentre la rapidez del electrón en el estado  $n = 1$ .

## SOLUCIÓN

Resuelva la expresión clásica para energía cinética para la rapidez de la partícula:

$$K = \frac{1}{2} m_e u^2 \rightarrow u = \sqrt{\frac{2K}{m_e}}$$

Reconozca que la energía cinética de la partícula es igual a la energía del sistema y sustituya  $E_n$  por  $K$ :

$$(1) \quad u = \sqrt{\frac{2E_n}{m_e}}$$

Sustituya valores numéricos de la parte (A):

$$u = \sqrt{\frac{2(1.51 \times 10^{-18} \text{ J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 1.82 \times 10^6 \text{ m/s}$$

¡Con sólo colocar el electrón en la caja resulta en una rapidez *mínima* del electrón igual a 0.6% de la rapidez de la luz!

**(C)** Una pelota de beisbol de 0.500 kg está confinada entre dos paredes rígidas de un estadio que se puede modelar como una caja de 100 m de longitud. Calcule la rapidez mínima de la pelota de beisbol.

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** En la figura 40.3a, imagine que la partícula es una pelota de beisbol y las paredes son las del estadio.

**Categorizar** Esta parte del ejemplo es un problema de sustitución en el que se aplica el planteamiento cuántico a un objeto macroscópico.

Use la ecuación 40.14 para el estado  $n = 1$ :

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} (1)^2 = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(0.500 \text{ kg})(100 \text{ m})^2} = 1.10 \times 10^{-71} \text{ J}$$

Use la ecuación (1) para encontrar la rapidez:

$$u = \sqrt{\frac{2(1.10 \times 10^{-71} \text{ J})}{0.500 \text{ kg}}} = 6.63 \times 10^{-36} \text{ m/s}$$

Esta rapidez es tan pequeña que el objeto se puede considerar en reposo, que es lo que uno esperaría para la rapidez mínima de un objeto macroscópico.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si se batea una línea franca de modo que la pelota de beisbol se mueve con una rapidez de 150 m/s? ¿Cuál es el número cuántico del estado en el que ahora reside la pelota de beisbol?

**Respuesta** Se espera que el número cuántico sea muy grande porque la pelota de beisbol es un objeto macroscópico.

Evalúe la energía cinética de la pelota:

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} (0.500 \text{ kg})(150 \text{ m/s})^2 = 5.62 \times 10^3 \text{ J}$$

De la ecuación 40.14, calcule el número cuántico  $n$ :

$$n = \sqrt{\frac{8mL^2 E_n}{h^2}} = \sqrt{\frac{8(0.500 \text{ kg})(100 \text{ m})^2 (5.62 \times 10^3 \text{ J})}{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}} = 2.26 \times 10^{37}$$

Este resultado es un número cuántico tremendamente grande. Conforme la pelota de beisbol empuja el aire fuera de su camino, golpea el suelo y rueda hasta detenerse, se mueve a través de más de  $10^{37}$  estados cuánticos. Dichos estados están tan juntos en energía que no se pueden observar las transiciones de un estado al siguiente. En vez de ello, se ve lo que parece ser una variación uniforme en la rapidez de la bola. La naturaleza cuántica del universo simplemente no es evidente en el movimiento de objetos macroscópicos.

## Ejemplo 40.3 Valores esperados para la partícula en una caja

Una partícula de masa  $m$  está confinada a una caja unidimensional entre  $x = 0$  y  $x = L$ . Encuentre el valor esperado de la posición  $x$  de la partícula en el estado caracterizado por el número cuántico  $n$ .

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La figura 40.4b muestra que la probabilidad para que la partícula este en una posición determinada varía con la posición dentro de la caja. ¿Puede predecir cuál será el valor esperado de  $x$  a partir de la simetría de las funciones de onda?

continúa



## 40.3 continuación

**Categorizar** El enunciado del ejemplo clasifica el problema: enfóquese en una partícula cuántica en una caja y en el cálculo de su valor esperado de  $x$ .

**Analizar** En la ecuación 40.8, la integración de  $-\infty$  a  $\infty$  se reduce a los límites 0 a  $L$  porque  $\psi = 0$  en todas partes, excepto en la caja.

Sustituya la ecuación 40.13 en la ecuación 40.8 para encontrar el valor esperado para  $x$ :

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x \psi_n dx = \int_0^L x \left[ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]^2 dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\end{aligned}$$

Evalúe la integral al consultar una tabla de integrales o por integración matemática:<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \frac{2}{L} \left[ \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin\left(2 \frac{n\pi x}{L}\right)}{4 \frac{n\pi}{L}} - \frac{\cos\left(2 \frac{n\pi x}{L}\right)}{8 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \right]_0^L \\ &= \frac{2}{L} \left[ \frac{L^2}{4} \right] = \frac{L}{2}\end{aligned}$$

**Finalizar** Este resultado demuestra que el valor esperado de  $x$  está en el centro de la caja para todos los valores de  $n$ , lo que se esperaría de la simetría del cuadrado de las funciones de onda (la densidad de probabilidad) en torno al centro (figura 40.4b).

La función de onda  $n = 2$  en la figura 40.4b tiene un valor de cero en el punto medio de la caja. ¿El valor esperado de la partícula puede estar en una posición donde la partícula tenga probabilidad cero de existir? Recuerde que el valor esperado es la posición *promedio*. Por tanto, la partícula tiene tanta probabilidad de encontrarse a la derecha del punto medio como a la izquierda, así que su posición promedio está en el punto medio aun cuando su probabilidad de estar ahí sea cero. Como analogía, considere un grupo de estudiantes para el que la calificación promedio del examen final sea 50%. No hay requisito de que algún estudiante logre una calificación de exactamente 50% para que el promedio de todos los estudiantes sea 50%.

## Condiciones de frontera sobre partículas en general

La explicación de la partícula en una caja es muy similar a la realizada en el capítulo 17 acerca de las ondas estacionarias en cuerdas:

- Debido a que los extremos de la cuerda deben ser nodos, las funciones de onda para las ondas permitidas deben ser cero en las fronteras de la cuerda. Ya que la partícula en una caja no puede existir fuera de la caja, las funciones de onda permitidas para la partícula deben ser cero en las fronteras.
- Las condiciones de frontera sobre las ondas en la cuerda conducen a longitudes de onda y frecuencias cuantizadas de las ondas. Las condiciones de frontera sobre la función de onda para la partícula en una caja conducen a longitudes de onda y frecuencias cuantizadas de la partícula.

En mecánica cuántica es muy común que las partículas dependan de las condiciones de frontera. Debido a eso, se introduce un nuevo análisis de modelo, la **partícula cuántica bajo condiciones de frontera**. En muchas formas este modelo es similar al de las ondas bajo condiciones de frontera estudiado en la sección 17.4.

El modelo de la partícula cuántica bajo condiciones de frontera *difiere* en algunas formas del modelo de las ondas bajo condiciones de frontera:

- En la mayoría de los casos de partículas cuánticas, la función de onda *no* es una función simple como la función de onda para onda sobre cuerdas. Además, la función de onda para una partícula cuántica puede ser una función compleja.
- Para una partícula cuántica, la frecuencia se relaciona con la energía a través de  $E = hf$ , de modo que las frecuencias cuantizadas conducen a energía cuantizadas.

<sup>8</sup>Para integrar esta función, primero sustituya  $\sin^2(n\pi x/L)$  con  $\frac{1}{2}(1 - \cos 2n\pi x/L)$  (consulte la tabla B.3 en el apéndice (B)), lo que permite que  $x$  se exprese como dos integrales. En tal caso la segunda integral se puede evaluar mediante integración parcial (sección B.7 en el apéndice B).



- Puede no haber “nodos” inmóviles asociados con la función de onda de una partícula cuántica bajo condiciones de frontera. Sistemas más complicados que la partícula en una caja tienen funciones de onda más complicadas, y algunas condiciones de frontera pueden no conducir a ceros de la función de onda en puntos fijos.

En general,

la interacción de una partícula cuántica con su ambiente representa una o más condiciones de frontera y, si la interacción restringe a la partícula a una región finita del espacio, resulta en cuantización de la energía del sistema.

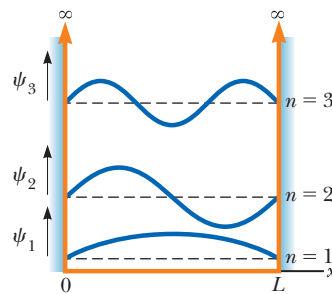
◀ Concepto fundamental de la partícula cuántica bajo el modelo de condiciones de frontera

Las condiciones de frontera sobre las funciones de onda cuánticas se relacionan con las coordenadas que describen el problema. Para la partícula en una caja, la función de onda debe ser cero en dos valores de  $x$ . En el caso de un sistema tridimensional como el átomo de hidrógeno que se explica en el capítulo 41, el problema se presenta mejor en *coordenadas esféricas*. Dichas coordenadas, una extensión de las coordenadas polares planas introducidas en la sección 3.1, consisten en una coordenada radial  $r$  y dos coordenadas angulares. La generación de la función de onda y la aplicación de las condiciones de frontera para el átomo de hidrógeno están más allá del alcance de este libro. Sin embargo, en el capítulo 41 se examinará el comportamiento de algunas funciones de onda del átomo de hidrógeno.

Las condiciones de frontera sobre las funciones de onda que existen para todos los valores de  $x$  requieren que la función de onda tienda a cero conforme  $x \rightarrow \infty$  (de modo que la función de onda se puede normalizar) y permanecer finita conforme  $x \rightarrow 0$ . Una condición de frontera sobre cualquier parte angular de las funciones de onda es que agregar  $2\pi$  radianes al ángulo debe regresar la función de onda al mismo valor, porque una adición de  $2\pi$  resulta en la misma posición angular.

## ANÁLISIS DE MODELO: Partícula cuántica bajo condiciones de frontera

Imagínese una partícula descrita por la física cuántica que está sujeta a una o más condiciones de frontera. Si la partícula está restringida a una región finita del espacio por las condiciones de frontera, la energía del sistema está cuantizada. Asociado con cada energía cuantificada hay un estado cuántico que se caracteriza por una función de onda y un número cuántico.



### Ejemplos:

- un electrón en un punto cuántico no puede escapar, cuantizando las energías de los electrones (sección 40.4)
- un electrón en un átomo de hidrógeno se limita a estar cerca del núcleo del átomo, cuantizando las energías del átomo (capítulo 41)
- dos átomos están unidos formando una molécula diatómica, cuantizando las energías de vibración y la rotación de la molécula (capítulo 42)
- un protón se encuentra atrapado en un núcleo, cuantizando sus niveles de energía (capítulo 43)

## 40.3 La ecuación de Schrödinger

En la sección 16.5, estudiamos una ecuación de onda lineal para ondas mecánicas, que surge de las leyes de Newton. En la sección 33.3 se explicó la ecuación de una onda de radiación electromagnética, que se sigue de las ecuaciones de Maxwell. Las ondas asociadas con partículas también satisfacen la ecuación de onda. La ecuación de onda para partículas materiales es diferente de la asociada con fotones, porque las partículas materiales tienen una energía en reposo diferente de cero. La ecuación de onda apropiada fue creada por Schrödinger en 1926. Al analizar el comportamiento de un sistema cuántico, el planteamiento es determinar una solución a esta ecuación y luego aplicarle las condiciones de frontera apropiadas. La solución proporciona las funciones de onda permitidas y los niveles de energía del sistema. La adecuada manipulación de la función de onda hace posible, Por tanto, calcular todas las características mensurables del sistema.



La ecuación de Schrödinger, como se aplica a una partícula de masa  $m$  confinada a moverse a lo largo del eje  $x$  e interactuar con su ambiente por medio de una función de energía potencial  $U(x)$ , es

Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo ▶

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi = E\psi \quad (40.15)$$

donde  $E$  es una constante igual a la energía total del sistema (la partícula y su ambiente). Porque esta ecuación es independiente del tiempo, por lo común se le conoce como **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo**. (En este texto no se revisa esta ecuación.)

La ecuación de Schrödinger es consistente con el principio de conservación de energía mecánica de un sistema. El problema 31 muestra, para una partícula libre y una partícula en una caja, que el primer término de la ecuación de Schrödinger se reduce a la energía cinética de la partícula multiplicada por la función de onda. Por tanto, la ecuación 40.15 indica que la energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial, y que la energía total es una constante:  $K + U = E = \text{constante}$ .

En principio, si se conoce la función de la energía potencial  $U$  para el sistema, es posible resolver la ecuación 40.15 y obtener las funciones de onda y energías para los estados permitidos del sistema. Además, en muchos casos, la función de onda  $\psi$  debe satisfacer las condiciones de contorno. Por tanto, una vez que tenemos una primera solución a la ecuación de Schrödinger, que impone las siguientes condiciones para encontrar la solución exacta y las energías permitidas:

- $\psi$  debe ser normalizable. Es decir, la ecuación 40.7 debe ser satisfecha.
- $\psi$  debe tender a 0 cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  y permanecer finito cuando  $x \rightarrow 0$ .
- $\psi$  debe ser continua en  $x$  y ser un solo valor en todas partes; las soluciones a la ecuación 40.15 en diferentes regiones deben unirse sin problemas en los límites entre las regiones.
- $d\psi/dx$  debe ser finita, continua y de valor único en todas partes para valores finitos de  $U$ . Si  $d\psi/dx$  no fuera continua, no se podría evaluar la segunda derivada  $d^2\psi/dx^2$  en la ecuación 40.15 en el punto de discontinuidad.

La tarea de resolver la ecuación de Schrödinger puede ser difícil, dependiendo de la forma de la función de energía potencial. Así como está, la ecuación de Schrödinger ha sido sumamente útil para explicar el comportamiento de sistemas atómicos y nucleares, mientras que la física clásica no ha podido explicar este comportamiento. Además, cuando se aplica mecánica cuántica a cuerpos macroscópicos, los resultados concuerdan con la física clásica.

## Repaso de la partícula en una caja

Para ver cómo es aplicado el modelo de partícula cuántica bajo condiciones de frontera a un problema, piense de nuevo en una partícula en una caja unidimensional de longitud  $L$  (véase la figura 40.3) y analícela con la ecuación de Schrödinger. La figura 40.3b representa el diagrama de energía potencial que describe este problema. Un diagrama de energía potencial como éste es útil para comprender y resolver problemas con la ecuación de Schrödinger.

Debido a la forma de la curva de la figura 40.3b, a veces se dice que la partícula en la caja está en un **pozo cuadrado**,<sup>9</sup> donde un **pozo** es una región de la curva de cara hacia arriba en un diagrama de energía potencial. (Una región de cara hacia abajo se denomina *barrera*, la cual será investigada en la sección 40.5.) La figura 40.3b muestra un pozo cuadrado infinito.

En la región  $0 < x < L$ , donde  $U = 0$ , exprese la ecuación de Schrödinger en la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = -k^2\psi \quad (40.16)$$



INTERFOTO/Alamy

### Erwin Schrödinger

Físico teórico austriaco (1887-1961)

Schrödinger es mejor conocido como uno de los creadores de la mecánica cuántica. Su método para abordar la mecánica cuántica demostró ser matemáticamente equivalente a la mecánica de matrices más abstracta creada por Heisenberg. Schrödinger también escribió importantes ensayos técnicos sobre mecánica estadística, visión de color y relatividad general.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 40.3

**Pozos de potencial** Un pozo de potencial, como el de la figura 40.3b, es una representación gráfica de la energía, no una representación ilustrada, de modo que si pudiera observarse no se vería así. Una partícula se mueve *sólo horizontalmente* en una posición vertical fija en un diagrama de energía potencial, lo que representa la conservación de la energía del sistema de la partícula y su ambiente.

<sup>9</sup>Se denomina pozo cuadrado incluso si tiene forma rectangular en un diagrama de energía potencial.

donde

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (40.17)$$

La solución a la ecuación 40.16 es una función  $\psi$  cuya segunda derivada es el negativo de la misma función multiplicada por una constante  $k^2$ . Las funciones seno y coseno satisfacen este requisito. Por tanto, la solución más general a la ecuación es una combinación lineal de ambas soluciones:

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx + B \operatorname{cos} kx$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes que están determinadas por las condiciones de normalización y frontera.

La primera condición frontera en la función de onda es que  $\psi(0) = 0$ :

$$\psi(0) = A \operatorname{sen} 0 + B \operatorname{cos} 0 = 0 + B = 0$$

lo cual significa que  $B = 0$ . Por tanto, la solución se reduce a

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx$$

Con la segunda condición frontera,  $\psi(L) = 0$ , cuando es aplicada a la solución reducida, se obtiene

$$\psi(L) = A \operatorname{sen} kL = 0$$

Esta ecuación podría satisfacerse si  $A = 0$ , pero significaría que  $\psi = 0$  en todas partes, lo cual no es una función de onda válida. Se cumple la condición frontera si  $kL$  es un múltiplo entero de  $\pi$ , es decir, si  $kL = n\pi$ , donde  $n$  es un entero. Sustituyendo  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  en esta expresión da

$$kL = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} L = n\pi$$

Cada valor del entero  $n$  corresponde a una energía cuantizada llamada  $E_n$ . Al resolver para las energías permitidas  $E_n$ ,

$$E_n = \left( \frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2 \quad (40.18)$$

que son idénticas a las energías permitidas en la ecuación 40.14.

Si sustituye los valores de  $k$  en la función de onda, las funciones de onda permitidas  $\psi_n(x)$  están dadas por

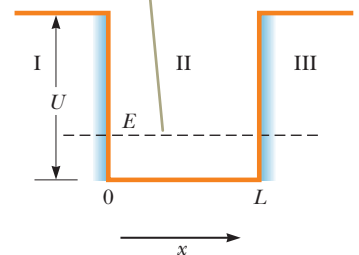
$$\psi_n(x) = A \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (40.19)$$

que es la función de onda (ecuación 40.12) que se usó en la explicación inicial de la partícula en una caja.

## 40.4 Una partícula en un pozo de altura finita

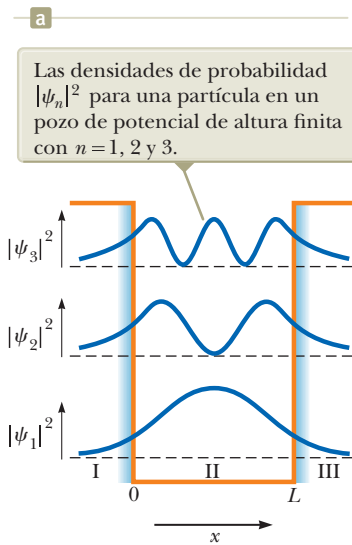
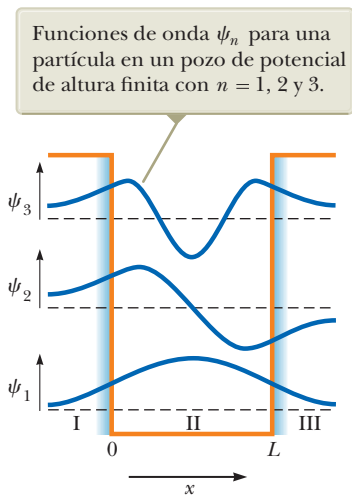
Ahora considere una partícula en un pozo de potencial *finito*, es decir, un sistema que tenga una energía potencial que sea cero cuando la partícula está en la región  $0 < x < L$  y un valor finito  $U$  cuando la partícula está fuera de esta región, como en la figura 40.6. Si la energía total  $E$  del sistema es menor que  $U$ , según la física clásica, la partícula estaría de modo permanente ligada en el pozo de potencial. Si la partícula estuviera fuera del pozo, su energía cinética tendría que ser negativa, lo que sería imposible. No obstante, según la mecánica cuántica, existe una probabilidad finita de que la partícula pueda encontrarse fuera del pozo, incluso si  $E < U$ . Es decir, la función de onda  $\psi$  por lo general es diferente de cero fuera del pozo —en las regiones I y III en la figura 40.6—, de modo que la densidad de probabilidad  $|\psi|^2$  también es diferente de cero en estas regiones. Si bien esto puede ser una noción

Si la energía total  $E$  del sistema partícula-pozo es menor que  $U$ , la partícula está atrapada en el pozo.



**Figura 40.6** Diagrama de energía potencial de un pozo de altura  $U$  y longitud  $L$  finitas.





**Figura 40.7** Los primeros tres estados para una partícula en un pozo de potencial de altura finita. Los estados se muestran superpuestos en la función de energía potencial de la figura 40.6. Las funciones de onda y densidades de probabilidad están graficadas en sentido vertical desde ejes separados que están desplazados verticalmente para mayor claridad. Las posiciones de estos ejes sobre la función de energía potencial sugieren las energías relativas de los estados.

extraña, el principio de incertidumbre dice que la energía del sistema es incierta. Esto permite que la partícula se encuentre fuera del pozo mientras la violación aparente de la conservación de la energía no exista en ninguna forma posible de medir.

En la región II, donde  $U = 0$ , las funciones de onda permitidas son de nuevo sinusoidales porque representan soluciones de la ecuación 40.16. Sin embargo, las condiciones de frontera ya no requieren que  $\psi$  sea cero en los extremos del pozo, como fue el caso con el pozo cuadrado infinito.

La ecuación de Schrödinger para las regiones I y III se puede escribir como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2}\psi \quad (40.20)$$

Ya que  $U > E$ , el coeficiente de  $\psi$  en el lado derecho necesariamente es positivo. Por tanto, se puede expresar la ecuación 40.20 en la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = C^2\psi \quad (40.21)$$

donde  $C^2 = 2m(U-E)/\hbar^2$  es una constante positiva en las regiones I y III. Como se puede verificar por sustitución, la solución general de la ecuación 40.21 es

$$\psi = Ae^{Cx} + Be^{-Cx} \quad (40.22)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes.

Esta solución general sirve como punto de partida para determinar la solución apropiada para las regiones I y III. La solución debe permanecer finita cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . En la región I, donde  $x < 0$ , la función  $\psi$  debe excluir el término  $Be^{-Cx}$ . Se requiere que  $B = 0$  en la región I para evitar un valor infinito de  $\psi$  para valores negativos grandes de  $x$ . Del mismo modo, en la región III, donde  $x > L$ , la función  $\psi$  no debe contener el término  $Ae^{Cx}$ ; esto se logra al tomar  $A = 0$  en esta región. Esta opción evita un valor infinito de  $\psi$  para valores positivos grandes de  $x$ . Así, las soluciones en las regiones I y III son

$$\psi_I Ae^{Cx} \text{ para } x < 0 \quad (40.23)$$

$$\psi_{III} Be^{-Cx} \text{ para } x > L \quad (40.24)$$

En la región II la función de onda es sinusoidal y tiene la forma general

$$\psi_{II}(x) = F \sin kx + G \cos kx \quad (40.25)$$

donde  $F$  y  $G$  son constantes.

Estos resultados muestran que las funciones de onda fuera del pozo de potencial (donde la física clásica prohíbe la presencia de la partícula) decaen exponencialmente con la distancia. A valores negativos grandes de  $x$ ,  $\psi_I$  se aproxima a cero; a valores positivos grandes de  $x$ ,  $\psi_{III}$  se aproxima a cero. Estas funciones, junto con la solución sinusoidal en la región II, se muestran en la figura 40.7a para los primeros tres estados de energía. Al evaluar la función de onda completa, se requieren las siguientes condiciones de frontera:

$$\psi_I = \psi_{II} \quad \text{y} \quad \frac{d\psi_I}{dx} = \frac{d\psi_{II}}{dx} \quad \text{a } x = 0 \quad (40.26)$$

$$\psi_{II} = \psi_{III} \quad \text{y} \quad \frac{d\psi_{II}}{dx} = \frac{d\psi_{III}}{dx} \quad \text{a } x = L \quad (40.27)$$

Estas cuatro condiciones de frontera y la condición de normalización (ecuación 40.7) son suficientes para determinar las cuatro constantes  $A$ ,  $B$ ,  $F$  y  $G$ , y los valores permitidos de la energía  $E$ . La figura 40.7b grafica las densidades de probabilidad para estos estados. Observe que en cada caso las funciones de onda dentro y fuera del pozo de potencial se unen fácilmente en las fronteras.

La idea de atrapar partículas en pozos de potencial se emplea en el creciente campo de la **nanotecnología**, que se refiere al diseño y aplicación de equipos que

tienen dimensiones que van de 1 a 100 nm. Es frecuente que la fabricación de estos dispositivos comprenda la manipulación de átomos individuales, o pequeños grupos de átomos, para formar estructuras mecánicas muy pequeñas.

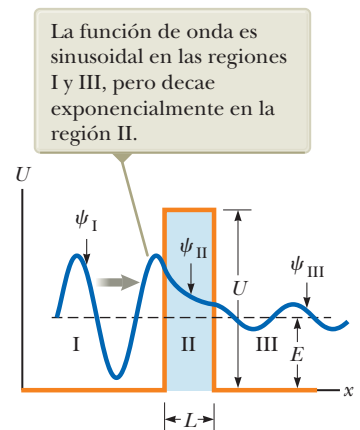
Un campo de acción de la nanotecnología, de interés para los investigadores, es el **punto cuántico**, una región pequeña que es cubierta de cristales de silicio y actúa como pozo de potencial. Esta región atrapa electrones con energías cuantizadas. Las funciones de onda para una partícula en un punto cuántico parecen semejantes a las de la figura 40.7 si  $L$  está en el orden de nanómetros. El almacenamiento de información binaria con el uso de puntos cuánticos es un campo activo de investigación. Un esquema binario sencillo comprendería asociar un uno con un punto cuántico que contenga un electrón y un cero con un punto vacío. Otros esquemas involucran celdas de puntos múltiples tales que las distribuciones de electrones entre los puntos corresponden a unos y ceros. Hay varios laboratorios de investigación que estudian las propiedades y aplicaciones potenciales de los puntos cuánticos. Es probable que una de las primeras aplicaciones sea una pantalla de puntos cuánticos para televisores. A partir de la impresión de este libro, algunos televisores "QLED" se comercializan, pero los puntos cuánticos se utilizan como parte de la retroiluminación para una pantalla de cristal líquido normal. Los futuros televisores utilizarán los puntos cuánticos como fuente de luz real.

## 40.5 Efecto túnel a través de una barrera de energía potencial

Considere la función de energía potencial que se ilustra en la figura 40.8. En esta situación, la energía potencial tiene un valor constante  $U$  en la región de ancho  $L$  y es cero en todas las otras regiones.<sup>10</sup> Una función de energía potencial de esta forma se llama **barrera cuadrada**, y  $U$  se denomina **altura de la barrera**. Un fenómeno muy interesante y peculiar se presenta cuando una partícula en movimiento encuentra una barrera como esta de altura y ancho finitos. Suponga que una partícula de energía  $E < U$  incide en la barrera desde la izquierda (figura 40.8). Clásicamente, la partícula sería reflejada por la barrera. Si la partícula debiera existir en la región II, su energía cinética sería negativa, lo cual no es permitido desde el punto de vista clásico. En consecuencia, la región II, y por tanto la región III, son clásicamente *prohibidas* para la partícula que incide desde la izquierda. Sin embargo, según la mecánica cuántica, todas las regiones son accesibles a la partícula, cualquiera que sea su energía. (Aun cuando todas las regiones son accesibles, la probabilidad de que la partícula se encuentre en una región clásicamente prohibida es muy baja.) De acuerdo con el principio de incertidumbre, la partícula puede estar dentro de la barrera mientras el intervalo durante el cual está en ella sea corto y consistente con la ecuación 39.24. Si la barrera es relativamente angosta, este corto intervalo puede permitir que la partícula se mueva a través de la barrera.

Plantearémos esta situación con una representación matemática. La ecuación de Schrödinger tiene soluciones válidas en las regiones I, II y III. Las soluciones en las regiones I y III son sinusoidales, como en la ecuación 40.19. En la región II, la solución es exponencial semejante a la ecuación 40.22. Si se aplica la condición de frontera de que las funciones de onda de las tres regiones y sus derivadas deben unirse fácilmente en las fronteras, es posible hallar una solución completa, como la que representa la curva de la figura 40.8. Debido a que la probabilidad de localizar la partícula es proporcional a  $|\psi|^2$ , la probabilidad de encontrar la partícula más allá de la barrera en la región III es diferente de cero. Este resultado está en completo desacuerdo con la física clásica. El movimiento de izquierda a derecha de la partícula en el lado lejano de la barrera, se denomina **efecto túnel** o **penetración de barrera**.

La probabilidad del efecto túnel se puede describir con un **coeficiente de transmisión**  $T$  y un **coeficiente de reflexión**  $R$ . El coeficiente de transmisión representa la probabilidad de que la partícula penetre al otro lado de la barrera, y el coeficiente de reflexión es la probabilidad de que la partícula sea reflejada por la barrera. Puesto



**Figura 40.8** Función de onda  $\psi$  para una partícula que incide desde la izquierda en una barrera de altura  $U$  y ancho  $L$ . La función de onda está graficada verticalmente desde un eje ubicado en la energía de la partícula.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 40.4

#### "Altura" en un diagrama de energía

La palabra *altura* (como en *altura de barrera*) se refiere a una energía en los análisis de barreras en los diagramas de energía potencial. Por ejemplo, podría decirse que la altura de la barrera es de 10 eV. Por otra parte, el *ancho* de barrera es igual que en el uso tradicional de esa palabra; es una medición de la distancia física real entre los dos lados verticales de la barrera.

<sup>10</sup> Es común en física referirse a  $L$  como la *distancia* de un paso para el *ancho* de una barrera.

que la partícula incidente, es reflejada o transmitida, se requiere que  $T + R = 1$ . Una expresión aproximada para el coeficiente de transmisión que se obtiene cuando  $T \ll 1$  (una barrera muy ancha o una barrera muy alta, es decir,  $U \gg E$ ) es

$$T \approx e^{-2CL} \quad (40.28)$$

donde

$$C = \frac{\sqrt{2m(U - E)}}{\hbar} \quad (40.29)$$

Este modelo cuántico de penetración de barrera y específicamente la ecuación 40.28, muestran que  $T$  puede ser diferente de cero. El hecho de que el fenómeno de efecto túnel pueda observarse experimentalmente proporciona más confianza en los principios de la física cuántica.

- EJERCICIO RÁPIDO 40.4** ¿Cuál de los siguientes cambios aumentaría la probabilidad de transmisión de una partícula a través de una barrera de potencial?
- (Puede escoger más de una respuesta.) (a) Reducir el ancho de la barrera, (b) aumentar el ancho de la barrera, (c) reducir la altura de la barrera, (d) aumentar la altura de la barrera, (e) reducir la energía cinética de la partícula incidente, (f) aumentar la energía cinética de la partícula incidente.

#### Ejemplo 40.4 Coeficiente de transmisión para un electrón

Un electrón de 30 eV incide sobre una barrera cuadrada de 40 eV de alto.

**(A)** ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón penetre por efecto túnel a través de la barrera, si su ancho es 1.0 nm?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Ya que la energía de la partícula es menor que la altura de la barrera de potencial, se espera que el electrón se refleje de la barrera con una probabilidad de 100%, de acuerdo con la física clásica. Sin embargo, debido al efecto túnel, hay una probabilidad finita de que la partícula pueda aparecer en el otro lado de la barrera.

**Categorizar** La probabilidad se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la cantidad  $U - E$  que aparece en la ecuación 40.29:

$$U - E = 40 \text{ eV} - 30 \text{ eV} = 10 \text{ eV} \left( \frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right) = 1.6 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Evalúe la cantidad  $2CL$  con la ecuación 40.29:

$$(1) \quad 2CL = 2 \frac{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.6 \times 10^{-18} \text{ J})}}{1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} (1.0 \times 10^{-9} \text{ m}) = 32.4$$

A partir de la ecuación 40.28, encuentre la probabilidad del efecto túnel a través de la barrera:

$$T \approx e^{-2CL} = e^{-32.4} = 8.5 \times 10^{-15}$$

**(B)** ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón penetre por el efecto túnel a través de la barrera, si su ancho es 0.10 nm?

#### SOLUCIÓN

En este caso, el ancho  $L$  en la ecuación (1) es un décimo de grande, así que se evalúa el nuevo valor de  $2CL$ :

$$2CL = (0.1)(32.4) = 3.24$$

A partir de la ecuación 40.28, encuentre la nueva probabilidad del efecto túnel a través de la barrera:

$$T \approx e^{-2CL} = e^{-3.24} = 0.039$$

En la parte (A), el electrón tenía aproximadamente una oportunidad en  $10^{14}$  de pasar por el efecto túnel a través de la barrera. Sin embargo, en la parte (B), el electrón tiene una probabilidad mucho mayor (3.9%) de penetrar la barrera. Por tanto, ¡reducir el ancho de la barrera en sólo un orden de magnitud aumenta la probabilidad de efecto túnel de penetración de barrera en casi 12 órdenes de magnitud!

## 40.6 Aplicaciones del efecto túnel

Como ha visto, el efecto túnel es un fenómeno cuántico, una manifestación de la naturaleza ondulatoria de la materia. Existen numerosos ejemplos (en escalas atómica y nuclear) en los que el efecto túnel es muy importante.

### Desintegración alfa

Una forma de desintegración radiactiva es la emisión de partículas alfa (núcleos de átomos de helio) por núcleos pesados e inestables (capítulo 43). Para que una partícula alfa escape del núcleo, debe penetrar una barrera cuya altura sea varias veces mayor que la energía del sistema núcleo-partícula alfa como se muestra en la figura 40.9. La barrera se debe a una combinación de la fuerza nuclear de atracción (que se explica en el capítulo 43) y la repulsión de Coulomb (explicada en el capítulo 22) entre la partícula alfa y el resto del núcleo. En ocasiones, una partícula alfa logra el efecto túnel a través de la barrera, lo cual explica el mecanismo básico para este tipo de desintegración y las grandes variaciones en las vidas medias de diversos núcleos radiactivos.

### Fusión nuclear

La reacción básica que suministra energía al Sol e indirectamente a casi todo lo demás en el sistema solar, es la fusión, que se estudia en el capítulo 43. En una etapa del proceso que se presenta en el núcleo del Sol, los protones se aproximan entre sí a distancias tan pequeñas que se fusionan para formar un núcleo de deuterio. (Véase la sección 43.10). Según la física clásica, estos protones no pueden superar penetrar la barrera causada por la repulsión eléctrica entre ellos. De cualquier modo, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, los protones sí pueden lograr el efecto túnel a través de la barrera y fusionarse.

### El microscopio de barrido de efecto túnel

El microscopio de barrido de efecto túnel (STM, *scanning tunneling microscope*), sobre el que preguntó en la semblanza de apertura, permite a los científicos obtener imágenes detalladas de superficies con resoluciones comparables al tamaño de *un solo átomo*. La imagen de inicio de capítulo, que presenta la superficie de un trozo de grafito, demuestra lo que puede hacer el STM. Lo que hace tan sorprendente esta imagen es su resolución de cerca de 0.2 nm. Para un microscopio, la solución está limitada por la longitud de onda de la luz usada para hacer la imagen. Por tanto, un microscopio óptico tiene una resolución no mayor a 200 nm, que es cerca de la mitad de la longitud de onda de la luz visible, por lo que nunca podría mostrar el detalle ilustrado en la imagen.

El microscopio de barrido de efecto túnel logra tan excelente resolución al usar la idea básica que se muestra en la figura 40.10. Una sonda eléctricamente conductora con una aguja muy delgada se coloca cerca de la superficie bajo estudio. El espacio vacío entre la aguja y la superficie representa la “barrera”, que se ha explicado, y la punta y la superficie son las dos paredes del “pozo de potencial”. Debido a que los electrones obedecen más las reglas cuánticas antes que las reglas de Newton, pueden “perforar un túnel” hasta el otro lado de la barrera hacia el espacio vacío. Si se aplica un voltaje entre la superficie y la aguja los electrones de los átomos de la superficie material pueden perforar un túnel de preferencia desde la superficie hacia la aguja para producir una corriente de filtración cuántica. De esta manera, la aguja ejemplifica la distribución de electrones que están justo encima de la superficie.

En el espacio vacío entre la punta y la superficie, la función de onda electrónica cae exponencialmente (véase la región II en la figura 40.8 y el ejemplo 40.4). Para distancias punta-superficie  $z > 1$  nm (es decir, más allá de unos cuantos diámetros atómicos), esencialmente no ocurre el efecto túnel. Este comportamiento exponencial hace que la corriente de electrones que provocan filtración cuántica de la superficie a la punta dependa en gran medida de  $z$ . Al observar la corriente de filtración cuántica cuando la aguja explora en toda la superficie, los investigadores obtienen una medida sensible de la topografía superficial de la distribución electrónica. El resultado de esta exploración se emplea para tomar imágenes como la de la fotografía de inicio de capítulo. En

La partícula alfa puede crear un túnel a través de la barrera y escapar desde el núcleo a pesar de que su energía es más baja que la altura del pozo.

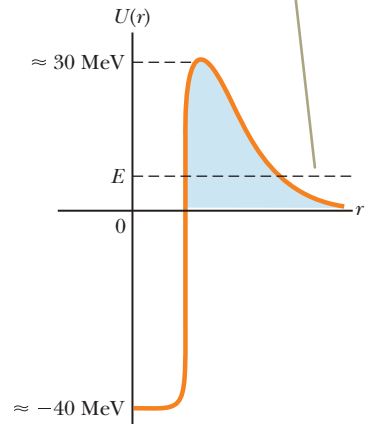


Figura 40.9 Pozo de potencial para una partícula alfa en un núcleo.

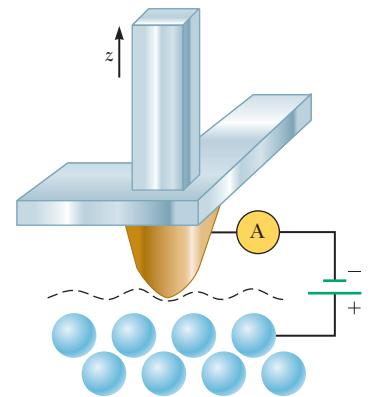


Figura 40.10 Vista esquemática de un microscopio de barrido de efecto túnel. Una exploración de la punta sobre la muestra puede revelar contornos de la superficie hasta un nivel atómico. La imagen de un STM está compuesta por una serie de exploraciones desplazadas lateralmente unas de otras. (Basado en un dibujo de P.K. Hansma, V.B. Elings, O. Marti y C. Bracker, *Science* 242:209, 1988 ©1988 por la AAAS.)



esta forma, el STM puede medir la altura de las características de la superficie con una tolerancia de no más de 0.001 nm, ¡aproximadamente 1/100 el diámetro de un átomo!

Es posible ver lo sensible que es el STM si examina la imagen de inicio de capítulo. De los seis átomos de carbono de cada anillo, tres aparecen más abajo que los otros tres. En realidad, los seis átomos están a la misma altura, pero todos tienen distribuciones electrónicas ligeramente diferentes. Los tres átomos que aparecen más bajos están ligados a los otros átomos de carbono directamente bajo ellos en la capa atómica que sirve de base; en consecuencia, sus distribuciones electrónicas, que provocan el enlace, se extienden hacia abajo por debajo de la superficie. Los átomos de la capa superficial que aparecen más arriba no están directamente sobre los átomos de la subcapa y, por esto, no están ligados a ningún átomo subyacente. Para estos átomos que aparecen más arriba, la distribución electrónica se extiende por encima de la superficie. Esta densidad electrónica extra es lo que provoca que estos átomos aparezcan más arriba en la imagen, porque lo que el STM traza es la topografía de la distribución electrónica.

El STM tiene una seria limitación: su operación depende de la conductividad eléctrica de la muestra y la aguja. Por desgracia, casi todos los materiales resultan malos conductores eléctricos en sus superficies. Incluso los metales, que por lo general son excelentes conductores eléctricos, están cubiertos de óxidos no conductores. Un microscopio más reciente, el microscopio de fuerza atómica (AFM, *atomic force microscope*), supera esta limitación.

## 40.7 El oscilador armónico simple

En la figura 20.5c, estudiamos una molécula diatómica vibratoria en términos de su contribución al calor específico de los molares. En el capítulo 42, investigaremos la espectroscopía molecular, incluidos los efectos de las moléculas diatómicas en vibración. Hagamos una conexión con el capítulo 20 y preparémonos para el capítulo 42 aplicando un enfoque de mecánica cuántica a un modelo de análisis con el que estamos familiarizados: la partícula en movimiento armónico simple.

Considere una partícula que se somete a una fuerza restauradora lineal  $F = -kx$ , donde  $x$  es la posición de la partícula respecto al equilibrio ( $x = 0$ ) y  $k$  es una constante. El movimiento clásico de una partícula sometida a esta fuerza es armónico simple, el cual estudió en el capítulo 15. La energía potencial del sistema es, de la ecuación 15.20.

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

donde la frecuencia angular de vibración es  $\omega = \sqrt{k/m}$ . En la mecánica clásica, si la partícula se desplaza desde su posición de equilibrio y se suelta, oscila entre los puntos  $x = -A$  y  $x = A$ , donde  $A$  es la amplitud del movimiento. Además, su energía total  $E$  es, a partir de la ecuación 15.21,

$$E = K + U_s = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

En el modelo clásico, cualquier valor de  $E$  es permitido, incluso  $E = 0$ , que es la energía total cuando la partícula está en reposo en  $x = 0$ .

Ahora investigaremos cómo es tratado el oscilador armónico simple desde el punto de vista cuántico. La ecuación de Schrödinger para este problema se obtiene al sustituir  $U = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$  en la ecuación 40.15:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi \quad (40.30)$$

La técnica matemática para resolver esta ecuación está fuera del alcance de este libro. No obstante, es de utilidad pensar en una solución. Tome la siguiente función de onda para el cálculo:

$$\psi = Be^{-Cx^2} \quad (40.31)$$

Al sustituir esta función en la ecuación 40.30, se encuentra que es una solución satisfactoria a la ecuación de Schrödinger, siempre que

$$C = \frac{m\omega}{2\hbar} \quad \text{y} \quad E = \frac{1}{2}\hbar\omega$$





Resulta que la solución que se ha calculado corresponde al estado fundamental del sistema, que tiene una energía  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ . Como  $C = m\omega/2\hbar$  se deduce de la ecuación 40.31 que la función de onda para este estado es

$$\psi = Be^{-(m\omega/2\hbar)x^2} \quad (40.32)$$

donde  $B$  es la constante a ser determinada desde la condición de normalización. Este resultado es solo una solución a la ecuación 40.30. Las soluciones restantes que describen los estados excitados son más complicadas, pero todas las soluciones incluyen el factor exponencial  $e^{-Cx^2}$ .

Los niveles de energía de un oscilador armónico están cuantizados, como es de esperarse, porque la partícula oscilatoria está destinada a estar cerca de  $x = 0$ . La energía para un número cuántico arbitrario  $n$  es

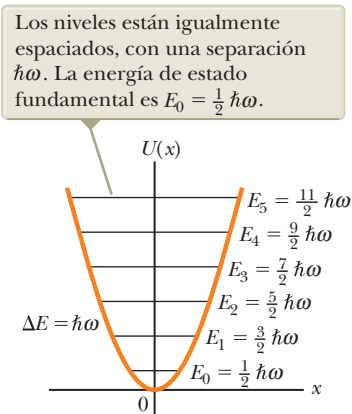
$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (40.33)$$

El estado  $n = 0$  corresponde al estado fundamental, cuya energía es  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ; el estado  $n = 1$  corresponde al primer estado excitado, cuya energía es  $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ , y así sucesivamente. El diagrama del nivel de energía para este sistema se ilustra en la figura 40.11. Observe que las separaciones entre niveles adyacentes son iguales y están dadas por

$$\Delta E = \hbar\omega = \left(\frac{h}{2\pi}\right)(2\pi f) = hf \quad (40.34)$$

Observe que los niveles de energía para el oscilador armónico de la figura 40.11 están igualmente espaciados, como lo propuso Planck para los osciladores en las paredes de la cavidad que se utilizó en el modelo de radiación de cuerpo negro de la sección 39.1. De hecho, el espaciado entre niveles es exactamente el mismo que el espaciado de Planck, como se puede ver al comparar las ecuaciones 39.5 y 40.34. Esto representa otra conexión notable entre un enfoque semiclásico, como el de Planck, y el completo enfoque cuántico explicado aquí. La ecuación 40.4 de Planck para los niveles de energía de los osciladores se distingue de la ecuación 41.27 solo en el término  $\frac{1}{2}$  adicionado a  $n$ . Este término adicional no afecta la energía que se emite en una transición.

◀ Función de onda para el estado fundamental de un oscilador armónico simple



**Figura 40.11** Diagrama del nivel de energía para un oscilador armónico simple, sobrepuesto en la función de energía potencial.

### Ejemplo 40.5 Calor específico molar del gas hidrógeno

En la figura 20.6 (sección 20.3), que muestra el calor específico molar del hidrógeno como función de la temperatura, la vibración no contribuye al calor específico molar a temperatura ambiente. Explique por qué, modelando la molécula de hidrógeno como un oscilador armónico simple. La constante de resorte efectiva para el enlace en la molécula de hidrógeno es 573 N/m.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine el único modo de vibración disponible para una molécula diatómica. Este modo (que se muestra en la figura 20.5c) consiste en los dos átomos que siempre se mueven en direcciones opuestas con igual rapidez.

**Categorizar** Este ejemplo se clasifica como un problema de oscilador armónico cuántico, con la molécula modelada como un sistema de dos partículas.

**Analizar** El movimiento de las partículas en relación con el centro de masa se analiza al considerar la oscilación de una sola partícula con masa reducida  $\mu$ . (Véase el problema 30.)

Use el resultado del problema 30 para evaluar la masa reducida de la molécula de hidrógeno, en la que las masas de las dos partículas es la misma:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m^2}{2m} = \frac{1}{2}m$$

Con la ecuación 40.34 y la ecuación 15.9, calcule la energía necesaria para excitar la molécula desde su estado vibratorio fundamental a su primer estado vibratorio excitado:

$$\Delta E = \hbar\omega = \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \hbar \sqrt{\frac{k}{\frac{1}{2}m}} = \hbar \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

continúa

## 40.5 continuación

Sustituya valores numéricos y note que  $m$  es la masa de un átomo de hidrógeno:

$$\Delta E = (1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \sqrt{\frac{2(573 \text{ N/m})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}} = 8.74 \times 10^{-20} \text{ J}$$

Igualé esta energía con  $\frac{3}{2}k_B T$  a partir de la ecuación 20.19 y encuentre la temperatura a la cual la energía cinética traslacional molecular promedio es igual a la requerida para excitar el primer estado vibratorio de la molécula:

$$\frac{3}{2}k_B T = \Delta E$$

$$T = \frac{2}{3} \left( \frac{\Delta E}{k_B} \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{8.74 \times 10^{-20} \text{ J}}{1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}} \right) = 4.22 \times 10^3 \text{ K}$$

**Finalizar** La temperatura del gas debe ser mayor que 4 000 K para que la energía cinética traslacional se compare con la energía requerida para excitar el primer estado vibratorio. Esta energía de excitación debe venir de colisiones entre moléculas, de modo que si las moléculas no tienen suficiente energía cinética traslacional, no se pueden excitar al primer estado vibratorio y la vibración no contribuye al calor específico molar. Por tanto, la curva en la figura 20.6 no se eleva a un valor que corresponda a la contribución de la vibración hasta que el gas hidrógeno se eleva a miles de grados kelvin.

La figura 20.6 muestra que los niveles de energía rotacional deben estar más cercanamente espaciados en energía que los niveles vibratorios porque se excitan a una temperatura menor que los niveles vibratorios. Los niveles de energía traslacional son los de una partícula en una caja tridimensional, donde la caja es el contenedor que retiene el gas. Estos niveles están dados por una expresión similar a la ecuación 40.14. Por tanto, la caja es macroscópica en tamaño,  $L$  es muy grande y los niveles de energía están muy juntos. De hecho, están tan juntos que los niveles de energía traslacional se excitan a la temperatura a la que el hidrógeno líquido se convierte en un gas como se muestra en la figura 20.6.

## Resumen

## Definiciones

La **función de onda**  $\Psi$  para un sistema es una función matemática que se puede escribir como un producto de una función espacio  $\Psi$  para una partícula del sistema y una función en el tiempo compleja:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_j, \dots, t) = \psi(\vec{r}_j) e^{-i\omega t} \quad (40.2)$$

donde  $\omega (= 2\pi f)$  es la frecuencia angular de la función de onda e  $i = \sqrt{-1}$ . La función de onda contiene dentro de sí toda la información que se puede saber acerca de la partícula.

La posición observada  $x$  de una partícula, promediada sobre muchos ensayos, se llama **valor esperado** de  $x$  y se define por

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx \quad (40.8)$$

## Conceptos y principios

En mecánica cuántica, una partícula en un sistema se puede representar mediante una función de onda  $\psi(x, y, z)$ . La probabilidad por unidad de volumen (o densidad de probabilidad) de que una partícula se encontrara en un punto es  $|\psi|^2 = \psi^* \psi$ , donde  $\psi^*$  es el complejo conjugado de  $\psi$ . Si la partícula está confinada a moverse a lo largo del eje  $x$ , la probabilidad de que se ubique en un intervalo  $dx$  es  $|\psi|^2 dx$ . Además, la suma de todas estas probabilidades en todos los valores de  $x$  debe ser 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \quad (40.7)$$

Esta expresión se llama **condición de normalización**.

Si una partícula de masa  $m$  está confinada a moverse en una caja unidimensional de longitud  $L$  cuyas paredes son impenetrables, entonces  $\psi$  debe ser cero en las paredes y fuera de la caja. Las funciones de onda para este sistema están dadas por

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (40.12)$$

donde  $A$  es el máximo valor de  $\psi$ . Los estados permitidos de una partícula en una caja tienen energías cuantizadas conocidas por

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (40.14)$$

La función de onda para un sistema debe satisfacer la **ecuación de Schrödinger**. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula confinada a moverse a lo largo del eje  $x$  es

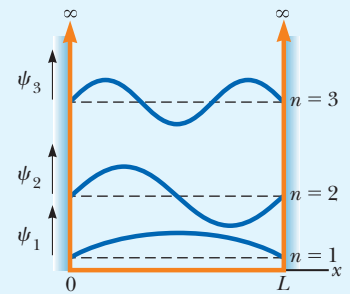
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi = E\psi \quad (40.15)$$

donde  $U$  es la energía potencial del sistema y  $E$  es la energía total.



**➤ Análisis de modelo para resolución de problemas**

**Partícula cuántica bajo condiciones de frontera.** Una interacción de una partícula cuántica con su ambiente representa una o más condiciones de frontera. Si la interacción restringe la partícula a una región finita del espacio, la energía del sistema está cuantizada. Todas las funciones de onda deben satisfacer las siguientes cuatro condiciones de frontera: (1)  $\psi(x)$  debe permanecer finita conforme  $x$  tiende a 0; (2)  $\psi(x)$  debe tender a cero conforme  $x$  tiende a  $\pm \infty$ ; (3)  $\psi(x)$  debe ser continua para todos los valores de  $x$  y (4)  $d\psi/dx$  debe ser continua para todos los valores finitos de  $U(x)$ . Si la solución a la ecuación 40.15 es por tramos, debe aplicar las condiciones (3) y (4) a las fronteras entre regiones de  $x$  en las que se ha resuelto la ecuación 40.15



**Piense, dialogue y comparta**

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN. From Cengage

1. En el problema 14, encontramos que la partícula en una caja no es un buen modelo para el electrón en un átomo de hidrógeno. Como resultado, la partícula en una caja es una primera aproximación razonable para un modelo para los protones en el núcleo. Trabaja con tu grupo para mostrar esto de la siguiente manera. Imagine un protón confinado en un pozo cuadrado infinitamente alto de 10.0 fm de longitud, un diámetro nuclear típico. Suponiendo que el protón realiza una transición desde el estado  $n = 2$  al estado fundamental, calcule (a) la energía y (b) la longitud de onda del fotón emitido. (c) Identifique la región del espectro electromagnético al que pertenece esta longitud de onda.

2. **ACTIVIDAD** Su grupo está investigando una partícula cuántica que se encuentra en el estado  $n = 1$  de un pozo cuadrado infinitamente profundo con paredes en  $x = 0$  y  $x = L$ . Sea  $\ell$  un valor arbitrario de  $x$  entre  $x = 0$  y  $x = L$ . (a) Encuentre una expresión para la probabilidad, como una función de  $\ell$ , que la partícula se encontrará entre  $x = 0$  y  $x = \ell$ , es decir, a la izquierda de la posición  $\ell$ . (b) Pruebe su expresión para los valores correctos de la probabilidad en,  $\ell = 0$ ,  $\ell = \frac{1}{2}L$ , y  $\ell = L$ . Encuentre el valor de  $\ell$  para el cual la probabilidad es cuatro veces mayor que la partícula esté a la izquierda de  $\ell$  que a la derecha de  $\ell$ .

3. En la sección 40.4, estudiamos las funciones de onda para una partícula en un pozo finito y las condiciones de contorno en esas funciones de onda. No analizamos las energías de las partículas atrapadas en un pozo así. Eso es porque no hay una solución analítica para evaluar estas energías. En este problema, exploraremos una forma de encontrar las energías para un pozo en particular. Trabajen juntos como grupo para seguir cuidadosamente la lógica expresada en la declaración del problema y realizar los incisos (a) a (h) a continuación. Imagine un electrón en un punto cuántico de profundidad  $U = 10.0$  eV y ancho  $L = 0.500$  nm. Modificaremos la figura 40.6 para colocar el centro del pozo en el origen. Eso nos permitirá aprovechar algunas simetrías. La figura TP40.3 muestra esta geometría. Podemos modificar las soluciones y las condiciones de contorno en las ecuaciones 40.22-40.27 de la siguiente manera:

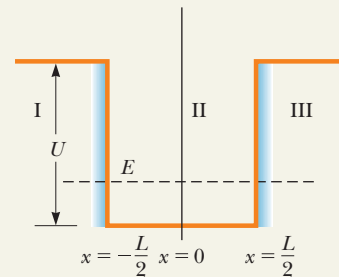


Figura TP40.3

$$\begin{aligned} \psi_I &= Ae^{Cx} && \text{para } x < -\frac{L}{2} \\ \psi_{II} &= F \sin kx + G \cos kx && \text{para } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ \psi_{III} &= Be^{-Cx} && \text{para } x > \frac{L}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_I &= \psi_{II} && \text{y } \frac{d\psi_I}{dx} = \frac{d\psi_{II}}{dx} && \text{a } x = -\frac{L}{2} \\ \psi_{II} &= \psi_{III} && \text{y } \frac{d\psi_{II}}{dx} = \frac{d\psi_{III}}{dx} && \text{a } x = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

Reconocemos que las soluciones serán simétricas o antisimétricas alrededor de  $x = 0$ . (Vea la figura 40.7a, donde las funciones de onda son simétricas o antisimétricas alrededor de  $L/2$ ). (a) Aplique las cuatro condiciones de contorno para encontrar relaciones entre las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $k$ . Demuestre que las soluciones simétricas dan  $A = B$

$$C = k \tan\left(\frac{kL}{2}\right)$$

y que las soluciones antisimétricas dan  $A = -B$

$$C = -k \cot\left(\frac{kL}{2}\right)$$

Estas dos últimas ecuaciones son trascendentales y no se pueden resolver analíticamente. Tanto  $k$  como  $C$  dependen de los valores de energía cuantificados  $E$  del electrón (ecuación



ciones 40.17 y 40.29), por lo que necesitaremos seguir un procedimiento creativo para encontrar esas energías. (b) Defina dos nuevas variables adimensionales  $a$  y  $b$ , cada una de las cuales depende de  $E$ , de modo que

$$a = \frac{CL}{2} \quad b = \frac{kL}{2}$$

Demuestre que

$$a^2 + b^2 = r^2$$

donde

$$r = \frac{L}{\hbar} \sqrt{\frac{m_e U}{2}}$$

(c) Demuestre que la ecuación en el inciso (a) puede ser expresada como

$$\sqrt{r^2 - b^2} = b \tan b$$

$$\sqrt{r^2 - b^2} = -b \cot b$$

(d) Solo ciertos valores de  $b$  satisfarán las ecuaciones en el inciso (c). Estos valores cuantificados de  $b$ , que llamaremos  $b_E$ , nos permitirán encontrar los valores cuantificados de la energía  $E$ . Demuestre que

$$E = \frac{b_E^2}{r^2} U$$

(e) Prepare un gráfico del lado izquierdo de las ecuaciones en el inciso (c) en función de  $b$ . El resultado, si los ejes tienen las mismas escalas, debería ser un círculo de radio  $r$ , ya que  $a^2 + b^2 = r^2$ . Agregue a las curvas gráficas para los lados derechos de las ecuaciones en el inciso (c) en función de  $b$ . (f) Encuentre los valores de  $b$  para los cuales las curvas se intersectan. (g) ¿Cuántas energías cuantificadas hay para este pozo? (h) ¿Cuáles son las energías cuantificadas?

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

### SECCIÓN 40.1 La función de onda

1. Un electrón libre tiene una función de onda

$$\psi(x) = Ae^{i(5.00 \times 10^{10} x)}$$

donde  $x$  está en metros. Encuentre (a) su longitud de onda de De Broglie, (b) su cantidad de movimiento y (c) su energía cinética en electrón volts.

2. La función de onda para una partícula viene dada por  $\psi(x) = Ae^{2|x|/a}$ , donde  $A$  y  $a$  son constantes. (a) Trace esta función para valores de  $x$  en el intervalo de  $-3a < x < 3a$ . (b) Determinar el valor de  $A$ . (c) Encuentre la probabilidad de que la partícula esté en el intervalo  $-a < x < a$ .

3. La función de onda para una partícula es

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}}$$

para  $a > 0$  y  $-\infty < x < +\infty$ . Determine la probabilidad de que la partícula esté situada en algún punto entre  $x = -a$  y  $x = +a$ .

### SECCIÓN 40.2 Análisis de modelo: La partícula cuántica bajo condiciones en la frontera

4. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un protón se encuentra en un profundo pozo de potencial infinito de longitud 1.00 nm. Éste absorbe un fotón de microondas de longitud de onda de 6.06 mm y es excitado al siguiente estado cuántico disponible.

5. (a) Utilice el modelo cuántico de la partícula en una caja para calcular los primeros tres niveles de energía de un neutrón atrapado en un núcleo atómico de 20.0 fm de diámetro. (b) Explique si las diferencias en el nivel de energía muestran un orden de magnitud realista.

6. Un protón está confinado a moverse en una caja unidimensional de 0.200 nm de longitud. (a) Encuentre la energía más baja posible del protón. (b) ¿Qué pasaría si? ¿Cuál es la

energía más baja posible de un electrón confinado a la misma caja? (c) ¿Cómo puede explicar usted la gran diferencia en los resultados de los incisos (a) y (b)?

7. Un electrón está contenido en una caja unidimensional de 0.100 nm de longitud. (a) Dibuje un diagrama del nivel de energía para el electrón con niveles hasta de  $n = 4$ . (b) Encuentre las longitudes de onda de todos los fotones que pueden ser emitidos por el electrón al hacer transiciones hacia abajo que puedan, en última instancia, llevarlo del estado  $n = 4$  al estado  $n = 1$ .

8. Una partícula de 4.00 g confinada a una caja de longitud  $L$  tiene una rapidez de 1.00 mm/s. (a) ¿Cuál es la energía cinética clásica de la partícula? (b) Si la energía del primer estado excitado ( $n = 2$ ) es igual a la energía cinética encontrada en el inciso (a), ¿cuál es el valor de  $L$ ? (c) ¿El resultado encontrado en el inciso (b) es realista? Explique.

9. Para una partícula cuántica de masa  $m$  en el estado fundamental de un pozo cuadrado con longitud  $L$  y paredes de altura infinita, la incertidumbre en la posición es  $\Delta x \approx L$ . (a) Use el principio de incertidumbre para estimar la incertidumbre en su cantidad de movimiento. (b) Dado que la partícula permanece dentro de la caja, su cantidad de movimiento promedio debe ser cero. En tal caso su cantidad de movimiento al cuadrado promedio es  $\langle p^2 \rangle \approx (\Delta p)^2$ . Estime la energía de la partícula. (c) Establezca cómo se compara el resultado (b) con la energía de estado fundamental real.

10. La función de onda para una partícula confinada a moverse en una caja unidimensional es localizada entre  $x = 0$  y  $x = L$  es

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Utilice la condición de normalización sobre  $\psi$  para demostrar que

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

11. Una partícula en un pozo cuadrado infinitamente profundo tiene una función de onda dada por

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

para  $0 \leq x \leq L$ ; de otro modo es cero. (a) Determine el valor esperado de  $x$ . (b) Determine la probabilidad de hallar la partícula cerca de  $\frac{1}{2}L$ , al calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el intervalo  $0.490L \leq x \leq 0.510L$ . (c) **¿Qué pasaría si?** Determine la probabilidad de hallar la partícula cerca de  $\frac{1}{4}L$ , al calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el intervalo  $0.240L \leq x \leq 0.260L$ . (d) Demuestre que el resultado del inciso (a) no contradice los resultados de los incisos (b) y (c).

- 12.** Un electrón en un pozo cuadrado infinitamente profundo tiene una función de onda dada por

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

para  $0 \leq x \leq L$ ; de otro modo es cero. (a) ¿Cuáles son las posiciones más probables del electrón? (b) Explique cómo identificarlos.

- 13.** Una partícula cuántica en un pozo cuadrado de profundidad infinita tiene una función de onda dada por

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

para  $0 \leq x \leq L$ ; de otro modo es cero. (a) Determine la probabilidad de hallar la partícula entre  $x = 0$  y  $x = L/3$ . (b) Utilice el resultado de este cálculo y argumentos de simetría para hallar la probabilidad de encontrar la partícula entre  $x = \frac{1}{3}L$  y  $x = \frac{2}{3}L$ . No evalúe de nuevo la integral.

- 14.** Mientras estudia la partícula en una caja en este capítulo, se le ocurre lo que cree que es una idea brillante. ¡Supongamos que el electrón en el átomo de hidrógeno se modela como una partícula en una caja unidimensional! Mira en línea y descubre que la transición desde el primer estado excitado de hidrógeno al estado fundamental emite un fotón de longitud de onda de 121.6 nm. (a) A partir de esta información, determine el tamaño de la caja en la cual el electrón está atrapado. (b) Después de entusiasmarse con su respuesta al inciso (a), porque es del orden del tamaño de un átomo, predice la longitud de onda de la transición desde el segundo estado excitado de la partícula en la caja en el inciso (a) al estado fundamental, y lo compara con la longitud de onda correspondiente en el espectro del átomo de hidrógeno, 102.6 nm

**SECCIÓN 40.3 La ecuación de Schrödinger**

- 15.** La función de onda de una partícula cuántica de masa  $m$  es

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \operatorname{sen}(kx)$$

donde  $A, B$  y  $k$  son constantes. (a) Demuestre que  $\psi(x)$  es una solución de la ecuación de Schrödinger (ecuación 40.15), si la partícula está libre ( $U = 0$ ), y (b) encuentre la energía  $E$  correspondiente de la partícula.

- 16.** Demuestre que la función de onda  $\psi = A e^{i(kx - \omega t)}$  es una solución a la ecuación de Schrödinger (ecuación 40.15), donde  $k = 2\pi/\lambda$  y  $U = 0$ .

- 17.** En una región del espacio, una partícula cuántica con energía total cero tiene una función de onda

$$\psi(x) = A x e^{-x^2/L^2}$$

(a) Encuentre la energía potencial  $U$  como función de  $x$ . (b) Haga un dibujo de  $U(x)$  con  $x$ .

- 18.** Considere una partícula cuántica que se mueve en una caja unidimensional en la cual las paredes están en  $x = -L/2$  y  $x = L/2$ . (a) Escriba las funciones de onda y densidades de probabilidad para  $n = 1, n = 2$  y  $n = 3$ . (b) Dibuje la función de onda y las densidades de probabilidad.

**SECCIÓN 40.4 Una partícula en un pozo de altura finita**

- 19.** Trace (a) la función de onda  $\psi(x)$  y (b) la densidad de probabilidad  $|\psi(x)|^2$  para el estado  $n = 4$  de una partícula cuántica en un pozo de potencial finito. (Véase la figura 40.7.)
- 20.** Suponga que una partícula cuántica está atrapada en su estado fundamental en una caja que tiene paredes infinitamente altas (figura 40.4a). Ahora suponga que la pared de la izquierda se baja de pronto a una altura y ancho finitos. (a) Trace cualitativamente la función de onda para la partícula para un tiempo breve posterior. (b) Si la caja tiene una longitud  $L$ , ¿cuál es la longitud de la onda que penetra la pared izquierda?

**SECCIÓN 40.5 Efecto túnel a través de una barrera de energía potencial**

- 21.** Un electrón con energía total  $E = 4.50$  eV se aproxima a una barrera rectangular de energía con  $U = 5.00$  eV y  $L = 950$  pm, como se muestra en la figura P40.21. De acuerdo con la mecánica clásica, el electrón no podría pasar por la barrera porque  $E < U$ . No obstante, según la mecánica cuántica, la probabilidad de obtener el efecto túnel no es cero. (a) Calcule esta probabilidad, que es el coeficiente de transmisión. (b) ¿En qué valor tendría que aumentar el ancho  $L$  de la barrera de potencial para que la probabilidad de que un túnel incidente de electrones de 4.50 eV pasara a través de la barrera fuera uno en un millón?

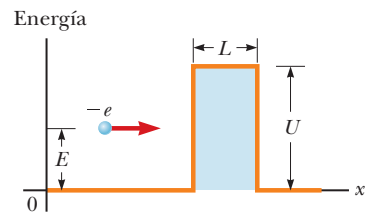


Figura P40.21

**SECCIÓN 40.6 Aplicaciones del efecto túnel**

- 22.** El criterio de diseño para un microscopio de barrido de efecto túnel (STM) especifica que debe ser capaz de detectar, en la muestra bajo su aguja, la figura superficial con una diferencia en altura de sólo 0.002 00 nm. ¿Qué cambio porcentual en la transmisión electrónica debe ser capaz de detectar la electrónica del STM para lograr esta resolución? Suponga que el coeficiente de transmisión electrónica es  $e^{-2CL}$  con  $C = 10.0/\text{nm}^{-1}$ .

**SECCIÓN 40.7 El oscilador armónico simple**

- 23.** Un oscilador armónico simple cuántico consta de un electrón ligado por una fuerza restauradora proporcional a su posición relativa a cierto punto de equilibrio. La constante de proporcionalidad es 8.99 N/m. ¿Cuál es la longitud de onda más larga de luz que puede excitar el oscilador?

- 24.** Un oscilador armónico simple cuántico consta de una partícula de masa  $m$  ligada por una fuerza restauradora proporcional a su posición relativa a cierto punto de equilibrio. La constante de proporcionalidad es  $k$ . ¿Cuál es la longitud de onda más larga de luz que puede excitar el oscilador?



**25.** (a) Normalice la función de onda para el estado fundamental de un oscilador armónico simple. Es decir, aplique la ecuación 40.7 a la ecuación 40.32 y encuentre el valor necesario para la constante  $B$ , en términos de  $m$ ,  $\omega$  y constantes fundamentales. (b) Determine la probabilidad de hallar el oscilador en un angosto intervalo  $-\delta/2 < x < +\delta/2$  alrededor de su posición de equilibrio.

**26.** La función de onda de un oscilador armónico unidimensional es

$$\psi = Axe^{-bx^2}$$

(a) Demuestre que  $\psi$  satisface la ecuación 40.30. (b) Encuentre  $b$  y la energía total  $E$ . (c) ¿Esta función de onda es para un estado fundamental o para un primer estado excitado?

**27.** La energía total de un sistema formado por una partícula y un resorte, en el que la partícula se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje  $x$ , es

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

donde  $p_x$  es la cantidad de movimiento de la partícula y  $k$  es la constante del resorte. (a) Con el uso del principio de incertidumbre, demuestre que esta expresión también se puede escribir como

$$E \geq \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k\hbar^2}{8p_x^2}$$

(b) Demuestre que la energía mínima del oscilador armónico es

$$E_{\min} = K + U = \frac{1}{4}\hbar \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

**28.** Está trabajando como asistente de un profesor de física. **CE** Para una próxima conferencia, él quiere que prepare una presentación que muestre las cuatro energías más bajas de un oscilador armónico isotrópico en tres dimensiones. También quiere que indique en la diapositiva las *degeneraciones* de los niveles de energía, es decir, el número de conjuntos únicos de números cuánticos para los estados que tienen la misma energía. Explique que la función de onda del oscilador tridimensional se puede expresar como un producto simple de las tres funciones de onda de cada oscilador unidimensional. Debido a que el oscilador es isotrópico, la constante de resorte es la misma en las tres direcciones, por lo que la energía de un estado es

$$E = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})\hbar\omega$$

donde  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$  son los números cuánticos asociados con los osciladores unidimensionales en cada dimensión. Los números cuánticos son independientes el uno del otro. Como de costumbre, el profesor quiere que la diapositiva esté preparada para la conferencia de esta tarde.

**29.** Demuestre que la ecuación 40.32 es una solución de la ecuación 40.30 con una energía  $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ .

**30.** Dos partículas con masas  $m_1$  y  $m_2$ , que están unidas por un resorte ligero con una constante de fuerza  $k$ , vibran a lo largo de una recta con centros de masa fijos. (a) Demuestre que la energía total

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

se puede escribir como  $\frac{1}{2}\mu u^2 + \frac{1}{2}kx^2$ , donde  $u = |u_1| = |u_2|$  es la rapidez *relativa* de las partículas y  $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  es la masa reducida del sistema. Este resultado demuestra que el par de partículas con vibraciones libres se puede modelar con precisión como una sola partícula que vibra en el extremo del resorte que tiene fijo su otro extremo. (b) Derive la ecuación

$$\frac{1}{2}\mu u^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

respecto a  $x$ . Siga adelante y demuestre que el sistema ejecuta un movimiento armónico simple. (c) Encuentre su frecuencia.

## PROBLEMAS ADICIONALES

**31.** Demuestre que el primer término de la ecuación de Schrödinger,  $-(\hbar^2/2m)(d^2\psi/dx^2)$ , se reduce a la energía cinética de la partícula cuántica multiplicada por la función de onda (a) para una partícula que se mueve libremente, con la función de onda dada por la Ecuación 40.4, y (b) para una partícula en una caja, con la función de onda dada por la ecuación 40.13.

**32.** Compruebe que suponer que  $n = 0$  para una partícula cuántica en un pozo de potencial infinitamente profundo conduce a una violación del principio de incertidumbre  $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$ .

**33.** Calcule la probabilidad de transmisión para la mecánica cuántica de tunelización en cada uno de los siguientes casos. (a) Un electrón con un déficit de energía  $U - E = 0.010$  eV incide sobre una barrera cuadrada de ancho  $L = 0.100$  nm. (b) Un electrón con un déficit de energía de 1.00 eV incide en la misma barrera. (c) Una partícula alfa (masa  $6.64 \times 10^{-27}$  kg) con un déficit de energía de 1.00 MeV incide sobre una barrera cuadrada de anchura 1.00 fm. (d) Una bola de boliche de 8.00 kg con un déficit de energía de 1.00 J incide sobre una barrera cuadrada de ancho de 2.00 cm.

**34.** Un electrón en un pozo de potencial infinitamente profundo tiene un estado fundamental de 0.300 eV de energía. (a) Demuestre que el fotón emitido en una transición desde el estado  $n = 3$  hasta el estado  $n = 1$  tiene una longitud de onda de 517 nm que hace luz verde visible. (b) Halle la longitud de onda y la región espectral para cada una de las otras cinco transiciones que toma lugar entre los cuatro niveles de energía más bajos.

**35.** Está colgando una imagen en su sala de estar. La imagen es de ancho  $w$ , altura  $h$  y densidad uniforme. Estira un cable ligero firmemente entre los ojales ubicados en las esquinas superiores de la imagen y la cuelga en un clavo que clavó en la pared, de forma tal que el clavo quede ubicado en el centro exacto del cable, y la imagen quede colgada como se muestra en la figura P40.35a, con las dos mitades del cable casi horizontales porque el cable está muy apretado. Desafortunadamente, el cable y el clavo están casi libres de fricción, y con la más mínima vibración, como la de cerrar una puerta, la imagen se desliza dentro de la configuración que se muestra en la figura P40.35b. ¿Se da cuenta de que ha creado un sistema cuantificado macroscópico de dos estados! ¿Y la imagen sigue cayendo desde el estado superior al estado fundamental! Determine la energía que debe transferir al sistema para cambiarla del estado fundamental al estado superior.



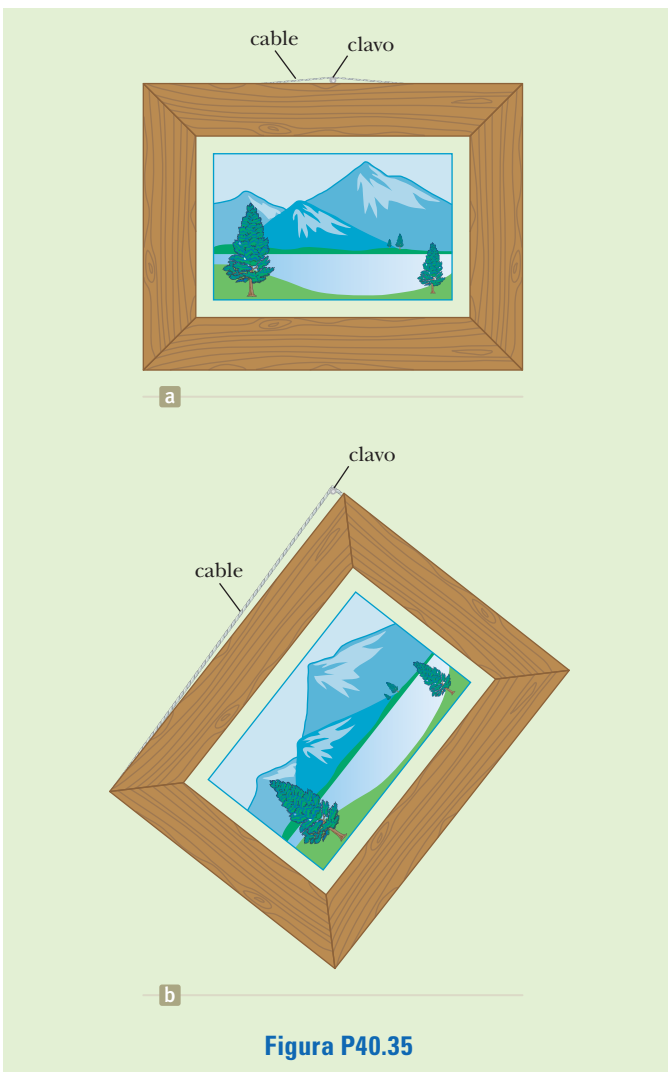


Figura P40.35

36. Una canica rueda hacia atrás y adelante a lo largo de una caja de zapatos a una velocidad constante de 0.8 m/s. Haga una estimación en orden de magnitud de la probabilidad de que se escape a través de la pared de la caja por el efecto túnel cuántico. Indique las cantidades que toma como datos y los valores que mide o calcula para ellos.
37. Un electrón confinado en una caja absorbe un fotón con longitud de onda  $\lambda$ . Como resultado, el electrón hace una transición desde el estado  $n = 1$  a la  $n = 3$  estado. (a) Halle la longitud de la caja. (b) ¿Cuál es la longitud de onda  $\lambda'$  del fotón emitido cuando el electrón hace la transición del estado  $n = 3$  al estado  $n = 2$ ?
38. Para una partícula cuántica descrita por una función de onda  $\psi(x)$ , el valor esperado de una cantidad física  $f(x)$  asociado con la partícula está definido por

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x) \psi dx$$

Para una partícula en una caja unidimensional que se prolonga de  $x = 0$  a  $x = L$ , demuestre que

$$\langle x^2 \rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}$$

39. Una partícula cuántica de masa  $m$  está colocada en una caja unidimensional de longitud  $L$ . Suponga que la caja es tan

pequeña que el movimiento de la partícula es relativista, de modo que  $K = p^2/2m$  no es válido. (a) Deduzca una expresión para hallar los niveles de energía cinética de la partícula. (b) Suponga que la partícula se trata de un electrón en una caja de longitud  $L = 1.00 \times 10^{-12}$  m. Encuentre su energía cinética más baja posible. (c) ¿Cuál es el porcentaje de error de la ecuación no relativista? *Sugerencia:* Véase la ecuación 38.23.

40. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Una partícula está en el estado fundamental de un pozo cuadrado infinito de longitud  $L$ . Una fuente de luz se ajusta de manera que los fotones de longitud de onda  $\lambda$  son absorbidos por la partícula, conforme hacen una transición al primer estado excitado. Una partícula idéntica se encuentra en el estado fundamental de un pozo cuadrado finito de longitud  $L$ . La fuente de luz envía fotones de la misma longitud de onda  $\lambda$  hacia esta partícula. Los fotones no son absorbidos por las energías permitidas para el pozo cuadrado finito pues son diferentes de las que están en el pozo infinito. Para hacer que los fotones sean absorbidos, la fuente de luz se mueve a gran rapidez hacia la partícula en el pozo cuadrado finito. Usted es capaz de encontrar una rapidez a la que los fotones con desplazamiento Doppler son absorbidos a medida que la partícula hace una transición al primer estado excitado.

41. Está trabajando para un laboratorio de investigación, ayudando a su supervisor en un nuevo experimento en el que se disparan partículas de masa  $m$ , energía variable  $E$  y velocidades no relativistas en un paso potencial de altura fija  $U$ . La figura P40.41 muestra el paso potencial y una partícula entrante. En el problema 45 se le pide que demuestre que el coeficiente de reflexión es

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

donde  $R$  representa la probabilidad de que una partícula se refleje desde el paso y

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$$

Su supervisor le pide que determine (a) la energía  $E$  con la cual disparará las partículas hacia el escalón de modo que refleje la mitad de las partículas incidentes, y (b) la fracción a la que se reduce la velocidad de las partículas transmitidas en (a) en comparación con las partículas incidentes.

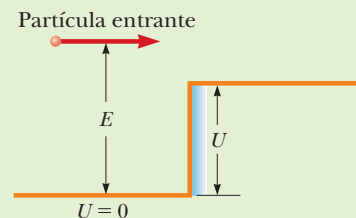


Figura P40.41

Problemas 41 y 45.

42. Un electrón está confinado a moverse en el plano  $xy$  en un rectángulo cuyas dimensiones son  $L_x$  y  $L_y$ . Es decir, el electrón está atrapado en un pozo de potencial bidimensional que tiene longitudes de  $L_x$  y  $L_y$ . En esta situación, las ener-

gías permitidas del electrón dependen de dos números cuánticos,  $n_x$  y  $n_y$ . Las energías permitidas están dadas por

$$E = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right)$$

Con esta información, se desea encontrar la longitud de onda de un fotón necesaria para excitar el electrón desde el estado fundamental al segundo estado excitado, asumiendo que  $L_x = L_y = L$ . (a) Utilizando el supuesto de las longitudes, escriba una expresión para la energías permitidas del electrón en términos de los números cuánticos  $n_x$  y  $n_y$ . (b) ¿Qué valores de  $n_x$  y  $n_y$  corresponden al estado fundamental? (c) Determine la energía del estado fundamental. (d) ¿Cuáles son los posibles valores de  $n_x$  y  $n_y$  para el primer estado excitado, es decir, el estado siguiente más alto en términos de energía? (e) ¿Cuáles son los posibles valores de  $n_x$  y  $n_y$  para el segundo estado excitado? (f) Usando los valores en el inciso (e), ¿Cuál es la energía del segundo estado excitado? (g) ¿Cuál es la diferencia de energía entre el estado fundamental y el segundo estado excitado? (h) ¿Cuál es la longitud de onda de un fotón causaría la transición entre el estado fundamental y el segundo estado excitado?

43. Una partícula cuántica tiene una función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} e^{-x/a} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

(a) Encuentre y trace la densidad de probabilidad. (b) Encuentre la probabilidad de que la partícula está en cualquier punto donde  $x < 0$ . (c) Demuestre que  $\psi$  está normalizada y luego encuentre la probabilidad de que la partícula está entre  $x = 0$  y  $x = a$ .

**PROBLEMAS DE DESAFÍO**

44. Considere un “cristal” formado por dos iones fijos de carga  $+e$  y dos electrones, como se muestra en la figura P40.44. (a) Tomando en cuenta todos los pares de interacciones, encuentre la energía potencial del sistema como función de  $d$ . (b) Si se supone que los electrones están restringidos a una caja unidimensional de longitud  $3d$ , encuentre la energía cinética mínima de los dos electrones. (c) Encuentre el valor de  $d$  en el cual la energía total es mínima. (d) Compare este valor de  $d$  con la separación de los átomos en el litio, el cual tiene una densidad de  $0.530 \text{ g/cm}^3$  y una masa atómica de  $6.94 \text{ g/mol}$ .

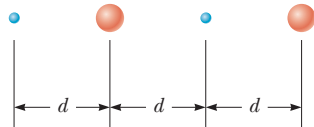


Figura P40.44

45. Ciertas partículas que inciden desde la izquierda se comparan con el escalón de energía potencial que se muestra en la figura P40.41. Situado en  $x = 0$ , el escalón tiene una altura  $U$ . Las partículas tienen energía  $E > U$ . Según la mecánica clásica, sería de esperar que todas las partículas siguieran avanzando, aunque con una menor rapidez. De acuerdo con la mecánica cuántica, una parte de las partículas son reflejadas en el escalón. (a) Demuestre que el coeficiente de reflexión  $R$  para este caso es

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

donde  $k_1 = 2\pi/\lambda_1$  y  $k_2 = 2\pi/\lambda_2$  son los números de onda para las partículas incidentes y transmitidas. Continúe como sigue. Demuestre que la función de onda  $\psi_1 = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$  satisface la ecuación de Schrödinger en la región 1, para  $x < 0$ . En este caso,  $Ae^{ik_1x}$  representa el haz incidente y  $Be^{-ik_1x}$  las partículas reflejadas. Demuestre que  $\psi_2 = Ce^{ik_2x}$  satisface la ecuación de Schrödinger en la región 2, para  $x > 0$ . Imponga las siguientes condiciones de frontera:  $\psi_1 = \psi_2$  y  $d\psi_1/dx = d\psi_2/dx$  en  $x = 0$ , para hallar la relación entre  $B$  y  $A$ . Luego evalúe  $R = B^2/A^2$ . Una partícula que tiene una energía cinética  $E = 7.00 \text{ eV}$  incide desde una región donde la energía potenciales cero sobre una en la que  $U = 5.00 \text{ eV}$ . Encuentre (b) la probabilidad de que sea reflejada y la probabilidad de que sea transmitida.

46. Un electrón está representado por la siguiente función de onda independiente en el tiempo:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-\alpha x} & \text{para } x > 0 \\ Ae^{+\alpha x} & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

(a) Trace la función de onda como función de  $x$ . (b) Trace la densidad de probabilidad que represente la verosimilitud que tiene el electrón de encontrarse entre  $x$  y  $x + dx$ . (c) Únicamente un valor infinito de energía potencial puede producir la discontinuidad en la derivada de la función de onda en  $x = 0$ . A un lado de esta característica argumente que  $\psi(x)$  puede ser una función de onda físicamente razonable. (d) Normalice la función de onda. (e) Determine la probabilidad de hallar el electrón en algún lugar en el intervalo de:

$$-\frac{1}{2\alpha} \leq x \leq \frac{1}{2\alpha}$$

47. La función de onda

$$\psi(x) = Bxe^{-(m\omega/2\hbar)x^2}$$

es una solución al problema del oscilador armónico simple. (a) Determine la energía de este estado. (b) ¿En qué posición hay menos probabilidades de encontrar la partícula? (c) ¿En qué posiciones es más probable encontrar la partícula? (d) Determine el valor de  $B$  necesario para normalizar la función de onda. (e) ¿Qué pasaría si? Determine la probabilidad clásica de encontrar la partícula en un intervalo de longitud pequeña  $\delta$  centrado en la posición  $x = 2(\hbar/m\omega)^{1/2}$ . (f) ¿Cuál es la probabilidad real de encontrar la partícula en ese intervalo?

48. (a) Encuentre la constante de normalización  $A$  para una función de onda formada por los dos estados más bajos de una partícula cuántica en una caja extendida de  $x = 0 < x = L$ :

$$\psi(x) = A \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]$$


(b) Una partícula está descrita en el espacio  $-a \leq x \leq a$  por la función de onda

$$\psi(x) = A \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + B \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Determine la relación entre los valores de  $A$  y  $B$  necesarios para la normalización.







Un evento de erupción de dulces/refrescos se lleva a cabo en Lovaina, Bélgica, en 2008. Una gran cantidad de botellas de refrescos entran en erupción simultáneamente. (AFP/Getty Images)

## **IMAGINE** De acuerdo, es hora de dejar a un lado la física y relajarse

de verdad. Decide pasar un rato tranquilo explorando en línea. Se tropieza con una historia sobre la combinación de caramelos y refrescos, lo que resulta en una erupción de espuma de la botella de refresco. Esto suena un poco divertido, así que investiga más. Encuentra que los países compiten para ingresar al Libro Guinness de los Récords al causar la erupción simultánea de una gran cantidad de botellas de refrescos. La foto de arriba muestra una competencia en Bélgica en la que 1 500 botellas de refrescos estallaron al mismo tiempo. Se pregunta por qué se crea la espuma en la botella; debe ser algún tipo de reacción química, pero, ¿por qué reaccionan los químicos en primer lugar? ¿Qué hay sobre los átomos que provocan que experimenten una reacción química cuando están cerca el uno del otro? Oh-oh, está pensando en física de nuevo. Hora de leer el capítulo 41.

**CONEXIONES** En el capítulo 40, presentamos algunos conceptos básicos y técnicas utilizadas en mecánica cuántica junto con sus aplicaciones a varios sistemas unidimensionales. En este capítulo, aplicamos la mecánica cuántica a los sistemas atómicos. Una gran parte del capítulo se centra en la aplicación de la mecánica cuántica al estudio del sistema atómico más simple, el átomo de hidrógeno. Se discuten las soluciones de la ecuación de Schrödinger para algunos estados de hidrógeno, junto con los números cuánticos utilizados para caracterizar varios estados permitidos. Esta comprensión nos permitirá analizar átomos multielectrónicos y eventualmente comprender las razones de la estructura de la tabla periódica de los elementos. Al final del capítulo, podremos entender el funcionamiento de un láser y estaremos preparados para combinar átomos en moléculas y sólidos en el capítulo 42.

- 41.1 Espectros atómicos de los gases
- 41.2 Los primeros modelos del átomo
- 41.3 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno
- 41.4 Modelo cuántico del átomo de hidrógeno
- 41.5 Las funciones de onda para el hidrógeno
- 41.6 Interpretación física de los números cuánticos
- 41.7 El principio de exclusión y la tabla periódica
- 41.8 Más sobre los espectros atómicos: el visible y el rayo X
- 41.9 Transiciones espontáneas y estimuladas
- 41.10 Láseres



### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 41.1

**¿Por qué se les llama líneas?** La expresión “líneas espectrales” se utiliza muy a menudo para describir la radiación a causa de los átomos. Las líneas son visibles porque la luz atraviesa una rejilla larga y muy estrecha para poder ser separada por longitud de onda. Usted verá muchas referencias a estas “líneas” tanto en física como en química.

## 41.1 Espectros atómicos de los gases

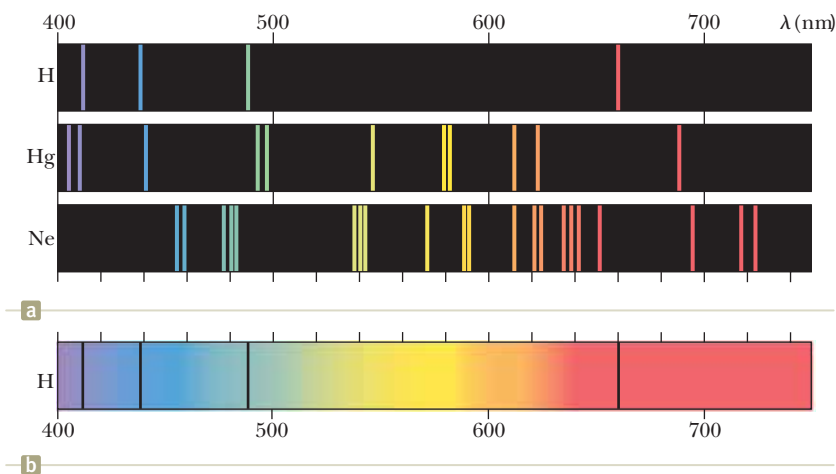
Como se indicó en la sección 39.1, todos los objetos emiten una radiación térmica, caracterizada por una distribución *continua* de longitudes de onda (figura 39.3) y necesitábamos una base cuántica teoría para describir los resultados. En marcado contraste con este espectro de distribución continua, está el **espectro de línea discreto** que se observa cuando un gas a baja presión se somete a una descarga eléctrica. (La descarga eléctrica se presenta cuando el gas es sometido a una diferencia de potencial que produce un campo eléctrico mayor que la resistencia dieléctrica del gas.) La observación y el análisis de estas líneas espectrales es denominada **espectroscopia de emisión**.

Cuando se examina la luz de una descarga de gas con un espectrómetro (véase la figura 37.15), es posible ver que está constituida por algunas líneas brillantes de color sobre un fondo por lo general oscuro como se muestra en la figura 41.1a. Cada línea de color corresponde a una longitud de onda discreta de luz emitida por el gas. Los tres espectros en la figura 41.1a muestran que las longitudes de onda contenidas en un espectro de línea dado son características del elemento que emite la luz. El espectro de línea más simple, que se describe con detalle, es el del átomo de hidrógeno. Ya que no hay dos elementos que tengan el mismo espectro de línea este fenómeno es una técnica práctica y sensible para identificar los elementos que están presentes en muestras desconocidas.

Otra forma de la espectroscopia, muy útil para analizar sustancias, es la **espectroscopia de absorción**. Un espectro de absorción se obtiene al pasar una luz blanca de una fuente continua a través de un gas o una solución diluida del elemento que se está analizando. Un espectro de absorción está constituido por una serie de líneas oscuras sobrepuestas al espectro continuo de la fuente de luz, como se muestra en la figura 41.1b para el hidrógeno atómico. Las longitudes de onda del espectro de absorción para un gas coinciden exactamente con las longitudes de onda del espectro de emisión para ese gas.

El espectro de absorción de un elemento tiene muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, el espectro continuo de la radiación emitida por el Sol debe pasar a través de los gases más fríos de la atmósfera solar. Las diferentes líneas de absorción observadas en el espectro solar han servido para identificar elementos en la atmósfera del Sol. En los primeros estudios del espectro solar, los científicos descubrieron que ciertas líneas no coincidían con ningún elemento conocido. ¡Se había descubierto un nuevo elemento! Este nuevo elemento fue llamado helio, por la palabra en griego para Sol, *helios*. El helio fue aislado posteriormente en los gases subterráneos de la Tierra.

Con esta técnica los científicos han podido examinar la luz desde otras estrellas, aunque nunca se han detectado elementos distintos de aquellos presentes en la Tierra. La espectroscopia de absorción también ha resultado útil para analizar la contaminación por metales pesados de la cadena alimenticia. Por ejemplo, la primera determinación de altos niveles de mercurio en el atún fue realizada mediante la espectroscopia de absorción atómica.



**Figura 41.1** (a) Espectros de líneas de emisión para el hidrógeno, el mercurio y el neón. (b) Espectro de absorción del hidrógeno. Observe que las líneas oscuras de absorción se presentan en las mismas longitudes de onda que las líneas de emisión del hidrógeno en (a). (K.W. Whitten, R.E. Davis, M.L. Peck y G.G. Stanley, *General Chemistry*, 7a. Edición, Belmont, CA, Brooks/Cole, 2004.)



Entre los años 1860 y 1885, por medio de mediciones espectroscópicas, los científicos acumularon gran cantidad de datos sobre las emisiones atómicas. En 1885, un maestro de escuela suizo, Johann Jacob Balmer (1825-1898), descubrió una ecuación empírica que predecía correctamente las longitudes de onda del rojo, verde, azul-violeta y violeta a partir del hidrógeno en la figura 41.a. La figura 41.2 muestra estas y otras líneas (en la región ultravioleta) en el espectro de emisión del hidrógeno. Las cuatro líneas visibles se presentan en las longitudes de onda de 656.3 nm, 486.1 nm, 434.1 nm y 410.2 nm. El conjunto completo de líneas se conoce como la **serie de Balmer**. Las longitudes de onda de estas líneas pueden describirse mediante la siguiente ecuación, la cual es una modificación realizada por Johannes Rydberg (1854-1919) a la ecuación original de Balmer:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (41.1)$$

en donde  $R_H$  es una constante conocida como la **constante de Rydberg**. Con un valor de  $1.097\,373\,2 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Los valores enteros de  $n$  variaban entre 3 y 6 para producir las cuatro líneas visibles entre 656.3 nm (rojo) y 410.2 nm (violeta). La ecuación 41.1 además describe las líneas ultravioletas del espectro en la serie de Balmer cuando  $n$  tiene un valor mayor a  $n = 6$ . El **límite de la serie** es la longitud de onda más corta en la serie y corresponde a  $n \rightarrow \infty$ , con una longitud de onda de  $4/R_H = 364.6 \text{ nm}$ , como se muestra en la figura 41.2. Las líneas espectrales observadas coinciden con la ecuación empírica, la ecuación 41.1, dentro de 0.1 por ciento.

Otras líneas espectrales del hidrógeno fueron encontradas después del descubrimiento de Balmer. Estos espectros se conocen como las series Lyman, Paschen y Brackett, en honor a sus respectivos descubridores. Fue fascinante descubrir que las longitudes de onda de las líneas en estas series se pueden calcular mediante el uso de las siguientes ecuaciones empíricas, que son idénticas en su forma a la ecuación 41.1:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (41.2)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (41.3)$$

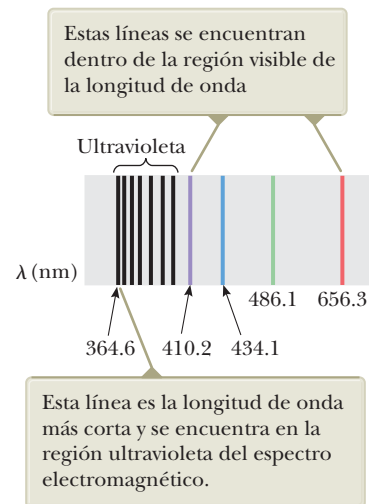
$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 5, 6, 7, \dots \quad (41.4)$$

No existe una base teórica para las ecuaciones anteriores; simplemente funcionan. En la sección 41.3 se explica el notable logro en la teoría del átomo del hidrógeno que hizo posible obtener una explicación para estas ecuaciones.

## 41.2 Los primeros modelos del átomo

Comencemos nuestro viaje para comprender por qué las ecuaciones 41.1 a 41.4 funcionan investigando varios modelos del átomo. En la época de Newton el átomo estaba modelado como una esfera diminuta, dura e indestructible. Si bien este modelo proporcionó una buena base para la teoría cinética de los gases (capítulo 20), fue necesario diseñar nuevos modelos cuando los experimentos revelaron la naturaleza eléctrica de los átomos. En 1897, J. J. Thomson estableció la razón carga a masa para los electrones. (Véase la figura 28.15 en la sección 28.3.) El año siguiente propuso un modelo que describe al átomo como una región en la cual una carga positiva está dispersa en el espacio, con electrones incrustados por toda la región, en forma muy similar a las semillas dentro de una sandía o las pasas dentro de un pan (figura 41.3, página 1108). De esta forma, el átomo como entidad sería eléctricamente neutro.

En 1911, Ernest Rutherford (1871-1937), junto con sus estudiantes Hans Geiger y Ernest Marsden, realizó un experimento que demostró que el modelo de Thomson podría no ser correcto. En este experimento proyectaron un haz de partículas alfa con carga positiva (núcleos de helio) hacia una delgada hoja de metal, como obje-



**Figura 41.2** Serie de Balmer de líneas espectrales para el átomo de hidrógeno, con varias líneas que indican la longitud de onda en nanómetros. (El eje de la longitud de onda horizontal no está a escala.)

◀ Serie de Lyman

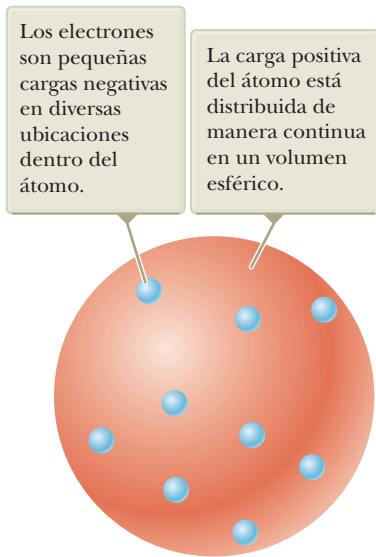
◀ Serie de Paschen

◀ Serie de Brackett

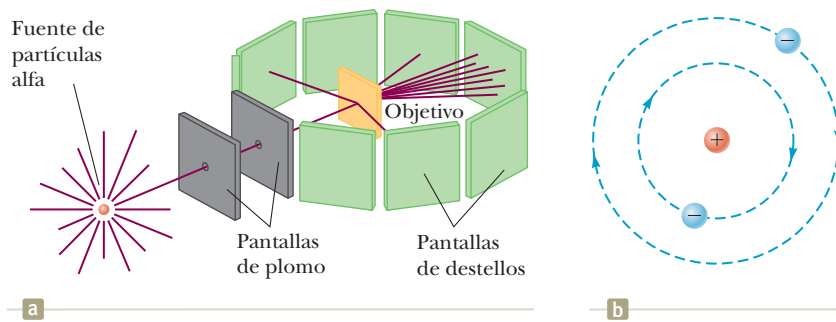


**Joseph John Thomson**  
Físico inglés (1856-1940)

Premio Nobel de física en 1906, Thomson es considerado el descubridor del electrón. Su estudio de la deflexión de los rayos catódicos (electrones) en un campo eléctrico inició el campo de la física de las partículas subatómicas con su extenso trabajo en la desviación de los rayos catódicos (electrones) en un campo eléctrico.



**Figura 41.3** Modelo del átomo de Thomson.

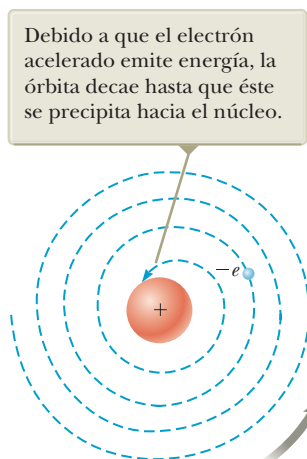


**Figura 41.4** (a) Técnica de Rutherford para observar la dispersión de partículas alfa de una delgada hoja objetivo. La fuente es una sustancia radiactiva que ocurre naturalmente, como el radio. (b) Modelo planetario del átomo de Rutherford.

tivo en la figura 41.4a. La mayor parte de las partículas atravesaron la hoja como si se tratara de espacio vacío, pero algunos de los resultados del experimento fueron sorprendentes. Muchas de las partículas desviadas de su trayectoria original se dispersaban en ángulos *muy grandes*. ¡Algunas partículas incluso eran desviadas hacia atrás, invirtiendo por completo la dirección de su trayectoria! Cuando Geiger informó a Rutherford que algunas de las partículas alfa eran dispersadas hacia atrás, Rutherford escribió: “Fue probablemente el evento más increíble que me ha ocurrido en la vida. Fue casi tan increíble como disparar una bala (de artillería) de 15 pulgadas sobre papel tisú, y que regresara para golpearte”.

Estas deflexiones tan grandes no eran predichas por el modelo de Thomson. De acuerdo con este modelo, la carga positiva de un átomo en la hoja de metal se dispersa en un volumen tan grande (todo el átomo) que no existe una concentración de cargas positivas lo suficientemente fuertes para causar deflexiones importantes de las partículas alfa con cargas positivas. Es más, los electrones tienen tan poca masa en comparación con las partículas alfa que tampoco producirían estas grandes dispersiones en grandes ángulos. Rutherford explicó sus sorprendentes resultados al desarrollar un nuevo modelo atómico, que suponía que la carga positiva en el átomo estaba concentrada en una región reducida en comparación con el tamaño de éste. Rutherford llamó a esta concentración de carga positiva el **núcleo** del átomo. Se hace la suposición de que todos los electrones pertenecientes al átomo se encuentran en un volumen relativamente grande fuera del núcleo. Para explicar la razón por la cual los electrones no son atraídos hacia el núcleo debido a la fuerza de atracción eléctrica, Rutherford los representó moviéndose en órbitas alrededor del núcleo de la misma forma en que los planetas giran alrededor del Sol (figura 41.4b). Por esta causa, con frecuencia el modelo se conoce como el modelo planetario del átomo.

Existen dos dificultades básicas con el modelo planetario de Rutherford. Como vio en la sección 41.1, un átomo emite (y absorbe) ciertas frecuencias características de radiación electromagnética y no otras; pero el modelo de Rutherford no puede explicar este fenómeno. La segunda dificultad es que los electrones de Rutherford están sometidos a la aceleración centrípeta. De acuerdo con la teoría del electromagnetismo de Maxwell, las cargas aceleradas de forma centrípeta con una frecuencia  $f$  deberían emitir ondas electromagnéticas con una frecuencia  $f$ . Por desgracia, este modelo clásico conduce a una predicción de autodestrucción cuando se le aplica al átomo. Al identificar el electrón y el protón como un sistema no aislado para la energía, la ecuación 8.2 se convierte en  $\Delta K + \Delta U = T_{ER}$ , donde  $K$  es la energía cinética del electrón,  $U$  es la energía potencial eléctrico del sistema de electrones-núcleo y  $T_{ER}$  representa la radiación electromagnética saliente. Como la energía sale del sistema, el radio de la órbita de electrones disminuye de manera constante (figura 41.5). El sistema es un sistema aislado para el momento angular, porque no hay par de torsión en el sistema. Por tanto, como el electrón se mueve más cerca del núcleo, la rapidez angular del electrón aumentará, al igual que el patinador girando en la figura 11.9 en la sección 11.4. Este proceso conduce a una frecuencia cada vez mayor de la radiación emitida y un colapso final del átomo a medida que el electrón se sumerge en el núcleo. Suponemos que los átomos no se autodestruyen, por lo que este es un problema grave con el modelo.



**Figura 41.5** Modelo clásico del núcleo del átomo predice que el átomo decae.

### 41.3 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno

Dada la situación descrita en el final de la sección 41.2, todo estaba listo para que Niels Bohr en 1913 presentara un nuevo modelo del átomo de hidrógeno que evita las dificultades del modelo planetario de Rutherford. La teoría de Bohr fue históricamente importante para el desarrollo de la física cuántica y parece explicar las series de líneas espectrales descritas por las ecuaciones 41.1 a 41.4. A pesar de que este modelo hoy se considera obsoleto y ha sido completamente remplazado por una teoría mecánica cuántica probabilística, es posible utilizar este modelo para desarrollar los conceptos de la cuantización de la energía y de la cantidad de movimiento angular como se aplica en sistemas a nivel atómico.

Bohr combinó las ideas de la teoría cuántica original de Planck, el concepto de Einstein del fotón, el modelo planetario de Rutherford del átomo y la mecánica newtoniana para llegar a un modelo semiclásico en términos de algunos postulados revolucionarios. El modelo estructural de la teoría de Bohr como se aplica al átomo de hidrógeno tiene las siguientes propiedades:

#### 1. Componentes físicos

El electrón se mueve en órbitas circulares alrededor del protón bajo la influencia de fuerza eléctrica de atracción, como se muestra en la figura 41.6. Esta estructura es la misma que en el modelo planetario de Rutherford.

#### 2. Comportamiento de los componentes

(a) Sólo ciertas órbitas del electrón son estables. Cuando está en alguno de estos **estados estacionarios**, como los llamaba Bohr, el electrón no emite energía en forma de radiación. En consecuencia, la energía total del átomo permanece constante y puede utilizarse la mecánica clásica para describir el movimiento del electrón. Este comportamiento está completamente en desacuerdo con la física clásica y la figura 41.5.

(b) La radiación es emitida por el átomo cuando el electrón hace una transición de una órbita inicial más energética a una órbita de menor energía. Esta transición no puede visualizarse ni tratarse de manera clásica. En particular, la frecuencia  $f$  del fotón emitida en la transición se relaciona con el cambio en la energía del átomo y no es igual a la frecuencia del movimiento orbital del electrón. La frecuencia de la radiación emitida se determina por la expresión de la conservación de energía

$$E_i - E_f = hf \quad (41.5)$$

donde  $E_i$  es la energía en el estado inicial,  $E_f$  es la energía en el estado final, y  $E_i > E_f$ . Además, la energía en un fotón incidente puede ser absorbida por el átomo, pero sólo si el fotón tiene una energía que iguale de manera exacta la diferencia en energía entre un estado permitido del átomo y un estado de energía superior. Una vez ocurrida la absorción, el fotón desaparece y el átomo hace una transición al estado de energía superior.

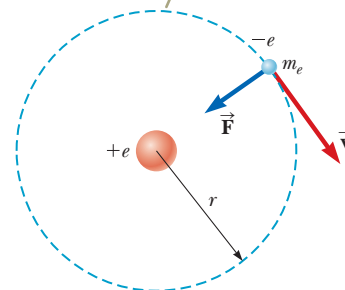
(c) El tamaño de la órbita permitida del electrón queda determinado por una condición impuesta sobre la cantidad de movimiento angular orbital del electrón: las órbitas permitidas son aquellas para las cuales la cantidad de movimiento angular orbital del electrón en relación con el núcleo se cuantiza y es igual a un múltiplo entero de  $\hbar = h/2\pi$ ,

$$m_e v r = n \hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.6)$$

donde  $m_e$  es la masa del electrón,  $v$  la rapidez del electrón en su órbita y  $r$  es el radio orbital.

Estos postulados son una mezcla de los principios establecidos e ideas completamente nuevas y no probadas en el tiempo. La propiedad 1, de la mecánica clásica, trata a los electrones en órbita alrededor del núcleo de la misma forma en que tratamos a un planeta en una órbita circular alrededor de una estrella, el uso de la partícula en el análisis de modelo de movimiento circular uniforme. La propiedad 2(a) en 1913, era una nueva idea radical que estaba completamente en desacuerdo con la

El electrón girando sólo puede estar en órbitas específicas de radios discretos.



**Figura 41.6** Diagrama que representa el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.



Library of Congress Prints and Photographs Division  
[LC-DIG-ggbain-35303]

#### Niels Bohr

*Físico danés (1885-1962)*

Bohr fue un activo participante en el temprano desarrollo de la mecánica cuántica y aportó gran parte de su estructura filosófica. Durante los años 20 y 30 dirigió el Instituto para Estudios Avanzados en Copenhague. El instituto fue un imán para los mejores físicos del mundo y proporcionó un foro para el intercambio de ideas. Cuando Bohr visitó Estados Unidos en 1939 para asistir a una conferencia científica, trajo noticias sobre la fisión del uranio, que había sido observada por Hahn y Strassman en Berlín. Los resultados fueron los cimientos del arma nuclear desarrollada en Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial. A Bohr se le otorgó el premio Nobel de física en 1922 por su investigación sobre la estructura de los átomos y la radiación emanada por éstos.

comprensión del electromagnetismo en el momento. ¡Bohr se deshizo del problema ilustrado en la figura 41.5 simplemente afirmando que el electrón que acelera, no irradia! La propiedad 2(b) representa el principio de conservación de la energía como se describe por el modelo de sistema no aislado para la energía. La propiedad 2(c) es otra nueva idea que no tenía ninguna base en la física clásica.

La energía potencial eléctrica del sistema que se muestra en la figura 41.6 está dada por la ecuación 24.13,  $U_E = k_e q_1 q_2 / r = -k_e e^2 / r$ , donde  $k_e$  es la constante de Coulomb y el signo negativo surge de la carga  $-e$  del electrón. Por tanto, la energía *total* del átomo, la cual está constituida por la energía cinética del electrón y la energía potencial del sistema, es

$$E = K + U_E = \frac{1}{2} m_e v^2 - k_e \frac{e^2}{r} \quad (41.7)$$

El electrón es una partícula en movimiento circular uniforme, así que la fuerza eléctrica  $k_e e^2 / r^2$  ejercida sobre el electrón debe ser igual al producto de su masa y su aceleración centrípeta ( $a_c = v^2 / r$ ):

$$\frac{k_e e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \rightarrow v^2 = \frac{k_e e^2}{m_e r} \quad (41.8)$$

De la ecuación 41.8, la energía cinética del electrón es

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{k_e e^2}{2r}$$

Al sustituir este valor de  $K$  en la ecuación 41.7, se obtiene la expresión para la energía total del átomo:<sup>1</sup>

$$E = -\frac{k_e e^2}{2r} \quad (41.9)$$

Debido a que la energía total es *negativa*, lo que indica un sistema electrón y protón unidos, es necesario adicionarle al átomo energía en la cantidad de  $k_e e^2 / 2r$  para remover el electrón y hacer que la energía total del sistema sea igual a cero.

Puede obtener una expresión para  $r$ , los radios de las órbitas permitidas, al resolver la ecuación 41.6 en función de  $v^2$  e igualando los resultados con la ecuación 41.8:

$$v^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e^2 r^2} = \frac{k_e e^2}{m_e r} \rightarrow r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e k_e e^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.10)$$

La ecuación 41.10 muestra que los radios de las órbitas permitidas tienen valores discretos: están cuantizados. El resultado es con base en la *suposición* de que el electrón sólo puede existir en ciertas órbitas permitidas determinadas por el entero  $n$  (propiedad 2(c) de Bohr).

La órbita con el radio más pequeño, llamado el **radio de Bohr**  $a_0$ , corresponde a  $n = 1$  y tiene el valor

Radio de Bohr ►

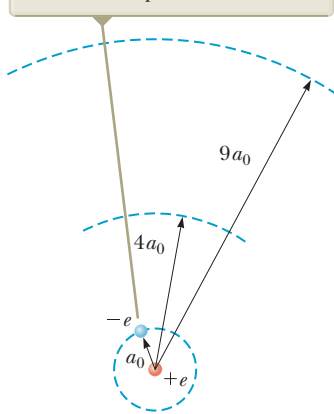
$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k_e e^2} = 0.0529 \text{ nm} \quad (41.11)$$

Al sustituir la ecuación 41.11 en la ecuación 41.10 se obtiene la expresión general para el radio de cualquier órbita en el átomo de hidrógeno:

$$r_n = n^2 a_0 = n^2 (0.0529 \text{ nm}) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.12)$$

La teoría de Bohr predice el valor del radio de un átomo de hidrógeno con un orden correcto de magnitud, en términos de mediciones experimentales. Este resultado fue un triunfo impactante para la teoría de Bohr. En la figura 41.7 se muestran a escala las primeras tres órbitas de Bohr.

El electrón se muestra en la órbita de más baja energía, pero puede ocupar cualquiera de la órbitas permitidas.



**Figura 41.7** Primeras tres órbitas del átomo de hidrógeno circulares que predice el modelo de Bohr.

Radios de órbitas de Bohr para el hidrógeno ►

<sup>1</sup> Compare la ecuación 41.9 con su contraparte gravitacional, la ecuación 13.19.

La cuantización de los radios de la órbita conduce a la cuantización de la energía. Al sustituir  $r_n = n^2 a_0$  en la ecuación 41.9, se obtiene

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left( \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.13)$$

Al insertar valores numéricos a la expresión, se tiene

$$E_n = -\frac{13.606 \text{ eV}}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.14)$$

El átomo sólo puede existir en estados con energías que satisfagan la ecuación 41.14. El nivel de energía más bajo permitido, el estado fundamental, tiene  $n = 1$  y una energía  $E_1 = -13.606 \text{ eV}$ . El siguiente nivel de energía, el primer estado excitado, tiene  $n = 2$  y una energía  $E_2 = E_1/2^2 = -3.401 \text{ eV}$ . La figura 41.8 es un diagrama de los niveles de energía, que muestra las energías de estos estados de energía discretos y los números cuánticos  $n$  correspondientes. El nivel más alto, corresponde a  $n = \infty$  (o  $r = \infty$ ) y  $E = 0$ .

Las energías de partícula en una caja (ecuación 40.14) aumenta con  $n^2$ , de modo que se separan más en energía conforme  $n$  aumenta. Por otra parte, las energías del átomo de hidrógeno (ecuación 41.14) varían inversamente con  $n^2$ , de modo que su separación en energía se vuelve más pequeña conforme  $n$  aumenta. La separación entre niveles de energía tiende a cero conforme  $n$  tiende a infinito y la energía tiende a cero.

La energía cero representa la frontera entre un sistema enlazado de un electrón y un protón y un sistema no enlazado. Si la energía del átomo se eleva del estado fundamental a cualquier energía mayor que cero, el átomo está **ionizado**. La energía mínima necesaria para ionizar el átomo en su estado fundamental se conoce como **energía de ionización**. Como puede verse en la figura 41.8, la energía de ionización del hidrógeno en el estado fundamental, de acuerdo con los cálculos de Bohr, es de 13.6 eV. Esto ha representado otro logro importante de la teoría de Bohr, ya que había sido medida la energía de ionización para el hidrógeno como 13.6 eV.

Las ecuaciones 41.5 y 41.13 pueden utilizarse para calcular la frecuencia del fotón emitido cuando el electrón hace una transición de una órbita exterior a una interior:

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_e e^2}{2a_0 h} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (41.15)$$

Debido a que la cantidad observada experimentalmente es la longitud de onda, resulta conveniente utilizar  $c = f\lambda$  y expresar la ecuación 41.15 en función de la longitud de onda:

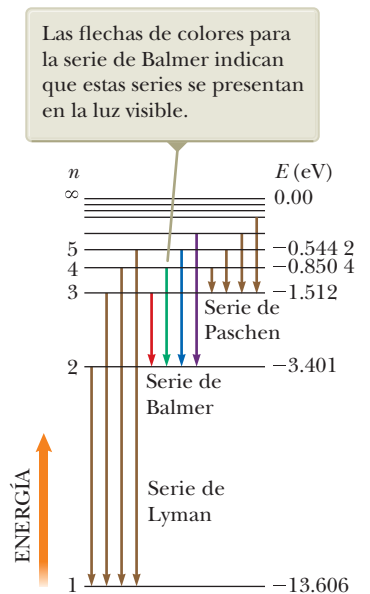
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{k_e e^2}{2a_0 hc} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (41.16)$$

Un hecho notable es que esta expresión, que es simplemente teórica, es *idéntica* a la forma general de las correspondencias empíricas descubiertas por Balmer y Rydberg, que aparecen en las ecuaciones 41.1 a 41.4,

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (41.17)$$

siempre que la constante  $k_e e^2/2a_0 hc$  sea igual a la constante de Rydberg, obtenida en forma experimental. No mucho después de que Bohr demostró que estas dos cantidades coinciden con una aproximación de 1%, este trabajo fue reconocido como el logro que coronaba su nueva teoría cuántica del átomo de hidrógeno. Además, Bohr demostró que todas las series espectrales del hidrógeno tienen una interpretación natural en su teoría. Las diferentes series corresponden a las transiciones a diferentes estados finales caracterizados por el número cuántico  $n_f$ . La figura 41.8 muestra el origen de estas series espectrales como transiciones entre niveles de energía.

Bohr extendió de inmediato su modelo para el hidrógeno a otros elementos, en los cuales se habían retirado todos los electrones, menos uno. Estos sistemas tienen



**Figura 41.8** Diagrama de los niveles de energía para el átomo de hidrógeno. Los números cuánticos están dados a la izquierda y las energías (en electrón volts) a la derecha. Las flechas verticales representan las cuatro transiciones de energía más bajas para cada una de las series espectrales mostradas.





### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 41.2

**El modelo de Bohr es fantástico, pero ...** El modelo de Bohr predice correctamente la energía de ionización para el hidrógeno y las características generales del espectro del hidrógeno, pero no toma en cuenta los espectros de átomos más complejos y es incapaz de predecir muchos de los detalles sutiles del espectro del hidrógeno y de otros átomos simples. Experimentos de dispersión muestran que el electrón en un átomo de hidrógeno no se mueve en un círculo plano alrededor del núcleo. Más bien, el átomo es esférico. La cantidad de movimiento angular del átomo en el estado fundamental es cero y no  $\hbar$ .

la misma estructura que el átomo de hidrógeno, con excepción de la carga nuclear, que es mayor. Se sospechaba la existencia de elementos ionizados, como  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$  y  $\text{Be}^{3+}$ , en atmósferas estelares ardientes, donde las colisiones atómicas con frecuencia tienen suficiente energía para eliminar por completo uno o más electrones atómicos. Bohr demostró que muchas líneas misteriosas observadas en los espectros del Sol y de varias otras estrellas no podían deberse al hidrógeno, sino que, como predijo correctamente en su teoría, las atribuía simplemente al helio ionizado. En general, el número de protones en el núcleo de un átomo se conoce como **número atómico** de los elementos y está dado por el símbolo  $Z$ . Para describir un solo electrón en órbita alrededor de un núcleo fijo de carga  $+Ze$ , la teoría de Bohr da

$$r_n = (n^2) \frac{a_0}{Z} \quad (41.18)$$

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left( \frac{Z^2}{n^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.19)$$

Si bien la teoría de Bohr era exitosa en cuanto a que coincidía con algunos resultados experimentales con el átomo de hidrógeno, también sufría de algunas inconsistencias. Una de las primeras indicaciones de que la teoría de Bohr necesitaba modificarse se presentó cuando se emplearon técnicas espectroscópicas mejoradas para examinar las líneas espectrales del hidrógeno. Se descubrió que muchas de las líneas de la serie de Balmer y otras no eran de ninguna manera líneas sencillas. Por el contrario, cada una de ellas era un grupo de líneas muy cercanas entre sí. Además, surgió una dificultad adicional cuando se observó que, en algunas situaciones, ciertas líneas espectrales sencillas se dividían en tres líneas muy cercanas entre sí cuando se colocaba a los átomos en un campo magnético poderoso. Los esfuerzos realizados para explicar estas y otras desviaciones del modelo de Bohr llevaron a modificaciones a la teoría y, con el tiempo, a una teoría de reemplazo que se explica en la sección 41.4.

## Principio de correspondencia de Bohr

Probablemente todavía esté incómodo con los postulados de Bohr. Por ejemplo, ¿por qué el electrón no irradia, postulado 2(a)? ¿Y el postulado 2(b)? Bueno, este es solo la ecuación 8.2 para esta situación. Pero, ¿de dónde viene el postulado 2(c)? En realidad, la cuantización del momento angular surge del principio de correspondencia de Bohr.<sup>2</sup>

Cuando se estudió la relatividad se determinó que la mecánica newtoniana es un caso especial de la mecánica relativista y sólo es utilizable cuando  $v$  es mucho menor que  $c$ . De manera similar, en la mecánica cuántica,

la física cuántica está de acuerdo con la física clásica cuando la diferencia entre los niveles cuantizados se desvanecen.

Este principio, establecido por primera vez por Bohr, se llama **principio de correspondencia**.

Por ejemplo, considere un electrón que gira alrededor del átomo de hidrógeno con  $n > 10\,000$ . Para estos valores tan grandes de  $n$ , las diferencias de energía entre niveles adyacentes tiende a cero y, por tanto, los niveles son prácticamente continuos. En consecuencia, el modelo clásico tiene una precisión razonable al describir el sistema para valores grandes de  $n$ . De acuerdo con la imagen clásica, la frecuencia de la luz emitida por el átomo es igual a la frecuencia de revolución de los electrones en sus órbitas alrededor del núcleo. Los cálculos muestran que para  $n > 10\,000$ , esta frecuencia difiere de la calculada por la mecánica cuántica en menos de 0.015%.

- E XAMEN RÁPIDO 41.1** Un átomo de hidrógeno está en su estado fundamental.
- Sobre el átomo inciden muchos fotones, cada uno con una energía de 10.5 eV.
  - ¿Cuál es el resultado? **(a)** el átomo es excitado a un nivel superior permitido, **(b)** el
  - átomo se ioniza o **(c)** los fotones pasan por el átomo sin interactuar.

<sup>2</sup>Para ver cómo surge el postulado 2(c) del principio de correspondencia, véase de J. W. Jewett, *Physics Begins With Another M... Mysteries, Magic, Myth, and Modern Physics* (Boston, Allyn & Bacon, 1996), pp. 353-356.

- E XAMEN RÁPIDO 41.2** Un átomo de hidrógeno hace una transición desde el nivel  $n = 3$  al nivel  $n = 2$ . Después hace una transición del nivel  $n = 2$  al nivel  $n = 1$ . ¿Qué transición da como resultado la emisión de un fotón con una longitud de onda más larga? (a) La primera transición, (b) la segunda transición o (c) ninguna, debido a que las longitudes de onda son las mismas en ambas transiciones.

### Ejemplo 41.1 Transiciones electrónicas en el hidrógeno

**(A)** El electrón en un átomo de hidrógeno hace una transición de un nivel de energía alto al nivel fundamental ( $n = 1$ ). Encuentre la longitud de onda y la frecuencia del fotón emitido si el nivel alto es  $n = 2$ .

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine al electrón en una órbita circular alrededor del núcleo, como en el modelo de Bohr en la figura 41.6. Cuando el electrón realiza una transición hacia un nivel estacionario inferior, emite un fotón con una frecuencia determinada y cae a una órbita circular de radio pequeño.

**Categorizar** Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 41.17 para obtener  $\lambda$ , con  $n_i = 2$  y  $n_f = 1$ :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R_H}{4}$$

$$\lambda = \frac{4}{3R_H} = \frac{4}{3(1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1})} = 1.22 \times 10^{-7} \text{ m} = 122 \text{ nm}$$

Use la ecuación 16.12 para encontrar la frecuencia del fotón:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.22 \times 10^{-7} \text{ m}} = 2.47 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Esta longitud de onda de 122 nm se encuentra en la región ultravioleta del espectro electromagnético.

**(B)** Supongamos que el átomo está inicialmente en el nivel más alto correspondiente a  $n = 5$ . ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido cuando el átomo cae de  $n = 5$  a  $n = 1$ ?

#### SOLUCIÓN

Use la ecuación 41.17, esta vez con  $n_i = 5$  y  $n_f = 1$ :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2} \right) = 0.96R_H$$

Resuelva para  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{1}{0.96R_H} = \frac{1}{(0.96)(1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1})} = 9.50 \times 10^{-8} \text{ m} = 95.0 \text{ nm}$$

This wavelength of 95.0 nm is deeper in the ultraviolet region of the spectrum than the photon in part (A).

**(C)** ¿Cuál es el radio de la órbita del electrón para un átomo de Rydberg para el que  $n = 5$ ?

#### SOLUCIÓN

Use la ecuación 41.12 para encontrar el radio de la órbita:

$$r_5 = (5)^2(0.0529 \text{ nm}) = 1.32 \text{ nm}$$

**(D)** ¿Qué tan rápido se mueve el electrón en un átomo de Rydberg para el que  $n = 5$ ?

#### SOLUCIÓN

Resuelva la ecuación 41.8 para la rapidez del electrón:

$$v = \sqrt{\frac{k_e e^2}{m_e r}} = \sqrt{\frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.32 \times 10^{-9} \text{ m})}}$$

$$= 4.38 \times 10^5 \text{ m/s}$$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si la radiación del átomo de Rydberg en la parte (B) se trata según la teoría clásica? ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación emitida por el átomo en el nivel  $n = 5$ ?

**Respuesta** Desde la perspectiva clásica, la frecuencia de la radiación emitida es la de la rotación del electrón alrededor del núcleo.

continúa



## 41.1 continuación

Calcule esta frecuencia con el periodo definido en la ecuación 4.22:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}$$

Sustituya el radio y la rapidez de las partes(C) y (D):

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{4.38 \times 10^5 \text{ m/s}}{2\pi(1.32 \times 10^{-9} \text{ m})} = 5.27 \times 10^{13} \text{ Hz}$$

Encuentre la longitud de onda de la radiación a partir de la ecuación 16.12:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{5.27 \times 10^{13} \text{ Hz}} = 5.70 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Tenga en cuenta que este valor de la longitud de onda es de dos órdenes de magnitud diferentes de los de la parte (B). El átomo de hidrógeno debe tratarse con la mecánica cuántica para proporcionar una longitud de onda que coincida con los resultados experimentales. En el problema 48, investigaremos los átomos de Rydberg, que son átomos de hidrógeno en estados con valores muy grandes de  $n$ . Para estos átomos, que son de tamaño casi macroscópico, las predicciones clásicas y cuánticas de la longitud de onda de una transición descrita por  $\Delta n = 1$  son muy similares.

## 41.4 Modelo cuántico del átomo de hidrógeno

En la sección anterior se describió la forma en que el modelo de Bohr considera al electrón una partícula en órbita alrededor del núcleo en niveles de energía cuantizados no radiantes. Este planteamiento lleva a un análisis que combina conceptos clásicos (por ejemplo órbitas circulares o radios fijos) y cuánticos (por ejemplo, energías cuantizadas y cantidad de movimiento angular). Si bien en algunos resultados experimentales el modelo coincide con éxito, no es capaz de explicar otros resultados. Estas dificultades se eliminan cuando se utiliza un modelo completamente cuántico que incluya la ecuación de Schrödinger, para describir el átomo de hidrógeno.

El procedimiento formal para resolver el problema del átomo de hidrógeno es sustituir la función de energía potencial adecuada en la ecuación de Schrödinger, encontrar soluciones a la ecuación y aplicar condiciones de frontera como se hizo para la partícula en una caja del capítulo 40. La función de energía potencial para el átomo de hidrógeno se debe a la interacción eléctrica entre el electrón y el protón (vea la sección 24.3):

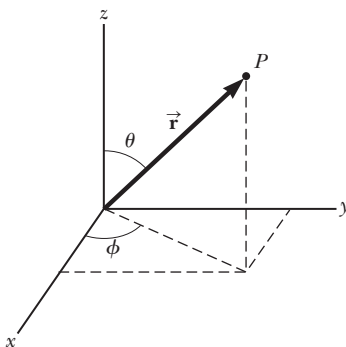
$$U_E(r) = -k_e \frac{e^2}{r} \quad (41.20)$$

donde  $k_e$  es la constante de Coulomb y  $r$  la distancia radial desde el protón (situado en  $r = 0$ ) al electrón.

El procedimiento matemático para el problema del átomo de hidrógeno es más complicado que para una partícula en una caja por dos razones principales: (1) el átomo es tridimensional y (2)  $U_E$  no es constante, sino que depende de la coordenada radial  $r$ . Si se amplía la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (ecuación 40.15), a coordenadas rectangulares tridimensionales, el resultado es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - k_e \frac{e^2}{r} \psi = E \psi$$

Debido a que en esta ecuación  $r$  es una combinación de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , es fácil resolver esta ecuación para el átomo de hidrógeno si las coordenadas rectangulares se convierten a coordenadas polares esféricas, una ampliación de las coordenadas polares planas presentadas en la sección 3.1. En coordenadas polares esféricas, un punto en el espacio se representa por las tres variables  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , donde  $r$  es la distancia radial desde el origen,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Con el punto representado al extremo de un vector de posición  $\vec{r}$ , como se muestra en la figura 41.9, la coordenada angular  $\theta$  define su posición angular respecto al eje  $z$ . Una vez proyectado el vector de posición sobre el plano  $xy$ ,



**Figura 41.9** Un punto  $P$  en el espacio se localiza por medio de un vector de posición  $\vec{r}$ . En coordenadas cartesianas, las componentes de este vector son  $x$ ,  $y$  y  $z$ . En coordenadas polares esféricas, el punto queda definido por  $r$ , es decir, la distancia desde el origen;  $\theta$ , el ángulo entre  $\vec{r}$  y el eje de las  $z$ , y  $\phi$ , el ángulo entre el eje de las  $x$  y una proyección de  $\vec{r}$  sobre el plano  $xy$ .

la coordenada angular  $\phi$  define la posición angular de la proyección (y por tanto del punto) respecto al eje  $x$ .

La conversión de la ecuación de Schrödinger tridimensional independiente del tiempo para  $\psi(x, y, z)$  a la forma equivalente para  $\psi(r, \theta, \phi)$  es simple pero muy tediosa, y aquí se omiten los detalles.<sup>3</sup> En el capítulo 40 se separó la dependencia con el tiempo de la dependencia con el espacio en la función general de la onda,  $\psi$ . En este caso del átomo de hidrógeno se separan las tres variables del espacio  $\psi(r, \theta, \phi)$  al escribir la función de onda como el producto de las funciones de cada variable individual:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) f(\theta) g(\phi)$$

De esta manera, la ecuación de Schrödinger, que es una ecuación diferencial parcial tridimensional puede transformarse en tres ecuaciones diferenciales ordinarias: una para  $R(r)$ , otra para  $f(\theta)$  y una más para  $g(\phi)$ . Cada una de estas funciones está sujeta a condiciones de frontera. Por ejemplo,  $R(r)$  debe permanecer finita conforme  $r \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$ , y  $g(\phi)$  debe tener el mismo valor que  $g(\phi + 2\pi)$ .

La función de energía potencial dada en la ecuación 41.20 sólo depende de la coordenada radial  $r$  y no de cualquiera de las coordenadas angulares; por tanto, sólo aparece en la ecuación para  $R(r)$ . Como resultado, las ecuaciones para  $\theta$  y  $\phi$  son independientes del sistema particular y sus soluciones son válidas para cualquier sistema que muestre rotación.

Cuando se le aplica el conjunto completo de condiciones de frontera a las tres funciones, se obtienen tres distintos números cuánticos para cada estado permitido del átomo de hidrógeno, uno para cada ecuación diferencial. Dichos números cuánticos están restringidos a valores enteros y deben corresponder a los tres grados de libertad independientes (tres dimensiones espaciales).

El primer número cuántico, asociado con la función radial  $R(r)$  de la función ondulatoria completa, es conocido como **número cuántico principal** y se le asigna el símbolo  $n$ . La ecuación diferencial para  $R(r)$  lleva a funciones que dan la probabilidad de encontrar el electrón a una cierta distancia radial del núcleo. En la sección 41.5 se describen dos de estas funciones de ondas radiales. A partir de las condiciones de frontera las energías de los estados permitidos para el átomo de hidrógeno se determinan al relacionar  $n$  como

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left( \frac{1}{n^2} \right) = -\frac{13.606 \text{ eV}}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.21)$$

¡Este resultado está perfectamente de acuerdo con el obtenido en la teoría de Bohr (ecuaciones 41.13 y 41.14)! Esta coincidencia es *extraordinaria* porque la teoría de Bohr y toda la teoría cuántica llegan al resultado desde puntos de partida completamente diferentes.

El **número cuántico orbital**, simbolizado como  $\ell$ , resulta de la ecuación diferencial para  $f(\theta)$  y se asocia con el movimiento angular orbital del electrón. El **número cuántico orbital magnético**  $m_\ell$  resulta de la ecuación diferencial para  $g(\phi)$ . Tanto  $\ell$  como  $m_\ell$  son enteros. En la sección 41.6 se amplía el análisis de estos dos números cuánticos y también se presenta un cuarto número cuántico (no entero), resultado de un tratamiento relativístico del átomo de hidrógeno.

La aplicación de las condiciones frontera de las tres partes de una función ondulatoria completa lleva a importantes relaciones entre los tres números cuánticos, como también a ciertas restricciones respecto a sus valores:

Los valores de  $n$  son enteros que pueden ir de 1 a  $\infty$

Una vez que se establece  $n$ , los valores de  $\ell$  son enteros que pueden ir de 0 a  $n - 1$

Una vez que se establece  $n$ , los valores de  $m_\ell$  son enteros que pueden ir de  $-\ell$  a  $\ell$

◀ Energías permitidas del átomo cuántico de hidrógeno

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 41.3

**Sólo en el caso del hidrógeno la energía depende de  $n$**  La sugerencia en la ecuación 41.21 de que la energía sólo depende del número cuántico  $n$  sólo es válida para el átomo de hidrógeno. Para átomos más complicados, se utilizan los mismos números cuánticos desarrollados aquí para el hidrógeno. Los niveles de energía para estos átomos dependerán principalmente de  $n$ , pero lo harán en menor grado de otros números cuánticos.

◀ Restricciones a los valores de los números cuánticos del átomo de hidrógeno

<sup>3</sup>Las descripciones de las soluciones a la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno están disponibles en libros de física moderna, como en R. A. Serway, C. Moses y C. A. Moyer, *Física moderna*, 3a. edición, Belmont, CA: Brooks/Cole, 2005.



**TABLA 41.1** Tres números cuánticos para el átomo de hidrógeno

Número cuántico	Nombre	Valores permitidos	Número de valores permitidos
$n$	Número cuántico principal	1, 2, 3, ...	Cualquier número
$\ell$	Número de orbital cuántico	0, 1, 2, ..., $n - 1$	$n$
$m_\ell$	Número de orbital magnético cuántico	$-\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \dots, \ell - 1, \ell$	$2\ell + 1$

**TABLA 41.2** Notaciones de capa y subcapas atómicas

$n$	Símbolo de capa
1	K
2	L
3	M
4	N
5	O
6	P

**TABLA 41.3** Notaciones de capa y subcapas atómicas

$\ell$	Símbolo de capa
0	$s$
1	$p$
2	$d$
3	$f$
4	$g$
5	$h$

Por ejemplo, si  $n = 1$ , sólo están permitidos  $\ell = 0$  y  $m_\ell = 0$ . Si  $n = 2$ ,  $\ell$  puede ser 0 o 1; si  $\ell = 0$ , entonces  $m_\ell = 0$ ; pero si  $\ell = 1$ , entonces  $m_\ell$  puede ser 1, 0 o  $-1$ . La tabla 41.1 resume las reglas para determinar los valores permitidos de  $\ell$  y  $m_\ell$  para una  $n$  determinada.

Por razones históricas, se dice que todos los estados que tengan el mismo número cuántico principal forman una **capa**. Las capas se identifican por las letras K, L, M, ..., que designan los estados para los cuales  $n = 1, 2, 3, \dots$ . De igual manera, se dice que todos los estados que tengan los mismos valores de  $n$  y de  $\ell$  forman una **subcapa**. Las letras<sup>4</sup>  $s, p, d, f, g, h, \dots$  se utilizan para designar las subcapas para las cuales  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Por ejemplo, el estado designado como  $3p$  tiene los números cuánticos  $n = 3$  y  $\ell = 1$ ; el estado  $2s$  tiene los números cuánticos  $n = 2$  y  $\ell = 0$ . Estas notaciones se resumen en las tablas 41.2 y 41.3.

Aquellos estados que violen las reglas proporcionadas en la tabla 41.1 no existen. (No satisfacen las condiciones de frontera de la función ondulatoria.) Por ejemplo, el estado  $2d$ , el cual tendría  $n = 2$  y  $\ell = 2$ , no puede existir, ya que el valor más alto permitido de  $\ell$  es  $n - 1$ , el cual, en este caso, es 1. Por tanto, para  $n = 2$ , los estados  $2s$  y  $2p$  están permitidos, pero  $2d, 2f, \dots$  no lo están. Para  $n = 3$ , las subcapas permitidas son  $3s, 3p$  y  $3d$ .

**E XAMEN RÁPIDO 41.3** ¿Cuántas subcapas posibles hay para el nivel  $n = 4$  del hidrógeno? (a) 5, (b) 4, (c) 3, (d) 2 o (e) 1.

**E XAMEN RÁPIDO 41.4** Cuando el número cuántico principal es  $n = 5$ , ¿cuántos valores diferentes de (a)  $\ell$  y (b)  $m_\ell$  son posibles?

### Ejemplo 41.2 El nivel $n = 2$ del hidrógeno

Para un átomo de hidrógeno determine los estados permitidos que correspondan al número cuántico principal  $n = 2$  y calcule las energías de estos estados.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Piense en el átomo en el estado cuántico  $n = 2$ . Sólo existe uno de tales estados en la teoría de Bohr, pero la explicación de la teoría cuántica permite más estados debido a los valores posibles de  $\ell$  y  $m_\ell$ .

**Categorizar** Los resultados se evalúan con las reglas explicadas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

A partir de la tabla 41.1, se encuentra que, cuando  $n = 2$ ,  $\ell$  puede ser 0 o 1. Encuentre los posibles valores de  $m_\ell$  en la tabla 41.1:

$$\ell = 0 \rightarrow m_\ell = 0$$

$$\ell = 1 \rightarrow m_\ell = -1, 0, \text{ o } 1$$

Así, se tiene un estado designado como estado  $2s$ , que se asocia con los números cuánticos  $n = 2$ ,  $\ell = 0$  y  $m_\ell = 0$ , y se tienen tres estados, designados como estados  $2p$ , para los cuales los números cuánticos son  $n = 2$ ,  $\ell = 1$ ,  $m_\ell = -1$ ;  $n = 2$ ,  $\ell = 1$ ,  $m_\ell = 0$ ; y  $n = 2$ ,  $\ell = 1$ ,  $m_\ell = 1$ .

<sup>4</sup>Las primeras cuatro letras provienen de las primeras clasificaciones de las líneas espectrales: nítida, principal, difusa y fundamental. Las letras restantes están en orden alfabético.



## 41.2 continuación

Encuentre la energía para estos cuatro estados con  $n = 2$  a partir de la ecuación 41.21:

$$E_2 = -\frac{13.606 \text{ eV}}{2^2} = -3.401 \text{ eV}$$

## 41.5 Las funciones de onda para el hidrógeno

En la sección 41.4, discutimos los números cuánticos y las energías permitidas para el átomo de hidrógeno que surge de la ecuación de Schrödinger. ¿Y las soluciones a la ecuación?: las funciones de onda.

Ya que la energía potencial del átomo de hidrógeno depende solamente de la distancia radial  $r$  entre el núcleo y el electrón, algunos de los estados permitidos para este átomo pueden ser representados mediante funciones de onda que sólo dependen de  $r$ . Para estos estados,  $f(\theta)$  y  $g(\phi)$  son constantes. La más simple de las funciones de onda para el hidrógeno es la que describe el estado  $1s$  y se conoce como  $\psi_{1s}$  o  $\psi(r)$ :

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \quad (41.22)$$

◀ Función de onda para el hidrógeno en su estado fundamental

en donde  $a_0$  es el radio de Bohr. Otra conexión notable entre la teoría de Bohr y la teoría cuántica. (En el problema 16, es posible verificar que esta función satisface la ecuación de Schrödinger.) Observe que  $\psi_{1s}$  tiende a cero conforme  $r$  tiende a  $\infty$  y se normaliza como se presenta (véase la ecuación 40.7). Además, como  $\psi_{1s}$  depende sólo de  $r$ , es *esféricamente simétrico*, esta simetría existe para todos los estados  $s$ .

Recuerde que la probabilidad de encontrar una partícula en cualquier región es igual a la integral de la densidad de probabilidad  $|\psi|^2$  para la partícula en toda la región. La densidad de probabilidad para el estado  $1s$  es

$$|\psi_{1s}|^2 = \left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right) e^{-2r/a_0} \quad (41.23)$$

Ya que en la posición  $r = 0$  se supone que el núcleo está fijo en el espacio, se asigna esta densidad de probabilidad a la cuestión de ubicar el electrón. De acuerdo con la ecuación 40.3 la probabilidad de encontrarlo en un elemento de volumen  $dV$  es de  $|\psi|^2 dV$ . Resulta conveniente definir la *función de densidad de probabilidad radial*  $P(r)$  como la probabilidad por unidad de distancia radial de encontrar el electrón en una capa esférica de radio  $r$  y de espesor  $dr$ . Por tanto,  $P(r)dr$  es la probabilidad de encontrar al electrón en esta capa. El volumen  $dV$  de esta capa, infinitesimalmente delgada, es igual a su área superficial  $4\pi r^2$ , multiplicada por el espesor de la capa  $dr$  (figura 41.10), de manera que la expresión de esta probabilidad es

$$P(r) dr = |\psi|^2 dV = |\psi|^2 4\pi r^2 dr$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad radial es

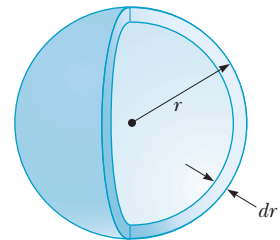
$$P(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2 \quad (41.24)$$

Al sustituir la ecuación 41.23 en la ecuación 41.24, se obtiene la función de densidad de probabilidad radial para el átomo del hidrógeno en su estado fundamental:

$$P_{1s}(r) = \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0} \quad (41.25)$$

◀ Densidad de probabilidad radial para el estado  $1s$  del hidrógeno

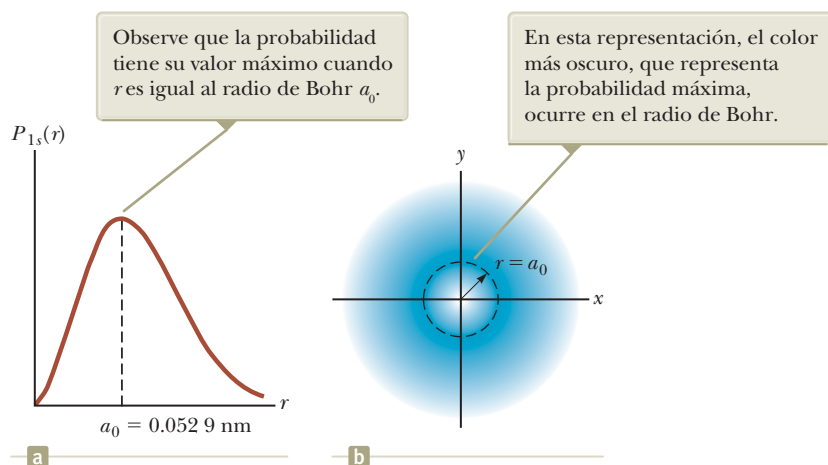
En la figura 41.11a (página 1118) aparece una gráfica de la función  $P_{1s}(r)$  contra  $r$ . El pico de la curva corresponde al valor más probable de  $r$  para este estado en particular. En el ejemplo 41.3 se muestra que este pico se presenta en el radio de Bohr, la posición radial del electrón en la cual el átomo de hidrógeno se encuentra en su estado fundamental según la teoría de Bohr, otra coincidencia relevante entre la teoría de Bohr y la teoría cuántica. Existen, por supuesto, grandes diferencias entre la teoría



**Figura 41.10** Una capa esférica con radio  $r$  y espesor infinitesimal  $dr$  tiene un volumen igual a  $4\pi r^2 dr$ .



**Figura 41.11** (a) La probabilidad de encontrar el electrón como una función de la distancia desde el núcleo del átomo de hidrógeno en el estado 1s (fundamental). (b) Sección transversal en el plano  $xy$  de la distribución de carga electrónica esférica del átomo de hidrógeno en su estado 1s.



de Bohr y la teoría cuántica. Por ejemplo, la teoría de Bohr afirma que el electrón se mueve en un círculo plano, bidimensional de radio fijo. La teoría cuántica no hace tal afirmación; el electrón puede moverse a cualquier lugar en el espacio tridimensional.

De acuerdo con la mecánica cuántica, el átomo no tiene una frontera definida con precisión, como lo sugiere la teoría de Bohr. La distribución de probabilidades de la figura 41.11a sugiere que la carga del electrón puede ser modelada como si se extendiera a través de una región del espacio, conocida comúnmente como *nube electrónica*. La figura 41.11b muestra la densidad de probabilidad del electrón en un átomo de hidrógeno en el estado 1s como una función de la posición en el plano  $xy$ . La parte más oscura de color azul de la distribución aparece en la posición  $r = a_0$ , lo cual corresponde al valor más probable de  $r$  para el electrón.

La noción de la nube de electrones nos hace sentir mejor sobre el postulado 2 (a) de Bohr. Era difícil imaginar que el electrón sometido a una aceleración centrípeta en una trayectoria circular no irradiara. Pero la nube de electrones en la teoría cuántica no tiene variación de tiempo en una frecuencia particular. La distribución de la densidad de probabilidad se fija en el tiempo, por lo que no se irradia.

### Ejemplo 41.3 El estado fundamental del hidrógeno

**(A)** Calcule el valor más probable de  $r$  para un electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** No imagine al electrón en órbita alrededor del protón como en la teoría de Bohr del átomo de hidrógeno. En vez de ello, imagine que la carga del electrón se dispersa en el espacio alrededor del protón en una nube de electrones con simetría esférica.

**Categorizar** Debido a que el enunciado del problema solicita el “valor más probable de  $r$ ”, este ejemplo se clasifica como un problema en que se usa el planteamiento cuántico. (En el átomo de Bohr, el electrón se mueve en una órbita con un valor *exacto* de  $r$ .)

**Analizar** El valor más probable de  $r$  corresponde al máximo en la gráfica de  $P_{1s}(r)$  contra  $r$ . El valor más probable de  $r$  se puede evaluar al hacer  $dP_{1s}/dr = 0$  y resolver para  $r$ .

Derive la ecuación 41.25 e iguale el resultado a cero:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{1s}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left[ \left( \frac{4r^2}{a_0^3} \right) e^{-2r/a_0} \right] = 0 \\ e^{-2r/a_0} \frac{d}{dr} (r^2) + r^2 \frac{d}{dr} (e^{-2r/a_0}) &= 0 \\ 2re^{-2r/a_0} + r^2 (-2/a_0) e^{-2r/a_0} &= 0 \\ (1) \quad 2r [1 - (r/a_0)] e^{-2r/a_0} &= 0 \end{aligned}$$

Igual a cero la expresión entre corchetes y resuelva para  $r$ :

$$1 - \frac{r}{a_0} = 0 \rightarrow r = a_0$$

## 41.3 continuación

**Finalizar** ¡El valor más probable de  $r$  es el radio de Bohr! La ecuación (1) también se satisface en  $r = 0$  conforme  $r \rightarrow \infty$ . Estos puntos son ubicaciones de la probabilidad *mínima*, que es igual a cero, como se vio en la figura 41.11a.

**(B)** Calcule la probabilidad de que el electrón en el estado fundamental del hidrógeno se encontrará afuera del radio de Bohr.

## SOLUCIÓN

**Analizar** La probabilidad se encuentra al integrar la función de densidad de probabilidad radial  $P_{1s}(r)$  para este estado desde el radio de Bohr  $a_0$  hasta  $\infty$ .

Establezca la integral con la ecuación 41.25:

$$P = \int_{a_0}^{\infty} P_{1s}(r) dr = \frac{4}{a_0^3} \int_{a_0}^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0} dr$$

Ponga la integral en forma adimensional al cambiar las variables de  $r$  a  $z = 2r/a_0$  y note que  $z = 2$  cuando  $r = a_0$  y que  $dr = (a_0/2) dz$ :

$$P = \frac{4}{a_0^3} \int_2^{\infty} \left(\frac{za_0}{2}\right)^2 e^{-z} \left(\frac{a_0}{2}\right) dz = \frac{1}{2} \int_2^{\infty} z^2 e^{-z} dz$$

Evalúe la integral usando integración parcial (véase el apéndice B.7):

$$P = -\frac{1}{2} (z^2 + 2z + 2) e^{-z} \Big|_2^{\infty}$$

Evalúe entre los límites:

$$P = 0 - \left[-\frac{1}{2}(4 + 4 + 2)e^{-2}\right] = 5e^{-2} = 0.677 \text{ o } 67.7\%$$

**Finalizar** Esta probabilidad es mayor que 50%. La razón para este valor es la asimetría en la función de densidad de probabilidad radial (figura 41.11a), que tiene más área a la derecha del pico que a la izquierda.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si se le pidiera el valor *promedio* de  $r$  para el electrón en el estado fundamental, en lugar del valor más probable?

**Respuesta** El valor promedio de  $r$  es el mismo que el valor esperado para  $r$ .

Use la ecuación 41.25 para evaluar el valor promedio de  $r$ :

$$\begin{aligned} r_{\text{prom}} = \langle r \rangle &= \int_0^{\infty} r P(r) dr = \int_0^{\infty} r \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0} dr \\ &= \left(\frac{4}{a_0^3}\right) \int_0^{\infty} r^3 e^{-2r/a_0} dr \end{aligned}$$

Evalúe la integral con la ayuda de la primera integral mencionada en la tabla B.6 del apéndice B:

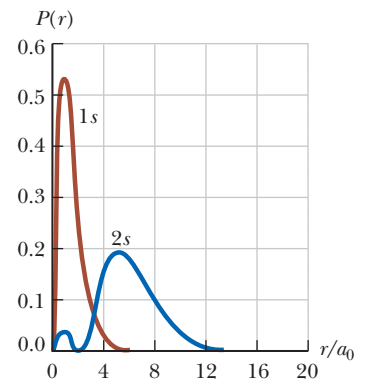
$$r_{\text{prom}} = \left(\frac{4}{a_0^3}\right) \left[\frac{3!}{(2/a_0)^4}\right] = \frac{3}{2} a_0$$

De nuevo, el valor promedio es mayor que el valor más probable debido a la asimetría en la función de onda, como se ve en la figura 41.11a.

La siguiente función de onda más sencilla del átomo de hidrógeno que sigue es la que corresponde al estado  $2s$  ( $n = 2$ ,  $\ell = 0$ ). La función de onda normalizada para este estado es

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} \quad (41.26)$$

De nuevo,  $\psi_{2s}$  depende sólo de  $r$  y es esféricamente simétrica. La energía que corresponde a este estado es  $E_2 = -(13.606 \text{ eV})/4 = -3.401 \text{ eV}$ . Este nivel de energía representa el primer estado excitado del hidrógeno. En la figura 41.12 aparece una gráfica de la función de densidad de probabilidad radial para este estado, en comparación con el estado  $1s$ . El trazo correspondiente al estado  $2s$  tiene dos picos. En este caso, el valor más probable corresponde a aquel valor de  $r$  que tenga el valor más elevado de  $P(r)$ , el cual está alrededor de  $5a_0$ , no  $4a_0$  como en el modelo de Bohr. Un electrón en el estado  $2s$  se encontrará a una distancia mucho mayor (en promedio) del núcleo que un electrón en el estado  $1s$ .



**Figura 41.12** Función de densidad de probabilidad radial con  $r/a_0$  para los estados  $1s$  y  $2s$  del átomo de hidrógeno.

Si observamos estados distintos de  $s$ , la situación se vuelve más complicada. Tenemos que incorporar las partes angulares de la función de onda. Por ejemplo, aquí hay un estado  $2p$  con  $m_\ell = \pm 1$ :

$$\psi_{2p} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 41.4

**Los números cuánticos describen un sistema** Es común asignar los números cuánticos a un electrón. Recuerde, sin embargo, que estos números cuánticos surgen de la ecuación de Schrödinger, que implica una función de energía potencial para el sistema del electrón y el núcleo. Por tanto, es más apropiado asignar los números cuánticos al átomo, pero es más popular asignarlos a un electrón. Seguimos este último uso porque es el más común.

## 41.6 Interpretación física de los números cuánticos

La energía de un estado particular en el átomo de hidrógeno depende del número cuántico principal,  $n$  (ecuación 41.21). Ahora, vea que los otros números cuánticos en el modelo atómico correspondan físicamente.

### El número cuántico orbital $\ell$

Para iniciar esta explicación conviene recordar brevemente el modelo atómico de Bohr. Si el electrón se mueve en un círculo con radio  $r$ , la magnitud de su cantidad de movimiento angular respecto al centro del círculo es igual a  $L = m_e v r$ . La dirección de  $\vec{L}$  es perpendicular al plano del círculo y está definida por la regla de la mano derecha. De acuerdo con la física clásica, la magnitud  $L$  de la cantidad de movimiento angular orbital puede tener cualquier valor. Sin embargo, el modelo de Bohr del hidrógeno postula que la magnitud de la cantidad de movimiento angular del electrón está restringida a múltiplos de  $\hbar$ ; es decir,  $L = n\hbar$ . Este modelo predice (de manera incorrecta) que el estado fundamental del hidrógeno tiene una cantidad de movimiento angular igual a 1.

Estas y otras dificultades se resuelven con el modelo mecánico cuántico del átomo, aunque debe olvidar la representación mental de un electrón que gira en una trayectoria circular bien definida. A pesar de la ausencia de esta representación, el átomo posee de hecho una cantidad de movimiento angular y se le seguirá llamando cantidad de movimiento angular orbital. De acuerdo con la mecánica cuántica, un átomo en un estado cuyo número cuántico principal es  $n$  puede tomar los siguientes valores *discretos* de la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital:<sup>5</sup>

Valores permitidos de  $L$  ►

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)} \hbar \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad (41.27)$$

Dados estos valores permitidos de  $\ell$ ,  $L = 0$  (correspondiente a  $\ell = 0$ ) es un valor aceptable de la magnitud de la cantidad de movimiento angular. El hecho de que en este modelo  $L$  pueda ser igual a cero sirve para recalcar las dificultades inherentes en cualquier intento por describir resultados con base en la mecánica cuántica en términos de un modelo simplemente similar a una partícula (clásico). Este resultado es inconsistente con el valor de  $L$  de la ecuación 41.6 en el modelo de Bohr, donde el momento angular del estado fundamental es el estado de  $L_{\text{estado inicial}} = \hbar$ . En la interpretación mecánica cuántica, la nube de electrones para el estado  $L = 0$  es esféricamente simétrica y no tiene un eje de rotación fundamental.

### El número cuántico magnético orbital $m_\ell$

Puesto que la cantidad de movimiento angular es un vector, su dirección debe especificarse. Recuerde del capítulo 28 que una espira de corriente tiene un momento magnético correspondiente  $\vec{\mu} = I\vec{A}$  (ecuación 28.16), donde  $I$  es la corriente en la espira y  $\vec{A}$  es un vector perpendicular a la espira cuya magnitud es el área de la misma. En la teoría de Bohr, el electrón que circula representa una espira de corriente. En el planteamiento mecánico cuántico del átomo de hidrógeno, se abandona el modelo de una órbita circular de la teoría de Bohr, aunque el átomo aún posee una cantidad de movimiento angular orbital. Por tanto, hay cierta sensación de que existe rotación del electrón alrededor del núcleo, para que esté presente un momento magnético debido a esta cantidad de movimiento angular.

<sup>5</sup>La ecuación 41.27 es un resultado directo de la solución matemática de la ecuación de Schrödinger y la aplicación de las condiciones frontera angulares. Sin embargo, este desarrollo, está fuera del alcance de este libro y no será presentado.

Según la mecánica cuántica, existen direcciones *discretas* permitidas para el vector del momento magnético  $\vec{\mu}$  respecto al vector del campo magnético  $\vec{B}$ . Estas direcciones discretas pueden detectarse aplicando un campo magnético  $\vec{B}$ . Esto es muy diferente de lo que presenta la física clásica, en que están permitidas todas las direcciones.

Debido a que el momento magnético  $\vec{\mu}$  del átomo puede relacionarse con el vector de la cantidad de movimiento angular  $\vec{L}$ , las direcciones discretas de  $\vec{\mu}$  llevan a que la dirección de  $\vec{L}$  esté cuantizada. Esta cuantización significa que  $L_z$  (la proyección de  $\vec{L}$  a lo largo del eje de las  $z$ ) puede asumir sólo valores discretos. El número cuántico orbital magnético  $m_\ell$  define los valores permitidos de la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular orbital, de acuerdo con la expresión siguiente<sup>6</sup>

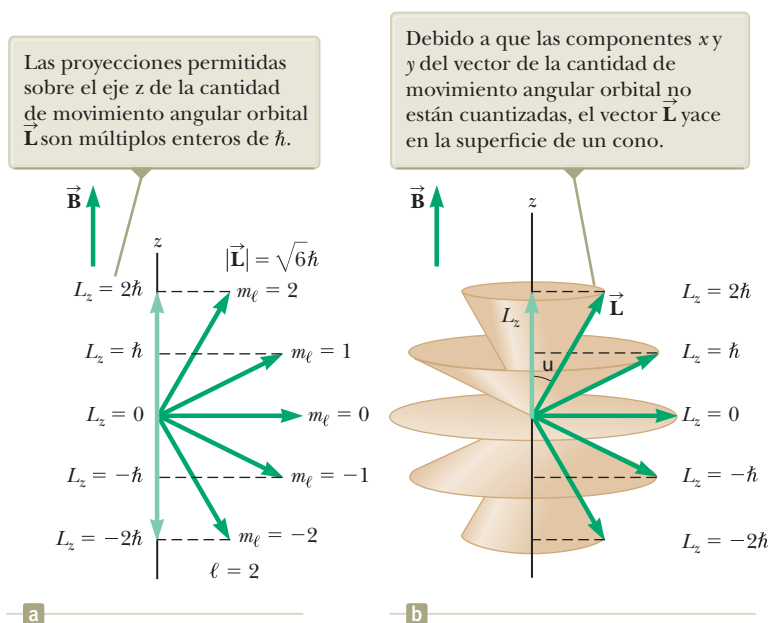
$$L_z = m_\ell \hbar \quad (41.28) \quad \leftarrow \text{Valores permitidos de } L_z$$

La cuantización de las orientaciones posibles de  $\vec{L}$  en función de un campo magnético externo se conoce a menudo como **cuantización espacial**.

Vea las posibles orientaciones de  $\vec{L}$  para un valor dado de  $\ell$ . Recuerde que  $m_\ell$  puede tener valores que van desde  $-\ell$  hasta  $\ell$ . Si  $\ell = 0$ , entonces  $L = 0$ ; el único valor permitido de  $m_\ell$  es  $m_\ell = 0$  y  $L_z = 0$ . Si  $\ell = 1$ , entonces  $L = \sqrt{2}\hbar$  a partir de la ecuación 41.27. Los valores posibles de  $m_\ell$  son  $-1, 0$  y  $1$ , así que la ecuación 41.28 nos dice que  $L_z$  puede ser  $-\hbar, 0$  o  $\hbar$ . Si  $\ell = 2$ , la cantidad de movimiento angular del orbital es  $\sqrt{6}\hbar$ . Entonces el valor de  $m_\ell$  puede ser  $-2, 1, 0, 1$  o  $2$ , correspondientes a los valores  $L_z$  de  $-2\hbar, \hbar, 0, \hbar$  o  $2\hbar$ , y así sucesivamente.

La figura 41.13a muestra lo que es comúnmente llamado **modelo vectorial**, que describe la cuantización espacial para el caso  $\ell = 2$ . Observe que  $\vec{L}$  no podrá alinearse nunca paralela o antiparalelamente a  $\vec{B}$  porque el valor máximo de  $L_z$  es  $\ell\hbar$ , que debe ser menor que la cantidad de movimiento angular magnitud de  $L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar$ . La cantidad de movimiento angular del vector  $\vec{L}$  se permite al ser perpendicular a  $\vec{B}$ , que en este caso corresponde a  $L_z = 0$  y  $m_\ell = 0$ .

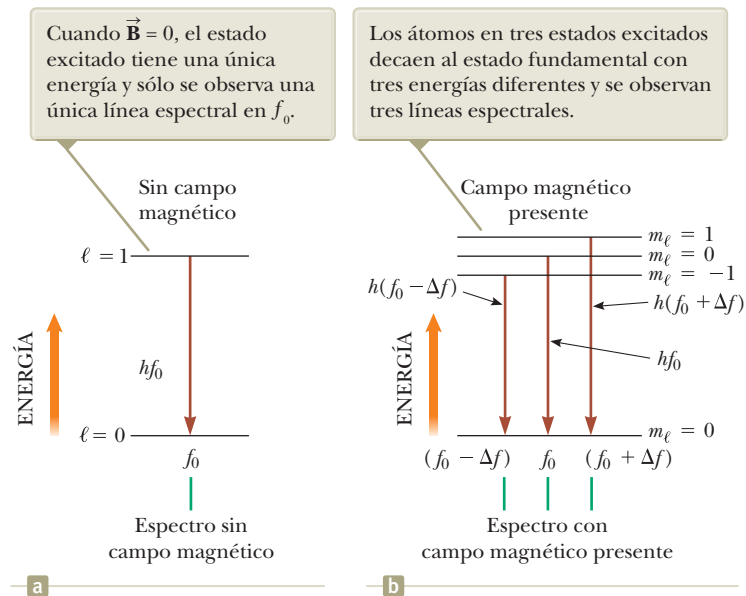
El vector  $\vec{L}$  no apunta en una dirección específica, a pesar de que su componente  $z$  está fija. Si se conociera el valor exacto de  $\vec{L}$ , las tres componentes  $L_x, L_y$  y  $L_z$  podrían definirse, lo que es inconsistente con el principio de incertidumbre. ¿Cómo se puede definir la magnitud y la componente  $z$  de un vector, sin definir completamente dicho vector? Para responder lo anterior, imagine que  $L_x$  y  $L_y$  están completamente sin especificar de tal manera que  $\vec{L}$  debe yacer en cualquier parte de la superficie de un cono que forma un ángulo  $\theta$  con el eje de las  $z$ , como se muestra en la figura 41.13b. Por la



<sup>6</sup>Igual que con la ecuación 41.27, la relación expresada en la ecuación 41.28 surge de la solución a la ecuación de Schrödinger y la aplicación de condiciones frontera.



**Figura 41.14** Efecto Zeeman. (a) Niveles de energía para los estados fundamental y primer estado excitado de un átomo de hidrógeno. (b) Cuando el átomo está inmerso en un campo magnético  $\vec{B}$ , el estado con  $\ell = 1$  se divide en tres estados. Los átomos en los estados excitados decaen al estado fundamental mediante la emisión de fotones con tres niveles diferentes de energía, lo que da origen a las líneas de emisión  $f_0$ ,  $f_0 + \Delta f$ , y  $f_0 - \Delta f$ , siendo  $\Delta f$  el corrimiento de la frecuencia de la emisión causada por el campo magnético.



figura, se ve que  $\theta$  también está cuantizada y que sus valores están definidos mediante la relación

$$\cos \theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \quad (41.29)$$

Direcciones permitidas del vector de cantidad de movimiento angular del orbital

Si el átomo es colocado en un campo magnético, la energía  $U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  (ecuación 28.19) es una energía adicional para el sistema átomo-campo más allá de lo descrito en la ecuación 41.21. Ya que las direcciones de  $\vec{\mu}$  están cuantizadas, existen energías totales discretas para el átomo correspondientes a diferentes valores de  $m_\ell$ . La figura 41.14a muestra una transición entre dos niveles atómicos en ausencia de un campo magnético. En la figura 41.14b, se aplica un campo magnético y el nivel superior con  $\ell = 1$  se divide en tres niveles que corresponden a las diferentes direcciones de  $\vec{\mu}$ . Existen ahora tres posibles transiciones desde la subcapa  $\ell = 1$  hasta la subcapa  $\ell = 0$ . Por tanto, en un conjunto de átomos, existen átomos en los tres estados y la única línea espectral de la figura 41.14a se dividirá en tres líneas espectrales. Este fenómeno es conocido como *el efecto Zeeman*.

El efecto Zeeman puede ser aplicado para medir campos magnéticos fuera de la Tierra. Por ejemplo, la división de las líneas espectrales en la luz a causa de los átomos de hidrógeno en la superficie del Sol puede utilizarse para calcular la magnitud del campo magnético en dicha ubicación. El efecto Zeeman es uno de entre muchos fenómenos que no pueden ser explicados con el modelo de Bohr, pero que se explican con éxito utilizando el modelo cuántico del átomo.

### Ejemplo 41.4 Cuantización espacial para el hidrógeno

Considere al átomo de hidrógeno en el estado  $\ell = 3$ . Calcule la magnitud de  $\vec{L}$ , los valores permitidos de  $L_z$ , y los correspondientes ángulos  $\theta$  que  $\vec{L}$  forma con el eje  $z$ .

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Considere la figura 41.13a, que es un modelo vectorial para  $\ell = 2$ . Dibuje tal modelo vectorial para  $\ell = 3$  para ayudarse con este problema.

**Categorizar** Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

## 41.4 continuación

Calcule la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital con la ecuación 41.27:

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)} \hbar = \sqrt{3(3 + 1)} \hbar = 2\sqrt{3} \hbar$$

Calcule los valores permitidos de  $L_z$  con la ecuación 41.28 con  $m_\ell = -3, -2, -1, 0, 1, 2$  y  $3$ :

$$L_z = -3\hbar, -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar$$

Calcule los valores permitidos de  $\cos \theta$  con la ecuación 41.29:

$$\cos \theta = \frac{\pm 3}{2\sqrt{3}} = \pm 0.866 \quad \cos \theta = \frac{\pm 2}{2\sqrt{3}} = \pm 0.577$$

$$\cos \theta = \frac{\pm 1}{2\sqrt{3}} = \pm 0.289 \quad \cos \theta = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$$

Encuentre los ángulos correspondientes de estos valores de  $\cos \theta$ :

$$\theta = 30.0^\circ, 54.7^\circ, 73.2^\circ, 90.0^\circ, 107^\circ, 125^\circ, 150^\circ$$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si el valor de  $\ell$  es un entero arbitrario? Para cualquier valor arbitrario de  $\ell$ , ¿cuántos valores de  $m_\ell$  se permiten?

**Respuesta** Para un valor dado de  $\ell$ , los valores de  $m_\ell$  varían de  $-\ell$  a  $+\ell$  en pasos de 1. Debido a eso, existen  $2\ell$  valores  $m_\ell$  distintos de cero para  $m_\ell$  (específicamente,  $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ ). Además, es posible un valor más de  $m_\ell = 0$ , para un total de  $2\ell + 1$  valores de  $m_\ell$ . Este resultado es crucial para comprender los resultados del experimento de Stern-Gerlach descrito más adelante respecto al espín.

## El número cuántico magnético de espín $m_s$

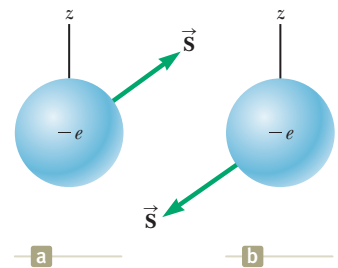
Los tres números cuánticos  $n$ ,  $\ell$  y  $m_\ell$  explicados hasta ahora se generan al aplicar las condiciones de frontera a las soluciones de la ecuación de Schrödinger, y se les asigna una interpretación física a cada uno de ellos. Ahora considere el **espín del electrón**, el cual *no viene* de la ecuación de Schrödinger.

En el ejemplo 41.2 resultan cuatro estados correspondientes a  $n = 2$ . En realidad, sin embargo, se presentan ocho estados. Los cuatro estados adicionales pueden explicarse al requerir un cuarto número cuántico para cada estado: el **número cuántico magnético del espín  $m_s$** .

La necesidad de este nuevo número cuántico surge debido a una rara propiedad observada en el espectro de ciertos gases, como el vapor del sodio. Una observación más cercana de una línea prominente en el espectro de emisión del sodio revela que la línea es, de hecho, dos líneas muy juntas llamadas *doblete*.<sup>7</sup> Las longitudes de onda de estas líneas se presentan en la región amarilla del espectro electromagnético a 589.0 nm y 589.6 nm. En 1925, cuando se observó este doblete por primera vez, no podía ser explicado con la teoría atómica existente. Para resolver este dilema, Samuel Goudsmit (1902-1978) y George Uhlenbeck (1900-1988), siguiendo una sugerencia hecha por el físico austriaco Wolfgang Pauli (1900-1958), propusieron el número cuántico de espín.

Para describir este nuevo número cuántico, es conveniente (pero técnicamente incorrecto) pensar en el electrón como si estuviera girando alrededor de su eje mientras órbita alrededor del núcleo, como se describió en la sección 29.6. Sólo existen dos direcciones para el espín del electrón, como se ilustra en la figura 41.15. Si la dirección del espín es como la que se muestra en la figura 41.15a, se dice que el electrón *gira hacia arriba*. Si la dirección del espín es como la que se muestra en la figura 41.15b, se dice que el electrón *gira hacia abajo*. En presencia de un campo magnético, la energía del electrón es ligeramente diferente para las dos direcciones del espín, y esta diferencia explica el doblete de sodio.

La descripción clásica del espín electrónico —como resultado de un electrón que gira— es incorrecta. La teoría más reciente indica que el electrón es una partícula puntual, sin amplitud espacial. Debido a eso no se puede considerar que el electrón esté girando. A pesar de esta dificultad conceptual, toda la evidencia experimental apoya la idea de que el electrón sí posee un cierto movimiento angular intrínseco que

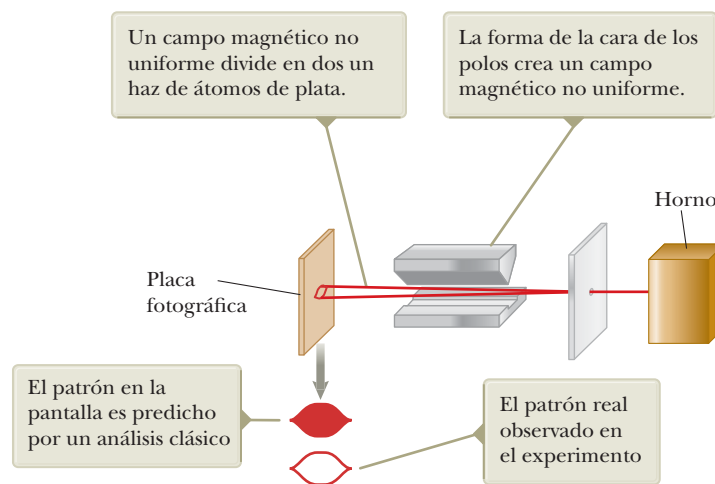


**Figura 41.15** El espín de un electrón puede ser (a) hacia arriba o (b) hacia abajo en relación con el eje de las  $z$  especificado. Como en el caso de la cantidad de movimiento angular orbital, las componentes  $x$  y  $y$  no están cuantizadas.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 41.5

**El electrón no está girando** Aunque el concepto de un electrón girando es conceptualmente útil, no debe tomarse en forma literal. El giro de la Tierra es una rotación mecánica. Por otra parte, el giro del electrón es sólo simplemente un efecto cuántico que le da al electrón una cantidad de movimiento angular como si estuviera girando físicamente.

<sup>7</sup>Este es un efecto Zeeman para el espín y es idéntico en su naturaleza al efecto Zeeman para la cantidad de movimiento angular orbital que se analizó en el ejemplo 41.4, excepto porque el campo magnético externo no se requiere. El campo magnético para este efecto Zeeman es interno al átomo y surge debido al movimiento relativo del electrón y del núcleo.



**Figura 41.16** Técnica utilizada por Stern y Gerlach para verificar la cuantización espacial.

puede describirse como el número cuántico magnético del espín. Paul Dirac (1902-1984) demostró que este cuarto número cuántico se origina en las propiedades relativistas del electrón.

En 1921, Otto Stern (1888-1969) y Walter Gerlach (1889-1979) realizaron un experimento que demostró la cuantización espacial. Sin embargo, sus resultados no estuvieron de acuerdo cuantitativamente con la teoría atómica que existía en ese momento. En su experimento, un haz de átomos de plata era enviado a través de un campo magnético no uniforme como se muestra en la figura 41.16. La interacción entre el campo magnético externo y el momento magnético de los átomos causa una desviación de los átomos en el haz desde su dirección inicial. El argumento clásico es como sigue. Si se elige la dirección  $z$  como la correspondiente a la no uniformidad máxima de  $\vec{B}$ , la fuerza magnética neta de los átomos está a lo largo del eje  $z$  y es proporcional a la componente del momento magnético  $\vec{\mu}$  del átomo en la dirección  $z$ . De manera clásica,  $\vec{\mu}$  puede tener cualquier orientación, de forma que el haz desviado se dispersa de manera continua. Sin embargo, según la mecánica cuántica, el haz desviado tiene un número entero de componentes discretos, y el número de componentes determina el número de valores posibles de  $\mu_z$ . Por tanto, ya que el experimento Stern-Gerlach mostró haces divididos, la cuantización espacial fue por lo menos verificada cualitativamente.

Por el momento, suponga que el momento magnético del átomo es causado por la cantidad de movimiento angular orbital. Debido a que  $\mu_z$  es proporcional a  $m_\ell$ , el número de valores posibles de  $\mu_z$  es  $2\ell + 1$ , como se determinó en la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 41.4. Además, ya que  $\ell$  es un entero, el número de valores posibles para  $\mu_z$  siempre es impar. Esta predicción no es consistente con la observación de Stern y Gerlach de dos componentes (un número *par*) en el haz desviado de átomos de plata.

En 1927, T. E. Phipps y J. B. Taylor repitieron el experimento Stern-Gerlach utilizando un haz de átomos de hidrógeno. Este experimento era importante, ya que involucraba un átomo que contenía un solo electrón en su estado fundamental, para el cual la teoría cuántica hace predicciones confiables. Recuerde que  $\ell = 0$  para el hidrógeno en su estado fundamental, así que  $m_\ell = 0$ . Por tanto, no se esperaba que el campo magnético desviara el haz, porque el momento magnético  $\vec{\mu}$  del átomo es igual a cero. Sin embargo, en el experimento Phipps-Taylor el haz se dividió de nuevo en dos componentes. Con base en este resultado, sólo se llega a una conclusión: algo, además del movimiento orbital del electrón, contribuye al momento magnético del átomo.

Como aprendió anteriormente, Goudsmit y Uhlenbeck propusieron que el electrón tiene un espín intrínseco con una cantidad de movimiento angular, además de su cantidad de movimiento angular orbital. En otras palabras, el movimiento angular total del electrón en un estado electrónico particular contiene tanto una contribución orbital  $\vec{L}$  como una contribución de espín  $\vec{S}$ . El resultado del experimento Phipps-Taylor confirmó la hipótesis de Goudsmit y Uhlenbeck.

En 1929 Dirac utilizó la forma relativista de la energía total de un sistema para resolver la ecuación de onda relativista para el electrón en un pozo de potencial. Su análisis confirmó la naturaleza fundamental de espín del electrón. (El espín, como la masa y la carga, es una propiedad *intrínseca* de una partícula independiente de su entorno.) Además, el análisis demostró que el espín<sup>8</sup> del electrón puede describirse mediante un solo número cuántico  $s$ , cuyo valor únicamente puede ser  $s = \frac{1}{2}$ . La cantidad de movimiento angular del espín del electrón *nunca cambia*. Esta idea contradice las leyes clásicas, que dictan que una carga giratoria disminuye su velocidad en la presencia de un campo magnético aplicado debido a la fem de Faraday que acompaña el campo variable (capítulo 30). Además, si el electrón es observado como una pelota giratoria de carga sometida a las leyes clásicas, partes cercanas a su superficie girarían con una rapidez mayor a la de la luz. Por tanto, la descripción clásica no debe llevarse demasiado lejos; por último, el espín de un electrón es una entidad cuántica que desafía cualquier descripción clásica simple.

Puesto que el espín es una forma de cantidad de movimiento angular, debe seguir las mismas reglas cuánticas que la cantidad de movimiento angular orbital. De acuerdo con la ecuación 41.27, la magnitud de la **cantidad de movimiento angular del espín  $\vec{S}$**  para el electrón es igual a

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \quad (41.30)$$

Al igual que el movimiento o cantidad de movimiento angular orbital  $\vec{L}$ , la cantidad de movimiento angular del espín  $\vec{S}$  es cuantizada en el espacio, como se describe en la figura 41.17. Puede tener dos orientaciones en relación al eje  $z$ , definido por el **número cuántico magnético del espín  $m_s = \pm\frac{1}{2}$** . Similar a la ecuación 41.28 para un momentum angular orbital, la componente  $z$  de un movimiento angular orbital es igual a

$$S_z = m_s\hbar = \pm\frac{1}{2}\hbar \quad (41.31)$$

Los dos valores  $\pm\hbar/2$  para  $S_z$  corresponden a las dos orientaciones posibles para  $\vec{S}$  que se muestran en la figura 41.17. El valor  $m_s = \pm\frac{1}{2}$  se refiere al caso del espín hacia arriba, y  $m_s = -\frac{1}{2}$  se refiere al caso del espín hacia abajo. Observe que las ecuaciones 41.30 y 41.31 no le permiten al espín vectorial yacer a lo largo del eje  $z$ . La dirección real de  $\vec{S}$  está en un ángulo relativamente grande respecto al eje  $z$ , como se muestra en las figuras 41.15 y 41.17.

El momento magnético del espín  $\vec{\mu}_{\text{espín}}$  del electrón está relacionado con su cantidad de movimiento angular del espín  $\vec{S}$  mediante la expresión

$$\vec{m}_{\text{espín}} = -\frac{e}{m_e}\vec{S} \quad (41.32)$$

donde  $e$  es la carga electrónica y  $m_e$  es la masa del electrón. Debido a que  $S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$ , la componente  $z$  del momento magnético del espín puede tener los valores

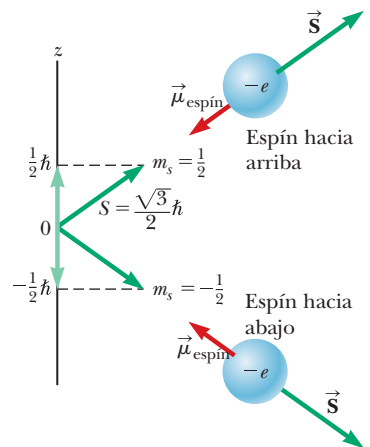
$$\vec{m}_{\text{espín},z} = \pm\frac{e\hbar}{2m_e} \quad (41.33)$$

Como aprendió en la sección 29.6, la cantidad  $e\hbar/2m_e$  es el magnetón de Bohr  $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$  J/T.

Actualmente, los físicos explican el experimento Stern-Gerlach y Phipp-Taylor como sigue. Los momentos magnéticos observados tanto para la plata como para el hidrógeno se deben sólo a la cantidad de movimiento angular de espín, sin contribución alguna de la cantidad de movimiento angular orbital. En el experimento Phipps-Taylor, un átomo de un solo electrón, como el hidrógeno, cuantiza el espín del electrón en el campo magnético de forma que la componente  $z$  de la cantidad de movimiento angular de espín es, ya sea  $\frac{1}{2}\hbar$  o  $-\frac{1}{2}\hbar$ , lo cual corresponde a  $m_s = \pm\frac{1}{2}$ . Los electrones con espín  $+\frac{1}{2}$  son desviados hacia abajo, y aquellos con espín  $-\frac{1}{2}$  son desviados hacia arriba. En el experimento de Stern-Gerlach, 46 de 47 electrones de

◀ Magnitud de la cantidad de movimiento angular del espín de un electrón

◀ Valores permitidos de  $S_z$



**Figura 41.17** La cantidad de movimiento angular del espín  $\vec{S}$  muestra cuantización espacial. Esta figura representa las dos orientaciones permitidas del vector de la cantidad de movimiento angular del espín  $\vec{S}$  y el momento magnético de espín  $\vec{\mu}_{\text{espín}}$  para una partícula de espín  $-\frac{1}{2}$ , como lo es el electrón.

<sup>8</sup>Los físicos utilizan comúnmente la palabra *espín* para hacer referencia al número cuántico de la cantidad de movimiento angular. Por ejemplo, es común decir: "El electrón tiene un espín de un medio".

**TABLA 41.4** Números cuánticos para el estado  $n = 2$  del hidrógeno

$n$	$\ell$	$m_\ell$	$m_s$	Subcapa	Capa	Número de estados en subcapa
2	0	0	$\frac{1}{2}$	2s	L	2
2	0	0	$-\frac{1}{2}$			
2	1	1	$\frac{1}{2}$	2p	L	6
2	1	1	$-\frac{1}{2}$			
2	1	0	$\frac{1}{2}$			
2	1	0	$-\frac{1}{2}$			
2	1	-1	$\frac{1}{2}$			
2	1	-1	$-\frac{1}{2}$			

un átomo de plata están en subniveles llenos con espines apareados. Por tanto, estos 46 electrones tienen una contribución neta cero al orbital y al momento angular de espín del átomo. El momento angular del átomo se debe sólo al electrón 47. Este electrón se encuentra en la subcapa 5s, así que no hay contribución de momento angular orbital. Como resultado, los átomos de plata tienen momento angular debido a sólo el espín de un electrón y se comportan de la misma manera en un campo magnético no uniforme como los átomos de hidrógeno en el experimento Phipps-Taylor.

El experimento Stern-Gerlach aportó dos resultados importantes: en primer lugar, confirmó el concepto de la cuantización del espacio; en segundo lugar, demostró que existe la cantidad de movimiento angular de espín, aun cuando esta propiedad no fue reconocida sino hasta cuatro años después de que se realizaron los experimentos.

Como ya se mencionó, existen ocho estados cuánticos que corresponden a  $n = 2$  en el átomo de hidrógeno, no cuatro como se encontró en el ejemplo 41.2. Cada uno de los cuatro estados en el ejemplo 41.2 realmente son dos estados debido a los dos valores posibles de  $m_s$ . La tabla 41.4 muestra los estados cuánticos que corresponden a estos ocho estados.

Los dos estados 2s del átomo de hidrógeno en la tabla 41.4 no tienen la misma energía. De hecho, se puede hacer una transición entre los dos estados. El resultado es la emisión de un fotón con una longitud de onda de 21.1 cm. Esta radiación de átomos de hidrógeno en el espacio es muy importante para fines astrofísicos. Vea el problema 22 para más información.

## 41.7 El principio de exclusión y la tabla periódica

Hemos visto que el estado de un átomo de hidrógeno está definido mediante cuatro números cuánticos:  $n$ ,  $\ell$ ,  $m_\ell$  y  $m_s$ . Como resultado, el número de estados disponibles para otros átomos también puede predecirse utilizando este mismo conjunto de números cuánticos. De hecho, estos cuatro números cuánticos sirven para describir todos los estados electrónicos de un átomo, sin importar el número de electrones en su estructura.

Para nuestro análisis de átomos con múltiples electrones, a menudo resulta más fácil asignar los números cuánticos a los electrones en el átomo, en vez de al átomo entero. La pregunta obvia que surge en este punto es: “¿Cuántos electrones pueden encontrarse en un estado cuántico en particular?”. Pauli respondió esta importante pregunta en 1925, en un enunciado conocido como el **principio de exclusión**:

No puede haber dos electrones en el mismo estado cuántico; por tanto, dos electrones del mismo átomo no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos.

Si este principio no fuera válido, el átomo podría emitir energía hasta que todos sus electrones se encontraran en el estado de energía más bajo posible, y en consecuencia el comportamiento químico de los elementos sería drásticamente diferente. La naturaleza, tal como la conocemos, no existiría.

En la realidad, se considera a la estructura electrónica de los átomos complejos como una sucesión de niveles llenos de energía en aumento. Como regla general, el



Keystone/Getty Images

### Wolfgang Pauli

Físico teórico austriaco (1900-1958)

Teórico de gran talento, Pauli hizo grandes contribuciones en muchas áreas de la física moderna, y obtuvo el reconocimiento público a los 21 años, mediante un artículo magistral que resume la relatividad y que todavía se considera una de las mejores y más completas introducciones sobre el tema. Otras de sus contribuciones principales fueron el descubrimiento del principio de exclusión, la explicación de la conexión entre el espín de las partículas y las estadísticas, la teoría sobre la electrodinámica cuántica relativista, la hipótesis del neutrino y la hipótesis del espín nuclear.



**TABLA 41.5** Estados cuánticos permitidos para un átomo hasta  $n = 3$ 

Capa	$n$	1			2			3							
Subcapa	$\ell$	0	0	1			0	1			2				
Orbital	$m_\ell$	0	0	1	0	-1	0	1	0	-1	2	1	0	-1	-2
	$m_s$	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓

orden para llenar las subcapas del átomo es como sigue. Una vez que una subcapa está llena, el siguiente electrón se coloca en la subcapa de menor energía que esté desocupada. Este comportamiento se comprende al reconocer que si el átomo no se encuentra en el nivel de energía más bajo disponible, emitiría energía hasta alcanzar este estado. Esta tendencia de un sistema cuántico para lograr el estado de energía más bajo es consistente con la segunda ley de la termodinámica discutida en el capítulo 22. La entropía del universo se incrementa por los emisores de fotones del sistema, por lo que la energía se propaga a lo largo de un mayor volumen de espacio.

Antes de explicar la configuración electrónica de diferentes elementos, es conveniente definir que un *orbital* es el estado atómico caracterizado por los números cuánticos  $n$ ,  $\ell$  y  $m_\ell$ . Según el principio de exclusión sólo puede haber dos electrones presentes en cualquier orbital. Uno de estos electrones tiene un número cuántico magnético de espín  $m_s = +\frac{1}{2}$  y el otro es  $m_s = -\frac{1}{2}$ . Ya que cada orbital está limitado a dos electrones, el número de electrones que pueden ocupar las diversas capas también está limitado.

La tabla 41.5 muestra los estados cuánticos permitidos para un átomo hasta  $n = 3$ . Las flechas que apuntan hacia arriba indican un electrón  $m_s = +\frac{1}{2}$  y las que apuntan hacia abajo indican que  $m_s = -\frac{1}{2}$ . La capa  $n = 1$  puede alojar sólo dos electrones, ya que  $m_\ell = 0$  significa que sólo está permitido un orbital. (Los tres números cuánticos que describen a este orbital son  $n = 1$ ,  $\ell = 0$  y  $m_\ell = 0$ .) La capa  $n = 2$  contiene dos subcapas, una para  $\ell = 0$  y otra para  $\ell = 1$ . La subcapa  $\ell = 0$  está limitada a dos electrones, porque  $m_\ell = 0$ . La subcapa  $\ell = 1$  contiene tres orbitales permitidos, que corresponden a  $m_\ell = 1, 0$  y  $-1$ . Ya que cada orbital puede alojar a dos electrones, la subcapa  $\ell = 1$  puede alojar seis electrones. Por tanto, la capa  $n = 2$  puede contener ocho electrones, como se muestra en la tabla 41.4. La capa  $n = 3$  tiene tres subcapas ( $\ell = 0, 1$  y  $2$ ) y nueve orbitales, y puede alojar hasta 18 electrones. En general, cada capa puede alojar hasta  $2n^2$  electrones.

El principio de exclusión puede ilustrarse al examinar el ordenamiento electrónico de unos cuantos de los átomos más ligeros. El número atómico  $Z$  de cualquier elemento es el número de protones en el núcleo de un átomo de este elemento. Un átomo neutro de este elemento tiene  $Z$  electrones. El hidrógeno ( $Z = 1$ ) sólo tiene un electrón, el cual, en el estado fundamental del átomo, puede describirse por cualquiera de dos conjuntos de números cuánticos  $n, \ell, m_\ell, m_s$ :  $1, 0, 0, \frac{1}{2}$ , o bien,  $1, 0, 0, -\frac{1}{2}$ . Esta configuración electrónica a menudo se expresa como  $1s^1$ . La notación  $1s$  se refiere al estado para el cual  $n = 1$  y  $\ell = 0$ , y el superíndice indica que en la subcapa  $s$  está presente un electrón.

El helio ( $Z = 2$ ) tiene dos electrones. En el estado fundamental, sus números cuánticos son  $1, 0, 0, \frac{1}{2}$  y  $1, 0, 0, -\frac{1}{2}$ . No existen otras combinaciones posibles de números cuánticos para este nivel y se dice que la capa K está llena. Esta configuración electrónica se expresa como  $1s^2$ .

El litio ( $Z = 3$ ) tiene tres electrones. En el estado fundamental, dos de éstos se encuentran en la subcapa  $1s$ . El tercero se encuentra en la subcapa  $2s$ , porque ésta es ligeramente menor en energía que la subcapa  $2p$ .<sup>9</sup> Por esto, la configuración electrónica del litio es  $1s^2 2s^1$ .

Las configuraciones electrónicas del litio y varios de los siguientes elementos aparecen en la figura 41.18. La configuración electrónica del berilio ( $Z = 4$ ), con sus cuatro electrones, es  $1s^2 2s^2$  y el boro ( $Z = 5$ ) tiene una configuración de  $1s^2 2s^2 2p^1$ .

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 41.6

**El principio de exclusión es más general** Una forma más general del principio de exclusión, discutido en el capítulo 44, establece que no hay dos fermiones en el mismo estado cuántico. Los fermiones son partículas con spin de medio integral ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ , y así sucesivamente).

<sup>9</sup>En una primera aproximación, la energía sólo depende del número cuántico  $n$ , como ya se explicó. Sin embargo, debido al efecto de la carga electrónica que aísla la carga nuclear, la energía también depende de  $\ell$  en átomos con muchos electrones. Estos efectos de blindaje se estudian en la sección 41.8.

Átomo	1s	2s	2p			Configuración electrónica	Átomo	1s	2s	2p			Configuración electrónica
Li						$1s^2 2s^1$	N						$1s^2 2s^2 2p^3$
Be						$1s^2 2s^2$	O						$1s^2 2s^2 2p^4$
B						$1s^2 2s^2 2p^1$	F						$1s^2 2s^2 2p^5$
C						$1s^2 2s^2 2p^2$	Ne						$1s^2 2s^2 2p^6$

**Figura 41.18** El llenado de los estados electrónicos debe obedecer tanto el principio de exclusión como a la regla de Hund.

El electrón  $2p$  del boro puede describirse mediante uno de los seis conjuntos igualmente probables de números cuánticos distintos que se mencionan en la tabla 41.4. En la figura 41.18 se muestra este electrón en el recuadro  $2p$  más a la izquierda con un espín hacia arriba, pero es igualmente probable que se encuentre en cualquiera de los recuadros  $2p$  con un espín ya sea hacia abajo o hacia arriba.

El carbono ( $Z = 6$ ) tiene seis electrones, lo cual da lugar a la pregunta de cómo se acomodan los dos electrones  $2p$ . ¿Se dirigen al mismo orbital con espines apareados ( $\uparrow\downarrow$ ) u ocupan dos orbitales diferentes con orbitales desapareados ( $\uparrow\uparrow$ )? Los datos experimentales demuestran que la configuración más estable (es decir, una con la energía más baja) es la última en la que los espines están desapareados. Por esta razón, los dos electrones  $2p$  del carbono y los tres electrones  $2p$  del nitrógeno ( $Z = 7$ ) tienen espines desapareados, como se muestra en la figura 41.18. La regla general que determina esta situación, conocida como la **regla de Hund**, establece que

**Regla de Hund** ▶

cuando un átomo tiene orbitales de igual energía, el orden de llenado por electrones es tal que el máximo número de electrones queda con espín desapareados.

Se presentan algunas excepciones a esta regla en elementos con subcapas que están casi llenas o a medio llenar.

En 1871, mucho antes de que fuera desarrollada la mecánica cuántica, el químico ruso Dmitri Mendeleev (1834-1907) hizo un esfuerzo inicial para encontrar algún orden en los elementos químicos. Intentaba organizar los elementos para una tabla de contenido de un libro que estaba escribiendo. Los organizó en una tabla semejante a la que aparece en la figura 41.19, de acuerdo con su masa atómica y sus semejanzas químicas. La primera tabla propuesta por Mendeleev contenía muchos espacios en blanco, y anunció con atrevimiento que los espacios estaban ahí sólo porque esos elementos aún no se habían descubierto. Al anotar las columnas en las que debían colocarse algunos de estos elementos faltantes, pudo hacer predicciones muy aproximadas de sus propiedades químicas. Durante los 20 años siguientes a este anuncio, la mayoría de estos elementos, de hecho, fueron descubiertos.

Los elementos de la **tabla periódica** (figura 41.19) están ordenados de forma que todos aquellos en una columna tienen propiedades químicas similares. Por ejemplo, considere los elementos en la última columna; todos ellos, a temperatura ambiente, son gases: He (helio), Ne (neón), Ar (argón), Kr (kriptón), Xe (xenón) y Rn (radón). La característica sobresaliente de todos estos elementos es que normalmente no toman parte en las reacciones químicas, es decir, no se unen fácilmente con otros átomos para formar moléculas. En consecuencia se les llama *gases inertes* o *gases nobles*. Todos los átomos en esta columna tienen una subcapa externa llena y es muy poco probable que abandonen un electrón o tomen un electrón de otro átomo. Por tanto, su comportamiento es inerte.

Es posible entender parcialmente ese comportamiento al observar la configuración electrónica de ellos en la figura 41.19. El comportamiento químico de un elemento depende de la capa más externa de electrones. La configuración electrónica del helio es  $1s^2$ ; la capa  $n = 1$  (que es la capa más externa por ser la única) está llena.

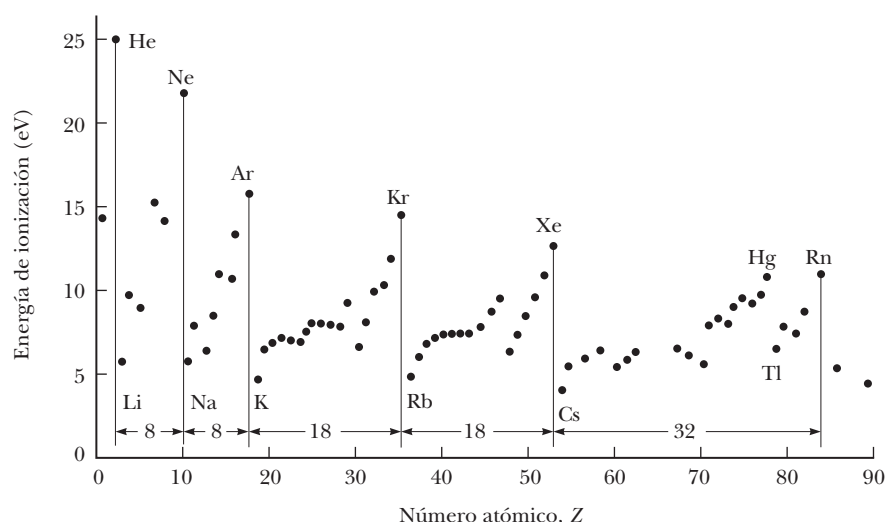
Grupo I	Grupo II	Elementos de transición										Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo 0	
H 1 $1s^1$																H 1 $1s^1$	He 2 $1s^2$	
Li 3 $2s^1$	Be 4 $2s^2$												B 5 $2p^1$	C 6 $2p^2$	N 7 $2p^3$	O 8 $2p^4$	F 9 $2p^5$	Ne 10 $2p^6$
Na 11 $3s^1$	Mg 12 $3s^2$												Al 13 $3p^1$	Si 14 $3p^2$	P 15 $3p^3$	S 16 $3p^4$	Cl 17 $3p^5$	Ar 18 $3p^6$
K 19 $4s^1$	Ca 20 $4s^2$	Sc 21 $3d^14s^2$	Ti 22 $3d^24s^2$	V 23 $3d^34s^2$	Cr 24 $3d^54s^1$	Mn 25 $3d^54s^2$	Fe 26 $3d^64s^2$	Co 27 $3d^74s^2$	Ni 28 $3d^84s^2$	Cu 29 $3d^{10}4s^1$	Zn 30 $3d^{10}4s^2$	Ga 31 $4p^1$	Ge 32 $4p^2$	As 33 $4p^3$	Se 34 $4p^4$	Br 35 $4p^5$	Kr 36 $4p^6$	
Rb 37 $5s^1$	Sr 38 $5s^2$	Y 39 $4d^15s^2$	Zr 40 $4d^25s^2$	Nb 41 $4d^45s^1$	Mo 42 $4d^55s^2$	Tc 43 $4d^55s^2$	Ru 44 $4d^75s^1$	Rh 45 $4d^85s^1$	Pd 46 $4d^{10}$	Ag 47 $4d^{10}5s^1$	Cd 48 $4d^{10}5s^2$	In 49 $5p^1$	Sn 50 $5p^2$	Sb 51 $5p^3$	Te 52 $5p^4$	I 53 $5p^5$	Xe 54 $5p^6$	
Cs 55 $6s^1$	Ba 56 $6s^2$	57–71*	Hf 72 $5d^26s^2$	Ta 73 $5d^36s^2$	W 74 $5d^46s^2$	Re 75 $5d^56s^2$	Os 76 $5d^66s^2$	Ir 77 $5d^76s^2$	Pt 78 $5d^96s^1$	Au 79 $5d^{10}6s^1$	Hg 80 $5d^{10}6s^2$	Tl 81 $6p^1$	Pb 82 $6p^2$	Bi 83 $6p^3$	Po 84 $6p^4$	At 85 $6p^5$	Rn 86 $6p^6$	
Fr 87 $7s^1$	Ra 88 $7s^2$	89– 103**	Rf 104 $6d^27s^2$	Db 105 $6d^37s^2$	Sg 106 $6d^47s^2$	Bh 107 $6d^57s^2$	Hs 108 $6d^67s^2$	Mt 109 $6d^77s^2$	Ds 110 $6d^87s^2$	Rg 111 $6d^97s^2$	Cn 112 $6d^{10}7s^2$	Nh 113 $7p^1$	Fl 114 $7p^2$	Mc 115 $7p^3$	Lv 116 $7p^4$	Ts 117 $7p^5$	Og 118 $7p^6$	
*Serie lantánidos		La 57 $5d^16s^2$	Ce 58 $5d^14f^16s^2$	Pr 59 $4f^36s^2$	Nd 60 $4f^46s^2$	Pm 61 $4f^56s^2$	Sm 62 $4f^66s^2$	Eu 63 $4f^76s^2$	Gd 64 $5d^14f^76s^2$	Tb 65 $5d^14f^86s^2$	Dy 66 $4f^{10}6s^2$	Ho 67 $4f^{11}6s^2$	Er 68 $4f^{12}6s^2$	Tm 69 $4f^{13}6s^2$	Yb 70 $4f^{14}6s^2$	Lu 71 $5d^14f^{14}6s^2$		
**Serie actínidos		Ac 89 $6d^17s^2$	Th 90 $6d^27s^2$	Pa 91 $5f^36d^17s^2$	U 92 $5f^36d^17s^2$	Np 93 $5f^46d^17s^2$	Pu 94 $5f^67s^2$	Am 95 $5f^77s^2$	Cm 96 $5f^76d^17s^2$	Bk 97 $5f^86d^17s^2$	Cf 98 $5f^{10}7s^2$	Es 99 $5f^{11}7s^2$	Fm 100 $5f^{12}7s^2$	Md 101 $5f^{13}7s^2$	No 102 $5f^{14}7s^2$	Lr 103 $5f^{14}6d^17s^2$		

**Figura 41.19** La tabla periódica de los elementos es una representación tabular organizada de los elementos que muestra su comportamiento químico periódico. Los elementos en una columna determinada tienen comportamiento químico similar. Esta tabla muestra el nombre del elemento, el número atómico y la configuración electrónica. En el apéndice C se proporciona una tabla periódica más completa.

Además, con esta configuración, la energía del átomo es considerablemente menor que la de una configuración en que el electrón esté en el siguiente nivel disponible, la subcapa  $2s$ . Ahora, observe la configuración electrónica del neón:  $1s^22s^22p^6$ . De nuevo, la capa más externa ( $n = 2$  en este caso), está llena y se presenta un espacio grande de energía entre la subcapa  $2p$  llena y el siguiente disponible, la subcapa  $3s$ . El argón tiene la configuración  $1s^22s^22p^63s^23p^6$ . Aquí sólo la subcapa  $3p$  está llena e, igualmente, existe un espacio grande de energía entre la subcapa  $3p$  llena y la siguiente disponible, la subcapa  $3d$ . Este patrón se presenta en todos los gases inertes: el kriptón tiene llena la subcapa  $4p$ , el xenón la subcapa  $5p$  y el radón la subcapa  $6p$ . Se han detectado muy pocos átomos de organesón para determinar su comportamiento químico.

Si considera la columna a la izquierda de los gases inertes en la tabla periódica, se encuentra un grupo de elementos llamados *halógenos*: flúor, cloro, bromo, yodo y ástato. A temperatura ambiente, el flúor y el cloro son gases, el bromo es líquido y el yodo y el astatinio son sólidos. En cada uno de estos átomos, a la subcapa más externa sólo le falta un electrón para estar llena. Como resultado, los halógenos son elementos químicamente muy activos que fácilmente aceptan un electrón de otro átomo para formar una capa cerrada. Los halógenos tienden a formar enlaces iónicos fuertes con átomos del otro extremo de la tabla periódica. (En el capítulo 42 se explica los enlaces iónicos.) El Tenesino puede tener un comportamiento químico diferente.

En el lado izquierdo de la tabla periódica, el Grupo I lo forman el hidrógeno y los *metales alcalinos* litio, sodio, potasio, rubidio, cesio y francio. Cada uno de estos átomos contiene un electrón en la subcapa exterior de una subcapa cerrada. Por tanto, estos elementos forman iones positivos con facilidad ya que el electrón solitario se enlaza

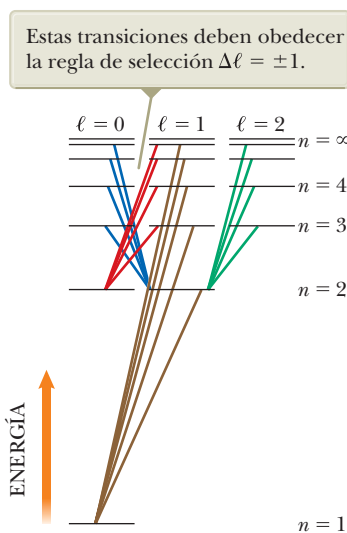


**Figura 41.20** Energía de ionización de los elementos en función del número atómico.

con relativamente poca energía y fácilmente es retirado. Debido a eso, los átomos de metales alcalinos son químicamente activos y forman enlaces fuertes con los átomos de halógenos. Por ejemplo, la sal de mesa NaCl, es la combinación de un metal alcalino y un halógeno. Como el electrón externo está enlazado débilmente, los metales alcalinos puros tienden a ser buenos conductores eléctricos. Debido a su alta actividad química, generalmente no se les encuentra en la naturaleza en forma pura.

Es interesante graficar la energía de ionización con el número atómico  $Z$ , como en la figura 41.20. Observe el patrón de  $\Delta Z = 2, 8, 8, 18, 18, 32$  en los diversos picos. Este patrón deriva del principio de exclusión, y ayuda a explicar por qué los elementos repiten sus propiedades químicas por grupos. Por ejemplo, los picos en  $Z = 2, 10, 18$  y  $36$  corresponden a los gases inertes helio, neón, argón y kriptón, respectivamente los cuales, como ya se mencionó, tienen todas sus capas exteriores llenas. Estos elementos tienen energías de ionización relativamente elevadas y un comportamiento químico similar.

¿Y las erupciones de dulces/refrescos en el "Imagine" de apertura? Normalmente, cuando se abre una botella de refresco, los átomos de dióxido de carbono salen del líquido para formar burbujas de gas, generalmente a lo largo de la superficie interna de la botella. Pero cuando se introduce el caramelo, se disuelve rápidamente, produciendo muchas partículas pequeñas que tienen superficies rugosas, creando una gran cantidad de nuevos sitios de nucleación para que el dióxido de carbono salga del líquido. Esta es principalmente una reacción física y, junto con las reacciones químicas entre el benzoato de potasio y el aspartame en un refresco dietético, el burbujeo del dióxido de carbono crea una espuma que sale violentamente de la abertura de la botella.



**Figura 41.21** Algunas transiciones electrónicas permitidas para el hidrógeno, representadas mediante las líneas de color.

## 41.8 Más sobre los espectros atómicos: el visible y el rayo X

En la sección 41.1 se explicó la observación y primeras interpretaciones de las líneas espectrales visibles de los gases. Estas líneas espectrales tienen su origen en las transiciones entre estados atómicos cuantizados. En las últimas tres secciones de este capítulo estudiará estas transiciones con mayor detalle.

En la figura 41.21 aparece un diagrama modificado de los niveles de energía para el hidrógeno. En este diagrama, los valores permitidos para  $\ell$  en cada capa están separados en forma horizontal. La figura 41.21 muestra solamente los estados hasta  $\ell = 2$ ; las capas desde  $n = 4$  hacia arriba tendrían más conjuntos de estados en el lado derecho, que no se muestran. Las transiciones en donde  $\ell$  no cambia no tienen mucha probabilidad de presentarse y se conocen como *transiciones prohibidas*. (Estas transiciones sí pueden presentarse, pero su probabilidad es muy baja en comparación con la probabilidad de transiciones "permitidas".) Las diversas líneas diagonales representan transiciones permitidas entre estados estacionarios. Cada vez que un átomo hace una transición desde un estado de energía superior a uno inferior, se

emite un fotón de luz. La frecuencia de este fotón es  $f = \Delta E/h$ , en donde  $\Delta E$  es la diferencia en energía entre los dos estados y  $h$  es la constante de Planck. Las **reglas de selección** para las *transiciones permitidas* son

$$\Delta \ell = \pm 1 \quad \text{y} \quad \Delta m_\ell = 0, \pm 1 \quad (41.34)$$

La figura 41.21 muestra que el momento angular orbital de un átomo *cambia* cuando se hace una transición a un estado de energía más bajo. Por tanto, el átomo solo es un sistema *no aislado* para el momento angular. Sin embargo, si tenemos en cuenta el sistema de fotones átomo, que debe ser un sistema *aislado* para el momento angular porque nada más interactúa con el sistema. El fotón involucrado en el proceso debe llevar al momento angular lejos del átomo cuando se produce la transición. De hecho, el fotón tiene un momento angular equivalente al de una partícula que tiene un espín de 1. Hemos determinado a lo largo de varios capítulos que un fotón tiene energía, cantidad de movimiento y momento angular, y cada uno de ellos se conserva en los procesos atómicos.

Recuerde, de la ecuación 41.19, que las energías permitidas para átomos de un electrón, así como iones, como el hidrógeno y el  $\text{He}^+$ , son

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left( \frac{Z^2}{n^2} \right) = -\frac{(13.6 \text{ eV})Z^2}{n^2} \quad (41.35)$$

Esta ecuación fue desarrollada a partir de la teoría de Bohr, pero también resulta útil como una primera aproximación a la teoría cuántica. En el caso de átomos con varios electrones, la carga nuclear positiva  $Ze$  es blindada en su mayor parte por la carga negativa de los electrones en las capas interiores. Por tanto, los electrones exteriores interactúan con una carga neta que es menor a la carga nuclear. La expresión para las energías permitidas en átomos con varios electrones tiene la misma forma que la ecuación 41.35, en donde  $Z$  es reemplazada por un número atómico efectivo  $Z_{\text{efec}}$ :

$$E_n = -\frac{(13.6 \text{ eV})Z_{\text{efec}}^2}{n^2} \quad (41.36)$$

donde  $Z_{\text{efec}}$  depende de  $n$  y  $\ell$ .

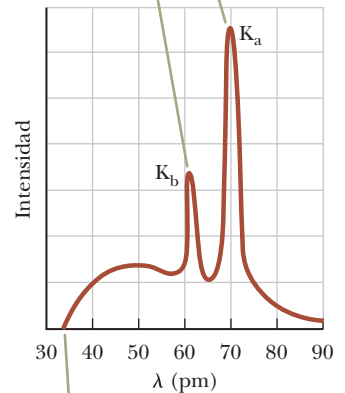
### Espectros de rayo X

Cuando electrones de alta energía, o cualquier otro tipo de partículas con carga, bombardean un objetivo de metal, se emiten rayos X. El espectro característico de rayos X está constituido, en lo general, por una banda ancha y continua que contiene una serie de líneas nítidas, como se muestra en la figura 41.22. En la sección 33.2 se mencionó que una carga eléctrica acelerada emite radiación electromagnética. Los rayos X de la figura 41.22 son el resultado de la disminución de velocidad de electrones de alta energía cuando inciden en el objetivo. Puede tomar varias interacciones con los átomos del objetivo de antes que el electrón pierda toda su energía cinética. La cantidad de energía cinética perdida en cada interacción puede variar desde cero hasta la energía cinética total del electrón. Por tanto, la longitud de onda de la radiación a causa de estas interacciones se encuentra dentro de un intervalo continuo desde algún valor mínimo hasta el infinito. Es esta disminución de velocidad general de los electrones la que produce la curva continua que se observa en la figura 41.22, la cual muestra la desaparición de los rayos X por debajo de una longitud de onda mínima que depende de la energía cinética de los electrones incidentes. La radiación del rayo X con su origen en la disminución de electrones se conoce como **bremstrahlung**, la expresión en alemán para “frenar la radiación”.

El frenado de alta energía extremo se puede utilizar para el tratamiento de los tejidos cancerosos. La figura 41.23 muestra una máquina que utiliza un acelerador lineal para acelerar los electrones hasta 18 MeV y aplastarlos sobre un objetivo de tungsteno. El resultado es un haz de fotones, de hasta un máximo de energía de 18 MeV, que es en realidad en el rango de rayos gamma en la figura 34.13. Esta radiación es dirigida al tumor en el paciente.

◀ Reglas de selección para las transiciones atómicas permitidas

Los picos representan *rayos x característicos*. Su apariencia depende del material que se utilice como *objetivo*.



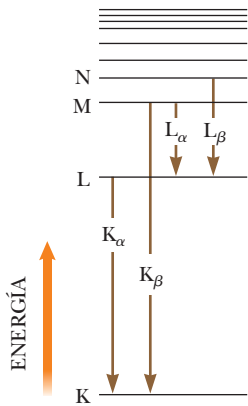
La curva continua representa la *bremstrahlung*. La longitud de onda más corta depende de la aceleración del voltaje.

**Figura 41.22** El espectro de rayo X de un objetivo metálico está constituido por un espectro continuo y ancho (*bremstrahlung*), seguido por varias líneas nítidas que se deben a los *rayos X característicos*. Los datos que se muestran fueron obtenidos al bombardear un objetivo de molibdeno con electrones de 37-keV.



**Figura 41.23** El *bremstrahlung* es generado por esta máquina y usado para tratar el cáncer en un paciente.





**Figura 41.24** Transiciones entre niveles altos y bajos de la energía atómica que dan lugar a los fotones de la radiografía de los átomos pesados cuando se bombardean con los electrones de gran energía.

Las líneas discretas en la figura 41.22, conocidas como **rayos X característicos** y que fueron descubiertas en 1908, tienen un origen distinto. Su origen se mantuvo sin explicación hasta que los detalles de la estructura atómica fueron comprendidos. El primer paso en la producción de rayos X característicos se presenta cuando un electrón incide con un átomo del objetivo. El electrón debe tener la suficiente energía para desalojar un electrón de las capas interiores del átomo. El hueco que se crea en la capa se llena cuando un electrón de un nivel superior baja al nivel que contiene el hueco. La existencia de líneas características en un espectro de rayos X es evidencia directa adicional de la cuantización de energía en sistemas atómicos.

Suponga que el electrón incidente ha desalojado un electrón atómico de la capa más interior, la capa K. Si el hueco es llenado por un electrón que desciende de la siguiente capa superior —la capa L— el fotón emitido tiene una energía correspondiente a la línea del rayo X característica  $K_\alpha$  en la curva de la figura 41.22. En esta notación, K se refiere al nivel final del electrón y el subíndice  $\alpha$ , la *primera* letra del alfabeto griego, se refiere al nivel inicial como el *primero* por encima del nivel final. La figura 41.23 muestra esta transición, como también otras analizadas abajo. Si el hueco en la capa K es llenado por un electrón que desciende de la capa M, se produce la línea  $K_\beta$  de la figura 41.22.

Otras líneas características del rayo X se forman cuando hay electrones que descienden de niveles superiores hacia huecos diferentes a los de la capa K. Por ejemplo, se producen líneas L cuando los huecos en el nivel L son ocupados por electrones que descienden de capas superiores. Se produce una línea  $L_\alpha$  cuando un electrón desciende de la capa M a la capa L, y se produce una línea  $L_\beta$  cuando hay una transición de la capa N a la capa L.

Aunque los átomos de varios electrones no pueden analizarse con exactitud utilizando ya sea el modelo de Bohr o la ecuación de Schrödinger, se puede aplicar la ley de Gauss, del capítulo 23, para realizar unas predicciones sorprendentemente exactas de las energías y longitudes de onda del rayo X. Considere un átomo de número atómico  $Z$ , en el que uno de los dos electrones en la capa K ha sido expulsado. Imagine que dibuja una esfera de Gauss justo dentro del radio más probable de los electrones L. El campo eléctrico en la posición de los electrones L es una combinación de los campos producidos por el núcleo, el electrón K solitario, los demás electrones L y los electrones exteriores. Las funciones de onda de los electrones exteriores son tales que los electrones tienen una alta probabilidad de estar más lejos del núcleo que los electrones L. Por tanto, los electrones exteriores tienen mayores probabilidades de encontrarse fuera de la superficie de Gauss que de encontrarse dentro y, en promedio, no contribuyen en gran medida al campo eléctrico desde la posición de los electrones L. La carga efectiva dentro de la superficie de Gauss es la carga nuclear positiva y una carga negativa propia del electrón K solitario. Si ignora las interacciones entre los electrones L, un solo electrón L se comporta como si experimentara un campo eléctrico propio de una carga  $(Z - 1)e$  encerrada en la superficie de Gauss. La carga nuclear es bloqueada por el electrón en la capa K, de manera que  $Z_{\text{efec}}$  en la ecuación 41.36 es igual a  $Z - 1$ . En capas de mayor nivel, la carga nuclear es bloqueada por todos los electrones en las capas interiores.

Ahora puede utilizar la ecuación 41.36 para estimar la energía asociada con un electrón en la capa L:

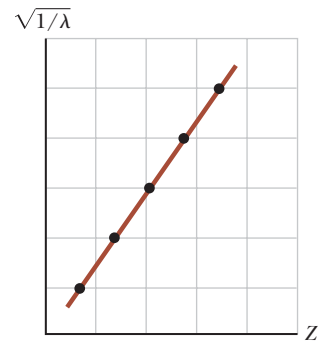
$$E_L = - \frac{(13.6 \text{ eV})(Z-1)^2}{2^2}$$

Después de que el átomo hace la transición, hay dos electrones en la capa K. Es posible aproximar la energía asociada a uno de estos electrones como la de un átomo con un solo electrón. (En realidad la carga nuclear es reducida en cierto modo por la carga negativa del otro electrón, pero se ignora este efecto.) Es decir,

$$E_K \approx -(13.6 \text{ eV})Z^2 \quad (41.37)$$

Como se muestra en el ejemplo 41.5, la energía del átomo con un electrón en una capa M puede ser calculada de la misma manera. Al tomar la diferencia de energía entre los niveles inicial y final, se puede calcular la energía y la longitud de onda del fotón emitido.

En 1914 Henry G. J. Moseley (1887-1915) trazó para una gran cantidad de elementos  $\sqrt{1/\lambda}$  en función de  $Z$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la línea  $K_\alpha$  de cada uno de los elementos. Descubrió que la gráfica forma una línea recta, como se muestra en la figura 41.25, que es consistente con los cálculos aproximados de los niveles de energía que proporciona la ecuación 41.37. A partir de esta gráfica, Moseley determinó los valores  $Z$  para elementos que aún no habían sido descubiertos y produjo una tabla periódica que coincidía por completo con las propiedades químicas conocidas de los elementos. Hasta que se realizó este experimento, los números atómicos habían sido sólo un lugar para los elementos que se editan en la tabla periódica, y los elementos se ordenaban de acuerdo con su masa.



**Figura 41.25** Gráfica de Moseley de  $\sqrt{1/\lambda}$  en función de  $Z$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la línea de rayos X  $K_\alpha$  de un elemento con número atómico  $Z$ .

**E XAMEN RÁPIDO 41.5** En un tubo de rayos X: conforme la energía de los electrones que golpean un objetivo metálico aumenta, la longitud de onda de los rayos X característicos, (a) aumenta, (b) disminuye, o bien (c) no cambia

**E XAMEN RÁPIDO 41.6** Verdadero o falso: ¿es posible que el espectro de un rayo X muestre el espectro continuo de rayos X sin la presencia de los rayos X característicos?

### Ejemplo 41.5 Estimación de la energía de un rayo X

Estime la energía del rayo X característico emitido de un objetivo de tungsteno con un electrón que cae de una capa M (estado  $n = 3$ ) a una vacía en la capa K (estado  $n = 1$ ). El número atómico del tungsteno es  $Z = 74$ .

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine un electrón acelerado que golpea un átomo de tungsteno y expulsa un electrón de la capa K ( $n = 1$ ). Subsecuentemente, un electrón en la capa M ( $n = 3$ ) cae para llenar el espacio vacío y la diferencia de energía entre los estados se emite como un fotón del rayo X.

**Categorizar** Los resultados se estiman con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 41.37 y  $Z = 74$  para tungsteno para estimarla energía asociada con el electrón en la capa K:

$$E_K \approx -(13.6 \text{ eV})(74)^2 = -7.4 \times 10^4 \text{ eV}$$

Use la ecuación 41.36 y que nueve electrones blindan la carga nuclear (ocho electrones en el estado  $n = 2$  y un electrón en el estado  $n = 1$ ) para estimar la energía de la capa M:

$$E_M \approx -\frac{(13.6 \text{ eV})(74 - 9)^2}{(3)^2} \approx -6.4 \times 10^3 \text{ eV}$$

Encuentre la energía del fotón del rayo X emitido:

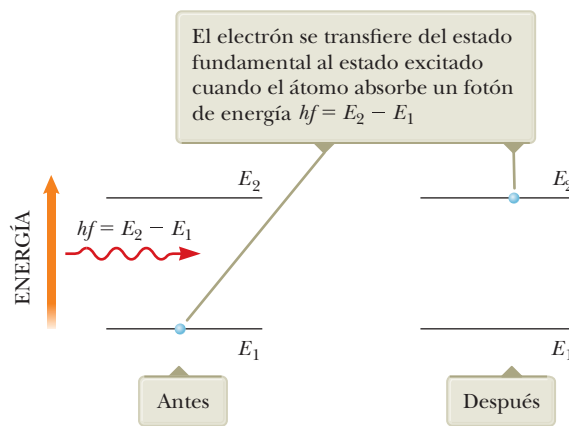
$$\begin{aligned} hf = E_M - E_K &\approx -6.4 \times 10^3 \text{ eV} - (-7.4 \times 10^4 \text{ eV}) \\ &\approx 6.8 \times 10^4 \text{ eV} = 68 \text{ keV} \end{aligned}$$

La consulta de tablas de rayos X muestra que las energías de transición M-K en el tungsteno varían de 66.9 keV a 67.7 keV, donde el intervalo de energías se debe a valores de energía ligeramente diferentes para estados de diferente  $\ell$ . En consecuencia, la estimación difiere del punto medio de este intervalo observado experimentalmente en más o menos 1%.

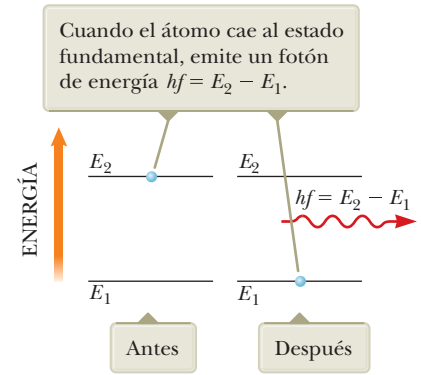
## 41.9 Transiciones espontáneas y estimuladas

Hemos visto que un átomo absorbe y emite radiación electromagnética sólo dentro de las frecuencias que corresponden a las diferencias de energía entre los estados permitidos. Ahora se examinan estos procesos con mayor detalle. Considere un átomo con los niveles de energía permitidos  $E_1, E_2, E_3, \dots$ . Cuando incide radiación sobre este átomo, sólo aquellos fotones cuya energía  $hf$  es igual a la energía de separación  $\Delta E$  entre dos niveles de energía pueden ser absorbidos por el átomo, como se representa en la figura 41.26 (página 1134). Este proceso es conocido como **absorción estimulada** porque el fotón estimula al átomo para realizar la transición hacia un nivel superior. A temperaturas ordinarias, la mayoría de los átomos en una muestra se encuentra en el estado fundamental. Si un recipiente contiene muchos átomos de un





**Figura 41.26** Absorción estimulada de un fotón.

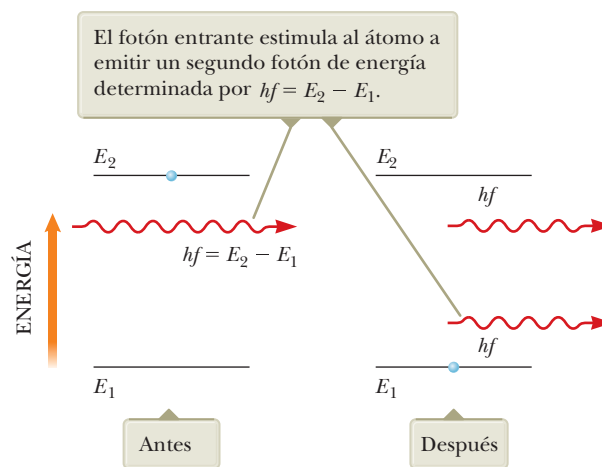


**Figura 41.27** Emisión espontánea de un fotón por un átomo que inicialmente está en el estado excitado  $E_2$ .

elemento gaseoso es iluminado con radiación a todas las frecuencias de fotones posibles (es decir, un espectro continuo), sólo aquellos fotones que tengan una energía  $E_2 - E_1$ ,  $E_3 - E_1$ ,  $E_4 - E_1$ , etcétera, serán absorbidos por los átomos. Como resultado de esta absorción, algunos átomos se elevarán a estados excitados.

Una vez que el átomo se encuentra en estado excitado, éste puede realizar la transición de regreso hacia un nivel de energía más bajo, emitiendo un fotón en el proceso, como aparece en la figura 41.27. Este proceso es conocido como **emisión espontánea**, porque sucede naturalmente, sin requerir de un evento que produzca dicha transición. Por lo general, un átomo permanece en un estado excitado durante sólo  $10^{-8}$  s.

Además de la emisión espontánea, también se presenta la **emisión estimulada**. Considere un átomo que se encuentra en el estado excitado  $E_2$ , como en la figura 41.28. Si el estado excitado es un *estado metaestable*, es decir, si su vida es mucho mayor que la vida representativa de  $10^{-8}$  s de los estados excitados, el intervalo de tiempo hasta que se presente la emisión espontánea será relativamente largo. Imagine que durante este intervalo un fotón con energía  $hf = E_2 - E_1$  incide en el átomo. Una posibilidad es que la energía del fotón sea suficiente para que éste ionice al átomo. Otra posibilidad es que la interacción entre el fotón incidente y el átomo provoque que éste vuelva al estado fundamental<sup>10</sup> y, por tanto, emita un segundo fotón con energía  $hf = E_2 - E_1$ . En este proceso, el fotón incidente no es absorbido; Por tanto, después de la emisión estimulada, existen dos fotones con energía idéntica: el fotón incidente y el



**Figura 41.28** Emisión estimulada de un fotón por un fotón entrante de energía  $hf = E_2 - E_1$ . Inicialmente, el átomo está en el estado excitado.

<sup>10</sup> Este fenómeno es fundamentalmente a causa de *resonancia*. El fotón a punto de llegar tiene una frecuencia y activa al sistema del átomo a esa frecuencia. Ya que la frecuencia de impulso coincide con la asociada con la transición entre estados (una de las frecuencias naturales del átomo), se produce una gran respuesta: el átomo realiza la transición.

fotón emitido. Los dos están en fase y viajan en la misma dirección, que es una consideración importante en el caso de los láseres, explicados a continuación.

## 41.10 Láseres

En esta sección se explora la naturaleza de la luz láser y la gran diversidad de aplicación de los láseres en esta sociedad tecnológica. Las propiedades principales del láser que lo hacen tan útil para las aplicaciones tecnológicas, son las siguientes:

- La luz de láser es coherente. Los rayos individuales de luz en un haz láser conservan una correspondencia de fase fija entre sí. La luz de láser es monocromática.
- La luz de un haz láser tiene un intervalo muy limitado de longitudes de onda.
- La luz de láser tiene un pequeño ángulo de divergencia. El haz se dispersa muy poco, incluso en grandes distancias.

A fin de comprender el origen de estas propiedades, combine lo que ha aprendido en este capítulo sobre los niveles de energía atómicos con algunos requerimientos especiales de los átomos que emiten luz láser.

Ya se ha descrito cómo un fotón incidente puede provocar transiciones de energía atómica, ya sea hacia arriba (absorción estimulada) o hacia abajo (emisión estimulada). Los dos procesos son igualmente probables. Cuando hay luz incidente sobre un grupo de átomos, usualmente se presenta una absorción neta de energía, porque cuando el sistema se encuentra en equilibrio térmico, existen muchos más átomos en el estado fundamental que en estados excitados. Sin embargo, cuando se invierte la situación de forma que más átomos se encuentren en un estado excitado que en el estado fundamental, puede resultar una emisión neta de fotones. Esta condición se conoce como **inversión de población**.

La inversión de población es de hecho, el principio fundamental que subyace a la operación de un láser (siglas de *light amplification by stimulated emission of radiation*, amplificación de luz por emisión estimulada de radiación). Su nombre completo indica uno de los requisitos para que exista luz láser: debe presentarse un proceso de emisión estimulada para lograr la acción láser.

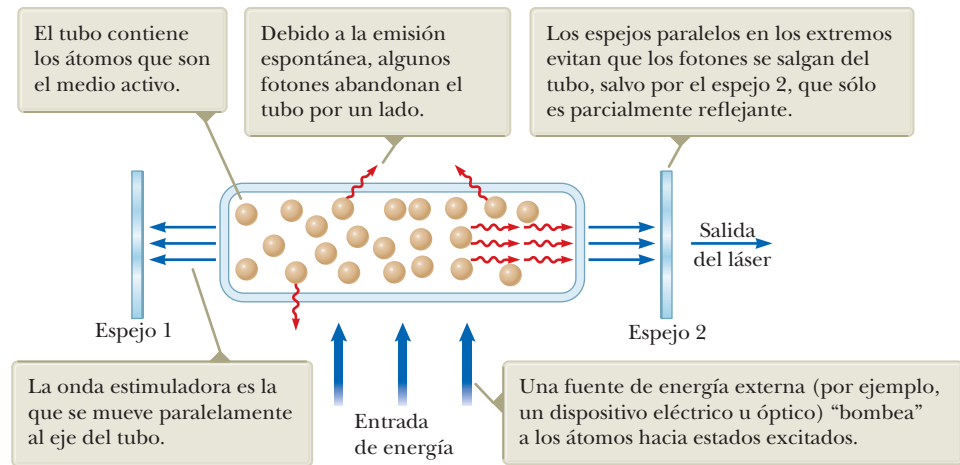
Considere los dos fotones que viajan en un material después de la emisión estimulada discutida con respecto a la figura 41.28. Estos fotones pueden estimular a otros átomos a emitir fotones en una cadena de procesos similares. Los muchos fotones producidos de esta manera son la fuente de la luz intensa y coherente en un láser.

A fin de que la emisión estimulada dé como resultado una luz láser, debe tener una acumulación de fotones en el sistema. Las tres condiciones siguientes deben ser satisfechas para lograr esta acumulación:

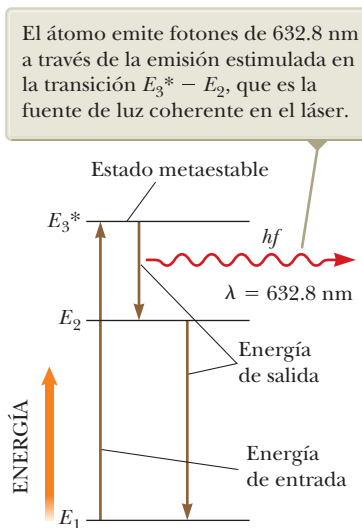
- El sistema debe estar en un estado de inversión de población, debe haber más átomos en un estado excitado que átomos en el estado fundamental. Esto debe ser verdadero porque el número de fotones emitidos debe ser mayor que el número de fotones absorbidos.
- El estado excitado del sistema debe ser un *estado metaestable*, lo que significa que su vida debe ser larga en comparación con las vidas comúnmente breves de los estados excitados, los cuales duran por lo general  $10^{-8}$  s. En esta situación, es posible establecer una inversión de la población y es más probable que se presente una emisión estimulada antes que una emisión espontánea.
- Los fotones emitidos deben confinarse en el sistema el tiempo suficiente para que puedan tener la capacidad de estimular emisiones posteriores de otros átomos excitados. Esto se logra utilizando espejos en los extremos del sistema. Un extremo es completamente reflejante y el otro es parcialmente reflejante. Una fracción de la intensidad de la luz pasa a través del extremo parcialmente reflejante, formando un haz de luz láser (figura 41.29, página 1136).

Un dispositivo que muestra una emisión estimulada de radiación es el láser de gas helio-neón. La figura 41.30 (página 1136) es un diagrama del nivel de energía del





**Figura 41.29** Diagrama de un diseño de láser.



**Figura 41.30** Diagrama de nivel de energía para un átomo de neón en un láser de helio-neón.

átomo de neón en este sistema. La mezcla de helio y neón se confina en un tubo de vidrio sellado en sus extremos mediante espejos. Un voltaje aplicado de un extremo al otro del tubo hace que los electrones se desplacen por el tubo, entrando en colisión con los átomos de los gases y elevándolos a estados excitados. Los átomos de neón se excitan al estado  $E_3^*$  mediante este proceso (el asterisco [\*] indica un estado metaestable) y también como resultado de colisiones con los átomos excitados del helio. Se presenta una emisión estimulada, lo que hace que los átomos de neón realicen transiciones al estado  $E_2$ . Los átomos cercanos excitados, también son estimulados. Esto da como resultado la producción de luz coherente con una longitud de onda de 632.8 nm.

## Aplicaciones

Desde el desarrollo del primer láser en 1960, la tecnología láser ha tenido un crecimiento significativo. Los *diodos láser* son usados como punteros láser y en topografía y telémetros de construcción, la comunicación de fibra óptica, reproductores DVD y Blu-ray, y los lectores de códigos de barras. Los *láseres de dióxido de carbono* se utilizan en la industria para la soldadura y de corte, como el proceso que se muestra para cortar la tela en la figura 41.31. Los *láseres Excimer* se utilizan en la cirugía ocular Lasik. Una variedad de otros tipos de láser existe y se utilizan en diversas aplicaciones. Estas y otras aplicaciones han resultado posibles debido a las características únicas de la luz láser. Además de ser altamente monocromática, la luz láser también es altamente direccional y puede ser concentrada exactamente para producir regiones con una energía luminosa muy intensa (con densidades de energía  $10^{12}$  veces mayores que la de la llama de un soplete de corte representativo).

Los láseres se aplican en la medición de precisión a distancia (telemetría). En años recientes se ha vuelto importante, para fines astronómicos y geofísicos, medir con la mayor precisión posible las distancias desde diferentes puntos en la superficie de la Tierra a un punto en la superficie de la Luna. Para hacer esto más fácil, los astronautas



**Figura 41.31** Estas tijeras láser robóticas, que pueden cortar hasta 50 lienzos de tela en una sola pasada, es una de las muchas aplicaciones de la tecnología láser.

36clicks | Dreamstime.com



del *Apolo* colocaron en la Luna prismas reflectores cuadrados de 0.5 m de lado, con lo que se consigue que las emisiones de láser dirigidas desde una estación de la Tierra sean reflejadas de regreso a la misma estación (véase la figura 34.8a). Utilizando la rapidez conocida de la luz y el tiempo medido de viaje redondo de un pulso láser, la distancia Tierra-Luna puede determinarse con una precisión de más de 10 cm.

Los láseres tienen un gran número de aplicaciones médicas debido a que diferentes longitudes de onda del láser son absorbidas por tejidos biológicos específicos. Por ejemplo, ciertos procedimientos láser han reducido de manera importante la ceguera en pacientes con glaucoma y con diabetes. El glaucoma es una enfermedad bastante común del ojo humano, caracterizada por una alta presión en el fluido en el ojo, que puede conducir a la destrucción del nervio óptico. Una operación láser simple (iridectomía) puede “quemar” abriendo una pequeña perforación en una membrana obstruida, mitigando la presión destructiva. Un efecto secundario serio de la diabetes es la neo-vascularización, la proliferación de vasos sanguíneos débiles que con frecuencia sangran. Cuando la neo-vascularización se presenta en la retina, la visión se deteriora (retinopatía diabética) y finalmente se destruye. Hoy en día es posible dirigir la luz verde de un láser de un ion de argón a través del cristalino y del fluido del ojo, enfocarla en los bordes de la retina, y foto-coagular los vasos sangrantes. Incluso las personas que sólo tienen defectos menores de visión, como la miopía, se benefician del uso del láser para modificar la forma de la córnea, cambiando su distancia focal y reduciendo la necesidad de anteojos.

La cirugía láser es ahora algo cotidiano en hospitales de todo el mundo. La luz infrarroja a  $10\ \mu\text{m}$  proveniente de un láser de dióxido de carbono puede cortar el tejido muscular, principalmente mediante la vaporización del agua contenida en el tejido celular. Para esta técnica se requiere una potencia de láser de alrededor de 100 W. La ventaja del “bisturí láser” sobre otros métodos convencionales es que la radiación láser corta tejido y coagula la sangre al mismo tiempo, lo que lleva a una reducción sustancial en pérdida de sangre. Además, la técnica elimina virtualmente la migración celular, una consideración importante cuando se retiran tumores.

Un haz láser puede ser atrapado en una fina guía de luz de fibras ópticas (endoscopios) utilizando una reflexión interna total. Un endoscopio puede introducirse a través de orificios naturales del cuerpo, conducirse alrededor de órganos internos y dirigirse a ubicaciones específicas en el interior del cuerpo, eliminando la necesidad de cirugía invasiva. Por ejemplo, el sangrado del tracto gastrointestinal puede cauterizarse de manera óptica por medio de endoscopios insertos a través de la boca.

En la investigación médica y biológica es a menudo importante aislar y recolectar células extrañas para su estudio y cultivo. Un separador láser de células explota el resultado de células específicas con tintes fluorescentes. En tal caso, todas las células se dejan caer de una diminuta boquilla cargada y son rastreadas por un láser para identificar la anilina. Si se detectan las marcas emisoras correctas, un pequeño voltaje aplicado a placas paralelas desvía la célula eléctricamente cargada a fin de que caiga en un vaso de recolección.

## Resumen

### ► Conceptos y principios

Las longitudes de onda de las líneas espectrales del hidrógeno, llamadas **series de Balmer**, se describen mediante la ecuación

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (41.1)$$

donde  $R_{\text{H}}$  es la **constante de Rydberg**. Las líneas espectrales que corresponden a los valores de  $n$  desde 3 hasta 6 están en el intervalo visible del espectro electromagnético. Los valores de  $n$  mayores que 6 corresponden a líneas espectrales en la región ultravioleta del espectro.

*continúa*



El modelo atómico de Bohr describe con precisión los espectros del hidrógeno atómico y de iones parecidos a hidrógeno. Una suposición básica del modelo es que el electrón puede existir sólo en órbitas discretas, de modo que la cantidad de movimiento angular del electrón es un múltiplo entero de  $\hbar/2\pi = \hbar$ . Cuando se suponen órbitas circulares y una atracción de Coulomb simple entre electrón y protón, las energías de los estados cuánticos para el hidrógeno se calculan como

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left(\frac{1}{n^2}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.13)$$

donde  $n$  es un entero llamado **número cuántico**,  $k_e$  es la constante de Coulomb,  $e$  es la carga del electrón y  $a_0 = 0.0529 \text{ nm}$  es el **radio de Bohr**.

Si el electrón en un átomo de hidrógeno realiza una transición de una órbita cuyo número cuántico es  $n_i$  a una cuyo número cuántico es  $n_f$ , donde  $n_f < n_i$ , el átomo emite un fotón. La frecuencia de este fotón es

$$f = \frac{k_e e^2}{2a_0 h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \quad (41.15)$$

Un átomo en un estado caracterizado por un valor específico de  $n$  puede tener los siguientes valores de  $L$ , la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital del átomo  $\vec{L}$ :

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)} \hbar$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad (41.27)$$

Los valores permitidos de la proyección de  $\vec{L}$  sobre el eje  $z$  son:

$$L_z = m_\ell \hbar \quad (41.28)$$

Sólo se permiten valores discretos de  $L_z$ , como determinan las restricciones sobre  $m$ . Esta cuantización de  $L_z$  se conoce como **cuantización del espacio**.

**El principio de exclusión** afirma que **dos electrones en un átomo no pueden estar en el mismo estado cuántico**. En otras palabras, dos electrones no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos  $n, \ell, m_\ell$  y  $m_s$ . Con este principio se pueden determinar las configuraciones electrónicas de los elementos. Este principio sirve como una base para comprender la estructura atómica y las propiedades químicas de los elementos.

El espectro de rayo X de un objetivo metálico consiste en un conjunto de líneas características definidas superpuestas en un amplio espectro continuo. La **bremsstrahlung** (radiación de frenado) es radiación X con su origen en el frenado de los electrones de alta energía conforme encuentran el objetivo. Los átomos emiten **rayos X característicos** cuando un electrón se somete a una transición de una capa exterior a una vacante en una capa interna.

La mecánica cuántica se puede aplicar al átomo de hidrógeno mediante el uso de la función de energía potencial  $U(r) = 2k_e e^2/r$  en la ecuación de Schrödinger. La solución a esta ecuación produce funciones de onda para estados permitidos y energías permitidas:

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{13.606 \text{ eV}}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41.21)$$

donde  $n$  es el **número cuántico principal**. Las funciones de onda permitidas dependen de tres números cuánticos:  $n, \ell$  y  $m_\ell$ , donde  $\ell$  es el **número cuántico orbital** y  $m_\ell$  es el **número cuántico magnético orbital**. Las restricciones sobre los números cuánticos son

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

$$m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$$

Todos los estados que tengan el mismo número cuántico principal  $n$  forman una **capa**, que se identifica por las letras K, L, M, ... (que corresponden a  $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Todos los estados que tienen los mismos valores de  $n$  y  $\ell$  forman una **subcapa**, designada por las letras  $s, p, d, f, \dots$  (que corresponden a  $0, 1, 2, 3, \dots$ ).

El electrón tiene una cantidad de movimiento angular intrínseca llamada **cantidad de movimiento angular de espín**. El espín del electrón se puede describir mediante un solo número cuántico  $s = 1/2$ . Para describir por completo un estado cuántico, es necesario incluir un cuarto número cuántico  $m_s$ , llamado **número cuántico magnético de espín**. Este número cuántico puede tener sólo dos valores,  $\pm 1/2$ . La magnitud de la cantidad de movimiento angular de espín es

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad (41.30)$$

y la componente  $z$  de  $\vec{S}$  es

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar \quad (41.31)$$

Es decir, la cantidad de movimiento angular de espín también está cuantizada en el espacio, como se especifica mediante el número cuántico magnético de espín  $m_s = \pm 1/2$ .

El momento magnético  $\vec{\mu}_{\text{espín}}$  asociado con la cantidad de movimiento angular de espín de un electrón es


$$\vec{\mu}_{\text{espín}} = -\frac{e}{m_e} \vec{S} \quad (41.32)$$

La componente  $z$  de  $\vec{\mu}_{\text{espín}}$  puede tener los valores

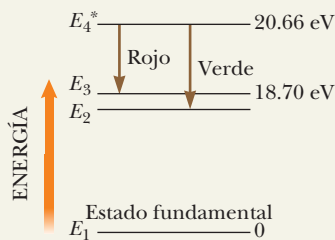
$$\mu_{\text{espín},z} = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (41.33)$$

Las transiciones atómicas se pueden describir con tres procesos: **absorción estimulada**, en la que un fotón entrante lleva el átomo a un estado de energía superior; **emisión espontánea**, en la que el átomo hace una transición a un estado de energía menor y emite un fotón; y **emisión estimulada**, en la que un fotón incidente hace que un átomo excitado realice una transición descendente y emita un fotón idéntico al incidente.

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage.

- Está trabajando en un proyecto de último año con un grupo de sus compañeros, diseñando un láser de helio-neón que produce un rayo láser verde en lugar de uno rojo. La figura TP41.1 muestra las transiciones involucradas para formar el rayo rojo y el rayo verde. Después de que se establece una inversión de población, los átomos de neón realizan una variedad de transiciones descendentes al caer desde el estado etiquetado  $E_4^*$  hacia abajo hasta el nivel  $E_1$  (arbitrariamente



**Figura TP41.1** Piense, dialogue y comparta. Problema 1 y Problema 35.

asignada a la energía  $E_1 = 0$ ). Los átomos emiten luz roja con una longitud de onda de 632.8 nm en una transición  $E_4^* - E_3$  y luz verde con una longitud de onda de 543.0 nm en una transición competitiva  $E_4^* - E_2$ . Para construir su láser, necesita determinar lo siguiente: (a) Una de las transiciones posteriores que ocurrirá es  $E_2 - E_1$ . Determine la longitud de onda de esta transición para su informe final. (b) Los átomos en su láser están en una cavidad entre los espejos diseñados para reflejar la luz verde con alta eficiencia pero permiten que la luz roja se filtre de la cavidad. Entonces la emisión estimulada puede conducir a la acumulación de un haz colimado de luz verde entre los espejos que tienen una intensidad mayor que la de la luz roja. Los espejos que forman la cavidad resonante pueden estar hechos de capas de dióxido de silicio (índice de refracción  $n = 1.458$ ) y dióxido de titanio (el índice de refracción varía entre 1.9 y 2.6). Es necesario determinar el espesor de una capa de dióxido de silicio, entre las capas de dióxido de titanio, que minimizaría el reflejo de la luz roja y maximizaría el reflejo de la luz verde.

- ACTIVIDAD** Trabaje con su grupo para construir una tabla como la tabla 41.5 para los  $n = 4$  electrones en el átomo de hidrógeno.

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage.

### SECCIÓN 41.1 Espectros atómicos de los gases

- La longitud de onda de la serie de Lyman para el hidrógeno están dadas por

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

- Calcule las longitudes de onda de las tres primeras líneas en esta serie. (b) Identifique la región del espectro electromagnético en el que aparecen estas líneas.

- Un átomo aislado de cierto elemento emite luz de 520 nm de longitud de onda cuando el átomo cae de su quinto estado excitado a su segundo estado excitado. El átomo emite un fotón de 410 nm de longitud de onda cuando cae de su sexto estado excitado a su segundo estado excitado. Encuentre la longitud de onda de la luz radiada cuando el átomo hace una transición de su sexto a su quinto estado excitado.

- Un átomo aislado de cierto elemento emite luz de  $\lambda_{m1}$  de longitud de onda cuando el átomo cae de este estado con número cuántico  $m$  a su estado fundamental de número cuántico 1. El átomo emite un fotón de longitud de onda  $\lambda_{n1}$  cuando cae de este estado excitado con número cuántico  $n$  a su estado fundamental. (a) Encuentre la longitud de onda de la luz radiada cuando el átomo hace una transición de su estado  $m$  a su estado  $n$ . (b) Demuestre que  $k_{mn} = |k_{m1} - k_{n1}|$ , donde  $k_{ij} = 2\pi/\lambda_{ij}$  es el número de onda del fotón. Este problema ejemplifica el *principio de combinación de Ritz*, una regla empírica formulada en 1908.

### SECCIÓN 41.2 Los primeros modelos del átomo

- De acuerdo con la física clásica, una carga  $e$  móvil con una aceleración  $a$  emite energía a una tasa de

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 a^2}{c^3}$$

- Demuestre que un electrón en un átomo de hidrógeno clásico (véase la figura 41.5) se mueve en espiral hacia el núcleo con una rapidez de

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2\epsilon_0^2 m_e^2 c^3} \left( \frac{1}{r^2} \right)$$

- Determine el intervalo de tiempo al final del cual el electrón alcanzará  $r = 0$ , empezando desde  $r_0 = 2.00 \times 10^{-10}$  m.

### SECCIÓN 41.3 Modelo del átomo de Bohr de hidrógeno

*Nota:* En esta sección, a menos que se indique lo contrario, suponga que el átomo de hidrógeno es tratado con el modelo de Bohr.

- ¿Cuál es la energía de un fotón que, cuando es absorbido por un átomo de hidrógeno, podría causar una transición electrónica de (a) el estado  $n = 2$  al estado  $n = 5$  y (b) el estado  $n = 4$  al estado  $n = 6$ ?
- Demuestre que la rapidez del electrón en la  $n$ -ésima órbita de Bohr en el hidrógeno está dada por

$$v_n = \frac{k_e e^2}{n\hbar}$$

7. La serie de Balmer para el átomo de hidrógeno corresponde a las transiciones electrónicas que terminan en el estado con número cuántico  $n = 2$ , como se muestra en la figura P41.7 (página 1140). Considere el fotón de longitud de onda

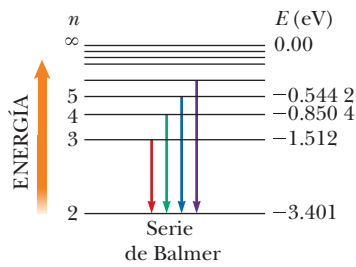


Figura 41.7

más larga correspondiente a la transición mostrada en la figura. Determine su (a) energía y (b) longitud de onda. Considere la línea espectral de longitud de onda más corta correspondiente a la transición mostrada en la figura. Determine (c) la energía del fotón y (d) su longitud de onda. (e) ¿Cuál es la longitud de onda más cortas posible en la serie de Balmer?

8. Un haz de luz monocromático es absorbido por un conjunto de átomos de hidrógeno en estado fundamental, de manera que se observan seis longitudes de onda diferentes cuando el hidrógeno se relaja de nuevo al estado fundamental. (a) ¿Cuál es la longitud de onda del haz incidente? Explique los pasos de la solución. (b) ¿Cuál es la longitud de onda más larga del espectro de emisión de estos átomos? (c) ¿En qué parte del espectro electromagnético, y (d) en qué serie pertenece? (e) ¿Cuál es la longitud de onda más corta? (f) ¿En qué parte del espectro electromagnético y (g) a que serie pertenece?

9. Un átomo de hidrógeno está en su segundo estado excitado, que corresponde a  $n = 3$ . Halle (a) el radio de la órbita de Bohr del electrón y (b) la longitud de onda De Broglie del electrón en esta órbita.

10. Un electrón está en la  $n$ -ésima órbita de Bohr del átomo de hidrógeno. (a) Demuestre que el periodo del electrón es  $T = n^3 t_0$  y determine el valor numérico de  $t_0$ . (b) En promedio, un electrón permanece en la órbita  $n = 2$  durante aproximadamente  $10 \mu\text{s}$  antes de saltar hacia la órbita  $n = 1$  (estado fundamental). ¿Cuántas revoluciones hace el electrón en el estado excitado? (c) Defina el periodo de una revolución como un año electrón, análogo a un año Tierra como el periodo del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Explique si debe considerar al electrón en la órbita  $n = 2$  como “viviendo por un largo tiempo”.

11. (a) Elabore un diagrama de nivel de energía para el ion  $\text{He}^+$ , en el cual  $Z = 2$ , usando el modelo de Bohr. (b) ¿Cuál es la ionización de energía para  $\text{He}^+$ ?

#### SECCIÓN 41.4 Modelo cuántico del átomo de hidrógeno

12. Una expresión general para los niveles de energía de los átomos y iones de un electrón es

$$E_n = -\frac{\mu k_e^2 q_1^2 q_2^2}{2\hbar^2 n^2}$$

Aquí  $\mu$  es la masa reducida, dada por  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , donde  $m_1$  es la masa del electrón y  $m_2$  es la masa del núcleo;  $k_e$  es la constante de Coulomb, y  $q_1$  y  $q_2$  son las cargas del electrón y el núcleo respectivamente. La longitud de onda para la transición  $n = 3$  a  $n = 2$  del átomo de hidrógeno es  $656.3 \text{ nm}$  (luz roja visible). ¿Cuáles son las longitudes de onda para esta misma transición en (a) positronio, que está constituido por un electrón y un positrón, y (b) helio con una sola ionización? Nota: Un positrón es un electrón de carga positiva.

13. A los átomos del mismo elemento pero con diferente número de neutrones en el núcleo se les denomina *isótopos*. El gas hidrógeno ordinario es una mezcla de dos isótopos que contienen un núcleo de una partícula o de dos. Estos isótopos son hidrógeno-1 con un núcleo protón, e hidrógeno-2, llamado deuterio, con un núcleo deuterón. Un deuterón es un protón y un neutrón enlazados. El hidrógeno-1 y el deuterio tienen idénticas propiedades químicas, pero pueden estar separados mediante una ultracentrifugadora o mediante otros métodos. Sus espectros de emisión muestran líneas de los mismos colores a longitudes de onda ligeramente diferentes. (a) Use la ecuación dada en el problema 12 para demostrar que la diferencia en longitud de onda entre el hidrógeno-1 y las líneas espectrales del deuterio asociadas con una transición electrónica particular está dada por

$$\lambda_H - \lambda_D = \left(1 - \frac{\mu_H}{\mu_D}\right) \lambda_H$$

(b) Evalúe la diferencia en longitud de onda para la línea alfa Balmer del hidrógeno, con longitud de onda  $656.3 \text{ nm}$ , emitida por un átomo que realiza una transición de un estado  $n = 3$  a un estado  $n = 2$ . Harold Urey observó esta diferencia en longitud de onda en 1931 y así confirmó su descubrimiento del deuterio.

14. Un electrón de cantidad de movimiento  $p$  está a una distancia de un protón estacionario. El electrón tiene una energía cinética  $K = p^2/2m_e$ . El átomo tiene una energía potencial  $U = -k_e e^2/r$  y una energía total  $E = K + U$ . Si un electrón está ligado al protón para formar un átomo de hidrógeno, su posición promedio está en el protón, pero la incertidumbre en suposición es aproximadamente igual al radio  $r$  de su órbita. El vector promedio de la cantidad de movimiento del electrón es igual a cero, pero su cantidad de movimiento al cuadrado promedio es aproximadamente igual a la incertidumbre al cuadrado en su cantidad de movimiento, como lo dice el principio de incertidumbre. Tratando el átomo como un sistema de una sola dimensión, (a) estime la incertidumbre de la cantidad de movimiento del electrón en función de  $r$ . (b) Estime la energía cinética e electrón y la energía total en términos de  $r$ . (c) El valor real de  $r$  es el que *minimiza la energía total*, lo que da como resultado un átomo estable. (d) Determine ese valor de  $r$  y (e) la *energía total* resultante. (f) Compare su respuesta con las predicciones de la teoría de Bohr.

#### SECCIÓN 41.5 Las funciones de onda para el hidrógeno

15. Dibuje la función de onda  $\psi_{1s}(r)$  en función de  $r$  (véase la ecuación 41.22) y la función de densidad de probabilidad radial  $P_{1s}(r)$  en función de  $r$  (véase la ecuación 41.25) para el hidrógeno. Establezca los valores de  $r/a_0$  en el intervalo desde 0 hasta 1.5.

16. Para un estado esféricamente simétrico de un átomo de hidrógeno, la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas es igual a

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{k_e e^2}{r} \psi = E\psi$$

(a) Demuestre que la función de onda  $1s$  para un electrón en el hidrógeno

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

satisface la ecuación de Schrödinger. (b) ¿Cuál es la energía del átomo para este estado?



17. La función de onda de estado fundamental para el electrón en un átomo de hidrógeno es igual a

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

donde  $r$  es la coordenada radial del electrón y  $a_0$  es el radio de Bohr. (a) Demuestre que la función de onda, como se ha dado, está normalizada. (b) Determine la probabilidad de localizar al electrón entre  $r_1 = a_0/2$  y  $r_2 = 3a_0/2$ .

### SECCIÓN 41.6 Interpretación física de los números cuánticos

18. Enliste todos los posibles conjuntos de números cuánticos para átomos de hidrógeno asociados con (a) la subcapa  $3d$  y (b) la subcapa  $3p$ .
19. Determine todos los posibles valores de (a)  $L$ , (b)  $L_z$  y (c) para un electrón de hidrógeno en un estado  $3d$ .
20. ¿Cuántos conjuntos de números cuánticos son posibles para un átomo de hidrógeno en el cual (a)  $n = 1$ , (b)  $n = 2$ , (c)  $n = 3$ , (d)  $n = 4$  y (e)  $n = 5$ ?

21. (a) Determine la densidad de masa de un protón, representándolo como una esfera sólida de radio  $1.00 \times 10^{-15}$  m. (b) **CIC** **V** **¿Qué pasaría si?** Considere un modelo clásico de un electrón como una esfera sólida con la misma densidad que el protón. Determine su radio. (c) Imagine que este electrón posee una cantidad de movimiento angular de espín  $I\omega = \hbar/2$  debido a la rotación clásica alrededor del eje  $z$ . Determine la rapidez de un punto en el ecuador del electrón y (d) compare esta rapidez con la rapidez de la luz.

22. **CE** Tiene un nuevo empleo de verano con la NASA y está trabajando en observaciones astronómicas usando radiación electromagnética que no está en el rango visible. Su supervisora le ha explicado la *radiación de 21 cm* y se usa para varias observaciones de hidrógeno interestelar. Ella explica que la radiación de 21 cm se encuentra en la región de microondas del espectro electromagnético y proviene de una división *hiperfina* del estado de masa del electrón del hidrógeno. Es similar al efecto Zeeman, excepto que son los estados de espín los que se dividen, y el campo magnético es interno al átomo: proviene del campo magnético debido al núcleo. Cuando el átomo hace una transición desde el estado superior al estado inferior, se emite un fotón de 21 cm. Basado en el hecho de que la radiación tiene una longitud de onda de 21 cm, desea determinar un valor aproximado para la magnitud promedio del campo magnético en el que reside el electrón.

23. **T** El mesón  $r^-$  tiene una carga de  $-e$ , un número cuántico de espín igual a 1, y una masa 1507 veces mayor que la del electrón. Los posibles valores para su número cuántico magnético del espín son  $-1, 0$  y  $1$ . **¿Qué pasaría si?** Imagine que los electrones en los átomos fueran remplazados con mesones  $r^-$ . Haga una lista de los posibles conjuntos de números cuánticos para mesones  $r^-$  en la subcapa  $3d$ .

24. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un fotón de longitud de onda 88.0 nm golpea una superficie de aluminio limpio, expulsando un fotoelectrón. Después, el fotoelectrón impacta a un átomo de hidrógeno en su estado fundamental, transfiriéndole energía al mismo y excitándolo a un estado cuántico más alto.

### SECCIÓN 41.7 El principio de exclusión y la tabla periódica

25. **CIC** (a) Conforme recorre la tabla periódica, ¿qué subcapa se llena primero, la subcapa  $3d$  o la  $4s$ ? (b) **¿Qué configura-**

ción electrónica tiene una energía más baja:  $[\text{Ar}]3d^44s^2$  o  $[\text{Ar}]3d^54s^1$ ? *Nota:* La notación  $[\text{Ar}]$  representa la configuración llena del argón. *Sugerencia:* ¿Cuál tiene el mayor número de espines no apareados? (c) Identifique el elemento con la configuración electrónica del inciso (b).

26. Configure una tabla parecida a la que se muestra en la figura 41.18 para los átomos que contiene de 11 a 19 electrones. Utilice la regla de Hund y una estimación con base en sus conocimientos.
27. (a) Escriba la configuración electrónica para el estado fundamental del oxígeno ( $Z = 8$ ). (b) Escriba un conjunto de valores posibles para los números cuánticos  $n, \ell, m_\ell$  y  $m_s$  para cada electrón en el oxígeno.
28. Al examinar la figura 42.19 del menor al mayor número atómico, los electrones llenan las subcapas de tal manera que las que se llenan primero son las subcapas con valores  $n + \ell$  más pequeños. Si dos subcapas tienen el mismo valor de  $n + \ell$ , se llena primero aquella que tiene el menor valor de  $n$ . Utilizando estas dos reglas, escriba el orden en que se llenan las subcapas hasta  $n + \ell = 7$ .
29. Dos electrones en el mismo átomo tienen ambos  $n = 3$  y  $\ell = 1$ . Suponga que los electrones son distinguibles, de modo que se intercambian para definir un nuevo estado. (a) ¿Cuántos estados del átomo son posibles considerando los números cuánticos que estos dos electrones pueden tener? (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuántos estados serían posibles si el principio de exclusión no fuera operativo?

### SECCIÓN 41.8 Más sobre los espectros atómicos: el visible y el rayo X

30. En la producción de rayos X, los electrones son acelerados a través de un alto voltaje  $\Delta V$  y a continuación, se desaceleran al golpear un blanco. Demuestre que la longitud de onda más corta de un rayo X que se puede producir es

$$\lambda_{\min} = \frac{1240 \text{ nm} \cdot \text{V}}{\Delta V}$$

31. Un blanco de bismuto es golpeado por electrones, emitiéndose rayos X. Estime (a) la energía de transición del bismuto de la capa M a la capa L y (b) la longitud de onda de los rayos X emitidos cuando un electrón cae de la capa M a la capa L.
32. **CIC** El nivel  $3p$  del sodio tiene una energía de  $-3.0$  eV y el nivel  $3d$  tiene una energía de  $-1.5$  eV. (a) Determine  $Z_{\text{efec}}$  para cada uno de estos estados. (b) Explique la diferencia.

33. **CE** Usted es contratado como testigo experto por el abogado que representa a un médico. El médico está siendo demandado por un paciente que reclamó daños por radiación de la máquina de rayos X del doctor. El demandante argumenta que la máquina no debe haber sido blindada adecuadamente, exponiéndolo a radiación peligrosa. Su visita al consultorio del médico muestra los siguientes resultados. De hecho, mide la radiación x en el consultorio del médico, con una longitud de onda mínima de 30.0 pm. La consulta con el médico y la inspección de su máquina de rayos X muestra que acelera los electrones a través de un voltaje de 35.0 kV antes de que alcancen el objetivo, produciendo *bremsstrahlung*. **¿Qué consejo le da al abogado?**

34. **CIC** En la producción de rayos X, los electrones se aceleran a través de un alto voltaje y luego se desaceleran al golpear un objetivo. (a) Para hacer posible la producción de rayo X de longitud de onda  $\lambda$ , ¿cuál es la mínima diferencia de potencial  $\Delta V$  a través de la cual se deben acelerar los electrones?



(b) Establezca en palabras cómo depende de la longitud de onda la diferencia de potencial requerida. (c) Explique si su resultado concuerda con la información de la figura 41.22. (d) ¿La relación del inciso (a) se aplica a otros tipos de radiación electromagnética además de los rayos X? (e) ¿A qué tiende la diferencia de potencial conforme  $\lambda$  tiende a cero? (f) ¿A qué tiende la diferencia de potencial conforme  $\lambda$  aumenta sin límite?

### SECCIÓN 41.10 Láseres

**CIC** 35. La cantidad  $N$  de átomos en un estado en particular se conoce como la población de este estado. Esta cantidad depende de la energía del estado y de la temperatura. En condiciones de equilibrio térmico, la población de átomos en un estado de energía  $E_n$  se obtiene a partir de la expresión de distribución de Boltzmann

$$N = N_g e^{-(E_n - E_g)/k_B T}$$

en donde  $T$  es la temperatura absoluta y  $N_g$  es la población del estado fundamental, con energía  $E_g$  y  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Para simplificar el análisis, suponga que cada nivel de energía sólo tiene un estado cuántico asociado. (a) Antes de conectar la energía, los átomos de neón del láser se encuentran en equilibrio térmico, a 27.0°C. Encuentre la razón de equilibrio para la población de los estados  $E_4^*$  y  $E_3$  que aparecen en la figura TP41.1. El láser funciona gracias a una ingeniosa producción artificial de una “inversión de población” entre los estados de energía superiores e inferiores del átomo involucrados en su transición. Esto significa que existen más átomos en un estado superior de excitación que en los estados inferiores. Considere la transición  $E_4^* - E_3$  en la figura TP41.1. Suponga que hay una incidencia 2% mayor de átomos en el estado superior que en el inferior. (b) Con el fin de demostrar lo poco natural de esta situación, encuentre la temperatura a la cual la distribución de Boltzmann describe una inversión de población de 2.00%. (c) ¿Por qué no ocurren de manera natural situaciones como ésta?

**AMT** 36. **Problema de repaso.** La figura 41.29 representa el rebote de la luz entre dos espejos en una cavidad láser como dos ondas viajeras. Estas ondas viajeras que se mueven en direcciones opuestas constituyen una onda estacionaria. Si las superficies reflejantes son películas metálicas, el campo eléctrico tiene nodos en ambos extremos. La onda estacionaria electromagnética es análoga a la onda en una cuerda estacionaria representada en la figura 17.14. (a) Suponga que un láser de helio-neón tiene espejos precisamente planos y paralelos separados 35.124 103 cm. Suponga que el medio activo puede amplificar eficientemente sólo luz con longitudes de onda entre 632.808 40 nm y 632.80980 nm. Encuentre el número de componentes que constituyen la luz láser y la longitud de onda de cada componente, precisa a ocho dígitos. (b) Encuentre la velocidad media cuadrática de un átomo de neón media de un átomo de neón a 120 °C. (c) Demuestre que a esta temperatura el efecto Doppler para la emisión de luz por los átomos de neón en movimiento realista debería hacer el ancho de banda del amplificador de luz mayor que los 0.001 40 nm asumidos en el inciso (a).

### PROBLEMAS ADICIONALES

37. Suponga que un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado 2s, con una función de onda dada por la ecuación 41.26. Si  $r = a_0$ , calcule los valores para (a)  $\psi_{2s}(a_0)$ , (b)  $|\psi_{2s}(a_0)|^2$  y (c)  $P_{2s}(a_0)$ .

38. Demuestre que la función de onda para un átomo de hidrógeno en el estado 2s es

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$$

39. Los estados de la materia son sólido, líquido, gas y plasma. El plasma puede ser descrito como un gas de partículas cargadas o un gas de átomos ionizados. La mayor parte de la materia en el sistema solar es plasma (en el interior del Sol). De hecho, la mayor parte de la materia del universo es plasma, de modo que es la llama de una vela. Utilice la información de la figura 41.20 para hacer una estimación en orden de magnitud de la temperatura a la que un elemento químico típico debe elevarse para convertirse en plasma por la ionización de la mayoría de los átomos en una muestra. Explique su razonamiento.

40. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un experimento se lleva a cabo en un átomo. Las mediciones del átomo de cuando está en un estado excitado en particular muestran cinco valores posibles de la componente  $z$  del momento angular orbital, que oscila entre  $3.16 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  y  $-3.16 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .

41. Encuentre el valor promedio (esperado) de  $1/r$  en el estado 1s del hidrógeno. Tenga en cuenta que la expresión general está dada por

$$\langle 1/r \rangle = \int_{\text{todo el espacio}} |\psi|^2 (1/r) dV = \int_0^\infty P(r) (1/r) dr$$

¿El resultado es igual al inverso del valor promedio de  $r$ ?

**CIC** 42. Conforme la Tierra gira alrededor del Sol, sus órbitas están cuantizadas. (a) Siga las etapas de Bohr del análisis del átomo de hidrógeno para demostrar que los radios permitidos para la órbita de la Tierra están dados mediante

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{GM_S M_E^2}$$

en donde  $M_S$  es la masa del Sol,  $M_E$  es la masa de la Tierra y  $n$  es un número cuántico entero. (b) Calcule el valor numérico de  $n$  para el sistema Sol-Tierra. (c) Encuentre la distancia entre la órbita del número cuántico  $n$  y la siguiente órbita del Sol, correspondiente al número cuántico  $n + 1$ . (d) Analice el significado de sus resultados de los incisos (b) y (c).

**PG** 43. Se quiere demostrar que la posición radial más probable de un electrón en el estado 2s del hidrógeno es  $r = 5.236 a_0$ . (a) Utilice las ecuaciones 41.24 y 41.26 para encontrar la densidad de probabilidad radial para el estado 2s del hidrógeno. (b) Calcule la derivada de la densidad de probabilidad radial con respecto a  $r$ . (c) Iguale a cero la derivada del inciso (b) e identifique tres valores de  $r$  que representan los mínimos de la función. (d) Halle dos valores de  $r$  que representan máximos en la función. (e) Determine cuáles de los valores en el inciso (c) representan la mayor probabilidad.

44. El ejemplo 41.3 calcula el valor más probable, así como el valor promedio, de la coordenada radial  $r$  del electrón de un átomo de hidrógeno en el estado fundamental. Para efectos de comparación con estos valores modales y medios, encuentre el valor medio de  $r$ . Siga este procedimiento. (a) Deduzca una expresión en función de  $r$  de la probabilidad de que el electrón del hidrógeno en estado fundamental sea encontrado fuera de una esfera con radio  $r$  con centro en el núcleo. (b) Elabore una gráfica de la pro-

babilidad en función de  $r/a_0$ . Elija valores de  $r/a_0$  que vayan de 0 a 4.00 en intervalos de 0.250. (c) Encuentre el valor de  $r$  para el cual la probabilidad de encontrar el electrón fuera de la esfera de radio  $r$  sea igual a la probabilidad de encontrarlo dentro de la esfera. Usted debe resolver una ecuación trascendental numéricamente, y la gráfica es un buen lugar para empezar.

**45.** Todos los átomos tienen el mismo tamaño, en un orden de magnitud. (a) Para demostrar esto, estime los diámetros de los átomos de aluminio (con masa molar de 27.0 g/mol y densidad de 2.70 g/cm<sup>3</sup>) y de uranio (con masa molar de 238 g/mol y densidad de 18.9 g/cm<sup>3</sup>). (b) ¿Qué implican los resultados del inciso (a) sobre las funciones de onda para los electrones de capas interiores conforme avanza hacia átomos con una masa atómica cada vez mayor?

**46.** Suponga que la energía de ionización de un átomo es de 4.10 eV. En el espectro de este mismo átomo, se observan líneas de emisión con longitudes de onda de 310 nm, 400 nm y 1377.8 nm. Con esta información, elabore el diagrama de los niveles de energía con el mínimo de niveles. Suponga que los niveles superiores están más cercanos entre sí.

**47.** Al realizar una investigación con hidrógeno gaseoso a una temperatura lo suficientemente alta como para que las moléculas de H<sub>2</sub> se hayan disociado a átomos de H, observa que los átomos en su muestra de hidrógeno están ionizados por fotones de energía 2.28 eV que inciden en la muestra. Desea determinar dos cosas: (a) el valor mínimo para  $n$  para los átomos de hidrógeno que están siendo ionizados, y (b) la velocidad de los electrones liberados en el proceso de ionización cuando están lejos del átomo.

**48.** Usted está haciendo un proyecto de tesis profesional que implica la investigación en observaciones astronómicas. En el espacio interestelar, se han observado átomos de hidrógeno altamente excitados llamados *átomos de Rydberg*, y pueden ser útiles para analizar entornos astronómicos. En estos átomos, el número cuántico  $n$  es muy alto. En preparación para una próxima publicación, su supervisor le pide que determine el número cuántico de un átomo de Rydberg para el cual las predicciones clásicas y cuánticas de la longitud de onda de una transición  $\Delta n = 1$  están dentro de 0.500% entre sí.

**49.** Un pulso de láser de rubí emite luz a 694.3 nm. Para un pulso de 14.0 ps que contiene 3.00 J de energía, encuentre (a) la distancia física del pulso conforme se desplaza por el

espacio y (b) la cantidad de fotones que contiene. (c) El haz tiene una sección transversal circular de 0.600 cm de diámetro. Encuentre el número de fotones por milímetro cúbico.

**50.** Un pulso de láser emite una luz con longitud de onda  $\lambda$ . Para un pulso de duración  $\Delta t$  y energía  $T_{ER}$ , encuentre (a) la distancia física del pulso conforme se desplaza por el espacio y (b) la cantidad de fotones que contiene. (c) El haz tiene una sección transversal circular de diámetro  $d$ . Encuentre el número de fotones por unidad de volumen.

### PROBLEMAS DE DESAFÍO

**51.** (a) Use el modelo del átomo de Bohr de hidrógeno para demostrar que cuando el electrón se mueve del estado  $n$  al estado  $n - 1$ , la frecuencia de la luz emitida es

$$f = \left( \frac{2\pi^2 m_e h_e^2 e^4}{h^3} \right) \frac{2n - 1}{n^2(n - 1)^2}$$

(b) El principio de correspondencia de Bohr afirma que los resultados cuánticos pueden reducirse a resultados clásicos en el límite de grandes números cuánticos. Demuestre que conforme  $n \rightarrow \infty$ , esta expresión varía en función de  $1/n^3$  y se reduce hasta la frecuencia clásica esperada en la emisión del átomo. *Sugerencia:* para calcular la frecuencia clásica, observe que la frecuencia de revolución es  $v/2\pi r$ , en donde  $v$  es la rapidez del electrón y  $r$  está dado por la ecuación 41.10.

**52. Problema de repaso.** Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y William Phillips recibieron el premio Nobel de física en 1997 por “el desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos por medio de luz láser”. Una parte de su trabajo fue realizado con un haz de átomos (masa  $\sim 10^{-25}$  kg) moviéndose a una rapidez alrededor de 1 km/s, similar a la rapidez de las moléculas del aire a temperatura ambiente. Un haz de luz láser intensa, sintonizada a una transición atómica visible (suponga 500 nm) es dirigido directamente al haz de átomos. Es decir, el haz de átomos y el haz de luz se desplazan en direcciones opuestas. Un átomo en estado fundamental absorbe de inmediato un fotón. La cantidad de movimiento total del sistema es conservado durante el proceso de absorción. Después de un intervalo de  $10^{-8}$  s, el átomo excitado radia gracias a la emisión espontánea. Tiene iguales probabilidades de emitir un átomo en cualquier dirección. Por tanto, el promedio de “retroceso” del átomo es cero después de muchos ciclos de absorción y emisión. (a) Calcule la desaceleración promedio del haz atómico. (b) ¿Cuál es el orden de magnitud de la distancia en la cual serán detenidos los átomos del haz?



El interior de una computadora portátil muestra una variedad de circuitos integrados, de los que aprenderemos en este capítulo. (Steve Allen/*Dreamstime.com*)



- 42.1 Enlaces moleculares
- 42.2 Estados de energía y espectros de moléculas
- 42.3 Enlaces en sólidos
- 42.4 Teoría de electrones libres en metales
- 42.5 Teoría de banda de sólidos
- 42.6 Conducción eléctrica en metales, aislantes y semiconductores
- 42.7 Dispositivos semiconductores

### IMAGINE Está sentado en su escritorio, maravillándose de lo que ha

aprendido sobre física atómica en el capítulo anterior. Está distraído presionando intermitentemente un puntero láser cuando se pregunta: “¿Cómo funciona este puntero láser? ¿Qué lo hace diferente de una linterna? Entiende los átomos en este dispositivo del capítulo 41, pero ¿cómo se pueden convertir estos átomos en un puntero láser?”. Intenta abrir el puntero láser para ver lo que hay adentro, pero no lo logra. Al bajar el puntero láser, toma una computadora portátil que ya no usa y decide que este dispositivo será más fácil de abrir. Al tomar algunas herramientas del cajón de su escritorio, logra abrir la computadora y mirar el interior. ¡Recórcholis! ¿Qué son todos estos pequeños rectángulos negros con las patas plateadas?

**CONEXIONES** En el capítulo anterior, aprendimos sobre la estructura de los átomos individuales. Ahora combinemos átomos para formar materia a granel. El arreglo atómico más aleatorio, el de un gas, fue bien entendido en el siglo XIX, como se explicó en nuestro estudio de la teoría cinética en el capítulo 20. Por el contrario, en un sólido cristalino, los átomos no están dispuestos al azar; más bien, forman una matriz regular. La simetría de la disposición de los átomos estimuló y permitió un rápido progreso en el campo de la física de estado sólido en el siglo XX. Con la adición de cristales líquidos, sólidos amorfos y algunas formas de materia más exóticas, como los condensados de Bose-Einstein, la física de estado sólido se expandió a mediados del siglo XX para convertirse en física de la materia condensada. En este capítulo, aplicaremos nuestros principios y modelos de capítulos anteriores y nuestra nueva comprensión de la mecánica cuántica para comprender las combinaciones de átomos: moléculas. Luego haremos aplicaciones similares de principios y modelos a colecciones más grandes de átomos: los sólidos. La comprensión de los sólidos nos permitirá aprender sobre materiales aislantes, conductores y semicon-



ductores, así como la operación de uniones semiconductoras y varios dispositivos semiconductores.

## 42.1 Enlaces moleculares

Los mecanismos de enlace en una molécula se deben fundamentalmente a las fuerzas eléctricas entre los átomos (o iones). Debido a que la fuerza eléctrica es conservativa, las fuerzas entre los átomos del sistema están relacionadas con una función de energía potencial. Se esperaría una molécula estable en una configuración para la cual la función de energía potencial tiene su valor mínimo. (Véase la sección 7.9.)

Una función de la energía potencial que se usa para modelar una molécula explica dos características conocidas de los enlaces moleculares:

1. La fuerza entre átomos es de repulsión en separaciones muy pequeñas. Cuando dos átomos se acercan uno al otro, algunas de sus capas electrónicas se traslapan y se genera una repulsión entre las capas. Esta repulsión es parcialmente de origen electrostática y también en parte es resultado del principio de exclusión. Ya que todos los electrones deben obedecer el principio de exclusión, algunos electrones de las capas que se traslapan son forzados a pasar a estados de energía más altos, y la energía del sistema aumenta, como si existiera una fuerza de repulsión entre los átomos. Esta función de energía potencial repulsiva se muestra como una función de  $r$  sobre el eje en la figura 42.1a.
2. A separaciones un poco mayores, la fuerza entre átomos es de atracción. Si esto no fuera cierto, los átomos de una molécula no se ligarían. Debido a que la fuerza es atractiva, la energía potencial es negativa y se muestra como una función de  $r$  debajo del eje en la figura 42.1a.

Si tomamos en cuenta estas dos características, la energía potencial en un sistema de dos átomos se puede representar por una expresión de la forma:

$$U(r) = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m} \quad (42.1)$$

donde  $r$  es la distancia de separación internuclear entre los dos átomos, y  $n$  y  $m$  son enteros pequeños. El parámetro  $A$  está asociado con la fuerza de atracción y el parámetro  $B$  con la fuerza de repulsión. El ejemplo 7.9 presenta un modelo común para esta función de energía potencial, el potencial de Lennard-Jones.

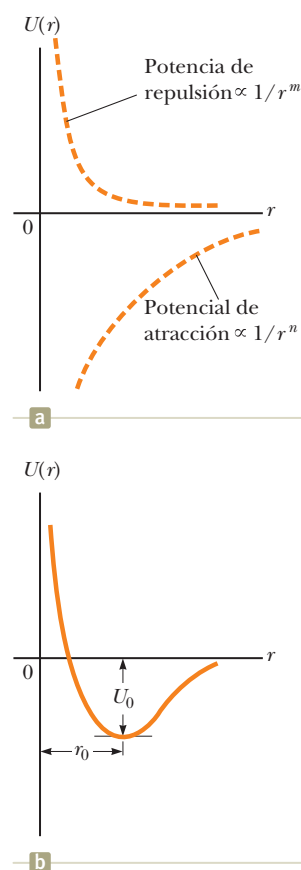
La figura 42.1b muestra los resultados gráficos de la adición de las funciones de energía potencial atractivas y repulsivas en la figura 42.1a. A distancias de separación grandes entre dos átomos, la pendiente de la curva es positiva, que corresponde a una fuerza neta de atracción. A la distancia de separación de equilibrio, las fuerzas de atracción y repulsión están equilibradas. En este punto la energía potencial tiene su valor mínimo, y la pendiente de la curva es cero. La energía  $U_0$  a veces se denomina energía de unión de la molécula.

Una descripción completa de los mecanismos de enlace en moléculas es altamente compleja, porque el enlace incluye interacciones mutuas de numerosas partículas. En esta sección, se explican sólo algunos modelos simplificados.

### Enlace iónico

Cuando dos átomos se combinan en forma tal que uno o más electrones exteriores se transfieren de un átomo al otro, el enlace formado se denomina **enlace iónico**. Los enlaces iónicos se deben fundamentalmente a la atracción de Coulomb entre iones de cargas contrarias.

Un ejemplo conocido de un sólido enlazado en forma iónica es el cloruro de sodio, NaCl, que es la sal de mesa común. El sodio, que tiene la configuración electrónica  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ , se ioniza con relativa facilidad, al ceder su electrón  $3s$  para formar un ion  $\text{Na}^+$ . La energía necesaria para ionizar el átomo para formar  $\text{Na}^+$  es 5.1 eV. El cloro, que tiene la configuración  $1s^2 2s^2 2p^5$ , tiene un electrón menos que la estructura de



**Figura 42.1** (a) La repulsión y las energías potenciales de atracción como función de distancia de separación para un sistema de dos átomos (b) Cuando se combinan las energías en la parte (a) se encuentran que la curva de energía potencial total alcanza un mínimo de profundidad  $U_0$  a una distancia de separación de  $r_0$ .

capa completa del argón. Si compara la energía de un sistema de un electrón libre y un átomo de Cl con uno en el que el electrón se une al átomo para formar un ion  $\text{Cl}^-$ , encontrará que la energía del ion es menor. Cuando el electrón hace una transición del estado  $E = 0$  al estado de energía negativa asociada con la capa disponible en el átomo, se libera energía. Esta cantidad de energía recibe el nombre de **afinidad electrónica** del átomo. Para el cloro, la afinidad electrónica es de 3.6 eV. Por tanto, la energía necesaria para formar  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$  de átomos aislados es  $5.1 - 3.6 = 1.5$  eV, lo que quiere decir que son necesarios 1.5 eV para refinar el electrón del átomo de Na, pero se recuperan 3.6 eV al permitir que ese electrón se una con el átomo de Cl.

Ahora imagine que estos dos iones cargados interactúan entre sí para formar una “molécula”<sup>1</sup> de NaCl. La energía potencial del sistema tendrá componentes atractivos y repulsivos como se describe en la figura 42.1a. La energía total de la molécula de NaCl en función de la distancia de separación entre núcleos está representada en la figura 42.2. A distancias de separación muy grandes, la energía del sistema de iones es 1.5 eV, como se calculó antes. La energía total tiene un valor mínimo de  $-4.2$  eV a la distancia de separación de equilibrio, que es de unos 0.24 nm. Esto significa que la energía necesaria para romper el enlace de  $\text{Na}^+ - \text{Cl}^-$  y formar átomos neutros de sodio y cloro, llamada **energía de disociación**, es de 4.2 eV. La energía de la molécula es menor que la del sistema de dos átomos neutros. En consecuencia, es **energéticamente favorable** para la molécula a formar; si existe un estado de energía menor de un sistema, el sistema tenderá a emitir energía para alcanzar el estado menor de energía. El sistema de átomos neutros de sodio y cloro puede reducir su energía total al transferir energía fuera del sistema (por radiación electromagnética, por ejemplo) y formar la molécula de NaCl.

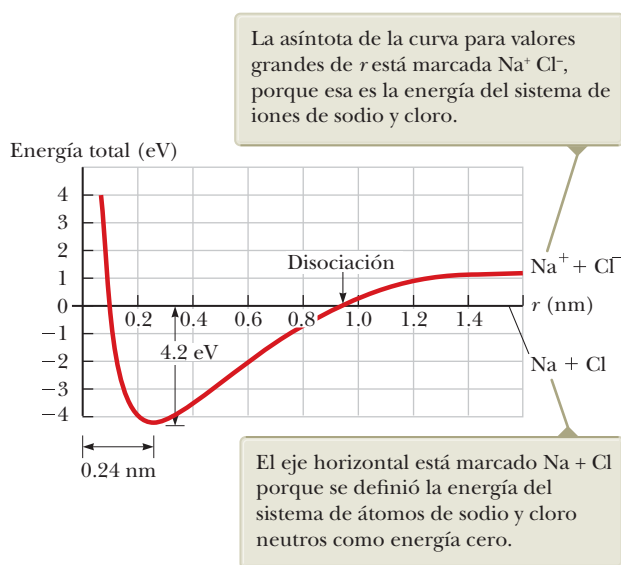
### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 42.1

**Enlaces iónicos y covalentes** En la práctica, estas descripciones de enlaces iónicos y covalentes representan extremos finales de un espectro de enlaces que incluye transferencia electrónica. En un enlace real el electrón no puede ser transferido por *completamente* como en un enlace iónico o *igualmente* compartido como en un enlace covalente. En consecuencia, los enlaces reales se encuentran entre estos extremos.

## Enlace covalente

Un **enlace covalente** entre dos átomos es aquel en el que los electrones proporcionados por cualquiera de los átomos, o por ambos, son compartidos por los dos átomos. Muchas moléculas diatómicas, por ejemplo el  $\text{H}_2$ ,  $\text{F}_2$  y CO, deben su estabilidad a enlaces covalentes. Se describen los enlaces covalentes por medio de funciones de onda atómicas. La función de onda del estado fundamental para un átomo de hidrógeno (capítulo 41) es

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$



**Figura 42.** Energía total en función de la distancia de separación para iones de  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$ .

<sup>1</sup>El NaCl no existe como molécula aislada. En estado sólido, el NaCl forma un arreglo cristalino de iones, como se describe en la sección 42.3. En estado líquido, o en una solución con agua, los iones de  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$  se disocian y quedan libres para moverse uno respecto al otro.



Esta función de onda está graficada en la figura 42.3a para el caso de dos átomos de hidrógeno que están alejados uno del otro. Observe que hay muy poco traslape de las funciones de onda  $\psi_1(r)$  para el átomo 1, situado en  $r = 0$ , y  $\psi_2(r)$  para el átomo 2, situado a cierta distancia. Suponga que ahora los dos átomos están más cerca uno del otro. Cuando esto sucede, sus funciones de onda se traslapan y forman la función de onda compuesta  $\psi_1(r) + \psi_2(r)$ , que se ilustra en la figura 42.3b. Note que la amplitud de probabilidad es mayor entre los átomos de lo que es en cualquier lado de la combinación de átomos. Como resultado, la probabilidad de que los electrones asociados con los átomos estén situados entre los átomos es más alta que en las regiones exteriores del sistema. Por esta razón, la posición promedio de carga negativa en el sistema se encuentra a la mitad entre los átomos. Este escenario se modela como si hubiera una carga negativa fija entre los átomos que ejerce fuerzas de atracción de Coulomb en ambos núcleos. El resultado es una fuerza de atracción global entre los átomos, que se manifiesta en un enlace covalente.

### Enlace de van der Waals

Entre átomos se presentan enlaces iónicos y covalentes para formar moléculas o sólidos iónicos, de modo que se pueden describir como enlaces *dentro* de las moléculas. Hay dos tipos adicionales de enlaces, los enlaces de van der Waals y los de hidrógeno, que pueden presentarse *entre* moléculas.

Podría esperar que dos moléculas neutras no interactúen mediante fuerza eléctrica porque cada una de ellas tiene carga neta cero. No obstante, son atraídas mutuamente por fuerzas electrostáticas débiles denominadas **fuerzas de van der Waals**.

La fuerza de van der Waals se debe al hecho de que, si bien es eléctricamente neutra, una molécula tiene una distribución de carga con centros positivos y negativos en diferentes posiciones en la molécula. Como un resultado, puede actuar como dipolo eléctrico (véase sección 22.4). Debido a los campos del dipolo eléctrico, dos moléculas pueden interactuar en forma tal que exista una fuerza de atracción entre ellas.

Hay tres tipos de fuerzas de van der Waals. El primer tipo, llamado *fuerza de dipolo-dipolo*, se trata de una interacción entre dos moléculas donde cada una tiene un momento de dipolo eléctrico permanente. Por ejemplo, moléculas polares como el HCl tienen momentos de dipolo eléctrico permanentes y atraen otras moléculas polares.

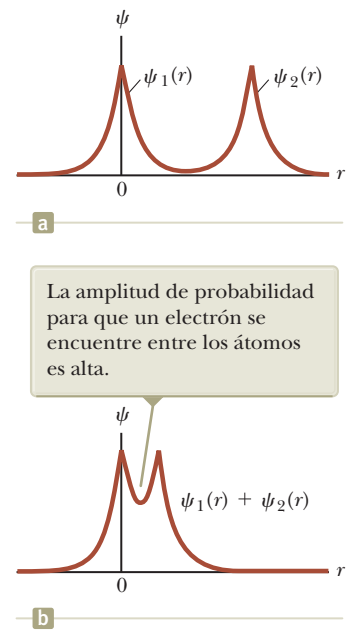
El segundo tipo, la *fuerza de dipolo-dipolo inducido*, resulta cuando una molécula polar que tiene un momento de dipolo eléctrico permanente induce un momento de dipolo en una molécula no polar. En este caso, el campo eléctrico de la molécula polar crea el momento de dipolo en la molécula no polar, que resulta en tal caso una fuerza de atracción entre las moléculas.

El tercer tipo se denomina *fuerza de dispersión*, que es una fuerza de atracción que se presenta entre dos moléculas no polares. En este caso, aun cuando el momento de dipolo promedio de una molécula no polar es cero, el promedio del cuadrado del momento de dipolo es diferente de cero debido a las fluctuaciones de carga. Dos moléculas no polares cerca una de otra tienden a tener momentos de dipolo que están correlacionados en el tiempo para producir una fuerza de atracción de van der Waals.

La fuerza de dispersión también es activa para átomos que no forman enlaces iónicos o covalentes. Los átomos de gas nobles, por ejemplo, debido a su estructura de cubierta llena, generalmente no forman moléculas ni se unen entre sí para formar un líquido. Sin embargo, la estructura electrónica del átomo puede variar en el tiempo, de modo que posee un momento dipolar temporal. Debido a las fuerzas de dispersión, por tanto, a temperaturas suficientemente bajas a las que las excitaciones térmicas son insignificantes, los gases nobles se condensan primero en líquidos y luego se solidifican. (La excepción es el helio, que no se solidifica a la presión atmosférica).

### Enlaces de hidrógeno

Debido a que el hidrógeno tiene sólo un electrón, se espera que forme un enlace covalente con sólo otro átomo dentro de una molécula. Un átomo de hidrógeno en una molécula también puede formar un segundo tipo de enlace entre moléculas, llamado **enlace de hidrógeno**. Utilice la molécula de agua  $\text{H}_2\text{O}$  como ejemplo. En los



**Figura 42.3** Funciones de onda de estado fundamental  $\psi_1(r)$  y  $\psi_2(r)$  para dos átomos que forman un enlace covalente. (a) Los átomos están separados y sus funciones de onda se traslapan en forma mínima. (b) Los átomos están juntos, formando una función de onda compuesta  $\psi_1(r) + \psi_2(r)$  para el sistema.





Doug Struthers/Getty Images

**Figura 42.4** Las moléculas de ADN se mantienen juntas por enlaces de hidrógeno.

dos enlaces covalentes de esta molécula es más probable que los electrones de los átomos de hidrógeno se encuentren cerca del átomo de oxígeno que cerca de los átomos de hidrógeno. Esto deja esencialmente protones desnudos en las posiciones de los átomos de hidrógeno. Esta carga positiva sin protección puede ser atraída al extremo negativo de la otra molécula polar. Como el protón no está protegido por electrones, el extremo negativo de la otra molécula puede aproximarse mucho al protón para formar un enlace que sea lo suficientemente fuerte como para formar una estructura cristalina sólida, por ejemplo la del hielo. Los enlaces dentro de una molécula de agua son covalentes, pero los enlaces entre moléculas de agua en hielo son enlaces de hidrógeno.

El enlace de hidrógeno es relativamente débil en comparación con otros enlaces químicos; puede romperse con una energía de entrada de alrededor de 0.1 eV. Debido a esto, el hielo se derrite a una temperatura de 0°C. De cualquier modo, a pesar de que este enlace es muy débil, el enlace de hidrógeno es un mecanismo fundamental para provocar la unión de moléculas biológicas y polímeros. Por ejemplo, en el caso de la molécula de ADN (ácido desoxirribonucleico), que tiene una estructura en doble hélice (figura 42.4), los enlaces de hidrógeno formados por compartir un protón entre dos átomos crean uniones entre las vueltas de la hélice.

- E XAMEN RÁPIDO 42.1** Para cada uno de los siguientes casos, identifique el tipo de enlace que sea más probable que se presente entre los átomos o entre las moléculas. Escoja entre la siguiente lista: iónico, covalente, van der Waals o de hidrógeno. (a) Átomos de kriptón, (b) átomos de potasio y cloro, (c) moléculas de fluoruro de hidrógeno (HF) o (d) átomos de cloro y oxígeno en un ion de hipoclorito ( $\text{ClO}^-$ ).

## 42.2 Estados de energía y espectros de moléculas

Imagine que los átomos se han unido para formar una molécula y que la energía potencial del sistema está en su valor mínimo. Considere una molécula individual en la fase gaseosa de una sustancia. La energía  $E$  de la molécula se puede dividir en cuatro categorías: (1) energía electrónica, a causa de las interacciones entre los electrones y núcleos de la molécula; (2) energía de traslación, a causa del movimiento del centro de masa de la molécula en el espacio; (3) energía rotacional, a causa de la rotación de la molécula alrededor de su centro de masa; y (4) energía de vibraciones, a causa de la vibración de los átomos constitutivos de la molécula:

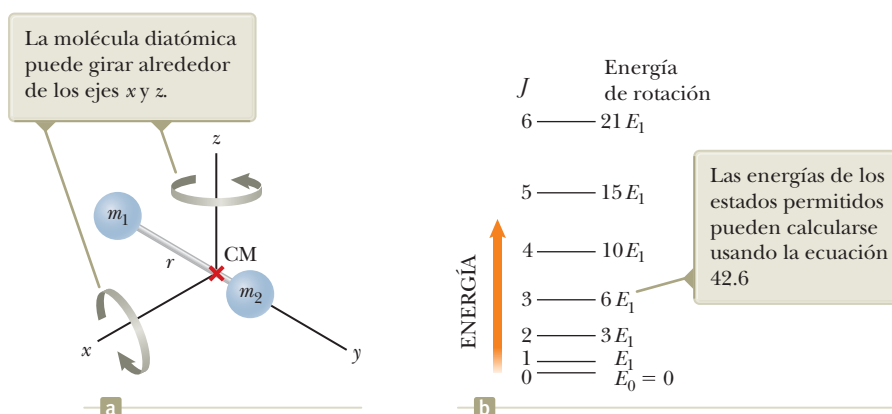
Energía total de una molécula ▶

$$E = E_{\text{el}} + E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{vib}}$$

Exploraremos la función de las energías de traslación, rotacional y de vibración de moléculas al determinar los calores específicos molares de los gases en las secciones 20.2 y 20.3. Debido a que la energía de traslación no está relacionada con la estructura interna, esta energía molecular no es importante al interpretar los espectros moleculares. La energía electrónica de una molécula es muy compleja porque incluye la interacción de numerosas partículas cargadas; pero se han creado diferentes técnicas para aproximar sus valores. Mientras se logra estudiar las energías electrónicas, es posible determinar información importante acerca de una molécula al analizar sus estados de energía rotacional y de vibración. Como veremos a continuación, los estados de rotación están separados por diferencias de energía más pequeñas que los estados de vibración. Las transiciones entre estos estados dan líneas espectrales en las regiones de microondas e infrarrojas del espectro electromagnético, respectivamente.

### Movimiento rotacional de moléculas

Considere la rotación de una molécula alrededor de su centro de masa, limitando la explicación para la molécula diatómica (figura 42.5a), pero observando que las mismas ideas se pueden aplicar a moléculas poliatómicas. Una molécula diatómica alineada a lo largo del eje  $x$  tiene sólo dos grados de libertad rotacional, que corresponden a rotaciones alrededor de los ejes  $y$  y  $z$  que pasan a través del centro de masa de la



**Figura 42.5** Rotación de una molécula diatómica alrededor de su centro de masa (a) Una molécula diatómica orientada a lo largo del eje  $y$ . (b) Energías rotacionales permitidas de una molécula diatómica expresada como múltiplos de  $E_1 = \hbar^2/I$

molécula. Estudiamos la rotación de tal molécula y su contribución al calor específico de un gas en la sección 20.3. Si  $\omega$  es la frecuencia angular de rotación alrededor de uno de estos ejes, la energía cinética rotacional de la molécula alrededor de dicho eje se expresa con la ecuación 10.24:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (42.2)$$

En esta ecuación,  $I$  es el momento de inercia de la molécula cerca del centro de masa dado por

$$I = \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) r^2 = \mu r^2 \quad (42.3)$$

◀ Momento de inercia para una molécula diatómica

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los átomos que conforman la molécula,  $r$  es la separación atómica y  $\mu$  es la **masa reducida** de la molécula (véase el ejemplo 40.5 y el problema 30 en el capítulo 40):

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (42.4)$$

◀ Masa reducida de una molécula diatómica

La magnitud de la cantidad de movimiento angular de la molécula alrededor de su centro de masa está dada por la ecuación 11.16,  $L = I\omega$ , que en física clásica puede tener cualquier valor. En la sección 41.4, mencionamos que cualquier sistema en el que la función de energía potencial sea esféricamente simétrica y que muestre rotación tiene las mismas soluciones de la ecuación de Schrödinger que las de la parte angular del átomo de hidrógeno. La molécula es un sistema rotativo, por lo que las soluciones que describen su rotación deben seguir el mismo comportamiento. Considere la ecuación 41.27 para los valores permitidos del número cuántico de momento angular orbital para el átomo de hidrógeno. Debe haber una expresión paralela para la rotación molecular:

$$L = \sqrt{J(J+1)} \hbar \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (42.5)$$

◀ Valores permitidos de la cantidad de movimiento angular rotacional

donde  $J$  es un entero llamado **número cuántico rotacional**. Al combinar las ecuaciones 42.5 y 42.2, obtiene una expresión para los valores permitidos de la energía cinética rotacional de la molécula:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2I} (I\omega)^2 = \frac{L^2}{2I} = \frac{(\sqrt{J(J+1)} \hbar)^2}{2I}$$

$$E_{\text{rot}} = E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (42.6)$$

◀ Valores permitidos de energía rotacional

Las energías rotacionales permitidas de una molécula diatómica se muestran gráficamente en la figura 42.5b. Cuando el número cuántico  $J$  aumenta, los estados se separan más, como se indicó antes para los niveles de energía rotacional de la figura 20.7.

En casi todas las moléculas, las transiciones entre niveles de energía rotacional adyacentes resultan en radiación, la cual se encuentra en la escala de microondas de frecuencias ( $f \sim 10^{11}$  Hz). Cuando una molécula absorbe un fotón de microondas, la molécula salta de un nivel de energía rotacional menor a uno más alto. Las transiciones rotacionales permitidas de moléculas lineales son reguladas por la regla de selección  $\Delta J = \pm 1$ . A partir de esta regla de selección, todas las líneas de absorción del espectro de una molécula lineal corresponden a separaciones de energía igual a  $E_J - E_{J-1}$ , donde  $J = 1, 2, 3, \dots$ . A partir de la ecuación 42.6, las energías de los fotones absorbidos se están dadas por

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E_{\text{rot}} = E_J - E_{J-1} = \frac{\hbar^2}{2I} [J(J+1) - (J-1)J]$$

$$E_{\text{fotón}} = \frac{\hbar^2}{I} J = \frac{h^2}{4\pi^2 I} J \quad J = 1, 2, 3, \dots \quad (42.7)$$

Energía de un fotón absorbida en una transición entre niveles rotacionales adyacentes

donde  $J$  es el número cuántico rotacional del estado de energía más alto. Como  $E_{\text{fotón}} = hf$ , donde  $f$  es la frecuencia del fotón absorbida, la frecuencia permitida para la transición  $J = 0$  a  $J = 1$  es  $f_1 = h/4\pi^2 I$ . La frecuencia correspondiente a la transición  $J = 1$  a  $J = 2$  es  $2f_1$ , y así sucesivamente. Estas predicciones están en excelente acuerdo con las frecuencias observadas.

- EJEMPLO RÁPIDO 42.2** Un gas de moléculas diatómicas idénticas absorbe radiación electromagnética en una amplia gama de frecuencias. La molécula 1 está en el estado de rotación  $J = 0$  y hace una transición al estado  $J = 1$ . La molécula 2 está en el estado  $J = 2$  y hace una transición al estado  $J = 3$ . La relación entre la frecuencia del fotón que excitó la molécula 2 y la frecuencia del fotón que excitó la molécula 1 es (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4 o (e) imposible de determinar.

### Ejemplo 42.1 Rotación de la molécula de CO

La transición rotacional de  $J = 0$  a  $J = 1$  de la molécula de CO se presenta con una frecuencia de  $1.15 \times 10^{11}$  Hz.

(A) Use esta información para calcular el momento de inercia de la molécula.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine que los dos átomos en la figura 42.5a son carbono y oxígeno. El centro de masa de la molécula no está a la mitad entre los átomos debido a la diferencia en masas de los átomos C y O.

**Categorizar** El enunciado del problema pide clasificar este ejemplo como uno que involucra un tratamiento mecánico cuántico y restringe la investigación al movimiento rotacional de una molécula diatómica.

**Analizar** Use la ecuación 42.7 para encontrar la energía de un fotón que excita la molécula del nivel rotacional  $J = 0$  a  $J = 1$ :

$$E_{\text{fotón}} = \frac{h^2}{4\pi^2 I} (1) = \frac{h^2}{4\pi^2 I}$$

Igualé esta energía a  $E = hf$  para el fotón absorbido y resuelva para  $I$ :

$$\frac{h^2}{4\pi^2 I} = hf \rightarrow I = \frac{h}{4\pi^2 f}$$

Sustituya la frecuencia proporcionada en el enunciado del problema:

$$I = \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4\pi^2 (1.15 \times 10^{11} \text{ s}^{-1})} = 1.46 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(B) Calcule la longitud de enlace de la molécula.

#### SOLUCIÓN

Encuentre la masa reducida  $\mu$  de la molécula CO:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(12.0 \text{ u})(16.0 \text{ u})}{12.0 \text{ u} + 16.0 \text{ u}} = 6.86 \text{ u}$$

$$= (6.86 \text{ u}) \left( \frac{1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ u}} \right) = 1.14 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

## 42.1 continuación

Resuelva la ecuación 42.3 para  $r$  y sustituya para la masa reducida y el momento de inercia de la parte(A):

$$r = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{1.46 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{1.14 \times 10^{-26} \text{ kg}}} \\ = 1.13 \times 10^{-10} \text{ m} = \boxed{0.113 \text{ nm}}$$

**Finalizar** El momento de inercia de la molécula y la distancia de separación entre los átomos son ambos muy pequeños, como se esperaba para un sistema microscópico.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si otro fotón de  $1.15 \times 10^{11}$  Hz de frecuencia incide sobre la molécula CO mientras dicha molécula está en el estado  $J = 1$ ? ¿Qué sucede?

**Respuesta** Debido a que los estados cuánticos rotacionales no están igualmente espaciados en energía, la transición de  $J = 1$  a  $J = 2$  no tiene la misma energía que la transición de  $J = 0$  a  $J = 1$ . Por tanto, la molécula *no* se excitará al estado  $J = 2$ . Existen dos posibilidades. El fotón podría pasar por la molécula sin interacción, o el fotón podría inducir una emisión estimulada, similar a la de los átomos y explicada en la sección 41.9. En este caso, la molécula hace una transición de regreso al estado  $J = 0$  y el fotón original y un segundo fotón idéntico deja la escena de la interacción.

## Movimiento de vibración de las moléculas

Si considera que una molécula es una estructura flexible en la cual los átomos están ligados entre sí por “resortes efectivos”, como se muestra en la figura 42.6, es posible aplicar el análisis de modelo del movimiento armónico simple en tanto los átomos de la molécula no estén demasiado lejos de sus posiciones de equilibrio. Recuerde de la sección 15.3, que la función de energía potencial para un oscilador armónico simple es parabólica y que varía con el cuadrado del desplazamiento a partir del equilibrio. (Véase la ecuación 15.20 y la figura 15.9b.) La figura 42.1b muestra una gráfica de la energía potencial en función de la separación atómica para una molécula diatómica, donde  $r_0$  es la separación atómica de equilibrio. Para separaciones cercanas a  $r_0$ , la forma de la curva de energía potencial se asemeja en gran medida a la parábola de la función energía potencial en el modelo de una partícula en movimiento armónico simple.

Según la mecánica clásica, la frecuencia de vibración para el sistema que se ilustra en la figura 42.6 está dada por la ecuación 15.14:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (42.8)$$

donde  $k$  es la constante de resorte efectiva y  $m$  es la masa reducida que proporciona la ecuación 42.4. En la sección 20.3 estudió la contribución de la vibración de las moléculas al calor específico de los gases.

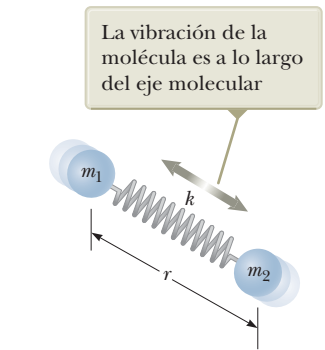
La mecánica cuántica predice que una molécula vibrará en estados cuantizados, como se describe en la sección 40.7. El movimiento de vibración y energía de vibración cuantizada se pueden alterar si la molécula adquiere energía del valor apropiado para hacer una transición entre estados de vibración cuantizados. Como se explicó en la sección 40.7, las energías de vibración permitidas son

$$E_{\text{vib}} = (v + \frac{1}{2})hf \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (42.9)$$

donde  $v$  es un entero llamado **número cuántico de vibración**. (En la sección 40.7 se usó  $n$  para un oscilador armónico general, pero  $v$  se usa a veces para el número cuántico cuando se explican vibraciones moleculares.) Si el sistema está en el estado de vibración más bajo, para el cual  $v = 0$ , su energía de estado fundamental es  $\frac{1}{2}hf$ . La vibración acompañante está siempre presente, incluso si la molécula no está excitada. En el primer estado de vibración excitado,  $v = 1$  y la energía de vibración es  $3/2hf$ , y así sucesivamente.

Al sustituir la ecuación 42.8 en la ecuación 42.9, se obtiene la expresión siguiente para las energías de vibración permitidas:

$$E_{\text{vib}} = (v + \frac{1}{2}) \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (42.10)$$



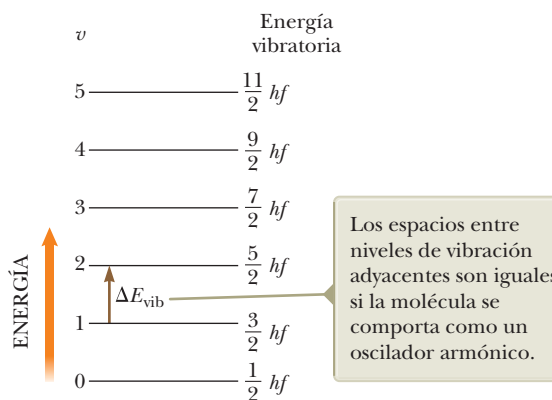
**Figura 42.6** (a) Modelo de resorte efectivo de una molécula diatómica.

◀ Valores permitidos de energía rotacional





**Figura 42.7** Energías de vibración permitidas de una molécula diatómica, donde  $f$  es la frecuencia de vibración de la molécula, dada por la ecuación 42.8.



La regla de selección para las transiciones de vibración permitidas es  $\Delta v = \pm 1$ . Las transiciones entre los niveles de vibración son originadas por la absorción en la región infrarroja del espectro. La energía de un fotón absorbido es igual a la diferencia de energía entre dos niveles de vibración sucesivas cualesquiera. Por tanto, la energía del fotón está dada por

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E_{\text{vib}} = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (42.11)$$

Las energías de vibración de una molécula diatómica están graficadas en la figura 42.7. A temperaturas ordinarias, casi todas las moléculas tienen energías de vibración correspondientes al estado  $v = 0$ , ya que la separación entre estados de vibración es mucho mayor que  $k_b T$ , donde  $k_b$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura.

- EJAMEN RÁPIDO 42.3** Un gas de moléculas diatómicas idénticas absorbe radiación electromagnética en una gama amplia de frecuencias. La molécula 1, inicialmente en el estado de vibración  $v = 0$ , hace una transición al estado  $v = 1$ . La molécula 2, inicialmente en el estado  $v = 2$ , hace una transición al estado  $v = 3$ . ¿Cuál es la razón de la frecuencia del fotón que excitó a la molécula 2 y la del fotón que excitó a la molécula 1? (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4 o (e) imposible de determinar.

### Ejemplo 42.2 Vibración de la molécula de CO

La frecuencia del fotón que causa la transición de  $v = 0$  a  $v = 1$  en la molécula de CO es  $6.42 \times 10^{13}$  Hz. Ignore cualquier cambio en la energía rotacional para este ejemplo.

(A) Calcule la constante de fuerza  $k$  para esta molécula.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine que los dos átomos en la figura 42.6 son carbono y oxígeno. Conforme la molécula vibra, un punto determinado en el resorte imaginario está en reposo. Este punto no está a la mitad del camino entre los átomos debido a la diferencia en masa de los átomos C y O.

**Categorizar** El enunciado del problema pide clasificar este ejemplo como uno que involucra un tratamiento mecánico cuántico y restringe la investigación al movimiento vibratorio de una molécula diatómica. La molécula es analizada con partes del análisis de modelo de la *partícula en movimiento armónico simple*.

**Analizar** Iguale la ecuación 42.11 a la energía del fotón  $hf$  y resuelva para la constante de fuerza:

$$\frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = hf \rightarrow k = 4\pi^2 \mu f^2$$

Sustituya la frecuencia conocida en el enunciado del problema y la masa reducida del ejemplo 42.1:

$$k = 4\pi^2 (1.14 \times 10^{-26} \text{ kg})(6.42 \times 10^{13} \text{ s}^{-1})^2 = 1.85 \times 10^3 \text{ N/m}$$

## 42.2 continuación

(B) ¿Cuál es la amplitud clásica  $A$  de vibración para esta molécula en el estado vibratorio  $v = 0$ ?

## SOLUCIÓN

Igualé la energía potencial elástica máxima  $\frac{1}{2}kA^2$  en la molécula (ecuación 15.21) con la energía vibratoria dada por la ecuación 42.10 con  $v = 0$  y resuelva para  $A$ :

Sustituya el valor para  $k$  de la parte (A) y el valor para  $\mu$ :

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{h}{4\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \rightarrow A = \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \left(\frac{1}{\mu k}\right)^{1/4}$$

$$A = \sqrt{\frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2\pi}} \left[ \frac{1}{(1.14 \times 10^{-26} \text{ kg})(1.85 \times 10^3 \text{ N/m})} \right]^{1/4}$$

$$= 4.79 \times 10^{-12} \text{ m} = 0.004 \text{ 79 nm}$$

**Finalizar** Al comparar este resultado con la distancia de enlace de 0.113 nm calculada en el ejemplo 42.1 se muestra que la amplitud de vibración clásica es aproximadamente 4% de la longitud de enlace.

## Espectros moleculares

En general, una molécula vibra y gira simultáneamente. En una primera aproximación, estos movimientos son independientes entre sí de manera que la energía total de la molécula para estos movimientos es la suma de las ecuaciones 42.6 y 42.9:

$$E = (v + \frac{1}{2})hf + \frac{\hbar^2}{2I} J(J + 1) \quad (42.12)$$

Los niveles de energía de cualquier molécula se calculan a partir de esta expresión, y cada nivel está clasificado por los dos números cuánticos  $v$  y  $J$ . A partir de estos cálculos, se puede construir un diagrama de niveles de energía como el que se ilustra en la figura 42.8a. Para cada valor permitido del número cuántico  $v$  de vibración, hay un conjunto completo de niveles rotacionales que corresponden a  $J = 0, 1, 2, \dots$ . La separación de energía entre niveles sucesivos rotacionales es mucho menor que la separación entre niveles sucesivos de vibración. Como se observó antes, casi todas las moléculas a temperaturas ordinarias están en el estado de vibración  $v = 0$ ; estas moléculas pueden estar en diferentes estados rotacionales, como muestra la figura 42.8a.

Cuando una molécula absorbe un fotón con la energía apropiada, el número cuántico  $v$  de vibración aumenta en una unidad, mientras que el número cuántico rotacional  $J$  aumenta o se reduce en una unidad, como se puede ver en la figura 42.8a. Por tanto, el espectro de absorción molecular en la figura 42.8b consta de dos grupos de líneas: un grupo a la derecha del centro que satisface las reglas de selección  $\Delta J = +1$  y  $\Delta v = +1$ , y el otro grupo a la izquierda del centro que satisface las reglas de selección  $\Delta J = -1$  y  $\Delta v = +1$ .

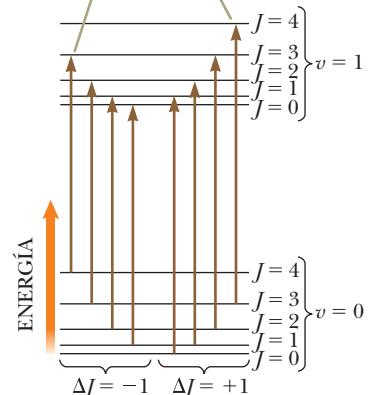
Las energías de los fotones absorbidos se pueden calcular con la ecuación 42.12:

$$E_{\text{fotón}} = \Delta E = hf + \frac{\hbar^2}{I} (J + 1) \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (\Delta J = +1) \quad (42.13)$$

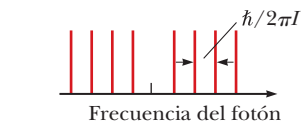
$$E_{\text{fotón}} = \Delta E = hf - \frac{\hbar^2}{I} J \quad J = 1, 2, 3, \dots \quad (\Delta J = -1) \quad (42.14)$$

donde  $J$  es el número cuántico rotacional del estado *inicial*. La ecuación 42.13 genera la serie de líneas igualmente espaciadas *más altas* de la frecuencia  $f$ , en tanto que la ecuación 42.14 genera la serie *más baja* de esta frecuencia. Las líneas adyacentes están separadas en frecuencia por la unidad fundamental  $\hbar/2\pi I$ . La figura 42.8b muestra las frecuencias esperadas del espectro de absorción de la molécula, las cuales aparecen en el espectro de emisión.

Las transiciones obedecen la regla de selección  $\Delta J = \pm 1$  y caen en dos secuencias, las de  $\Delta J = +1$  y las de  $\Delta J = -1$ .



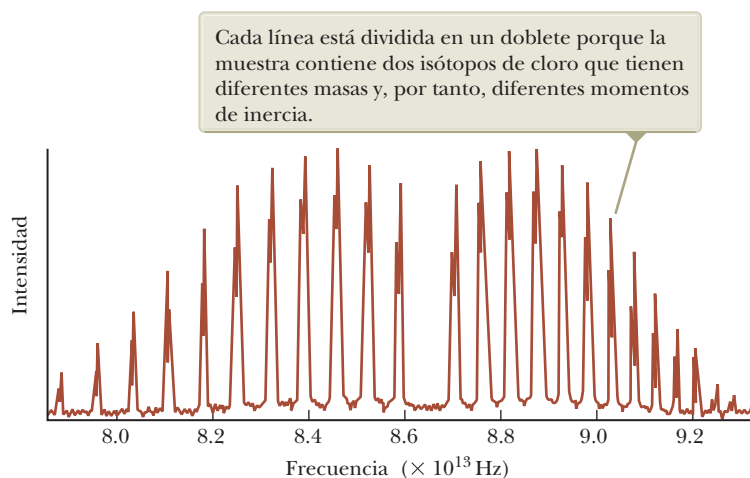
a



b

Las líneas a la derecha de la marca del centro corresponden a transiciones en las que  $J$  cambia por  $+1$ ; las líneas a la izquierda de la marca del centro corresponden a transiciones en las cuales  $J$  cambia por  $-1$ .

**Figura 42.8** (a) Transiciones de absorción entre los estados de vibración  $v = 0$  y  $v = 1$  de una molécula diatómica. Compare los niveles de energía de esta figura con los de la figura 20.7. (b) Líneas esperadas del espectro de absorción de una molécula. Estas líneas aparecen en el espectro de emisión.



**Figura 42.9** Espectro de absorción experimental de la molécula de HCl.

El espectro experimental de absorción de la molécula de HCl que se ilustra en la figura 42.9 sigue muy bien este patrón y refuerza el modelo. No obstante, es evidente una peculiaridad: cada línea está dividida en un doblete. Este doblete se presenta porque dos isótopos de cloro ( $\text{Cl-35}$  y  $\text{Cl-37}$ ; véase la sección 43.1) estaban presentes en la muestra que fue empleada para obtener este espectro. Ya que los isótopos tienen masas diferentes, las dos moléculas de HCl tienen diferentes valores de  $I$ .

La intensidad de las líneas espectrales de la figura 42.9 sigue un patrón interesante, subiendo primero cuando uno se aleja de la brecha central (a unos  $8.65 \times 10^{13}$  Hz, que corresponde a la transición prohibida de  $J = 0$  a  $J = 1$ ) y luego cayendo. Esta intensidad está determinada por el producto de dos funciones de  $J$ . La primera función corresponde al número de estados disponibles para un valor dado de  $J$ . Esta función es  $2J + 1$ , correspondiente al número de valores de  $m_j$ , la rotación molecular análoga a  $m_l$  para estados atómicos. Por ejemplo, el estado  $J = 2$  tiene cinco subestados con cinco valores de  $m_j$  ( $m_j = -2, -1, 0, 1, 2$ ), mientras que el estado  $J = 1$  tiene sólo tres subestados ( $m_j = -1, 0, 1$ ). Por tanto, en promedio y sin considerar la segunda función que se describe a continuación, cinco tercios de moléculas harán la transición del estado  $J = 2$  así como del estado  $J = 1$ .

La segunda función que determina la envolvente de la intensidad de las líneas espectrales es el factor de Boltzmann, introducido en la sección 20.5. El número de moléculas en un estado rotacional excitado está dado por

$$n = n_0 e^{-h^2 J(J+1)/(2Ik_B T)}$$

donde  $n_0$  es el número de moléculas en el estado  $J = 0$ .

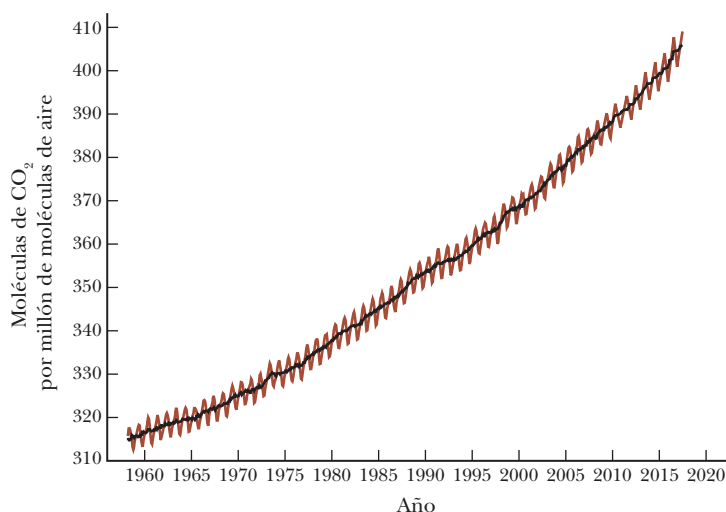
La multiplicación de estos factores indica que la intensidad de las líneas espectrales debe ser descrita por una función de  $J$  como sigue:

$$I \propto (2J + 1) e^{-h^2 J(J+1)/(2Ik_B T)} \quad (42.15)$$

Variación de la intensidad del espectro de vibración-rotación de una molécula

El factor  $(2J + 1)$  aumenta con  $J$  en tanto que el segundo factor exponencial disminuye. El producto de los dos factores da un comportamiento que describe muy bien la envolvente de las líneas espectrales de la figura 42.9.

La excitación de niveles de energía rotacional y de vibración es una consideración importante en modelos de corriente para el calentamiento global. La mayoría de las líneas de absorción para  $\text{CO}_2$ , está en la sección infrarroja del espectro. Debido a eso, la luz visible del Sol no es absorbida por el  $\text{CO}_2$  atmosférico sino que incide en la superficie de la Tierra, calentándola. A su vez, la superficie de la Tierra, con una temperatura mucho menor que el Sol, emite radiación térmica que es máxima en la porción infrarroja del espectro electromagnético (sección 40.1). Esta radiación infrarroja es absorbida por las moléculas de  $\text{CO}_2$  del aire en lugar de emitir las al espacio. El  $\text{CO}_2$  atmosférico actúa como una válvula de una sola dirección para la energía a causa del Sol y es responsable, junto con algunas otras moléculas atmosféricas, de la



**Figura 42.10** Concentración de dióxido de carbono atmosférico en partes por millón (ppm) de aire seco como una función del tiempo. Estos datos fueron registrados en el Observatorio de Mauna Loa en Hawái. Las variaciones anuales (curva de color marrón) coinciden con las temporadas de crecimiento debido a que la vegetación absorbe el dióxido de carbono del aire. El aumento constante de la concentración media (curva de color negro) es motivo de preocupación para los científicos.

elevación de la temperatura de la superficie terrestre en ausencia de una atmósfera. Este fenómeno se conoce comúnmente como “efecto invernadero”. Quemar combustibles fósiles en la sociedad industrializada actual agrega más  $\text{CO}_2$  a la atmósfera. Esta adición de  $\text{CO}_2$  aumenta la absorción de radiación infrarroja, lo que aumenta aún más la temperatura de la Tierra. A su vez, este aumento en temperatura causa cambios climáticos sustanciales.

Como se ve en la figura 42.10, la cantidad de dióxido de carbono en la atmósfera ha aumentado constantemente desde mediados del siglo xx. Esta gráfica muestra los datos duros que indican que la atmósfera está experimentando un cambio significativo, aunque no todos los científicos están de acuerdo en la interpretación de lo que significa el cambio en términos de las temperaturas globales.

El Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático (IPCC, por sus siglas en inglés) es un organismo científico que evalúa la información disponible en relación con el calentamiento global y los efectos asociados relacionados con el cambio climático. Fue fundada originalmente en 1988 por dos organizaciones de las Naciones Unidas, la Organización Meteorológica Mundial y el Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente. El IPCC ha publicado cuatro informes de evaluación sobre el cambio climático, el más reciente en 2014. El informe de 2014 concluye que hay una probabilidad de más del 95-100% de que el aumento de la temperatura global medido por los científicos se deba a la colocación de gases de efecto invernadero como el dióxido de carbono en la atmósfera por los humanos. El informe también predice un aumento de la temperatura global entre  $2.5^\circ\text{C}$  y  $7.8^\circ\text{C}$  en el siglo XXI, un aumento del nivel del mar de hasta 60 cm y muy altas probabilidades de climas extremos, que incluyen olas de calor, sequías, ciclones y fuertes lluvias. Como resultado de este informe y otra información, el “Acuerdo de París” fue adoptado por todos los 195 Estados miembros participantes y la Unión Europea en la 21ª Conferencia de las Partes de la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático en diciembre de 2015. El tratado fue firmado por suficientes países después de la Conferencia que entró en vigor en noviembre de 2016. El tratado establece límites a la emisión de gases de efecto invernadero y podría ser útil para minimizar el aumento de la temperatura durante el resto de este siglo.

Además de sus aspectos científicos, el calentamiento global es un problema social con muchas facetas. Estas facetas abarcan la política y la economía internacional, porque el calentamiento global es un problema mundial. Cambiar nuestras políticas requiere costos reales para resolver el problema. El calentamiento global también tiene aspectos tecnológicos, y los nuevos métodos de fabricación, transporte y suministro de energía deben diseñarse para desacelerar o revertir el aumento de la temperatura. El Acuerdo de París también aborda estos problemas.

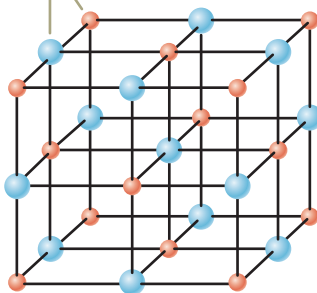
## Ejemplo conceptual 42.3 Comparación de las figuras 42.8 y 42.9

En la figura 42.8a, las transiciones indicadas corresponden a líneas espectrales que están igualmente espaciadas, como se muestra en la figura 42.8b. Sin embargo, el espectro actual en la figura 42.9 muestra líneas que se acercan más conforme aumenta la frecuencia. ¿Por qué el espaciamiento de las líneas espectrales reales difiere de las del diagrama en la figura 42.8b?

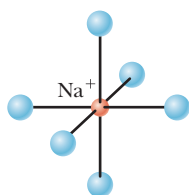
## SOLUCIÓN

En la figura 42.8, la molécula diatómica giratoria se modeló como un objeto rígido (capítulo 10). De cualquier modo, en realidad, conforme la molécula gira cada vez más rápido, el resorte efectivo en la figura 42.6 se estira y proporciona la fuerza aumentada que se asocia con la mayor aceleración centrípeta de cada átomo. Conforme la molécula se estira a lo largo de su longitud, su momento de inercia  $I$  aumenta. Por tanto, la parte rotacional de la expresión de energía en la ecuación 42.12 tiene una dependencia adicional en  $J$  en el momento de inercia  $I$ . Ya que el creciente momento de inercia está en el denominador, conforme  $J$  aumenta, las energías no aumentan tan rápidamente con  $J$  como se indica en la ecuación 42.12. Con cada nivel de energía superior siendo menor que el indicado por la ecuación 42.12, la energía asociada con una transición a dicho nivel es menor, como lo es la frecuencia del fotón absorbido, lo que destruye el intervalo uniforme de las líneas espectrales y da el intervalo disparejo que se ve en la figura 42.9.

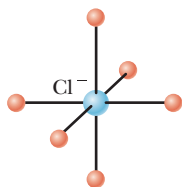
Las esferas azules representan iones de  $\text{Cl}^-$  y las esferas rojas iones  $\text{Na}^+$ .



a



b



c

**Figura 42.11** (a) Estructura cristalina de NaCl. (b) Cada ion positivo de sodio (esferas de color anaranjado) está rodeado por seis iones negativos de cloro (esferas azules). (c) Cada ion de cloro está rodeado por seis iones de sodio.

## 42.3 Enlaces en sólidos

Un sólido cristalino consta de gran número de átomos dispuestos en un conjunto regular, que forman una estructura periódica. Los iones en un cristal de NaCl están enlazados en forma iónica, como ya se hizo notar, y los átomos de carbono en diamante, forman enlaces covalentes entre ellos. El enlace metálico descrito al final de esta sección es responsable de la cohesión del cobre, plata, sodio y otros metales sólidos.

## Sólidos iónicos

Muchos cristales se forman por enlace iónico, en que la interacción dominante entre los iones es la fuerza de Coulomb. Considere la porción de cristal de NaCl de la figura 42.11a. Las esferas rojas son los iones de sodio y las esferas azules son los iones de cloro. Como se muestra en la figura 42.11b, cada ion  $\text{Na}^+$  tiene seis vecinos más próximos  $\text{Cl}^-$  iones. Del mismo modo, en la figura 42.11c, cada ion de  $\text{Na}^+$  tiene seis iones de  $\text{Cl}^-$  vecinos más cercanos, y cada ion de  $\text{Cl}^-$  tiene seis iones de  $\text{Na}^+$  vecinos más cercanos. Cada ion de  $\text{Na}^+$  es atraído por sus seis vecinos de  $\text{Cl}^-$ . La energía potencial correspondiente es  $-6k_e e^2/r$ , donde  $k_e$  es la constante de Coulomb y  $r$  es la distancia de separación entre cada ion de  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$ . Además, hay 12 iones de  $\text{Na}^+$  vecinos más cercanos a una distancia de  $\sqrt{2}r$  del ion de  $\text{Na}^+$ , y estos 12 iones positivos ejercen fuerzas más débiles de repulsión en el  $\text{Na}^+$  central. Además, más allá de estos 12 iones de  $\text{Na}^+$  hay más iones de  $\text{Cl}^-$  que ejercen una fuerza de atracción, y así sucesivamente. El efecto neto de todas estas interacciones es la energía potencial eléctrica negativa resultante

$$U_{\text{atracción}} = -\alpha k_e \frac{e^2}{r} \quad (42.16)$$

donde  $\alpha$  es un número sin dimensiones, conocido como **constante de Madelung**. El valor de  $\alpha$  depende sólo de la estructura cristalina particular del sólido. Por ejemplo,  $\alpha = 1.7476$  para la estructura de NaCl.

Los cristales iónicos forman cristales duros relativamente estables. Son malos conductores de electricidad porque no contienen electrones libres; cada electrón del sólido está fuertemente ligado a uno de los iones, de modo que no tiene suficiente movilidad para llevar corriente. Los cristales iónicos tienen altos puntos de fusión; por ejemplo, el punto de fusión del NaCl es  $801^\circ\text{C}$ . Los cristales iónicos son transparentes a la radiación visible porque las capas formadas en sólidos iónicos por los electrones están tan fuertemente ligadas, que la radiación visible no posee suficiente energía para trasladar electrones a la siguiente capa permitida. La radiación infrarroja se absorbe intensamente porque las vibraciones de los iones tienen frecuencias resonantes naturales en la región infrarroja de baja energía.



## Sólidos covalentes

El carbono sólido, en la forma de diamante, es un cristal cuyos átomos están enlazados de manera covalente. Ya que el carbono atómico tiene la configuración electrónica  $1s^2 2s^2 2p^2$ , le faltan cuatro electrones para llenar su capa  $n = 2$ , que puede ajustar ocho electrones. En consecuencia, dos átomos de carbono tienen una fuerte atracción uno con otro, con una energía de cohesión de 7.37 eV. En la estructura de diamante, cada átomo de carbono está ligado de manera covalente a otros cuatro átomos de carbono situados en las cuatro esquinas de un cubo, como se ilustra en la figura 42.12a.

La estructura cristalina de diamante se ilustra en la figura 42.12b. Observe que cada átomo forma enlaces covalentes con los cuatro átomos más cercanos. La estructura básica de diamante se denomina tetraedro (cada átomo de carbono está en el centro de un tetraedro regular), y el ángulo entre los enlaces es de  $109.5^\circ$ . Otros cristales como el silicio y el germanio tienen la misma estructura.

El carbono es interesante dado que puede formar varios tipos diferentes de estructuras. Además de la estructura de diamante, forma grafito que tiene propiedades completamente diferentes. En esta forma, los átomos de carbono forman capas planas con conjuntos hexagonales de átomos. Una interacción muy débil entre las capas, permite retirar con facilidad las capas bajo fricción, como ocurre en el grafito que se usa en las minas de los lápices.

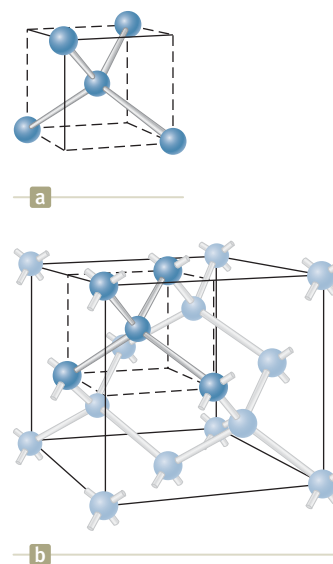
Los átomos de carbono también forman una gran estructura hueca; en este caso, el compuesto se llama **buckminsterfullereno** en honor al arquitecto R. Buckminster Fuller, quien inventó la cúpula geodésica. La forma singular de esta molécula (figura 42.13) proporciona una “jaula” para contener otros átomos o moléculas. Estructuras relacionadas, llamadas “buckytubos” debido a sus largas estructuras cilíndricas y angostas de átomos de carbono, pueden ser la base para materiales extremadamente fuertes pero ligeros.

Un área actual de la investigación activa se encuentra en las propiedades y aplicaciones de **grafeno**. El grafeno consiste en una monocapa de átomos de carbono, con los átomos dispuestos en hexágonos de modo que la monocapa se ve como alambre de pollo. Copos de grafito que se desprenden de un lápiz al escribir contienen pequeños fragmentos de grafeno. Pioneros en la investigación de grafeno son Andre Geim (n. 1958) y Konstantin Novoselov (nacido en 1974) de la Universidad de Manchester, que recibió el Premio Nobel de Física en 2010 por sus experimentos. El grafeno tiene propiedades electrónicas, térmicas y ópticas interesantes que se encuentran actualmente bajo investigación. Sus propiedades mecánicas incluyen una resistencia a la rotura 200 veces la del acero. Las aplicaciones potenciales en estudio incluyen nanocintas grafeno, puntos cuánticos, transistores, moduladores ópticos y circuitos integrados.

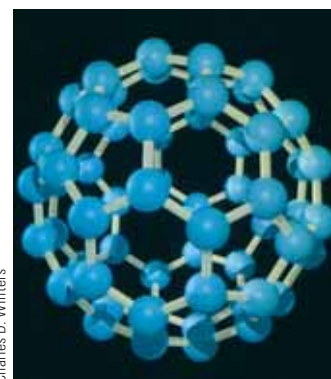
## Sólidos metálicos

Los enlaces metálicos son, por lo general, más débiles que los iónicos o covalentes. Los electrones exteriores de los átomos de un metal están relativamente libres para moverse por el material, y existe una gran cantidad de estos electrones móviles en un metal. La estructura metálica puede verse como un “mar” o un “gas” de electrones casi libres que rodea una red de iones positivos (figura 42.14, página 1158). El mecanismo de enlace en un metal es la fuerza de atracción entre el conjunto total de iones positivos y el gas de electrones.

La luz interactúa fuertemente con los electrones libres de los metales. En consecuencia, la luz visible es absorbida y re-emitada muy cerca de la superficie de un metal, lo cual explica la naturaleza brillante de las superficies metálicas. Además de su alta conductividad eléctrica producida por los electrones libres, la naturaleza no direccional del enlace permite que numerosos tipos diferentes de átomos metálicos se disuelvan en diversos metales en cantidades variables. Las resultantes *soluciones sólidas*, o *aleaciones*, pueden diseñarse por tener propiedades particulares, como son resistencia a la tracción, ductilidad, conductividad eléctrica y térmica, y resistencia a la corrosión.

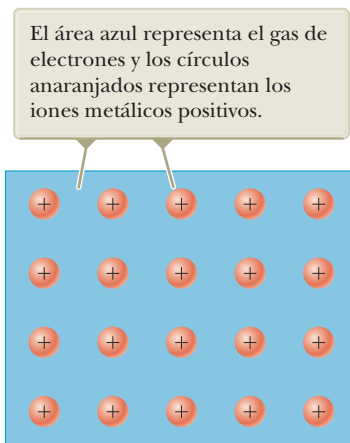


**Figura 42.12** (a) Cada átomo de carbono en un cristal de diamante está enlazado de manera covalente a otros cuatro átomos de carbono y forma una estructura de tetraedro. (b) Estructura del cristal de diamante, que muestra una distribución de enlace tetraédrica.



Charles D. Winters

**Figura 42.13** Representación computarizada de un “buckyball”, abreviatura de la molécula buckminsterfullereno. Estas estructuras moleculares casi esféricas, que se asemejan a balones de fútbol, se llaman así en honor al inventor de la cúpula geodésica. Esta forma de carbono,  $C_{60}$ , fue descubierta por astrofísicos que investigaban el gas carbono que existe entre algunas estrellas. La ciencia está estudiando activamente las propiedades y los usos potenciales de estas formas de carbono y moléculas relacionadas.



**Figura 42.14** Diagrama altamente esquemático de un metal.

Los sólidos no metálicos tienden a fracturarse cuando están sometidos a esfuerzo. El fracturamiento ocurre porque la unión entre sólidos no metálicos se produce principalmente con iones o átomos del vecino más cercano. Cuando la distorsión causa suficiente tensión entre algunos de los vecinos más cercanos, se produce una fractura. Por el contrario, los metales tienden a doblarse cuando están sometidos a esfuerzo. La unión en los metales se da entre todos los electrones y todos los iones positivos. Por tanto, no existe un enlace localizado para la fractura cuando el metal está doblado.

## 42.4 Teoría de electrones libres en metales

En la sección 26.3 se describió una teoría clásica de electrones libres para la conducción eléctrica en metales que llevó a la ley de Ohm. Según esta teoría, un metal se modela como un gas clásico de electrones conductores que se mueven en una red fija de iones. Aun cuando esta teoría pronostica la forma funcional correcta de la ley de Ohm, no predice los valores correctos de conductividades eléctrica y térmica.

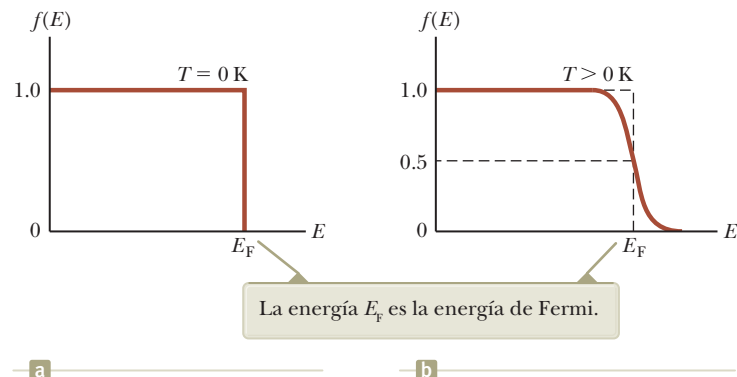
La teoría de electrones libres de base cuántica en metales resuelve los defectos del modelo clásico al tomar en cuenta la naturaleza ondulatoria de los electrones. En este modelo, uno se imagina que los electrones de la capa exterior están libres para moverse a través del metal, pero en realidad están atrapados dentro de una caja tridimensional formada por las superficies del metal. Debido a eso, cada electrón está representado como una partícula en una caja. Como se explicó en la sección 40.2, las partículas en una caja están restringidas a niveles de energía cuantificados.

La física estadística se puede aplicar a un conjunto de partículas en un esfuerzo por relacionar las propiedades microscópicas a las propiedades macroscópicas, como se afirmó con la teoría cinética de los gases en el capítulo 20. En el caso de los electrones es necesario usar *estadísticas cuánticas*, con el requisito de que cada estado del sistema puede ser ocupado sólo por dos electrones (uno con el espín arriba y el otro con el espín abajo) como consecuencia del principio de exclusión. La probabilidad de que un estado particular con energía  $E$  sea ocupado por uno de los electrones en un sólido está dada por

Función de distribución Fermi-Dirac ▶

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} \quad (42.17)$$

donde  $f(E)$  se denomina **función de distribución Fermi-Dirac** y  $E_F$  se llama **energía de Fermi**. En la figura 42.15a se ilustra una gráfica de  $f(E)$  en función de  $E$  en  $T = 0$  K. Observe que  $f(E) = 1$  para  $E < E_F$  y  $f(E) = 0$  para  $E > E_F$ . Esto es, a 0 K todos los estados que tienen energías menores que la energía de Fermi están ocupados, y todos los estados que tienen energías mayores que la energía de Fermi están libres. En la figura 42.15b se muestra una gráfica de  $f(E)$  en función de  $E$  a cierta temperatura  $T > 0$  K. Esta curva muestra que, cuando  $T$  aumenta, la distribución se redondea ligeramente. Con estados cerca y por debajo de  $E_F$  pierden población, y estados cerca y por encima de  $E_F$  ganando población, debido a la excitación térmica. La energía de Fermi  $E_F$  también depende de la temperatura, pero la dependencia es débil en los metales.



**Figura 42.15** Gráfica de la función de distribución Fermi-Dirac  $f(E)$  en función de la energía a (a)  $T = 0$  K y (b)  $T > 0$  K.

Continúe ahora con el análisis de la partícula en una caja similar al expuesto en el capítulo 40, para generalizar los resultados a una caja tridimensional. Recuerde que si una partícula de masa  $m$  está confinada a moverse en una caja unidimensional de longitud  $L$ , los estados permitidos tienen niveles de energía cuantificada dados por la ecuación 40.14:

$$E_n = \left( \frac{h^2}{8mL^2} \right) n^2 = \left( \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \right) n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora imagine una pieza de metal en forma de cubo sólido con lados  $L$  y volumen  $L^3$ , y concentre su atención en un electrón que es libre de moverse en cualquier parte de este volumen. Por tanto, el electrón se modela como una partícula en una caja tridimensional. En este modelo, se requiere que  $\psi(x, y, z) = 0$  en las fronteras del metal. Se puede demostrar (véase el problema 23) que la energía para este electrón es

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (42.18)$$

donde  $m_e$  es la masa del electrón y  $n_x, n_y$  y  $n_z$  son números cuánticos. Como se esperaba, las energías están cuantizadas y cada valor permitido de la energía está caracterizado por este conjunto de tres números cuánticos (uno por cada grado de libertad) y el número cuántico de espín  $m_s$ . Por ejemplo, el estado fundamental, correspondiente a  $n_x = n_y = n_z = 1$ , tiene una energía igual a  $3\hbar^2 \pi^2 / 2m_e L^2$  y puede ser ocupado por dos electrones, correspondientes a espín alto y espín bajo.

Debido al tamaño macroscópico  $L$  de la caja, los niveles de energía para los electrones están muy cerca entre sí. Como resultado, se pueden tratar los números cuánticos como variables continuas. Bajo esta suposición, el número de estados permitidos por volumen unitario que tienen energías entre  $E$  y  $E + dE$  es

$$g(E) dE = \frac{8\sqrt{2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} E^{1/2} dE \quad (42.19)$$

(Véase el problema 46) La función  $g(E)$  se denomina **función de densidad de estados**.

Para un metal en equilibrio térmico, el número de electrones por volumen unitario  $N(E) dE$  que tienen energía entre  $E$  y  $E + dE$  es igual al producto del número de estados permitido y la probabilidad de que un estado esté ocupado, es decir,  $N(E) dE = g(E)f(E)dE$ :

$$N(E) dE = \left( \frac{8\sqrt{2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \right) \left( \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} \right) dE \quad (42.20)$$

Las gráficas de  $N(E)$  en función de  $E$  para dos temperaturas se dan en la figura 42.16.

Si  $n_e$  es el número total de electrones por volumen unitario, se requiere

$$n_e = \int_0^\infty N(E) dE = \frac{8\sqrt{2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{E^{1/2} dE}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} \quad (42.21)$$

Esta condición es útil para calcular la energía de Fermi. A  $T = 0$  K, la función de distribución de Fermi-Dirac  $f(E) = 1$  para  $E < E_F$  y  $f(E) = 0$  para  $E > E_F$ . Por tanto, a  $T = 0$  K, la ecuación 43.23 se convierte en

$$n_e = \frac{8\sqrt{2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = \frac{2}{3} \frac{8\sqrt{2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} E_F^{3/2} \quad (42.22)$$

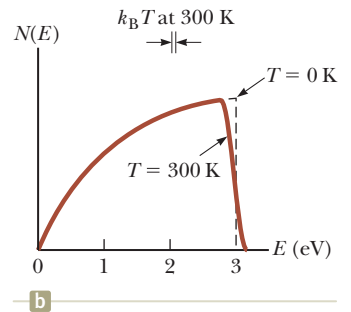
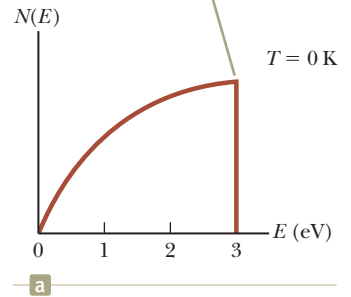
Al resolver para la energía de Fermi a 0 K

$$E_F(0) = \frac{h^2}{2m_e} \left( \frac{3n_e}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (42.23)$$

Las energías de Fermi para metales están en el rango de algunos electrón voltios. Los valores representativos para varios metales se dan en la tabla 42.1. Se deja como un problema (problema 25) para demostrar que la energía promedio de un electrón libre en un metal a 0 K es

$$E_{\text{prom}} = \frac{3}{5} E_F \quad (42.24)$$

Para darse una idea de la escala, imagine que la energía de Fermi  $E_F$  del metal es 3 eV.



**Figura 42.16** Gráfica de la función de distribución electrónica en función de la energía en un metal a (a)  $T = 0$  K y (b)  $T = 300$  K.

◀ Energía de Fermi a  $T = 0$  K



**TABLA 42.1** Valores calculados de la energía de Fermi para metales a 300 K en función de la teoría del electrón libre

Metal	Concentración de electrones ( $\text{m}^{-3}$ )	Energía de Fermi (eV)
Li	$4.70 \times 10^{28}$	4.72
Na	$2.65 \times 10^{28}$	3.23
K	$1.40 \times 10^{28}$	2.12
Cu	$8.46 \times 10^{28}$	7.05
Ag	$5.85 \times 10^{28}$	5.48
Au	$5.90 \times 10^{28}$	5.53

**Ejemplo 42.4** La energía de Fermi del oro

Cada átomo de oro (Au) aporta un electrón libre al metal. Calcule la energía de Fermi para el oro.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Imagine electrones que llenan los niveles disponibles en el oro a  $T = 0$  K, hasta que el sólido es neutro. La energía más alta de llenado es la energía de Fermi.

**Categorizar** El resultado se evalúa con un resultado de esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya la concentración de electrones libres en el oro, de la tabla 42.1, en la ecuación 42.23 para calcular la energía de Fermi a 0 K:

$$E_F(0) = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})} \left[ \frac{3(5.90 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})}{8\pi} \right]^{2/3}$$

$$= 8.85 \times 10^{-19} \text{ J} = 5.53 \text{ eV}$$

**42.5** Teoría de banda en sólidos

En la sección 42.4 se modelaron los electrones de un metal como partículas con movimiento libre dentro de una caja tridimensional y no se puso atención a la influencia de los átomos padres. En esta sección se refina el modelo al incorporar la contribución de los átomos padres que forman el cristal.

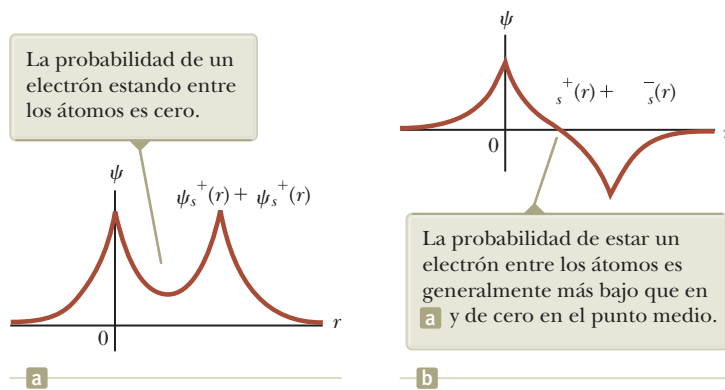
Tomando como base lo estudiado en el capítulo 40, la densidad de probabilidad  $|\psi|^2$  para un sistema es físicamente significativa, mientras que la amplitud de probabilidad  $\psi$  no lo es. Considere como ejemplo un átomo que tiene un solo electrón  $s$  fuera de una capa cerrada. Las dos funciones de onda siguientes son válidas para este átomo con número atómico  $Z$ :

$$\psi_s^+(r) = +Af(r)e^{-Zr/na_0} \quad \psi_s^-(r) = -Af(r)e^{-Zr/na_0}$$

donde  $A$  es la constante de normalización y  $f(r)$  es una función<sup>2</sup> de  $r$  que varía con el valor de  $n$ . Seleccionar cualquiera de estas funciones de onda que conduce al mismo valor de  $|\psi|^2$ , de modo que ambas opciones son equivalentes. No obstante, aparece una diferencia, cuando se combinan dos átomos.

Si dos átomos idénticos están muy separados, no interactúan, y se puede considerar que sus niveles de energía electrónica son los de átomos aislados. Suponga que estos átomos son de sodio, cada uno con un electrón solitario  $3s$  que está en un estado cuántico bien definido. Cuando los dos átomos de sodio se acerquen entre sí, sus funciones de onda comenzarán a traslaparse, como se explicó con el enlace covalente, en la sección 42.1. Las propiedades del sistema combinado difieren, dependiendo de si se combinan dos átomos con funciones de onda  $\psi_s^+(r)$ , como en la figura 42.17a, o uno con función de onda  $\psi_s^+(r)$  y el otro con  $\psi_s^-(r)$ , como en la figura 42.17b. La opción de dos átomos con función de onda  $\psi_s^-(r)$  es físicamente equivalente al caso

<sup>2</sup>Las funciones  $f(r)$  se denominan *polinomios de Laguerre*. Se pueden hallar en textos de física moderna en el tratamiento cuántico del átomo de hidrógeno.



**Figura 42.17** Energías de los niveles 1s y 2s en el sodio como función de la distancia  $r$  de separación entre los átomos. (a) División de los niveles 1s y 2s cuando dos átomos de sodio se acercan entre sí. (b) División de los niveles 1s y 2s cuando cinco átomos de sodio se acercan entre sí. (c) Formación de bandas de energía cuando un gran número de átomos de sodio se ensamblan para formar un sólido.

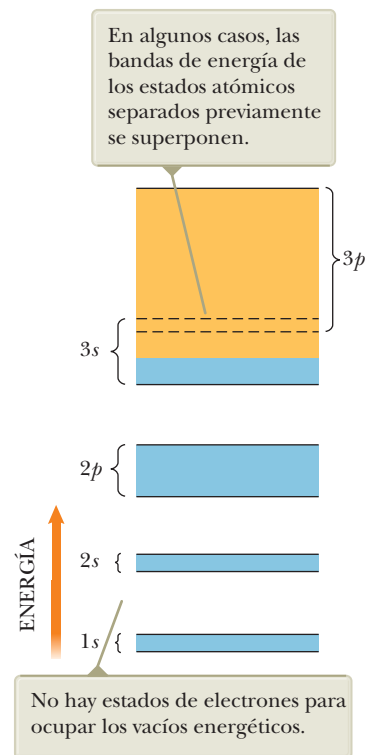
de dos funciones de onda positivas, de modo que no se consideran por separado. Cuando se combinan dos funciones de onda  $\psi_s^+(r)$ , el resultado es una función de onda compuesta en la que las amplitudes de probabilidad se suman entre los átomos. De cualquier modo si  $\psi_s^+(r)$  se combina con  $\psi_s^-(r)$  las funciones de onda entre los núcleos se restan. Por tanto, las amplitudes de probabilidad combinadas para las dos posibilidades son diferentes. Estas dos posibles combinaciones de funciones de onda representan dos estados posibles del sistema de dos átomos. Estas curvas se interpretan como aquellas que representan la amplitud de probabilidad de hallar un electrón. La curva positiva-positiva muestra alguna probabilidad de hallar el electrón en el punto medio entre los átomos. La función positiva-negativa no muestra esta probabilidad. Un estado con una elevada probabilidad de que haya un electrón *entre* dos núcleos positivos debe tener una energía diferente ¡que un estado en donde el electrón tenga una alta probabilidad de encontrarse en otra parte! En consecuencia, los estados son *divididos* en dos niveles de energía a causa de las dos formas de combinar las funciones de onda. La diferencia de energía es relativamente pequeña, de modo que los dos estados están cerca uno del otro en una escala de energía.

Cuando se juntan una gran cantidad de átomos para formar un sólido, ocurre un fenómeno similar. Las funciones de onda individuales pueden juntarse en varias combinaciones de  $\psi_s^+(r)$  y  $\psi_s^-(r)$ , correspondiendo cada combinación posible a una energía diferente. A medida que los átomos se acercan, los diversos niveles de energía del átomo aislado se dividen en múltiples niveles de energía para el sistema compuesto.

Dado que el número de átomos crece, el número de combinaciones de funciones de onda también así como el posible número de energías. Si extiende este argumento al gran número de átomos que se encuentran en los sólidos (del orden de  $10^{23}$  átomos por  $\text{cm}^3$ ), obtiene una enorme cantidad de niveles de energía variable con tan poco espacio entre sí que se les puede considerar una **banda** continua de niveles de energía. En el caso del sodio, se acostumbra denominar bandas  $s$  a las distribuciones continuas de niveles de energía permitidos, porque las bandas se originan de los niveles  $s$  de los átomos individuales de sodio.

Cada nivel de energía en el átomo puede extenderse dentro de una banda cuando los átomos se combinan en un sólido. La figura 42.18 muestra las bandas de energía permitidas de sodio. Observe que las brechas de energía, correspondientes a *energías prohibidas*, se presentan entre las bandas permitidas. Además, algunas bandas exhiben tanta dispersión de energía que existe un traslape entre bandas que aparecen de diferentes estados cuánticos ( $3s$  y  $3p$ ).

Las bandas 1s, 2s y 2p de sodio están llenas de electrones, como indican las áreas sombreadas de azul en la figura 42.18, esto es porque los estados 1s, 2s y 2p de cada átomo están llenos. Un nivel de energía en el que la cantidad de movimiento angular orbital es  $\ell$  puede contener  $2(2\ell + 1)$  electrones. El factor 2 aparece de las dos posi-



**Figura 42.18** Bandas de energía de un cristal de sodio. El azul representa bandas de energía ocupadas por los electrones de sodio cuando el átomo está en su estado fundamental. El color oro representa bandas de energía vacías.



bles orientaciones electrónicas del espín, y el factor  $2\ell + 1$  corresponde al número de posibles orientaciones de la cantidad de movimiento angular orbital. La capacidad de cada banda para un sistema de  $N$  átomos es  $2(2\ell + 1) N$  electrones. Por tanto, las bandas  $1s$  y  $2s$  contienen, cada una,  $2N$  electrones ( $\ell = 0$ ), y la banda  $2p$  contiene  $6N$  electrones ( $\ell = 1$ ). Ya que el sodio tiene sólo un electrón  $3s$  y existe un total de  $N$  átomos en el sólido, la banda  $3s$  contiene sólo  $N$  electrones y está parcialmente llena, como se indica mediante color azul en la figura 43.21. La banda  $3p$ , que es la región más alta de las bandas que se traslapan, está completamente vacía (en la figura aparece en color oro).

La teoría de bandas permite construir modelos sencillos para comprender el comportamiento de conductores, aislantes y semiconductores, así como de dispositivos semiconductores, como en las siguientes secciones.

## 42.6 Conducción eléctrica en metales, aislantes y semiconductores

Los buenos conductores eléctricos contienen una alta densidad de portadores de carga libres, y la densidad de portadores de carga libres en aislantes es casi cero. Los semiconductores, presentados en la sección 22.2, son una clase de materiales tecnológicamente importantes, en que las densidades de los portadores de carga son intermedias entre la de los aislantes y la de los conductores. En esta sección se explican los mecanismos de conducción en estas tres clases de materiales en términos de un modelo basado en bandas de energía.

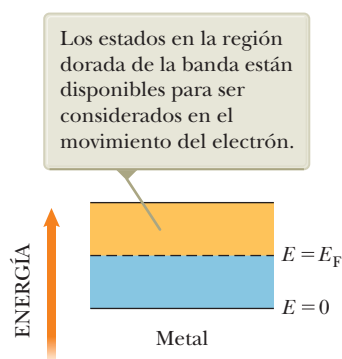
### Metales

Si un material puede ser un buen conductor eléctrico, los portadores de carga del material deberán estar libres de moverse en respuesta a un campo eléctrico aplicado. Considere los electrones de un metal como los portadores de carga. El movimiento de los electrones, en respuesta a un campo eléctrico, representa un aumento en la energía del sistema (la red metálica y los electrones libres) correspondiente a la energía cinética adicional de los electrones en movimiento. El sistema es descrito por el modelo de sistema no aislado para la energía. La ecuación 8.2 se convierte en  $W = \Delta K$ , donde el trabajo es realizado sobre los electrones por el campo eléctrico. Por tanto, cuando se aplica un campo eléctrico a un conductor, los electrones deben moverse hacia arriba a un estado de energía más alto disponible, sobre un diagrama de nivel de energía que representa la energía cinética adicional.

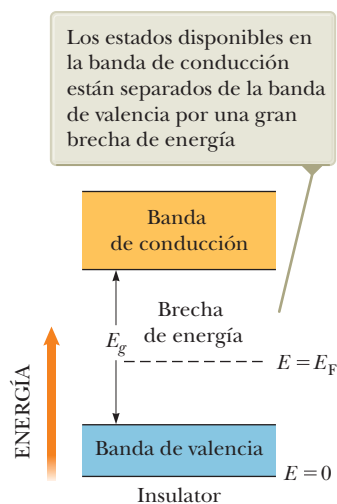
La figura 42.19 muestra una banda semi-llena en un metal a  $T = 0$  K, donde la región azul representa niveles llenos de electrones. Porque los electrones obedecen la estadística de Fermi-Dirac, todos los niveles abajo de la energía de Fermi están llenos de electrones y todos los niveles arriba de la energía de Fermi están vacíos. La energía de Fermi se encuentra en la banda en el estado lleno más alto. A temperaturas ligeramente mayores que  $0$  K, algunos electrones son excitados térmicamente a niveles por arriba de  $E_F$ , pero sobre todo hay poco cambio respecto al caso de  $0$  K. No obstante, si al metal se le aplica una diferencia de potencial, los electrones que tengan energías cercanas a la energía de Fermi requieren sólo de una pequeña cantidad de energía adicional del campo aplicado para alcanzar estados de energía cercanos, vacíos, por arriba de la energía de Fermi. Por tanto, los electrones de un metal que experimente sólo un pequeño campo eléctrico aplicado están libres para moverse porque hay numerosos niveles vacíos disponibles cerca de los niveles de energía ocupados. El modelo de metales según la teoría de banda muestra que los metales son excelentes conductores eléctricos.

### Aislantes

Ahora considere las dos bandas de energía más externas de un material en que la banda inferior baja está llena de electrones y la banda más alta está vacía a  $0$  K (figura



**Figura 42.19** Banda semi-llena de un metal, un conductor eléctrico. A  $T = 0$  K, la energía de Fermi se encuentra a la mitad de la banda.



**Figura 42.20** Un aislante eléctrico a  $T = 0$  K tiene una banda de valencia llena y una banda de conducción vacía. El nivel de Fermi se encuentra entre estas bandas en la región conocida como brecha de energía.

42.20). La banda llena más baja se denomina **banda de valencia**, y la banda vacía superior se conoce como **banda de conducción**. (La banda de conducción es la que está parcialmente llena en un metal.) Es común llamar **brecha de energía**  $E_b$  del material a la separación de energía entre las bandas de valencia y de conducción. La energía de Fermi se encuentra en alguna parte entre la brecha de energía,<sup>3</sup> como se ve en la figura 42.20.

Suponga que un material tiene una brecha de energía relativamente grande, por ejemplo, unos 5 eV. A 300 K (temperatura ambiente)  $k_B T = 0.025$  eV, que es mucho menor que la brecha de energía. A estas temperaturas, la distribución de Fermi-Dirac pronostica que hay muy pocos electrones térmicamente excitados dentro de la banda de conducción. No existen estados disponibles que se encuentren cerca en energía y dentro de la cual los electrones puedan moverse hacia arriba, para explicar la energía cinética extra asociada con el movimiento por el material en respuesta a un campo eléctrico. En consecuencia, los electrones no se mueven y el material es un aislante.

## Semiconductores

Los semiconductores tienen el mismo tipo de estructura de banda que un aislante, pero la brecha de energía es mucho menor, del orden de 1 eV. La tabla 42.2 muestra las brechas de energía para algunos materiales representativos. La estructura de banda de un semiconductor se ilustra en la figura 42.21. Porque el nivel de Fermi está situado cerca de la mitad de la brecha para un semiconductor y  $E_b$  es pequeña, un considerable número de electrones son térmicamente excitados de la banda de valencia a la banda de conducción. Debido a que hay muchos niveles vacíos arriba de los niveles térmicamente llenos en la banda de conducción, una pequeña diferencia de potencial aplicada puede elevar fácilmente la energía de los electrones de la banda de conducción, lo cual resulta en una corriente moderada.

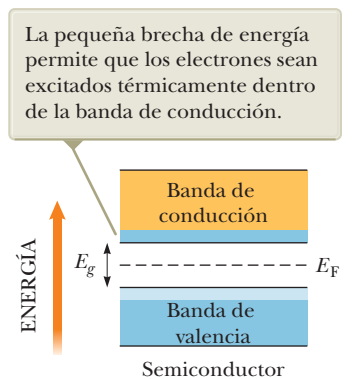
A  $T = 0$  K, todos los electrones en estos materiales están en la banda de valencia y no hay energía que los excite a cruzar la banda de energía. Por tanto, los semiconductores son malos conductores a temperaturas muy bajas. Ya que la excitación térmica de los electrones al otro lado de la brecha angosta es más probable a temperaturas más altas, la conductividad de los semiconductores aumenta rápidamente con la temperatura. Esto contrasta claramente con la conductividad de los metales, que disminuye poco a poco al aumentar la temperatura.

Los portadores de carga de un semiconductor pueden ser negativos, positivos o ambos. Cuando un electrón se mueve de la banda de valencia y entra a la banda de conducción, deja tras de sí un sitio vacío, llamado **huevo**, en la banda de valencia que de otro modo estaría llena. Este huevo (deficiente en electrones) actúa como portador de carga en el sentido de que un electrón libre de un lugar cercano puede entrar en el huevo. Siempre que un electrón ingrese en un huevo, crea un nuevo huevo en el lugar que abandonó. Por tanto, el efecto neto se puede ver como el huevo por el que emigra el material en dirección opuesta a la del movimiento de electrones. El huevo se comporta como si fuera una partícula con una carga positiva  $+e$ .

Un cristal semiconductor puro que contiene sólo un elemento o un compuesto se denomina **semiconductor intrínseco**. En este semiconductor existe igual número de electrones y huecos de conducción. Estas combinaciones de cargas se llaman **par electrón-huevo**. En presencia de un campo eléctrico externo, los huecos se mueven en la dirección del campo y los electrones de conducción en la dirección opuesta al campo (figura 42.22, página 1164). Porque los electrones y huecos tienen signos contrarios, estos dos movimientos corresponden a una corriente en la misma dirección.

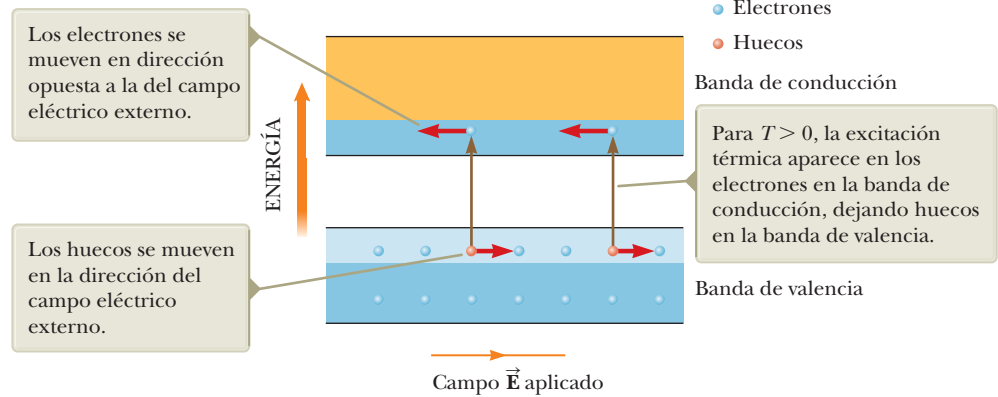
**TABLA 42.2** Valores de brecha de energía para algunos semiconductores

Cristal	$E_b$ (eV)	
	0 K	300 K
Si	1.17	1.14
Ge	0.74	0.67
InP	1.42	1.34
GaP	2.32	2.26
GaAs	1.52	1.42
CdS	2.58	2.42
CdTe	1.61	1.56
ZnO	3.44	3.2
ZnS	3.91	3.6



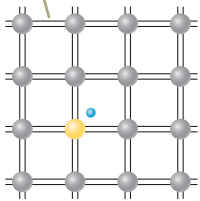
**Figura 42.21** Estructura de banda de un semiconductor a temperaturas ordinarias ( $T \approx 300$  K). La brecha de energía es mucho menor que en un aislante.

<sup>3</sup>Ya antes se definió la energía de Fermi del estado lleno más alto en  $T = 0$ , esto podría sugerir que la energía de Fermi debería estar en lo alto de la banda de valencia de la figura 42.20. De cualquier modo, un tratamiento general más refinado de la energía de Fermi, muestra que está situada en la energía a la que la probabilidad de ocupación es un medio (véase la figura 42.15b). Según esta definición, la energía de Fermi se encuentra en la brecha de energía entre las bandas.

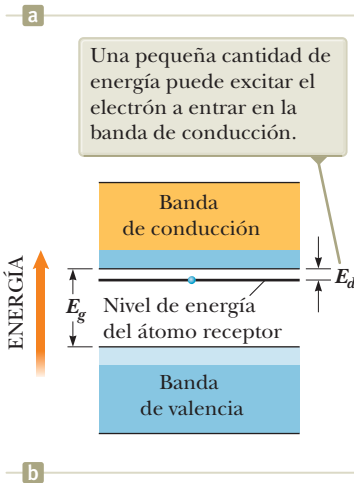


**Figura 42.22** Movimiento de cargas (huecos y electrones) en un semiconductor intrínseco.

Cada línea doble entre los átomos representa un enlace covalente en el que dos electrones están compartidos.



- = Átomos del semiconductor
- = Átomo de impureza con cinco electrones en su capa exterior
- = Electrón extra a causa de la impureza del átomo



**Figura 42.23** (a) Representación en dos dimensiones de un semiconductor formado por átomos del Grupo IV (gris) y un átomo de impureza (amarillo) que tiene cinco electrones en su capa exterior. (b) Diagrama de banda de energía para un semiconductor en el que el electrón casi libre del átomo de impureza se encuentra en la brecha de energía, apenas por debajo del fondo de la banda de conducción.

**EXAMEN RÁPIDO 42.4** Considere los datos de los tres materiales proporcionados en la tabla:

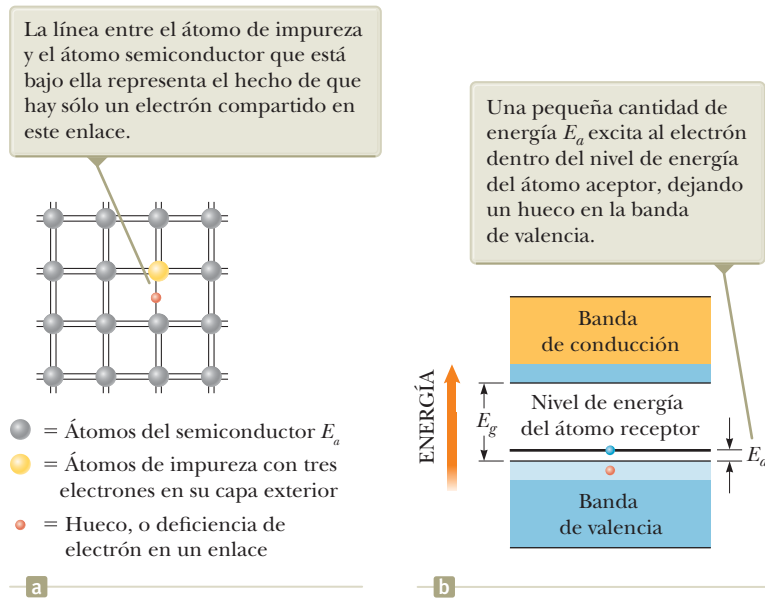
Material	Banda de conducción	$E_g$
A	Vacío	1.2 eV
B	Medio lleno	1.2 eV
C	Vacío	8.0 eV

- Identifique cuál de estos materiales es conductor, aislante o semiconductor.

### Semiconductores que contienen impurezas

Cuando se agregan impurezas a un semiconductor, la estructura de banda del semiconductor y su resistividad se modifican. El proceso de agregar impurezas, llamado **adición de impurezas**, es importante para controlar la conductividad de los semiconductores. Por ejemplo, cuando un átomo que contiene cinco electrones en la capa exterior, como el arsénico, se agrega a un semiconductor del Grupo IV, cuatro de los electrones forman enlaces covalentes con los átomos del semiconductor y uno queda sobrante (figura 42.23a). Este electrón extra está casi libre de su átomo padre y puede modelarse con un nivel de energía que se encuentre en la brecha de energía, apenas por debajo de la banda de conducción (figura 42.23b). Este átomo pentavalente dona, en efecto, un electrón a la estructura y, por esto, se conoce como **átomo donador**. Ya que la separación entre el nivel de energía del electrón del átomo donador y el fondo de la banda de conducción es muy pequeña (por lo general de unos 0.05 eV), es necesaria sólo una pequeña cantidad de excitación térmica para hacer que este electrón se mueva y entre en la banda de conducción. (Recuerde que el promedio de energía de un electrón a temperatura ambiente es de unos  $k_B T \approx 0.025$  eV.) Los semiconductores a los que se agregan impurezas con átomos donadores se llaman **semiconductores tipo n**. Los electrones donantes no tienen un hueco asociado, porque la mayoría de los portadores de carga son electrones que tienen carga negativa.

Si un semiconductor del Grupo IV se hace impuro por átomos que contengan tres electrones en su capa externa, por ejemplo el indio o el aluminio, los tres electrones forman enlaces covalentes con átomos semiconductores vecinos, lo que deja una deficiencia de electrón –un hueco– donde estaría el cuarto enlace si hubiera un electrón disponible de un átomo de impureza para formarlo (figura 42.24a). Esta situación puede modelarse colocando un nivel de energía en la brecha de energía, justo por encima de la banda de valencia, como en la figura 42.24b. Un electrón desde la banda de valencia tiene suficiente energía a temperatura ambiente para llenar este nivel de impureza, dejando tras de sí un hueco en la banda de valencia. Este hueco puede llevar corriente en presencia de un campo eléctrico. Porque un átomo trivalente acepta un electrón de la banda de valencia, tales impurezas se conocen como **átomos aceptores**. Un semiconductor en estado impuro con impurezas trivalentes (aceptores) se conoce como **semiconductor de tipo p** porque la mayoría de los portadores de carga son huecos cargados positivamente.



**Figura 42.24** (a) Representación en dos dimensiones de un semiconductor formado por átomos del Grupo IV (gris) y un átomo de impureza (amarillo) que tiene tres electrones en su capa exterior. (b) Diagrama de banda de energía para un semiconductor en el que el nivel de energía asociado con el átomo trivalente de impureza se encuentra en la brecha de energía, apenas por encima de la parte superior de la banda de valencia.

Cuando la conducción en un semiconductor es resultado de impurezas aceptoras o donadoras, el material se llama **semiconductor extrínseco**. El intervalo representativo típico de densidades impuras para semiconductores extrínsecos es de  $10^{13}$  a  $10^{19} \text{ cm}^{-3}$ , mientras que la densidad de electrones en un semiconductor es aproximadamente de  $10^{21} \text{ cm}^{-3}$ .

## 42.7 Dispositivos semiconductores

La electrónica de la primera mitad del siglo xx estuvo en función de tubos de vacío, en donde los electrones pasaban a través del espacio vacío entre un cátodo y un ánodo. Ha visto tubos de vacío en la figura 28.10 (haz electrónico circular), en la figura 28.15a (aparato de Thomson para medir  $e/m_e$  para el electrón), y en la figura 39.9 (aparato de efecto fotoeléctrico).

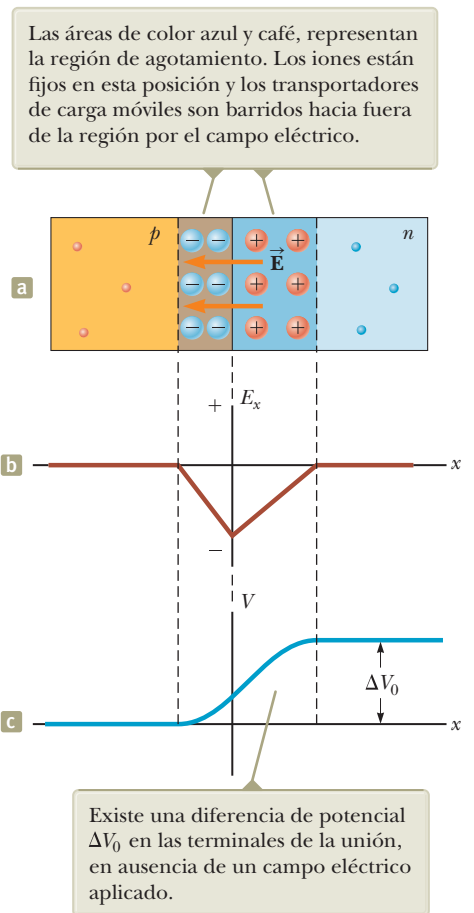
El transistor que se inventó en 1948, llevó a un cambio respecto a los tubos de vacío y hacia los semiconductores como la base de los dispositivos electrónicos. Esta fase de la electrónica ha estado en evolución durante varias décadas. Como se explicó en el capítulo 40, puede que en el futuro cercano haya una nueva fase de la electrónica con dispositivos de nanotecnología que utilice puntos cuánticos y otras estructuras a nanoescala.

En esta sección se explican los dispositivos electrónicos a partir de semiconductores, que tienen todavía amplio uso y lo tendrán por muchos años más.

### El diodo de unión

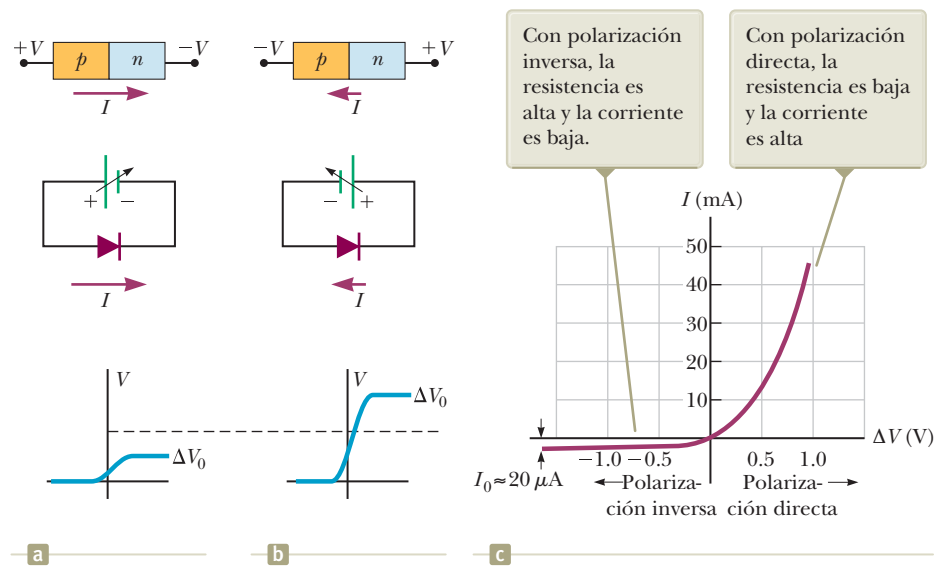
Una unidad fundamental de un dispositivo semiconductor se forma cuando un semiconductor tipo  $p$  se une a un semiconductor tipo  $n$  para formar una **unión  $p-n$** . Un **diodo de unión** es un dispositivo que está a partir de una sola unión  $p-n$ . La función de un diodo de cualquier tipo es pasar corriente en una dirección pero no en la otra. Por tanto, actúa como válvula unidireccional para la corriente.

La unión  $p-n$  se ilustra en la figura 42.25a y consiste en tres regiones diferentes: una región  $p$ , una región  $n$  y una pequeña área que se extiende varios micrómetros de lado a lado de la interface, llamada **región de agotamiento**.



**Figura 42.25** (a) Distribución física de una unión  $p-n$ . (b) Componente  $E_x$  del campo eléctrico interno en función de  $x$  para la unión  $p-n$ . (c) Diferencia de potencial eléctrico interno  $\Delta V$  en función de  $x$  para la unión  $p-n$ .

**Figura 42.26** (a) Una unión  $p$ - $n$  bajo polarización directa. El diagrama central muestra los potenciales aplicados en los extremos de la unión. El de abajo es un diagrama de circuito que muestra una batería con un voltaje ajustable. El diagrama superior muestra cómo el potencial varía a través de la unión. La línea discontinua muestra la diferencia de potencial a través de la unión imparcial. (b) Cuando la batería se invierte y la unión  $p$ - $n$  está bajo polarización inversa, la corriente es muy pequeña. (c) La curva característica para una unión  $p$ - $n$  real.



La región de agotamiento se puede visualizar como surgen cuando las dos mitades de la unión se unen. Los electrones donadores móviles del lado  $n$  más cercanos a la unión (área de color azul oscuro de la figura 42.25a) se difunden al lado  $p$  y llenan huecos ahí localizados, dejando tras de sí iones positivos inmóviles. Cuando esto sucede, es posible modelar los huecos que son llenados como si se extendiera al lado  $n$ , dejando detrás una región (área de color café en la figura 42.25a) de iones negativos fijos.

Debido a que los dos lados de la región de agotamiento llevan cada uno una carga neta, existe un campo eléctrico interno del orden de  $10^4$  a  $10^6$  V/cm en la región de agotamiento (véase la figura 42.25b). Este campo produce una fuerza eléctrica sobre portadores de carga móviles cualesquiera restantes que despejan la región de agotamiento. La región de agotamiento recibe ese nombre porque está agotada de portadores de carga móviles. Este campo eléctrico interno produce una diferencia de potencial interno  $\Delta V_0$  que impide más difusión de huecos y electrones por la unión y, por tanto, asegura una corriente cero en la unión cuando no se aplica diferencia de potencial.

La operación de la unión como diodo es más fácil de comprender en términos de la gráfica de diferencia de potencial que se ilustra en la figura 42.25c. Si se aplica un voltaje  $\Delta V$  a la unión, tal que el lado  $p$  se conecte a la terminal positiva de una fuente de voltaje, como se ve en la figura 42.26a, se reduce la diferencia de potencial interna  $V_0$  en las terminales de la unión; la disminución resulta en una corriente que aumenta exponencialmente con un voltaje directo en aumento, o *polarización directa*. Para *polarización inversa* (donde el lado  $n$  de la unión se conecta a la terminal positiva de una fuente de voltaje), la diferencia de potencial interna  $\Delta V_0$  aumenta con una polarización inversa creciente como en la figura 42.26b; el aumento resulta en una corriente inversa muy pequeña que rápidamente llega al valor de saturación  $I_0$ . La relación corriente-voltaje para un diodo ideal es

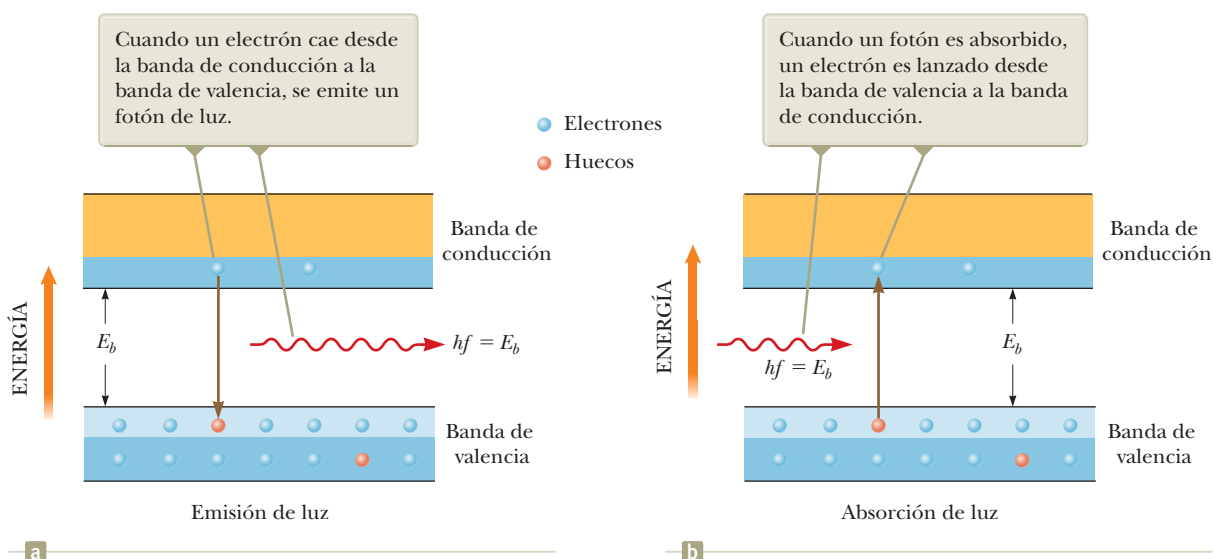
$$I = I_0 (e^{e\Delta V/k_B T} - 1) \quad (42.25)$$

donde la primera  $e$  es la base de los logaritmos naturales, la segunda  $e$  representa la magnitud de la carga electrónica,  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura absoluta. La figura 42.26c muestra una gráfica  $I$ - $\Delta V$  característica de una unión  $p$ - $n$  real, que demuestra el comportamiento del diodo.

## Diodos emisores de luz y de absorción de luz

Los diodos emisores de luz (LED, *light-emitting diodes*) y los láseres semiconductores son ejemplos comunes de dispositivos que dependen del comportamiento de los semiconductores. Los LED se emplean en pantallas de televisión LCD, iluminación del





**Figura 42.27** (a) Emisión de luz desde un semiconductor. (b) Absorción de luz mediante un semiconductor.

hogar, linternas y el flash de una cámara. El puntero láser que estaba inspeccionando en el “Imagine” de apertura contiene un LED especialmente diseñado que, en combinación con una cavidad reflectante (consulte la sección 41.10), emite un rayo estrecho de luz monocromática.

La emisión y la absorción de luz en los semiconductores son semejantes a la de los átomos gaseosos, excepto que en la explicación de los primeros se debe incorporar el concepto de bandas de energía en lugar de niveles discretos de energía en átomos individuales. Como se ve en la figura 42.27a, un electrón excitado eléctricamente para entrar en la banda de conducción puede recombinarse con facilidad en un hueco (en especial si el electrón se inyecta hacia una región  $p$ ). Cuando tiene lugar esta recombinación, se emite un fotón de energía  $E_b$ . Con un diseño apropiado del semiconductor y la envoltura plástica asociada o espejos, la luz de un gran número de estas transiciones servirá como fuente de un LED o un láser semiconductor.

Por el contrario, un electrón de la banda de valencia puede absorber un fotón de luz que está por llegar y ser promovido a la banda de conducción, dejando un hueco detrás (figura 42.27b). Esta energía absorbida se puede usar para operar un circuito eléctrico.

Un dispositivo que opera bajo este principio es la **celda solar fotovoltaica**, que aparece en muchas calculadoras de mano. Una aplicación inicial a gran escala de un arreglo de celdas fotovoltaicas es el suministro de energía para naves espaciales en órbita.

Durante los primeros años del presente siglo, la aplicación de la energía fotovoltaica para la generación de la electricidad con base en tierra ha sido una de las tecnologías de energía de más rápido crecimiento en el mundo. Al momento de esta impresión, la generación global de energía por medio de la energía fotovoltaica es de más de 305 GW. El dueño de una casa puede instalar arreglos de paneles fotovoltaicos en el techo de su propiedad y generar energía suficiente para hacer funcionar el hogar, así como regresar el exceso de alimentación de energía de nuevo a la red eléctrica. Recientemente han sido terminadas varias plantas de energía fotovoltaica, incluyendo el Proyecto Solar de Agua Caliente en Arizona (200 MW completados en 2012 y 397 MW previstos con la terminación), el parque solar Golmud en China (200 MW), y el Parque Solar Charanka en la India (214 MW completados en 2012 y 500 MW previstos con la terminación), el último de los cuales será un lugar en el Parque Solar Gujarat, una colección de varios sitios que se pretende suministren finalmente cerca de 1 GW de potencia. En el momento de esta impresión, la mayor planta de energía fotovoltaica en Estados Unidos es Solar Star, una instalación de 579 MW cerca de Rosamund, California, completada en junio de 2015. Tiene 1.7 millones de paneles solares, cubriendo un área de 13 km<sup>2</sup>.

## Ejemplo 42.5 ¿Dónde está el control remoto?

Estime la brecha de banda del semiconductor en el LED infrarrojo de un control remoto de televisión representativo.

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine que los electrones en la figura 42.27a caen de la banda de conducción a la banda de valencia y emiten fotones infrarrojos en el proceso.

**Categorizar** Se usan los conceptos explicados en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

En el capítulo 33 se aprendió que la longitud de onda de la luz infrarroja varía de 700 nm a 1 mm. Escoja un número con el que sea fácil trabajar, como 1 000 nm (que no es una mala estimación porque los controles remotos por lo general operan en el intervalo de 880 a 950 nm.)

Estime la energía  $hf$  de los fotones del control remoto:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1\,240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1\,000 \text{ nm}} = 1.2 \text{ eV}$$

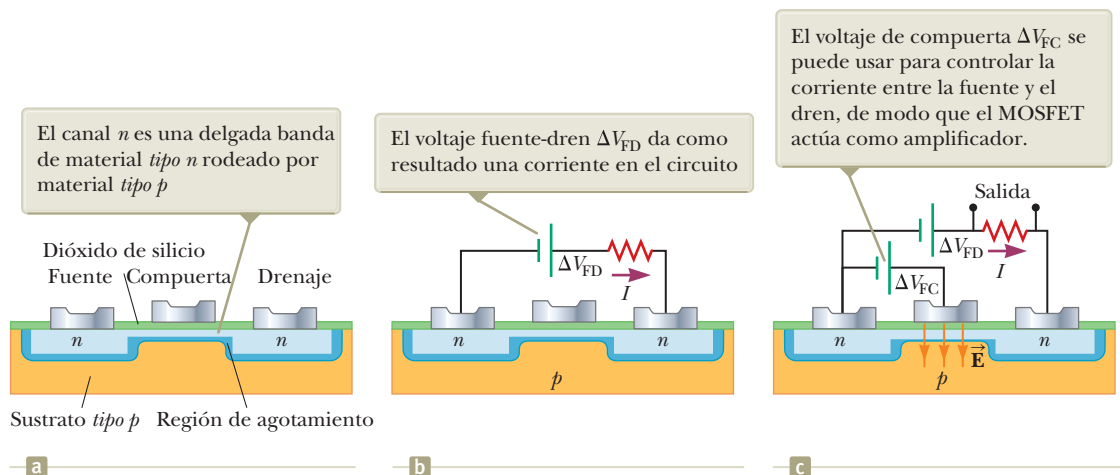
Este valor corresponde a una brecha de energía  $E_g$  de aproximadamente 1.2 eV en el semiconductor del LED.

## El transistor

La invención del transistor por John Bardeen (1908-1991), Walter Brattain (1902-1987) y William Shockley (1910-1989) en 1948 revolucionó totalmente el mundo de la electrónica. Por su obra, estos tres hombres compartieron el premio Nobel de física en 1956. Para 1960, el transistor había sustituido al tubo de vacío en numerosas aplicaciones electrónicas. El advenimiento del transistor creó una industria multimillonaria que produce dispositivos populares como computadoras personales, teclados inalámbricos, teléfonos inteligentes, lectores de libros electrónicos y tabletas.

Un **transistor de unión** está formado por un material semiconductor en el que una región  $n$  muy angosta se intercala entre dos regiones  $p$  o una región  $p$  se intercala entre dos regiones  $n$ . En cualquier caso, el transistor se forma de dos uniones  $p$ - $n$ . Estos tipos de transistores tuvieron un uso generalizado en los primeros días de la electrónica con los semiconductores.

Durante los sesenta, la industria electrónica convirtió muchas aplicaciones electrónicas del transistor de unión al **transistor de efecto de campo**, que es mucho más fácil de fabricar y es igual de eficiente. La figura 42.28a muestra la estructura de un dispositivo muy común, el **MOSFET**, o **transistor de efecto de campo de semiconductor metal óxido**. Es probable que usted utilice millones de dispositivos MOSFET cuando trabaja en su computadora.



**Figura 42.28** (a) Estructura de un transistor de efecto de campo de semiconductor de metal óxido (MOSFET). (b) Se aplica un voltaje de fuente drenaje para obtener corriente en el circuito. (c) Se aplica un voltaje de compuerta.

Hay tres conexiones metálicas (la M de MOSFET) en el transistor: *fuentes, drenaje y compuerta*. La fuente y el drenaje están conectados a regiones semiconductoras tipo  $n$  (la S de MOSFET) a ambos lados de la estructura. Estas regiones están conectadas por un angosto canal de material adicional tipo  $n$ , el canal  $n$ . Las regiones de la fuente, el drenaje y el canal  $n$  están incrustados en un material de sustrato de tipo  $p$ , que forman una región de agotamiento, igual que en el diodo de unión, por la parte inferior del canal  $n$ . (Las regiones de agotamiento también existen en las uniones bajo las regiones de la fuente y el dren, pero se ignoran porque la operación del dispositivo depende básicamente del comportamiento en el canal.)

La compuerta está separada del canal  $n$  por una capa aislante de dióxido de silicio (la O de MOSFET, por el óxido). En consecuencia, no tiene contacto eléctrico con el resto del material semiconductor.

Imagine que se aplica un voltaje de fuente  $\Delta V_{FD}$  en las terminales de la fuente y el drenaje, como se muestra en la figura 42.28b. Con esta situación, fluirán electrones por la región superior del canal  $n$ . No pueden fluir electrones por la región de agotamiento en la parte inferior del canal  $n$  porque esta región está agotada de portadores de carga. Ahora se aplica un segundo voltaje  $\Delta V_{FC}$  en las terminales de la fuente y la compuerta, como se muestra en la figura 42.28c. El potencial positivo en el electrodo de la compuerta resulta en un campo eléctrico por debajo de la compuerta que está dirigido hacia abajo en el canal  $n$  (el campo en “efecto de campo”). Este campo eléctrico ejerce fuerzas hacia arriba sobre los electrones que están abajo de la compuerta, haciendo que ingresen en el canal  $n$ . Esto provoca que la región de agotamiento se haga más pequeña, ensanchando el área en donde hay corriente entre la parte superior del canal  $n$  y la región de agotamiento. Cuando el área se hace más ancha, el valor de la corriente aumenta.

Si se aplica un voltaje variable a la compuerta, por ejemplo el que se genera a causa de música almacenada en la memoria de un teléfono inteligente, el área por la que atraviesa la corriente fuente-drenaje varía en tamaño, de acuerdo con el voltaje variable de la compuerta. Una pequeña variación en el voltaje de la compuerta resulta en una gran variación de corriente y, por consiguiente, un gran voltaje en las terminales del resistor de la figura 42.28c. Por tanto, el MOSFET actúa como amplificador de voltaje. Un circuito formado por una cadena de estos transistores puede hacer que una señal inicial muy pequeña desde un micrófono se amplifique lo suficiente para accionar los potentes altavoces en un concierto al aire libre.

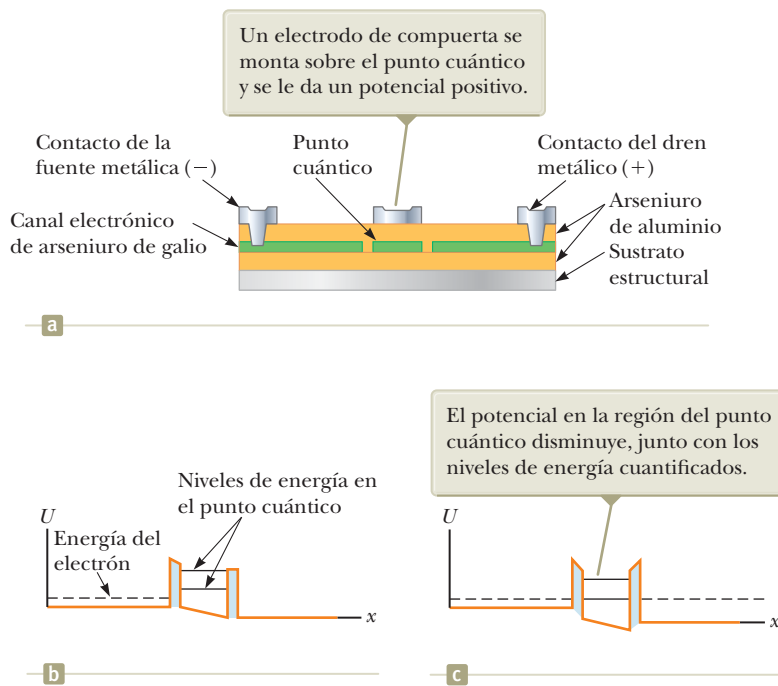
## Transistores de efecto túnel resonante

Otro tipo de transistor, el **transistor de efecto túnel resonante**, aprovecha la discusión cuántica de puntos al final de la sección 40.4. La figura 42.29a (página 1170) muestra la construcción física de dicho dispositivo. La isla de arseniuro de galio en el centro es un punto cuántico ubicado entre dos barreras formadas por las delgadas extensiones de arseniuro de aluminio. Un electrón en la región del punto cuántico está restringido a ciertos niveles de energía, como se explicó en la sección 40.4. Los contactos en los extremos del dispositivo actúan como fuente y drenaje, mientras que el electrodo sobre el punto cuántico actúa como una puerta.

La figura 42.29b, que representa el diagrama de energía potencial para el transistor de efecto túnel, tiene una pendiente en la parte inferior del punto cuántico debido a los diferentes voltajes en la fuente y los electrodos de drenaje. En esta configuración, hay una diferencia entre las energías electrónicas fuera del punto cuántico y las energías cuantificadas dentro del punto.

La figura 42.29c muestra el efecto de aplicar un pequeño voltaje al electrodo de compuerta: el potencial en la región del punto cuántico disminuye, llevando los niveles de energía en el punto hacia abajo con él. La deformación de la barrera potencial da como resultado un nivel de energía en el punto cuántico que coincide con la energía de los electrones fuera del punto. Esta “resonancia” de energías le da su nombre al dispositivo. Cuando se aplica el voltaje a la compuerta, la probabilidad de que se produzca un efecto túnel a través de la barrera aumenta tremendamente y el dispositivo transporta corriente. La corriente resultante causa un voltaje a través de una resistencia externa que es mucho más grande que el voltaje de la compuerta; por tanto, el dispositivo amplifica la señal de entrada al electrodo de compuerta.





**Figura 42.29** (a) Un transistor de efecto túnel resonante. (b) Un diagrama de energía potencial que muestra la doble barrera que representa las paredes del punto cuántico. (c) Se aplica una tensión al electrodo de compuerta.



Courtesy of Texas Instruments, Inc.

**Figura 42.30** Primer circuito integrado de Jack Kilby, probado el 12 de septiembre de 1958.

## El circuito integrado

Inventado independientemente por Jack Kilby (1923-2005, premio Nobel en Física, 2000) para Texas Instruments a fines de 1958 y por Robert Noyce (1927-1990) para Fairchild Camera and Instrument a principios de 1959, el circuito integrado ha sido llamado con toda justicia “la más notable tecnología que haya llegado a la humanidad”. El primer dispositivo de Kilby se muestra en la figura 42.30. Los circuitos integrados han iniciado una “segunda revolución industrial”, y se encuentran en el corazón de computadoras, relojes, cámaras, automóviles, aviones, robots, vehículos espaciales y todo tipo de redes de comunicaciones y de conmutación.

En los términos más sencillos, un **circuito integrado** es un conjunto de transistores, diodos, resistores y capacitores interconectados, construidos en una sola pieza de silicio conocida como *chip*. Los dispositivos electrónicos contemporáneos con frecuencia contienen muchos circuitos integrados como vimos en la fotografía de inicio de capítulo. Los circuitos integrados son los “rectángulos negros con las patas plateadas” mencionados en la semblanza inicial. Los chips de diseño más avanzado contienen fácilmente varios millones de componentes dentro de un área de  $1 \text{ cm}^2$ , en donde el número de componentes por pulgada cuadrada aumenta continuamente desde que se inventó el circuito integrado. Los espectaculares avances de la tecnología del chip se pueden ver observando microchips fabricados por Intel. El chip 4004, introducido en 1971, contenía 2 300 transistores. Esta cifra aumentó a 3.2 millones 24 años más tarde en 1995 con el procesador Pentium. El procesador A10 en un iPhone 7 contenía 3 300 millones de transistores.

Los circuitos integrados fueron inventados en parte para resolver el problema de la interconexión de los transistores. En la era de los tubos de vacío, consideraciones de potencia y tamaño de componentes individuales establecieron límites modestos sobre el número de componentes que podían ser interconectados en un circuito dado. Con el advenimiento del diminuto transistor, de baja potencia y altamente confiable, los límites de diseño sobre el número de componentes desaparecieron y fueron sustituidos por el problema de alambrear juntos cientos de miles de componentes. La magnitud de este problema se puede apreciar cuando se considera que las computadoras de segunda generación (formadas por transistores discretos en lugar de circuitos integrados) contenían varios cientos de miles de componentes que requerían más de un millón de uniones que tenían que soldarse a mano y probarse.

Además de resolver el problema de la interconexión, los circuitos integrados poseen las ventajas de la miniaturización y de una rápida respuesta, dos atributos importantes para computadoras de alta velocidad. Debido a que el tiempo de respuesta de un circuito depende del intervalo necesario de tiempo para que las señales eléctricas viajen con la rapidez de la luz para pasar de un componente a otro, la miniaturización y el empaquetado de componentes da por resultado un ritmo de respuesta rápida.

## Resumen

### ► Conceptos y principios

Dos o más átomos se combinan para formar moléculas debido a una fuerza atractiva neta entre los átomos. Los mecanismos responsables del enlace molecular se pueden clasificar del modo siguiente:

- Los **enlaces iónicos** se forman principalmente debido a la atracción de Coulomb entre iones con carga opuesta. El cloruro de sodio (NaCl) es un ejemplo.
- Los **enlaces covalentes** se forman cuando los átomos constituyentes de una molécula comparten electrones. Por ejemplo, los dos electrones de la molécula de H<sub>2</sub> se comparten igualmente entre los dos núcleos.
- Los **enlaces de Van der Waals** son enlaces electrostáticos débiles entre moléculas o entre átomos que no forman enlaces iónicos o covalentes. Estos enlaces son responsables de la condensación de los átomos de gas noble y las moléculas no polares en la fase líquida.
- Los **enlaces de hidrógeno** se forman entre el centro de carga positiva en una molécula polar, que incluye uno o más átomos de hidrógeno, y el centro de carga negativa en otra molécula polar.

Los valores permitidos de la energía rotacional de una molécula diatómica son

$$E_{\text{rot}} = E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (42.6)$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la molécula y  $J$  es un entero llamado **número cuántico rotacional**. La regla de selección para transiciones entre estados rotacionales es  $\Delta J = \pm 1$ .

Los valores permitidos de la energía vibratoria de una molécula diatómica son

$$E_{\text{vib}} = (v + \frac{1}{2}) \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (42.10)$$

donde  $v$  es el **número cuántico vibratorio**,  $k$  es la constante de fuerza del "resorte efectivo" que enlaza la molécula y  $\mu$  es la **masa reducida** de la molécula. La regla de selección para transiciones vibratorias permitidas es  $\Delta v = \pm 1$ , y la diferencia de energía entre cualesquier dos niveles adyacentes es la misma, sin importar cuáles dos niveles estén involucrados.

Los mecanismos de enlace en los sólidos se pueden clasificar en una forma similar para los esquemas de las moléculas. Por ejemplo, los iones Na<sup>+</sup> y Cl<sup>-</sup> en NaCl forman **enlaces iónicos**, mientras que los átomos de carbono en el diamante forman **enlaces covalentes**. El **enlace metálico** se caracteriza por una fuerza atractiva neta entre núcleos iónicos positivos y los electrones libres móviles de un metal.

En un sólido cristalino, los niveles de energía del sistema forman un conjunto de **bandas**. Los electrones ocupan los estados de energía más bajos, sin más que un electrón por estado. Las brechas de energía están presentes entre las bandas de estados permitidos.

En la **teoría de electrón libre de los metales**, los electrones libres llenan los niveles cuantizados en concordancia con el principio de exclusión de Pauli. El número de estados por unidad de volumen disponible a los electrones de conducción que tienen energías entre  $E$  y  $E + dE$  es

$$N(E) dE = \left( \frac{8\sqrt{2} \pi m_e^{3/2}}{\hbar^3} E^{1/2} \right) \left( \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_b T} + 1} \right) dE \quad (42.20)$$

donde  $E_F$  es la **energía Fermi**. En  $T = 0$  K, todos los niveles por abajo de  $E_F$  están llenos, todos los niveles arriba de  $E_F$  están vacíos y

$$E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( \frac{3n_e}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (42.23)$$


donde  $n_e$  es el número total de electrones de conducción por unidad de volumen. Sólo aquellos electrones que tienen energías cercanas a  $E_F$  pueden contribuir con la conductividad eléctrica del metal.

Un **semiconductor** es un material que tiene una brecha de energía de aproximadamente 1 eV y una banda de valencia que está llena en  $T = 0$  K. Debido a la brecha de energía pequeña, un número significativo de electrones puede excitarse térmicamente a causa de la banda de valencia dentro de la banda de conducción. Las estructuras de banda y las propiedades eléctricas de un semiconductor del Grupo IV se pueden modificar mediante la adición de átomos donadores que contengan cinco electrones en la capa exterior, o con átomos aceptores que contengan tres electrones en la capa exterior. Un semiconductor **con impurezas** con átomos donadores de impureza se llama **semiconductor tipo n**, y uno dopado con átomos aceptores de impureza se llama **semiconductor de tipo p**.





## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN**  
From Cengage

1. La ley Dulong-Petit establece que el calor específico molar es  $3R$  a temperaturas más altas, donde  $R$  es la constante del gas. Para los metales, esta ley se obedece a temperatura ambiente, 300 K. La absorción de energía aparece como energía interna en el metal de dos maneras primarias: (1) vibración de los iones de la red metálica encerrados en posiciones cristalinas y (2) energía cinética traslacional de los electrones libres. La cantidad de electrones libres en un metal es aproximadamente proporcional a  $k_B T / E_F$ , ya que solo los electrones cercanos a la energía de Fermi se pueden excitar térmicamente en estados disponibles. A partir de esta información, trabaje con su grupo para determinar el porcentaje del calor específico molar total que se atribuye a electrones libres en el oro.
2. La mayoría de los átomos en nuestra galaxia son hidrógeno. En algunas regiones de la galaxia, llamadas *nubes moleculares*, la densidad de los átomos es lo suficientemente alta y la temperatura lo suficientemente baja para que se formen las moléculas diatómicas  $H_2$ . Además, dentro de estas nubes, es posible que se formen moléculas de CO. Naturalmente, el número de estas moléculas es mucho más bajo que el del  $H_2$ . Trabaje con su grupo para responder a lo siguiente: (a) Basado en el hecho de que la constante de resorte para la molécula de hidrógeno es  $k = 576$  N/m, encuentre la frecuencia del fotón emitido cuando la molécula de hidrógeno hace una transición desde el nivel vibratorio  $v = 1$  al nivel  $v = 0$ . (b) ¿En qué región del espectro electromagnético está este fotón? (c) En el ejemplo 42.1, la frecuencia del fotón para la transición rotacional más baja para la molécula de CO se da

como  $f_{CO} = 1.15 \times 10^{11}$  Hz. ¿En qué región del espectro electromagnético está este fotón? (d) Las respuestas a ambos (b) y (c) son regiones del espectro en el que los astrónomos pueden detectar la radiación. ¿Por qué los astrónomos estudian estas estructuras galácticas utilizando la detección de moléculas de CO rotatorias en lugar de moléculas vibrantes de  $H_2$ , cuando hay muchas más moléculas de  $H_2$ ? (*Sugerencia:* la temperatura típica de una nube molecular es de aproximadamente 20 K.)

3. **ACTIVIDAD** Su grupo está considerando la siguiente tabla de huecos de banda en varios materiales. (a) Para cada material, encuentre la longitud de onda máxima de un fotón que excite un electrón desde la banda de valencia a la banda de conducción. (b) Discuta en su grupo: ¿Cuál de los materiales en la tabla será transparente a la luz visible?

Material	Símbolo químico	Hueco de banda (eV)
Sulfuro de plomo	PbS	0.37
Germanio	Ge	0.67
Silicio	Si	1.11
Arseniuro de galio	GaAs	1.43
Óxido de cobre	$Cu_2O$	2.1
Fosfuro de galio	GaP	2.26
Nitruro de galio	GaN	3.4
Nitruro de silicio	$Si_3N_4$	5.0
Diamante	C	5.5
Dióxido de silicio	$SiO_2$	9.0

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN**  
From Cengage

### SECCIÓN 42.1 Enlaces moleculares

1. Una fuerza de dispersión de Van der Waals entre átomos de helio produce un pozo de potencial muy poco profundo, con una profundidad del orden de 1 meV. ¿Aproximadamente a qué temperatura esperaríamos que el helio se condense?
2. El cloruro de potasio es una molécula enlazada de modo iónico, que se vende como sustituto de sal para dietas bajas en sodio. La afinidad electrónica del cloro es 3.6 eV. Se necesita una entrada de energía de 0.7 eV para formar iones de  $K^+$  y  $Cl^-$  separados a partir de átomos separados de K y Cl. ¿Cuál es la energía de ionización del K?
3. El potencial de Lennard-Jones proporciona una descripción de la energía potencial de una molécula diatómica,

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes y  $r$  es la separación entre los átomos. Para la molécula  $H_2$ , tome  $A = 0.124 \times 10^{-120} \text{ eV} \cdot \text{m}^{12}$  y  $B = 1.488 \times 10^{-60} \text{ eV} \cdot \text{m}^6$ . Encuentre, (a) la distancia de

separación  $r_0$  para la cual la energía es un mínimo y (b) la energía  $E$  necesaria para romper la molécula  $H_2$ .

4. El potencial de Lennard-Jones proporciona una descripción de la energía potencial de una molécula diatómica,

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes y  $r$  es la separación entre los átomos. Encuentre, en términos de  $A$  y  $B$ , (a) el valor  $r_0$  en el que la energía es un mínimo y (b) la energía  $E$  necesaria para romper una molécula diatómica.

### SECCIÓN 42.2 Estados de energía y espectros de moléculas

5. La molécula de CO hace una transición del estado rotacional de  $J = 1$  a  $J = 2$  cuando absorbe un fotón de frecuencia  $2.30 \times 10^{11}$  Hz. (a) Encuentre el momento de inercia de esta molécula a partir de estos datos. (b) Compare su respuesta con la obtenida en el ejemplo 42.1 y comente el significado de los dos resultados.
6. La frecuencia del fotón que absorbería la molécula de NO en una transición del estado de vibración  $v = 0$  al  $v = 1$ , sin cambio en estado de rotación, es 56.3 THz. El enlace entre los átomos tiene una constante de resorte efectiva de

1530 N/m. (a) Use esta información para calcularla masa reducida de la molécula de NO. (b) Calcule un valor para  $\mu$  usando la ecuación 42.4. (c) Compare sus resultados con los incisos (a) y (b) y explique la diferencia, si es que la hay.

7. Suponga que la distancia entre los protones en la molécula de  $H_2$  es de  $0.750 \times 10^{-10}$  m. (a) Encuentre la energía del primer estado rotacional, con  $J = 1$ . (b) Encuentre la longitud de onda de la radiación emitida en la transición de  $J = 1$  a  $J = 0$ .

8. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? La fuerza efectiva constante de una molécula de HCl vibración es  $k = 480$  N/m. Un haz de radiación infrarroja de longitud de onda de  $6.20 \times 10^3$  nm se dirige a través de un gas de moléculas de HCl. Como resultado, las moléculas son excitadas desde el estado fundamental vibratorio al primer estado vibracional excitado.

9. La constante de resorte efectiva que describe la energía potencial de la molécula de HI es 320 N/m. La de la molécula de HF es 970 N/m. Calcule la amplitud de vibración mínima para (a) la molécula de HI y (b) la molécula de HF.

10. Una molécula diatómica está formada por dos átomos que tienen masas  $m_1$  y  $m_2$  separadas una distancia  $r$ . Demuestre que el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa de la molécula está dado por la ecuación 42.3,  $I = \mu r^2$ .

11. (a) En una molécula de HCl, tome el átomo de Cl como el isótopo  $^{35}\text{Cl}$ . La separación de equilibrio de los átomos de H y Cl es de 0.127 46 nm. La masa atómica del átomo de H es 1.007 825 u y la del átomo de  $^{35}\text{Cl}$  es 34.968 853 u. Calcule la mayor longitud de onda en el espectro rotacional de esta molécula. (b) ¿Qué pasaría si? Repita el cálculo en a), pero considere el átomo de Cl como el isótopo  $^{37}\text{Cl}$ , que tiene una masa atómica de 36.965 903 u. La distancia de separación de equilibrio es la misma que en a). (c) El cloro que se presenta de manera natural contiene aproximadamente tres partes de  $^{35}\text{Cl}$  por una parte de  $^{37}\text{Cl}$ . Debido a las dos diferentes masas del Cl, cada línea del espectro rotacional de microondas del HCl se divide en un doblete, como se muestra en la figura P42.11. Calcule la separación del doblete para la longitud de onda más larga.

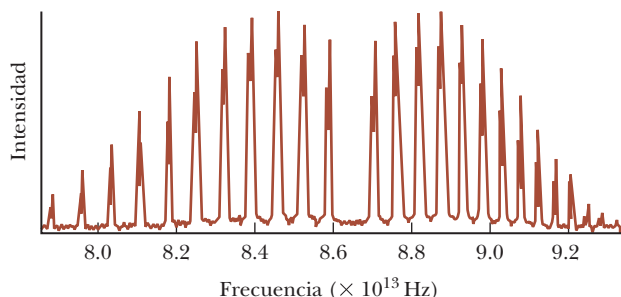


Figura P42.11 Problemas 11, 12 y 16.

12. Usted está dando una charla en una reunión profesional sobre el espectro de absorción de la molécula de HCl (figura P42.11), que se ha obtenido con una muestra que incluye moléculas que contienen solo el átomo de cloro-35, de modo que los picos dobles en la figura P42.11 aparecen como picos únicos. Después de analizar toda la información que puede obtener sobre el movimiento de rotación de las moléculas del espectro, verá una mano levantada por un colega de otra universidad que siempre hace preguntas mordaces. Él dice: “Eso está muy bien, pero ¿y la vibración de la molécula?”

por ejemplo, ¿cuál es la constante de resorte efectiva para la molécula de HCl?”. No le molesta en lo más mínimo con esta pregunta porque se preparó por adelantado para cualquier pregunta que pudiera pensar. Inmediatamente establece un valor numérico para la constante de resorte efectiva de la molécula de HCl.

13. Una molécula de  $H_2$  está en sus estados fundamentales de vibración y rotación. Absorbe un fotón con una longitud de onda de  $2.211 2 \mu\text{m}$  y salta al nivel de energía  $v = 1, J = 1$ . Después cae al nivel de energía  $v = 0, J = 2$ , mientras emite un fotón con una longitud de onda de  $2.405 4 \mu\text{m}$ . Calcule (a) el momento de inercia de la molécula de  $H_2$  alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular al enlace H–H, (b) la frecuencia de vibración de la molécula de  $H_2$  y (c) la distancia de separación de equilibrio para esta molécula.

14. La figura P42.14 es el modelo de una molécula de benceno. Todos los átomos se encuentran en un plano, y los átomos de carbono ( $m_c = 1.99 \times 10^{-26}$  kg) forman un hexágono regular, igual que los átomos de hidrógeno ( $m_H = 1.67 \times 10^{-27}$  kg). Los átomos de carbono tienen una separación de 0.110 nm de centro a centro.

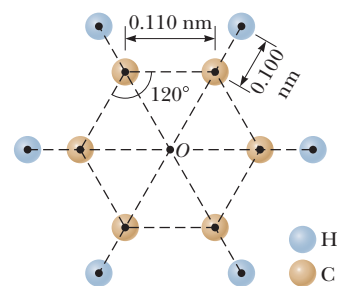


Figura P42.14

(a) Calcule el momento de inercia de la molécula alrededor de un eje perpendicular al plano del papel que pasa por el punto central O. (b) Determine las energías permitidas de rotación alrededor de este eje.

15. La mayor parte de la masa de un átomo está en su núcleo. Modele la distribución de masa de una molécula diatómica como dos esferas con densidad uniforme, cada una de radio  $2.00 \times 10^{-15}$  m y masa  $1.00 \times 10^{-26}$  kg, ubicada en determinados puntos a lo largo del eje x en la figura 42.5a y separadas por  $2.00 \times 10^{-10}$  m. La rotación alrededor del eje que une a los núcleos de la molécula diatómica por lo general se desprecia debido a que el primer estado excitado tendría una energía demasiado alta para tener acceso a ella. Para ver por qué, calcule la razón entre la energía del primer estado excitado para la rotación alrededor del eje y y la energía del primer estado excitado para la rotación alrededor del eje x.

16. Estime el momento de inercia de una molécula de HCl del espectro de absorción infrarrojo que se muestra en la figura P42.11.

SECCIÓN 42.3 Enlaces en sólidos

17. Utilice una lente de aumento para ver la sal de mesa que sale de un salero. Compare lo que vea con la figura 42.11a. La distancia entre un ion de sodio y el ion de cloro vecino más cercano es 0.261 nm. (a) Haga una estimación del orden de magnitud del número N de átomos en un grano de sal. (b) ¿Qué pasaría si? Si tiene un número de granos de sal igual a este número N. ¿Cuál sería su volumen?

18. Considere una cadena unidimensional de iones alternos positivos y negativos. Demuestre que la energía potencial asociada con uno de los iones y sus interacciones con el resto de este cristal hipotético es

$$U(r) = -\alpha k_e \frac{e^2}{r}$$

donde la constante de Madelung es  $\alpha = 2 \ln 2$  y  $r$  es la separación entre iones. *Sugerencia:* utilice la expansión en serie para  $\ln(1+x)$ .

### SECCIÓN 42.4 Teoría de electrones libres en metales

**19.** (a) Encuentre la rapidez representativa de un electrón de conducción en el cobre, tomando su energía cinética como igual a la energía de Fermi, 7.05 eV. (b) Suponga que el cobre es un alambre conductor de corriente. ¿Cómo se compara la rapidez encontrada en el inciso (a) con una rapidez de arrastre típica de 0.1 mm/s (véase la sección 26.1) de electrones en el alambre?

**20.** (a) Establezca de qué depende la energía de Fermi de acuerdo con la teoría de electrón libre de los metales y cómo la energía de Fermi depende de dicha cantidad. (b) Demuestre que la ecuación 42.23 se puede expresar como  $E_F = (3.65 \times 10^{-19}) n_e^{2/3}$ , donde  $E_F$  está en electrón volts cuando  $n_e$  está en electrones por metro cúbico. (c) De acuerdo con la tabla 42.1, ¿en qué factor la concentración de electrones libres en el cobre supera la del potasio? (d) ¿Cuál de estos metales tiene la mayor energía de Fermi? (e) ¿En qué factor es mayor la energía de Fermi? (f) Explique si este comportamiento está predicho por la ecuación 42.23

**21.** La energía de Fermi del cobre a 300 K es 7.05 eV. (a) ¿Cuál es la energía promedio de un electrón de conducción en cobre a 300 K? (b) ¿A qué temperatura la energía promedio de una molécula en un gas ideal sería igual a la energía calculada en el inciso (a)?

**22.** El sodio es un metal monovalente que tiene una densidad de 0.971 g/cm<sup>3</sup> y una masa molar de 23.0 g/mol. Utilice esta información para calcular (a) la densidad de los portadores de carga y (b) la energía de Fermi del sodio.

**23. Problema de repaso.** Un electrón se mueve en una caja tridimensional de longitud  $L$  en sus lados y volumen  $L^3$ . La función de onda de la partícula es  $\psi = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$ . Demuestre que su energía está dada por la ecuación 42.18

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

donde los números cuánticos ( $n_x, n_y, n_z$ ) son enteros  $\geq 1$ . *Sugerencia:* la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones puede escribirse como

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = (U - E)\psi$$

**24.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un metal hipotético tiene las siguientes propiedades: su energía de Fermi es 5.48 eV, su densidad es  $4.90 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, su masa molar es 100 g/mol, y tiene un electrón libre por átomo.

**25.** Demuestre que la energía cinética promedio de un electrón de conducción en un metal a 0 K es  $E_{\text{prom}} = 3/5 E_F$ . *Sugerencia:* en general, la energía cinética promedio es

$$E_{\text{prom}} = \frac{1}{n_e} \int_0^\infty EN(E) dE$$

donde  $n_e$  es la densidad de partículas,  $N(E) dE$  está dada por la ecuación 42.20, y la integral está por encima de todos los valores posibles de la energía.

**26.** (a) Considere un sistema de electrones confinados a una caja tridimensional. Calcule la razón entre el número de niveles de energía permitidos a 8.50 eV y el número a 7.05 eV. (b)

¿Qué pasaría si? El cobre tiene una energía de Fermi de 7.05 eV a 300 K. Calcule la razón entre el número de niveles ocupados a una energía de 8.50 eV y el número a la energía de Fermi. (c) ¿Cómo se compara su respuesta al inciso (b) con la obtenida en el inciso (a).

### SECCIÓN 42.6 Conducción eléctrica en metales, aislantes y semiconductores

**27.** La brecha de energía para el silicio a 300 K es 1.14 eV. (a) Encuentre el fotón de más baja frecuencia que promoverá un electrón de la banda de valencia a la banda de conducción. (b) ¿Cuáles la longitud de onda de este fotón?

**28.** La luz de un tubo de descarga de hidrógeno incide sobre un cristal de CdS. (a) ¿Cuáles líneas espectrales de la serie de Balmer son absorbidas y (b) cuáles son transmitidas?

**29.** La longitud de onda más larga de la radiación absorbida por un determinado semiconductor es 0.512  $\mu\text{m}$ . Calcule la diferencia de energía para este semiconductor.

**30.** En un experimento que está realizando, desea sellar una muestra dentro de una carcasa con aislamiento térmico, de modo que no haya transferencia de energía por calor  $Q$  hacia o desde los alrededores. En la carcasa, instalará una pequeña ventana a través de la cual puede hacer brillar un láser ultravioleta para elevar la temperatura de la muestra. El láser tiene una longitud de onda de 220 nm. Su asistente sugiere usar una ventana de diamante, para la cual la brecha de energía es de 5.47 eV. Determine si la ventana de diamante le permitirá calentar la muestra con el láser.

**31. Problema de repaso.** Cuando un átomo de fósforo es sustituido por un átomo de silicio en un cristal, cuatro de los electrones de valencia del fósforo forman enlaces con átomos vecinos y el electrón restante se encuentra ligado mucho más débilmente. Es posible modelar un electrón libre para moverse por la red cristalina. De cualquier modo, el núcleo de fósforo tiene una carga positiva más que el núcleo de silicio, de modo que el electrón extra proporcionado por el átomo de fósforo es atraído a esta carga nuclear individual  $+e$ . Los niveles de energía del electrón extra son semejantes a los del electrón del átomo de hidrógeno de Bohr con dos excepciones importantes. Primero, la atracción de Coulomb entre el electrón y la carga positiva en el núcleo del átomo de fósforo se reduce en un factor de  $1/\kappa$  de lo que sería en el espacio libre (véase la ecuación 25.23), donde  $\kappa$  es la constante dieléctrica del cristal. Como resultado, los radios orbitales se aumentan en gran medida sobre el átomo de hidrógeno. En segundo término, la influencia del potencial eléctrico periódico de la red hace que el electrón se mueva como si tuviera una masa efectiva  $m^*$ , muy diferente de la masa  $m_e$  de un electrón libre. Es posible usar el modelo de Bohr del hidrógeno para obtener valores bastante precisos para los niveles de energía permitidos del electrón extra. Se quiere encontrar la energía típica de estos estados donadores, que desempeñan un papel importante en los dispositivos electrónicos. Suponga que  $\kappa = 11.7$  en el silicio y  $m^* = 0.220 m_e$ . (a) Determine una expresión simbólica para el radio más pequeño del electrón en términos de  $a_0$ , el radio de Bohr. (b) Sustituya valores numéricos para encontrar el valor del radio más pequeño. (c) Determine una expresión simbólica para los niveles de energía  $E_n'$  del electrón en las órbitas de Bohr alrededor de del átomo donador en términos de  $m_e, m^*, \kappa$  y  $E_n$ , la energía del átomo de hidrógeno en el modelo de Bohr. (d) Encuentre el valor numérico de la energía para el estado fundamental del electrón.

**SECCIÓN 42.7 Dispositivos semiconductores**

32. Suponga que  $T = 300\text{ K}$  ¿Para qué valor de voltaje de polarización  $\Delta V$  en la ecuación 43.27 da (a)  $I = 9.00I_0$ ? (b) ¿Qué pasaría si?  $I = -0.900I_0$ ?

33. Se coloca un diodo en un circuito microelectrónico para proteger el sistema en caso de que una persona no capacitada instale la batería al revés. En la situación correcta de polarización directa, la corriente es de 200 mA con una diferencia de potencial de 100 mV en las terminales del diodo a temperatura ambiente (300 K). Si la batería se invierte, ¿cuál sería la magnitud de la corriente a través el diodo?

34. Un diodo, un resistor y una batería se conectan en un circuito serie. El diodo está a una temperatura a la que  $k_B T = 25.0\text{ meV}$ , y el valor de saturación  $I_0$  de la corriente es  $1.00\text{ }\mu\text{A}$ . La resistencia del resistor es  $R = 745\text{ }\Omega$ , y la batería mantiene una diferencia de potencial constante entre sus terminales  $\mathcal{E} = 2.42\text{ V}$ . (a) Use la regla de circuito de Kirchoff para demostrar que

$$\mathcal{E} - \Delta V = I_0 R (e^{e\Delta V/k_B T} - 1)$$

donde  $\Delta V$  es el voltaje a través del diodo. (b) Para resolver esta ecuación trascendente para el voltaje  $\Delta V$ , grafique el lado izquierdo de la ecuación anterior y el lado derecho como funciones de  $\Delta V$  y encuentre el valor de  $\Delta V$  en el que las curvas se cruzan. (c) Determine la corriente  $I$  en el circuito. (d) Encuentre la resistencia óhmica del diodo, que se define como la razón de  $\Delta V/I$ , en el voltaje del inciso (b). (e) Determine la resistencia dinámica del diodo, que se define como la derivada  $d(\Delta V)/dI$ , del voltaje en el inciso (b).

35. Un diodo está a temperatura ambiente tal que  $k_B T = 0.025\text{ eV}$ . Tomando los voltajes aplicados a través del diodo como  $+1.00\text{ V}$  (bajo polarización directa) y  $-1.00\text{ V}$  (bajo polarización inversa), calcule la razón de la corriente hacia adelante a la corriente inversa si el diodo está descrito por la ecuación 42.25.

**PROBLEMAS ADICIONALES**

36. La constante de resorte efectiva asociada con enlaces en la molécula de  $\text{N}_2$  es  $2297\text{ N/m}$ . Cada uno de los átomos de nitrógeno tiene una masa de  $2.32 \times 10^{-26}\text{ kg}$ , y sus núcleos están a  $0.120\text{ nm}$  uno de otro. Suponga que la molécula es rígida. El estado fundamental de vibración de la molécula está arriba del estado fundamental debido a una diferencia de energía  $\Delta E$ . Calcule el valor  $J$  del estado rotacional que está arriba del estado fundamental rotacional debido a la misma diferencia de energía  $\Delta E$ .

37. La molécula de hidrógeno se separa (se disocia) cuando es excitada internamente por  $4.48\text{ eV}$ . Si se supone que esta molécula se comporta como un oscilador armónico que tiene una frecuencia angular clásica de  $\nu = 8.28 \times 10^{14}\text{ rad/s}$ , encuentre el número cuántico de vibración máximo para un estado por debajo de la energía de disociación de  $4.48\text{ eV}$ .

38. La ecuación 42.1 proporciona la función de energía potencial para dos átomos unidos a una molécula. Al elegir  $A = \alpha k_e e^2$  y  $n = 1$ , como se muestra en la ecuación 42.16, la función de energía potencial representa eso para un cristal unido iónicamente. (a) A partir de la ecuación resultante, demuestre que la fuerza ejercida sobre un ión en un sólido iónico se puede escribir como

$$F = -\alpha k_e \frac{e^2}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{m-1} \right]$$

donde  $\alpha$  es la constante de Madelung y  $r_0$  es la separación de equilibrio. (b) Imagine que un ión en el sólido se desplaza una pequeña distancia  $s$  desde  $r_0$ . Demuestre que el ion experimenta una fuerza restauradora  $F = -Ks$ , donde

$$K = \frac{\alpha k_e e^2}{r_0^3} (m - 1)$$

(c) Use el resultado del inciso (b) para encontrar la frecuencia de vibración de un ion de  $\text{Na}^+$  en  $\text{NaCl}$ . Sea  $m = 8$  y use el valor  $\alpha = 1.7476$ .

39. La energía de disociación del hidrógeno molecular en estado fundamental es  $4.48\text{ eV}$ , mientras que sólo se necesitan  $3.96\text{ eV}$  para disociarlo cuando inicia en el primer estado excitado de vibración con  $J = 0$ . Con esta información, determine la profundidad de la función de energía potencial del  $\text{H}_2$  molecular.

40. Está dando clases particulares a un alumno brillante en su último semestre de física introductoria. El tema particular del día es la unión en sólidos. Cuando comienza la sesión, el alumno le entrega un trozo de papel con la siguiente ecuación escrita en él:

$$U_0 = -\alpha k_e \frac{e^2}{r_0} \left( 1 - \frac{1}{m} \right)$$

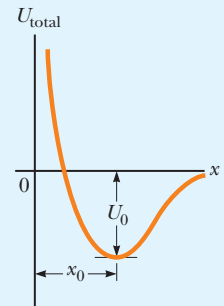
Él dice que encontró esta ecuación en su estudio en línea y que se describe como una expresión de la energía de cohesión iónica de un cristal formado por enlace iónico. Su alumno le pide que obtenga esta ecuación.

41. Una partícula se mueve con movimiento unidimensional por un campo en el que la energía potencial del sistema partícula-campo es

$$U(x) = \frac{A}{x^3} - \frac{B}{x}$$

donde  $A = 0.150\text{ eV} \cdot \text{nm}^3$  y  $B = 3.68\text{ eV} \cdot \text{nm}$ . La forma general de esta función se muestra en la figura P42.41.

(a) Encuentre la posición de equilibrio  $x_0$  de la partícula. (b) Determine la profundidad  $U_0$  de este pozo de potencial. (c) Al moverse a lo largo del eje  $x$ , ¿cuál es la máxima fuerza hacia la dirección  $x$  negativa que experimenta la partícula?



**Figura P42.41**  
Problemas 41 y 42.

42. Una partícula de masa  $m$  se mueve con movimiento unidimensional por un campo en el que la energía potencial del sistema partícula-campo es

$$U(x) = \frac{A}{x^3} - \frac{B}{x}$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes con unidades apropiadas. La forma general de esta función se ilustra en la figura 42.41. (a) Encuentre la posición de equilibrio  $x_0$  de la partícula en términos de  $m$ ,  $A$  y  $B$ . (b) Determine la profundidad  $U_0$  de este pozo de potencial. (c) Al moverse a lo largo del eje  $x$ , ¿cuál es la fuerza máxima hacia la dirección  $x$  negativa que experimenta la partícula?





- 43.** Está preparándose para competir en la Olimpiada de Física. Su instructor lo está asesorando brindándole problemas desafiantes del tipo que podría ver en un examen olímpico. Se le ocurre el siguiente problema y le da 15 minutos para resolverlo: imagine una molécula de HCl perfectamente rígida que no se estira a medida que gira. La separación en equilibrio de sus iones es 0.127 5 nm. Hay dos isótopos para el cloro en la muestra, Cl-35 y Cl-37. Esto da como resultado picos dobles en el espectro molecular como se muestra en la figura 42.9. (a) Encuentre una expresión para la diferencia en la frecuencia entre los picos a la derecha del espacio como una función de las masas de los dos isótopos de cloro y el número cuántico  $J$ . (b) Estime la diferencia en frecuencia numéricamente para  $J = 0$ , sin consultar tablas. ¡Rápido! ¡A trabajar!

- 44.** La función de distribución de Fermi-Dirac se puede escribir como

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} = \frac{1}{e^{(E/E_F - 1)T_F/T} + 1}$$

donde  $T_F$  es la *temperatura de Fermi*, definida de acuerdo con

$$k_B T_F \equiv E_F$$

- (a) Escriba una hoja de cálculo para calcular y graficar  $f(E)$  con  $E/E_F$  a una temperatura  $T_F$  a una temperatura  $T$  fija. (b) Describa las curvas obtenidas para  $T = 0.1T_F$ ,  $0.2T_F$  y  $0.5T_F$ .

## PROBLEMAS DE DESAFÍO

- 45.** Como usted podrá ver en el capítulo 43, el carbono 14 ( $^{14}\text{C}$ ) es un isótopo de carbono. Tiene las mismas propiedades químicas y estructura electrónica que el isótopo inestable de carbono 12 ( $^{12}\text{C}$ ), que es mucho más abundante pero tiene diferentes propiedades nucleares. Su masa es 14 u, que es mayor que el carbono-12 porque tiene dos neutrones extra en el núcleo carbono-14. Suponga que la energía potencial molecular del CO es el mismo para ambos isótopos de carbono, y que las tablas y ejemplos de la sección 43.2 se refieren al monóxido de carbono con átomos de carbono-12. (a) ¿Cuál es la frecuencia de vibración del  $^{14}\text{CO}$ ? (b) ¿Cuál es el momento de inercia del  $^{14}\text{CO}$ ? (c) ¿Cuáles longitudes de onda de luz pueden ser absorbidas por el  $^{14}\text{CO}$  en el estado ( $v = 0, J = 10$ ) establezca qué hará que termine en el nivel  $v = 1$ ?

- 46.** Deduzca la ecuación 42.19 para  $g(E)$ , la función de densidad de estados. Proceda de la siguiente manera: imagínese una partícula confinada en una caja cúbica tridimensional de longitud lateral  $L$ , sujeta a las condiciones de contorno en tres dimensiones. Imagine también un espacio de número cuántico tridimensional cuyos ejes representan  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$ . Los estados permitidos en este espacio se pueden representar como puntos ubicados en los valores de la integral de los tres números cuánticos como en la figura P42.46. Este espacio no es un espacio tradicional en el que una ubicación se especifica mediante las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ ; más bien, es un espacio en el que los estados permitidos pueden especificarse mediante coordenadas de valores enteros que representan los números cuánticos. El número de estados permitidos que tienen energías entre  $E$  y  $E + dE$  corresponde al número de puntos en la envoltura esférica de radio  $n$  y el espesor  $dn$ . (a) Demuestre que la ecuación 42.18 puede escribirse como

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$$

donde  $n = (E/E_0)^{1/2}$  y  $E_0 = \hbar^2 \pi^2 / 2m_e L^2$ . (b) En el espacio del número cuántico, la ecuación en el inciso (a) es la ecuación de una esfera de radio  $n$ . Por tanto, el número de estados permitidos que tienen energías entre  $E$  y  $E + dE$  es igual al número de puntos con valores positivos de  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$  en una capa esférica de radio  $n$  y espesor  $dn$ . Demuestre que el “volumen” de esta capa exterior, que representa el número total de estados  $G(E)dE$ , es

$$G(E)dE = \frac{1}{2}\pi n^2 dn$$

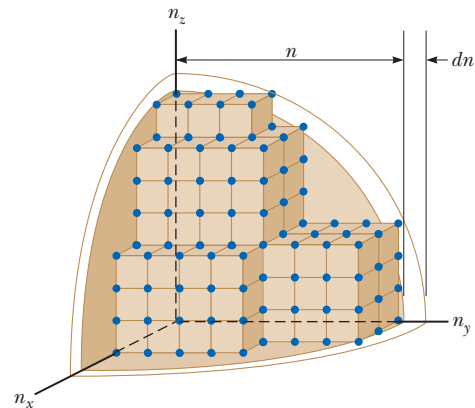
- (c) Sustituya el valor de  $n$  del inciso (a) para demostrar que

$$G(E)dE = \frac{\sqrt{2} m_e^{3/2} L^3}{2 \hbar^3 \pi^2} E^{1/2} dE$$

- (d) Defina  $g(E) = G(E)/V$  como el número de estados por unidad de volumen en el espacio tradicional, permita dos posibles estados de espín en cada estado de partículas en una caja y demuestre que

$$g(E)dE = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{\hbar^3} E^{1/2} dE$$

que es la ecuación 42.19.



**Figura P42.46** Los puntos que representan los estados permitidos se ubican en valores enteros de  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$ , y por tanto son las esquinas de cubos con lados de “longitud” 1.

- 47.** Como alternativa para la ecuación 42.1, otro modelo útil para la energía potencial de una molécula diatómica es el potencial de Morse

$$U(r) = B[e^{-a(r-r_0)} - 1]^2$$

donde  $B$ ,  $a$  y  $r_0$  son parámetros empleados para ajustar la forma del potencial y su profundidad. (a) ¿Cuál es la separación de equilibrio de los núcleos? (b) ¿Cuál es la profundidad del pozo de potencial, es decir, la diferencia en energía entre el mínimo valor del potencial y su asíntota cuando  $r$  se aproxima al infinito? (c) Si  $\mu$  es la masa reducida del sistema de dos núcleos y suponiendo que el potencial es casi parabólico alrededor del mínimo del pozo ¿cuál es la frecuencia de vibración de la molécula diatómica en su estado fundamental? (d) ¿Qué cantidad de energía es necesario suministrar a la molécula en estado fundamental para separar los dos núcleos al infinito?







Un signo de radiación en una sección de un hospital advierte que existen diversos tipos de radiación en el área, incluidos los materiales radiactivos. (JONGSUK/Shutterstock)

**IMAGINE** Su abuelo tiene programada una combinación de tomografía por emisión de positrones (PET, por sus siglas en inglés) y tomografía computarizada (TC) y usted se ha ofrecido como voluntario para acompañarlo y llevarlo a casa después. En el hospital, camina hacia el Departamento de Medicina Nuclear y observa un letrero que dice: "Peligro de radiación peligrosa". Como preparación para el examen de PET, a su abuelo un técnico le suministra una sustancia vía intravenosa a través de su brazo. Usted pregunta al técnico qué le inyectan a su abuelo y él responde fluorodesoxiglucosa, la cual es radiactiva, pues contiene el radioisótopo flúor-18. A medida que el técnico vuelve a sus funciones, piensa: "Recórcholis, fluoro, ¿qué? ¿Qué es eso? ¿Y es radioactiva? ¿Qué significa el número 18?". Después de que a su abuelo se le suministra la fluorodesoxiglucosa, camina hacia el área de TC ya que la tomografía computarizada se realizará mientras la fluorodesoxiglucosa se está diseminando a través del cuerpo, en preparación para la exploración PET. El técnico de TC menciona que la tomografía computarizada implicará yodo en el cuerpo de su abuelo, y usted pregunta sobre esto. El técnico contesta: "El yodo es un agente de contraste". Usted vuelve a preguntar: "¿Mi abuelo está recibiendo más radioactividad?" a lo que el técnico responde: "No, el radiocontraste no significa radioactividad". Ahora está totalmente confundido. ¿Qué significan todas estas palabras: radiación, radioactivo, radioisótopo, radiocontraste? También se pregunta cuál es la diferencia entre una exploración PET y una tomografía computarizada. Saca su teléfono inteligente y comienza a buscar en línea mientras su abuelo es llevado a la sala de TC.

**CONEXIONES** El año 1896 marca el nacimiento de la física nuclear cuando el físico francés Antoine-Henri Becquerel (1852-1908) descubrió la radioactividad en compuestos de uranio. Este descubrimiento llevó a los científicos a investigar los

- 43.1 Algunas propiedades del núcleo
- 43.2 Energía de enlace nuclear
- 43.3 Modelos nucleares
- 43.4 Radiactividad
- 43.5 Los procesos de decaimiento
- 43.6 Radiactividad natural
- 43.7 Reacciones nucleares
- 43.8 Fisión nuclear
- 43.9 Reactores nucleares
- 43.10 Fusión nuclear
- 43.11 Daño por radiación
- 43.12 Usos de la radiación
- 43.13 Resonancia magnética nuclear y formación de imágenes por resonancia magnética



detalles de la radioactividad, en la cual los materiales radioactivos emiten espontáneamente lo que generalmente se llama radiación. Estos estudios llevaron a una comprensión de la estructura del núcleo del átomo que se introdujo en la sección 41.2. El trabajo pionero de Ernest Rutherford demostró que las emisiones de sustancias radiactivas son de tres tipos: rayos alfa, beta y gamma, clasificadas según la naturaleza de su carga eléctrica y su capacidad para penetrar en la materia e ionizar el aire. En este capítulo, discutimos las propiedades y la estructura del núcleo atómico y los fenómenos asociados con el núcleo. Exploramos los diversos procesos por los cuales los núcleos se descomponen y las formas en que los núcleos pueden reaccionar entre sí. También estudiamos dos medios para derivar energía de reacciones nucleares. En ambos casos, la energía liberada puede usarse constructivamente (como en las plantas de energía eléctrica) o destructivamente (como en las armas nucleares). También examinamos las formas en que la radiación interactúa con la materia y discutimos la estructura de los reactores de fisión y fusión. El capítulo concluye con una discusión sobre algunas aplicaciones industriales y biológicas de la radiación.

### 43.1 Algunas propiedades de los núcleos

Todos los núcleos están constituidos por dos tipos de partículas: protones y neutrones. La única excepción es el núcleo del hidrógeno ordinario, que está constituido por un solo protón. El núcleo atómico se describe con el número de protones y neutrones que contiene, utilizando las cantidades siguientes:

- el **número atómico**  $Z$ , que es igual al número de protones en el núcleo (conocidos a veces como el *número de carga*);
- el **número de neutrones**  $N$ , que es igual al número de neutrones en el núcleo;
- el **número de masa**  $A = Z + N$  que es igual al número de **nucleones** (neutrones más protones) en el núcleo.

#### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 43.1

##### El número de masa no es la masa atómica

El número de masa  $A$  no debe confundirse con la masa atómica. El número de masa es un entero específico para un isótopo y carece de unidades; se trata simplemente de la cuenta del número de nucleones. La masa atómica tiene unidades y generalmente no es un entero, ya que se trata de un promedio de las masas de los isótopos de existencia natural de un elemento determinado.

Un **núclido** es una combinación específica del número atómico y el número de masa que representa un núcleo. Cuando se representan los núcleos, resulta conveniente utilizar el símbolo  ${}^A_ZX$  para mostrar cuántos protones y neutrones están presentes, donde  $X$  representa el símbolo químico del elemento. Por ejemplo,  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  (hierro) tiene número de masa 56 y número atómico 26; por tanto, contiene 26 protones y 30 neutrones. Cuando no existe la posibilidad de confusión, se omite el subíndice  $Z$ , ya que siempre es posible utilizar el símbolo químico para determinarlo. Por tanto,  ${}^{18}_9\text{F}$ , es lo mismo que  ${}^{18}\text{F}$ , y también se puede identificar como “flúor-18” o “F-18”.

El núcleo de todos los átomos de un elemento en particular contiene el mismo número de protones pero a menudo contiene un número distinto de neutrones. Este tipo de núcleos son denominados isótopos de un elemento tienen un mismo valor de  $Z$ , pero diferentes valores de  $N$  y  $A$ . Otro isótopo de fluor es el  ${}^{19}\text{F}$ , el cual no es radiactivo.

La abundancia natural de isótopos puede variar de manera sustancial. Por ejemplo,  ${}^{11}_6\text{C}$ ,  ${}^{12}_6\text{C}$ ,  ${}^{13}_6\text{C}$  y  ${}^{14}_6\text{C}$  son cuatro isótopos del carbono. La abundancia natural del isótopo  ${}^{12}_6\text{C}$  es de aproximadamente 98.9%, en tanto que la del isótopo  ${}^{13}_6\text{C}$  es de sólo cerca de 1.1%. Algunos isótopos como el  ${}^{11}_6\text{C}$  y  ${}^{14}_6\text{C}$ , no se obtienen de manera natural, pero es posible producirlos utilizando reacciones nucleares en el laboratorio o mediante rayos cósmicos.

Incluso el más simple de los elementos, el hidrógeno, tiene isótopos:  ${}^1_1\text{H}$ , el núcleo de hidrógeno ordinario;  ${}^2_1\text{H}$ , el deuterio; y  ${}^3_1\text{H}$ , el tritio.

- E XAMEN RÁPIDO 43.1** Para cada inciso de este examen rápido, elija de las siguientes respuestas: **(a)** protones, **(b)** neutrones, **(c)** nucleones. **(i)** ¿Los tres núcleos  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{13}\text{N}$  y  ${}^{14}\text{O}$  tienen el mismo número de qué tipo de partícula? **(ii)** ¿Los tres núcleos de  ${}^{12}\text{N}$ ,  ${}^{13}\text{N}$  y  ${}^{14}\text{N}$  tienen el mismo número de qué tipo de partícula? **(iii)** ¿Los tres núcleos  ${}^{14}\text{C}$ ,  ${}^{14}\text{N}$  y  ${}^{14}\text{O}$  tienen el mismo número de qué tipo de partícula?



## Carga y masa

El protón tiene una carga positiva individual  $e$ , igual en magnitud a la carga  $-e$  del electrón ( $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C). El neutrón es eléctricamente neutro, como implica su nombre. Ya que el neutrón no tiene carga, resultó difícil de detectar con los primeros aparatos experimentales y las primeras técnicas. Hoy en día los neutrones se detectan con relativa facilidad utilizando centelleadores plásticos.

Es posible medir las masas nucleares con gran precisión utilizando el espectrómetro de masas (véase la sección 28.3) y mediante el análisis de las reacciones nucleares. El protón tiene una masa de aproximadamente 1 836 veces la del electrón, y las masas del protón y del neutrón son casi idénticas. La **unidad de masa atómica**  $u$ , se define de forma tal que la masa de un átomo de isótopo  $^{12}\text{C}$  es exactamente 12  $u$ , donde  $1 u = 1.660\,539 \times 10^{-27}$  kg. Según esta definición, el protón y el neutrón tienen cada uno una masa de aproximadamente 1  $u$ , y el electrón tiene una masa que es sólo una pequeña fracción de este valor. Las masas de estas partículas y otras importantes para los fenómenos explicados en este capítulo se proporcionan en la tabla 43.1.

Es interesante preguntarse cómo seis protones y seis neutrones, cada uno de ellos con una masa superior a 1  $u$ , pueden combinarse con seis electrones para formar un átomo de carbono-12 con una masa de exactamente 12  $u$ . El sistema de enlace del  $^{12}\text{C}$  tiene una energía en reposo inferior (sección 39.8) que la correspondiente a seis protones y seis neutrones, todos ellos por separado. De acuerdo con la ecuación 38.24,  $E_R = mc^2$ , esta menor energía en reposo corresponde a una masa también menor para el sistema de enlace. La diferencia en masa explica la energía de unión cuando las partículas se combinan para formar el núcleo. Este punto se explica con mayor detalle en la sección 43.2.

A menudo resulta conveniente expresar la unidad de masa atómica en función de su *equivalente de energía en reposo*. Para la unidad de masa atómica

$$E_R = mc^2 = (1.660\,539 \times 10^{-27} \text{ kg})(2.997\,92 \times 10^8 \text{ m/s}^2) = 931.494 \text{ MeV}$$

en donde se ha utilizado la conversión  $1 \text{ eV} = 1.602\,176 \times 10^{19} \text{ J}$ .

A partir de la expresión de la energía en reposo de la ecuación 38.24, los físicos nucleares a menudo expresan la masa en términos de la unidad  $\text{MeV}/c^2$ .

## El tamaño y la estructura de los núcleos

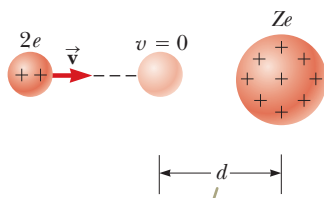
En los experimentos de Rutherford mencionados al inicio del capítulo lanzaban núcleos con carga positiva de átomos de helio (partículas alfa) contra una delgada laminilla de metal. Conforme las partículas alfa pasaban a través de ella, a menudo pasaban cerca de un núcleo metálico. Debido a las cargas positivas presentes tanto en las partículas incidentes como en los núcleos, las partículas se desviaban de sus trayectorias en línea recta debido a la fuerza de repulsión de Coulomb.

Rutherford aplicó la conservación de energía en un sistema aislado para determinar una expresión para la distancia de separación  $d$  a la cual una partícula alfa que se acerca de frente a un núcleo es lanzada hacia atrás por la repulsión de Coulomb. En una colisión frontal, la energía mecánica del sistema partícula alfa-núcleo se conserva.

**TABLA 43.1** Masas de partículas seleccionadas en diferentes unidades de medición

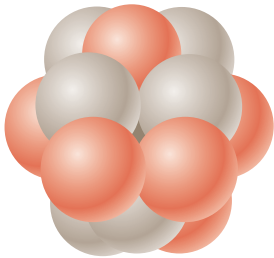
Partícula	kg	Masa u	MeV/ $c^2$
Protón	$1.672\,62 \times 10^{-27}$	1.007 276	938.27
Neutrón	$1.674\,93 \times 10^{-27}$	1.008 665	939.57
Electrón ( $\beta$ partícula)	$9.109\,38 \times 10^{-31}$	$5.485\,79 \times 10^{-4}$	0.510 999
$^1_1\text{H}$ Átomo	$1.673\,53 \times 10^{-27}$	1.007 825	938.783
$^4_2\text{He}$ Núcleo ( $\alpha$ partícula)	$6.644\,66 \times 10^{-27}$	4.001 506	3 727.38
$^4_2\text{He}$ Átomo	$6.646\,48 \times 10^{-27}$	4.002 603	3 728.40
$^{12}_6\text{C}$ Átomo	$1.992\,65 \times 10^{-27}$	12.000 000	11 177.9





Debido a la repulsión de Coulomb que se presenta entre cargas del mismo signo, la partícula alfa se acerca hasta una distancia  $d$  del núcleo, la cual se conoce como la distancia de acercamiento más próximo.

**Figura 43.1** Una partícula alfa en una colisión de frente con un núcleo de carga  $Ze$ .



**Figura 43.2** Es posible modelar un núcleo como un agrupamiento de esferas muy apretadas donde cada una de las esferas es un nucleón.

Radio del núcleo ►

$$r = aA^{1/3} \quad (43.1)$$

donde  $a$  es una constante con un valor de  $1.2 \times 10^{-15}$  m y  $A$  es el número de masa. En vista de que el volumen de una esfera es proporcional al cubo de su radio, se concluye de la ecuación 43.1 que el volumen de un núcleo (que se supone esférico) es directamente proporcional a  $A$ , que es el número total de nucleones. Esta proporcionalidad sugiere que *todos los núcleos tienen prácticamente la misma densidad*. Cuando los nucleones se combinan para formar un núcleo, lo hacen como si se tratara de esferas muy apretadas (figura 43.2). Este hecho ha conducido a una analogía entre el núcleo y una gota de líquido, en la cual la densidad es independiente de su tamaño. En la sección 43.3 se explica el modelo de gota líquida del núcleo.

### Ejemplo 43.1 Volumen y densidad de un núcleo

Considere un núcleo con número de masa  $A$ , conteniendo protones y neutrones, cada uno con una masa aproximada a  $m$ .

**(A)** Encuentre una expresión aproximada para la masa del núcleo.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine el núcleo como una colección de protones y neutrones, como se muestra en la figura 43.2. El número de masa  $A$  incluye los protones y los neutrones.

La energía cinética inicial de la partícula que está por llegar debe convertirse completamente en energía potencial eléctrica del sistema cuando la partícula alfa se detiene un momento en el punto de acercamiento más próximo (la configuración final del sistema) antes de desplazarse hacia atrás a lo largo de la misma trayectoria (figura 43.1). Al aplicar la ecuación 8.2, el principio de conservación de energía al sistema

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U_E &= 0 \\ (0 - \frac{1}{2}mv^2) + \left( k_e \frac{q_1 q_2}{d} - 0 \right) &= 0 \end{aligned}$$

donde  $m$  es la masa de la partícula alfa y  $v$  es la velocidad inicial. Resolviendo para  $d$ , se obtiene

$$d = 2k_e \frac{q_1 q_2}{mv^2} = 2k_e \frac{(2e)(Ze)}{mv^2} = 4k_e \frac{Ze^2}{mv^2}$$

donde  $Z$  es el número atómico del núcleo objetivo. De esta expresión, Rutherford descubrió que las partículas alfa se acercaban a los núcleos hasta una distancia de  $3.2 \times 10^{-14}$  m cuando la laminilla estaba hecha de oro. Por tanto, el radio de los núcleos de oro debe ser inferior a este valor. De los resultados de sus experimentos de dispersión, Rutherford llegó a la conclusión de que la carga positiva en un átomo está concentrada en una pequeña esfera que él llamó núcleo, y cuyo radio no es superior a aproximadamente  $10^{-14}$  m.

Ya que en la física nuclear estas minúsculas dimensiones son comunes, una unidad de longitud conveniente que se usa con frecuencia es el femtómetro (fm), que a veces es conocido como **fermi** y que se define como

$$1 \text{ fm} \equiv 10^{-15} \text{ m}$$

A principios de los años veinte se sabía que el núcleo de un átomo contiene  $Z$  protones y tiene una masa casi equivalente a la de  $A$  protones, donde en promedio  $A \approx 2Z$  para el caso de núcleos ligeros ( $Z \leq 20$ ) y  $A > 2Z$  para núcleos más pesados. Para explicar la masa nuclear, Rutherford propuso que cada núcleo debe también contener  $A - Z$  partículas neutras, que llamó neutrones. En el año de 1932, el físico británico James Chadwick (1891-1974) descubrió el neutrón, razón por la cual se le otorgó el premio Nobel en 1935 por este importante trabajo.

A partir de los experimentos de dispersión de Rutherford, otros experimentos han demostrado que la mayor parte de los núcleos son aproximadamente esféricos y tienen un radio promedio dado por

## 43.1 continuación

**Contextualizar** Supondremos que  $A$  es suficientemente grande como para imaginar al núcleo esférico.

**Analizar** La masa del protón es aproximadamente igual a la del neutrón. Por tanto, si la masa de una de estas partículas es  $m$ , la masa del núcleo es aproximadamente  $Am$ .

**(B)** Encuentre una expresión para el volumen de este núcleo en términos de  $A$ .

## SOLUCIÓN

Suponga que el núcleo es esférico y use la ecuación 43.1: (1)  $V_{\text{núcleo}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi a^3 A$

**(C)** Encuentre un valor numérico para la densidad de este núcleo.

## SOLUCIÓN

Use la ecuación 1.1 y sustituya la ecuación (1):

$$\rho = \frac{m_{\text{núcleo}}}{V_{\text{núcleo}}} = \frac{Am}{\frac{4}{3}\pi a^3 A} = \frac{3m}{4\pi a^3}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\rho = \frac{3(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{4\pi(1.2 \times 10^{-15} \text{ m})^3} = 2.3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

**Finalizar** La densidad nuclear es aproximadamente  $2.3 \times 10^{14}$  veces la densidad del agua ( $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ).

**¿QUÉ PASARÍA SI?** ¿Y si la Tierra se pudiera comprimir hasta que tuviese esta densidad? ¿Qué tan grande sería?

**Respuesta** Ya que esta densidad es muy grande, se predice que la Tierra de esta densidad sería muy pequeña.

Use la ecuación 1.1 y la masa de la Tierra para encontrar el volumen de la Tierra comprimida:

$$V = \frac{M_E}{\rho} = \frac{5.97 \times 10^{24} \text{ kg}}{2.3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3} = 2.6 \times 10^7 \text{ m}^3$$

A partir de este volumen, encuentre el radio:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} = \left[\frac{3(2.6 \times 10^7 \text{ m}^3)}{4\pi}\right]^{1/3}$$

$$r = 1.8 \times 10^2 \text{ m}$$

¡Una Tierra de este radio de hecho es una Tierra pequeña!

## Estabilidad nuclear

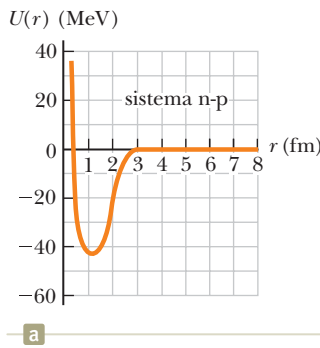
Puede esperar que la considerable fuerza de Coulomb de repulsión entre los protones de un núcleo estrechamente empaçados origine que el núcleo flote separado. Como esto no ocurre, existe una fuerza de atracción que actúa en sentido opuesto. La fuerza nuclear es de atracción a muy corta distancia (aproximadamente 2 fm) que actúa entre todas las partículas nucleares. Los protones se atraen entre sí mediante la fuerza nuclear y, al mismo tiempo, se repelen debido a la fuerza de Coulomb. La fuerza nuclear también actúa entre pares de neutrones y entre protones y neutrones. La fuerza nuclear domina la fuerza de repulsión de Coulomb dentro del núcleo (a corta distancia), por lo que pueden existir núcleos estables.

La evidencia del intervalo limitado de fuerzas nucleares proviene de experimentos de dispersión y de estudios de energías de enlace nuclear. El corto alcance de la fuerza nuclear se muestra en la gráfica de energía potencial neutrón–protón (n–p) de la figura 43.3a (página 1182), que se obtiene dispersando neutrones de un objetivo con hidrógeno. La profundidad del pozo de energía potencial n–p es de 40 a 50 MeV, y existe un poderoso componente de repulsión que impide que los nucleones se acerquen a distancias menores de 0.4 fm.

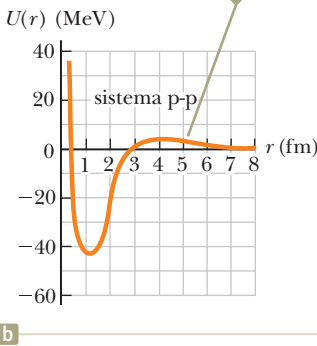
La fuerza nuclear no afecta a los electrones, lo que permite que los más energéticos sirvan como sondas parecidas a puntos de los núcleos. La fuerza nuclear es independiente de la carga. Por tanto, la diferencia principal entre las interacciones n–p y p–p es que la energía potencial p–p está constituida por la *superposición* de interacciones nucleares y de Coulomb, según se muestra en la figura 43.3b. A distancias inferiores







La diferencia entre ambas curvas se debe a la fuerte repulsión de Coulomb en el caso de la interacción protón-protón.



**Figura 43.3** (a) Energía potencial en función de la distancia de separación en un sistema neutrón-protón. (b) Energía potencial en función de la distancia de separación para un sistema protón-protón. La altura del pico de la curva protón-protón se ha exagerado en un factor de 10, a fin de poder desplegar la diferencia entre curvas a esta escala.

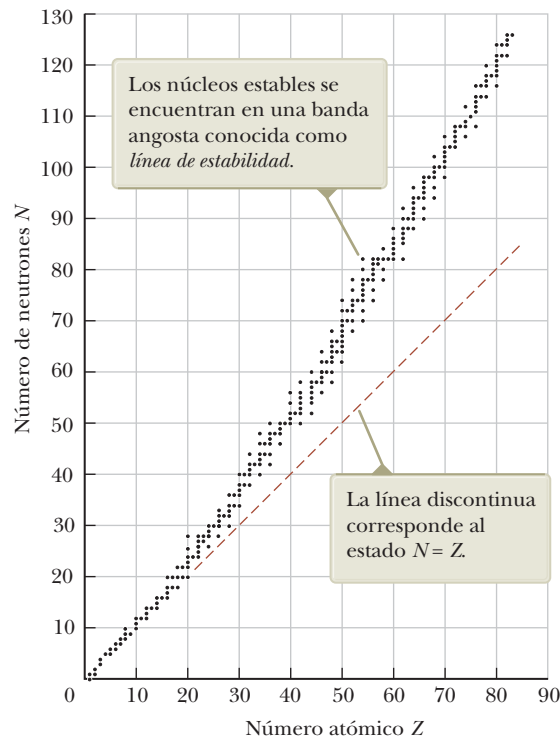
a 2 fm, tanto la energía potencial p-p como la n-p son prácticamente idénticas, pero para distancias de 2 fm o mayores, el potencial p-p se encuentra con una barrera de energía positiva con un máximo en 4 fm.

La existencia de la fuerza nuclear da como resultado aproximadamente 270 núcleos estables; se han observado cientos de núcleos diferentes, pero no son estables. En la figura 43.4 se muestra una gráfica del número de neutrones  $N$  en función del número atómico  $Z$  para varios núcleos estables. Los núcleos estables han sido representados por puntos azules, mismos que están situados en un estrecho intervalo conocido como *línea de estabilidad*. Observe que los núcleos estables ligeros contienen un número igual de protones y de neutrones; es decir,  $N = Z$ . También, advierta que en los núcleos estables pesados el número de neutrones excede al número de protones; por encima de  $Z = 20$ , la línea de estabilidad se desvía hacia arriba en comparación con la línea que representa  $N = Z$ . Es posible comprender esta desviación si se reconoce que, conforme se incrementa el número de protones, la fuerza de Coulomb aumenta, lo que tiende a romper y separar el núcleo. Como resultado, son necesarios más neutrones para mantener al núcleo estable, ya que estos últimos solamente experimentan fuerza nuclear de atracción. A final de cuentas, las fuerzas de repulsión de Coulomb entre los protones no pueden ser compensadas mediante la adición de más neutrones. Esto se presenta cuando  $Z = 83$ , lo que significa que aquellos elementos que contienen más de 83 protones no tienen núcleos estables.

## 43.2 Energía de enlace nuclear

Como se mencionó en el análisis del  $^{12}\text{C}$  de la sección anterior, la masa total de un núcleo es inferior a la suma de las masas de sus nucleones individuales. Por tanto, la energía de reposo del sistema ligado (el núcleo) es inferior a la energía de reposo combinada de los nucleones independientes. Esta diferencia en energía se conoce como la **energía de enlace** del núcleo y se puede interpretar como la energía que debe agregarse a un núcleo para que se separe en sus componentes. Por tanto, a fin de poder separar un núcleo en protones y neutrones, debe entregársele energía al sistema.

La relación de la conservación de energía y la equivalencia Einsteiniana de masa-energía muestran que la energía de enlace  $E_b$  en MeV de cualquier núcleo es



**Figura 43.4** Número de neutrones  $N$  en función del número atómico  $Z$  para núcleos estables (puntos de color negro).

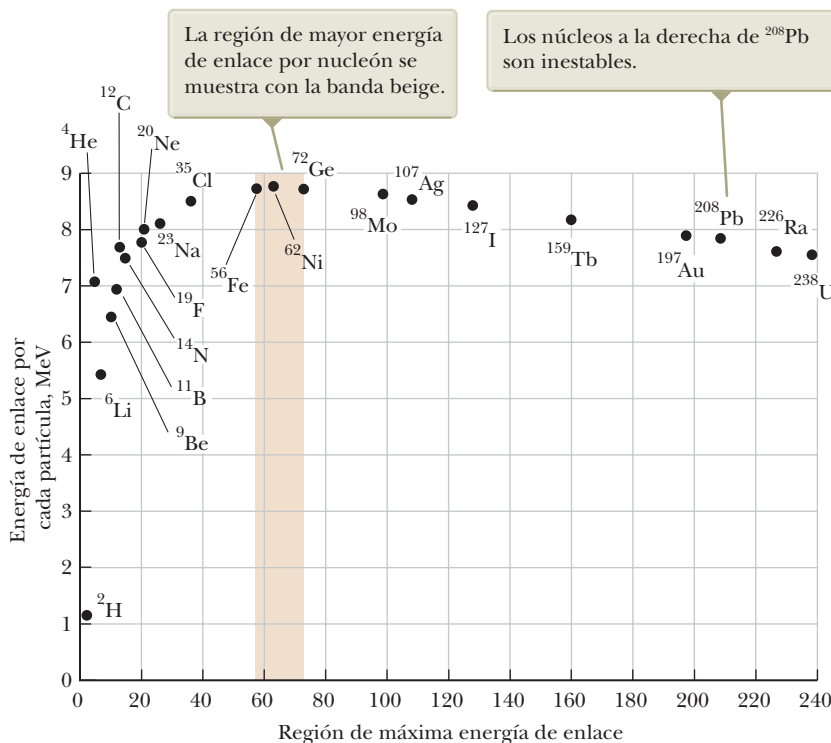
$$E_b = [ZM(\text{H}) + Nm_n - M({}_Z^AX)] \times 931.494 \text{ MeV/u} \quad (43.2) \quad \leftarrow \text{Energía de enlace de un núcleo}$$

donde  $M(\text{H})$  es la masa atómica del átomo de hidrógeno neutro,  $M({}_Z^AX)$  representa la masa atómica de un átomo del isótopo  ${}_Z^AX$ ,  $m_n$  es la masa del neutrón y todas las masas están en unidades de masa atómica. La masa de los  $Z$  electrones incluidos en  $M(\text{H})$  se cancelan con la masa de los  $Z$  electrones incluidos en el término  $M({}_Z^AX)$  dentro de una pequeña diferencia asociada con la energía de enlace atómico de los electrones. Porque las energías de enlace atómico por lo general son de varios electrón volts y las energías de enlace nuclear son de muchos millones de electrón volts, esta diferencia es despreciable.

En la figura 43.5 se muestra una gráfica de la energía de enlace por cada nucleón  $E_b/A$  como una función del número de masa  $A$  para diferentes núcleos estables. Observe que la curva de la figura 44.5 tiene un pico en las cercanías de  $A = 60$ . Es decir, los núcleos que tienen números de masa mayores o menores de 60 no están unidos con tanta fuerza como aquellos cercanos a la mitad de la tabla periódica. La reducción de la energía de enlace para nucleones en  $A > 60$  implican que se liberará energía cuando el núcleo pesado se divida o *se fisione*, en dos núcleos más ligeros. Se libera energía en la fisión porque los nucleones de cada núcleo producido están unidos más estrechamente entre sí que los nucleones del núcleo original. La importancia de los procesos de la fisión y un segundo proceso fundamental de la *fusión*, en el que la energía es liberada al combinar núcleos ligeros se verán con detalle más adelante en este capítulo.

Otra característica importante de la figura 43.5 es que la energía de enlace por nucleón es aproximadamente constante y de casi 8 MeV por cada nucleón para todos los núcleos con  $A > 50$ . Para estos núcleos se dice que las fuerzas nucleares están *saturadas*, lo que quiere decir que, en la estructura empacada en forma apretada que se muestra en la figura 43.2, un nucleón en particular puede servir para formar uniones atractivas con sólo un número limitado de otros nucleones.

La figura 43.5 aporta el discernimiento necesario respecto a las incógnitas fundamentales del origen de los elementos químicos. En las primeras eras del Universo, los únicos elementos existentes eran el hidrógeno y el helio. Bajo la fuerza gravitacional se aglutinaron las nubes de gas cósmico formando las estrellas. Conforme éstas se hacen viejas, producen elementos más pesados a partir de los más ligeros de su interior, empezando por fusionar los átomos de hidrógeno para formar helio. Este pro-



### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 43.2

**Energía de enlace** Cuando se combinan nucleones individuales para formar un núcleo, la energía del sistema se ve reducida, por lo que el cambio en energía es negativo. El valor absoluto de este cambio se denomina energía de enlace. Esta diferencia en el signo puede dar origen a confusión. Por ejemplo, un *incremento* en la energía de enlace corresponde a una *reducción* en la energía del sistema.

**Figura 43.5** Energía de enlace por cada nucleón en función del número de masa para nucleidos que se hallan a lo largo de la línea de estabilidad de la figura 43.4. Algunos núcleos representativos se muestran como puntos negros con una leyenda.

ceso continúa durante la vida de la estrella, generando átomos con números atómicos cada vez más grandes, hasta del pico de la banda beige mostrada en la figura 43.5.

El núclido  ${}^{63}_{28}\text{Ni}$  tiene la energía de enlace más grande por nucleón con un valor de 8.794 5 MeV por nucleón. Para crear elementos con números de masa superiores a 63 se necesita energía adicional en vista de sus menores energías de enlace por nucleón. Esta energía proviene de la explosión de supernovas que se presenta al finalizar la vida de algunas estrellas grandes. Debido a eso, todos los átomos pesados que existen en nuestro cuerpo fueron producidos por la explosión de estrellas ancestrales. ¡Literalmente estamos hechos de polvo de estrellas!

### 43.3 Modelos nucleares

Los detalles de las fuerzas nucleares siguen siendo un área de investigación activa. Se han propuesto varios modelos nucleares, resultando éstos útiles para la comprensión de las características generales de los datos experimentales nucleares y de los mecanismos responsables para la energía de enlace. Dos de estos modelos, el modelo de gota de líquido y el modelo de capa se explican enseguida.

#### Modelo de gota de líquido

En el año de 1936 Bohr propuso tratar los nucleones como si fueran moléculas en una gota de líquido. En este **modelo de gota de líquido**, los nucleones interactúan con fuerza entre sí y se someten a colisiones frecuentes conforme zigzaguean de un lugar a otro dentro del núcleo. Este movimiento de zigzag es similar al movimiento de agitación térmica de las moléculas en una gota de líquido.

Cuatro efectos principales tienen influencia en la energía de enlace del núcleo en el modelo de gota de líquido:

- **El efecto de volumen.** La figura 43.5 muestra que, para  $A > 50$ , la energía de enlace por cada nucleón es aproximadamente constante, esto indica que la fuerza nuclear de un nucleón dado se debe únicamente a unos cuantos de sus vecinos más cercanos y no a todos los otros nucleones que existen en el núcleo. En tal caso, en promedio, la energía de enlace asociada con la fuerza nuclear para cada nucleón es la misma en todos los núcleos: asociada a la interacción con unos cuantos vecinos. Esta propiedad indica que la energía de enlace total del núcleo es proporcional a  $A$  y, por tanto, al volumen nuclear. La contribución de la energía de enlace a todo el núcleo es igual a  $C_1A$ , donde  $C_1$  es una constante ajustable que puede ser determinada si se hace coincidir la predicción de un modelo con los resultados experimentales.
- **El efecto superficie.** Ya que los nucleones de la superficie de la gota tienen menos vecinos que los del interior, los nucleones superficiales reducen la energía de enlace en una cantidad proporcional a su número. Debido a que el número de nucleones superficiales es proporcional al área de la superficie  $4\pi r^2$  del núcleo (modelado como esfera), y a que  $r^2 \propto A^{2/3}$  (ecuación 43.1), el término de la superficie se puede expresar de la forma  $-C_2A^{2/3}$ , donde  $C_2$  es una segunda constante ajustable.
- **El efecto de repulsión de Coulomb.** Cada protón repele a los otros protones del núcleo. La energía potencial correspondiente por cada par de protones interactuando es igual a  $k_e e^2/r$ , siendo  $k_e$  la constante de Coulomb. La energía potencial eléctrica total es proporcional al número de pares de protones  $Z(Z - 1)/2$  y es inversamente proporcional al radio nuclear. En consecuencia, la reducción en la energía de enlace resultante debida al efecto de Coulomb es igual a  $-C_3Z(Z - 1)/A^{1/3}$ , donde  $C_3$  es también otra constante ajustable.
- **El efecto de simetría.** Otro efecto que reduce la energía de enlace está relacionado con la simetría del núcleo en función de valores  $N$  y  $Z$ . Para valores pequeños de  $A$ , los núcleos estables se inclinan a tener  $N \approx Z$ . Cualquier asimetría de importancia entre  $N$  y  $Z$  para núcleos ligeros reduce la energía de enlace y hace que el núcleo sea menos estable. Para  $A$  más grandes, el valor de  $N$  para núcleos estables naturalmente es mayor que  $Z$ . Este efecto puede ser descrito por un término de energía de enlace de la forma  $-C_4(N - Z)^2/A$ , siendo  $C_4$  otra cons-



tante ajustable.<sup>1</sup> Para  $A$  pequeñas, cualquier asimetría de importancia entre los valores de  $N$  y de  $Z$  hace que este término sea relativamente grande y reduzca la energía de enlace. Para valores  $A$  grandes, este término reduce su valor de manera que causa poco efecto en la energía de enlace global.

Si suma estas contribuciones, llega a la expresión para la energía de enlace total.

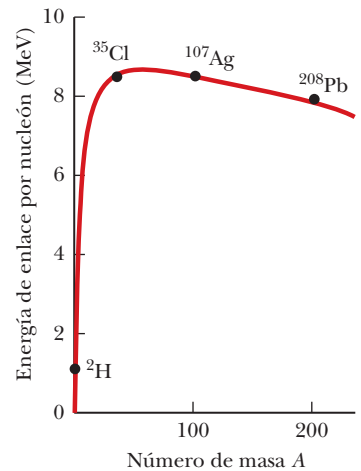
$$E_b = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \quad (43.3)$$

Esta ecuación, denominada a menudo la **fórmula semiempírica para la energía de enlace**, contiene cuatro constantes que deben ajustarse para adecuar la expresión teórica con los datos experimentales. Para núcleos con  $A \geq 15$ , las constantes tienen los siguientes valores:

$$C_1 = 15.7 \text{ MeV} \quad C_2 = 17.8 \text{ MeV}$$

$$C_3 = 0.71 \text{ MeV} \quad C_4 = 23.6 \text{ MeV}$$

La ecuación 43.3, además de estas constantes, se ajusta bastante bien a los valores de las masas nucleares como se muestra por la curva teórica y los valores experimentales de muestra en la figura 43.6. La ecuación 43.3 es una ecuación *teórica* para la energía de enlace, a partir del modelo de la gota de líquido, donde las energías de enlace calculadas con la ecuación 43.2 son valores *experimentales* de acuerdo con medidas de masa.



**Figura 43.6** Curva de energía de enlace trazada mediante el uso de la fórmula semiempírica de la energía de enlace (marrón). Para la comparación con la curva teórica, se muestran los valores experimentales para cuatro núcleos de la muestra.

### Ejemplo 43.2 Aplicación de la fórmula semiempírica de energía de enlace

El núcleo  $^{64}\text{Zn}$  tiene una energía de enlace tabulada de 559.09 MeV. Use la fórmula semiempírica de energía de enlace para generar una estimación teórica de la energía de enlace para este núcleo.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine juntar los protones y neutrones separados para formar un núcleo de  $^{64}\text{Zn}$ . La energía en reposo del núcleo es menor que la energía en reposo de las partículas individuales. La diferencia en energía en reposo es la energía de enlace.

**Categorizar** A partir del texto del problema, se sabe que se aplica el modelo de gota de líquido. Este ejemplo es un problema de sustitución.

Para el núcleo de  $^{64}\text{Zn}$ ,  $Z = 30$ ,  $N = 34$  y  $A = 64$ . Evalúe los cuatro términos de la fórmula semiempírica de la energía de enlace:

$$C_1 A = (15.7 \text{ MeV})(64) = 1\,005 \text{ MeV}$$

$$C_2 A^{2/3} = (17.8 \text{ MeV})(64)^{2/3} = 285 \text{ MeV}$$

$$C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = (0.71 \text{ MeV}) \frac{(30)(29)}{(64)^{1/3}} = 154 \text{ MeV}$$

$$C_4 \frac{(N-Z)^2}{A} = (23.6 \text{ MeV}) \frac{(34-30)^2}{64} = 5.90 \text{ MeV}$$

Sustituya estos valores en la ecuación 43.3:

Este valor difiere del valor tabulado en menos de 0.2%. Note cómo los tamaños de los términos disminuyen del primero al cuarto término. El cuarto término es particularmente pequeño para este núcleo, que no tiene un número excesivo de neutrones.

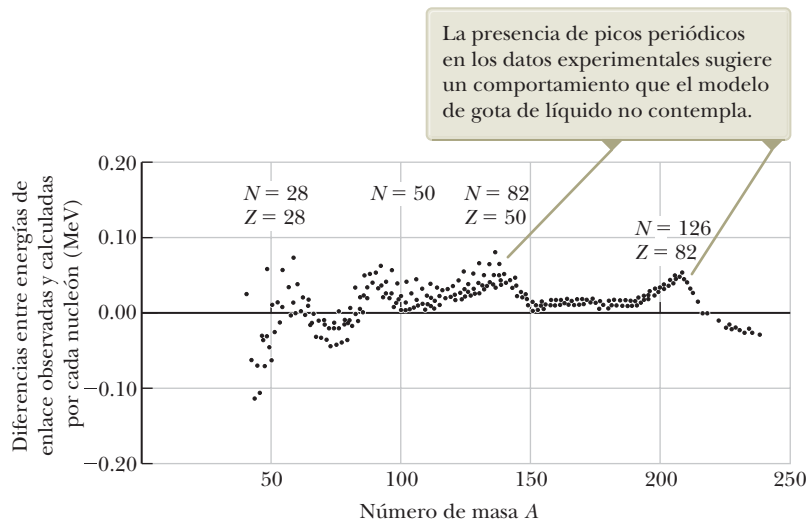
## El modelo en capas

El modelo de gota de líquido describe relativamente bien el comportamiento general de las energías de enlace nuclear. De cualquier modo, tomando en cuenta algunos detalles finos de la estructura nuclear, tales como reglas de estabilidad y momento angular estudiar las energías de enlace con mayor detalle, aparecen las siguientes características:

- La mayor parte de los núcleos estables tiene un valor par para  $A$ . Además, sólo ocho núcleos estables tienen valores impares tanto para  $Z$  como para  $N$ .

<sup>1</sup>El modelo de gota de líquido describe el hecho de que los núcleos pesados tienen  $N > Z$ . El modelo de capa que se ve después explica cómo es posible esto utilizando un argumento físico.

**Figura 43.7** Diferencia entre las energías de enlace medidas en comparación con las calculadas según el modelo de gota de líquido como una función de  $A$ . (Adaptado de R. A. Dunlap, *The Physics of Nuclei and Particles*, Brooks/Cole, Belmont, CA, 2004.)



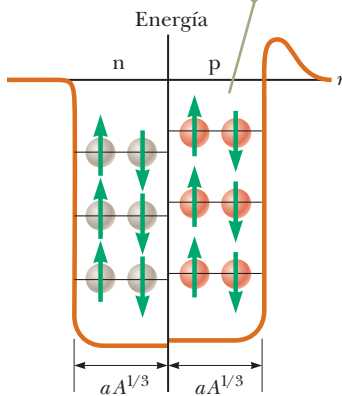
- La figura 43.7 muestra una gráfica de la diferencia entre la energía de enlace por cada nucleón calculada según la ecuación 43.3 y la energía de enlace medida. Existe evidencia en los datos de picos uniformemente espaciados no descritos por la fórmula semiempírica de la energía de enlace. Los picos se presentan en valores de  $N$  o de  $Z$ , que se conocen como **números mágicos**:

Números mágicos ►

$$Z \text{ o } N = 2, 8, 20, 28, 50, 82 \quad (43.4)$$

- Estudios de alta precisión de los radios nucleares muestran desviaciones con la expresión simple de la ecuación 43.1. Las gráficas de los datos experimentales muestran picos en la curva del radio en función de  $N$  en valores de  $N$  que corresponden a los números mágicos.
- Un grupo de *isotones* es un grupo de núcleos que tienen el mismo valor de  $N$  y diferentes valores de  $Z$ . Cuando se grafica el número de isótonos estables en función de  $N$ , se presentan picos en la gráfica, otra vez en los números mágicos de la ecuación 43.4.
- Otras varias mediciones nucleares muestran un comportamiento anómalo en los números mágicos.<sup>2</sup>

Los niveles de energía para los protones son ligeramente más elevados que los correspondientes a los neutrones, debido a la energía potencial eléctrica asociada con el sistema de protones.



**Figura 43.8** Pozo de potencial cuadrado que contiene 12 nucleones. Los círculos rojos representan los protones y los grises los neutrones.

Estos picos en las gráficas de datos experimentales recuerdan los picos de la figura 41.20 relativos a la energía de ionización de los átomos, que se presentan debido a la estructura en capas del átomo. El **modelo en capas** del núcleo, también conocido como **modelo de partículas independientes**, fue desarrollado de forma independiente por dos científicos alemanes, María Goeppert-Mayer en 1949 y Hans Jensen (1907-1973) en 1950, Goeppert-Mayer y Jensen compartieron el premio Nobel en Física en 1963. En este modelo se supone que cada nucleón existe en una capa similar a la capa atómica de un electrón. Los nucleones existen en estados de energía cuantizados, y existen pocas colisiones entre ellos. Evidentemente las hipótesis de este modelo difieren de manera importante de las correspondientes para el modelo de la gota de líquido.

Los estados cuantizados ocupados por los nucleones pueden describirse mediante un juego de números cuánticos. Tanto el protón como el neutrón tienen un espín de  $\frac{1}{2}$ , por tanto se puede aplicar el principio de exclusión para describir los estados permitidos (como se hizo para los electrones en el capítulo 41). Es decir, cada estado puede contener sólo dos protones (o dos neutrones) con espines *opuestos* (figura 43.8). Los protones tienen un conjunto de estados permitidos y difieren de los neutrones porque las dos especies se mueven en pozos de potencial diferentes. Los niveles de energía del protón están más separados que los niveles del neutrón, porque los protones experimentan una superposición de la fuerza de Coulomb y de la fuerza nuclear, en tanto que los neutrones sólo están sujetos a la fuerza nuclear.

<sup>2</sup>Para detalles adicionales véase el capítulo 5 de R. A. Dunlap *The Physics of Nuclei and Particles*, Brooks/Cole Belmont, CA, 2004.



Un factor que influyó las características observadas de los estados de tierra nucleares es los efectos spin-orbita nucleares. La interacción atómica spin-orbita entre el spin de un electrón y su movimiento orbital en un átomo avala lo analizado del doblete de sodio en la sección 41.6 y es de origen magnético. Al contrario, el efecto del spin-orbita nuclear para nucleones se debe a la fuerza nuclear. Es más intenso que en el caso atómico, y es de signo opuesto. Cuando estos efectos se toman en consideración, el modelo de capas nuclear se puede tomar en cuenta para los números mágicos observados.

Modelos más sofisticados del núcleo han estado y continúan en desarrollo. Por ejemplo, el modelo colectivo combina características de la gota-líquida y el modelo de capas nucleares. El desarrollo de los modelos teóricos del núcleo continúan aún en el área de investigación.

## 43.4 Radiactividad

En el año de 1896 Henri Becquerel descubrió por accidente que los cristales de sulfato de potasio de uranio emiten una radiación invisible que puede oscurecer una placa fotográfica cuando está protegida de la luz. Después de una serie de experimentos, llegó a la conclusión de que la radiación que emitían los cristales era de un nuevo tipo, que no requiere de estimulación externa y que era tan penetrante que podía oscurecer placas fotográficas protegidas y ionizar gases. Este proceso de la emisión espontánea de la radiación por el uranio pronto se conocería como **radiactividad**.

Experimentos consecutivos, realizados por otros científicos, demostraron que existían otras sustancias que eran más radiactivas. Las investigaciones de mayor importancia de ese tipo fueron realizadas por Marie y Pierre Curie (1859-1906). Después de varios años de cuidadosos y laboriosos procesos químicos de separación efectuados sobre toneladas de pechblenda, un mineral radiactivo, los Curie pudieron informar del descubrimiento de dos elementos antes desconocidos y ambos radiactivos. Éstos fueron el polonio y el radio. Experimentos adicionales, incluyendo el notable trabajo de Rutherford sobre la dispersión de partículas alfa, sugirieron que la radiactividad es el resultado del *decaimiento*, es decir, la desintegración de núcleos inestables.

En las sustancias radiactivas se presentan tres tipos de decaimiento: decaimiento alfa ( $\alpha$ ), en el que las partículas emitidas son núcleos de  ${}^4\text{He}$ ; decaimiento beta ( $\beta$ ), en el que las partículas emitidas son electrones o positrones; y el decaimiento gamma ( $\gamma$ ), en el que las partículas emitidas son fotones de alta energía. Un **positrón** es una partícula parecida al electrón en todos los aspectos, excepto que el positrón tiene una carga  $+e$ . (El positrón es *antipartícula* del electrón; véase la sección 44.2.) El símbolo  $-e$  se usa para designar un electrón y el  $e^+$  designa un positrón.

Es posible distinguir entre estas tres formas de radiación experimentalmente al permitir que las partículas de la fuente pasen a través de un campo magnético. La dirección y la curvatura de las trayectorias de las partículas alfa y beta están relacionadas con su carga y masa. Los rayos gamma no son desviados por el campo.

Los tres tipos de radiación tienen poderes de penetración completamente diferentes. Las partículas alfa apenas penetran una hoja de papel, las partículas beta penetran unos cuantos milímetros de aluminio y los rayos gamma penetran varios centímetros de plomo.

El proceso de decaimiento es de naturaleza probabilística y es posible expresarlo mediante cálculos estadísticos en el caso de una sustancia radiactiva de tamaño macroscópico, que contiene un gran número de núcleos radiactivos. Para grandes cantidades la rapidez a la cual se presenta un proceso particular de decaimiento en una muestra es proporcional al número de núcleos radiactivos presentes (es decir, el número de núcleos que aún no han sido objeto de decaimiento). Si  $N$  es el número de núcleos sin decaimiento radiactivos presentes en un momento determinado, la rapidez de cambio de  $N$  es

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (43.5)$$

donde  $\lambda$ , conocida como la **constante de decaimiento**, es la probabilidad de decaimiento por cada núcleo por cada segundo. El signo negativo indica que  $dN/dt$  es negativo; esto es,  $N$  se va reduciendo con el transcurso del tiempo.



Science Source

### María Goeppert-Mayer

*Científica alemana (1906-1972)*

Goeppert-Mayer nació y se educó en Alemania. Se le conoce mejor por su desarrollo del modelo en capas (modelo de partículas independientes) del núcleo, mismo que fue publicado en 1950. Un modelo similar fue desarrollado de manera simultánea por Hans Jensen, otro científico alemán. A Goeppert-Mayer y a Jensen se les otorgó el premio Nobel de física en 1963 por su trabajo extraordinario para la comprensión de la estructura del núcleo.



Time Life Pictures/Getty Images

### Marie Curie

*Científica polaca (1867-1934)*

En el año de 1903 Marie Curie compartió el premio Nobel en Física con su esposo Pierre y con Becquerel por sus estudios sobre las sustancias radiactivas. En 1911 se le otorgó otro premio Nobel en Química por el descubrimiento del radio y del polonio.

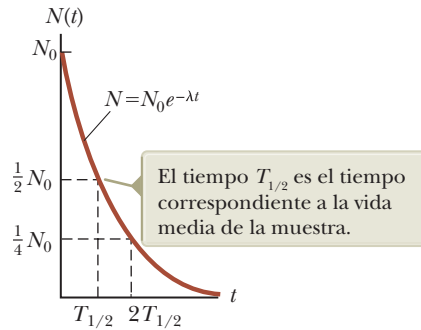
### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 43.3

**¿Rayos o partículas?** En los primeros momentos de la historia de la física nuclear se utilizó el término *radiación* para describir emanaciones de núcleos radiactivos. Ahora se sabe que la radiación alfa y la radiación beta involucran la emisión de partículas con una energía en reposo diferente de cero. Aun cuando no se trata de ejemplos de radiación electromagnética, el uso del término *radiación* para los tres tipos de emisiones está profundamente enraizado en el lenguaje, así como en la comunidad científica.



### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 43.4

**Advertencia en relación con la notación utilizada** En la sección 43.1 se introdujo el símbolo  $N$  como un entero que representaba el número de neutrones en un núcleo. En el presente análisis, el símbolo  $N$  representa el número de núcleos que quedan aún sin decaer de una muestra radiactiva después de algún intervalo de tiempo. Conforme vaya avanzando en su lectura, asegúrese de comprender el contexto a fin de poder determinar el significado apropiado del símbolo  $N$ .



**Figura 43.9** Gráfica del decaimiento exponencial para núcleos radiactivos. El eje vertical representa la cantidad de núcleos radiactivos sin decaer presentes en cualquier tiempo  $t$ , y el eje horizontal es el tiempo.

La ecuación 43.5 puede ser escrita de la forma

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

misma que, al integrarse, da

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (43.6)$$

donde la constante  $N_0$  representa la cantidad de núcleos radiactivos aún sin decaer en el instante  $t = 0$ . La ecuación 43.6 demuestra que la cantidad de núcleos radiactivos todavía sin decaer en una muestra se reduce exponencialmente con el tiempo. La gráfica de  $N$  en función de  $t$  de la figura 43.9 ilustra la naturaleza exponencial del decaimiento. La curva es similar a la variación de la carga eléctrica al transcurrir el tiempo, cuando un capacitor se está descargando en un circuito  $RC$ , como se vio en la sección 27.4

La **rapidez de decaimiento**  $R$ , que representa el número de descomposiciones por cada segundo, puede obtenerse combinando las ecuaciones 43.5 y 43.6:

$$R = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\lambda t} \quad (43.7)$$

donde  $R_0 = \lambda N_0$  es la rapidez de decaimiento en  $t = 0$ . La rapidez de decaimiento  $R$  de una muestra se conoce con frecuencia como su **actividad**. Observe que tanto  $N$  como  $R$  disminuyen exponencialmente con el transcurso del tiempo.

Otro parámetro de utilidad para la caracterización del decaimiento nuclear es la **vida media**  $T_{1/2}$ :

La **vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo durante el cual decae la mitad de un número conocido de núcleos radiactivos.

Para encontrar una expresión para la vida media, primero sustituimos  $N = N_0/2$  y  $t = T_{1/2}$  en la ecuación 43.6 para obtener

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Al cancelar los factores en  $N_0$  y después calcular la inversa de ambos lados, obtiene  $e^{\lambda T_{1/2}} = 2$ . Si se saca el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (43.8)$$

Después de un intervalo de tiempo igual a la vida media, existen  $N_0/2$  núcleos radiactivos restantes (por definición); después de dos vidas medias, la mitad de estos núcleos restantes habrá decaído, quedando  $N_0/4$  núcleos radiactivos; después de tres vidas

Comportamiento exponencial del número de núcleos sin decaer

Comportamiento exponencial de la rapidez de decaimiento

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 43.5

**Vida media** Debido a que  $N$  no es una función lineal de  $t$  en la Ecuación 43.6, ¿ $N_0$  es verdad que después de dos vidas medias todos los núcleos originales hayan sufrido el proceso de decaimiento! En la segunda vida media, la mitad de los núcleos restantes decaerá dejando  $\frac{1}{4}$  del número original.

Vida media



medias quedan  $N_0/8$ , y así sucesivamente. En general, después de  $n$  vidas medias, el número de núcleos radiactivos sin decaer que quedan es

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (43.9)$$

donde  $n$  puede o no ser un entero.

Una unidad de la actividad de uso frecuente es el **curie** (Ci), que se define como

$$1 \text{ Ci} \equiv 3.7 \times 10^{10} \text{ descomposiciones/s} \quad \leftarrow \text{El curie}$$

Este valor fue seleccionado originalmente por tratarse de la actividad aproximada de 1 g de radio. La unidad SI de la actividad es el **becquerel** (Bq):

$$1 \text{ Bq} \equiv 1 \text{ descomposiciones/s} \quad \leftarrow \text{El becquerel}$$

Por tanto,  $1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$ . El curie es una unidad algo grande y las unidades de actividad utilizadas con más frecuencia son el milicurie y el microcurie.

- E XAMEN RÁPIDO 43.2** El día de su cumpleaños, mida la actividad de una muestra de  $^{210}\text{Bi}$ , que tiene una vida media de 5.01 días. La actividad medida es 1.000  $\mu\text{Ci}$ . ¿Cuál será la actividad de esta muestra en su siguiente cumpleaños?
- (a) 1.000  $\mu\text{Ci}$ , (b) 0, (c)  $\sim 0.2 \mu\text{Ci}$ , (d)  $\sim 0.01 \mu\text{Ci}$ , (e)  $\sim 10^{-22} \mu\text{Ci}$ .

### Ejemplo 43.3 ¿Cuántos núcleos quedan?

El isótopo de carbono 14,  $^{14}_6\text{C}$ , es radiactivo y tiene una vida media de 5 730 años. Si usted comienza con una muestra de 1 000 núcleos de carbono 14, ¿cuántos núcleos quedarán sin decaer después de 25 000 años?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El intervalo de tiempo de 25 000 años es mucho más largo que la vida media, así que sólo permanecerá una pequeña fracción de los núcleos originales sin decaer.

**Categorizar** El texto del problema permite clasificar este ejemplo como de sustitución de decaimiento radiactivo.

**Analizar** Divida el intervalo de tiempo por la vida media para determinar el número de vidas medias: 
$$n = \frac{25\,000 \text{ yr}}{5\,730 \text{ yr}} = 4.363$$

Determine cuántos núcleos sin decaer quedan después de 4.363 vidas medias usando la ecuación 43.9: 
$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1\,000 \left(\frac{1}{2}\right)^{4.363} = 49$$

**Finalizar** Como se mencionó, el decaimiento radiactivo es un proceso probabilístico y sólo son posibles predicciones estadísticas precisas con un número muy grande de átomos. La muestra original en este ejemplo sólo contiene 1 000 núcleos, que ciertamente no es un número muy grande. Por tanto, si contó el número de núcleos sin decaer que permanecen después de 25 000 años, puede no ser exactamente 49.

### Ejemplo 43.4 La actividad del carbono

En el tiempo  $t = 0$ , una muestra radiactiva contiene 3.50 mg de  $^{11}_6\text{C}$ , puro, que tiene una vida media de 20.4 min.

**(A)** Determine el número  $N_0$  de núcleos en la muestra en  $t = 0$ .

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La vida media es relativamente corta, así que el número de núcleos sin decaer disminuye rápidamente. La masa molar de  $^{11}_6\text{C}$  es aproximadamente 11.0 g/mol.

**Categorizar** Los resultados se evalúan con ecuaciones desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

*continúa*

## 43.4 continuación

Encuentre el número de moles en  $3.50 \mu\text{g}$  de  $^{11}\text{C}$  puro:  $n = \frac{3.50 \times 10^{-6} \text{ g}}{11.0 \text{ g/mol}} = 3.18 \times 10^{-7} \text{ mol}$

Encuentre el número de núcleos sin decaer en esta cantidad de  $^{11}\text{C}$  puro:  $N_0 = (3.18 \times 10^{-7} \text{ mol})(6.02 \times 10^{23} \text{ nuclei/mol}) = 1.92 \times 10^{17} \text{ nuclei}$

(B) ¿Cuál es la actividad de la muestra, inicialmente y después de 8.00 h?

## SOLUCIÓN

Encuentre la actividad inicial de la muestra usando las ecuaciones 43.7 y 43.8:

$$R_0 = \lambda N_0 = \frac{0.693}{T_{1/2}} N_0 = \frac{0.693}{20.4 \text{ min}} \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) (1.92 \times 10^{17})$$

$$= (5.66 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1})(1.92 \times 10^{17}) = 1.09 \times 10^{14} \text{ Bq}$$

Use la ecuación 43.7 para encontrar la actividad en  $t = 8.00 \text{ h} = 2.88 \times 10^4 \text{ s}$ :

$$R = R_0 e^{-\lambda t} = (1.09 \times 10^{14} \text{ Bq}) e^{-(5.66 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1})(2.88 \times 10^4 \text{ s})} = 8.96 \times 10^6 \text{ Bq}$$

## Ejemplo 43.5 Un isótopo radiactivo de yodo

Una muestra del isótopo  $^{131}\text{I}$ , que tiene una vida media de 8.04 días, tiene una actividad de 5.0 mCi en el tiempo de embarque. Al recibir la muestra en un laboratorio médico, la actividad es de 2.1 mCi. ¿Cuánto tiempo transcurrió entre las dos mediciones?

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La muestra decae continuamente conforme está en tránsito. La disminución en la actividad es 58% durante el intervalo de tiempo entre el embarque y la recepción, así que se espera que el tiempo transcurrido sea mayor que la vida media de 8.04 d.

**Categorizar** La actividad establecida corresponde a muchas descomposiciones por segundo, así que  $N$  es grande y este problema se puede clasificar como uno en el que se puede usar el análisis estadístico de la radiactividad.

**Analizar** Resuelva la ecuación 43.7 para la razón de la actividad final a la actividad inicial y tome el logaritmo natural de ambos lados:

$$\frac{R}{R_0} = e^{-\lambda t} \rightarrow \ln \left( \frac{R}{R_0} \right) = -\lambda t$$

Resuelva para el tiempo  $t$  y use la ecuación 43.8 para encontrar  $\lambda$ :

$$(1) \quad t = -\frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{R}{R_0} \right) = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \left( \frac{R}{R_0} \right)$$

Sustituya valores numéricos:

$$t = -\frac{8.04 \text{ d}}{0.693} \ln \left( \frac{2.1 \text{ mCi}}{5.0 \text{ mCi}} \right) = 10 \text{ d}$$

**Finalizar** Este resultado de hecho es mayor que la vida media, como se esperaba. Este ejemplo demuestra la dificultad de embarcar muestras radiactivas con vidas medias cortas. Si el embarque se demora varios días, sólo una pequeña fracción de la muestra puede permanecer en el recipiente. Esta dificultad se puede superar al embarcar una combinación de isótopos en la que el isótopo deseado sea el producto de un decaimiento que se presente dentro de la muestra. Es posible que el isótopo deseado esté en *equilibrio*, en cuyo caso se produce a la misma rapidez que conforme decae. Por tanto, la cantidad del isótopo deseado permanece constante durante el proceso de embarque y el almacenamiento posterior. Cuando se necesita, el isótopo deseado se puede separar del resto de la muestra; su decaimiento desde la actividad inicial comienza en este punto en lugar de al embarcar.

## 43.5 Los procesos de decaimiento

Como se estableció en la sección 43.4, un núcleo radiactivo decae de manera espontánea según alguno de tres procesos: decaimiento alfa, decaimiento beta o decaimiento gamma. La figura 43.10 muestra el acercamiento de una parte de la figura 43.4 de  $Z = 65$  hasta  $Z = 80$ . Los círculos negros en esta figura son núcleos estables. Además, se muestran los núcleos inestables por encima y por debajo de la línea de estabilidad para cada valor de  $Z$ . Por encima de la línea de estabilidad, los círculos azules muestran núcleos inestables ricos en neutrones y que se someten a un proceso de decaimiento beta en el cual se emite un electrón. Por debajo de los círculos negros aparecen los círculos rojos, que corresponden a núcleos inestables ricos en protones que principalmente se someten a un proceso de decaimiento beta en el cual se emite un



positrón, o si no es el caso, un proceso competidor que se llama captura de electrón. El decaimiento beta y la captura del electrón se describirán con mayor detalle más adelante. Todavía más abajo de la línea de estabilidad (con algunas excepciones) aparecen círculos beige que representan núcleos muy ricos en protones en los cuales el decaimiento principal es el decaimiento alfa, que será el que se explica a continuación.

### Decaimiento alfa

Un núcleo que emite una partícula alfa ( ${}^4_2\text{He}$ ) pierde dos protones y dos neutrones. Por tanto, el número atómico  $Z$  se reduce en 2, el número de masa  $A$  disminuye en 4 y el número de neutrones disminuye en 2. El decaimiento puede expresarse de la forma



donde  $X$  se conoce como el **núcleo padre** y  $Y$  el **núcleo hija**. Como regla general para cualquier expresión de decaimiento como ésta, (1) la suma de los números de masa  $A$  debe ser igual en ambos términos del decaimiento y (2) la suma de los números atómicos  $Z$  también debe ser igual en ambos términos del decaimiento. Como ejemplos,  ${}^{238}\text{U}$  y  ${}^{226}\text{Ra}$  son ambos emisores alfa y decaen según los siguientes esquemas:



El decaimiento del  ${}^{226}\text{Ra}$  se ilustra en la figura 43.11.

Cuando el núcleo de un elemento cambia dentro del núcleo de otro, como ocurre en el caso del decaimiento alfa, el proceso se conoce como **decaimiento espontáneo**. En cualesquiera decaimientos espontáneos, deben conservarse la energía relativista y la cantidad de movimiento de los núcleos padre aislados. Para los procesos en los que los núcleos cambian a otros núcleos, podemos escribir una versión modificada de la ecuación 8.2, con la energía de reposo incluida como otro medio de almacenamiento de energía en el sistema. Por tanto, por ejemplo, para un decaimiento alfa, podemos escribir, identificando el sistema como el núcleo padre antes del decaimiento, y la partícula alfa y el núcleo hija después,

$$\Delta E_R + \Delta K = 0 \quad (43.13)$$

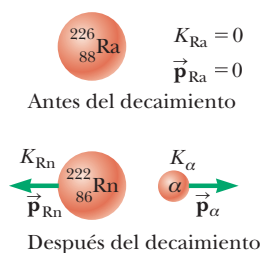
Si identifican  $M_X$  como a la masa del núcleo padre,  $M_Y$  como la masa del núcleo hija y  $M_\alpha$  como la masa de la partícula alfa, la **energía de desintegración**  $Q$  del sistema se define como

$$Q = -\Delta E_R = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 \quad (43.14)$$

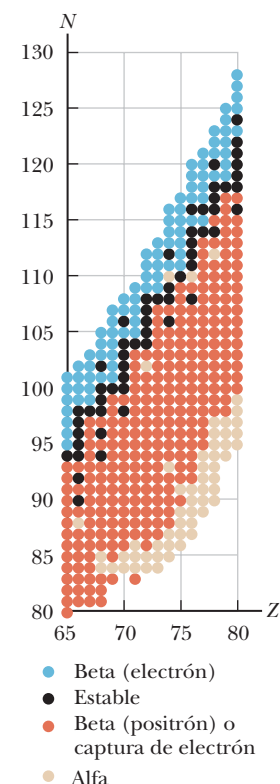
La energía  $Q$  está en joules cuando las masas se dan en kilogramos y  $c$  es la velocidad de la luz, es decir,  $3.00 \times 10^8$  m/s. Sin embargo, cuando las masas se expresan en la unidad de masa atómica  $u$ , es posible calcular  $Q$  en MeV con la expresión

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) \times 931.494 \text{ MeV}/u \quad (43.15)$$

La tabla 43.2 (página 1192) contiene información de isótopos seleccionados, incluyendo masas de átomos neutrales que pueden ser usados en la ecuación 43.15 y en ecuaciones similares. La ecuación 43.13 nos dice que la energía de desintegración, a veces llamada el valor  $Q$  de la desintegración, es la cantidad de energía en reposo que se transforma en energía cinética del núcleo hijo y la partícula alfa. En el caso del decaimiento del  ${}^{226}\text{Ra}$  descrito en la figura 43.11, si el núcleo padre está en reposo antes del decaimiento, la energía cinética total de los productos será de 4.87 MeV (véase el ejemplo 43.7). La mayor parte de esta energía cinética está asociada



**Figura 43.11** Decaimiento alfa del radio-226. El núcleo de radio inicialmente está en reposo. Después del decaimiento, el núcleo de radón tiene una energía cinética  $K_{\text{Rn}}$  y una cantidad de movimiento  $\vec{P}_{\text{Rn}}$ , y la partícula alfa tiene una energía cinética  $K_\alpha$  y una cantidad de movimiento  $\vec{P}_\alpha$ .



**Figura 43.10** Acercamiento de la línea de estabilidad de la figura 43.4 desde  $Z = 65$  hasta  $Z = 80$ . Los puntos negros representan los núcleos estables de la figura 43.4. Los otros puntos de colores representan isótopos inestables por arriba y por debajo de la línea de estabilidad, donde el color del punto indica el procedimiento principal de decaimiento.

◀  $Q$  valor para el decaimiento alfa

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 43.6

**Otro tipo de  $Q$**  Antes se ha visto el símbolo  $Q$  pero éste es un significado totalmente nuevo: la energía de desintegración. En este contexto no se trata de calor ni de carga ni del factor de calidad para una resonancia, en los que antes se ha utilizado la  $Q$ .





TABLA 43.2 Información química y nuclear para isótopos seleccionados

Número atómico Z	Elemento	Símbolo químico	Número de masa A (* significa radiactivo)	Masa de átomo neutro (u)	Abundancia porcentual	Vida media si es radiactivo $T_{1/2}$
-1	electrón	e <sup>-</sup>	0	0.000 549		
0	neutrón	n	1*	1.008 665		612 s
1	hidrógeno [deuterio [tritio	<sup>1</sup> H = p <sup>2</sup> H = D] <sup>3</sup> H = T]	1	1.007 825	99.988 5	
			2	2.014 102	0.011 5	
2	helio [partícula alfa	He $\alpha = ^4\text{He}$	3*	3.016 049		12.32 años
			3	3.016 029	0.000 137	
			4	4.002 603	99.999 863	
3	litio	Li	6*	6.018 886		0.81 s
			6	6.015 123	7.5	
			7	7.016 003	92.5	
4	berilio	Be	7*	7.016 929		53.2 d
			8*	8.005 305		10 <sup>-16</sup> s
			9	9.012 183	100	
5	boro	B	10	10.012 937	19.9	
			11	11.009 305	80.1	
			11*	11.011 433		20.4 min
6	carbón	C	12	12.000 000	98.93	
			13	13.003 355	1.07	
			14*	14.003 242		5 730 años
			13*	13.005 739		9.96 min
7	nitrógeno	N	14	14.003 074	99.632	
			15	15.000 109	0.368	
			14*	14.008 597		70.6 s
			15*	15.003 066		122 s
			16	15.994 915	99.757	
9	flúor	F	17	16.999 132	0.038	
			18	17.999 160	0.205	
			18*	18.000 937		109.8 min
10	neón	Ne	19	18.998 403	100	
			20	19.992 440	90.48	
11	sodio	Na	23	22.989 769	100	
12	magnesio	Mg	23*	22.994 124		11.3 s
			24	23.985 042	78.99	
13	aluminio	Al	27	26.981 538	100	
14	silicón	Si	27*	26.986 705		4.2 s
15	fósforo	P	30*	29.978 313		2.50 min
			31	30.973 762	100	
			32*	31.973 908		14.26 d
			32	31.972 071	94.99	
16	sulfuro	S	32	31.972 071	94.99	
19	potasio	K	39	38.963 706	93.258 1	
			40*	39.963 998	0.011 7	1.25 × 10 <sup>9</sup> años
			40	39.962 591	96.941	
20	calcio	Ca	42	41.958 618	0.647	
			43	42.958 766	0.135	
			55	54.938 043	100	
			56	55.934 936	91.754	
25	manganeso	Mn	55	54.938 043	100	
26	hierro	Fe	56	55.934 936	91.754	
			57	56.935 392	2.119	
			57*	56.936 290		272 d
27	cobalto	Co	59	58.933 194	100	
			60*	59.933 816		5.27 años
			58	57.935 342	68.076 9	
28	níquel	Ni	60	59.930 785	26.223 1	
29	cobre	Cu	63	62.929 597	69.15	
			64*	63.929 764		12.7 h
			65	64.927 789	30.85	
30	zinc	Zn	64	63.929 142	49.2	

continúa

TABLA 43.2 Información química y nuclear para isótopos seleccionados (continuación)

Número atómico Z	Elemento	Símbolo químico	Número de masa A (* significa radiactivo)	Masa de átomo neutro (u)	Abundancia porcentual	Vida media si es radiactivo $T_{1/2}$
37	rubidio	Rb	87*	86.909 181	27.83	
38	estroncio	Sr	87	86.908 877	7.00	
			88	87.905 612	82.58	
			90*	89.907 731		28.8 años
41	niobio	Nb	93	92.906 373	100	
42	molibdeno	Mo	94	93.905 084	9.25	
44	rutenio	Ru	98	97.905 287	1.87	
54	xenón	Xe	136*	135.907 214		$2.2 \times 10^{21}$ años
55	cesio	Cs	137*	136.907 089		30 años
56	bario	Ba	137	136.905 827	11.232	
58	cerio	Ce	140	139.905 446	88.450	
59	praseodimio	Pr	141	140.907 658	100	
60	neodimio	Nd	144*	143.910 093	23.8	$2.3 \times 10^{15}$ años
61	prometeo	Pm	145*	144.912 756		17.7 años
79	oro	Au	197	196.966 570	100	
80	mercurio	Hg	198	197.966 769	10.0	
			202	201.970 644	29.7	
82	dirigir	Pb	206	205.974 465	24.1	
			207	206.975 897	22.1	
			208	207.976 652	52.4	
			214*	213.999 804		26.8 min
83	bismuto	Bi	209	208.980 399	100	
84	polonio	Po	210*	209.982 874		138.38 d
			216*	216.001 914		0.145 s
			218*	218.008 972		3.10 min
86	radón	Rn	220*	220.011 393		55.6 s
			222*	222.017 576		3.823 d
88	radio	Ra	226*	226.025 408		1 600 años
90	torio	Th	232*	232.038 054	100	$1.40 \times 10^{10}$ años
			234*	234.043 600		24.1 d
92	uranio	U	234*	234.040 950		$2.45 \times 10^5$ años
			235*	235.043 928	0.720 0	$7.04 \times 10^8$ años
			236*	236.045 566		$2.34 \times 10^7$ años
			238*	238.050 787	99.274 5	$4.47 \times 10^9$ años
93	neptunio	Np	236*	236.046 568		$1.54 \times 10^5$ años
			237*	237.048 172		$2.14 \times 10^6$ años
94	plutonio	Pu	239*	239.052 162		24 120 años

Fuente: M. Weng, G. Audi, F.G. Kondev, W. J. Huang, S. Naimi, y X. Xu, "The AME2016 Atomic Mass Evaluation", *Chinese Physics C* 41(3), 03003, 2017.

con la partícula alfa, ya que esta última tiene una masa mucho menor que el núcleo hija  $^{222}\text{Rn}$ . Es decir, ya que la cantidad de movimiento se debe conservar, la partícula alfa más ligera retrocede a una rapidez mucho más elevada que el núcleo hija. En general, en los decaimientos nucleares, las partículas de menor masa se llevan la mayor parte de la energía.

Observaciones experimentales de las energías de las partículas alfa muestran una cantidad de energías discretas en lugar de una sola energía, porque el núcleo hija puede quedar en un estado cuántico excitado después del decaimiento. Como resultado, no toda la energía de desintegración está disponible como energía cinética tanto de la partícula alfa como del núcleo hija. A la emisión de una partícula alfa sigue la emisión de uno o dos fotones de rayos gamma (explicado brevemente) conforme los núcleos excitados decaen hasta el estado fundamental. En este caso, la ecuación 8.2 se convierte en

$$\Delta E_R + \Delta K = T_{ER}$$

donde  $T_{ER}$  representa la energía transportada por el decaimiento los rayos gama. Debido a que parte de la energía en el sistema es transportada por los fotones, se



dispone de menos energía representada por  $Q = -\Delta_{ER}$  para la energía cinética de los productos finales. Las energías de partículas alfa discretas observadas representan una evidencia de la naturaleza cuantificada del núcleo y permiten una determinación de las energías de los estados cuánticos.

**E XAMEN RÁPIDO 43.3** ¿Cuál de los siguientes es el núcleo hija correcto asociado con el decaimiento alfa del  ${}^{157}_{72}\text{Hf}$ ? (a)  ${}^{153}_{72}\text{Hf}$  (b)  ${}^{153}_{70}\text{Yb}$  (c)  ${}^{157}_{70}\text{Yb}$ .

### Ejemplo 43.6 Cambio de masa en un decaimiento radioactivo

El núcleo  ${}^{216}\text{Po}$  es inestable y muestra radioactividad. Se descompone en  ${}^{212}\text{Pb}$  al emitir una partícula alfa. Las masas relevantes, en unidades de masa atómica, son  $m_i = m({}^{216}\text{Po}) = 216.001\,914\text{ u}$  y  $m_f = m({}^{212}\text{Pb}) + m({}^4\text{He}) = 211.991\,898\text{ u} + 4.002\,603\text{ u}$ .

(A) Encuentre el cambio de masa del sistema en este decaimiento.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** El sistema inicial es el núcleo  ${}^{216}\text{Po}$ . Imagine la masa del sistema disminuyendo durante el deterioro y transformándose en energía cinética de la partícula alfa y el núcleo de  ${}^{212}\text{Pb}$  después de la descomposición.

**Categorizar** Use los conceptos estudiados en esta sección, así puede categorizar este ejemplo como un problema de sustitución.

Calcule el cambio en masa usando los valores de masa dados en la declaración del problema.

$$\begin{aligned}\Delta m &= m_f - m_i = (211.991\,898\text{ u} + 4.002\,603\text{ u}) - 216.001\,914\text{ u} \\ &= -0.007\,413\text{ u} = -1.23 \times 10^{-29}\text{ kg}\end{aligned}$$

(B) Encuentre el valor de  $Q$  para esta descomposición.

#### SOLUCIÓN

Use la ecuación 43.14 para evaluar el valor  $Q$ :

$$\begin{aligned}Q &= -\Delta E_R = -(\Delta m)c^2 = -(-1.23 \times 10^{-29}\text{ kg})(3.00 \times 10^8\text{ m/s})^2 \\ &= 1.11 \times 10^{-12}\text{ J} = 6.92\text{ MeV}\end{aligned}$$

### Ejemplo 43.7 Energía liberada cuando el Radio decae

El núcleo de  ${}^{226}\text{Ra}$  experimenta decaimiento alfa de acuerdo con la ecuación 43.12.

(A) Calcule el valor  $Q$  para este proceso. A partir de la tabla 43.2, las masas son  $226.025\,410\text{ u}$  para  ${}^{226}\text{Ra}$ ,  $222.017\,578\text{ u}$  para  ${}^{222}\text{Rn}$ , y  $4.002\,603\text{ u}$  para  $\text{He}$ .

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Estudie la figura 43.11 para entender el proceso del decaimiento alfa en este núcleo.

**Categorizar** El núcleo principal es un *sistema aislado* que se desintegra en una partícula alfa y un núcleo hijo. El sistema está aislado tanto en términos de *energía* y de la cantidad de movimiento.

**Analizar** Evalúe  $Q$  con la ecuación 43.15:

$$\begin{aligned}Q &= (M_X - M_Y - M_\alpha) \times 931.494\text{ MeV/u} \\ &= (226.025\,408\text{ u} - 222.017\,576\text{ u} - 4.002\,603\text{ u}) \times 931.494\text{ MeV/u} \\ &= (0.005\,229\text{ u}) \times 931.494\text{ MeV/u} = 4.87\text{ MeV}\end{aligned}$$

(B) ¿Cuál es la energía cinética de la partícula alfa a después del decaimiento?

**Analizar** El valor de  $4.87\text{ MeV}$  es la energía de desintegración para el decaimiento. Incluye la energía cinética de la partícula alfa y del núcleo hija después del decaimiento. Por tanto, la energía cinética de la partícula alfa sería *menor* que  $4.87\text{ MeV}$ .

Establezca una ecuación de conservación del momento, señalando que el momento inicial del sistema es cero:

$$(1) \quad 0 = M_Y v_Y - M_\alpha v_\alpha$$



43.7 continuación

Resuelva la ecuación 43.13 para el negativo del cambio en la masa en reposo y luego exprese el lado izquierdo de la ecuación como  $Q$  usando  $Q = -\Delta E_R$ . En el lado derecho, exprese la energía cinética final del sistema como la suma de las energías cinéticas del núcleo hija y la partícula alfa:

Resuelva la ecuación (1) para  $v_Y$  y sustituye en la ecuación (2).

Resuelva el resultado para la energía cinética de la partícula alfa:

Evalúe esta energía cinética para el decaimiento específico de  $^{226}\text{Ra}$  que se explora en este ejemplo:

$$-\Delta E_R = \Delta K \rightarrow Q = \Delta K$$

$$(2) \quad Q = \frac{1}{2}M_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2}M_Y v_Y^2$$

$$Q = \frac{1}{2}M_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2}M_Y \left(\frac{M_\alpha v_\alpha}{M_Y}\right)^2 = \frac{1}{2}M_\alpha v_\alpha^2 \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}\right)$$

$$= K_\alpha \left(\frac{M_Y + M_\alpha}{M_Y}\right) \rightarrow K_\alpha = Q \left(\frac{M_Y}{M_Y + M_\alpha}\right)$$

$$K_\alpha = (4.87 \text{ MeV}) \left(\frac{222}{222 + 4}\right) = 4.78 \text{ MeV}$$

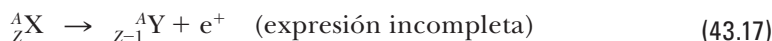
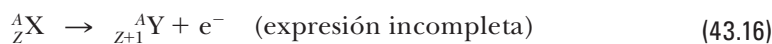
**Finalizar** La energía cinética de la partícula alfa es de hecho menor que la energía desintegración, pero se observa que la partícula alfa se lleva la *mayor parte* de la energía disponible en la decadencia.

A fin de comprender el mecanismo del decaimiento alfa, considere un modelo del núcleo padre como un sistema constituido por (1) la partícula alfa, ya formada como una entidad dentro del núcleo, y (2) el núcleo hija que resultará cuando sea emitida la partícula alfa. La figura 43.12 que es similar a la figura 40.9 muestra una gráfica de la energía potencial en función de la distancia de separación  $r$  entre la partícula alfa y el núcleo hija, en donde la distancia marcada como  $R$  es el alcance de la fuerza nuclear. La curva representa los efectos combinados de (1) la fuerza de repulsión de Coulomb, la cual proporciona la parte positiva de la curva para  $r > R$  y (2) la fuerza de atracción del núcleo, la cual produce una curva negativa cuando  $r < R$ . Como en el ejemplo 43.7, la energía de desintegración  $Q$  representativa es casi 5 MeV, que es la energía cinética aproximada de la partícula alfa, representada por la línea discontinua inferior en la figura 43.12.

De acuerdo con la física clásica, la partícula alfa está atrapada dentro de un pozo de potencial. En tal caso, ¿cómo es que llega a escaparse del núcleo? El primero en responder esta pregunta fue George Gamow (1904-1968) en el año de 1928, simultáneamente con R. W. Gurney (1898-1953) y E. U. Condon (1902-1974) en 1929, usando la mecánica cuántica. Una característica de la mecánica cuántica es que siempre existe la probabilidad de que una partícula pueda perforar túneles a través de una barrera (sección 40.5). Esta es la descripción exacta del decaimiento alfa: la partícula alfa perfora un túnel a través de la barrera en la figura 43.12, escapando del núcleo. Además, este modelo coincide con la observación de que las partículas alfa con mayor energía provienen de núcleos con vidas medias más cortas. Para partículas alfa de mayor energía en la figura 43.12, la barrera es más estrecha y hay mayores probabilidades de que se presente filtración cuántica. El aumento en las probabilidades se transforma en vidas medias más cortas.

**Decaimiento beta**

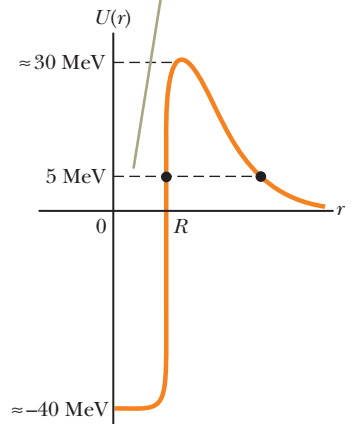
Cuando un núcleo radiactivo se somete a decaimiento beta, el núcleo hija contiene el mismo número de nucleones que el núcleo padre, pero el número atómico cambia en 1, por lo que el número de protones también cambia:



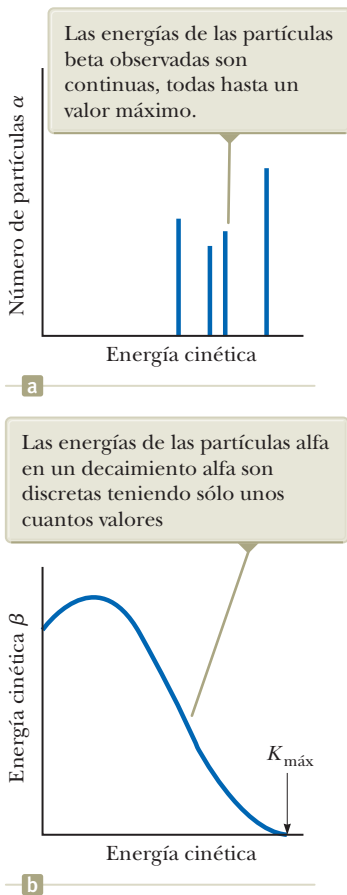
en donde, como se mencionó en la sección 43.4, se utiliza  $e^-$  para designar un electrón y  $e^+$  para designar un positrón, siendo la *partícula beta* el término general usado para referirse a ambos. *El decaimiento beta no es descrito totalmente mediante estas expresiones.* En seguida se explican brevemente las razones.

Al igual que en el decaimiento alfa, el número de nucleones y la carga total son conservados durante el decaimiento beta. Puesto que  $A$  no cambia y, sin embargo,  $Z$  sí, se

De acuerdo con la física clásica, 5-MeV de energía de la partícula alfa no es suficiente para superar la barrera de energía y, por tanto, la partícula no debe ser capaz de escapar del núcleo.

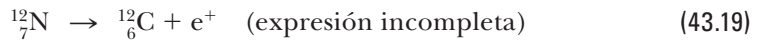
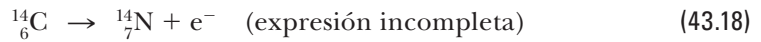


**Figura 43.12** Gráfica de la energía potencial en función de la distancia de separación en un sistema que consiste en una partícula alfa y un núcleo hija. La partícula alfa escapa mediante filtración cuántica a través de la barrera.



**Figura 43.13** (a) Distribución de las energías de partículas beta en un decaimiento beta característico. (b) Distribución de las energías de la partícula alfa en un típico decaimiento alfa.

concluye que en el decaimiento beta un neutrón cambia a un protón (ecuación 43.16) o un protón cambia a un neutrón (ecuación 43.17). Observe que el electrón o positrón emitidos en estas desintegraciones no se encuentran presentes desde antes dentro del núcleo; son creados durante el proceso de desintegración utilizando la energía de reposo de la desintegración del núcleo. Dos procesos representativos del decaimiento beta son:



Consideremos los resultados experimentales para la energía cinética de la partícula emitida en decaimiento alfa y beta. Para la desintegración alfa, como se ve en la figura 43.13a, las partículas alfa se emiten con varias energías discretas. Las diversas posibilidades que se muestran en la figura 43.13a representan el núcleo secundario que queda en diferentes estados de excitación después de la descomposición. Si el núcleo hija se queda en un estado excitado, hay una decadencia gamma posterior a medida que el núcleo hace una transición al estado fundamental. Cuando se incluyen las energías de rayos gamma, la energía se conserva para el sistema.

Ahora, ¿qué pasa con la descomposición beta? Experimentalmente, se encuentra que las partículas beta de un solo tipo de núcleo se emiten en un *rango continuo de energías*, como se muestra en la figura 43.13b. Esto es muy diferente de la situación en el decaimiento alfa. Sin embargo, debido a que todos los núcleos de descomposición beta en la muestra tienen la misma masa inicial, el valor de  $Q$  debe ser el mismo para cada desintegración. Entonces, ¿por qué las partículas emitidas tienen el rango de energías cinéticas que se muestra en la figura 43.13b? El modelo de sistema aislado y la ley de conservación de la energía parecen estar violados. Se vuelve peor: un análisis adicional de los procesos de descomposición descritos en las ecuaciones 43.16 y 43.17 muestra que las leyes de conservación del momento angular (spín) y la cantidad de movimiento lineal también se violan.

En 1930, después de muchos estudios experimentales y teóricos, Pauli propuso que es obligatorio que exista una tercera partícula presente en los productos de la desintegración para llevarse la energía y la cantidad de movimiento “faltantes”. Más adelante, Fermi llamó a esta partícula **neutrino** (pequeño y neutro), porque debía ser eléctricamente neutro y poseer ninguna o muy poca masa. Aunque durante muchos años el neutrino se resistió a ser detectado (símbolo  $\nu$ , nu griega), finalmente fue detectado en 1956 en un experimento realizado por Frederick Reines (1918-1998), quien recibió el premio Nobel en Física por este trabajo en 1995. El neutrino tiene las siguientes propiedades:

#### Propiedades del neutrino ►

- Tiene carga eléctrica igual a cero.
- Su masa es ya sea cero (en cuyo caso viaja a la velocidad de la luz) o muy pequeña; existe mucha evidencia experimental reciente que sugiere fuertemente que la masa del neutrino es distinta de cero. Los experimentos actuales ubican el límite superior de la masa del neutrino en alrededor de  $2 \text{ eV}/c^2$ .
- Tiene un espín de  $\frac{1}{2}$ , lo cual permite que la ley de conservación de cantidad de movimiento angular se satisfaga durante el decaimiento beta.
- Interactúa en forma muy débil con la materia y, por tanto, es muy difícil de detectar.

Ahora puede escribir los procesos del decaimiento beta (ecuaciones 43.16 y 43.17) en su forma correcta y completa:

#### Procesos del decaimiento beta ►



así como los procesos para el carbono 14 y el nitrógeno 12 (ecuaciones 43.18 y 43.19):



en donde el símbolo  $\bar{\nu}$  representa al **antineutrino**, la antipartícula del neutrino. Las antipartículas se analizan con más detalle en el capítulo 44. Por ahora, es suficiente





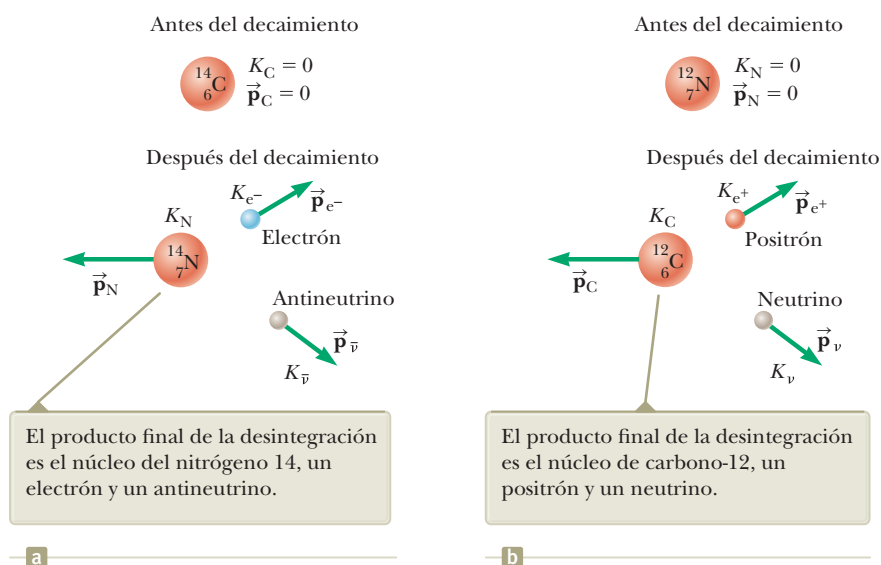
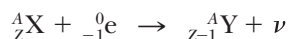


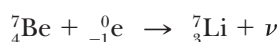
Figura 43.14 (a) Decaimiento beta del carbono-14. (b) Decaimiento beta del nitrógeno-12.

decir que un neutrino es emitido durante el decaimiento de positrones y un antineutrino es emitido durante el decaimiento de electrones. La figura 43.14 muestra una representación ilustrada de las desintegraciones descritas en las ecuaciones 43.22 y 43.23. En la desintegración beta, hay tres partículas después de la descomposición. Por tanto, los dos principios de conservación de la energía y el momento no pueden especificar por completo las energías cinéticas de las partículas salientes como en la desintegración alfa. Como resultado, la partícula beta se puede emitir con cualquier energía hasta un máximo, como se ve en la figura 43.13b.

Un proceso que compite con el decaimiento  $e^+$  es la **captura de electrones**, que se presenta cuando un núcleo padre captura uno de sus propios electrones orbitales y emite un neutrino. El producto final después de la desintegración es un núcleo cuya carga es de  $Z - 1$ :



En la mayor parte de los casos, el electrón capturado está en la capa K, por esta razón el proceso se conoce como **captura K**. Un ejemplo es la captura de un electrón por  ${}^7_4\text{Be}$ :



Ya que el neutrino es tan difícil de detectar, la captura de electrones se observa mediante los rayos X producidos conforme los electrones de capas superiores caen en cascada hacia adentro para llenar el hueco creado en la capa K.

Por último, se definen los valores  $Q$  de los procesos del decaimiento beta. Los valores  $Q$  para el decaimiento  $e^-$  y la captura de electrones están dados por

$$Q = (M_X - M_Y)c^2 \tag{43.24}$$

en donde  $M_X$  y  $M_Y$  son las masas de los átomos neutros. En el decaimiento  $e^-$ , el núcleo padre experimenta un aumento en el número atómico y debe agregar un electrón para que el átomo sea neutro. Si el átomo padre neutro y un electrón (que se combina con la hija para formar un átomo neutro) es el sistema inicial y el sistema final es el átomo hija neutro y el electrón beta expulsado, existe un electrón libre dentro del sistema tanto antes como después de la desintegración. Por tanto, al sustraer las masas inicial y final del sistema, las masas de estos electrones se cancelan.

Los valores  $Q$  para  $e^+$  se obtienen mediante

$$Q = (M_X - M_Y - 2m_e)c^2 \tag{43.25}$$

El término extra en esta expresión,  $-2m_e c^2$ , es necesario porque el número atómico del padre decrece en uno cuando se forma la hija. Después de ser formado por decaimiento, el átomo hija libera un electrón para formar un átomo neutro. Por tanto, el producto final es un átomo hija, un electrón liberado y un positrón expulsado.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 43.7

**Número de masa del electrón** Vemos en las ecuaciones para la captura del electrón el símbolo  ${}^0_{-1}\text{e}$ , para el electrón. Aproximamos la masa del electrón a cero ya que es relativamente pequeña en comparación a masas nucleares.

◀ Captura de electrón

◀ Valor  $Q$  para el decaimiento  $e^-$  y el electrón capturado

◀ Valores  $Q$  para el decaimiento  $e^+$

Estas relaciones resultan útiles para determinar si un proceso es posible en términos de energía o no. Por ejemplo, el valor  $Q$  para el decaimiento  $e^+$  propuesto para un núcleo padre en particular puede resultar negativo. En este caso, no ocurrirá decaimiento. De cualquier modo, la expresión para la captura de electrones de este núcleo padre puede resultar en una cifra positiva, por lo que puede ocurrir la captura de electrones, aun cuando no sea posible el decaimiento  $e^+$ . Este es el caso del decaimiento de  ${}^7_4\text{Be}$ , que se muestra arriba.

**EJEMPLO RÁPIDO 43.4** ¿Cuál de los siguientes es el núcleo hijo correcto asociado con el decaimiento beta de  ${}^{184}_{72}\text{Hf}$ ? (a)  ${}^{183}_{72}\text{Hf}$  (b)  ${}^{183}_{73}\text{Ta}$  (c)  ${}^{184}_{73}\text{Ta}$

### Datación por carbono

El decaimiento beta del  ${}^{14}\text{C}$  (ecuación 43.22) se utiliza comúnmente para establecer la antigüedad de muestras orgánicas. Los rayos cósmicos en la parte superior de la atmósfera provocan reacciones nucleares (sección 43.7) que producen  ${}^{14}\text{C}$ . La razón de  ${}^{14}\text{C}$  al  ${}^{12}\text{C}$  en las moléculas de dióxido de carbono en la atmósfera tiene un valor constante de aproximadamente  $r_0 = 1.3 \times 10^{12}$ . Los átomos de carbono en los organismos vivos tienen esta misma razón de  $r_0$   ${}^{14}\text{C}/{}^{12}\text{C}$  porque los organismos intercambian dióxido de carbono continuamente con sus alrededores. Sin embargo, cuando un organismo muere deja de absorber el  ${}^{14}\text{C}$  de la atmósfera y, por tanto, la relación  ${}^{14}\text{C}/{}^{12}\text{C}$  disminuye conforme el  ${}^{14}\text{C}$  decae con una vida media de 5 730 años. Por esto, es posible conocer la antigüedad de un material al medir la actividad de  ${}^{14}\text{C}$ .

Un ejemplo particularmente interesante es la determinación de la antigüedad de los Rollos del Mar Muerto. Este conjunto de manuscritos fue descubierto por un pastor en el año de 1947. La traducción reveló que se trataba de documentos religiosos, incluyendo la mayoría de los libros del Antiguo Testamento. Debido a su importancia histórica y religiosa, los eruditos deseaban conocer su antigüedad. La datación por carbono aplicado al material en que estaban envueltos determinó que tenían una antigüedad de aproximadamente 1950 años.

### Ejemplo conceptual 43.8 La edad del hombre de hielo

En 1991 un turista alemán descubrió los restos bien preservados de un hombre, ahora llamado “Özzy el Hombre de Hielo”, atrapado en un glaciar en los alpes italianos. La datación radiactiva con  ${}^{14}\text{C}$  reveló que esta persona estuvo viva aproximadamente hace 5 300 años. ¿Por qué los científicos dataron una muestra del hombre de hielo usando  ${}^{14}\text{C}$  en lugar de  ${}^{11}\text{C}$ , que es un emisor beta que tiene una vida media de 20.4 min?

#### SOLUCIÓN

Debido a que el  ${}^{14}\text{C}$  tiene una vida media de 5 730 años, la fracción de núcleos de  ${}^{14}\text{C}$  que permanecen después de miles de años es suficientemente alta como para permitir mediciones precisas de cambios en la actividad de la muestra. Ya que el  ${}^{11}\text{C}$  tiene una vida media muy corta, no es útil; su actividad disminuye a un valor mucho muy pequeño a través de la edad de la muestra, lo que hace imposible detectarlo.

Un isótopo que se usa para fechar una muestra debe estar presente en una cantidad conocida en la muestra cuando se forma. Como regla general, el isótopo elegido para fechar una muestra también debe tener una vida media que esté en el

mismo orden de magnitud que la edad de la muestra. Si la vida media es mucho menor que la edad de la muestra, no quedará suficiente actividad para medir porque casi todos los núcleos radiactivos habrán decaído. Si la vida media es mucho mayor que la edad de la muestra, la cantidad de desintegración que tuvo lugar desde que la muestra murió será muy pequeña para medir. Por ejemplo, si usted tiene un espécimen que se estima murió hace 50 años, ni el  ${}^{14}\text{C}$  (5 730 años) ni el  ${}^{11}\text{C}$  (20 min) son adecuados. Sin embargo, si usted sabe que su muestra contiene hidrógeno, puede medir la actividad de  ${}^3\text{H}$  (tritio), un emisor beta que tiene una vida media de 12.3 años.

### Ejemplo 43. Datador radiactivo

Un trozo de carbón que contiene 25.0 g de carbono se encuentra en algunas ruinas de una ciudad antigua. La muestra presenta una actividad  $R$  de  ${}^{14}\text{C}$  de 250 desintegraciones/min. ¿Hace cuánto murió el árbol del que provino este carbón?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Ya que el carbón se encontró en ruinas antiguas, se espera que la actividad actual sea menor que la actividad inicial. Si puede determinar la actividad inicial, puede encontrar hace cuánto murió la madera.

## 43.9 continuación

**Categorizar** El texto de la pregunta ayuda a clasificar este ejemplo como un problema de datación de carbono.

**Analizar** Resuelva la ecuación 43.7 para  $t$  e incorpore la ecuación 43.8:

Evalúe la razón  $R/R_0$  utilizando la ecuación 43.7, el valor inicial de la razón  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$   $r_0$ , el número de moles  $n$  de carbono, y el número de Avogadro  $N_A$ :

Reemplace el número de moles en términos de la masa molar  $M$  de carbono y la masa  $m$  de la muestra y el sustituto de la constante de desintegración  $\lambda$ :

Sustituya valores numéricos:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{(250 \text{ min}^{-1})(12.0 \text{ g/mol})(5730 \text{ yr})}{(1.3 \times 10^{-12})(25.0 \text{ g})(6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \ln 2} \left( \frac{3.156 \times 10^7 \text{ s}}{1 \text{ yr}} \right) \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 0.667$$

Sustituya esta razón en la ecuación (1):

$$t = -\frac{5730 \text{ yr}}{\ln 2} \ln (0.667) = 3.4 \times 10^3 \text{ yr}$$

**Finalizar** Note que el intervalo de tiempo que se encontró en este caso está en el orden de magnitud de la vida media, de modo que  $^{14}\text{C}$  es un isótopo válido para usar en esta muestra, como se explicó en el ejemplo conceptual 43.8.

## Decaimiento gamma

Con mucha frecuencia un núcleo sometido a decaimiento radiactivo queda en un estado de energía excitado. En tal caso, el núcleo puede someterse a un segundo decaimiento a un estado de energía menor, quizá hasta el estado fundamental, mediante la emisión en un fotón de alta energía:



en donde  $\text{X}^*$  indica un núcleo en estado excitado. La vida media representativa de un estado nuclear excitado es de  $10^{-10}$  s. Los fotones emitidos durante procesos de des-excitación semejantes son conocidos como rayos gamma. Estos fotones tienen una energía muy alta (1 MeV a 1 GeV), en relación con la energía de la luz visible (alrededor de 1 eV). Recuerde, de la sección 41.3, que la energía de un fotón emitido o absorbido por un átomo es igual a la diferencia de energía entre los dos estados electrónicos involucrados en la transición. En forma similar, un fotón de rayo gamma tiene una energía  $hf$  que es igual a la diferencia de energía  $\Delta E$  entre dos niveles de energía nuclear. Cuando un núcleo decae al emitir un rayo gamma, el único cambio en el núcleo es que termina en un estado de energía inferior. No hay cambios en  $Z$ ,  $N$  o  $A$ .

Un núcleo puede alcanzar un estado excitado como resultado de una colisión violenta con otra partícula. Sin embargo, es más común que el núcleo se encuentre en estado excitado después de haber sufrido decaimiento alfa o beta. La siguiente secuencia de eventos representa una situación típica en la que se presenta decaimiento gamma:

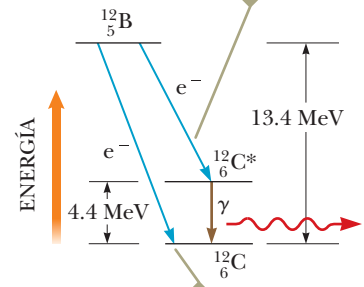


La figura 43.15 muestra el esquema de decaimiento de  $^{12}\text{B}$ , sometido a decaimiento beta en cualquiera de los dos niveles de  $^{12}\text{C}$ . Puede (1) decaer directamente al estado fundamental de  $^{12}\text{C}$  al emitir un electrón de 13.4 MeV o (2) experimentar un decaimiento beta a un estado excitado de  $^{12}\text{C}^*$ , seguido por un decaimiento gamma hacia el estado fundamental. Este último proceso resulta en la emisión de un electrón de 9.0 MeV y de un fotón de 4.4 MeV.

Las diferentes trayectorias mediante las cuales un núcleo radiactivo puede someterse a decaimiento aparecen resumidas en la tabla 43.3 (página 1200).

### ◀ Decaimiento gamma

En este proceso de desintegración, el núcleo hija se encuentra en un estado excitado, denotado por  $^{12}_6\text{C}^*$ ; y la desintegración beta es seguida por un decaimiento gamma.



En este proceso de desintegración, el núcleo  $^{12}_6\text{C}$  hija se deja en el estado fundamental.

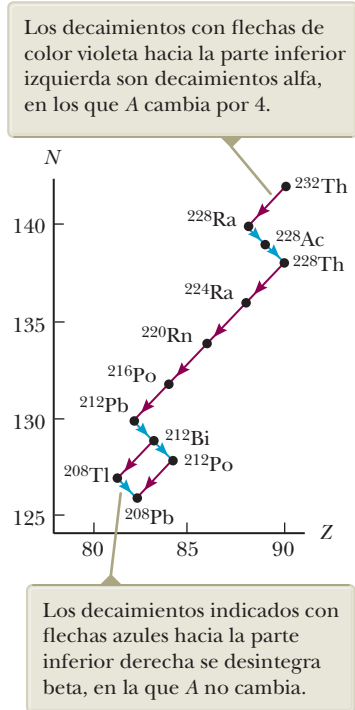
**Figura 43.15** Diagrama de niveles de energía que muestra el estado nuclear inicial de un núcleo  $^{12}\text{B}$  y dos estados posibles de menor energía del núcleo  $^{12}\text{C}$ .

**TABLA 43.3** Diversas trayectorias de decaimiento

Decaimiento alfa	${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2\text{He}$
Decaimiento beta ( $e^-$ )	${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + e^- + \bar{\nu}$
Decaimiento beta ( $e^+$ )	${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + e^+ + \nu$
Captura de electrón	${}^A_ZX + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + \nu$
Decaimiento gamma	${}^A_ZX^* \rightarrow {}^A_ZX + \gamma$

**TABLA 43.4** Las cuatro series radiactivas

Serie	Isótopo inicial	Vida media (años)	Producto final estable
Natural	${}^{238}_{92}\text{U}$	$4.47 \times 10^9$	${}^{206}_{82}\text{Pb}$
	${}^{235}_{92}\text{U}$	$7.04 \times 10^8$	${}^{207}_{82}\text{Pb}$
	${}^{232}_{90}\text{Th}$	$1.41 \times 10^{10}$	${}^{208}_{82}\text{Pb}$
	${}^{237}_{93}\text{Np}$	$2.14 \times 10^6$	${}^{209}_{83}\text{Bi}$



**Figura 43.16** Decaimientos sucesivos para la serie  ${}^{232}\text{Th}$ .

### 43.6 Radiactividad natural

Los núcleos radiactivos por lo general se clasifican en dos grupos: (1) los núcleos inestables encontrados en la naturaleza, los cuales producen la **radiactividad natural**, y (2) los núcleos inestables producidos en laboratorio a través de reacciones nucleares, los cuales exhiben **radiactividad artificial**.

Como muestra la tabla 43.4, existen tres series de núcleos radiactivos que se presentan en la naturaleza. Cada serie comienza con un isótopo radiactivo longevo cuya vida media excede la de todos sus descendientes inestables. Las tres series naturales comienzan con los isótopos  ${}^{238}\text{U}$ ,  ${}^{235}\text{U}$  y  ${}^{232}\text{Th}$ , y los correspondientes productos finales estables son tres isótopos del plomo:  ${}^{206}\text{Pb}$ ,  ${}^{207}\text{Pb}$  y  ${}^{208}\text{Pb}$ . La cuarta serie en la tabla 43.4 comienza con  ${}^{237}\text{Np}$  y tiene un producto final estable  ${}^{209}\text{Bi}$ . El elemento  ${}^{237}\text{Np}$  es un elemento *transuránico* (con número atómico mayor al del uranio), que no se encuentra en la naturaleza. Este elemento tiene una vida media de “sólo”  $2.14 \times 10^6$  años.

La figura 43.16 muestra los decaimientos sucesivos para la serie  ${}^{232}\text{Th}$ . Observe que  ${}^{232}\text{Th}$  atraviesa primero por decaimiento alfa hasta  ${}^{228}\text{Ra}$ . A continuación,  ${}^{228}\text{Ra}$  pasa por dos decaimientos beta sucesivos hasta  ${}^{228}\text{Th}$ . La serie continúa y, finalmente, se divide cuando llega a  ${}^{212}\text{Bi}$ . En este punto, existen dos posibilidades de decaimiento. La secuencia que aparece en la figura 43.16 se caracteriza por un decremento en el número de masa en cuatro (en decaimientos alfa) o 0 (para decaimientos beta o gamma). Las dos series de uranio son más complejas que la serie  ${}^{232}\text{Th}$ . Además, existen varios isótopos radiactivos que ocurren en la naturaleza, como  ${}^{14}\text{C}$  y  ${}^{40}\text{K}$ , que no forman parte de ninguna serie de decaimiento.

Gracias a estas series radiactivas, nuestro entorno es reabastecido constantemente de elementos radiactivos, que de lo contrario hubieran desaparecido hace mucho tiempo. Por ejemplo, ya que el sistema solar tiene aproximadamente  $5 \times 10^9$  años de edad, el suministro de  ${}^{226}\text{Ra}$  (cuya vida media es de solamente 1 600 años) se hubiera agotado hace mucho debido al decaimiento radiactivo, si no fuera por las series que comienzan con  ${}^{238}\text{U}$ .

### 43.7 Reacciones nucleares

Ya ha estudiado la radiactividad, que es un proceso espontáneo en el cual la estructura del núcleo cambia. También es posible estimular cambios en la estructura del núcleo al bombardearlo con partículas energéticas. Estas colisiones, que cambian la identidad del núcleo objetivo, son llamadas **reacciones nucleares**. En 1919 Rutherford fue el primero en observarlas utilizando fuentes naturalmente radiactivas para bombardear las partículas. Desde ese momento se han observado miles de reacciones nucleares después del desarrollo, en los años treinta, de los aceleradores de partículas cargadas. Con la avanzada tecnología actual en aceleradores de partículas y detectores de partículas, el Gran Colisionador de Hadrones (ver sección 44.10) en Europa, puede energizar partículas de  $14\,000\text{ GeV} = 14\text{ TeV}$ . Estas partículas de alta energía se utilizan para crear nuevas partículas cuyas propiedades ayudan a resolver los misterios del núcleo.

Considere una reacción en la cual el núcleo objetivo X es bombardeado por una partícula a, resultando en un núcleo hija Y y una partícula expulsada b:

$$a + X \rightarrow Y + b \tag{43.29}$$

Reacción nuclear ►

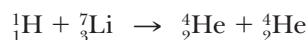
A menudo esta reacción se escribe en forma más compacta



En la sección 43.5 se definió el valor  $Q$ , o energía de desintegración de un decaimiento radiactivo como la energía en reposo transformada en energía cinética como resultado del proceso de decaimiento. En forma similar, se define la **energía de la reacción**  $Q$  relacionada con una reacción nuclear como *la diferencia entre las energías en reposo inicial y final*:

$$Q = (M_a + M_X - M_Y - M_b)c^2 \quad (43.30) \quad \leftarrow \text{Energía de la reacción}$$

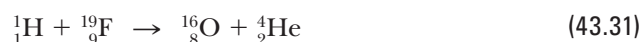
Al igual que con la desintegración nuclear, la reducción apropiada de la ecuación 8.2 para reacciones nucleares es la ecuación 43.13. Como ejemplo considere la reacción  ${}^7\text{Li}(p, \alpha){}^4\text{He}$ . La notación  $p$  indica un protón, el cual es un núcleo de hidrógeno. Por tanto, la forma extendida de esta reacción es



El valor  $Q$  para esta reacción es  $Q = -\Delta E_R = 17.3 \text{ MeV}$ . Una reacción como ésta en la que  $Q$  es positiva, se conoce como **exotérmica**. Una reacción en la que  $Q$  es negativa se conoce como **endotérmica**. A fin de satisfacer la ley de conservación de la cantidad de movimiento, no se presenta una reacción endotérmica a menos que la partícula bombardeada tenga una energía cinética mayor que  $Q$  (véase el problema 54). La energía mínima necesaria para que se presente tal reacción se conoce como **energía de umbral**.

Si las partículas  $a$  y  $b$  en una reacción nuclear son idénticas, de manera que  $X$  y  $Y$  son por necesidad también idénticas, la reacción se conoce como **evento de dispersión**. Si la energía cinética del sistema ( $a$  y  $X$ ) antes del evento son las mismas que las del sistema ( $b$  y  $Y$ ) después del evento, se le clasifica como *dispersión elástica*. Si la energía cinética del sistema y después del evento, es menor que antes del evento, la reacción se describe como *dispersión inelástica*. En este caso, la diferencia en energía se explica debido a que el núcleo objetivo ha sido puesto en estado de excitación por el evento. El sistema final está ahora constituido por  $b$  y un núcleo excitado  $Y^*$ , y que finalmente se transformará en  $b$ ,  $Y$  y  $\gamma$ , en donde  $\gamma$  es el fotón de rayo gamma que es emitido cuando el sistema vuelve al estado fundamental. Esta terminología elástica e inelástica es idéntica a la utilizada para describir colisiones entre objetos macroscópicos como se vio en la sección 9.4.

Además de la energía y cantidad de movimiento, durante todas las reacciones nucleares también deben conservarse la carga total y el número de nucleones. Por ejemplo, considere la reacción  ${}^{19}\text{F}(p, \alpha){}^{16}\text{O}$ , la cual tiene un valor  $Q$  de  $8.11 \text{ MeV}$ . Esta reacción aparece de forma más completa como



El número total de nucleones antes de la reacción ( $1 + 19 = 20$ ) es igual al número total después de la reacción ( $16 + 4 = 20$ ). Además, la carga total es la misma que antes ( $1 + 9$ ) y después ( $8 + 2$ ) de la reacción.

En la sección 43.2, mencionamos el importante proceso de *fisión nuclear*. Crucial para este proceso es un tipo particular de reacción nuclear que involucra neutrones. Debido a su neutralidad de carga, los neutrones no están sujetos a las fuerzas de Coulomb y, como resultado, no interactúan eléctricamente con los electrones o el núcleo. Por tanto, los neutrones pueden penetrar fácilmente en lo profundo de un átomo y colisionar con el núcleo.

Un neutrón rápido (energía superior a aproximadamente  $1 \text{ MeV}$ ) que viaja a través de la materia sufre muchas colisiones con los núcleos, renunciando a parte de su energía cinética en cada colisión. Para los neutrones rápidos en algunos materiales, las colisiones elásticas dominan. Los materiales para los que eso ocurre se llaman moderadores porque retardan (o moderan) los neutrones energéticamente originales de manera muy efectiva. Los núcleos moderadores deben ser de baja masa para que



se les transfiera una gran cantidad de energía cinética cuando sean golpeados por neutrones. Por esta razón, los materiales que son abundantes en hidrógeno, como la parafina y el agua, son buenos moderadores para los neutrones.

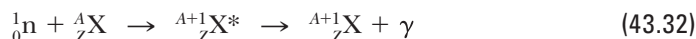
Eventualmente, la mayoría de los neutrones que bombardean a un moderador se convierten en neutrones térmicos, lo que significa que han renunciado a tanta energía que están en equilibrio térmico con el material moderador. Su energía cinética promedio a temperatura ambiente es, a partir de la ecuación 20.19,

$$K_{\text{prom}} = \frac{3}{2} k_B T \approx \frac{3}{2} (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K}) = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J} \approx 0.04 \text{ eV}$$

que corresponde a una velocidad neutrónica media cuadrática de aproximadamente 2 800 m/s. Los neutrones térmicos tienen una distribución de velocidades, al igual que las moléculas en un recipiente de gas (capítulo 20). Los neutrones de alta energía, aquellos con energía de varios MeV, se *atemperan* (es decir, su energía promedio alcanza  $K_{\text{prom}}$ ) en menos de 1 ms cuando inciden en un moderador.

Una vez que los neutrones se han atemperado y la energía de un neutrón particular es suficientemente baja, existe una alta probabilidad de que el neutrón sea capturado por un núcleo, un evento que se acompaña de la emisión de un rayo gamma. Esta reacción de **captura de neutrones** puede escribirse

Reacción de captura de neutrones ▶



Una vez que se captura el neutrón, el núcleo  ${}_{Z}^{A+1}\text{X}^*$  se encuentra en un estado excitado durante un tiempo muy breve antes de sufrir desintegración gamma. El núcleo del producto  ${}_{Z}^{A+1}\text{X}$  suele ser radioactivo y se descompone por emisión beta.

La rapidez de captura de un neutrón, debido a neutrones que pasan a través de cualquier muestra depende del tipo de átomos en la muestra y de la energía de los neutrones incidentes. La interacción de neutrones con la materia aumenta con la disminución de la energía de neutrones porque un neutrón lento pasa un mayor intervalo de tiempo en la vecindad de los núcleos objetivo. Veamos ahora con más detalle en la reacción de fisión.

## 43.8 Fisión nuclear

La **fisión nuclear** es un tipo especial de reacción nuclear que se presenta cuando un núcleo pesado, por ejemplo el  ${}^{235}\text{U}$ , se divide en dos núcleos más pequeños, de mejor forma que un núcleo hija y una partícula ligera en una partícula alfa o un electrón. La fisión se inicia cuando un núcleo pesado captura un neutrón térmico, como se describe en la primera etapa de la ecuación 43.32. La absorción del neutrón produce un núcleo que es inestable y puede cambiar a una configuración de energía más baja al dividirse en dos núcleos más pequeños. En esta reacción, la masa combinada de los núcleos hijas es menor que la masa del núcleo padre, y esta diferencia en masa se denomina **defecto de masa**. Esta energía está en forma de energía cinética asociada con el movimiento de los neutrones y los núcleos hijas después del evento de fisión. Multiplicar el defecto de masa por  $c^2$  da el valor numérico de la energía liberada. Se libera energía porque la energía de enlace por cada nucleón de los núcleos hijas es casi de 1 MeV mayor que la del núcleo padre (véase la figura 43.5).

La fisión nuclear fue observada primero en 1938 por Otto Hahn (1879-1968) y Fritz Strassman (1902-1980) luego de algunos estudios básicos de Fermi. Después de bombardear uranio con neutrones, Hahn y Strassman descubrieron dos elementos de masa media entre los productos de reacción, bario y lantano. Poco después, Lise Meitner (1878-1968) y su sobrino Otto Frisch (1904-1979) explicaron lo que había sucedido. El núcleo de uranio se había dividido en dos fragmentos casi iguales más varios neutrones después de absorber un neutrón. Este acontecimiento fue de considerable interés para los físicos que trataban de entender el núcleo, pero habría de tener consecuencias de mayor alcance. Las mediciones mostraron que se liberaban unos 200 MeV de energía en cada evento de fisión, y este hecho iba a afectar el curso de la historia en la Segunda Guerra Mundial.

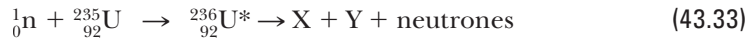
### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 43.8

#### Recordatorio de la energía de enlace

Recuerde de la sección 43.2 que la energía de enlace es el valor absoluto de la energía del sistema y está relacionada con la masa del sistema. Por tanto, cuando considere la figura 43.5, imagínela invertida boca abajo para obtener una curva que represente la masa del sistema. En una reacción de fisión disminuye la masa del sistema. Esta disminución de masa aparece en el sistema como energía cinética de los productos de fisión.

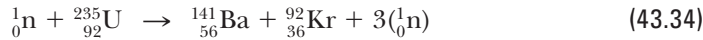


La fisión del  $^{235}\text{U}$  por neutrones térmicos puede representarse con la reacción



donde  $^{236}\text{U}^*$  es un estado intermedio excitado que dura sólo unos  $10^{-12}$  s antes de dividirse en núcleos X y Y de masa media, que se denominan **fragmentos de fisión**. En cualquier reacción de fisión hay numerosas combinaciones de X y Y que satisfacen los requisitos de conservación de energía y carga. En el caso del uranio, por ejemplo, hay unos 90 núcleos hijas que se pueden formar.

Además, la fisión da por resultado la producción de varios neutrones, por lo general dos o tres. En promedio, unos 2.5 neutrones se liberan por cada evento. Una reacción representativa de fisión para el uranio es



La figura 43.17 muestra una representación ilustrativa del evento de la fisión en la ecuación. 43.34.

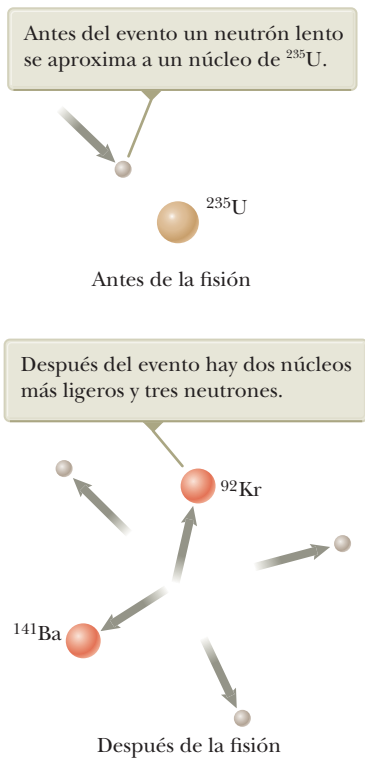
La figura 43.18 es una gráfica de la distribución de productos de fisión con el número de masa A. Los productos más probables tienen números de masa  $A \approx 95$  y  $A \approx 140$ . Suponga que estos productos son  ${}_{39}^{95}\text{Y}$  (con 56 neutrones) y  ${}_{53}^{140}\text{I}$  (con 87 neutrones). Si estos núcleos se localizan en la gráfica de la figura 43.4, se ve que ambos están muy arriba de la línea de estabilidad. Dado que estos fragmentos, son muy inestables por su número de neutrones inusualmente alto, casi en forma instantánea liberan dos o tres neutrones.

Estime la energía de desintegración Q que se libera en un proceso típico de fisión. En la figura 43.5 aparece que la energía de enlace por nucleón es de 7.2 MeV para núcleos pesados ( $A \approx 240$ ) y unos 8.2 MeV para núcleos de masa intermedia. La cantidad de energía liberada es  $8.2 \text{ MeV} - 7.2 \text{ MeV} = 1 \text{ MeV}$  por nucleón. Ya que existe un total de 235 nucleones en  ${}_{92}^{235}\text{U}$ , la energía liberada por cada evento de fisión es casi 235 MeV, es una gran cantidad de energía en relación con la cantidad liberada en procesos químicos. Por ejemplo, la energía liberada en la combustión de una molécula de octano empleada en motores a gasolina ¡es de una millonésima de la energía liberada en un solo evento de fisión!

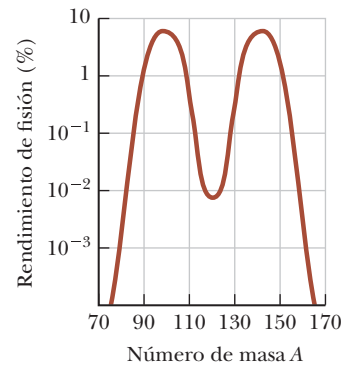
**E XAMEN RÁPIDO 43.5** Cuando un núcleo experimenta fisión, los dos núcleos hijas suelen ser radiactivos. ¿Por medio de cuál proceso es más probable que decaigan? (a) Decaimiento alfa, (b) decaimiento beta ( $e^-$ ) o (c) decaimiento beta ( $e^+$ ).

**E XAMEN RÁPIDO 43.6** ¿Cuáles de las siguientes son posibles reacciones de fisión?

- (a)  ${}_0^1\text{n} + {}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{54}^{140}\text{Xe} + {}_{38}^{94}\text{Sr} + 2({}_0^1\text{n})$
- (b)  ${}_0^1\text{n} + {}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{50}^{132}\text{Sn} + {}_{42}^{101}\text{Mo} + 3({}_0^1\text{n})$
- (c)  ${}_0^1\text{n} + {}_{94}^{239}\text{Pu} \rightarrow {}_{53}^{137}\text{I} + {}_{41}^{97}\text{Nb} + 3({}_0^1\text{n})$



**Figura 43.17** Un evento de fisión nuclear.



**Figura 43.18** Distribución de productos de fisión en función del número de masa para la fisión del  $^{235}\text{U}$  bombardeado con neutrones térmicos. Observe que el eje vertical es logarítmico.

**Ejemplo 43.10 La energía liberada en la fisión de  $^{235}\text{U}$**

Calcule la energía liberada cuando se fisiona 1.00 kg de  $^{235}\text{U}$ , considere que la energía de desintegración por cada evento es  $Q = 208 \text{ MeV}$ .

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Imagine un núcleo de  $^{235}\text{U}$  que absorbe un neutrón y luego se divide en dos núcleos más pequeños y varios neutrones, como en la figura 43.17.

**Categorizar** El enunciado del problema pide clasificar este ejemplo como uno que involucra un análisis energético de la fisión nuclear.

continúa

## 43.10 continuación

**Analizar** Ya que  $A = 235$  para el uranio, un mol de este isótopo tiene una masa de 235 g.

Encuentre el número de núcleos en la muestra en términos del número de moles  $n$  y el número de Avogadro, y a continuación, en términos de la muestra de masa  $m$  y la masa molar  $M$  de  $^{235}\text{U}$ :

$$N = nN_A = \frac{m}{M} N_A$$

Encuentre la energía total liberada cuando todos los núcleos experimentan fisión:

$$E = NQ = \frac{m}{M} N_A Q = \frac{1.00 \times 10^3 \text{ g}}{235 \text{ g/mol}} (6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(208 \text{ MeV}) = 5.33 \times 10^{26} \text{ MeV}$$

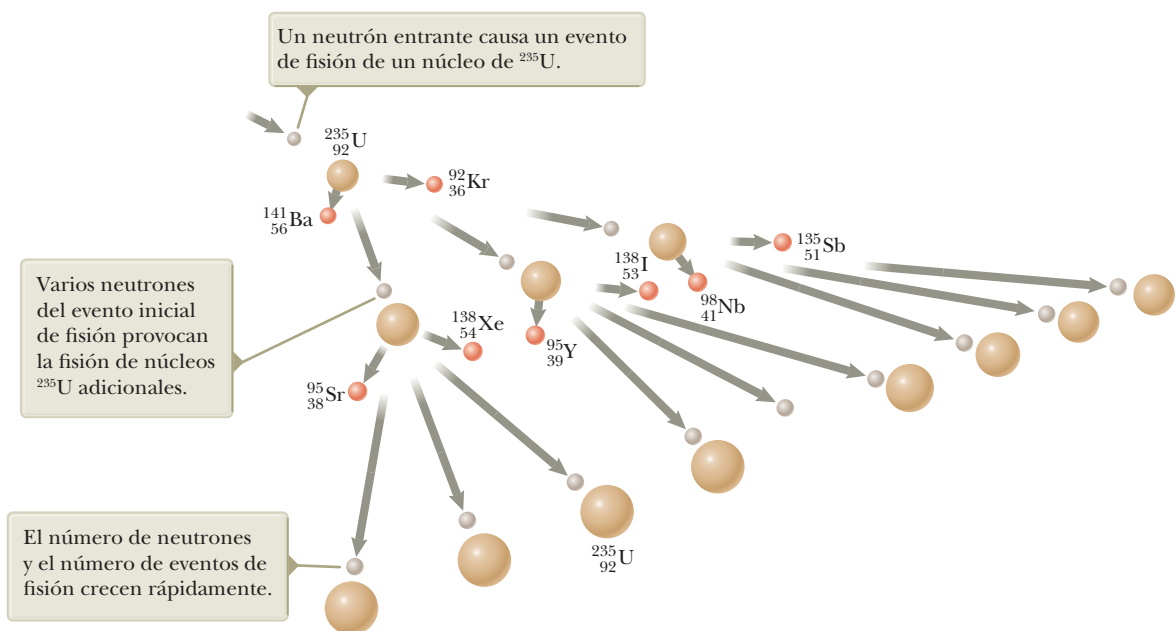
**Finalizar** Convierta esta energía a kWh:

$$E = (5.33 \times 10^{26} \text{ MeV}) \left( \frac{1.60 \times 10^{-13} \text{ J}}{1 \text{ MeV}} \right) \left( \frac{1 \text{ kWh}}{3.60 \times 10^6 \text{ J}} \right) = 2.37 \times 10^7 \text{ kWh}$$

la que, si se libera lentamente, ¡es suficiente energía como para mantener un foco de 100 W en operación durante 30 000 años! Si se liberara súbitamente la energía de fisión disponible en 1 kg de  $^{235}\text{U}$ , sería equivalente a detonar aproximadamente 20 000 toneladas de TNT.

### 43.9 Reactores nucleares

En la sección 43.8 aprendió que, cuando se fisiona el  $^{235}\text{U}$ , un neutrón que está por entrar da como resultado un promedio 2.5 neutrones emitidos por cada evento. Estos neutrones pueden incitar a otros núcleos a fisionarse. Porque son producidos mas neutrones por el evento que son absorbidos existe la posibilidad de una reacción en cadena alguna vez construida (figura 43.19). La experiencia demuestra que si la reacción en cadena no se controla (es decir, si no sigue su curso con lentitud), puede suscitarse una violenta explosión, con la liberación repentina de una enorme cantidad de energía. De cualquier modo, cuando la reacción se controla la energía liberada puede utilizarse en un servicio constructivo. En Estados Unidos, por ejemplo, casi 20% de la electricidad generada cada año proviene de plantas nucleares generadoras de electricidad, y este tipo de energía se usa extensivamente en numerosos países, incluyendo Francia, Rusia e India.



**Figura 43.19** Reacción nuclear en cadena iniciada por la captura de un neutrón. Los núcleos de uranio se muestran en color beige, los neutrones en color gris y en color naranja los núcleos hija.

Un reactor nuclear es un sistema diseñado para mantener lo que se llama **reacción en cadena auto-sostenida**. Este importante proceso fue logrado primero en 1942 por Enrico Fermi y su equipo en la universidad de Chicago, con uranio que se presentó de forma natural como combustible.<sup>3</sup> En el primer reactor nuclear, Fermi colocó ladrillos de grafito (carbono) entre los elementos de combustible. Los núcleos de carbono son unas 12 veces más pesados que los neutrones, pero después de varias colisiones con núcleos de carbono, la velocidad de un neutrón se reduce lo suficiente para aumentar su probabilidad de fisión con el  $^{235}\text{U}$ . En este diseño, el carbono es el moderador; casi todos los reactores modernos usan agua como moderador.

La mayoría de los reactores hoy en operación también usan uranio como combustible. De cualquier modo el uranio se presenta de manera natural, contiene únicamente 0.7% del isótopo  $^{235}\text{U}$  con el resto 99.3% de  $^{238}\text{U}$ . Este hecho es importante para el funcionamiento de un reactor porque el  $^{238}\text{U}$  casi nunca fisiona. En lugar de ello, tiende a absorber neutrones sin que se presente un subsiguiente evento de fisión, lo cual produce neptunio y plutonio. Por esta causa, los combustibles de los reactores deben ser *enriquecidos* artificialmente para contener por lo menos unos pocos puntos porcentuales de  $^{235}\text{U}$ .

Varios tipos de sistemas de reactor permiten que la energía cinética de diversos fragmentos de fisión se transforme en otros tipos de energía y, en última instancia, se transfiera fuera de la planta del reactor como transmisión eléctrica. El reactor de agua a presión es el más común en Estados Unidos (figura 43.20). Examinaremos este tipo porque sus partes principales son comunes a todos los diseños de reactores. Los eventos de fisión en los **elementos de combustible** de uranio del núcleo del reactor elevan la temperatura del agua contenida en el circuito primario (cerrado), que se mantiene a alta presión para controlar la ebullición del agua. (Esta agua también sirve como moderador para reducir la velocidad de los neutrones liberados en los eventos de fisión con una energía de alrededor de 2 MeV.) El agua caliente se bombea a través de un intercambiador de calor, donde la energía interna del agua es transferida por conducción al agua contenida en el circuito secundario. El agua caliente del circuito secundario se convierte en vapor, el cual realiza trabajo para accionar un sis-

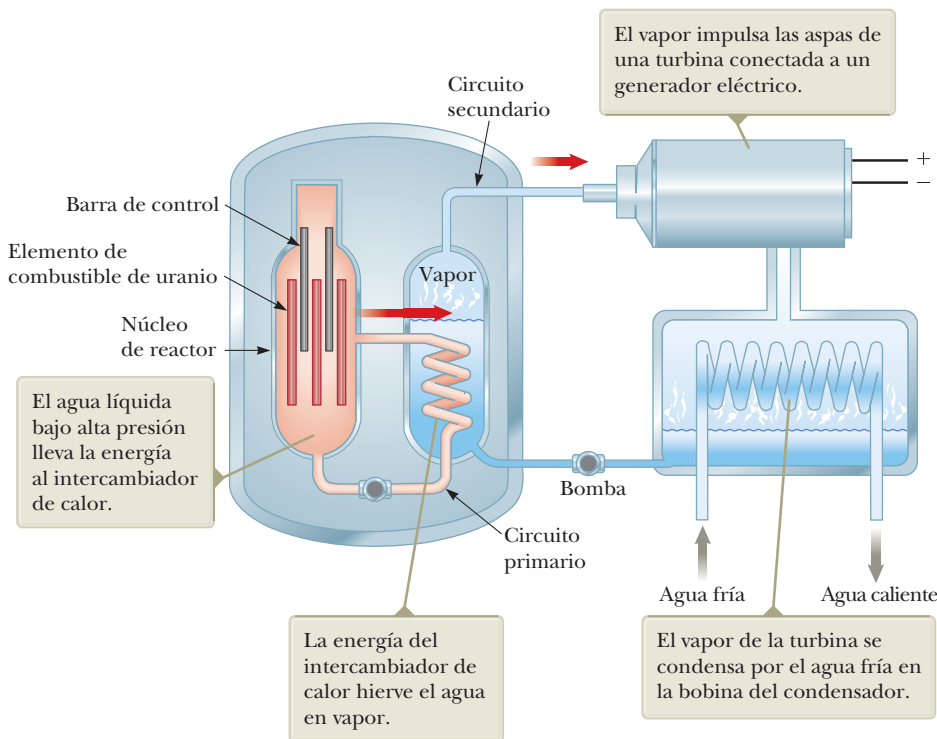


UniversalImagesGroup/Getty Images

### Enrico Fermi

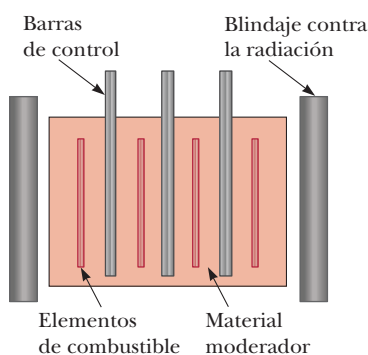
*Físico italiano (1901-1954)*

A Fermi se le concedió el premio Nobel de física en 1938 por producir elementos transuránicos por radiación de neutrones, y por su descubrimiento sobre las reacciones nucleares causadas por neutrones térmicos. Hizo numerosas y notables aportaciones a la física, incluyendo su teoría de desintegración beta, la teoría de los electrones libres en los metales, y la invención del primer reactor de fisión del mundo en 1942. Fermi fue verdaderamente un talentoso físico teórico y experimental. También fue conocido por su capacidad de presentar la física en una forma clara y apasionante.



**Figura 43.20** Componentes principales de un reactor nuclear de agua a presión.

<sup>3</sup>Aun cuando el reactor de Fermi fue el primer reactor nuclear fabricado, hay evidencia de que una reacción natural de fisión pudo haberse auto sostenido quizá durante cientos de miles de años en un depósito de uranio en Gabón, África Occidental. Véase G. Cowan, "A Natural Fission Reactor", *Scientific American* 235(5): 36, 1976.



**Figura 43.21** Sección transversal de un núcleo de reactor que muestra las barras de control, los elementos de combustible que contienen combustible enriquecido y material moderador, todo rodeado por un blindaje contra la radiación.

tema de turbogenerador que permite producir energía eléctrica. El agua del circuito secundario está aislada del agua del circuito primario para evitar que el agua secundaria y el vapor se contaminen por los núcleos radiactivos del núcleo del reactor.

El diseño básico del núcleo de un reactor nuclear se ilustra en la figura 43.21. Los elementos de combustible están formados por uranio enriquecido en el isótopo  $^{235}\text{U}$ . Para controlar el nivel de potencia, se insertan **barras de control** en el núcleo del reactor. Estas barras están hechas de materiales muy eficientes para absorber neutrones como el cadmio.

## Seguridad y eliminación de desechos

El accidente de 1986 en el reactor de Chernobyl en Ucrania y el desastre nuclear de 2011 causada por el terremoto y el tsunami en Japón se centró justamente la atención en la seguridad del reactor.

Desafortunadamente, en Chernobyl la actividad de los materiales liberados inmediatamente después del accidente acumuló un total aproximado de  $1.2 \times 10^{19}$  Bq y resultó en la evacuación de 135 000 personas. Murieron 30 personas durante o poco después del accidente, y los datos del Instituto Radiológico de Ucrania sugirieron que más de 2500 muertes se pueden atribuir al accidente de Chernobyl. En el periodo de 1986 a 1997 hubo un aumento de diez veces el número de niños que contrajeron cáncer de tiroides por la ingestión de yodo radiactivo en leche de vacas que comieron pasto contaminado. Se concluyó, en una conferencia internacional, que las principales causas del accidente de Chernobyl se debieron a la coincidencia de graves deficiencias en el diseño físico del reactor y a la violación de los procedimientos de seguridad. La mayor parte de estas deficiencias se ha tratado en plantas de diseño similar en Rusia y países vecinos de la desaparecida Unión Soviética.

El accidente de marzo de 2011 en Japón fue causado por la desafortunada combinación de un terremoto y el posterior tsunami. La planta de energía más golpeada, Fukushima I, se apagó automáticamente después del terremoto. Sin embargo, el apagado de una planta de energía nuclear, no es un proceso instantáneo. El agua de enfriamiento debe seguir siendo distribuida para transportar la energía generada por la desintegración beta de los subproductos de la fisión del núcleo del reactor. Por desgracia, el agua del tsunami rompió la conexión a la red eléctrica, dejando la planta sin soporte eléctrico externo para hacer circular el agua. Mientras que la planta tenía generadores de emergencia para hacerse cargo de tal situación, el tsunami inundó las salas de los generadores, por lo que los éstos se volvieron inoperables. Tres de los seis reactores de Fukushima colapsaron y hubo varias explosiones. Radiación significativa se liberó al medio ambiente. Al momento de esta publicación, la mayoría de las 54 centrales nucleares de Japón se han puesto fuera de línea y el público japonés ha expresado su firme rechazo a continuar con la energía nuclear.

Los reactores comerciales basan su seguridad en el cuidadoso diseño y los rígidos protocolos de operación, y representan un peligro sólo cuando estas variables se ven comprometidas. La exposición a la radiación y potenciales riesgos de salud asociados con esta exposición se controlan mediante tres capas de contención. El combustible y los productos radiactivos de fisión están contenidos en el recipiente de un reactor. En caso de una ruptura en este recipiente, el edificio del reactor actúa como una segunda estructura de contención para impedir que el material radiactivo contamine el medio ambiente. Por último, las instalaciones del reactor deben estar en lugares remotos para proteger a la población contra la exposición en caso de que escape radiación del edificio del reactor.

Una continua preocupación por los reactores de fisión nuclear es la eliminación segura de material radiactivo cuando se reemplaza el núcleo del reactor. Este material de desecho contiene isótopos altamente radiactivos, de larga duración, y debe ser guardado durante largo tiempo para que no exista probabilidad alguna de contaminar el ambiente. En la actualidad, sellar los desechos radiactivos en recipientes herméticos y enterrarlos en profundos depósitos geológicos parece ser la solución más promisoriosa.

A pesar de estos riesgos, hay que sopesar el uso de la energía nuclear frente a los riesgos. Por ejemplo, las centrales nucleares no producen contaminación atmosférica y gases de efecto invernadero como las plantas de combustibles fósiles, y se prevé que

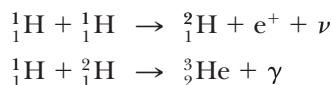


el suministro de uranio en la Tierra durará más que el suministro de combustibles fósiles. Para cada fuente de energía, ya sea nuclear, hidroeléctrica, combustible fósil, eólica, solar u otra, los riesgos deben sopesarse frente a los beneficios y la disponibilidad de la fuente de energía.

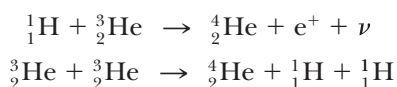
## 43.10 Fusión nuclear

En la sección 43.2 encontró que la energía de enlace para núcleos ligeros ( $A < 20$ ) es mucho menor que la energía de enlace para núcleos más pesados. Esto sugiere un proceso inverso de la fisión. Como se mencionó en la sección 43.2, cuando dos núcleos ligeros se combinan para formar un núcleo más pesado, el proceso se denomina **fusión** nuclear. Debido a que la masa del núcleo final es menor que las masas combinadas de los núcleos originales, hay una pérdida de masa acompañada de liberación de energía en la forma en que se mueven las partículas.

Dos ejemplos de estas reacciones de fusión con liberación de energía son las siguientes:



Estas reacciones se presentan en el núcleo de una estrella y son las causantes del derrame de energía que proviene de ella. Esta segunda reacción es seguida por la fusión de hidrógeno-helio o por la fusión de helio-helio:



Estas reacciones de fusión son básicas en el **ciclo protón-protón**, se cree que es uno de los ciclos básicos por el que se genera la energía en el Sol y otras estrellas que contienen hidrógeno en abundancia. La mayoría de la producción de energía se lleva a cabo en el interior del 101, donde la temperatura es aproximadamente  $1.5 \times 10^7$  K. Dado que estas altas temperaturas son necesarias para impulsar estas reacciones reciben el nombre de **reacciones termonucleares de fusión**. Todas las reacciones en el ciclo protón-protón son exotérmicas. Una visión general del ciclo es que se deben combinar cuatro protones para formar una partícula alfa, positrones, rayos gamma y neutrinos.

- E XAMEN RÁPIDO 43.7** En el núcleo de una estrella se combinan núcleos de
- hidrógeno en reacciones de fusión. Una vez que el hidrógeno se agota, puede
  - presentarse una fusión de núcleos de helio. Una vez que se agote el helio, si la
  - estrella es lo suficientemente grande, puede ocurrir la fusión de núcleos cada vez
  - más pesados. Considere reacciones de fusión en donde intervienen dos núcleos
  - con el mismo valor de  $A$ . Para estos tipos de reacciones exotérmicas, ¿cuáles de los
  - siguientes valores de  $A$  son imposibles? (a) 12, (b) 20, (c) 28 o (d) 64.

## Reacciones de fusión terrestre

La enorme cantidad de energía liberada en reacciones de fusión sugiere la posibilidad de aprovechar esta energía para fines útiles. En la actualidad se realiza una gran cantidad de trabajos para perfeccionar un reactor termonuclear sostenido y controlable, es decir, un reactor de energía de fusión. Se cree que la fusión controlada es la máxima fuente de energía por la disponibilidad de su fuente de combustible: el agua. Por ejemplo, si se usara deuterio como combustible, podría extraerse 0.12 g de un galón de agua a un costo de unos cuatro centavos de dólar; esta cantidad de deuterio podría liberar unos  $10^{10}$  J si todos los núcleos experimentaran fusión. En comparación, un galón de gasolina libera unos  $10^8$  J al consumirse y cuesta mucho más que cuatro centavos.

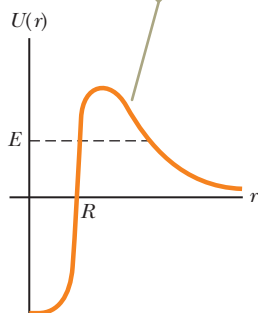
Una ventaja adicional de los reactores de fusión es que se forman comparativamente pocos subproductos radiactivos. Para el ciclo protón-protón, por ejemplo, el producto final es seguro: helio no radiactivo. Desafortunadamente, un reactor termonuclear que puede entregar una potencia de salida neta extendida en un intervalo razonable de tiempo todavía no es una realidad, y deben resolverse muchas dificultades antes de que se construya un aparato satisfactorio.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 43.9

**Fisión y fusión** Las palabras *fisión* y *fusión* suenan semejantes, pero corresponden a procesos diferentes. Considere la curva de energía de enlace de la figura 44.5. Hay dos direcciones desde las que se puede llegar al pico de la curva para liberar energía: combinar dos núcleos ligeros o fusión y separar un núcleo pesado en dos núcleos más ligeros o fisión.



La fuerza de repulsión de Coulomb es dominante para las grandes distancias de separación entre los deuterones.

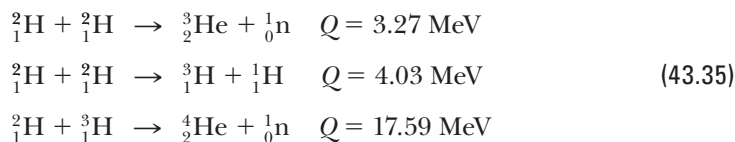


La fuerza nuclear atractiva es dominante cuando los deuterones están muy juntos.

**Figura 43.22** Energía potencial como función de la distancia de separación entre dos deuterones.  $R$  es del orden de 1 fm. Si desprecia el efecto túnel, para que los dos deuterones experimenten fusión se requiere una energía  $E$  mayor a la altura de la barrera.

La interacción protón-protón no es apropiada para usarse en un reactor de fusión porque el evento requiere de muy altas temperaturas y densidades. El proceso funciona en el Sol sólo debido a la densidad extremadamente alta de protones en su interior.

Las reacciones que parecen más prometedoras para un reactor de energía por fusión incluyen el deuterio ( ${}^2_1\text{H}$ ) y el tritio ( ${}^3_1\text{H}$ ):



Como ya se mencionó, el deuterio está disponible en cantidades casi ilimitadas en lagos y océanos y su extracción es barata. De cualquier modo, el tritio, es radiactivo ( $T_{1/2} = 12.3$  años) y experimenta desintegración beta a  ${}^3\text{He}$ . Por esta razón, el tritio no se presenta de manera natural en grandes cantidades y debe ser producido artificialmente.

Uno de los principales problemas para obtener energía de la fusión nuclear es que la fuerza de repulsión de Coulomb entre dos núcleos que portan cargas positivas debe ser superada antes que los núcleos se puedan fusionar. La energía potencial como función de la distancia de separación entre dos deuterones (núcleos de deuterio, cada uno con una carga  $e$ ) se ilustra en la figura 43.22. La energía potencial es positiva en la región  $r > R$ , donde domina la fuerza de repulsión de Coulomb ( $R \approx 1$  fm), y negativa en la región  $r < R$ , donde domina la fuerza nuclear. Entonces, el problema fundamental es darle a los dos núcleos suficiente energía cinética para vencer esta fuerza de repulsión, lo cual se puede lograr al elevar el combustible a temperaturas extremadamente altas (unos  $10^8$  K. A estas altas temperaturas los átomos se ionizan y el sistema consta de un conjunto de electrones y núcleos que, por lo común, se denomina *plasma*.

### Ejemplo 43.11 La fusión de dos deuterones

Para que la fuerza nuclear supere la fuerza de Coulomb repulsiva, la distancia de separación entre dos deuterones debe ser aproximadamente  $1.0 \times 10^{-14}$  m.

**(A)** Calcule la altura de la barrera de potencial debida a la fuerza repulsiva.

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Imagine mover dos deuterones uno hacia el otro. Conforme se acercan más, la fuerza de repulsión de Coulomb se vuelve más fuerte. Se debe realizar trabajo sobre el sistema para empujar contra esta fuerza, y este trabajo aparece en el sistema de dos deuterones como energía potencial eléctrica.

**Categorizar** Este problema se clasifica como uno que involucra la energía potencial eléctrica de un sistema de dos partículas cargadas.

**Analizar** Evalúe la energía potencial asociada con dos cargas separadas por una distancia  $r$  (ecuación 24.13) para dos deuterones:

$$U_E = k_e \frac{q_1 q_2}{r} = k_e \frac{(+e)^2}{r} = (8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{1.0 \times 10^{-14} \text{ m}} = 2.3 \times 10^{-14} \text{ J} = 0.14 \text{ MeV}$$

**(B)** Estime la temperatura requerida para que un deuterón supere la barrera de potencial, si supone una energía de  $\frac{3}{2}k_B T$  por deuterón (donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann).

#### SOLUCIÓN

Ya que la energía de Coulomb total del par es 0.14 MeV, la energía de Coulomb por deuterón es igual a  $0.07 \text{ MeV} = 1.1 \times 10^{-14} \text{ J}$ .

Igualé esta energía con la energía promedio por cada deuterón:

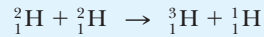
$$\frac{3}{2}k_B T = 1.1 \times 10^{-14} \text{ J}$$

Resuelva para  $T$ :

$$T = \frac{2(1.1 \times 10^{-14} \text{ J})}{3(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})} = 5.6 \times 10^8 \text{ K}$$

## 43.11 continuación

(C) Encuentre la energía liberada en la reacción deuterio-deuterio



## SOLUCIÓN

La masa de un solo átomo de deuterio es igual a 2.014 102 u. Por tanto, la masa total del sistema antes de la reacción es 4.028 204 u.

Encuentre la suma de las masas después de la reacción:

$$3.016\ 049\ \text{u} + 1.007\ 825\ \text{u} = 4.023\ 874\ \text{u}$$

Halle el cambio en masa y convierta a unidades de energía:

$$4.028\ 204\ \text{u} - 4.023\ 874\ \text{u} = 0.004\ 33\ \text{u}$$

$$= 0.004\ 33\ \text{u} \times 931.494\ \text{MeV/u} = 4.03\ \text{MeV}$$

**Finalizar** La temperatura calculada en el inciso B) es demasiado alta porque las partículas en el plasma tienen una distribución de rapidez maxwelliana (sección 20.5) y por tanto algunas de las reacciones de fusión son causadas por partículas en la cola de alta energía de esta distribución. Además, incluso aquellas partículas que no tienen suficiente energía para superar la barrera tienen alguna probabilidad de pasar a través de ella por efecto túnel (sección 40.5). Cuando estos efectos se toman en cuenta, la temperatura de “sólo”  $4 \times 10^8\ \text{K}$  parece adecuada para fundir dos deuterones en un plasma. En la parte (C) note que el valor de la energía es consistente con el ya dado en la ecuación 43.35.

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que el tritio resultante de la reacción en la parte (C) reacciona con otro deuterio en la reacción

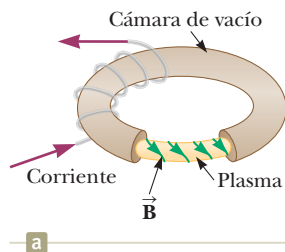


¿Cuánta energía se libera en la secuencia de dos reacciones?

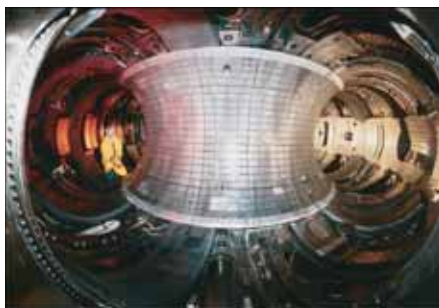
**Respuesta** El efecto global de la secuencia de dos reacciones es que tres núcleos de deuterio se combinan para formar un núcleo de helio, un núcleo de hidrógeno y un neutrón. La masa inicial es  $3(2.014\ 102\ \text{u}) = 6.042\ 306\ \text{u}$ . Después de la reacción, la suma de las masas es  $4.002\ 603\ \text{u} + 1.007\ 825\ \text{u} + 1.008\ 665\ \text{u} = 6.019\ 093\ \text{u}$ . La masa en exceso es igual a  $0.023\ 213\ \text{u}$ , equivalente a una energía de 21.6 MeV. Note que este valor es la suma de los valores  $Q$  para la segunda y tercera reacciones en la ecuación 43.35.

## Confinamiento magnético

Numerosos experimentos de plasma relacionados con la fusión emplean **confinamiento magnético** para contener el plasma. Un aparato en forma de toroide, llamado **tokamak**, creado primero en Rusia, se ilustra en la figura 43.23a. Para confinar y estabilizar el plasma se utiliza una combinación de dos campos magnéticos: (1) un intenso campo toroidal producido por la corriente en los devanados toroidales que rodean



a



b



c

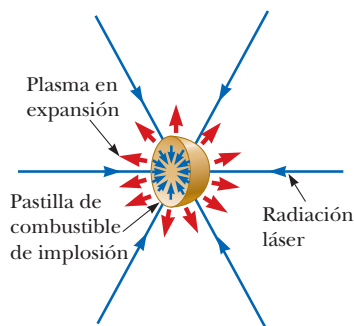
**Figura 43.23** (a) Diagrama de un tokamak empleado en el esquema de confinamiento magnético. (b) Vista interior del recipiente de vacío del Reactor de Prueba de Fusión Tokamak (TFTR) en el laboratorio de física de plasma de Princeton. (c) Experimento del Toroide Esférico Nacional (NSTX) que inició operaciones en marzo de 1999.

una cámara de vacío en forma de rosquilla y (2) un campo “poloidal” más débil producido por la corriente toroidal. Además de confinar el plasma, la corriente toroidal se emplea para elevar su temperatura. Las líneas de campo magnético helicoidal resultantes se enrollan alrededor del plasma e impiden que éste toque las paredes de la cámara de vacío. (Si el plasma toca las paredes, su temperatura se reduce y las impurezas pesadas que son expulsadas de las paredes lo “envenenan” y se tienen grandes pérdidas de potencia.)

Cuando estuvo en operación de 1982 a 1997, el Reactor Tokamak de Prueba de Fusión (TFTR, figura 43.23b) en Princeton reportó temperaturas centrales de ion de 510 millones de grados Celsius, 30 veces más caliente que el centro del Sol. Uno de los experimentos de fusión de nueva generación es el Experimento del Toroide Esférico Nacional (NSTX) en el laboratorio de física de plasma en Princeton que se ilustra en la figura 43.23c. Este reactor fue puesto en curso en febrero de 1999 y desde esta fecha ha estado funcionando en experimentos de fusión. En lugar de plasma en forma de rosquilla de un tokamak, el NSTX produce un plasma esférico que tiene un agujero que pasa por su centro. La principal ventaja de la configuración esférica es su capacidad de confinar el plasma a una presión más alta en un campo magnético determinado. Este método podría llevar al perfeccionamiento de reactores de fusión más pequeños y más económicos.

Otro tipo de dispositivo de fusión se llama *stellarator*. Este dispositivo resuelve algunos de los problemas de inestabilidad del tokamak al retorcer el campo magnético en una forma que refleja el retorcimiento y doblado natural del plasma. Además, el *stellarator* se puede operar de manera continua, a diferencia del funcionamiento pulsado requerido de un tokamak. El *stellarator* se concibió originalmente en la década de 1950, pero perdió en favor del tokamak. Sus ventajas han llevado a un renovado interés y construcción, representado por el Experimento helicoidalmente simétrico en Estados Unidos, el Gran dispositivo helicoidal en Japón, y el *stellarator* más grande, el Wendelstein 7-X en Alemania, que produjo su primer plasma a  $10^8$  K en 2016.

Actualmente está en proceso un esfuerzo de colaboración internacional en donde participan Estados Unidos, Unión Europea, Japón, China, Corea del Sur, India y Rusia para construir un reactor de fusión denominado ITER. Estas siglas significan International Thermonuclear Experimental Reactor, aunque de manera reciente el énfasis se ha cambiado para interpretar “iter” en términos de su significado en latín, “el progreso.” Una explicación propuesta para este cambio es evitar malentendidos y connotaciones negativas públicas hacia la palabra *termonuclear*. Estas instalaciones se pondrán a trabajar en los problemas tecnológicos y científicos relacionados con la factibilidad de obtener potencia por fusión. El diseño está completo, y en junio de 2005 se eligió Cadarache, Francia, como el sitio del reactor. La construcción comenzó en 2007 y requerirá aproximadamente 20 años, y se proyecta que la operación de fusión comience en 2027. El ITER producirá unas 10 veces como potencia de salida la potencia de entrada y el contenido de energía de las partículas alfa dentro del reactor será tan intenso que podrá sostenerse la reacción de fusión, lo cual permitirá que las fuentes auxiliares de energía se desconecten una vez iniciada la reacción.



**Figura 43.24** En confinamiento inercial, una pastilla de combustible D-T se fusiona cuando inciden sobre ella simultáneamente varios rayos láser de alta intensidad.

## Confinamiento inercial

La segunda técnica para confinar un plasma se llama **confinamiento inercial** y utiliza un objetivo D-T (deuterio-tritio) que tiene una densidad de partículas muy alta. La fusión de láser es la forma más común de confinamiento inercial. En una pequeña pastilla D-T, de alrededor de 1 mm de diámetro, inciden simultáneamente varios rayos láser de alta densidad enfocados, lo cual resulta en un gran pulso de energía de entrada que hace que la superficie de la pastilla de combustible se evapore (figura 43.24). Las partículas que escapan ejercen una fuerza de reacción por la tercera ley sobre el núcleo de la pastilla, con lo que se obtiene una fuerte onda de choque compresiva que se mueve hacia dentro. Esta onda de choque aumenta la presión y densidad del núcleo y produce un correspondiente aumento de la temperatura. Cuando la temperatura del núcleo alcanza la temperatura de ignición, se presentan reacciones de fusión.

Uno de los laboratorios líderes en fusión láser de Estados Unidos es la instalación Omega en la Universidad de Rochester, en Nueva York. Esta instalación enfoca

24 haces láser sobre el objetivo. En la actualidad se encuentra en operación, en el Lawrence Livermore National Laboratory en Livermore, California, la National Ignition Facility. El aparato de investigación incluye 192 haces láser que se pueden enfocar sobre una pastilla de deuterio-tritio. La construcción se completó a principios de 2009, y una prueba de disparo de los láseres en marzo de 2012 rompió el récord de los láseres, entregando 1.87 MJ a un objetivo. Esta energía se entrega en un intervalo de tiempo tan corto que el poder es inmenso: 500 billones de watts, más de 1 000 veces la energía utilizada en Estados Unidos en cualquier momento. Esta instalación se enfrenta actualmente a desafíos de financiación.

### Ventajas y problemas de fusión

Si alguna vez se puede utilizar la energía de fusión, se obtendrán varias ventajas sobre la energía generada por fisión: (1) bajo costo y abundancia de combustible (deuterio), (2) imposibilidad de accidentes fuera de control y (3) reducido riesgo de radiación. Algunos de los problemas y desventajas anticipados incluyen (1) escasez de litio, que se usa como material para absorber neutrones, (2) suministro limitado de helio, que es necesario para enfriar los imanes superconductores empleados para producir intensos campos de confinamiento, y (3) daños estructurales y radiactividad inducida causada por bombardeo de neutrones. Si estos problemas y los factores de diseño técnicos se pueden resolver, la fusión nuclear puede convertirse en fuente factible de energía del siglo XXI.

## 43.11 Daño por radiación

En el capítulo 33 aprendió que la radiación electromagnética nos rodea en forma de ondas de radio, microondas, ondas de luz, etcétera. En esta sección se estudian formas de radiación que pueden causar daños graves cuando pasan por la materia, como la radiación que resulta de procesos radiactivos y radiación en forma de partículas energéticas, como son los neutrones y los protones.

Los daños por radiación en organismos biológicos se deben principalmente a efectos de ionización en células. La función normal de una célula puede ser alterada cuando se forman iones altamente radiactivos como resultado de la radiación por ionización. Por ejemplo, el hidrógeno y el radical de hidroxilo  $\text{OH}^-$  producidos a partir de moléculas de agua pueden inducir reacciones químicas que pueden romper enlaces en proteínas y otras moléculas vitales. Además, la radiación por ionización puede afectar las moléculas vitales directamente al remover electrones de las estructuras de estas moléculas. Grandes dosis de radiación son especialmente peligrosas porque los daños a un gran número de moléculas en una célula pueden provocar que ésta muera. Aun cuando la muerte de una sola célula por lo general no es un problema, la muerte de muchas células sí puede resultar en lesiones irreversibles al organismo. Las células que se dividen rápidamente, como las del tracto digestivo, los órganos reproductores y los folículos del pelo, son especialmente susceptibles. Además, las células que sobreviven a una radiación pueden adquirir defectos. Estas células defectuosas pueden producir otras iguales y generar al cáncer. Es importante estar consciente del efecto de los tratamientos de diagnóstico, por ejemplo rayos X y otras formas de exposición a radiación, y equilibrar los beneficios significativos del tratamiento con los efectos que producen daños.

Los daños causados por radiación también dependen del poder de penetración de la radiación. Las partículas alfa los causan grandes, pero penetran sólo a una pequeña profundidad en un material debido a la fuerte interacción con otras partículas cargadas. Los neutrones no interactúan mediante la fuerza eléctrica, y por ello penetran a mayor profundidad, causando así daños considerables. Los rayos gamma son fotones de alta energía que pueden dañar gravemente pero con frecuencia pasan por la materia sin interactuar con ésta.

Varias unidades se han empleado históricamente para cuantificar la cantidad, o dosis, de cualquier radiación que interactúa con una sustancia.

El **roentgen (R)** es la cantidad de radiación ionizante que produce una carga eléctrica de  $3.33 \times 10^{-10} \text{ C}$  en  $1 \text{ cm}^3$  de aire bajo condiciones normales.





De modo equivalente, el roentgen es la cantidad de radiación que aumenta la energía de 1 kg de aire en  $8.76 \times 10^{-3}$  J.

En la mayor parte de las aplicaciones, el roentgen ha sido sustituido por el rad (siglas de *radiation absorbed dose*, dosis absorbida de radiación):

Un **rad** es la cantidad de radiación que aumenta la energía de 1 kg de material absorbente en  $1 \times 10^{-2}$  J.

Aun cuando el rad es una unidad física perfectamente buena, no es la mejor unidad para medir el grado de daños biológicos producidos por radiación, porque el daño depende no sólo de la dosis sino también del tipo de radiación. Por ejemplo, una dosis dada de partículas alfa causa alrededor de 10 veces más lesiones biológicas que una dosis igual de rayos X. El factor *RBE* (*relative biological effectiveness*) efectividad biológica relativa, para un tipo determinado de radiación es **el número de rads de radiación X o radiación gamma que produce el mismo daño biológico que 1 rad de la radiación que se use**. Los factores RBE para diferentes tipos de radiación se dan en la tabla 43.5. Los valores son sólo aproximados porque varían con la energía de la partícula y la forma del daño. El factor RBE debe ser considerado sólo una guía de primera aproximación a los efectos reales de radiación.

Por último, el **rem** (*radiation equivalent in man*), la radiación equivalente en el hombre, es el producto de la dosis en rad y el factor RBE:

$$\text{Dosis en radiación en rem} \quad \text{Dosis en rem} \equiv \text{dosis en rad} \times \text{RBE} \quad (43.36)$$

Según esta definición, 1 rem de dos tipos cualesquiera de radiación produce la misma cantidad de lesión biológica. La tabla 43.5, muestra que una dosis de 1 rad de neutrones rápidos representa una dosis efectiva de 10 rem, pero 1 rad de radiación gamma es equivalente a una dosis de sólo 1 rem.

Este análisis se ha concentrado en mediciones de dosis de radiación en unidades como rads y rems porque estas unidades todavía tienen uso generalizado. De cualquier modo han sido formalmente sustituidas por las nuevas unidades del SI. El rad ha sido sustituido con el *gray* (Gy), igual a 100 rad y el rem ha sido sustituido por el *sievert* (Sv), igual a 100 rem. La tabla 43.6 resume las unidades anteriores y las nuevas del SI para las dosis de radiación.

La radiación de nivel bajo de fuentes naturales, por ejemplo los rayos cósmicos y las piedras y suelo radiactivos, entrega a cada humano una dosis de casi 2.4 mSv/año; esta radiación se llama *radiación de fondo*, varía con la geografía, siendo los principales factores la altitud (exposición a rayos cósmicos) y la geología (gas radón liberado por algunas formaciones rocosas, depósitos de minerales naturalmente radiactivos).

El límite superior de la cantidad de dosis de radiación recomendado por el gobierno de Estados Unidos (con la excepción de la radiación de fondo) es de unos 5 mSv/año.

**TABLA 43.5** Factores RBE para varios tipos de radiación

Radiación	Factor RBE
Rayos X y rayos gamma	1.0
Partículas beta	1.0–1.7
Partículas alfa	10–20
Neutrones térmicos	4–5
Neutrones y protones rápidos	10
Iones pesados	20

*Nota:* \*RBE efectividad biológica relativa

**TABLA 43.6** Unidades para dosis de radiación

Cantidad	Unidad del SI	Símbolo	Relación con otras unidades del SI	Unidad anterior	Conversión
Dosis absorbida	gray	Gy	= 1 J/kg	rad	1 Gy = 100 rad
Dosis equivalente	sievert	Sv	= 1 J/kg	rem	1 Sv = 100 rem

Muchos oficios involucran exposiciones mucho más altas a la radiación, y por ello se ha establecido un límite superior de 50 mSv/año para exposición combinada en todo el cuerpo. Se permiten límites superiores más altos para ciertas partes del cuerpo, como son las manos y los antebrazos. Una dosis de 4 a 5 Sv resulta en un porcentaje de mortalidad de alrededor de 50% (lo cual significa que la mitad de las personas expuestas a este nivel de radiación mueren). La forma más peligrosa de exposición para la mayoría de las personas es por ingestión o inhalación de isótopos radiactivos, en especial isótopos de aquellos elementos que el cuerpo retiene y concentra, como es el  $^{90}\text{Sr}$ .

Nuestro "Imagine" de apertura preguntó sobre el significado de los términos *radiación*, *radioactivo*, *radioisótopo* y *radiocontraste*. Ahora estamos en condiciones de responder a esta pregunta. El término *radiación* es general y se refiere a la emisión de energía a través del espacio, transportada por partículas u ondas. Por tanto, la luz, las partículas beta y los rayos cósmicos son todas las formas de radiación. El término *radioactivo* se refiere a un material que contiene núcleos que son inestables y se descompondrá por los procesos descritos en la sección 43.5. Un radioisótopo es un núcleo radiactivo particular, como el flúor-18. ¡Finalmente, un agente de *radiocontraste* no tiene nada que ver con la física nuclear! El yodo es un agente de contraste utilizado comúnmente y actúa como un material de atenuación para los rayos X en una tomografía computarizada para proporcionar un mayor contraste entre los diferentes tipos de tejidos biológicos.

La historia también se refirió a las tomografías computarizadas y escaneos PET. Una tomografía computarizada es una radiografía especializada que emplea computadoras para formar imágenes detalladas de las partes del cuerpo. Una exploración PET depende de los principios de la física de partículas y se analizará en el capítulo 44. Otro tipo de exploración médica, una MRI, se analizará en la sección 43.13.

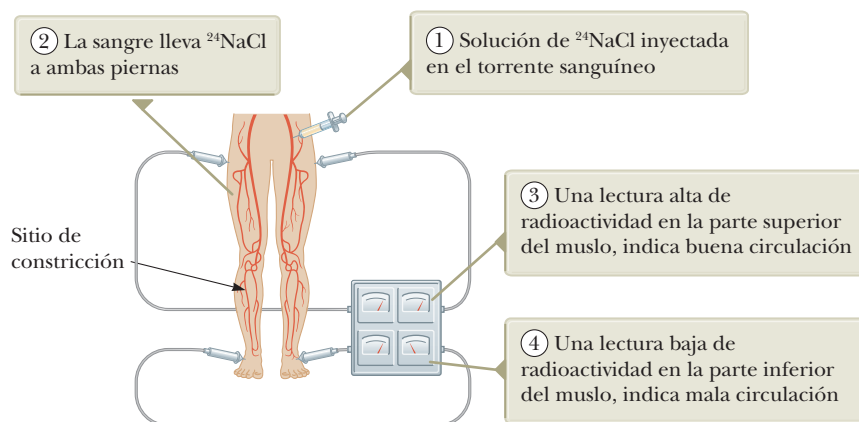
## 43.12 Usos de la radiación

Las aplicaciones de la física nuclear son sumamente amplias en manufactura, medicina y biología. En esta sección se presentan unas pocas de estas aplicaciones y las teorías que les sirven de fundamento.

### Rastreo

Para rastrear productos químicos que participan en diferentes reacciones se emplean rastreadores o indicadores radiactivos. Uno de los usos más valiosos de los rastreadores radiactivos es en la medicina. Por ejemplo, el yodo, nutriente necesario en el cuerpo humano, se obtiene principalmente por ingesta de sal yodada y mariscos. Para evaluar el desempeño de la tiroides, el paciente bebe una cantidad muy pequeña de yoduro de sodio radiactivo  $^{131}\text{I}$ , isótopo de yodo producido de manera artificial (el isótopo no radiactivo, natural, es el  $^{127}\text{I}$ ). La cantidad de yodo en la glándula tiroides se determina como función del tiempo midiendo la intensidad de radiación en el cuello. La cantidad del isótopo  $^{131}\text{I}$  en la tiroides es la medida de qué tan bien funciona esta glándula.

Una segunda aplicación se indica en la figura 43.25. Una solución con sodio radiactivo se inyecta en una vena en la pierna, y el tiempo en el que llega el radio-



**Figura 43.25** Técnica de un rastreador para determinar las condiciones del sistema circulatorio de una persona.

isótopo a otra parte del cuerpo es detectado con un contador de radiación. El tiempo que transcurre es un buen indicador de la presencia o ausencia de constricciones en el sistema circulatorio.

### Análisis de materiales

Durante siglos el método estándar para identificar los elementos de una muestra de material ha sido el análisis químico, que comprende determinar la forma en que el material reacciona con diferentes especies químicas. Un segundo método es el análisis espectral, que funciona porque cada elemento, cuando se excita, emite su propio conjunto de longitudes de onda electromagnética característico. Estos métodos se complementan ahora con una tercera técnica, el **análisis por activación de neutrones**. Los métodos químico y espectral tienen la desventaja de que una muestra bastante grande del material debe destruirse para el análisis. Además, cantidades extremadamente pequeñas de un elemento pueden pasar desapercibidas por cualquiera de estos métodos. El análisis por activación de los neutrones tiene una ventaja sobre los otros dos métodos en ambos sentidos.

Cuando un material se irradia con neutrones, los núcleos del material absorben los neutrones y se cambian a diferentes isótopos, la mayor parte de los cuales son radiactivos. Por ejemplo, el  $^{65}\text{Cu}$  absorbe un neutrón para convertirse en  $^{66}\text{Cu}$ , que experimenta desintegración beta:



La presencia del cobre se puede deducir porque se sabe que el  $^{66}\text{Cu}$  tiene una vida media de 5.1 minutos y decae con la emisión de partículas beta que tienen energías máxima de 2.63 MeV. También en la desintegración del  $^{66}\text{Cu}$  se emite un rayo gamma de 1.04 MeV. Al examinar la radiación emitida por una sustancia después de exponerla a irradiación de neutrones, es posible detectar cantidades sumamente pequeñas de un elemento en esa sustancia.

El análisis por activación de neutrones se usa en forma rutinaria en varias industrias; por ejemplo, en la aviación comercial se utiliza para revisar el equipaje en los aviones en busca de explosivos ocultos. El siguiente uso, poco común, es de interés histórico. Napoleón murió en la isla de Santa Elena en 1821, supuestamente por causas naturales. Con los años ha habido sospechas de que su muerte no fue natural en absoluto. Tras su muerte, se le afeitó la cabeza y algunos de sus mechones fueron vendidos como recuerdo. En 1961 se midió la cantidad de arsénico de una muestra de este cabello mediante el análisis por activación de neutrones y se encontró una cantidad excepcionalmente alta de arsénico. (El análisis por activación es tan sensible que es posible analizar partes muy pequeñas de un solo cabello.) Los resultados mostraron que se le dio arsénico de manera irregular. De hecho, el patrón de concentración de arsénico correspondió a las fluctuaciones de la gravedad de la enfermedad de Napoleón, como lo determinan los registros históricos.

Los historiadores de arte usan análisis por activación de neutrones para detectar falsificaciones. Los pigmentos empleados en pinturas cambian con el paso del tiempo, y los pigmentos viejos y nuevos reaccionan de modo diferente a la activación por neutrones. El método puede incluso dejar ver obras de arte ocultas detrás de ciertas pinturas debido a que la capa oculta de pintura, más vieja, reacciona de modo diferente que la capa superficial a la activación por neutrones.

### Terapia por radiación

La radiación causa mayor daño a las células que se dividen rápidamente. Por tanto, es útil en tratamientos de cáncer porque las células de tumores se dividen con gran rapidez. Varios mecanismos se han empleado para suministrar radiación a un tumor. En la sección 41.8 discutimos el uso de los rayos X de alta energía en el tratamiento de tejidos cancerosos. En otros protocolos de tratamiento incluyen el uso de estrechos haces de radiación de una fuente radioactiva. Como ejemplo, la figura 43.26 muestra una máquina que utiliza el  $^{60}\text{Co}$  como fuente. El isótopo radiactivo  $^{60}\text{Co}$  emite rayos gamma con energías de fotón superiores a 1 MeV.





Martin Dohrn/Science Source

**Figura 43.26** Esta gran máquina entrega una dosis de radiación de  $^{60}\text{Co}$  en un esfuerzo por destruir un tumor canceroso. Las células de cáncer son especialmente susceptibles a este tipo de terapia porque tienden a dividirse con más frecuencia que las células de tejido sano cercano.



Council for Agricultural Science &amp; Technology

**Figura 43.27** Las fresas de la izquierda no fueron tratadas y se ven enmohecidas. Las fresas en perfectas condiciones de la derecha han sido irradiadas. La radiación mató o incapacitó las esporas de moho que echaron a perder las fresas de la izquierda.

En otras situaciones, se utiliza una técnica llamada *braquiterapia*. En este plan de tratamiento, las delgadas agujas radiactivas llamadas *semillas* se implantan en el tejido canceroso. La energía emitida a partir de las semillas es entregada directamente en el tumor, reduciendo la exposición de los tejidos circundantes al daño por radiación. En el caso del cáncer de próstata, los isótopos activos utilizados en la braquiterapia incluyen  $^{125}\text{I}$  y  $^{103}\text{Pd}$ .

## Conservación de alimentos

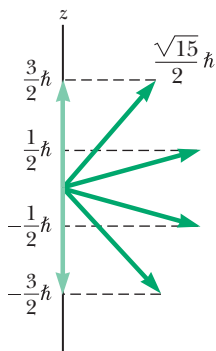
La radiación está encontrando una creciente aplicación como medio para preservar los alimentos, porque la exposición a altos niveles de radiación puede destruir o incapacitar bacterias y esporas de moho (figura 43.27). Las técnicas incluyen exponer alimentos a rayos gamma, rayos de electrones de alta energía y rayos X. Los alimentos preservados en esta forma se pueden poner en un recipiente sellado (para evitar la entrada de nuevos agentes destructores) y almacenarse durante largo tiempo. No hay evidencia de efectos perjudiciales en el gusto o valor nutritivo de estos alimentos. La seguridad de los alimentos irradiados ha sido avalada por la Organización Mundial de la Salud (OMS), los Centros de Prevención y Control de Enfermedades (CDC), el Departamento de Agricultura de Estados Unidos (USDA, por sus siglas en inglés), y la Food and Drug Administration (FDA). La irradiación de los alimentos está actualmente permitida en más de 50 países. Según algunas estimaciones, la cantidad de alimentos irradiados en el mundo alcanza las 500 000 toneladas métricas cada año.

## 43.13 Resonancia magnética nuclear y formación de imágenes por resonancia magnética

En esta sección se describe una aplicación importante de la física nuclear en la medicina, conocida como *formación de imagen por resonancia magnética*. A fin de comprender esta aplicación, primero se explica la cantidad de movimiento angular de espín del núcleo. Esta explicación establecerá paralelos con las explicaciones del espín en los electrones atómicos.

En el capítulo 41 se mencionó que el electrón tiene la cantidad de movimiento angular intrínseca, a la cual se le llama espín. Los núcleos también tienen espín, ya que sus partículas componentes —neutrones y protones— tienen cada una un espín  $\frac{1}{2}$ , así como la cantidad de movimiento angular orbital dentro del núcleo. Todas las clases de cantidad de movimiento angular obedecen las reglas cuánticas definidas para la cantidad de movimiento orbital y angular de espín en el capítulo 41. En particular, se asocian dos números cuánticos con la cantidad de movimiento angular que determinan los valores permitidos de la magnitud del vector de momentum angular, así como su dirección en el espacio. La magnitud del momentum angular nuclear es de  $\sqrt{I(I+1)}\hbar$ , en donde





**Figura 43.28** Modelo de vector que muestra las orientaciones posibles del vector de la cantidad de movimiento angular de espín nuclear y sus proyecciones sobre el eje  $z$  en el caso que  $I = \frac{3}{2}$ .

Magnetón nuclear ►

$I$  se conoce como el **número cuántico de espín nuclear** y puede ser un entero o un semientero, dependiendo de cómo se combinan los espines del neutrón y el protón. Como se explicó en la sección 41.6, el número cuántico  $I$  es el análogo a  $\ell$  para el electrón en un átomo. Además, existe un número cuántico  $mI$  que es el análogo a  $m\ell$ , en que las proyecciones permitidas del vector de cantidad de movimiento angular del espín nuclear en el eje  $z$  son  $m_I\hbar$ . Los valores de  $m_I$  en el intervalo desde  $-I$  hasta  $+I$  en etapas de 1. (En realidad, para cualquier tipo de espín con un número cuántico  $S$ , existe un número cuántico  $m_S$  que se clasifica en valores desde  $-S$  a  $+S$  en etapas de 1.) El valor máximo de la componente  $z$  del vector de la cantidad de movimiento angular de espín es  $I\hbar$ . La figura 43.28 es un modelo de vector (véase la sección 41.6) que ilustra las orientaciones posibles del vector de espín nuclear y sus proyecciones sobre el eje de las  $z$  en el caso de que  $I = \frac{3}{2}$ .

El espín nuclear está asociado con un momento magnético nuclear correspondiente, similar al del electrón. El momento magnético de espín de un núcleo se mide en términos del **magnetón nuclear**  $\mu_n$ , una unidad de momento que se define como

$$\mu_n \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \times 10^{-27} \text{ J/T} \quad (43.37)$$

en donde  $m_p$  es la masa del protón. Esta definición es análoga a la definición de Bohr para el magnetón  $\mu_B$ , el cual corresponde al momento magnético de espín de un electrón libre (véase la sección 41.6). Observe que  $\mu_n$  es menor a  $\mu_B$  ( $= 9.274 \times 10^{-24} \text{ J/T}$ ) en un factor de 1836 debido a la gran diferencia entre la masa del protón y la del electrón.

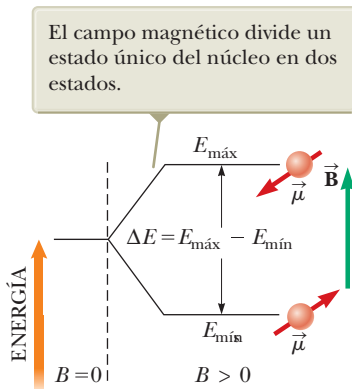
El momento magnético de un protón libre es de  $2.7928 \mu_n$ . Por desgracia, no existe ninguna teoría general de magnetismo nuclear que explique este valor. El neutrón también tiene un momento magnético, con valor de  $-1.9135 \mu_n$ . El signo menos indica que este momento es opuesto a la cantidad de movimiento angular de espín del neutrón. La presencia de momento magnético en el neutrón es en sí sorprendente, considerando que el neutrón no tiene carga alguna. Esto sugiere que el neutrón no es una partícula fundamental, sino que tiene una estructura formada por elementos cargados. Estudiará esta estructura con mayor profundidad en el capítulo 44.

La energía potencial de un momento de dipolo magnético  $\vec{\mu}$  dentro de un campo magnético externo  $\vec{B}$  está dado por  $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  (ecuación 28.19). Cuando el momento magnético  $\vec{\mu}$  se alinea con el campo tan precisamente como lo permite la física cuántica, la energía potencial del sistema dipolo-campo tiene un valor mínimo  $E_{\min}$ . Cuando  $\vec{\mu}$  se encuentra antiparalelo respecto al campo tanto como sea posible, la energía potencial tiene un valor máximo  $E_{\max}$ . En general, existen otros estados de energía entre estos valores, que corresponden a las direcciones cuantizadas del momento magnético respecto al campo. Para un núcleo con espín de  $\frac{1}{2}$  sólo existen dos estados permitidos, con energías de  $E_{\min}$  y  $E_{\max}$ . Estos dos estados de energía aparecen en la figura 43.29.

Es posible observar las transiciones entre estos dos estados de espín empleando una técnica llamada **resonancia magnética nuclear** (NMR, *nuclear magnetic resonance*). Se introduce un campo magnético constante ( $\vec{B}$  en la figura 43.29) para definir un eje  $z$  y definir las energías de los estados espín. A continuación, se aplica un segundo campo magnético, más débil y oscilante, orientado en sentido perpendicular respecto a  $\vec{B}$ , lo que produce una nube de fotones de radio frecuencia alrededor de la muestra. Cuando la frecuencia del campo oscilatorio es ajustada de modo que la energía del fotón iguale la diferencia de energía entre los estados del espín, hay una absorción neta de fotones de parte de los núcleos, que puede detectarse en forma electrónica.

En la figura 43.30 aparece un diagrama simplificado del aparato que se utiliza en resonancia magnética nuclear. La energía que absorben los núcleos es suministrada por el generador que produce el campo magnético oscilatorio. La resonancia magnética nuclear, al igual que una técnica relacionada conocida como *resonancia de espín del electrón*, son métodos extremadamente importantes para estudiar los sistemas nucleares y atómicos, así como las formas en que estos sistemas interactúan con sus alrededores.

Una técnica de diagnóstico médico ampliamente utilizada llamada **IRM**, por **formación de imagen por resonancia magnética**, se basa en la resonancia magnética



**Figura 43.29** Un núcleo con espín de  $\frac{1}{2}$  colocado dentro de un campo magnético externo.





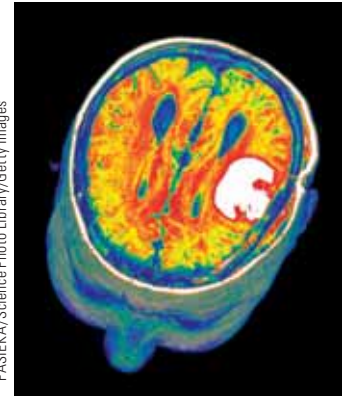


**Figura 43.30** Aparato experimental para la resonancia magnética nuclear. El campo magnético de radiofrecuencia, producido por la bobina que rodea a la muestra y suministrado por el oscilador de frecuencia variable, está orientado en forma perpendicular respecto al campo magnético constante producido por el electroimán. Cuando los núcleos en la muestra cumplen con la condición de resonancia, absorben energía proveniente del campo de radiofrecuencia de la bobina, y esta absorción modifica las características del circuito del cual forma parte esta última. La mayoría de los espectrómetros RMN modernos se valen de imanes superconductores con intensos campos fijos que funcionan a frecuencias de alrededor de 200 MHz.

nuclear. Ya que casi dos tercios de los átomos en el cuerpo humano son de hidrógeno (el cual produce una señal NMR fuerte), las IRM funcionan muy bien para ver tejidos internos. Se coloca al paciente dentro de un gran solenoide que suministra un campo magnético constante en el tiempo, pero que varía en magnitud en forma espacial a lo largo del cuerpo. Debido a las variaciones en el campo, los átomos de hidrógeno en distintas partes del cuerpo tienen diferentes energías de separación entre los estados del espín, por lo que puede utilizarse la señal de resonancia para obtener información sobre la posición de los protones. Se utiliza una computadora para analizar la información de posición y proporcionar la información para construir una imagen final. El contraste en la imagen final entre diferentes tipos de tejidos se crea mediante el análisis por computadora de los intervalos de tiempo para que los núcleos vuelvan al estado de giro de energía más baja entre pulsos de fotones de radiofrecuencia. El contraste se puede mejorar con el uso de agentes de contraste como compuestos de gadolinio o nanopartículas de óxido de hierro tomadas por vía oral o inyectadas por vía intravenosa. En la figura 43.31 aparece un IRM que muestra con increíble detalle la estructura interna del cuerpo.

La principal ventaja de las IRM sobre otras técnicas de formación de imagen es que causa un daño celular mínimo. Los fotones asociados con las señales de radiofrecuencia empleados en la obtención de IRM tienen energías de sólo  $10^{-7}$  eV. Ya que la fuerza de unión de las moléculas es mucho mayor (aproximadamente 1 eV), la radiación de radiofrecuencia causa muy poco daño a las células. En comparación, los rayos X tienen energías que se clasifican de  $10^4$  a  $10^6$  eV, y pueden provocar daños considerables a las células. Por tanto, a pesar de los temores de algunas personas originados por asociar la palabra *nuclear* al IRM, la radiación de radiofrecuencia utilizada es muchísimo más segura que los rayos X que estos mismos individuos podrían aceptar con mayor facilidad. Una desventaja del IRM es que el equipo necesario para llevar a cabo el proceso es muy costoso, por lo que las imágenes IRM son de gran valor.

El campo magnético producido por el solenoide es suficiente para levantar un automóvil, y la señal de radio tiene una magnitud semejante a la utilizada por una pequeña estación de radio comercial. Si bien las IRM son seguras si se utilizan normalmente, el campo magnético intenso que crea el solenoide requiere muchos cuidados para evitar la presencia de materiales ferromagnéticos dentro de la habitación, cerca del aparato de IRM, como se explicó en la semblanza del capítulo 29. Han ocurrido varios accidentes, como se menciona en esa historia.



PASEKA/Science Photo Library/Getty Images

**Figura 43.31** Rastreo IRM con color mejorado del cerebro humano, mostrando, en blanco, un tumor

## Resumen

### Definiciones

Un núcleo está representado por el símbolo  ${}^A_ZX$ , donde  $A$  es el **número de masa** (el número total de nucleones) y  $Z$  es el **número atómico** (el número total de protones). El número total de neutrones en un núcleo es el **número de neutrones**  $N$ , donde  $A = N + Z$ . Los núcleos que tienen el mismo valor  $Z$ , pero diferentes valores  $A$  y  $N$  son **isótopos** uno del otro.

El momento magnético de un núcleo se mide en términos del **magnetón nuclear**  $\mu_n$ , donde

$$\mu_n \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \times 10^{-27} \text{ J/T} \quad (43.37)$$

continúa

## ► Conceptos y principios

Si supone que los núcleos son esféricos, su radio está determinado por

$$r = aA^{1/3} \quad (43.1)$$

donde  $a = 1.2$  fm.

La diferencia entre la suma de las masas de un grupo de nucleones separados y la masa del núcleo compuesto que contiene estos nucleones, cuando se multiplica por  $c^2$ , da la **energía de enlace**  $E_b$  del núcleo. La energía de enlace del núcleo se puede calcular en MeV usando la expresión

$$E_b = [ZM(\text{H}) + Nm_n - M({}_Z^AX)] \times 931.494 \text{ MeV/u} \quad (43.2)$$

donde  $M(\text{H})$  es la masa atómica del átomo de hidrógeno neutro,  $M({}_Z^AX)$  representa la masa atómica de un átomo del isótopo  ${}_Z^AX$  y  $m_n$  es la masa del neutrón.

Los núcleos son estables debido a la **fuerza nuclear** entre nucleones. Esta fuerza de corto alcance domina a la fuerza repulsiva de Coulomb a distancias de menos de casi 2 fm y es independiente de la carga. Los núcleos estables ligeros tienen iguales números de protones y neutrones. Los núcleos estables pesados tienen más neutrones que protones. Los núcleos más estables tienen valores  $Z$  y  $N$  que son ambos pares.

El **modelo de gota líquida** de estructura nuclear trata los nucleones como moléculas en una gota de líquido. Las cuatro principales contribuciones que influyen en la energía de enlace son el efecto volumétrico, el efecto superficial, el efecto de repulsión de coulomb y el efecto de simetría. Al sumar tales aportaciones resulta en la **fórmula semiempírica de energía de enlace**:

$$E_b = C_1A - C_2A^{2/3} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \quad (43.3)$$

El **modelo de capas**, o **modelo de partícula independiente**, supone que cada nucleón existe en una capa y sólo puede tener valores de energía discretos. La estabilidad de ciertos núcleos se puede explicar con este modelo.

Una sustancia radiactiva decae mediante **decaimiento alfa**, **decaimiento beta** o **decaimiento gamma**. Una partícula alfa es el núcleo de  ${}^4\text{He}$ , una partícula beta es o un electrón ( $e^-$ ) o un positrón ( $e^+$ ) y una partícula gamma es un fotón de alta energía.

Si un material radiactivo contiene  $N_0$  núcleos radiactivos en  $t = 0$ , el número  $N$  de los núcleos restantes después de transcurrido un tiempo  $t$  es

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (43.6)$$

donde  $\lambda$  es la **constante de decaimiento**, un número igual a la probabilidad por segundo de que un núcleo decaerá. La **rapidez de decaimiento**, o **actividad**, de una sustancia radiactiva es

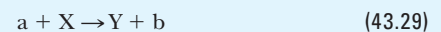
$$R = \left| \frac{dN}{dt} \right| = R_0 e^{-\lambda t} \quad (43.7)$$

donde  $R_0 = \lambda N_0$  es la actividad en  $t = 0$ . La **vida media**  $T_{1/2}$  es el intervalo de tiempo requerido para que la mitad de un número determinado de núcleos radiactivos se desintegre, donde

$$T_{1/2} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (43.8)$$

En el decaimiento alfa, un núcleo de helio se expulsa del núcleo padre con un conjunto discreto de energías cinéticas. Un núcleo que experimenta decaimiento beta emite un electrón ( $e^-$ ) o un antineutrino ( $\bar{\nu}$ ) o un positrón ( $e^+$ ) y un neutrino ( $\nu$ ). El electrón o positrón se expulsa con un intervalo continuo de energías. En la **captura de electrón**, el núcleo de un átomo absorbe uno de sus propios electrones y emite un neutrino. En el decaimiento gamma, un núcleo en un estado excitado decae a su estado fundamental y emite un rayo gamma.

Las **reacciones nucleares** pueden presentarse cuando un núcleo objetivo X es bombardeado por una partícula a, lo que resulta en un núcleo hija Y y una partícula saliente b:



La conversión masa-energía en tal reacción, llamada **energía de reacción**  $Q$ , es

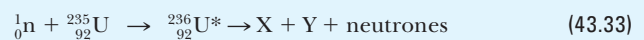
$$Q = (M_a + M_X - M_Y - M_b)c^2 \quad (43.30)$$

La probabilidad de que los neutrones sean capturados conforme se mueven a través de la materia aumenta con la disminución de la energía de los neutrones. Un **neutrón térmico** es un neutrón con movimiento lento que tiene una alta probabilidad de ser capturado mediante un núcleo en un **evento de captura de neutrón**:



donde  ${}_Z^{A+1}\text{X}^*$  es un núcleo intermedio excitado que emite rápidamente un fotón.

La **fisión nuclear** se presenta cuando un núcleo muy pesado, como el  ${}^{235}\text{U}$ , se divide en dos fragmentos de fisión más pequeños. Los neutrones térmicos pueden producir fisión en  ${}^{235}\text{U}$ :



donde  ${}_{92}^{236}\text{U}^*$  es un estado excitado intermedio y X y Y son los fragmentos de fisión. En promedio, se liberan 2.5 neutrones por cada evento de fisión. Luego los fragmentos se someten a una serie de desintegraciones beta y gamma a diferentes isótopos estables. La energía liberada por evento de fisión es aproximadamente de 200 MeV.

En la **fusión nuclear** dos núcleos ligeros se funden para formar un núcleo más pesado y liberar energía. El principal obstáculo para obtener energía útil de la fusión es la gran fuerza repulsiva de Coulomb entre los núcleos cargados a pequeñas distancias de separación. La temperatura requerida para producir fusión está en el orden de  $10^8$  K y, a esta temperatura, toda la materia se presenta como plasma.



## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

- Los océanos del mundo contienen un gran depósito de energía. A su grupo se le ha encomendado la tarea de determinar qué proporcionaría más energía: extrayendo el uranio en el océano para utilizarlo en reactores de fisión, o extrayendo el deuterio en el océano para utilizarlo en reactores de fusión. Divida a su grupo en dos mitades y encuentre la energía disponible en el océano desde cada fuente.

Grupo (i): *Combustible de fisión*. El agua de mar contiene 3.00 mg de uranio por metro cúbico. Alrededor del 0.700% del uranio natural es el isótopo fisionable  $^{235}\text{U}$ .

Grupo (ii): *Combustible de fusión*. De todo el hidrógeno en los océanos, 0.030 0% de la masa es deuterio. Dos deuterones se fusionan para formar helio en la forma  $^4_2\text{He}$ . Supongamos que todo el deuterio en los océanos está fusionado para formar helio.

Para ambos grupos, use el hecho de que la profundidad promedio del océano es de aproximadamente 4.00 km y el agua cubre dos tercios de la superficie de la Tierra.

- Su grupo es un departamento de radiología en un hospital. Dos pacientes en su sala de espera discuten sobre quién recibió más radiación en sus tratamientos contra el cáncer. El paciente A recibió 2.0 Gy de radiación, mientras que el paciente B recibió 1.0 Gy. El paciente A afirma que recibió el doble de energía entregada a su cuerpo en función de estos números. Tras una investigación adicional, se deter-

mina que el paciente A recibió radiación de neutrones rápidos, RBE 10, que afecta a 22 g de tejido. El paciente B recibió partículas alfa, RBE 18, que afectan 30 g de tejido. (a) ¿Quién "recibió más radiación" en términos de efectividad biológica para el daño por radiación y (b) ¿por qué factor?

- ACTIVIDAD** Esta actividad simula la desintegración estadística de núcleos radiactivos. Los paquetes de 100 dados se pueden comprar en línea. (a) Primero, *piense en* el siguiente procedimiento, *pero no lo haga todavía*: ponga 100 dados en una bolsa y agite durante unos segundos. Tire los dados en una mesa. Cada tirada de los dados representará un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Retire todos los dados que muestran uno en la cara superior, y déjelos a un lado. Registre el número restante  $N$  de dados. Vuelva a poner los dados restantes en la bolsa, agítelos y láncelos. Repita este procedimiento, siempre retirando los dados que muestran el número uno de los que están en la mesa, hasta que queden pocos dados. En segundo lugar, después de pensar en este procedimiento, pronostique la vida media del procedimiento: el número de lanzamientos después de los cuales queda la mitad de los dados cuando los dados que muestran el número uno se han eliminado. (b) Finalmente, realice la actividad y registre los resultados. Grafique el logaritmo natural del número  $N$  de dados que quedan después de cada lanzamiento contra el número  $n$  del lanzamiento y determina la vida media. Compare con su predicción teórica.

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

### SECCIÓN 43.1 Algunas propiedades de los núcleos

- (a) ¿Cuál es el orden de magnitud del número de protones de su cuerpo?; (b) ¿del número de neutrones?; (c) ¿del número de electrones?
- CIC** (a) Determine el número de masa de un núcleo cuyo radio es aproximadamente igual a los dos tercios del radio de  $^{230}_{88}\text{Ra}$ . (b) Identifique el elemento. (c) ¿Son posibles otras respuestas? Explique.
- CIC** La figura P43.3 muestra la energía potencial de dos protones como una función de la distancia de separación. En el texto, se afirmó que, para ser visible en dicho gráfico, el pico de la curva está exagerado por un factor de diez. (a) Calcule la energía potencial eléctrica de un par de protones separados por 4.00 fm. (b) Verifique que el pico en la figura P43.3 está exagerado por un factor de diez.

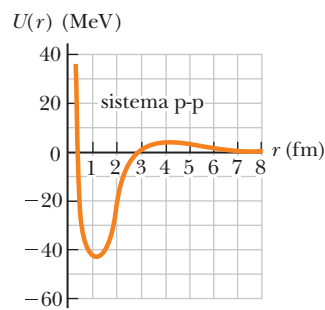


Figura P43.3

- CIC** En un experimento de dispersión Rutherford se disparan partículas alfa con energía cinética de 7.70 MeV hacia un núcleo de oro que permanece en reposo durante la colisión. Las partículas alfa se aproximan al núcleo de oro hasta 29.5 fm antes de rodearlo. (a) Calcule la longitud de onda de De Broglie para la partícula alfa de 7.70 MeV y compárela con la distancia de la aproximación más cercana, 29.5 fm (b) A partir de esta comparación, ¿por qué en el experimento de dispersión de Rutherford es más apropiado tratar la partícula alfa como si fuera una partícula en vez de una onda?
- Suponga que cada átomo de hidrógeno es una esfera con 0.100 nm de diámetro y una molécula de hidrógeno consiste de dos de tales esferas en contacto. (a) ¿Qué fracción del espacio en un tanque de gas hidrógeno a 0 °C y 1.00 atm ocupan las moléculas de hidrógeno? (b) ¿Qué fracción del espacio dentro de un átomo de hidrógeno ocupa su núcleo, de 1.20 fm de radio?

### SECCIÓN 43.2 Energía de enlace nuclear

- CE** Usted trabaja como físico nuclear y está realizando investigaciones sobre isobaras espejo. Las isobaras espejo son pares de núcleos para los que  $Z_1 = N_2$  y  $Z_2 = N_1$  (los números atómicos y de neutrones se intercambian). Desea investigar la independencia de las fuerzas nucleares cargadas comparando las mediciones de energía de enlace en el laboratorio en isobaras espejo contra un valor teórico para la diferencia en las energías de enlace. Primero encuentre la diferencia teórica en las energías de enlace para las dos isobaras espejo  $^{15}_8\text{O}$  y  $^{15}_7\text{N}$ .



7. (a) Calcule la diferencia en energías de enlace por nucleón de los isóbaros  $^{23}_{11}\text{Na}$  y  $^{23}_{12}\text{Mg}$ . ¿Cómo explica la diferencia?

8. El pico de la gráfica de la energía de enlace nuclear por nucleón se produce cerca de  $^{56}_{26}\text{Fe}$ , por lo que el hierro es importante en el espectro del Sol y las estrellas. Demuestre que  $^{56}_{26}\text{Fe}$  tiene una energía superior de enlace por nucleón que sus vecinos  $^{55}_{25}\text{Mn}$  y  $^{59}_{28}\text{Co}$ .

9. Los núcleos con los mismos números de masa se conocen como *isobaros*. El isótopo  $^{139}_{57}\text{La}$  es estable. Un isobaro radiactivo,  $^{139}_{59}\text{Pr}$ , se localiza por debajo de la línea de los núcleos estables de la figura P43.9 y decae por emisión de  $e^+$ . Otro isobaro radiactivo de  $^{139}_{55}\text{Cs}$ , decae por emisión de  $e^-$  y se localiza por encima de la línea de los núcleos estables de la figura P43.9. (a) ¿Cuáles de estos tres isobaros tiene una mayor razón de neutrones a protones? (b) ¿Cuál tiene la mayor energía de enlace por nucleón? (c) ¿Cuál se espera que sea más pesado,  $^{139}_{59}\text{Pr}$  o  $^{139}_{55}\text{Cs}$ ?

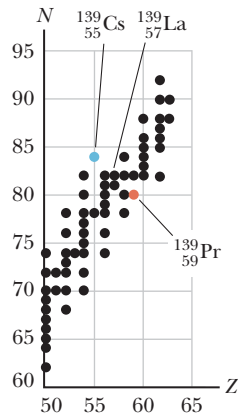


Figura P43.9

10. La energía necesaria para construir una esfera con carga uniforme total  $Q$  y radio  $R$  es  $U = 3k_e Q^2 / 5R$ , en donde  $k_e$  es la constante de Coulomb (véase el problema 66). Suponga que un núcleo de  $^{40}_{20}\text{Ca}$  contiene 20 protones distribuidos en forma uniforme dentro de un volumen esférico. (a) ¿Cuánta energía es necesaria de acuerdo con la ecuación anterior para contrarrestar su repulsión eléctrica? (b) Calcule la energía de unión del  $^{40}_{20}\text{Ca}$ . (c) Explique las conclusiones a las que llegó comparando el resultado del inciso (b) con el del inciso (a).

### SECCIÓN 43.3 Modelos nucleares

11. Con ayuda de la gráfica en la figura 43.5, calcule cuánta energía es liberada cuando un núcleo con número de masa 200 se fisiona en dos núcleos con número de masa 100 cada uno.

12. (a) En el modelo de gota de líquido de la estructura nuclear, ¿por qué tiene un signo negativo el término de efecto de superficie,  $-C_s A^{2/3}$ ? (b) ¿Qué pasaría si? La energía de enlace del núcleo aumenta al incrementarse la relación volumen a superficie. Calcule esta relación para formas esféricas y cúbicas, y explique cuál de ellas es más recomendable para núcleos.

### SECCIÓN 43.4 Radiactividad

13. A partir de la ecuación que expresa la ley de decaimiento radiactivo, deduzca las siguientes fórmulas útiles para la constante de decaimiento y la vida media, en términos del intervalo de tiempo  $\Delta t$  durante el cual la tasa de decaimiento disminuye de  $R_0$  a  $R$ :

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t} \ln \left( \frac{R_0}{R} \right) \quad T_{1/2} = \frac{(\ln 2) \Delta t}{\ln (R_0/R)}$$

14. Está trabajando como técnico en el departamento de radiología de un hospital grande. Uno de los isótopos radiactivos que se usa para tratar el cáncer es  $^{60}_{27}\text{Co}$ . Aunque el uso de este isótopo está disminuyendo debido a la disponibilidad de electrones de los aceleradores lineales, el  $^{60}_{27}\text{Co}$  todavía se utiliza ampliamente cuando los aceleradores no están disponibles. Un radiólogo le ha pedido que suministre un contenedor de  $^{60}_{27}\text{Co}$ , y debe determinar si una muestra particular

en el estante de suministro todavía es viable para su uso. Durante su capacitación, aprendió que el cobalto no es viable para uso médico si su actividad ha disminuido al 60.0% cuando se entrega al hospital. La etiqueta en la muestra indica que la fecha de entrega fue el 31 de enero, hace más de tres años y medio. Ahora es el 31 de diciembre. ¿Debería enviar esta muestra al radiólogo o debería desecharse? ( $^{60}_{27}\text{Co}$  tiene una vida media de 5.27 años)

15. El isótopo radiactivo  $^{198}_{79}\text{Au}$  tiene una vida media de 64.8 h. Una muestra que contiene este isótopo tiene una actividad inicial ( $t = 0$ ) de  $40.0 \mu\text{Ci}$ . Calcule la cantidad de núcleos que decaen en el intervalo de tiempo entre  $t_1 = 10.0 \text{ h}$  y  $t_2 = 12.0 \text{ h}$ .

16. Un núcleo radiactivo tiene una vida media de  $T_{1/2}$ . Una muestra que contiene a estos núcleos presenta una actividad inicial de  $R_0$  en  $t = 0$ . Calcule la cantidad de núcleos que decaen durante el intervalo entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ .

17. El tritio tiene una vida media de 12.33 años. ¿Qué fracción de los núcleos en una muestra tritio quedará (a) después de 5.00 años? (b) Después de 10.0 años? (c) Después de 123.3 años? (d) De acuerdo con la ecuación 43.6, se requiere una cantidad infinita de tiempo para que toda la muestra decaiga. Discuta si esto es realista.

18. (a) El núcleo hija formado durante el decaimiento es a menudo radiactivo. Sea  $N_1$  la cantidad de núcleos padre en el tiempo  $t = 0$ ,  $N_1(t)$  la cantidad de núcleos padre en el tiempo  $t$ , y  $\lambda_1$  la constante de decaimiento de los núcleos padre. Suponga que el número de núcleos hija en el tiempo  $t = 0$  es cero, que  $N_2(t)$  es el número de núcleos hija en el tiempo  $t$ , y que  $\lambda_2$  es la constante de decaimiento del núcleo hija. Demuestre que  $N_2(t)$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

(b) Verifique por sustitución que esta ecuación diferencial conduce a la solución

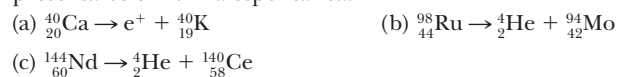
$$N_2(t) = \frac{N_{10} \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t})$$

Esta ecuación es la ley de decaimientos radiactivos sucesivos.

(c) El  $^{218}_{84}\text{Po}$  decae a  $^{214}_{82}\text{Pb}$  con una vida media de 3.10 min, y el  $^{214}_{82}\text{Pb}$  decae a  $^{214}_{83}\text{Bi}$  con una vida media de 26.8 min. Sobre su mismo eje, trace gráficos de  $N_1(t)$  para  $^{218}_{84}\text{Po}$  y  $N_2(t)$  para  $^{214}_{82}\text{Pb}$ . Suponga que  $N_{10} = 1000$  núcleos, y elija valores de  $t$  de 0 a 36 min con intervalos de 2 min. (d) La curva para  $^{214}_{82}\text{Pb}$  obtenida en la parte (c) primero se eleva hasta un máximo y después comienza a decaer. ¿En qué instante  $t_m$  es el número de núcleos  $^{214}_{82}\text{Pb}$  es máximo? (e) Aplicando la condición para un máximo  $dN_2/dt = 0$ , deduzca una ecuación simbólica para  $t_m$  en función de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . (f) Explique si el valor obtenido en el inciso (c) coincide con esta ecuación.

### SECCIÓN 43.5 Los procesos de decaimiento

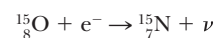
19. Determine cuál de las siguientes desintegraciones pueden presentarse en forma espontánea:



20. Identifique el núclido o partícula (X) que falta:



21. El núcleo  $^{15}_8\text{O}$  decae mediante captura de electrones. La reacción nuclear se escribe como





(a) Escriba el proceso de comportamiento para una sola partícula dentro del núcleo. (b) Determine la energía del neutrino. Ignore el retroceso del núcleo hija.

**22. C I C** Una muestra consiste en  $1.00 \times 10^6$  núcleos radiactivos con una vida media de 10.0 h. Ningún otro núcleo está presente en el momento  $t = 0$ . Los núcleos hija estables se acumulan en la muestra conforme pasa el tiempo. (a) Deduzca una ecuación que dé el número de núcleos hija  $N_d$  como función del tiempo. (b) Bosqueje o describa una gráfica del número de núcleos hija como función del tiempo. (c) ¿Cuáles son los números máximo y mínimo de los núcleos hija y cuándo se presentan? (d) ¿Cuáles son las tasas de cambio máxima y mínima en el número de núcleos hija y cuándo se presentan?

**23. B I O** Un espécimen viviente en equilibrio con la atmósfera contiene un átomo de  $^{14}\text{C}$  (vida media = 5 730 años) por cada  $7.7 \times 10^{11}$  átomos estables de carbono. Una muestra arqueológica de madera (celulosa,  $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$ ) contiene 21.0 mg de carbono. Cuando se coloca una muestra dentro de un contador beta blindado con una eficiencia de conteo de 88.0%, se acumulan 837 conteos en una semana. Se desea determinar la antigüedad de la muestra. (a) Encuentre el número de átomos de carbono en la muestra. (b) Encuentre el número de átomos de carbono-14 en la muestra. (c) Determine la constante de desintegración del carbono-14 en segundos inversos. (d) Halle el número inicial de desintegraciones por semana justo después de que el espécimen murió. (e) Determine la cantidad corregida de desintegraciones por semana a partir de la muestra actual. (f) A partir de las respuestas a los incisos (d) y (e), encuentre el intervalo de tiempo en años desde que el espécimen murió.

**V**

**SECCIÓN 43.6 Radiactividad natural**

**24. C I C** El isótopo más común del radón es  $^{222}\text{Rn}$ , que tiene una vida media de 3.82 días. (a) ¿Qué fracción de los núcleos de radón existentes en la Tierra hace una semana ahora se están desintegrando? (b) ¿Qué fracción de éstos existían hace un año? (c) En vista de estos resultados, explique por qué el radón sigue siendo un problema que contribuye de forma importante a nuestra exposición a la radiación.

**25.** Escriba el símbolo del nucleido correcto en cada uno de los cuadros en blanco de la figura P43.25, la cual muestra las secuencias de desintegraciones en las series radiactivas naturales, comenzando por el isótopo de vida más larga, el uranio 235, y terminando con el núcleo de plomo 207 estable.

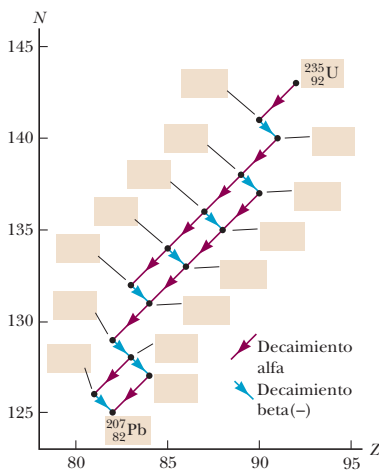
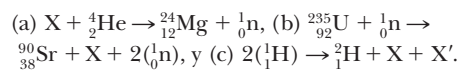


Figura P43.25

**SECCIÓN 43.7 Reacciones nucleares**

**26. C I C** El oro natural tiene sólo un isótopo,  $^{197}\text{Au}$ . Si se irradia el oro natural con un flujo de neutrones lentos, se produce una emisión de electrones. (a) Escriba la ecuación de esta reacción. (b) Calcule la energía máxima de los electrones emitidos.

**27.** Identifique los núcleos y partículas X y X' desconocidas en las siguientes reacciones nucleares:



**SECCIÓN 43.8 Fisión nuclear**

*Nota:* El problema en línea 24.36 del capítulo 24, se puede asignar a esta sección.

**28.** El estroncio 90 es un producto de fisión particularmente peligroso del  $^{235}\text{U}$  porque es radiactivo y sustituye al calcio en los huesos. ¿Qué otros productos directos de fisión lo acompañarían en la fisión del  $^{235}\text{U}$  inducida por neutrones? *Nota:* Esta reacción puede liberar dos, tres o cuatro neutrones libres.

**29.** Enumere las reacciones nucleares que se necesitan para producir  $^{233}\text{U}$  de  $^{232}\text{Th}$  bajo el bombardeo de neutrones rápidos.

**SECCIÓN 43.9 Reactores nucleares**

**30. C I C S** Para minimizar la fuga de neutrones de un reactor, la razón entre el área superficial y el volumen debe ser mínima. Para un volumen dado  $V$ , calcule esta razón para (a) una esfera, (b) un cubo y (c) un paralelepípedo de dimensiones  $a \times a \times 2a$ . (d) ¿Cuál de estas formas tendría un mínimo de fugas? ¿Cuál tendría un máximo de fugas? Explique sus respuestas.

**31. P G C I C** Según una estimación, hay  $4.40 \times 10^6$  toneladas métricas de reservas de uranio del mundo extraíbles en \$130/kg o menos. Queremos determinar si estas reservas son suficientes para abastecer todas las necesidades energéticas del mundo. Cerca de 0.700% del uranio natural es el isótopo fisionable  $^{235}\text{U}$ . (a) Calcule la masa en gramos de  $^{235}\text{U}$  en la reserva. (b) Encuentre el número de moles de  $^{235}\text{U}$  en la reserva. (c) Encuentre el número de núcleos  $^{235}\text{U}$  en la reserva. (d) Suponiendo que se obtienen 200 MeV a partir de cada reacción de fisión y toda esta energía es capturada, calcule la energía total en joules que se pueden extraer de la reserva. (e) Suponiendo que la tasa de consumo de energía mundial se mantiene constante en  $1.5 \times 10^{13}$  J/s, ¿cuántos años podría la reserva de uranio satisfacer todas las necesidades energéticas del mundo? (f) ¿Qué conclusión se puede sacar?

**32.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un ingeniero que trabaja en la energía nuclear tiene un gran avance para controlar los núcleos hijas que se crean en una reacción de fisión. Al controlar cuidadosamente el proceso, es capaz de restringir las reacciones de fisión sólo a esta única posibilidad: el núcleo de uranio-235 absorbe un neutrón lento y se divide en lantano-141 y bromo-94. Usando este avance, es capaz de diseñar y construir un reactor nuclear con éxito en el que sólo se produce este único proceso.

**33. C I C** Por lo general, una partícula no se puede localizar a distancias mucho menores que su longitud de onda de De Broglie. Se puede considerar que este hecho significa que un neutrón lento parece ser más grande a una partícula objetivo que un neutrón rápido en el sentido de que el neutrón lento tiene probabilidades de encontrarse en un gran volumen de espacio. Para un neutrón térmico a temperatura ambiente de 300 K, encuentre (a) la cantidad de movimiento lineal y (b) la longitud de onda de De Broglie. (c) Enuncie cómo se compara este tamaño efectivo con las dimensiones nuclear y atómica.

**SECCIÓN 43.10 Fusión nuclear**

**34. C E** Está organizando una cena familiar con sus parientes: abuelos, tías, tíos, primos, etc. La conversación versa sobre sus estudios de física y les cuenta a todos sobre las reacciones de



fusión en el Sol. Uno de sus sobrinos dice: "Oh, ¿sí? Creo que el Sol es solo una gran bola de gasolina ardiendo. ¿Cómo puede probar que eso no es verdad?". (a) Basado en el hecho de que la gasolina entrega aproximadamente  $1.3 \times 10^8$  J de energía por cada galón quemado, realice un cálculo que le mostrará a su sobrino cuánto durará el Sol si estuviera hecho de gasolina. (b) Realice un cálculo para mostrarle a su sobrino que la fusión nuclear de todo el hidrógeno en el Sol podría durar mucho más.

- 35. Problema de repaso.** Considere la reacción de fusión deuterio-tritio con el núcleo de tritio en reposo:



(a) Suponga que los núcleos reactivos se fusionan espontáneamente si sus superficies se tocan. De la ecuación 43.1, determine la distancia necesaria de aproximación más cercana entre sus centros. (b) ¿Cuál es la energía eléctrica potencial (en eV) a esta distancia? (c) Suponga que el deuterón se dispara directamente a un núcleo de tritio originalmente inmóvil con apenas la energía suficiente para alcanzar la distancia necesaria de aproximación más cercana. ¿Cuál es la velocidad común de los núcleos de deuterio y tritio cuando se tocan, en términos de la rapidez inicial de deuterio  $v_i$ ? (d) Utilice métodos de energía para hallar la energía mínima inicial de deuterio necesaria para obtener fusión. (e) ¿Por qué la reacción de fusión en realidad ocurre a energías de deuterio mucho menores que las calculadas en (d)?

- 36.** Dos núcleos que tienen números atómicos  $Z_1$  y  $Z_2$  se aproximan el uno al otro con una energía total  $E$ . (a) Cuando están muy separados, interactúan únicamente por repulsión eléctrica. Si se aproximan a una distancia de  $1.00 \times 10^{-14}$  m, repentinamente la fuerza nuclear se hace cargo de que se fundan. Encuentre el valor mínimo de  $E$  necesario para producir fusión, en términos de  $Z_1$  y  $Z_2$ . (b) Establezca cómo depende  $E$  de los números atómicos. (c) Si  $Z_1 + Z_2$  tienen cierto valor objetivo como 60 sería energéticamente favorable considerar  $Z_1 = 1$  y  $Z_2 = 9$  o bien  $Z_1 = Z_2 = 30$ , ¿o cuál? Explique su respuesta. (d) Evalúe a partir de su expresión la energía mínima de fusión para las reacciones D-D y D-T (la primera y tercera reacciones de la ecuación 43.35).

- 37.** Para entender por qué es necesario el confinamiento del plasma, considere la rapidez a la que se perdería un plasma no confinado. (a) Estime la velocidad rms de deuterones en un plasma a  $4.00 \times 10^8$  K. (b) **¿Qué pasaría si?** Estime el orden de magnitud del intervalo de tiempo durante el cual este plasma permanecería en un cubo de 10 cm si no se tomaran medidas para contenerlo.

- 38.** Otra serie de reacciones nucleares que pueden producir energía en el interior de las estrellas es el ciclo del carbono propuesto por primera vez por Hans Bethe en 1939, lo que lo llevó a su Premio Nobel de Física en 1967. Este ciclo es más eficiente cuando la temperatura en el centro de una estrella está por encima de  $1.6 \times 10^7$  K. Debido a que la temperatura en el centro del Sol es sólo  $1.5 \times 10^7$  K, el siguiente ciclo produce menos de 10% de la energía del Sol. (a) Un protón alta energía es absorbido por  ${}^{12}\text{C}$ . Otro núcleo,  $A$ , se produce en esta acción, junto con un rayo gamma. Identifique el núcleo  $A$ . (b) El núcleo  $A$  decae por la emisión de positrones para formar el núcleo  $B$ . Identifique núcleo  $B$ . (c) El núcleo  $B$  absorbe un protón para producir el núcleo  $C$  y un rayo gamma. Identifique el núcleo  $C$ . (d) El núcleo  $C$  absorbe un protón para producir el núcleo  $D$  y un rayo gamma. Identifique el núcleo  $D$ . (e) El núcleo  $D$  decae a través de la emisión de positrones para producir el núcleo  $E$ . Identifique el

núcleo  $E$ . (f) El núcleo  $E$  absorbe un protón para producir el núcleo  $F$  más una partícula alfa. Identifique el núcleo  $F$ . (g) ¿Cuál es el significado del núcleo final en la última etapa del ciclo indicado en el inciso (f)?

### SECCIÓN 43.11 Daño por radiación

- 39.** Suponga que un técnico de rayos X toma un promedio de ocho placas de rayos X por cada día y por esta causa recibe una dosis de 5.0 rem/año. (a) Estime la dosis en rem por radiografía tomada. (b) Explique cómo la exposición del técnico se compara con la radiación de fondo local de bajo nivel de 0.13 rem/año.
- 40. Problema de repaso.** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un técnico "inteligente" toma 20 minutos de pausa para el café y hierve un poco de agua para el café con una máquina de rayos X. La máquina produce 10.0 rad/s y la temperatura del agua en una taza aislada es inicialmente 50.0 °C.
- 41.** Todavía se puede hallar estroncio 90 de las pruebas de bombas nucleares en la atmósfera. Cada desintegración de  ${}^{90}\text{Sr}$  libera 1.1 MeV de energía en los huesos de una persona que había tenido sustitución de estroncio por calcio en los huesos. Suponga que una persona de 70.0 kg recibe 1.00 ng de  ${}^{90}\text{Sr}$  por leche contaminada. Calcule la rapidez absorbida de dosis (en J/kg) en un año. Tome la vida media del  ${}^{90}\text{Sr}$  como 29.1 años.

### SECCIÓN 43.12 Usos de la radiación

- 42.** El análisis de activación de neutrones es un método para analizar químicamente el nivel de isótopos. Cuando una muestra es radiada por neutrones, se producen átomos radiactivos en forma continua y luego decaen según sus vidas medias características. (a) Suponga que una especie de núcleos radiactivos se produce a una tasa constante  $R$  y que su decaimiento está descrito por la ley de desintegración radiactiva convencional. Si la radiación se inicia en el tiempo  $t = 0$ , demuestre que el número de átomos radiactivos acumulados en el tiempo  $t$  es

$$N = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

- (b) ¿Cuál es el número máximo de átomos radiactivos que es posible producir?
- 43.** Usted desea saber cuántos átomos del isótopo  ${}^{65}\text{Cu}$  hay en una pequeña muestra de material. Bombardé la muestra con neutrones para asegurarse de que 1% de estos núcleos de cobre absorbe un neutrón. Después de una activación interrumpe el flujo de neutrones y luego usa un detector altamente eficiente para monitorear la radiación de los rayos gamma que salen de la muestra. Suponga que la mitad de los núcleos de  ${}^{66}\text{Cu}$  emiten un rayo gamma de 1.04 MeV al decaer. (La otra mitad de los núcleos activados decae directamente al estado fundamental de  ${}^{66}\text{Ni}$ .) Si después de 10 minutos (dos vidas medias) usted ha detectado  $1.00 \times 10^4$  MeV de energía de fotones a 1.04 MeV, (a) ¿cuántos átomos de  ${}^{65}\text{Cu}$  hay en la muestra? (b) Suponga que la muestra contiene cobre natural. Consulte las abundancias isotópicas que aparecen en lista de la tabla 43.2 y estime la masa total del cobre en la muestra.

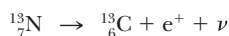
### SECCIÓN 43.13 Resonancia magnética nuclear y formación de imágenes por resonancia magnética

- 44.** Construya un diagrama como el de la figura 43.28 para los casos en los cuales  $I$  es igual a (a)  $\frac{5}{2}$  y (b) 4.

### PROBLEMAS ADICIONALES

- 45.** (a) ¿Por qué está prohibido el decaimiento beta  $p \rightarrow n + e^+ + \nu$  para un protón libre? (b) **¿Qué pasaría**

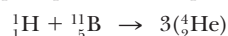
si? ¿Por qué es posible esta misma reacción si el protón está unido a un núcleo? Por ejemplo, se presenta la siguiente reacción:



(c) ¿Cuánta energía es liberada en la reacción presentada en (b)?

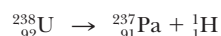
46. **¿Por qué no es posible la siguiente situación?** Un núcleo  ${}^{10}\text{B}$  es golpeado por una partícula alfa entrante. Como resultado, un protón y un núcleo  ${}^{12}\text{C}$  abandonan el sitio después de la reacción.

47. **CIC** Una reacción de fusión que ha sido considerada como una fuente de energía es la absorción de un protón por un núcleo de boro-11 para producir tres partículas alfa:



Esta reacción es una posibilidad atractiva, porque el boro se obtiene fácilmente a partir de la corteza de la Tierra. Una desventaja es que los protones y los núcleos de boro deben tener grandes energías cinéticas para que la reacción tenga lugar. Este requisito contrasta con el inicio de la fisión del uranio con neutrones lentos. (a) ¿Cuánta energía se libera en cada reacción? (b) ¿Por qué las partículas reactivas deben tener altas energías cinéticas?

48. Demuestre que el isótopo  ${}^{238}\text{U}$  no puede emitir espontáneamente un protón mediante el análisis del proceso hipotético



Nota: El isótopo  ${}^{237}\text{Pa}$  tiene una masa de 237.051 144 u.

49. Cuando un núcleo queda en un estado excitado después de cualquier tipo de reacción o perturbación, éste puede volver a su estado normal (fundamental) emitiendo un fotón de rayo gamma (o varios fotones). Este proceso se describe en la ecuación 43.26. El núcleo emisor debe retroceder para conservar su energía y su cantidad de movimiento. (a) Demuestre que la energía de retroceso del núcleo es de

$$E_r = \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$$

en donde  $\Delta E$  es la diferencia en energía entre los estados de excitación y fundamental de un núcleo con masa  $M$ . (b) Calcule la energía de retroceso del núcleo  ${}^{57}\text{Fe}$  cuando decae por emisión gamma a partir del estado de excitación 14.4 keV. Para este cálculo, suponga que la masa es de 57 u. (*Sugerencia:* suponga que  $hf \ll Mc^2$ .)

50. **CIC** En un pedazo de roca proveniente de la Luna, se mide por análisis que el contenido de  ${}^{87}\text{Rb}$  es de  $1.82 \times 10^{10}$  átomos por gramo del material, y el contenido de  ${}^{87}\text{Sr}$  se mide como de  $1.07 \times 10^9$  átomos por gramo. El decaimiento relevante es  ${}^{87}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}\text{Sr} + e^- + \bar{\nu}$ . La vida media del decaimiento es de  $4.75 \times 10^{10}$  años. (a) Calcule la antigüedad de la roca. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿Podría ser el material de la roca en realidad mucho más antiguo? ¿Qué suposición queda implícita al usar el método de datación radiactiva?

51. Cuando un núcleo decae, puede dejar al núcleo hija en un estado excitado. El estado fundamental del núcleo de  ${}^{93}\text{Tc}$  (masa molar de 92.910 2 g/mol) decae por captura de electrones y emisión de  $e^+$  a los niveles de energía del núcleo hija (masa molar de 92.906 8 g/mol en estado fundamental) a 2.44 MeV, 2.03 MeV, 1.48 MeV y 1.35 MeV. (a) Identifique el núcleo hija (b) ¿Para cuál de los niveles mencionados del núcleo hija los electrones son capturados y  $e^+$  decae a  ${}^{93}\text{Tc}$  permitido?

52. **¿Por qué no es posible la siguiente situación?** En un esfuerzo por estudiar positronium, un científico coloca  ${}^{57}\text{Co}$  y  ${}^{14}\text{C}$  en

proximidad. El núcleo  ${}^{57}\text{Co}$  decae por emisión de  $e^+$ , y el núcleo de  ${}^{14}\text{C}$  decae por emisión de  $e^-$ . Algunos de los positrones y electrones de estos decaimientos se combinan para formar una cantidad suficiente de positronium para que el científico pueda recopilar datos.

53. **S** Además de descubrir el neutrón en 1932, James Chadwick determinó la masa de la partícula recién descubierta disparando un haz de neutrones rápidos, todos con una misma velocidad, hacia dos objetivos diferentes y midiendo las magnitudes de velocidad de retroceso máximas de los núcleos objetivo. La velocidad máxima se produce cuando se presenta una colisión elástica de frente entre un neutrón y un núcleo inmóvil del objetivo. (a) Represente las masas y las magnitudes de velocidad finales de los dos núcleos objetivo como  $m_1$ ,  $v_1$ ,  $m_2$  y  $v_2$ , y suponga que es aplicable la mecánica newtoniana. Demuestre que la masa del neutrón puede calcularse con la ecuación

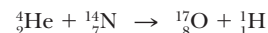
$$m_n = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{v_2 - v_1}$$

(b) Chadwick dirigió un haz de neutrones (producidos mediante una reacción nuclear) en parafina, la cual contiene hidrógeno. La velocidad máxima de los protones expulsados demostró ser de  $3.3 \times 10^7$  m/s. Ya que la velocidad de los neutrones no podía determinarse directamente, se llevó a cabo un segundo experimento usando neutrones de la misma fuente y núcleos de nitrógeno como objetivo. La velocidad máxima de retroceso de los núcleos de nitrógeno es de  $4.7 \times 10^6$  m/s. Las masas de un protón y de un núcleo de nitrógeno se consideraron de 1.00 u y 14.0 u, respectivamente. ¿Cuál fue el valor que utilizó Chadwick para la masa del neutrón?

54. **S** Cuando la reacción nuclear representada en la ecuación 43.29 es endotérmica, la energía de la reacción  $Q$  es negativa. Para que la reacción pueda continuar, la partícula que está por entrar debe tener una energía mínima, conocida como energía de umbral,  $E_u$ . Cierta fracción de la energía de la partícula incidente se transfiere al núcleo compuesto para conservar el momentum. Por tanto,  $E_u$  debe ser mayor que  $Q$ . (a) Demuestre que

$$E_{th} = -Q \left( 1 + \frac{M_a}{M_x} \right)$$

(b) Calcule la energía de umbral de la partícula alfa incidente en la reacción



55. **BIO** En un experimento del transporte de nutrientes en la estructura de la raíz de una planta, se utilizan dos núclidos radiactivos X e Y. Inicialmente, 2.50 veces más núcleos de tipo X que están presentes que del tipo Y. En un momento 3.00 d más tarde, hay 4.20 veces más núcleos de tipo X que los del tipo Y. El isótopo Y tiene una vida media de 1.60 d. ¿Cuál es la vida media de los isótopos X?

56. **BIO S** En un experimento del transporte de nutrientes en la estructura de la raíz de una planta, se utilizan dos núclidos radiactivos X e Y. Inicialmente, la razón de núcleos de tipo X que están presentes a los del tipo Y es  $r_1$ . Después de un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la razón del número de núcleos de tipo X presentes a los del tipo Y es  $r_2$ . El isótopo Y tiene una vida media de  $T_Y$ . ¿Cuál es la vida media de los isótopos X?

57. **CIC** (a) Un estudiante desea medir la vida media de una sustancia radiactiva usando una pequeña muestra. Clics consecutivos de su contador de radiación están separados aleato-

riamente en el tiempo. El contador registra 372 cuentas en un intervalo de 5.00-min y 337 conteos durante los próximos 5.00 min. La tasa media histórica es de 15 cuentas por minuto. Encontrar el valor más probable de la vida media. (b) Expresar la incertidumbre en la determinación de la vida media con una estimación adecuada.

58. **Problema de repaso.** Considere un núcleo en reposo, que espontáneamente se divide en dos fragmentos de masas  $m_1$  y  $m_2$ . (a) Demuestre que la fracción de la energía cinética total que lleva el fragmento  $m_1$  es

$$\frac{K_1}{K_{\text{tot}}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

y la energía llevada por la masa  $m_2$  es  $\frac{K_2}{K_{\text{tot}}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

suponiendo que se puedan pasar por alto correcciones relativistas. Un núcleo estacionario de  ${}^{236}_{92}\text{U}$  se fisiona espontáneamente en dos fragmentos primarios,  ${}^{87}_{35}\text{Br}$  y  ${}^{149}_{57}\text{La}$ . (b) Calcule la energía de desintegración. Las masas atómicas necesarias son 86.920 711 u para  ${}^{87}_{35}\text{Br}$ , 148.934 370 u para  ${}^{149}_{57}\text{La}$ , y 236.045 562 u para  ${}^{236}_{92}\text{U}$ . (c) ¿Cómo se divide la energía de desintegración entre los dos fragmentos primarios? (d) Calcule la velocidad de cada fragmento inmediatamente después de la fisión.

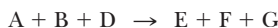
59. **Problema de repaso.** Una planta de energía nuclear opera usando energía liberada por fisión nuclear para convertir agua a  $20^\circ\text{C}$  en vapor a  $400^\circ\text{C}$ . ¿Teóricamente, cuánta agua podría ser convertida en vapor por la fisión completa de 1.00 g de  ${}^{235}\text{U}$  a 200 MeV/fisión?

60. **Problema de repaso.** Una planta nuclear generadora de energía eléctrica opera utilizando la energía liberada por fisión nuclear para convertir agua a  $T_c$  en vapor a  $T_h$ . ¿Teóricamente, cuánta agua podría ser convertida en vapor por la fisión completa de una masa  $m$  de  ${}^{235}\text{U}$  si la energía liberada por evento de fisión es  $E$ ?

61. Considere las dos reacciones nucleares



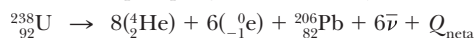
(a) Demuestre que la energía neta de desintegración para estas reacciones ( $Q_{\text{neto}} = Q_1 + Q_2$ ) es idéntica a la energía de desintegración para la reacción neta



(b) Una cadena de reacciones del ciclo protón-protón en el núcleo del Sol se describió en la sección 43.10.

De acuerdo con el inciso (a), ¿Cuál es  $Q_{\text{neto}}$  para esta secuencia?

62. **CIC** Debe procesarse uranio para producir uranio enriquecido  ${}^{235}\text{U}$  para bombas y plantas de energía. El proceso rinde una enorme cantidad de  ${}^{238}\text{U}$  casi puro como subproducto, llamado "uranio empobrecido". Debido a su alta densidad de masa, se emplea en obuses de artillería capaces de atravesar blindajes. (a) Encuentre la dimensión de un lado de un cubo de 70.0 kg de  ${}^{238}\text{U}$  ( $\rho = 19.1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ). (b) El isótopo  ${}^{238}\text{U}$  tiene una larga vida media de  $4.47 \times 10^9$  años. Tan pronto como un núcleo se desintegra, inicia una serie relativamente rápida de 14 etapas que, juntas, constituyen la reacción neta



Encuentre la energía de desintegración. (Consulte la tabla 43.2.) (c) Compruebe que una muestra radiactiva con tasa  $R$  de desintegración y energía  $Q$  de desintegración tiene una potencia de salida  $P = QR$ . (d) Considere un obús de artillería con

un forro de 70.0 kg de  ${}^{238}\text{U}$ . Encuentre su potencia de salida debida a la radiactividad del uranio y sus hijas. Suponga que el obús es tan viejo, que las hijas han alcanzado ya cantidades de estado estable. Expresar la potencia en joules por año. (e) **¿Qué pasaría si?** Un soldado de 17 años, de 70.0 kg de masa, trabaja en un arsenal donde se almacenan muchos de estos obuses. Suponga que su exposición a la radiación se limita a 5.00 rem por año. Encuentre la rapidez a la que puede absorber energía de radiación, en joules por año. Suponga un factor promedio de efectividad biológica relativa (RBE) de 1.10.

63. **CIC** Considere una muestra de 1.00 kg de uranio natural compuesto principalmente de  ${}^{238}\text{U}$ , una cantidad más pequeña (0.720% por masa) de  ${}^{235}\text{U}$  y una traza (0.005%) de  ${}^{234}\text{U}$ , que tiene una vida media de  $2.44 \times 10^5$  años. (a) Encuentre la actividad en curies debida a cada uno de los isótopos. (b) ¿Qué fracción de la actividad total se debe a cada isótopo? (c) Explique si la actividad de esta muestra es peligrosa.

64. Cuando pasan fotones por la materia, la intensidad  $I$  del rayo (medida en watts por metro cuadrado) decrece exponencialmente según la ecuación

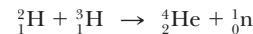
$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

donde  $I_0$  es la intensidad del rayo incidente e  $I$  es la intensidad del rayo que acaba de pasar por un espesor  $x$  de material. La constante  $\mu$  se conoce como el coeficiente de absorción lineal, y su valor depende del material absorbente y la longitud de onda del rayo de fotón. Esta dependencia en la longitud de onda (o energía) permite filtrar longitudes de onda no deseadas de un haz de rayo X de espectro ancho. (a) Dos haces de rayo X de longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  e iguales intensidades incidentes pasan por la misma placa metálica. Demuestre que la razón entre las intensidades del haz emergente es

$$\frac{I_2}{I_1} = e^{-(\mu_2 - \mu_1)x}$$

(b) Calcule la razón entre intensidades que emergen de una placa de aluminio de 1.00 mm de espesor si el rayo incidente contiene iguales intensidades de 50 pm y 100 pm de rayos X. Los valores de  $\mu$  para el aluminio a estas dos longitudes de onda son  $\mu_1 = 5.4 \text{ cm}^{-1}$  a 50 pm y  $\mu_2 = 41.0 \text{ cm}^{-1}$  a 100 pm. (c) Repita el inciso (b) para el uso de una placa de aluminio de 10.0 mm de espesor.

65. **CIC** (a) Calcule la energía (en kilowatt-horas) liberada si 1.00 kg de  ${}^{239}\text{Pu}$  experimenta fisión completa y la energía liberada por evento de fisión es 200 MeV. (b) Calcule la energía (en electrón volts) liberada en la siguiente reacción de fusión de deuterio-tritio



(c) Calcule la energía (en kilowatt-horas) liberada si 1.00 kg de deuterio experimenta fusión de acuerdo con esta reacción. (d) **¿Qué pasaría si?** Calcule la energía (en kilowatt-horas) liberada por la combustión de 1.00 kg de carbón si cada reacción de  $\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$  da 4.20 eV. (e) Haga una lista de las ventajas y desventajas de cada uno de estos métodos de generación de energía.

### PROBLEMA DE DESAFÍO

66. **Problema de repaso.** Considere un modelo del núcleo en el cual la carga positiva ( $Z_e$ ) está uniformemente distribuida por toda una esfera de radio  $R$ . Al integrar la densidad de energía  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$  en todo el espacio, demuestre que la energía potencial eléctrica puede escribirse como

$$U = \frac{3Z^2 e^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \frac{3k_e Z^2 e^2}{5R}$$

# Física de las partículas y cosmología

**IMAGINE** Su abuelo ha terminado sus exámenes médicos y parece que todo está bien. Su tomografía PET era clara, no se parecía en nada a la fotografía de apertura del capítulo. En su teléfono inteligente, aprendió sobre tomografías mientras lo estaba esperando. Acababa de empezar a leer sobre escaneos PET cuando era hora de ir a casa. Mientras lo lleva a casa, su abuelo le dice: "¿Sabías que introdujeron antimateria en mi cuerpo para la tomografía por emisión de positrones?". Dices: "¿Qué? ¿No la antimateria y la materia se aniquilan violentamente cuando se combinan? Abuelo, ¿por qué no explotaste?". Su abuelo le asegura que no va a explotar; simplemente introdujeron un material que creó una cantidad relativamente pequeña de positrones. Esto lo hace pensar. ¿Qué son los positrones? ¿Y qué es exactamente antimateria? A medida que piensa en este capítulo final, espera que estas preguntas sean respondidas. Y, como este es el último capítulo del libro, espera terminarlo comprendiendo *todo* lo que hay que saber sobre física. ¿Qué piensa? ¿Es eso posible?

**CONEXIONES** En los capítulos 41 y 42, *subimos* en escala: de átomos a moléculas y sólidos. Luego *descendimos* en escala al núcleo en el capítulo 43. En este capítulo, iremos más allá en esta dirección descendente: a las partículas más fundamentales a partir de las cuales se construye la materia. Después de 1932, los físicos consideraron que toda la materia consistía en tres partículas constituyentes: electrones, protones y neutrones. A partir de la década de 1940, se descubrieron muchas partículas "nuevas" en experimentos que involucraban colisiones de alta energía entre partículas conocidas. Las nuevas partículas son característicamente muy inestables y tienen vidas medias muy cortas, que varían entre  $10^{-6}$  s y  $10^{-23}$  s. Hasta ahora,

Una exploración PET de una paciente con metástasis generalizada de cáncer. Las células cancerosas han dañado las mitocondrias, lo que resulta en la absorción de cantidades muy altas de glucosa para la producción de energía. Si la glucosa es radioactiva, estos sitios de aumento de la captación de glucosa aparecen en la exploración PET como regiones amarillas, como se ve en la fotografía. (*Living Art Enterprises/Science Source*)

- 44.1 Fuerzas fundamentales en la naturaleza
- 44.2 Positrones y otras antipartículas
- 44.3 Mesones y el inicio de la física de las partículas
- 44.4 Clasificación de las partículas
- 44.5 Leyes de conservación
- 44.6 Partículas extrañas y extrañeza
- 44.7 Descubrimiento de patrones en las partículas
- 44.8 Quarks
- 44.9 Quarks multicolor
- 44.10 El modelo estándar
- 44.11 La conexión cósmica
- 44.12 Problemas y perspectivas





más de 300 de estas partículas han sido catalogadas. Hasta la década de 1960, los físicos estaban desconcertados por la gran cantidad y variedad de partículas subatómicas que se descubrían. La tabla periódica explica cómo se pueden formar más de 100 elementos a partir de tres tipos de partículas (electrones, protones y neutrones). En paralelo con la tabla periódica, ¿hay un medio para formar más de 300 partículas subatómicas a partir de una pequeña cantidad de bloques de construcción básicos? En este capítulo final, examinamos la teoría actual de las partículas elementales, en la que toda la materia se construye a partir de solo dos familias de partículas, *quarks* y leptones. A continuación, volvemos a invertir la dirección y damos un gran salto hacia arriba en escala discutiendo cómo las aclaraciones de los modelos con respecto a las partículas elementales podrían ayudar a los científicos a comprender el nacimiento y la evolución del Universo.

## 44.1 Fuerzas fundamentales en la naturaleza

En este capítulo, discutiremos muchos tipos de partículas que son nuevas para nosotros. Comencemos haciendo un puente con algo familiar: fuerzas. Como se señaló en la sección 5.1, todos los fenómenos naturales pueden describirse por cuatro fuerzas fundamentales que actúan entre partículas. En orden de fuerza decreciente, son la fuerza nuclear, la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza gravitacional.

La fuerza nuclear, explicada en el (capítulo 43), es una fuerza de atracción entre nucleones. Tiene un alcance muy corto y es despreciable para distancias de separación entre nucleones mayores que  $10^{-15}$  m (aproximadamente del tamaño del núcleo). La fuerza electromagnética (capítulos 22 y 28), que une átomos y moléculas para formar materia ordinaria, tiene una intensidad de casi  $10^{-2}$  veces la fuerza nuclear. Esta fuerza de largo alcance disminuye en magnitud con el cuadrado inverso de la separación entre partículas que interactúan. La fuerza gravitacional (capítulo 13) es una fuerza de largo alcance que tiene una fuerza de solo  $10^{-39}$  veces la de la fuerza nuclear. A pesar de que esta interacción bien conocida es la que mantiene juntos a planetas, estrellas y galaxias, su efecto sobre las partículas elementales es despreciable.

La única fuerza en nuestra lista que no hemos estudiado todavía es la fuerza débil. La fuerza débil es una fuerza de corto alcance que tiende a producir inestabilidad en ciertos núcleos. Es la responsable de los procesos de desintegración, y su intensidad es sólo alrededor de  $10^{-5}$  veces la fuerza nuclear.

En la sección 13.3 se analizó la dificultad que los primeros científicos encontraron ante la idea de que la fuerza gravitacional actuaba a distancia y sin contacto físico entre los objetos interactuantes. Para resolver esta dificultad, se introdujo el concepto del campo gravitacional. De manera similar, en el capítulo 22 se analizó el campo eléctrico para describir la fuerza eléctrica que actúa entre objetos cargados, seguido por un análisis sobre el campo magnético en el capítulo 28. Para cada uno de estos tipos de campos, desarrollamos un modelo de análisis para describir una partícula en un campo. En la física moderna la naturaleza de la interacción entre partículas es llevada un paso más adelante. Estas interacciones se describen en función del intercambio de entidades llamadas **partículas del campo** o **partículas de intercambio**. Las partículas del campo son conocidas también como **bosones gauge**.<sup>1</sup> Las partículas en continua interacción emiten y absorben partículas de campo. La emisión de una partícula de campo por una partícula y su absorción por otra se manifiesta como una fuerza entre dos partículas que interactúan. En el lenguaje de la física moderna se dice que la fuerza electromagnética está *mediada* por fotones, y los fotones son las partículas de campo correspondientes al campo electromagnético. De manera similar, la fuerza nuclear es mediada por partículas del campo llamadas *gluones*. La fuerza débil es mediada por partículas del campo llamadas *bosones W y Z*, y se ha propuesto que la

<sup>1</sup> La palabra *bosones* sugiere que las partículas del campo tienen un espín entero. La palabra *gauge* tiene su origen en la *teoría gauge*, que es un complicado análisis matemático que está más allá de los alcances de este libro.





TABLA 44.1 Interacciones de las partículas

Interacción	Intensidad relativa	Alcance de fuerza	Partícula del campo conciliador	Masa de la partícula del campo (GeV/c <sup>2</sup> )
Nuclear	1	Corto ( $\approx 1$ fm)	Gluón	0
Electromagnética	$10^{-2}$	$\infty$	Fotón	0
Débiles	$10^{-5}$	Corto ( $\approx 10^{-3}$ fm)	$W^{\pm}, Z^0$ bosones	80.4, 80.4, 91.2
Gravitacional	$10^{-39}$	$\infty$	Gravitón	0

fuerza gravitacional está mediada por partículas del campo llamadas *gravitones*. En la tabla 44.1 se resumen estas interacciones, sus alcances y sus intensidades relativas.

El gravitón aún no se ha observado. Discutiremos más sobre los gluones en secciones posteriores de este capítulo. En 1983, los bosones  $W^{\pm}$  y  $Z^0$  fueron descubiertos por el físico italiano Carlo Rubbia (n. 1934) y sus asociados, utilizando un colisionador protón-antiprotón. Rubbia y Simon van der Meer (1925-2011), ambos en el CERN,<sup>2</sup> compartieron el Premio Nobel de Física de 1984 por el descubrimiento de las partículas  $W^{\pm}$  y  $Z^0$  y el desarrollo del colisionador protón-antiprotón.

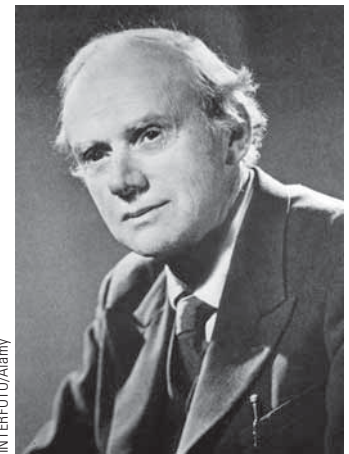
## 44.2 Positrones y otras antipartículas

Como se mencionó en la sección 41.6, en la década de los veinte Paul Dirac desarrolló una descripción mecánica cuántica relativista del electrón que explicaba el origen de su espín y de su momento magnético. De cualquier modo, su teoría presentaba sólo un problema de importancia: su ecuación de onda relativista requería soluciones que correspondían a estados de energía negativa, los cuales, de existir, podrían lograr que un electrón en un estado de energía positiva hiciera una transición rápida a uno de estos estados, emitiendo un fotón en el proceso.

Dirac evitó esta dificultad al imaginar una estructura de energía similar a nuestra discusión de la teoría de bandas en la sección 42.5, postulando que todos los estados de energía negativa están llenos. Los electrones que ocupan estos estados de energía negativa son llamados colectivamente el *mar de Dirac*. Los electrones en el mar de Dirac (el área azul en la figura 44.1) no son observables de manera directa porque el principio de exclusión de Pauli no les permite reaccionar a fuerzas externas; es decir, no existen estados disponibles hacia los cuales el electrón pueda hacer una transición en respuesta a una fuerza externa. Por tanto, un electrón en ese estado actúa como un sistema aislado, a menos que una interacción con el ambiente sea lo suficientemente intensa para excitar al electrón hacia un estado de energía positiva. Una excitación así hace que uno de los estados de energía negativa quede vacío, como se ve en la figura 44.1, dejando un hueco en el mar de estados llenos. Este proceso se describe mediante el modelo de sistema no aislado: a medida que la energía ingresa al sistema por algún mecanismo de transferencia, la energía del sistema aumenta y el electrón se excita a un nivel de energía más alto. *El hueco puede reaccionar ante fuerzas externas y es observable*. El hueco reacciona en una forma similar a la del electrón, excepto que tiene una carga positiva, la cual se conoce como la *antipartícula* del electrón.

Esta teoría sugiere que *existe una antipartícula por cada partícula*, no sólo para fermiones como electrones, sino también para bosones. Esto se ha comprobado sucesivamente para *todas* las partículas conocidas hoy en día. Entre las excepciones están el fotón y el pión neutro ( $\pi^0$ , véase la sección 44.3). Después de la construcción de aceleradores de alta energía en la década de 1950, se dieron a conocer muchas otras antipartículas. Entre ellas, el antiprotón, descubierta por Emilio Segré (1905-1989) y Owen Chamberlain (1920-2006) en 1955, y el antineutrón, descubierta poco después. La antipartícula para una partícula cargada tiene la misma masa que la par-

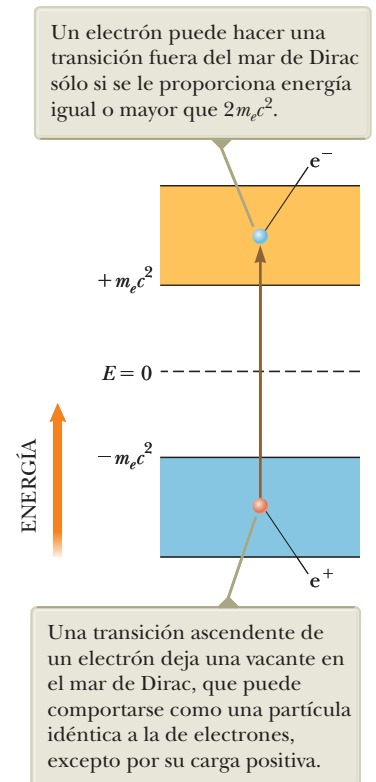
<sup>2</sup>El CERN fue originalmente el Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire; el nombre ha sido alterado a la Organización Europea para la Investigación Nuclear, y el laboratorio operado por el CERN se llama Laboratorio Europeo de Física de Partículas. El acrónimo CERN se ha conservado y se usa comúnmente para referirse tanto a la organización como al laboratorio.



INTERFOTO/Alamy

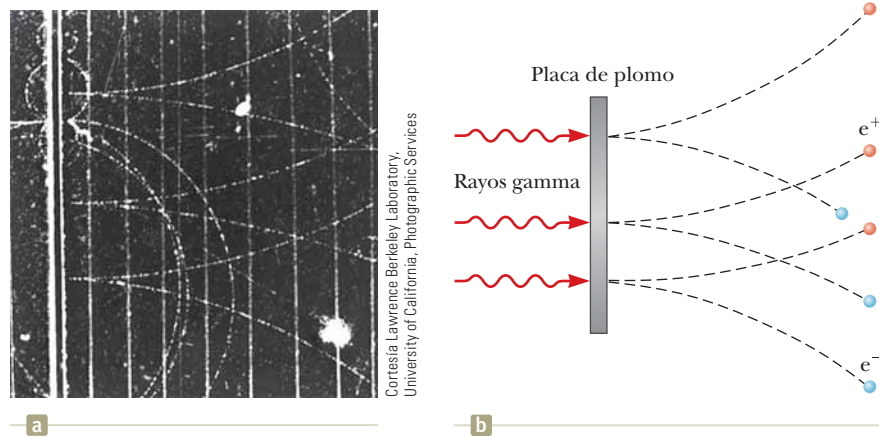
### Paul Adrien Maurice Dirac Físico británico (1902-1984)

Dirac fue vital para el discernimiento de la antimateria y la unificación de la mecánica cuántica y la relatividad. Realizó varias contribuciones para el desarrollo de la física cuántica y de la cosmología. Dirac ganó el premio Nobel de Física en 1933.



**Figura 44.1** Modelo de Dirac para la existencia de antielectrones (positrones). La energía mínima de un electrón para existir en la banda de oro es su energía en reposo  $m_e c^2$ . La banda azul de las energías negativas se llena de electrones.

**Figura 44.2** (a) Huellas del par electrón-positrón en una cámara de burbujas producidas por rayos gamma de 300 MeV al golpear una lámina de plomo. (b) Eventos pertinentes de la producción de pares. En un campo magnético aplicado, los positrones se desvían hacia arriba y los electrones hacia abajo.



tícula, pero con carga opuesta.<sup>3</sup> Por ejemplo, la antipartícula del electrón (el *positrón* mencionado en la sección 43.4) tiene una energía en reposo de 0.511 MeV y una carga positiva de  $+1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

En 1932 Carl Anderson (1905-1991) observó al positrón en forma experimental, y en 1936 ganó el premio Nobel por su trabajo. Anderson descubrió al positrón mientras examinaba los rastros creados en una cámara de niebla por partículas parecidas a los electrones de carga positiva. (Estos primeros experimentos utilizaron rayos cósmicos, la mayoría protones muy activos que cruzaban el espacio interestelar, para iniciar reacciones de alta energía en el orden de varios GeV.) Para discriminar entre cargas positivas y negativas, Anderson colocó la cámara de niebla en un campo magnético, haciendo que las cargas en movimiento siguieran trayectorias curvas. Observó que algunos de los rastros de las partículas parecidas al electrón se desviaban en una dirección correspondiente a una partícula positivamente cargada.

Desde el descubrimiento de Anderson se han observado positrones en gran número de experimentos. Una fuente común de positrones es la **producción en pares**. En este proceso, un fotón de rayos gamma con una energía lo suficientemente alta interactúa con un núcleo, y del fotón se crea una pareja electrón-positrón. (La presencia del núcleo permite satisfacer el principio de conservación de la cantidad de movimiento.) Como la energía total en reposo de la pareja electrón-positrón es igual a  $2m_e c^2 = 1.02 \text{ MeV}$  (donde  $m_e$  es la masa del electrón), el fotón debe poseer por lo menos esta energía para crear un par electrón-positrón. La energía de un fotón se convierte a energía en reposo del electrón y positrón de acuerdo con la relación de Einstein  $E_R = mc^2$ . Si el fotón de rayos gamma tiene energía en exceso además de la energía en reposo del par electrón-positrón, este excedente aparecerá en forma de energía cinética de las dos partículas. La figura 44.2 muestra las primeras observaciones de rastros del par electrón-positrón en una cámara de burbujas, creados por rayos gamma de 300 MeV al golpear una lámina de plomo.

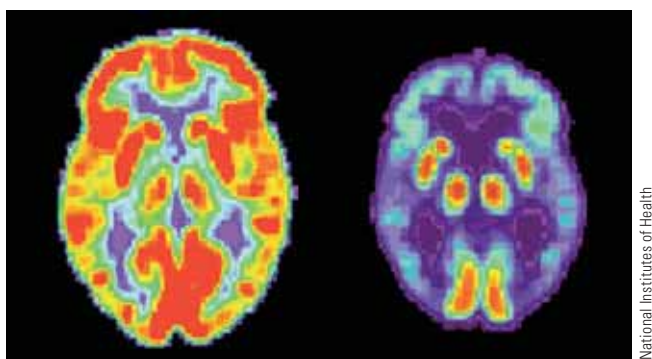
- EJERCICIO RÁPIDO 44.1** Dada la identificación de las partículas en la figura 44.2b, ¿cuál es la dirección del campo magnético externo en la figura 44.2a? (a) Hacia el interior de la página, (b) hacia el exterior de la página o (c) imposible de determinar.

También puede ocurrir el proceso inverso. Bajo condiciones apropiadas, un electrón y un positrón pueden aniquilarse entre sí para producir dos fotones de rayo gamma con una energía combinada de al menos 1.02 MeV:



<sup>3</sup>Las antipartículas de las partículas cargadas tienen una carga opuesta. Las antipartículas de partículas no cargadas, como el neutrón, son un poco más difíciles de describir. Un proceso básico que puede detectar la existencia de una antipartícula es la aniquilación de pares. Por ejemplo, un neutrón y un antineutrón pueden aniquilarse para formar dos rayos gamma. Porque el fotón y el pión neutro no tienen antipartículas propias, no es posible observar aniquilación de pares en ninguna de estas partículas.





**Figura 44.3** Rastreo PET del cerebro de una persona sana de la tercera edad (*izquierda*) y el de un paciente que padece el síndrome de Alzheimer (*derecha*). Las regiones más luminosas contienen concentraciones más elevadas de glucosa radiactiva, lo que indica un mayor metabolismo y, por tanto, una mayor actividad cerebral.

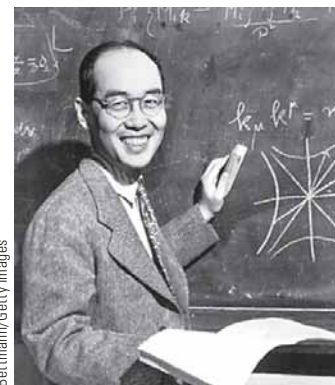
Debido a que la cantidad de movimiento inicial del sistema electrón-positrón es aproximadamente igual a cero, los dos rayos gamma viajan en direcciones opuestas después de la aniquilación, satisfaciendo el principio de conservación de la cantidad de movimiento para el sistema aislado.

La aniquilación electrón-positrón es utilizada en una técnica de diagnóstico médico llamada *tomografía por emisión de positrones* (PET, *positron-emission tomography*). Se le inyecta al paciente una solución de glucosa que contiene una sustancia radiactiva que decae por emisión de positrón, y el material es llevado por la sangre a todo el cuerpo. Un positrón emitido durante un evento de decaimiento en uno de los núcleos radiactivos en la solución de glucosa se aniquila con un electrón en el tejido que lo rodea, dando como resultado dos fotones de rayo gamma emitidos en direcciones opuestas. Un detector gamma que rodea al paciente determina con precisión la fuente de los fotones y, con ayuda de una computadora, despliega una imagen de los sitios donde se acumula la glucosa. (La glucosa es metabolizada rápidamente en los tumores cancerígenos y se acumula en esos sitios, lo que genera una señal clara para el sistema detector PET.) La imagen de un registro PET permite identificar gran diversidad de desórdenes en el cerebro, incluyendo el síndrome de Alzheimer (figura 44.3). Además, ya que la glucosa es asimilada más rápidamente en áreas activas del cerebro, un registro PET puede indicar las áreas del cerebro que están involucradas en las actividades que el paciente esté realizando durante el rastreo, como por ejemplo el uso del lenguaje, la música o la vista. Debido a que el número de positrones emitidos en el receptor de un PET es pequeño, no hay peligro para el cuerpo por la aniquilación resultante de la materia/antimateria.

### 44.3 Mesones y el principio de la física de partículas

Los físicos de mediados de los años treinta tenían una concepción simple de la estructura de la materia. Los bloques de construcción eran el protón, el electrón y el neutrón. En esas épocas otras tres partículas ya se conocían o estaban siendo postuladas: el fotón, el neutrino y el positrón. Juntas, estas seis partículas se consideraban los constituyentes fundamentales de la materia. De cualquier modo con esta propuesta tan simple nadie fue capaz de contestar la siguiente pregunta importante: en vista de que los protones en cualquier núcleo se repelen fuertemente entre sí ya que sus cargas son del mismo signo, ¿cuál es la naturaleza de la fuerza que mantiene al núcleo unido? Los científicos reconocieron que esta fuerza misteriosa debía ser mucho más fuerte que cualquier cosa encontrada en la naturaleza hasta ese momento. Esta fuerza es la fuerza nuclear, explicada en la sección 43.1 y examinada en los párrafos siguientes desde una perspectiva histórica.

La primera teoría que explicaba la naturaleza de la fuerza nuclear fue propuesta en 1935 por el científico japonés Hideki Yukawa, un esfuerzo que en 1949 le hizo acreedor al premio Nobel de Física. Para entender la teoría de Yukawa, recuerde la información sobre partículas de campo de la sección 44.1, que afirma que cada fuerza fundamental es conciliada por una partícula de campo intercambiada entre las partículas que interactúan. Yukawa utilizó esta idea para explicar la fuerza nuclear, y propuso la existencia de una nueva partícula cuyo intercambio entre nucleones en el núcleo origina



#### Hideki Yukawa

*Físico japonés (1907-1981)*

A Yukawa le fue otorgado el premio Nobel en 1949 por predecir la existencia de los mesones. Esta fotografía en el trabajo fue tomada en 1950 en su oficina en la Universidad de Columbia. Yukawa llegó a Columbia en 1949, después de pasar la primera parte de su carrera en Japón.

dicha fuerza. Estableció que el alcance de la fuerza es inversamente proporcional a la masa de la partícula y predijo que la masa sería alrededor de 200 veces la masa del electrón. (La partícula predicha por Yukawa *no* es el gluón que se mencionó en la sección 44.1, el cual no tiene masa y hoy día es considerado como la partícula de campo para la fuerza nuclear.) Ya que esta nueva partícula tendría una masa de magnitud entre la del electrón y la del protón, se le llamó **mesón** (del griego *meso*, “en medio”).

En un esfuerzo para fundamentar las predicciones de Yukawa, los físicos comenzaron búsquedas experimentales del mesón estudiando los rayos cósmicos que ingresan en la atmósfera terrestre. En 1937 Carl Anderson y sus colaboradores descubrieron una partícula con masa de  $106 \text{ MeV}/c^2$ , alrededor de 207 veces más grande que el electrón. Se pensó que ésta era el mesón de Yukawa. Sin embargo, experimentos posteriores demostraron que la partícula interactúa débilmente con la materia y, en consecuencia, no podía ser la partícula de campo para la fuerza nuclear. Esta situación enigmática hizo que varios teóricos propusieran dos mesones con una pequeña diferencia de masas igual a cerca de 200 veces la del electrón, una descubierta por Anderson y la otra, aún sin descubrirse, prevista por Yukawa. Esta idea se confirmó en 1947 con el descubrimiento del **pi mesón** ( $\pi$ ), o simplemente **pión**. La partícula descubierta por Anderson en 1937, que inicialmente se pensó era el mesón de Yukawa, no es en realidad un mesón. (Analizaremos las características de los mesones en la sección 44.4.) En vez de eso, sólo toma parte en interacciones débiles y electromagnéticas y actualmente se le llama **muón** ( $\mu$ ). Discutimos los muones con respecto a las pruebas de relatividad especial en la sección 38.4.

El pión tiene tres variantes, correspondientes a tres estados de carga:  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  y  $\pi^0$ . Las partículas  $\pi^+$  y  $\pi^-$  ( $\pi^-$  es la antipartícula de  $\pi^+$ ) tienen una masa cada una de  $139.6 \text{ MeV}/c^2$ , y la masa  $\pi^0$  es de  $135.0 \text{ MeV}/c^2$ . Existen dos muones:  $\mu^-$  y su antipartícula  $\mu^+$ .

Los piones y los muones son partículas muy inestables. Por ejemplo, la  $\pi^-$ , que tiene una vida media de  $2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ , decae a un muón y un antineutrino.<sup>4</sup> El muón tiene una vida media de  $2.2 \mu\text{s}$ , decayendo después a un electrón, un neutrino y un antineutrino:

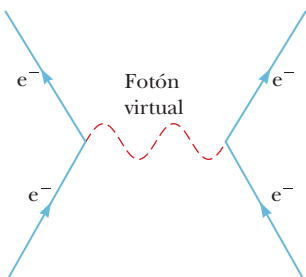


Para las partículas sin carga (así como algunas partículas cargadas, como el protón), una barra sobre el símbolo indica una antipartícula, como para el neutrino en decaimiento beta (véase la sección 43.5). Otras antipartículas, como la  $e^+$  y  $\mu^+$ , utilizan una notación diferente.

La interacción entre dos partículas puede representarse en un diagrama simple llamado **diagrama de Feynman**, desarrollado por el físico estadounidense Richard P. Feynman. La figura 44.4 presenta en este diagrama la interacción electromagnética entre dos electrones. Un diagrama de Feynman es una gráfica cualitativa de tiempo en el eje vertical en función del espacio en el eje horizontal. Es cualitativo no en el sentido de que los valores reales de tiempo y espacio no son importantes, sino en que la apariencia global de la gráfica muestra una representación gráfica del proceso.

En el caso simple de la interacción electrón-electrón en la figura 44.4, un fotón (la partícula de campo) concilia la fuerza electromagnética entre electrones. Observe que toda la interacción está representada en el diagrama como se presenta en un solo punto del tiempo. Debido a eso las trayectorias de los electrones aparecen para someterse a cambio discontinuo en dirección al momento de interacción. Las trayectorias del electrón que se muestran en la figura 44.4 son diferentes de las trayectorias *reales*, que serían curvas a causa del intercambio continuo de un gran número de partículas de campo.

En la interacción electrón-electrón, al fotón, que transfiere energía y cantidad de movimiento de un electrón al otro, se le llama *fotón virtual* porque desaparece durante la interacción sin haber sido detectado. En el capítulo 39 se observó que un fotón tiene una energía  $E = hf$ , donde  $f$  es su frecuencia. En consecuencia, para un



**Figura 44.4** Diagrama de Feynman que representa un fotón conciliando la fuerza electromagnética entre dos electrones.



Diana Walker/The LIFE Images Collection/Getty Images

### Richard Feynman

*Físico estadounidense (1918-1988)*

Inspirado por Dirac, Feynman desarrolló la electrodinámica cuántica, la teoría de la interacción de la luz y de la materia sobre una base relativista y cuántica. Feynman ganó el premio Nobel de Física en 1965. Compartió el premio con Julian Schwinger y Sin Itiro Tomonaga. Al principio de su carrera, fue miembro líder del equipo que desarrollaba la primera arma nuclear en el Proyecto Manhattan. Hacia el final de su carrera trabajó en la comisión que investigó la tragedia del *Challenger* en 1986 y demostró los efectos de las temperaturas frías sobre los anillos de hule utilizados como juntas en el transbordador espacial.

<sup>4</sup>El antineutrino es otra partícula de carga cero cuya antipartícula es más difícil de identificar que para una partícula cargada. A pesar de que los detalles quedan fuera de los alcances de este texto, el neutrino y el antineutrino pueden diferenciarse por medio de la correspondencia entre la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular del espín de las partículas.



sistema de dos electrones inicialmente en reposo, el sistema tiene una energía  $2m_e c^2$  antes de que un fotón virtual sea liberado y una energía  $2m_e c^2 + hf$  después de su liberación (más cualquier energía cinética del electrón como resultado de su emisión). ¿Esto viola la ley de la conservación de la energía para un sistema aislado? No; este proceso *no* viola la ley de la conservación de la energía, porque el fotón virtual tiene una vida  $\Delta t$  muy breve que lo hace que la incertidumbre en la energía  $\Delta E \approx \hbar/2\Delta t$  del sistema sea mayor que la energía del fotón. Por tanto, dentro de las restricciones del principio de incertidumbre, la energía del sistema se conserva.

Considere ahora un intercambio de pión entre un protón y un neutrón, como en el modelo de Yukawa (figura 44.5). La energía  $\Delta E_R$  necesaria para crear un pión de masa  $m_\pi$  está dada por la ecuación de Einstein  $\Delta E_R = m_\pi c^2$ . Como en el caso del fotón en la figura 44.4, la existencia del pión violaría la ley de la conservación de la energía si la partícula existiera por un intervalo de tiempo mayor que  $\Delta t \approx \hbar/2\Delta E_R$  (del principio de incertidumbre), donde  $\Delta t$  es el intervalo de tiempo requerido para que el pión se transfiera de un nucleón al otro. Por tanto,

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{2 \Delta E_R} = \frac{\hbar}{2 m_\pi c^2}$$

ya la energía de reposo del pión es

$$m_\pi c^2 = \frac{\hbar}{2 \Delta t} \quad (44.2)$$

Ya que el pión no puede viajar más rápido que la velocidad de la luz, la distancia máxima  $d$  que puede recorrer en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es  $c \Delta t$ , por tanto, usando la ecuación 44.2 y  $d = c \Delta t$  encontramos

$$m_\pi c^2 = \frac{\hbar c}{2d} \quad (44.3)$$

De la tabla 44.1, se sabe que el alcance de la fuerza nuclear es de aproximadamente  $1 \times 10^{-15}$  m. Utilizando este valor para  $d$  en la ecuación 44.3, se estima que la energía en reposo del pión debe ser igual a

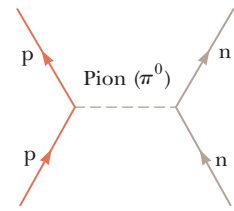
$$\begin{aligned} m_\pi c^2 &\approx \frac{(1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})}{2(1 \times 10^{-15} \text{ m})} \\ &= 1.6 \times 10^{-11} \text{ J} \approx 100 \text{ MeV} \end{aligned}$$

que corresponde a una masa de  $100 \text{ MeV}/c^2$  (aproximadamente 200 veces la masa del electrón). Este valor concuerda razonablemente con la masa observada del pión.

El concepto recién descrito es bastante revolucionario. En efecto, plantea que un sistema de dos nucleones puede cambiar a dos nucleones más un pión, siempre y cuando vuelva a su estado original en un intervalo de tiempo muy breve. (Recuerde que éste es el modelo histórico antiguo, que supone que el pión es la partícula de campo para la fuerza nuclear; en los modelos actuales el gluón es la verdadera partícula de campo.) Los físicos dicen a menudo que un nucleón se somete a *fluctuaciones* conforme emite y absorbe partículas de campo. Estas fluctuaciones son consecuencia de una combinación de la mecánica cuántica (por medio del principio de incertidumbre) con la relatividad especial (mediante la correspondencia energía-masa  $E_R = mc^2$  de Einstein).

## 44.4 Clasificación de las partículas

Ahora nos han presentado a pions y muons. Tenemos una lista creciente de partículas. Todas las partículas distintas de las partículas de campo pueden clasificarse en dos grandes categorías, los *hadrones* y los *leptones*. El criterio para separar estas partículas en dichas categorías es saber si interactúan o no mediante la fuerza intensa. La fuerza nuclear entre nucleones en un núcleo es una manifestación particular de la fuerza intensa, pero se seguirá utilizando el término *fuerza intensa* para hacer referencia a cualquier interacción entre partículas formadas por quarks. (Para mayor información sobre



**Figura 44.5** Diagrama de Feynman que representa un protón y un neutrón interactuando mediante la fuerza nuclear con un pión neutro que concilia esta fuerza. (Éste *no* es el modelo actual para la interacción entre nucleones.)

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 44.2

#### La fuerza nuclear y la fuerza intensa

**La fuerza nuclear** La fuerza nuclear analizada en el capítulo 43 se conoció primero como fuerza intensa. Sin embargo, una vez que se estableció la teoría del quark (sección 44.8), la frase *fuerza intensa* se reservó para la fuerza que se genera entre quarks. Aquí se sigue esta regla convencional: la fuerza intensa es la que existe entre quarks o partículas construidas por quarks y la fuerza nuclear la que se da entre nucleones en un núcleo. La fuerza nuclear es un resultado secundario de fuerza intensa, como verá en la sección 44.9. Algunas veces llamada *fuerza intensa residual*. Debido al desarrollo histórico de los nombres de estas fuerzas, en ocasiones otros libros se refieren a la fuerza nuclear como fuerza intensa.





**TABLA 44.2** Algunas partículas y sus propiedades

Categoría	Nombre de la partícula	Símbolo	Anti-partícula	Mass (MeV/c <sup>2</sup> )	B	L <sub>e</sub>	L <sub>μ</sub>	L <sub>τ</sub>	S	Tiempo de vida	Espín		
<b>Leptones</b>	Electrón	e <sup>-</sup>	e <sup>+</sup>	0.511	0	+1	0	0	0	Estable	1/2		
	Electrón-neutrino <sup>†</sup>	ν <sub>e</sub>	ν̄ <sub>e</sub>	< 2 eV/c <sup>2</sup>	0	+1	0	0	0	Estable	1/2		
	Muón	μ <sup>-</sup>	μ <sup>+</sup>	105.7	0	0	+1	0	0	2.20 × 10 <sup>-6</sup>	1/2		
	Muón-neutrino <sup>†</sup>	ν <sub>μ</sub>	ν̄ <sub>μ</sub>	< 2 eV/c <sup>2</sup>	0	0	+1	0	0	Estable	1/2		
	Tau	τ <sup>-</sup>	τ <sup>+</sup>	1 777	0	0	0	+1	0	2.9 × 10 <sup>-13</sup>	1/2		
	Tau-neutrino <sup>†</sup>	ν <sub>τ</sub>	ν̄ <sub>τ</sub>	< 2 eV/c <sup>2</sup>	0	0	0	+1	0	Estable	1/2		
<b>Hadrones</b>	<i>Mesones</i>	Pion	π <sup>+</sup>	π <sup>-</sup>	139.6	0	0	0	0	2.60 × 10 <sup>-8</sup>	0		
			π <sup>0</sup>	Self	135.0	0	0	0	0	0	8.52 × 10 <sup>-17</sup> s	0	
		Kaon	K <sup>+</sup>	K <sup>-</sup>	493.7	0	0	0	0	+1	1.24 × 10 <sup>-8</sup>	0	
			K <sub>S</sub> <sup>0</sup>	K̄ <sub>S</sub> <sup>0</sup>	497.7	0	0	0	0	+1	0.89 × 10 <sup>-10</sup>	0	
	K <sub>L</sub> <sup>0</sup>		K̄ <sub>L</sub> <sup>0</sup>	497.7	0	0	0	0	+1	5.1 × 10 <sup>-8</sup>	0		
	<i>Bariones</i>	Protón	p	p̄	938.3	+1	0	0	0	0	Estable	1/2	
		Neutrón	n	n̄	939.6	+1	0	0	0	0	881	1/2	
		Lambda	Λ <sup>0</sup>	Λ̄ <sup>0</sup>	1 115.7	+1	0	0	0	-1	2.6 × 10 <sup>-10</sup>	1/2	
			Sigma	Σ <sup>+</sup>	Σ̄ <sup>-</sup>	1 189.4	+1	0	0	0	-1	0.80 × 10 <sup>-10</sup>	1/2
				Σ <sup>0</sup>	Σ̄ <sup>0</sup>	1 192.6	+1	0	0	0	-1	7.4 × 10 <sup>-20</sup>	1/2
		Delta	Σ <sup>-</sup>	Σ̄ <sup>+</sup>	1 197.4	+1	0	0	0	-1	1.5 × 10 <sup>-10</sup>	1/2	
			Delta	Δ <sup>++</sup>	Δ̄ <sup>--</sup>	1 232	+1	0	0	0	0	6 × 10 <sup>-24</sup>	3/2
				Δ <sup>+</sup>	Δ̄ <sup>-</sup>	1 232	+1	0	0	0	0	6 × 10 <sup>-24</sup>	3/2
				Δ <sup>0</sup>	Δ̄ <sup>0</sup>	1 232	+1	0	0	0	0	6 × 10 <sup>-24</sup>	3/2
		Xi	Δ <sup>-</sup>	Δ̄ <sup>+</sup>	1 232	+1	0	0	0	0	6 × 10 <sup>-24</sup>	3/2	
			Ξ <sup>0</sup>	Ξ̄ <sup>0</sup>	1 315	+1	0	0	0	-2	2.9 × 10 <sup>-10</sup>	1/2	
Omega		Ξ <sup>-</sup>	Ξ̄ <sup>+</sup>	1 322	+1	0	0	0	-2	1.64 × 10 <sup>-10</sup>	1/2		
	Ω <sup>-</sup>	Ω <sup>+</sup>	1 672	+1	0	0	0	-3	0.82 × 10 <sup>-10</sup>	3/2			

<sup>†</sup>La masa de neutrinos es una cantidad elusiva y es un campo de investigación en curso. La determinación de su masa se complica por el hecho de que los neutrinos experimentan oscilaciones entre los tres tipos a medida que se mueven a través del espacio.

quarks y la fuerza intensa, consulte la sección 44.8.) La tabla 44.2 presenta un resumen de las propiedades de los hadrones y los leptones. Las cinco columnas a la derecha de la columna para la masa se explicarán en secciones posteriores de este capítulo.

### Hadrones

Las partículas que interactúan por medio de la fuerza intensa (como también por otras fuerzas fundamentales) se llaman **hadrones**. Las dos clases de hadrones, *mesones* y *bariones*, se distinguen por sus masas y espines.

Todos los **mesones** tienen un espín igual a cero o a un entero (0 o 1). Como se indicó en la sección 44.3, el nombre viene de lo que esperaba Yukawa cuando propuso que la masa del mesón quedaría entre las masas del electrón y del protón. Varias masas de los mesones no ocurren en este intervalo, a pesar de que se ha probado que existen mesones con masas más grandes que las del protón.

Se sabe que todos los mesones se desintegran finalmente en electrones, positrones, neutrinos y fotones. Los piones son los mesones conocidos más ligeros; tienen masas de alrededor de 1.4 × 10<sup>2</sup> MeV/c<sup>2</sup> y los tres piones (π<sup>+</sup>, π<sup>-</sup> y π<sup>0</sup>) tienen un espín igual a 0. (Esto indica que la partícula descubierta por Anderson en 1937, el muón, no es en realidad un mesón; el muón tiene un espín de 1/2, y pertenece a la clasificación de *leptón*, descrita más adelante.)

Los **bariones**, la segunda clase de hadrones, tienen masas iguales o mayores a la masa del protón (el nombre *barión* significa “pesado” en griego), y su espín es siempre un valor semientero (1/2, 3/2, ...). Los protones y neutrones son bariones, como muchas otras partículas. Con la excepción del protón, todos los bariones se desintegran de



forma tal que los productos finales incluyen un protón. Por ejemplo, el barión conocido como hiperión  $\Xi^0$  (mayúscula griega de xi) decae a barión  $\Lambda^0$  (mayúscula griega de lambda) en casi  $10^{-10}$  s. Un hiperión es un barión con al menos un quark extraño, que se analizará en la sección 44.8. La  $\Lambda^0$  después decae via dos trayectorias posibles en aproximadamente  $3 \times 10^{-10}$  s.

En la actualidad se cree que los hadrones no son partículas elementales, sino que están compuestos por unidades más elementales conocidas como quarks, como se explica en la sección 44.8.

## Leptones

Los **leptones** (del griego leptos, que significa “pequeño” o “ligero”) son partículas que no interactúan usando la fuerza intensa. Todos los leptones tienen espín  $\frac{1}{2}$ . A diferencia de los hadrones, que tienen tamaño y estructura, los leptones se observan enteramente elementales, lo que significa que no tienen estructura y son parecidos a un punto.

A diferencia del caso de los hadrones, el número de leptones conocidos es pequeño. En la actualidad los científicos creen que sólo existen seis leptones: el electrón, el muón, el tau y un neutrino asociado con cada uno:  $e^-$ ,  $\mu^-$ ,  $\tau^-$ ,  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ . El leptón tau, descubierto en 1975, tiene una masa alrededor del doble que la del protón. En julio de 2000 el Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab) anunció haber encontrado evidencia experimental directa del neutrino asociado con el tau. Cada uno de los seis leptones tiene una antipartícula.

Analizamos los neutrinos con respecto a la descomposición beta en la sección 43.5. Los estudios actuales indican que los neutrinos tienen una masa pequeña, pero diferente de cero. Si tienen masa, no pueden viajar a la velocidad de la luz. Además, ya que de este modo existen muchos neutrinos, su masa combinada tal vez es suficiente para hacer que toda la materia existente en el Universo finalmente se concentre en un solo punto, ¡lo que significa que podría explotar y crear un Universo totalmente nuevo! Verá con más detalle esta posibilidad en la sección 44.11.

## 44.5 Leyes de conservación

Las leyes de conservación de energía, de cantidad de movimiento lineal, de cantidad de movimiento angular y de la carga eléctrica para un sistema aislado proporcionan un conjunto de reglas para todos los procesos. En el capítulo 43 aprendió que las leyes de conservación son importantes para entender por qué ciertos decaimientos radiactivos y reacciones nucleares ocurren y otros no. En el estudio de las partículas elementales, es importante un número adicional de leyes de conservación. A pesar de que las dos leyes descritas aquí no tienen una base teórica, están respaldadas por una gran cantidad de evidencia empírica.

### Número bariónico

Los resultados experimentales muestran que cada vez que se produce un barión en una desintegración o reacción nuclear, también se produce un antibarión. Este esquema puede cuantificarse al asignar a cada partícula un número cuántico, el **número bariónico**, como sigue:  $B = +1$  para todos los bariones,  $B = -1$  para todos los antibariones y  $B = 0$  para todas las demás partículas. (Véase la tabla 44.2.) La **ley de conservación del número bariónico** afirma que

cuando se presenta una reacción nuclear o una desintegración, la suma de los números bariónicos antes del proceso debe ser igual a la suma de los números bariónicos después del proceso.

◀ Conservación del número bariónico

Si se conserva el número bariónico el protón debe ser estable de manera absoluta. Por ejemplo, una desintegración del protón a un positrón y un pión neutro satisface la ley de conservación de la energía, de cantidad de movimiento y de la carga eléctrica. Sin embargo, un decaimiento de esta índole nunca ha sido observado. La ley de conservación del número bariónico sería consistente con la ausencia de esta desintegración, porque el decaimiento propuesto involucraría la pérdida de un barión.

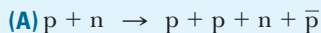


En el presente, todo lo que se puede decir es que los protones tienen una vida media de al menos  $10^{33}$  años (la edad estimada del Universo es de sólo  $10^{10}$  años), a partir de observaciones experimentales, como se detalla en el ejemplo 44.2. De cualquier modo algunas teorías recientes predicen que el protón es inestable. De acuerdo con esta teoría, el número bariónico no se conservaría de manera absoluta.

- EJEMPLO RÁPIDO 44.2** Considere el decaimiento siguiente: (i)  $n \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \mu^+ + \mu^-$  y (ii)  $n \rightarrow p + \pi^-$ . ¿Qué leyes de conservación se violan en este decaimiento? (a) De la energía, (b) de la carga eléctrica, (c) del número bariónico, (d) de la cantidad de movimiento angular o (e) ninguna.

### Ejemplo 44.1 Comprobación del número de bariones

Use la ley de conservación del número bariónico para determinar si cada una de las siguientes reacciones puede ocurrir:



#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La masa a la derecha es mayor que la masa a la izquierda. Por tanto, uno podría estar tentado a afirmar que la reacción viola la ley de la conservación de la energía. Sin embargo, la reacción puede ocurrir en efecto, si las partículas iniciales tienen suficiente energía cinética como para permitir el aumento en la energía de reposo del sistema.

**Categorizar** Se usa la ley de conservación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe el número total de bariones para el lado izquierdo de la reacción:  $1 + 1 = 2$

Evalúe el número total de bariones para el lado derecho de la reacción:  $1 + 1 + 1 + (-1) = 2$

Por tanto, el número de bariones se conserva y la reacción puede ocurrir.



#### SOLUCIÓN

Evalúe el número total de bariones para el lado izquierdo de la reacción:  $1 + 1 = 2$

Evalúe el número total de bariones para el lado derecho de la reacción:  $1 + 1 + (-1) = 1$

Ya que el número de bariones no se conserva, la reacción no puede ocurrir.

### Ejemplo 44.2 Detección de decaimiento de protón

Las mediciones tomadas en dos instalaciones de detección de neutrinos, el detector Michigan-Brookhaven (figura 44.6) y el Super Kamiokande en Japón, indican que la vida media de los protones es al menos  $10^{33}$  años.

(A) Estime cuánto tiempo tendría que observar, en promedio, para ver decaer un protón en un vaso con agua.

**Conceptualizar** Imagine el número de protones en un vaso con agua. Aunque este número es enorme, la probabilidad de que decaiga un solo protón es pequeña, así que debería esperar un largo intervalo de tiempo para observar un decaimiento.

**Categorizar** Puesto que en el problema se proporciona una vida media, este problema se categoriza como uno en el que se pueden aplicar las técnicas de análisis estadístico de la sección 43.4.

**Figura 44.6** (Ejemplo 44.2) Un buzo nadando a través del agua ultrapura en el detector de neutrinos Irvine-Michigan-Brookhaven. Este detector tiene casi 7 000 toneladas métricas de agua y se alinea con los más de 2 000 tubos fotomultiplicadores, muchos de los cuales son visibles en la fotografía.



JOE STANCAMPANO/National Geographic Creative

## 44.2 continuación

**Analizar** Estime que un vaso contiene un número  $n$  de moles de agua, con una masa  $m = 250$  g y una masa molar  $M = 18$  g/mol.

Encuentre el número de moléculas de agua en el vaso:  $N_{\text{moléculas}} = nN_A = \frac{m}{M} N_A$

Cada molécula de agua contiene un protón en cada uno de sus dos átomos de hidrógeno, más ocho protones en su átomo de oxígeno, para un total de diez protones. Por tanto,  $N = 10N_{\text{moléculas}}$  protones en el vaso con agua.

Encuentre la actividad de los protones a partir de la ecuación 43.7:

$$(1) \quad R = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \left( 10 \frac{m}{M} N_A \right) = \frac{\ln 2}{10^{33} \text{ año}} (10) \left( \frac{250 \text{ g}}{18 \text{ g/mol}} \right) (6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})$$

$$= 5.8 \times 10^{-8} \text{ año}^{-1}$$

**Finalizar** La constante de decaimiento representa la probabilidad de que *un* protón decaiga en un año. La probabilidad de que *cualquier* protón en el vaso con agua decaiga en el intervalo de un año está dada por la ecuación (1). En consecuencia, ¿debe observar el vaso con agua durante  $1/R \approx 17$  millones de años! De hecho, como se esperaba, este es un largo intervalo de tiempo.

**(B)** La instalación de neutrinos Super Kamiokande contiene 50 000 toneladas métricas de agua. Estime el intervalo de tiempo promedio entre los decaimientos de protones detectados en toda esta agua, si la vida media de un protón es  $10^{33}$  años.

## SOLUCIÓN

**Analizar** La tasa de decaimiento de protones  $R$  en una muestra de agua es proporcional al número  $N$  de protones. Establezca una razón entre la tasa de descomposición en las instalaciones de Súper Kamiokande a eso mismo en un vaso de agua:

$$\frac{R_{\text{Kamiokande}}}{R_{\text{vaso}}} = \frac{N_{\text{Kamiokande}}}{N_{\text{vaso}}} \rightarrow R_{\text{Kamiokande}} = \frac{N_{\text{Kamiokande}}}{N_{\text{vaso}}} R_{\text{vaso}}$$

El número de protones es proporcional a la masa de la muestra, así que puede expresarse la tasa de decaimiento en términos de la masa:

$$R_{\text{Kamiokande}} = \frac{m_{\text{Kamiokande}}}{m_{\text{vaso}}} R_{\text{vaso}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$R_{\text{Kamiokande}} = \left( \frac{50\,000 \text{ tons métricas}}{0.250 \text{ kg}} \right) \left( \frac{1\,000 \text{ kg}}{1 \text{ ton métrica}} \right) (5.8 \times 10^{-8} \text{ año}^{-1}) \approx 12 \text{ año}^{-1}$$

**Finalizar** El intervalo de tiempo promedio entre decaimientos es aproximadamente un doceavo de año, o aproximadamente un mes. Esto es mucho más corto que el intervalo de tiempo en la parte (A) debido a la tremenda cantidad de agua en la instalación detectora. A pesar de esta halagüeña predicción de un decaimiento de protón por mes, nunca se ha observado un decaimiento de protón. Esto sugiere que la vida media del protón debe ser mayor a  $10^{33}$  años o que el decaimiento de protón simplemente no ocurre.

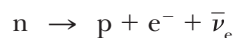
## Número leptónico

Hay tres leyes de la conservación que involucran números leptónicos, una para cada variedad de leptones. La **ley de la conservación del número leptónico electrónico** afirma que

cuando ocurre una reacción nuclear o un decaimiento, la suma de los números leptónicos electrónicos antes del proceso debe ser igual a la suma de los números leptónicos electrónicos después del proceso.

◀ Conservación del número leptónico

El electrón y el electrón neutrino están asignados a un número leptónico electrónico  $L_e = +1$  y los anti leptones  $e^+$  y  $\bar{\nu}_e$  están asignados a un número leptónico electrónico  $L_e = -1$ . Todas las demás partículas tienen  $L_e = 0$ . Por ejemplo, considere el decaimiento del neutrón:



Antes del decaimiento, el número leptónico electrónico es igual a  $L_e = 0$ ; después del decaimiento, es de  $0 + 1 + (-1) = 0$ . Por tanto, se conserva el número leptónico electrónico. (El número bariónico debe conservarse también, por supuesto, y, antes del decaimiento, es  $B = +1$ , y después del decaimiento  $B = +1 + 0 + 0 = +1$ .)



De manera similar, cuando un decaimiento involucra muones, se conserva el número leptónico del muón  $L_\mu$ . El  $\mu^-$  y el  $\nu_\mu$  son asignados al número leptónico del muón  $L_\mu = +1$  y los anti muones  $\mu^+$  y  $\bar{\nu}_\mu$  se asignan al número leptónico del muón  $L_\mu = -1$ . Todas las demás partículas al  $L_\mu = 0$ .

Finalmente, el número leptónico tau  $L_\tau$  se conserva con asignaciones similares hechas para el leptón tau, su neutrino y sus dos antipartículas.

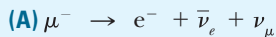
**E XAMEN RÁPIDO 44.3** Considere el siguiente decaimiento  $\pi^0 \rightarrow \mu^- + e^+ + \nu_\mu$

- ¿Qué leyes de la conservación se violan por este decaimiento? (a) De energía, (b) de cantidad de movimiento angular, (c) de carga eléctrica, (d) del número bariónico, (e) del número leptónico electrónico, (f) del número leptónico muón, (g) del número leptónico tau o (h) ninguna.

**E XAMEN RÁPIDO 44.4** Suponga que se afirma que el decaimiento de un neutrón está dado por  $n \rightarrow p + e^-$ . ¿Qué leyes de conservación se violan en este decaimiento? (a) De energía, (b) de cantidad de movimiento angular, (c) de carga eléctrica, (d) del número bariónico, (e) del número leptónico electrónico, (f) del número leptónico muón, (g) del número leptónico tau o (h) ninguna.

### Ejemplo 44.3 Comprobación del número de leptones

Use la ley de conservación del número de leptones para determinar si cada uno de los siguientes esquemas de decaimiento, (A) y (B), puede ocurrir:



#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Debido a que este decaimiento involucra un muón y un electrón,  $L_\mu$  y  $L_e$  se debe conservar cada uno por separado si el decaimiento puede ocurrir.

**Categorizar** Se usa una ley de conservación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe el número de leptones antes del decaimiento:

$$L_\mu = +1$$

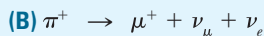
$$L_e = 0$$

Evalúe el número total de leptones después del decaimiento:

$$L_\mu = 0 + 0 + 1 = +1$$

$$L_e = +1 + (-1) + 0 = 0$$

Por tanto, ambos números se conservan y, sobre esta base, el decaimiento es posible.



#### SOLUCIÓN

Evalúe el número de leptones antes del decaimiento:

$$L_\mu = 0$$

$$L_e = 0$$

Evalúe el número total de leptones después del decaimiento:

$$L_\mu = -1 + 1 + 0 = 0$$

$$L_e = 0 + 0 + 1 = 1$$

Por tanto, el decaimiento no es posible porque el número de leptones electrón no se conserva.

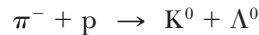
## 44.6 Partículas extrañas y extrañeza

Muchas de las partículas descubiertas en los años cincuenta fueron producidas por la interacción de piones con neutrones y protones en la atmósfera. Un grupo de éstas —las partículas kaón (K), lambda ( $\Lambda$ ) y sigma ( $\Sigma$ )— exhiben propiedades inusuales conforme se crean y decaen y, en consecuencia, se llaman *partículas extrañas*.





Una propiedad inusual de las partículas extrañas es que siempre se producen en pares. Por ejemplo, cuando un pión colisiona con un protón, un resultado altamente probable es que se produzcan dos partículas extrañas neutras:



Sin embargo, la reacción  $\pi^- + p \rightarrow K^0 + n$ , donde sólo una de las partículas finales es extraña, nunca ocurre, aun a pesar de que no se han violado leyes de conservación conocidas y a pesar de que la energía del pión es suficiente para iniciar la reacción.

La segunda propiedad importante de las partículas extrañas es que, a pesar de que se producen en reacciones que involucran fuertes interacciones a una rapidez elevada, no decaen en partículas que interactúan mediante la fuerza intensa a una rapidez elevada. En vez de eso, decaen de manera muy lenta, una característica de la interacción débil. Sus vidas medias están en el intervalo de  $10^{-10}$  s a  $10^{-8}$  s, en tanto que la mayoría de las partículas que interactúan por medio de la fuerza intensa tiene un promedio de vida mucho más breve, en el orden de  $10^{-23}$ . Particularmente extraño es la existencia de dos semividas diferentes para el kaón neutral, como se puede ver en la tabla 44.2. La existencia del kaon  $K_S^0$  de corta vida y del kaon  $K_L^0$  de larga vida se debe a un fenómeno llamado *mezcla neutra de kaon*, que está más allá del alcance de este texto.

Para explicar estas inusuales propiedades de las partículas extrañas, se introdujo un número cuántico nuevo  $S$ , conocido como **extrañeza**, junto con una ley de la conservación. En la tabla 44.2 están dados los números de extrañeza para algunas partículas. La producción de partículas extrañas en parejas se maneja matemáticamente asignando  $S = +1$  a una de las partículas,  $S = -1$  a la otra, y  $S = 0$  a todas las demás partículas no extrañas. La **ley de conservación de extrañeza** dice que

en una reacción nuclear o decaimiento que ocurra mediante la fuerza intensa, conserva la extrañeza; es decir, la suma de los números de extrañeza antes del proceso debe ser igual a la suma de los números de extrañeza después del proceso. En los procesos que ocurren por la interacción débil, puede que no se conserve la extrañeza.

◀ Conservación de extrañeza

La baja rapidez de decaimiento de las partículas extrañas puede explicarse si supone que las interacciones fuertes y electromagnéticas obedecen la ley de la conservación de extrañeza, pero la interacción débil no. Ya que el decaimiento de la partícula extraña involucra la pérdida de una partícula extraña, esto viola la conservación de extrañeza y, en consecuencia, procede lentamente mediante la interacción débil.

#### Ejemplo 44.4 ¿La extrañeza se conserva?

(A) Use la ley de conservación de extrañeza para determinar si ocurre la reacción  $\pi^0 + n \rightarrow K^+ + \Sigma^-$ .

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Se debe reconocer que hay dos partículas extrañas en esta reacción, así que será necesario investigar la conservación de extrañeza.

**Categorizar** Se usa una ley de conservación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución:

Evalúe la extrañeza para el lado izquierdo de la reacción, a partir de la tabla 44.2:  $S = 0 + 0 = 0$

Evalúe la extrañeza para el lado derecho de la reacción:  $S = +1 - 1 = 0$

Por tanto, la extrañeza se conserva y la reacción está permitida.

(B) Demuestre que la reacción  $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$  no conserva la extrañeza.

continúa



44.4 continuación

SOLUCIÓN

Evalúe la extrañeza para el lado izquierdo de la reacción:

$$S = 0 + 0 = 0$$

Evalúe la extrañeza para el lado derecho de la reacción:

$$S = 0 + (-1) = -1$$

Por tanto, la extrañeza no se conserva.

### 44.7 Determinación de patrones en las partículas

Una de las herramientas que utilizan los científicos es la detección de patrones en los datos, los cuales contribuyen al discernimiento de la naturaleza. Por ejemplo, la tabla 20.2 muestra un patrón específico de calores molares de gases que permite entender las diferencias entre los gases monoatómico, diatómico y poliatómico. La figura 41.20 muestra un patrón de picos en la energía de ionización de los átomos que se relacionan con los niveles de energía cuantizados en los átomos. La figura 43.7 muestra un patrón de picos en la energía de unión que sugieren una estructura de cubierta dentro del núcleo. Uno de los mejores ejemplos del uso de esta herramienta es el desarrollo de la tabla periódica, lo que da una comprensión fundamental del comportamiento químico de los elementos. Como se dijo en la introducción, la tabla periódica explica cómo más de 100 elementos pueden formarse a partir de tres partículas: el electrón, el protón y el neutrón. La tabla de los núclidos, parte de la cual se muestra en la tabla 44.2, contiene cientos de núclidos, pero todos ellos pueden formarse a partir de protones y neutrones.

El número de partículas observadas por los físicos de partículas son también alrededor de cientos. ¿Es posible que exista un pequeño número de entidades a partir de las cuales se constituyan todas las demás? Aceptando una sugerencia del éxito de la tabla periódica y de la tabla de los núclidos, se explora la investigación histórica de patrones entre las partículas.

Se han propuesto muchos esquemas de clasificación para agrupar las partículas en familias. Considere, por ejemplo, los bariones listados en la tabla 44.2 con espín de  $\frac{1}{2}$ : p, n,  $\Lambda^0$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Xi^0$  y  $\Xi^-$ . Si traza la extrañeza en función de la carga para estos bariones utilizando un sistema inclinado de coordenadas, como en la figura 44.7a, observamos un patrón fascinante: seis de los bariones forman un hexágono, y los dos restantes están en el centro.

Como un segundo ejemplo, considere los siguientes siete mesones con espines igual a cero mencionados en la tabla 44.2:  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ ,  $K^+$ ,  $K^0$ ,  $K^-$  y la antipartícula  $\bar{K}^0$ . La figura 44.7b muestra un trazo de la extrañeza en función de la carga para esta familia. De nuevo, emerge un patrón hexagonal. En este caso, cada partícula en el perímetro se opone a su respectiva antipartícula, y el pión neutro (el cual forma su propia antipartícula) están en el centro del hexágono. Estos patrones y los simétricamente relaciona-

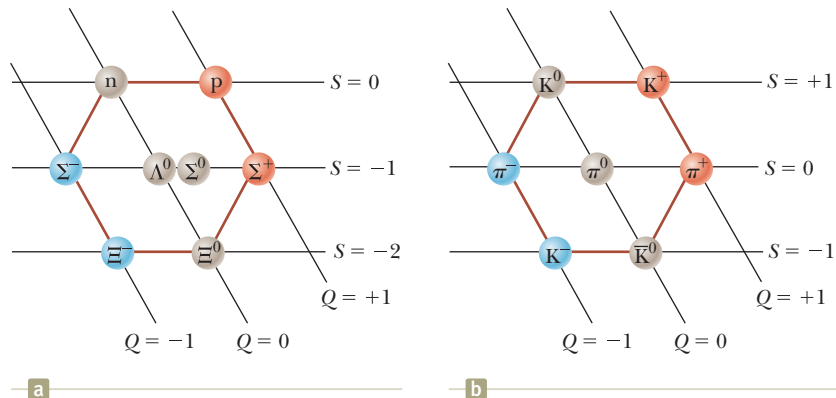


Linh Hassel/AGE Fotostock

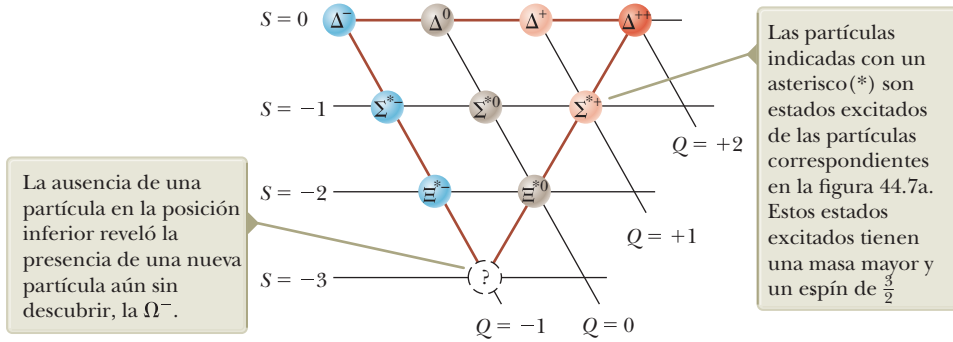
#### Murray Gell-Mann

Físico estadounidense (1929)

A Murray Gell-Mann se le otorgó el premio Nobel en Física en 1969 por sus estudios teóricos relacionados con las partículas subatómicas.



**Figura 44.7** (a) Patrón hexagonal del camino de ocho vías para ocho bariones de espín de  $\frac{1}{2}$ . Esta gráfica de la extrañeza en función de la carga utiliza un plano inclinado para el número de carga  $Q$  y un eje horizontal para la extrañeza  $S$ . (b) Patrón del camino de ocho vías para siete mesones con espín igual a cero.



La ausencia de una partícula en la posición inferior reveló la presencia de una nueva partícula aún sin descubrir, la  $\Omega^-$ .

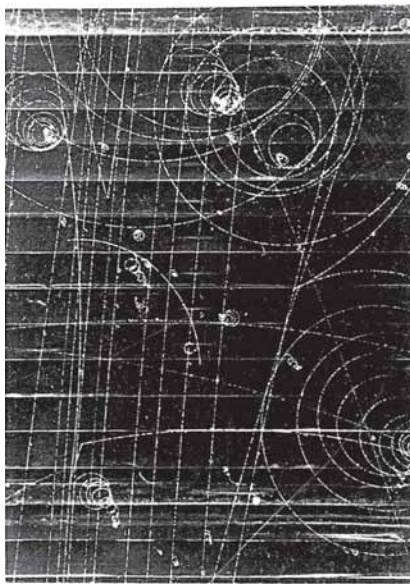
Las partículas indicadas con un asterisco(\*) son estados excitados de las partículas correspondientes en la figura 44.7a. Estos estados excitados tienen una masa mayor y un espín de  $\frac{3}{2}$ .

**Figura 44.8** Patrón para los bariones de gran masa, con un espín de  $\frac{3}{2}$  conocidos cuando el patrón fue propuesto.

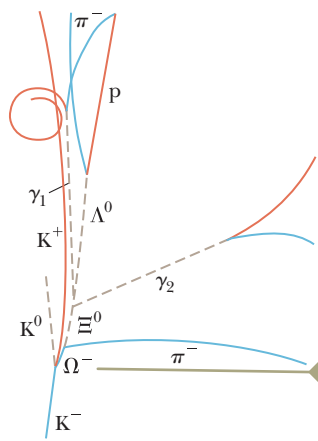
dos fueron desarrollados de manera independiente en 1961 por Murray Gell-Mann y Yuval Ne'eman (1925-2006). Gell-Mann llamó a estos patrones el **camino de ocho vías**, en honor del camino de ocho vías en el nirvana budista.

Los grupos de bariones y mesones pueden desplegarse en muchos otros patrones simétricos dentro del sistema del camino de ocho vías. Por ejemplo, la familia de bariones con el espín de  $\frac{3}{2}$  descubierta en 1961 contiene nueve partículas arregladas en un patrón como el de la formación de bolos, como se ve en la figura 44.8. (Las partículas  $\Sigma^{*+}$ ,  $\Sigma^{*0}$ ,  $\Sigma^{*-}$ ,  $\Xi^{*0}$  y  $\Xi^{*-}$  son estados excitados de las partículas  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Xi^0$  y  $\Xi^-$ . En estos estados de alta energía, los espines de los tres quarks, véase la sección 44.8), que forman las partículas están alineados de forma que el total de espines de la partícula sea igual a  $\frac{3}{2}$ ). Cuando se propuso este patrón, se presentó un espacio vacío (en la posición inferior), correspondiente a una partícula que nunca había sido observada. Gell-Mann predijo que la partícula faltante, que llamó omega menos ( $\Omega^-$ ), debería tener un espín de  $\frac{3}{2}$ , con carga de  $-1$ , con extrañeza de  $-3$ , y una energía en reposo de alrededor de 1680 MeV. Poco tiempo después, en 1964, los científicos del Laboratorio Nacional de Brookhaven encontraron la partícula faltante mediante cuidadosos análisis de fotografías de la cámara de burbujas (figura 44.9) y confirmaron todas sus propiedades predichas.

La predicción de la partícula faltante en el camino de ocho vías tiene mucho en común con la predicción de elementos faltantes en la tabla periódica. Cuando ocurre un hueco en un patrón organizado de información, a los científicos les sirve de guía para sus investigaciones.

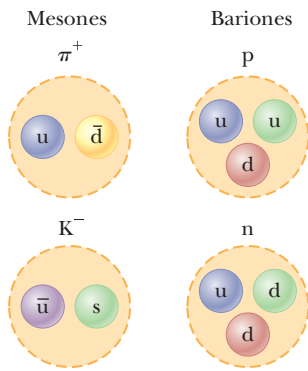


Brookhaven National Laboratory



La partícula  $K^-$  en la parte inferior colisiona con un protón para producir la primera partícula  $\Omega^-$  detectada además de una partícula  $K^0$  y una partícula  $K^+$ .

**Figura 44.9** Descubrimiento de la partícula  $\Omega^-$ . La fotografía de la izquierda muestra los rastros originales de la cámara de burbujas. El dibujo de la derecha aísla los rastros de los eventos importantes.



**Figura 44.10** Composición del quark de dos mesones y dos bariones.

## 44.8 Quarks

Como se mencionó antes, los leptones parecen ser verdaderas partículas elementales debido a que sólo existen unos pocos tipos, y los experimentos indican que no tienen un tamaño o una estructura interna medible. Los hadrones, por otra parte, son partículas complejas que tienen tamaño y estructura. La existencia de patrones de extrañeza-carga en el camino de ocho vías sugiere que los hadrones poseen una subestructura. Además, se sabe que existen cientos de tipos de hadrones y que muchos de ellos decaen en otros hadrones.

### El modelo original del quark

En 1963 Gell-Mann y George Zweig (1937) propusieron de manera independiente un modelo para la subestructura de los hadrones. De acuerdo con su modelo, todos los hadrones están compuestos de dos o tres constituyentes elementales conocidos como **quarks**. (Gell-Mann tomó la palabra *quark* prestada del pasaje “Tres quarks para Muster Mark” en *Finnegans Wake* de James Joyce. En el modelo de Zweig, estos constituyentes se llaman “ases”.) El modelo tiene tres tipos de quarks, designados por los símbolos  $u$ ,  $d$  y  $s$ . A éstos se les da el nombre de **arriba**, **abajo** y **extraño**. Los diversos tipos de quarks son llamados **sabores**. La figura 44.10 es una representación de las composiciones del quark de varios hadrones.

Una propiedad inusual de los quarks es que poseen una carga eléctrica fraccionaria. Los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  tienen cargas de  $+2e/3$ ,  $-e/3$  y  $-e/3$ , respectivamente, donde  $e$  es la carga elemental  $1.60 \times 10^{-19}$  C. Éstas y otras propiedades de los quarks y anti quarks aparecen en la tabla 44.3. Observe que los quarks tienen espín de  $\frac{1}{2}$ , lo que significa que todos los quarks son fermiones, distintos como cualquier partícula que tiene un espín de semientero. Como muestra la tabla 44.3, a cada quark se le asocia con un antiquark de carga, número bariónico y extrañeza opuestos.

Las composiciones de todos los hadrones conocidos cuando Gell-Mann y Zweig presentaron sus modelos pueden especificarse por completo mediante las tres siguientes reglas:

- Un mesón está constituido por un quark y un anti quark, dándole un número bariónico de 0, como se requiere.
- Un barión consiste en tres quarks.
- Un antibarión está formado por tres anti quarks.

La teoría presentada por Gell-Mann y Zweig es conocida como *el modelo original del quark*.

**TABLA 44.3** Propiedades de los quarks y anti quarks

#### Quarks

Nombre	Símbolo	Espín	Carga	Número bariónicos	Extrañeza	Encanto	Carácter fondo	Carácter Cima
Arriba	$u$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Abajo	$d$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Extraño	$s$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	-1	0	0	0
Encantado	$c$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	+1	0	0
Inferior	$b$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	+1	0
Superior	$t$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	+1

#### Antiquarks

Nombre	Símbolo	Espín	Carga	Número bariónicos	Extrañeza	Encanto	Carácter fondo	Carácter Cima
Anti arriba	$\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Anti abajo	$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Anti extraño	$\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	+1	0	0	0
Anti encantado	$\bar{c}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	0	0
Anti inferior	$\bar{b}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	0
Anti superior	$\bar{t}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	-1

Observe en la tabla 44.3 que se proporcionan números de bariones de  $\pm 1/3$  para cada quark y antiquark. Una combinación de tres quarks, como en el modelo de quark original, proporciona un número bariónico de  $+1$ , consistente con los bariones enumerados en la tabla 44.2. Del mismo modo, una combinación de tres antiquarks da un número de bariones de  $-1$  para el antibarión. La combinación de un quark y un antiquark da un número total de bariones de  $0$ , consistente con los mesones enumerados en la tabla 44.2. La ley de conservación del número bariónico conduce a una ley de conservación que requiere que cada tipo de quark en una reacción se conserve si la reacción se produce a través de la fuerza intensa.

- E XAMEN RÁPIDO 44.5** Utilizando un sistema de coordenadas como el de la figura 44.7, dibuje un diagrama del camino de ocho vías para los tres quarks en el modelo original del quark.

## Encanto y otros desarrollos

A pesar de que el modelo original del quark fue altamente exitoso para clasificar familias de partículas, se encontraron algunas discrepancias entre sus predicciones y ciertas cantidades de decaimiento experimental. En consecuencia, en 1967 varios físicos propusieron un cuarto quark de sabor. Argumentaron que si existían cuatro tipos de leptones (como se pensaba entonces), también debería de haber cuatro sabores para los quarks, debido a una simetría subyacente de la naturaleza. Al cuarto quark, designado como  $c$ , se le asignó una propiedad llamada **encanto**. Un quark *encantado* tiene una carga de  $+2e/3$ , justo como el quark de arriba, pero su encanto lo distingue de los otros tres quarks. Esto introduce un cuarto número cuántico  $C$ , que representa el encanto. El nuevo quark tiene un encanto  $C = +1$ , su anti quark tiene un encanto de  $C = -1$ , y todos los demás quarks tienen  $C = 0$ . El encanto, como la extrañeza, se conserva en interacciones fuertes y electromagnéticas pero no en interacciones débiles.

La evidencia sobre la existencia del encanto empezó a acumularse en 1974, cuando un mesón pesado llamado partícula  $J/\Psi$  (o simplemente  $\Psi$ , mayúscula de la letra griega psi) fue descubierto de manera independiente por dos grupos, uno dirigido por Burton Richter (1931) en el Stanford Linear Accelerator (SLAC), y el otro dirigido por Samuel Ting (1936) en el Brookhaven National Laboratory. En 1976 a Richter y a Ting se les otorgó el premio Nobel de física. La partícula  $J/\Psi$  no entra en el modelo de tres quarks; en vez de eso, tiene propiedades de una combinación del quark encantado propuesto y de su anti quark ( $c\bar{c}$ ). Es mucho más pesado que los demás mesones conocidos ( $\sim 3100 \text{ MeV}/c^2$ ), y su vida es mucho más larga que las de las partículas que interactúan mediante la fuerza intensa. Pronto, se descubrieron mesones relacionados, correspondientes a combinaciones de quark como  $c\bar{d}$  con  $\bar{c}d$ , todos con grandes masas y vidas más largas. La existencia de estos nuevos mesones otorgó una firme evidencia del cuarto quark de sabor.

En 1975 los investigadores de la Universidad de Stanford reportaron una fuerte evidencia para el leptón tau ( $\tau$ ), con una masa de  $1784 \text{ MeV}/c^2$ . Este fue el quinto tipo de leptón, lo que llevó a los científicos a proponer que podrían existir más tipos de sabores de quarks, con base en argumentos de simetría similares a aquellos que llevaron a proponer el quark encantado. Estas propuestas resultaron en modelos más elaborados del quark y a la predicción de dos nuevos quarks, **cima** ( $t$ ) y **fondo** ( $b$ ). (Algunos científicos prefieren *verdad* y *belleza*.) Para distinguir estos quarks de los demás, se asignan números cuánticos llamados *carácter cima* y *carácter fondo* (con valores permitidos  $+1, 0, -1$ ) a todos los quarks y antiquarks (véase la tabla 44.3). En 1977, investigadores del Laboratorio Nacional Fermi, bajo la dirección de Leon Lederman (1922), reportaron el descubrimiento de un nuevo mesón muy pesado  $Y$  (mayúscula de la letra griega épsilon), cuya composición se consideró como  $b\bar{b}$ , con evidencia para el quark fondo. En marzo de 1995, investigadores en el Fermilab anunciaron el descubrimiento del quark cima (supuestamente el último de los quarks en encontrarse), que tiene una masa de  $173 \text{ GeV}/c^2$ .

La tabla 44.4 (página 1242) menciona las composiciones en quarks de los mesones formados de los quarks de arriba, de abajo, extraño, encantado y fondo. La tabla 44.5 (página 1242) muestra las combinaciones quark para los bariones de la tabla 44.2. Adverta que sólo están contenidos dos sabores de los quarks,  $u$  y  $d$ , en todos los hadrones encontrados en la materia ordinaria (protones y neutrones).





**TABLA 44.4** Composición en quarks a de los mesones

Quarks	Antiquarks									
	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{s}$	$\bar{d}$	$\bar{u}$					
<b>b</b>	Y ( $\bar{b}b$ )	$B_c^-$ ( $\bar{c}b$ )	$\bar{B}_s^0$ ( $\bar{s}b$ )	$\bar{B}_d^0$ ( $\bar{d}b$ )	$B^-$ ( $\bar{u}b$ )					
<b>c</b>	$B_c^+$ ( $\bar{b}c$ )	$J/\Psi$ ( $\bar{c}c$ )	$D_s^+$ ( $\bar{s}c$ )	$D^+$ ( $\bar{d}c$ )	$D^0$ ( $\bar{u}c$ )					
<b>s</b>	$B_s^0$ ( $\bar{b}s$ )	$D_s^-$ ( $\bar{c}s$ )	$\phi$ ( $\bar{s}s$ )	$\bar{K}^0$ ( $\bar{d}s$ )	$K^-$ ( $\bar{u}s$ )					
<b>d</b>	$B_d^0$ ( $\bar{b}d$ )	$D^-$ ( $\bar{c}d$ )	$K^0$ ( $\bar{s}d$ )	$\pi^0$ ( $\bar{d}d$ )	$\pi^-$ ( $\bar{u}d$ )					
<b>u</b>	$B^+$ ( $\bar{b}u$ )	$\bar{D}^0$ ( $\bar{c}u$ )	$K^+$ ( $\bar{s}u$ )	$\pi^+$ ( $\bar{d}u$ )	$\pi^0$ ( $\bar{u}u$ )					

Nota: El quark superior no forma mesones, ya que se descompone muy rápidamente.

**TABLA 44.5** Composición en quarks de varios bariones

Partícula	Composición en quarks
p	uud
n	udd
$\Lambda^0$	uds
$\Sigma^+$	uus
$\Sigma^0$	uds
$\Sigma^-$	dds
$\Delta^{++}$	uuu
$\Delta^+$	uud
$\Delta^0$	udd
$\Delta^-$	ddd
$\Xi^0$	uss
$\Xi^-$	dss
$\Omega^-$	sss

Nota: Algunos bariones tienen la misma composición quark, tales como el p y el  $\Delta^+$  y el n y el  $\Delta^0$ . En estos casos, las partículas  $\Delta$  se consideran los estados excitados del protón y el neutrón.

Probablemente se estará preguntando si alguna vez terminarán los descubrimientos de las partículas elementales. ¿Cuántos “ladrillos” de materia existen realmente? En el presente, los físicos creen que las partículas elementales en la naturaleza son seis quarks y seis leptones, junto con sus antipartículas, y las cuatro partículas del campo de la tabla 44.1. La tabla 44.6 presenta las energías en reposo y las cargas de los quarks y los leptones.

A pesar de que se han hecho diversos esfuerzos experimentales, jamás se ha observado un quark aislado. Los físicos creen ahora que a temperaturas ordinarias los quarks se hallan permanentemente confinados en el interior de partículas ordinarias debido a una fuerza demasiado fuerte que no les permite escapar, llamada (de manera apropiada) la **fuerza intensa**<sup>5</sup> (que fue introducida al principio de la sección 44.4 y que se analiza más tarde en la sección 44.10). Esta fuerza aumenta con la distancia de separación, de manera similar a la fuerza que ejerce un resorte estirado. Los esfuerzos actuales están en proceso de formar un *plasma quark-gluón*, un estado de la materia en el cual los quarks están libres de neutrones y protones. En el año 2000, los científicos del CERN anunciaron tener evidencia de un plasma quark-gluón formado por núcleos de plomo en colisión. En 2005, los experimentos en el Colisionador Relativista de Iones Pesados (RHIC) en Brookhaven sugiere la creación de un plasma de quarks y gluones. Los experimentos continúan, y el proyecto ALICE (*A Large Ion Collider Experiment*) en el Gran Colisionador de Hadrones del CERN se ha unido a la búsqueda. Los resultados en RHIC y ALICE han permitido a los científicos aprender más sobre las propiedades de un plasma de quark-gluón. Una de las propiedades interesantes y sorprendentes es que el plasma actúa como un líquido viscoso.

**EJEMPLO RÁPIDO 44.6** Se sabe que existen bariones con doble carga, como el  $\Delta^{++}$ . Cierto o falso: los mesones con doble carga también existen.

**TABLA 44.6** Las partículas elementales y sus energías en reposo y cargas

Partícula	Energía en reposo aproximada	Carga
<b>Quarks</b>		
u	2.4 MeV	$+\frac{2}{3}e$
d	4.8 MeV	$-\frac{1}{3}e$
s	104 MeV	$-\frac{1}{3}e$
c	1.27 GeV	$+\frac{2}{3}e$
b	4.2 GeV	$-\frac{1}{3}e$
t	173 GeV	$+\frac{2}{3}e$
<b>Leptones</b>		
$e^-$	511 keV	$-e$
$\mu^-$	105.7 MeV	$-e$
$\tau^-$	1.78 GeV	$-e$
$\nu_e$	< 2 eV	0
$\nu_\mu$	< 2 eV	0
$\nu_\tau$	< 2 eV	0

### 44.9 Quarks multicolor

Poco después de que fuera propuesto el concepto de los quarks, los científicos reconocieron que ciertas partículas tienen composiciones quark que violan el principio de exclusión. En la sección 42.7 se aplicó el principio de exclusión a electrones en átomos. No obstante, el principio es más general y es aplicable a todas las partículas con un espín de semi-entero ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ), que se conocen colectivamente como fermiones. Ya que todos los quarks son fermiones con un semi-espín, se espera que cumplan con el principio de exclusión. Un ejemplo de una partícula que parece violar el principio de exclusión es el barión  $\Omega^-$  (sss), que contiene tres quarks extraños con espines paralelos, lo que da un espín total igual a  $\frac{3}{2}$ . Los tres quarks tienen el mismo número cuántico de espín que viola el principio de exclusión. Otros ejemplos de bariones creados a partir de quarks idénticos con espines paralelos son el  $\Delta^{++}$  (uuu) y el  $\Delta^-$  (ddd).

Para resolver este problema, se sugirió que los quarks poseyeran una propiedad adicional llamada la **carga de color**. Esta propiedad es similar en muchos aspectos a la carga eléctrica excepto que ocurre en seis variedades y no en dos. Los colores

<sup>5</sup> Como un recordatorio, el significado original del término fuerza intensa se debió a la fuerza de atracción a “corta distancia” entre nucleones, que se ha llamado fuerza nuclear. La fuerza nuclear entre nucleones es un efecto secundario de la fuerza intensa entre quarks.

asignados a los quarks son rojo, verde y azul, y los anti quarks tienen los colores antirrojo, antiverde y antiazul. Por tanto, los colores rojo, verde y azul sirven como “números cuánticos” para el color del quark. Para satisfacer el principio de exclusión, los tres quarks en cualquier barión deben tener colores diferentes. Mire nuevamente los quarks en los bariónes en la figura 44.10 y observe los colores. Los tres colores se “neutralizan” a blanco. Un quark y un anti quark en un mesón debe ser de un color y el correspondiente anticolor y en consecuencia se neutralizan al blanco,, de manera similar a la forma en que las cargas eléctricas  $+$  y  $-$  neutralizan a una carga neta igual a cero. (Vea los mesones en la figura 44.10). Esta aparente violación al principio de exclusión en el barión  $\Omega^-$  desaparece, ya que los tres quarks en la partícula tienen diferentes colores.

Observe que la nueva propiedad del color incrementa el número de quarks en un factor de tres, ya que cada uno de los seis quarks viene en tres colores. A pesar de que el concepto de color en el modelo de quark fue concebido originalmente para satisfacer el principio de exclusión, también proporciona una mejor teoría para explicar ciertos resultados experimentales. Por ejemplo, la teoría modificada predice correctamente la vida del mesón  $\pi^0$ .

La teoría de la forma en que interactúan los quarks entre sí se conoce como **cro-modinámica cuántica** o QCD, en paralelo con el nombre *electrodinámica cuántica* (la teoría de la interacción eléctrica entre la luz y la materia). En la QCD, se dice que cada quark lleva una carga color, en analogía a la carga eléctrica. A la fuerza intensa entre los quarks a menudo se le conoce como **fuerza de color**. Debido a eso, los términos *fuerza intensa* y *fuerza de color* se utilizan indistintamente.

En la sección 44.1 se afirmó que la interacción nuclear entre hadrones es conciliada por partículas de campo sin masa llamadas **gluones**. Como se ha mencionado, la fuerza nuclear es de hecho un efecto secundario de la fuerza intensa entre quarks. Los gluones son los conciliadores de la fuerza intensa. Cuando un quark emite o absorbe un gluón, el color del quark puede cambiar. Por ejemplo, un quark azul que emite un gluón puede convertirse en un quark rojo, y a su vez, un quark rojo que absorbe este gluón se convierte en un quark azul.

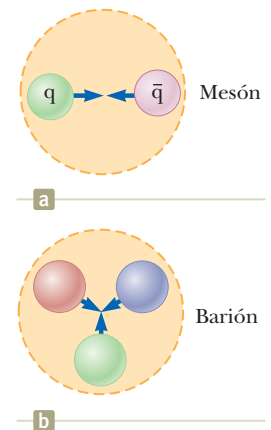
La fuerza de color entre quarks es semejante a la fuerza eléctrica entre cargas: las partículas con su mismo color se repelen, y aquellas con color opuesto se atraen. Por tanto, dos quarks verdes se repelen entre sí, pero un quark verde es atraído por un quark antiverde. La atracción entre quarks de color opuesto para formar un mesón ( $q\bar{q}$ ) se muestra en la figura 44.11a. Los quarks de colores diferentes también se atraen entre sí, aunque lo hacen con menor intensidad que un quark de color opuesto y un antiquark. Por ejemplo, un grupo de quarks rojo, azul y verde se atraen todos entre sí para formar un barión, como se ve en la figura 44.11b. Por tanto, cada barión contiene tres quarks de tres colores diferentes.

A pesar de que en grandes separaciones la fuerza nuclear de dos hadrones sin color es despreciable, la fuerza intensa neta entre sus quarks constitutivos no es exactamente igual a cero en pequeñas separaciones. Esta fuerza intensa residual es la fuerza nuclear que une a protones y neutrones para formar los núcleos. Es similar a la fuerza entre dos dipolos eléctricos. Cada dipolo es eléctricamente neutro. De cualquier modo, un campo eléctrico rodea a los dipolos, debido a la separación de las cargas positivas y negativas (véase la sección 22.5). Como resultado, se presenta una interacción eléctrica entre los dipolos, la cual es más débil que la fuerza entre cargas individuales. En la sección 42.1 exploró cómo es que esta interacción da como resultado la fuerza Van der Waals entre moléculas neutras.

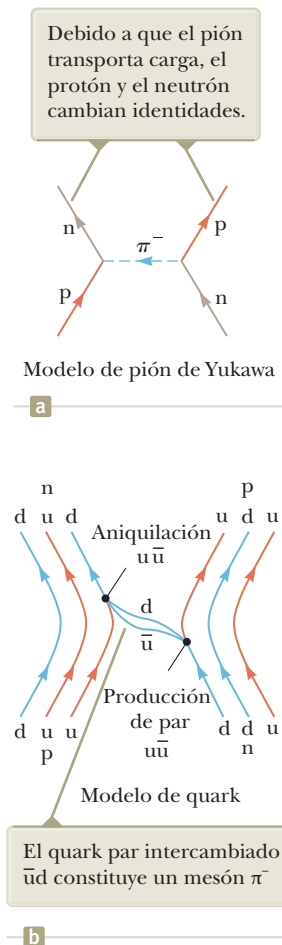
De acuerdo con la QCD, es posible dar una explicación más fundamental de la fuerza nuclear en función de quarks y gluones. La figura 44.12a (página 1244) muestra la interacción nuclear entre un neutrón y un protón mediante el pión de Yukawa, en este caso un  $\pi^-$ . Este dibujo difiere de la figura 44.5a, en la cual la partícula de campo es un  $\pi^0$ ; esto es, no existe transferencia de carga de un nucleón a otro como en la figura 44.5a. En la figura 44.12a, el pión cargado porta carga de un nucleón a otro, por lo que los nucleones cambian de identidad: el protón se convierte en neutrón y el neutrón se convierte en protón.

### PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 44.3

**La carga de color no es realmente un color** La descripción de color para un quark no tiene nada que ver con la sensación visual de la luz. Es simplemente una forma conveniente de identificar una propiedad que es semejante a la carga eléctrica.



**Figura 44.11** (a) Un quark verde es atraído hacia un quark antiverde. Esto forma un mesón cuya estructura de quark es ( $q\bar{q}$ ). (b) Tres quarks de diferentes colores se atraen entre sí para formar un barión.



**Figura 44.12** (a) Una interacción nuclear entre un protón y un neutrón, explicada en función del modelo de intercambio de piones de Yukawa. (b) La misma interacción, explicada en función de quarks y gluones.

Vea la misma interacción desde el punto de vista del modelo del quark, que se muestra en la figura 44.12b. En este diagrama de Feynman, el protón y el neutrón están representados por sus constituyentes en quarks. Cada quark en el neutrón y el protón emite y absorbe gluones continuamente. La energía de un gluón puede resultar en la creación de pares quarks-anti quarks. Este proceso es similar a la creación de pares electrón-positrón en la producción de pares que se investigó en la sección 44.2. Cuando un neutrón y un protón se acercan a 1 fm uno del otro, los gluones y quarks pueden ser intercambiados entre los dos nucleones, y estos intercambios producen la fuerza nuclear. La figura 44.12b ilustra una posibilidad para el proceso que se muestra en la figura 44.12a. Un quark abajo en el neutrón de la derecha emite un gluón. En tal caso la energía del gluón es transformada para crear un par  $u\bar{u}$ . El quark  $u$  se queda en el interior del nucleón (que ahora ha cambiado en un protón), y el quark  $d$  y el antiquark  $\bar{u}$  en retroceso son transmitidos al protón en la izquierda del diagrama. En este caso el  $\bar{u}$  aniquila un quark  $u$  en el interior del protón y el  $d$  es capturado. El efecto neto es cambiar un quark  $u$  a un quark  $d$ , y el protón en la izquierda se convierte en un neutrón.

Conforme el quark  $d$  y el antiquark  $\bar{u}$  en la figura 44.12b se transfieren entre los nucleones, los quarks  $d$  y  $\bar{u}$  intercambian gluones y pueden considerarse unidos entre sí por medio de la fuerza intensa. Si vuelve a ver la tabla 44.4, encontrará que esta combinación es un  $\pi^-$ ; ¡o bien la partícula de campo de Yukawa! Por tanto, el modelo de quark de interacciones entre nucleones es consistente con el modelo de intercambio de piones.

## 44.10 El modelo estándar

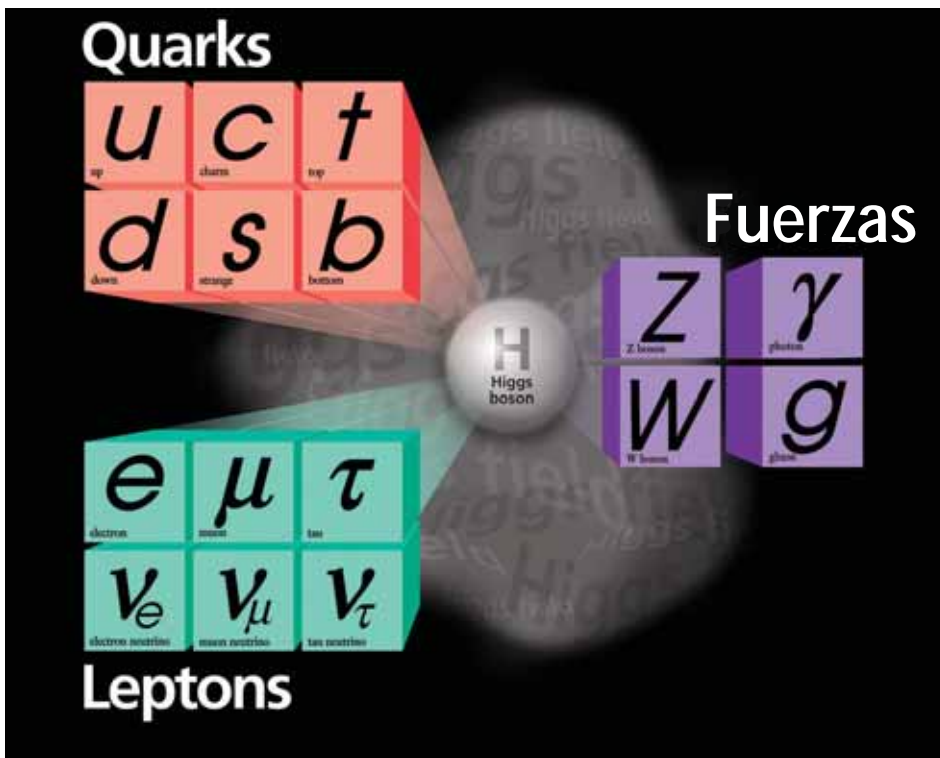
Los científicos creen ahora que hay tres clasificaciones de partículas verdaderamente elementales: leptones, quarks y partículas del campo. Estas tres partículas se clasifican adicionalmente en fermiones o bosones. Observe que los quarks y los leptones tienen un espín de  $\frac{1}{2}$  y, en consecuencia, son fermiones, en tanto que las partículas de campo tienen un espín entero de 1 o más y son bosones.

Recuerde de la sección 46.1 que se cree que la fuerza débil está conciliada por los bosones  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$ . Se dice que estas partículas tienen una *carga débil*, de la misma manera que los quarks tienen una carga de color. Por tanto, cada partícula elemental puede tener masa, carga eléctrica, carga de color y carga débil. Por supuesto, uno o más de éstos puede ser igual a cero.

En 1979, Sheldon Glashow (1932), Abdus Salam (1926-1996) y Steven Weinberg (1933) ganaron el premio Nobel de Física por el desarrollo de la teoría que unifica las interacciones electromagnéticas débiles. Esta **teoría electrodébil** postula que las interacciones débiles y electromagnéticas tienen la misma intensidad cuando las partículas involucradas tienen energías muy elevadas. Las dos interacciones son vistas como diferentes manifestaciones de una sola interacción electrodébil unificadora. La teoría hace muchas predicciones concretas, pero quizá la más espectacular es la predicción de las masas de las partículas  $W$  y  $Z$  de casi  $82 \text{ GeV}/c^2$  y  $93 \text{ GeV}/c^2$ , respectivamente. Estas predicciones son cercanas a las masas que se presentan en la tabla 44.1, determinadas por experimentación.

La combinación de la teoría electrodébil y la QCD para la interacción fuerte se conoce en física de alta energía como el **modelo estándar**. A pesar de que los detalles del modelo estándar son complejos, sus ingredientes esenciales pueden resumirse con ayuda de la figura 44.13. (El modelo estándar no incluye la fuerza gravitacional por el momento; sin embargo, en la figura 44.13 se incluye la gravedad debido a que los científicos tienen la esperanza de incorporar esta fuerza a la teoría unificadora.) Este diagrama muestra que los quarks participan en todas las fuerzas fundamentales y que los leptones participan en todo, excepto en la fuerza intensa.

El modelo estándar no responde todas las preguntas. Una pregunta que sigue sin resolverse es por qué, de los dos conciliadores de la interacción electrodébil, el fotón no tiene masa, pero los bosones  $W$  y  $Z$  sí. Debido a esta diferencia de masa, a energías bajas las fuerzas electromagnéticas y débiles son bastante diferentes pero a muy altas energías se parecen, cuando la energía en reposo es despreciable en relación con la



Fermi National Accelerator Laboratory/U.S. Department of Energy/Office of Science

**Figura 44.13** El modelo estándar de partículas físicas. Las partículas fundamentales se muestran a la izquierda como dos familias distintas: quarks y leptones. A la derecha, se muestran las partículas de campo para las fuerzas fundamentales. El bosón de Higgs se propone para proporcionar masa para las partículas fundamentales y las partículas W y Z.

energía total. El comportamiento cuando una va de energías mayores a menores se conoce como *rompimiento de simetría*, porque las fuerzas son similares, o simétricas, en altas energías, pero son muy diferentes en energías bajas. De las energías en reposo de bosones W y Z que no son igual a cero surge la pregunta del origen de masas de partícula. Para resolver este problema, se ha propuesto una partícula hipotética conocida como **bosón Higgs**, la cual aporta un mecanismo para romper la simetría electrodébil. El modelo estándar modificado incluye el bosón Higgs, que proporciona una explicación lógica y consistente de la naturaleza más pesada de los bosones W y Z. En julio de 2012, los anuncios del ATLAS (*A Toroidal LHC Apparatus*) y los experimentos CMS (*Compact Muon Solenoid*) en el Large Hadron Collider (LHC) en el CERN reclamaron el descubrimiento de una nueva partícula que tiene propiedades consistentes con la de un bosón de Higgs. La masa de la partícula es 125-127 GeV, dentro de la gama de las predicciones hechas a partir de consideraciones teóricas utilizando el modelo estándar. Si bien se necesitan más pruebas para eliminar todas las alternativas teóricas posibles, es cada vez más probable que el descubrimiento sea realmente el bosón de Higgs.

Debido a la energía limitada disponible en los aceleradores convencionales que utilizan objetivos fijos, es necesario emplear aceleradores de haces en colisión conocidos como **colisionadores**. El concepto de colisionadores es simple. Las partículas que tienen masas iguales y energías cinéticas iguales, viajando en direcciones opuestas en un anillo acelerador, chocan de frente para producir la reacción necesaria para crear partículas nuevas. Ya que la cantidad de movimiento total de las partículas que interactúan es igual a cero, toda su energía cinética está disponible para la reacción.

Varios colisionadores proporcionaron datos importantes para entender el modelo estándar en la última parte del siglo xx y la primera década del siglo xxi: el Large Electron-Positron (LEP) Collider y el Super Síncrotrón de Protones del CERN, el Stanford Linear Collider, y el Tevatron en el Laboratorio Nacional Fermi, en Illinois. El relativista Colisionador de Iones Pesados en el Laboratorio Nacional Brookhaven es el único colisionador restante en funcionamiento en los Estados Unidos. El Gran Colisionador de Hadrones del CERN, que comenzó a operar colisión en marzo de 2010 ha tomado el liderazgo en estudios de partículas debido a sus capacidades de muy alta energía. El límite superior previsto para el LHC es una energía del centro de masa de 14 TeV.

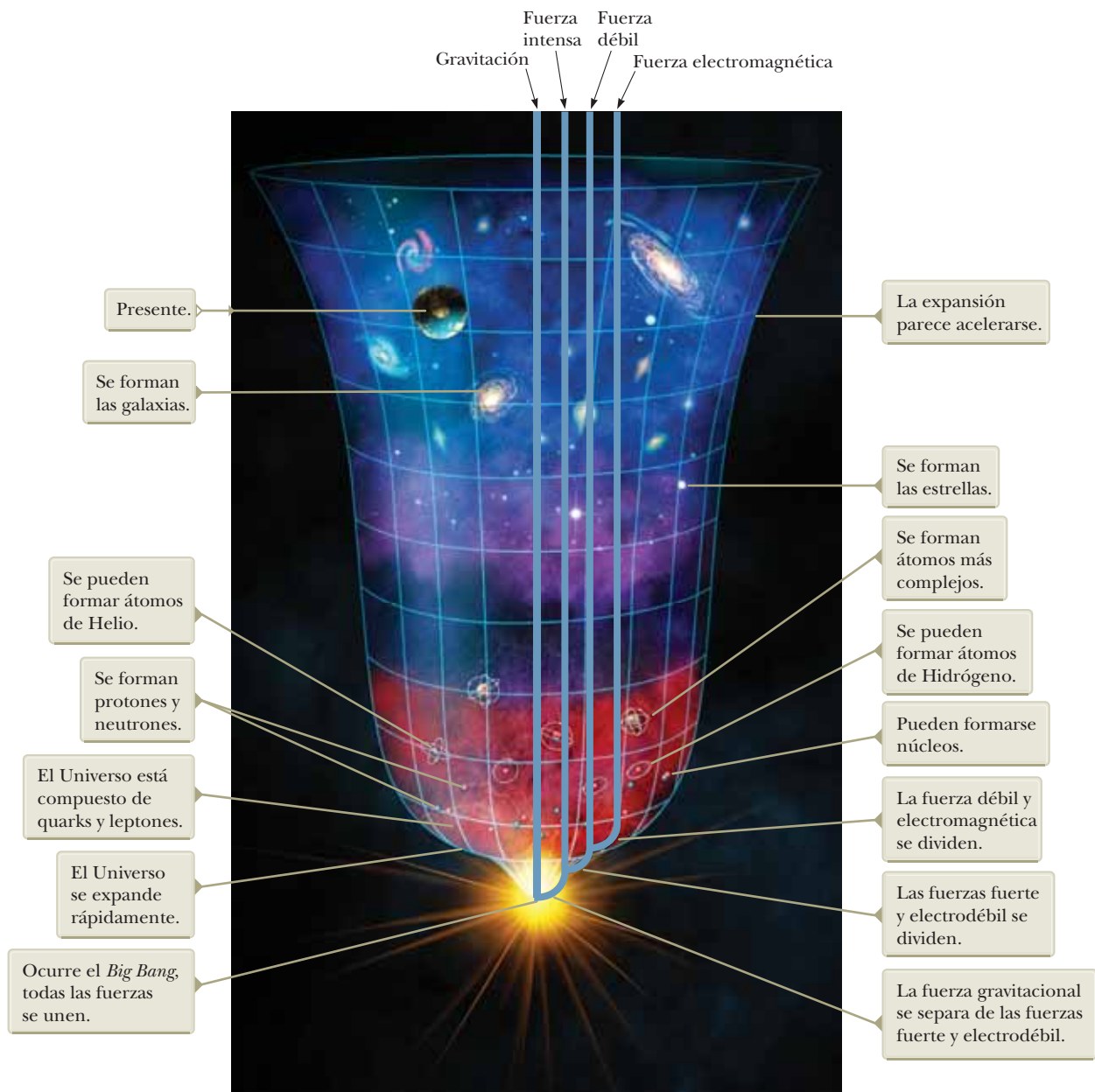




### 44.11 La conexión cósmica

Como lo prometimos en la introducción, invirtamos el rumbo y ascendamos en la escala. En esta sección se describe una de las teorías más fascinantes de toda la ciencia —la teoría del *Big Bang* de la creación del Universo— y la evidencia experimental que la sostiene. Esta teoría de la cosmología afirma que el Universo tuvo un principio y, además, que este principio fue tan cataclísmico que es imposible mirar más atrás del mismo. De acuerdo con esta teoría, el Universo emergió a partir de una singularidad infinitamente densa hace 14 000 millones de años. En los primeros minutos después del *Big Bang* se desplegó tanta energía que se cree que las cuatro interacciones de la física se unificaron y que toda la materia estaba contenida en un plasma quark-gluón.

La evolución de las cuatro fuerzas fundamentales a partir del *Big Bang* hasta hoy aparece en la figura 44.14. Durante los primeros  $10^{-43}$  (época ultra-caliente,  $T \sim 10^{32}$



**Figura 44.14** Breve historia del Universo desde el *Big Bang* hasta la época actual. Las cuatro fuerzas se hicieron distinguibles durante el primer nanosegundo. Después, todos los quarks se combinaron para formar partículas mediante la fuerza nuclear. Sin embargo, los leptones permanecieron separados y hasta hoy existen individualmente como partículas observables.



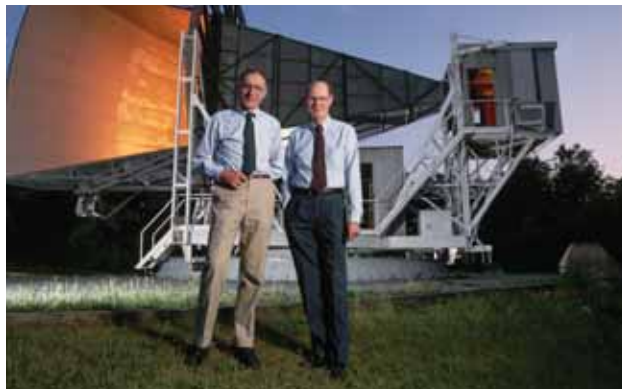
K), se presume que las fuerzas intensa, electrodébiles y gravitacionales estaban unidas formando una fuerza totalmente unificada. En los primeros  $10^{-35}$  s que siguieron al *Big Bang* (época caliente  $T \sim 10^{29}$  K), ocurrió el rompimiento de la simetría de la gravedad, en tanto que las fuerzas intensa y electrodébiles se mantenían unidas. En este periodo las energías de las partículas eran tan elevadas ( $> 10^{16}$  GeV) que existían partículas muy pesadas como quarks, leptones y sus antipartículas. Después, pasados  $10^{-35}$  s, el Universo se expandió de manera rápida y se enfrió (época tibia,  $T \sim 10^{29}$  a  $10^{15}$  K) y las fuerzas intensa y electrodébiles se separaron. Conforme el Universo se enfriaba, alrededor de  $10^{-10}$  s después del *Big Bang*, la fuerza electrodébil se dividió en fuerza débil y fuerza electromagnética.

Después de unos minutos, los protones y los neutrones se condensaron fuera del plasma. Durante media hora el Universo sufrió una fusión termonuclear, explotando como una bomba de hidrógeno y produciendo la mayor parte de los núcleos de helio que existen ahora. El Universo siguió expandiéndose y su temperatura se redujo. Hasta alrededor de 700 000 años después del *Big Bang*, el Universo estaba bajo el dominio de la radiación. La radiación energética impidió que la materia formara átomos de hidrógeno por separado, puesto que las colisiones habrían ionizado de manera instantánea cualquier átomo que se hubiera formado. Los fotones experimentaron una dispersión Compton continua debido a la enorme cantidad de electrones libres, dando como resultado un Universo opaco a la radiación. Para cuando el Universo tenía aproximadamente 377 000 años de edad, se había expandido y enfriado hasta cerca de 3 000 K, lo que permitió que los protones se unieran con los electrones para formar átomos de hidrógeno neutro. Debido a las energías cuantizadas de los átomos, muchas más longitudes de onda de radiación no fueron absorbidas por los átomos y el Universo de pronto se volvió transparente a los fotones. La radiación dejó de dominar el Universo, y trozos de material neutro crecieron paulatinamente; primero átomos, después moléculas, nubes de gases, estrellas y, finalmente, galaxias.

## Observación de la radiación de la bola de fuego primordial

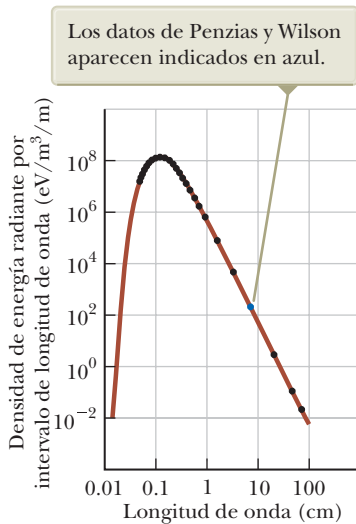
En 1965 Arno A. Penzias (1933) y Robert W. Wilson (1936) de Bell Laboratories estaban probando un receptor de microondas sensible e hicieron un descubrimiento asombroso. Una señal molesta produciendo un débil silbido de fondo estaba interfiriendo con sus experimentos de comunicaciones satelitales. El cuerno de microondas que sirvió como antena receptora se muestra en la figura 44.15. Tanto el desalojo de una bandada de palomas del cuerno de veinte pies, como el enfriar el detector de microondas, no tuvieron éxito para eliminar la señal.

La intensidad de la señal detectada se mantuvo igual independientemente de la orientación de la antena. El hecho de que la radiación tuviera una misma intensidad en cualquier dirección sugería que todo el Universo era la fuente de la radiación. Finalmente, se hizo patente que lo que estaban detectando era una radiación de microondas de fondo (a una longitud de onda de 7.35 cm), que representaba el “resplandor” aún presente del *Big Bang*. En una conversación casual, Penzias y Wilson descubrieron que un grupo de Princeton había predicho la existencia de la radiación residual del *Big Bang* y estaban planeando realizar un experimento para confirmar esta teoría. La animación en la comunidad científica fue muy grande cuando Penzias y Wilson anunciaron que ya habían observado un fondo de microondas excedente compatible con una fuente de cuerpo negro de 3 K, lo que coincidía con la temperatura esperada del Universo hoy día después del *Big Bang*.



© Roger Ressmeyer/Corbis/VCG/Getty Images

**Figura 44.15** Robert W. Wilson (izquierda) y Arno A. Penzias con la antena en forma de cuerno reflector en Bell Telephone Laboratories.



**Figura 44.16** Cuerpo negro teórico (curva café) y espectros de radiación medidos (puntos negros) del *Big Bang*. La mayoría de los datos fueron recolectados por el satélite Cosmic Background Explorer (COBE).

Ya que Penzias y Wilson efectuaron sus mediciones en una sola longitud de onda, no pudieron confirmar por completo que la radiación provenía de un cuerpo negro de 3-K. Experimentos subsiguientes realizados por otros grupos añadieron datos de intensidades en diferentes longitudes de onda, como se muestra en la figura 44.16. Los resultados confirman que la radiación corresponde a la de un cuerpo negro de 2.7 K. Esta magnitud es quizá la evidencia más clara de la teoría del *Big Bang*. En 1978, el premio Nobel de Física les fue otorgado a Penzias y a Wilson por este descubrimiento de tanta importancia.

En los años que siguieron al descubrimiento de Penzias y Wilson, otros investigadores hicieron mediciones a diferentes longitudes de onda. En 1989, la NASA lanzó un satélite llamado COBE y ha añadido mediciones críticas en longitudes de onda por debajo de 0.1 cm. Los resultados de estas medidas llevaron al Premio Nobel de Física a los investigadores principales en 2006. En la figura 44.16 se muestran varios puntos de datos de COBE. El Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, lanzado en junio de 2001, mostró datos que permitieron la observación en el cosmos de diferencias de temperatura en el intervalo de microkelvin. Observaciones en curso también se están realizando en las instalaciones terrestres, asociadas con proyectos como quad, Qubic y el Telescopio del Polo Sur. Además, el satélite Planck fue lanzado en mayo de 2009 por la Agencia Espacial Europea. Este observatorio basado en el espacio ha estado midiendo la radiación cósmica de fondo con mayor sensibilidad que la sonda Wilkinson. La serie de medidas adoptadas a partir de 1965 son coherentes con la radiación térmica asociada a una temperatura de 2.7 K. Toda la historia de la temperatura cósmica es un ejemplo notable de la ciencia trabajando: la construcción de un modelo, hacer una predicción, tomar medidas y probar las medidas contra las predicciones.

## Otra evidencia de un Universo en expansión

La teoría cosmológica del *Big Bang* predice que el Universo se está expandiendo. La mayoría de los descubrimientos clave que apoyan la teoría de un Universo en expansión fueron hechos en el siglo xx. Vesto Melvin Slipher (1875-1969), un astrónomo estadounidense, reportó en 1912 que la mayor de las galaxias estaba alejándose de la Tierra con rapidez de hasta varios millones de millas por hora. Slipher fue uno de los primeros científicos en utilizar el corrimiento Doppler (véase la sección 16.9) en las líneas del espectro para la medición de velocidades de las galaxias.

A finales de los años veinte, Edwin P. Hubble (1889-1953) afirmó audazmente que todo el Universo se está expandiendo. De 1928 a 1936, hasta que se alcanzaron los límites del telescopio de 100 pulgadas, Hubble y Milton Humason (1891-1972) trabajaron en el Monte Wilson en California para probar esta afirmación. Los resultados del trabajo y su continuación en 1940 utilizando un telescopio de 200 pulgadas mostraron que la rapidez en que se alejan las galaxias de la Tierra incrementan en proporción directa a su distancia  $R$  de nosotros. Esta correspondencia lineal, conocida como la ley de Hubble, puede escribirse de esta manera:

Ley de Hubble ►

$$v = HR \quad (44.4)$$

donde  $H$ , llamada la **constante de Hubble**, tiene el valor aproximado de:

$$H \approx 22 \times 10^{-3} \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{ly})$$

### Ejemplo 44.5 Recesión de un quásar

Una *quásar* es un objeto similar a una estrella, porque tiene un núcleo activo, gran luminosidad y tamaño compacto y está muy distante de la Tierra. Su rapidez se puede determinar a partir de mediciones de corrimiento Doppler en la luz que emite. Cierta quásar se aleja de la Tierra con una rapidez de  $0.55c$ . ¿Qué tan lejos está?

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Una representación mental común para la ley de Hubble es la de un panqué de pasas que se cocina en un horno. Imagínese usted en el centro de la barra de panqué. Conforme toda la barra de panqué se expande cuando se calienta, las pasas cercanas se mueven más lentamente respecto a usted. Las pasas alejadas de usted en el borde de la barra de panqué se mueven con mayor rapidez.

44.5 continuación

**Categorizar** Se usa un concepto desarrollado en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Encuentre la distancia a través de la ley de Hubble:

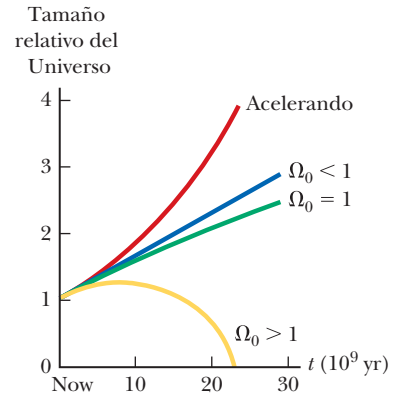
$$R = \frac{v}{H} = \frac{(0.55)(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})}{22 \times 10^{-3} \text{ m/(s} \cdot \text{ly)}} = 7.5 \times 10^9 \text{ ly}$$

**¿QUÉ PASARÍA SI?** Suponga que el quásar se mueve con esta velocidad  $d$  desde el *Big Bang*. Con esta suposición, estime la edad del Universo.

**Respuesta** Aproxime la distancia de la Tierra al quásar como la distancia que el quásar se movió desde la singularidad hasta el *Big Bang*. En tal caso se puede encontrar el intervalo de tiempo a partir del modelo de *partícula bajo velocidad constante*:  $\Delta t = d/v = R/v = 1/H \approx 14$  mil millones de años, que está en concordancia aproximada con otros cálculos.

### Densidad crítica y el destino del universo

El descubrimiento y la confirmación de la expansión del Universo llevaron a numerosos intentos de medir su tasa de expansión, ya que esta tasa proporcionaría información sobre el destino final del Universo. Por ejemplo, si la expansión se estuviera desacelerando, eso indicaría que puede haber suficiente masa en el Universo para que la atracción gravitacional entre las galaxias se detenga e invierta la expansión. Esto podría conducir a un colapso del Universo a un estado súper denso, a veces denominado *Big Crunch*, seguido de otra expansión de *Big Bang*. Este tipo de situación se describe como un *universo oscilante*. La densidad mínima de materia y energía en el Universo en la que se produciría este escenario se denomina densidad crítica  $\rho_c$  (ejemplo 44.6). El parámetro de densidad  $\Omega_0$  (letra griega omega), definido como la relación de la densidad real del Universo a la densidad crítica, es útil para delinear el destino del Universo. La figura 44.17 nos ayuda a comprender los posibles destinos del Universo basados en  $\Omega_0$ . Si  $\Omega_0 < 1$ , las galaxias se ralentizarán en su carrera hacia el exterior, pero aún escapan al infinito. Este escenario se conoce como un *Universo abierto* (curva azul en la figura 44.17). Si  $\Omega_0 = 1$ , la velocidad de expansión disminuye hasta detenerse en un tiempo infinitamente distante en el futuro (curva verde en la figura 44.17) y vivimos en un *Universo plano*. Si  $\Omega_0 > 1$ , sin embargo, el escenario es un *Universo cerrado* (curva naranja en la figura 44.17) y la expansión se invierte, lo que lleva al *Big Crunch*. Consulte la sección "Energía misteriosa en el universo" (página 1251) con respecto a la curva roja.



**Figura 44.17** Varios escenarios del destino del Universo. Las observaciones indican que vivimos en un universo nominalmente plano ( $\Omega_0 = 1$ ), excepto por el efecto de la energía oscura, que es acelerar la expansión del Universo (curva roja).

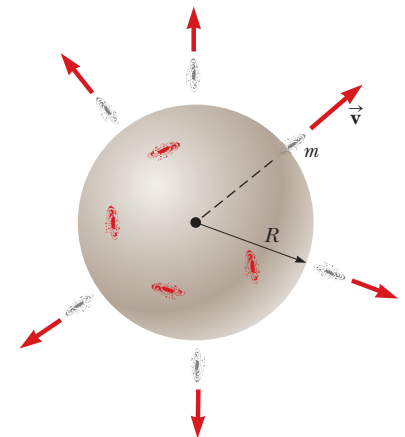
#### Ejemplo 44.6 La densidad crítica del Universo

**(A)** A partir de la conservación de energía, deduzca una expresión para la densidad de masa crítica del Universo  $\rho_c$  en términos de la constante de Hubble  $H$  y la constante de gravitación universal  $G$ .

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** La figura 44.18 muestra una gran sección del Universo, contenida dentro de una esfera de radio  $R$ . La masa total en ese volumen es  $M$ . Una galaxia de masa  $m \ll M$ , que tiene una velocidad  $v$  a una distancia  $R$  del centro de la esfera, escapa al infinito (en donde su velocidad tiende a cero) si la suma de su energía cinética y la energía potencial gravitacional del sistema es cero.

**Categorizar** El Universo puede ser infinito en extensión espacial, pero la ley de Gauss para gravitación (una analogía de la ley de Gauss para los campos eléctricos del capítulo 23) implica que sólo la masa  $M$  dentro de la esfera contribuye a la energía potencial gravitacional del sistema galaxia-esfera. Por tanto, este problema se clasifica como uno en el que se aplica la ley de Gauss para gravitación. Modele la esfera en la figura 44.18 y la galaxia que escapa como un *sistema aislado para la energía*.



**Figura 44.18** (Ejemplo 44.6) La galaxia marcada con masa  $m$  escapa de un gran racimo de galaxias contenidas dentro de un volumen esférico de radio  $R$ . Sólo la masa dentro de  $R$  frena a la galaxia que escapa.

continúa

## 44.6 continuación

**Analizar** Escriba la reducción apropiada de la ecuación 8.2 suponiendo que la galaxia abandona el volumen esférico mientras se mueve a la velocidad de escape:

Sustituya para la masa  $M$ , contenida dentro de la esfera, el producto de la densidad crítica y el volumen de la esfera:

Resuelva para la densidad crítica:

A partir de la ley de Hubble, sustituya para la razón  $v/R = H$ :

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\left(0 - \frac{1}{2}mv^2\right) + \left[0 - \left(-\frac{GmM}{R}\right)\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gm\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho_c\right)}{R}$$

$$\rho_c = \frac{3v^2}{8\pi GR^2}$$

$$(1) \quad \rho_c = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

**(B)** Estime un valor numérico para la densidad crítica en gramos por centímetro cúbico:

## SOLUCIÓN

En la ecuación (1), sustituya valores numéricos para  $H$  y  $G$ :  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3[22 \times 10^{-3} \text{ m/(s} \cdot \text{ly)}]^2}{8\pi(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)} = 8.7 \times 10^5 \text{ kg/m} \cdot (\text{ly})^2$

Concilie las unidades al convertir años luz a metros:  $\rho_c = 8.7 \times 10^5 \text{ kg/m} \cdot (\text{ly})^2 \left(\frac{1 \text{ ly}}{9.46 \times 10^{15} \text{ m}}\right)^2$   
 $= 9.7 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 = 9.7 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$

**Finalizar** Ya que la masa de un átomo de hidrógeno es  $1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$ , este valor de  $\rho_c$  corresponde a  $6 \times 10^{-6}$  átomos de hidrógeno por centímetro cúbico, o 6 átomos por metro cúbico.

## Materia oscura y masa faltante en el Universo

La masa estimada de la materia luminosa en las galaxias alcanza una densidad promedio del Universo de  $5 \times 10^{-33} \text{ g/cm}^3$ . La radiación en el Universo tiene un equivalente de masa de aproximadamente 2% de la materia luminosa. Se puede estimar la masa total de toda la materia no luminosa (como el gas interestelar y los agujeros negros) a partir de las magnitudes de velocidad de las galaxias "satélite" que orbitan alejadas de galaxias más grandes, al igual que la masa del Sol se puede determinar a partir de la tercera ley de Kepler aplicada al movimiento de los planetas (ejemplo 13.4). En el caso de la galaxia de la Vía Láctea, se estima que las estrellas y el gas y polvo interestelares solo representan un tercio de la masa total de la galaxia, y solo se puede considerar parte de la masa faltante para hacer que el universo sea plano por grandes y tenues nubes de gas que rodean la galaxia. Esta masa faltante ha sido objeto de intenso trabajo teórico y experimental, y algunos investigadores han propuesto que la masa faltante está presente en los neutrinos. Sin embargo, las mediciones más recientes indican, que la suma de las masas del electrón, el muón y el neutrino tau son del orden de  $0.5 \text{ eV}/c^2$ . Esta suma no es suficiente para proporcionar la masa faltante.

En la sección 13.6, hablamos sobre la *materia oscura*, que no solo no emite radiación electromagnética, sino que tampoco interactúa con las ondas electromagnéticas de ninguna manera. En 1933, las observaciones del cúmulo de galaxias del cosmólogo suizo Fritz Zwicky (1898-1974) indicaban que el movimiento de las galaxias en el cúmulo no podía explicarse por la fuerza gravitacional de los elementos luminosos y no luminosos "ordinarios" o *bariónicos* (comprendidos de bariones), materia. Zwicky acuñó el término *dunkle materie* (materia oscura) para la materia faltante. Aunque la presencia de materia oscura se ha inferido en numerosas observaciones, incluidas las tasas de rotación de las galaxias espirales y el movimiento de las galaxias en los cúmulos de galaxias, la naturaleza de esta forma de materia sigue siendo un misterio (véase la sección 13.6). Lo que se sabe es que la materia oscura constituye el 26.8% de la densidad materia-energía del Universo, o más de cinco veces la densidad de la materia "ordinaria" luminosa y no luminosa.



## ¿Energía misteriosa en el Universo?

En 1998, se dio un giro sorprendente en la historia del Universo con la observación de una clase de supernova que tenía una brillantez absoluta fija. Se puede determinar su distancia y rapidez de alejamiento de la Tierra combinando su brillantez aparente y su desplazamiento hacia el rojo de la luz proveniente de estas explosiones. Estas observaciones llevaron a la conclusión de que la expansión del Universo no está disminuyendo, ¡sino que se está acelerando! Observaciones hechas por otros grupos también llegaron a la misma interpretación. El Premio Nobel de Física 2011 fue otorgado a Saul Perlmutter (nacido en 1959), Brian P. Schmidt (nacido en 1967) y Adam Riess (nacido en 1969) "por el descubrimiento de la expansión acelerada del Universo a través de observaciones de supernovas distantes". Para poder explicar esta aceleración, los físicos han propuesto la *energía oscura*, que es la energía que posee el vacío del espacio. En los primeros años de vida del Universo, la gravedad dominaba sobre la energía oscura. Conforme el Universo se expandió y la fuerza gravitacional entre galaxias se redujo debido a las grandes distancias entre ellas, la energía oscura se volvió mucho más importante. Se presume que el dominio de la energía oscura sobre la gravitación ocurrió hace unos 5 mil millones de años. La energía oscura constituye el 68.3% del presupuesto de materia-energía del Universo, resultando en un valor de  $\Omega_0$  que es casi exactamente igual a 1, lo que indica que vivimos en un Universo plano. La curva roja en la figura 44.17 muestra el efecto de agregar energía oscura a la densidad de energía de la materia del Universo. En lugar de una expansión de desaceleración, o una expansión que coincide con el caso  $\Omega_0 = 1$  (curva verde), la energía oscura produce una fuerza de repulsión efectiva que hace que la tasa de expansión aumente, lo que resulta en un Universo en *aceleración*.<sup>6</sup>

### 44.12 Problemas y perspectivas

Mientras los físicos de partículas han estado explorando el reino de lo muy pequeño, los cosmólogos han estado explorando la historia cósmica desde el primer microsegundo del *Big Bang*. La observación de los sucesos que ocurren cuando dos partículas entran en colisión en un acelerador es esencial para la reconstrucción de los primeros momentos en la historia cósmica. Por esta razón, quizá la clave para entender el primer Universo es comprender primero el mundo de las partículas elementales. Los cosmólogos y los físicos han encontrado ahora que tienen muchas metas en común y están uniendo esfuerzos en un intento de entender el mundo físico en su nivel más fundamental.

### ¿El final de nuestra historia?

En el "Imagine" de apertura de este capítulo, aludimos a la idea de que tal vez podríamos terminar este capítulo sabiendo todo lo que hay que saber sobre física. Bueno, ¿cómo lo hicimos? Conocemos una gran cantidad de física después de estudiar estos 44 capítulos. Pero no sabemos todo. Nuestro entendimiento de la física a corta distancia está lejos de estar completa.

La física de partículas enfrenta muchas preguntas. ¿Por qué existe tan poca antimateria en el Universo? ¿Es posible unificar de manera lógica y consistente las teorías fuerte y electrodébil? ¿Por qué los quarks y los leptones forman tres familias similares pero distintas? ¿Son los muones como los electrones, a excepción de sus diferencias de masa, o tienen otras propiedades sutiles que aún no han sido detectadas? ¿Por qué algunas partículas están cargadas y otras son neutras? ¿Por qué los quarks tienen una carga fraccionaria? ¿Qué determina las masas de los constituyentes elementales de la materia? ¿Pueden existir quarks aislados? ¿Por qué los electrones y los protones tienen *exactamente* la misma magnitud de carga cuando se trata de una partícula verdaderamente fundamental y el otro se construye a partir de partículas más pequeñas?

<sup>6</sup>Para una actualización sobre la energía oscura, véase S. Perlmutter, "Supernovae, DarkEnergy, and the Accelerating Universe", *PhysicsToday*, abril de 2003; 56(4), pp. 53-60.





Otras preguntas fuera del campo de la física de partículas aún no han sido respondidas. Por ejemplo, consideremos el famoso "gato Schrödinger". Para señalar el contraste entre un resultado experimental y la función de onda que lo describe, Schrödinger imaginó una caja que contiene un gato, una muestra radiactiva, un contador de radiación y un vial de veneno. Cuando un núcleo en la muestra se descompone, el contador activa la administración de veneno letal para el gato. La mecánica cuántica predice correctamente la probabilidad de encontrar al gato muerto cuando se abre la caja. Antes de abrir la caja, sin embargo, ¿cuál es la función de onda del gato? Es decir, antes de que se tome una medida, ¿el gato tiene una función de onda que es una mezcla de muertos y vivos?

¿La función de onda describe al gato como muerto fraccionalmente, con alguna posibilidad de estar vivo? ¿El acto de medición cambia el sistema de un estado probabilístico a un estado definido? Esta pregunta está bajo investigación continua, nunca con gatos reales, pero a veces con experimentos de interferencia basados en el experimento descrito en la sección 39.7. Cuando se detecta una partícula emitida por un núcleo radiactivo en un lugar determinado, ¿la función de onda que describe la partícula cae instantáneamente a cero en cualquier otro lugar del Universo? (Einstein llamó a su estado de cambio una "acción espeluznante a distancia"). ¿Hay una diferencia fundamental entre un sistema cuántico y un sistema macroscópico? Las respuestas a estas preguntas son desconocidas.

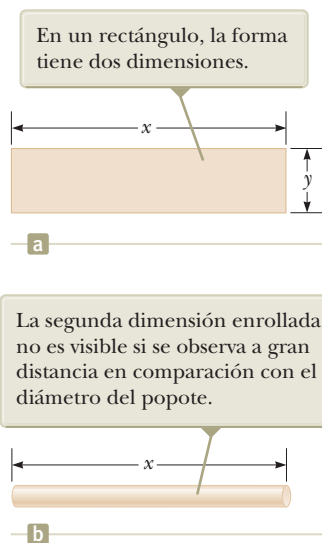
Una pregunta importante y obvia que falta es si los leptones y los quarks tienen una estructura fundamental. Si la tienen, podemos hacernos una idea de un número infinito de niveles de estructura más profundos. Sin embargo, si los leptones y los quarks son en realidad los constituyentes últimos de la materia, como los físicos de ahora tienden a creer, deberíamos ser capaces de construir una teoría final de la estructura de la materia, justo como Einstein soñó hacerlo. Esta teoría, llamada de manera extravagante la *Teoría del Todo*, sería una combinación del modelo estándar y de una teoría cuántica de la gravedad.

## Teoría de cuerdas: una nueva perspectiva

Ahora analice brevemente un esfuerzo actual a fin de responder algunas de estas preguntas proponiendo una nueva perspectiva sobre las partículas. Al leer este libro, quizá ha recordado que comienza con el modelo de *partícula* y haciendo con ello bastante física en el capítulo 2. En el capítulo 16, se introdujo el modelo *ondulatorio* y se encontró más física a investigar en función de las propiedades de las ondas. En el capítulo 34 de este volumen se utilizó un modelo ondulatorio para la luz. Sin embargo, en el capítulo 39, se vio la necesidad de volver al modelo de *partícula* para la luz. Además, se encontró que las partículas de los materiales tenían características parecidas a las de las ondas. El modelo cuántico de las partículas analizado en el capítulo 39 permitió construir partículas a partir de ondas, lo que sugiere que una *onda* es la entidad fundamental. En este capítulo 44, no obstante, se afirmó que las *partículas* son las entidades fundamentales. ¡Pareciera que no podemos decidirnos! En esta sección final se analiza un esfuerzo actual de investigación para construir partículas a partir de ondas y de vibraciones en cuerdas.

La **teoría de cuerdas** es un esfuerzo para unificar las cuatro fuerzas fundamentales al modelar todas las partículas como los distintos modos de vibración de una sola entidad; una cuerda increíblemente pequeña. La longitud típica de una cuerda así es del orden de  $10^{-35}$ m, y se conoce como **longitud de Planck**. Hemos visto modos cuantizados antes: las frecuencias de las cuerdas de una guitarra vibrando en el capítulo 17 y en el capítulo 41 los niveles cuantizados de energía de los átomos. En la teoría de las cuerdas, cada modo de vibración cuantizado de una cuerda corresponde a una partícula elemental diferente del modelo estándar.

Uno de los factores que complica la teoría de cuerdas es que requiere que espacio-tiempo tengan diez dimensiones. A pesar de las dificultades teóricas y conceptuales para lidiar con diez dimensiones, la teoría de cuerdas mantiene la promesa de incorporar la gravedad con las otras fuerzas. Cuatro de las diez dimensiones son visibles para nosotros —tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal—, y se dice que las otras seis son *compactadas*. Es decir, las seis dimensiones están dobladas por fuerzas que no son visibles para el mundo macroscópico.



**Figura 44.19** (a) Se corta un pedazo de papel en forma rectangular. Como rectángulo, la forma tiene dos dimensiones.

Como una analogía, considere un popote. Podemos construir uno cortando un pedazo rectangular de papel (figura 44.19a), que tiene claramente dos dimensiones, y enrollándolo en un pequeño tubo (figura 44.19b). Desde lejos, el popote parece una línea recta unidimensional. La segunda dimensión ha sido doblada y no es visible. La teoría de cuerdas afirma que seis dimensiones espacio-tiempo están dobladas de manera semejante, siendo el doblez del tamaño de la longitud de Planck, lo cual es imposible de observar desde nuestro punto de vista.

Otro factor que complica la teoría de cuerdas es que resulta difícil para los experimentadores saber qué deben buscar en un experimento. La longitud de Planck es tan pequeña que es imposible una experimentación directa de las cuerdas. En tanto esta teoría no se haya desarrollado más, los teóricos de las cuerdas tendrán que conformarse con aplicar la teoría a resultados conocidos y aprobar su consistencia.

Una de las predicciones de la teoría de las cuerdas, conocida como **súper simetría** (SUSY), sugiere que toda partícula elemental tiene un súper compañero que todavía no ha sido observado. Se cree que la súper simetría es una simetría fraccionada (como la simetría fraccionada electrodébil a energía reducida) y las masas de los súper compañeros están más allá de nuestra capacidad actual de detección mediante aceleradores. Algunos teóricos afirman que la masa de los súper compañeros es la masa faltante vista en la sección 44.11. Siguiendo con la tendencia extravagante para nombrar partículas y sus propiedades, a los súper compañeros se les da el nombre de *squark* (el súper compañero del quark), el *selectrón* (electrón), y el *gluino* (gluón).

Otros teóricos están trabajando en la **teoría M**, que es una teoría de once dimensiones de acuerdo con membranas en vez de cuerdas. De una manera reminiscente del principio de correspondencia, se dice que la teoría M reduce la teoría de cuerdas si se reducen las dimensiones de once a diez.

Las preguntas que hemos expuesto al principio de esta sección siguen sin respuesta. Debido a los rápidos avances y nuevos descubrimientos en el campo de la física de las partículas, en la década siguiente muchas de estas preguntas habrán sido resueltas mientras que otras nuevas habrán surgido.

## Resumen

### ► Conceptos y principios

Antes de la teoría de los quarks, las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza se identificaban como nuclear, electromagnética, débil y gravitacional. Todas las interacciones en las que estas fuerzas tomaban parte estaban conciliadas por **partículas de campo**. La interacción electromagnética está conciliada por fotones; la interacción débil está conciliada por los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$ ; la interacción gravitacional está conciliada por gravitones; y la interacción nuclear está conciliada por gluones.

Las partículas distintas de las partículas de campo se clasifican como hadrones o leptones. Los **hadrones** interactúan a través de las cuatro fuerzas fundamentales. Tienen tamaño y estructura y no son partículas elementales. Hay dos tipos: **bariones** y **mesones**. Los bariones, que por lo general son las partículas más pesadas, tienen **número de bariones** distinto de cero y un espín de  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{3}{2}$ . Los mesones tienen número de bariones cero y espín cero o entero.

En todas las reacciones y decaimientos, se conservan estrictamente cantidades como energía, cantidad de movimiento lineal, cantidad de movimiento angular, carga eléctrica, número de bariones y número de leptones. Ciertas partículas tienen propiedades llamadas **extrañeza** y **encanto**. Estas inusuales propiedades se conservan en todos los decaimientos y reacciones nucleares, excepto aquellas que ocurren a través de la fuerza débil.

Una partícula cargada y su **antipartícula** tienen la misma masa pero carga opuesta, y otras propiedades tendrán valores opuestos, como el número de leptones y el número de bariones. Es posible producir pares partícula-antipartícula en reacciones nucleares si la energía disponible es mayor que  $2mc^2$ , donde  $m$  es la masa de la partícula (o antipartícula).

Los **leptones** no tienen estructura o tamaño y se consideran verdaderamente elementales. Sólo interactúan a través de las fuerzas débil, gravitacional y electromagnética. Existen seis tipos de leptones: electrón  $e^-$ , muón  $\mu^-$  y tau  $\tau^-$ , y sus neutrinos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ , y  $\nu_\tau$ .

Los teóricos en física de partículas elementales postularon que todos los hadrones están compuestos de unidades más pequeñas llamadas **quarks**, y la evidencia experimental concuerda con este modelo. Los quarks tienen carga eléctrica fraccional y vienen en seis **sabores**: arriba (u), abajo (d), extraño (s), encantado (c), cima (t) y fondo (b). Cada barión contiene tres quarks, y cada mesón contiene un quark y un anti quark.

continúa



De acuerdo con la teoría de la **cromodinámica cuántica**, los quarks tienen una propiedad llamada **color**; la fuerza entre quarks se conoce como **fuerza intensa** o **fuerza color**. La fuerza intensa ahora se considera como una fuerza fundamental. La fuerza nuclear, que originalmente se consideraba fundamental, ahora se entiende como un efecto secundario de la fuerza intensa debido a un intercambio de gluones entre hadrones.

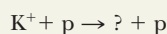
Las fuerzas electromagnética y débil ahora se consideran manifestaciones de una sola fuerza llamada **fuerza electrodébil**. La combinación de cromodinámica cuántica y teoría electrodébil se llama **modelo estándar**.

La radiación de microondas de fondo, descubierta por Penzias y Wilson, sugiere enormemente que el Universo comenzó con un Big Bang hace 14 000 millones de años. La radiación de fondo es equivalente a la de un cuerpo negro a 3 K. Varias mediciones astronómicas sugieren que el Universo se expande. De acuerdo con la **ley de Hubble**, las galaxias distantes retroceden alejándose de la Tierra con una velocidad  $v = HR$ , donde  $H$  es la **constante de Hubble**,  $H \approx 22 \times 10^{-3} \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{año luz})$ , y  $R$  es la distancia desde la Tierra a la galaxia.

## Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

1. Su grupo está trabajando en un laboratorio de física de partículas y está estudiando la siguiente reacción: (a)  $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$ . En su grupo, analice la reacción en términos de quarks constituyentes y demuestre que se conserva cada tipo de quark. (b) La siguiente reacción que estudias es  $K^- + p \rightarrow K^+ + K^0 + \Omega^-$ . Analice esta reacción en términos de quarks constituyentes y demuestre que se conserva cada tipo de quark. En la reacción  $p + p \rightarrow K^0 + p + \pi^+ + ?$ , (c) determine los quarks en la partícula misteriosa, y (d) identifique la partícula misteriosa.
2. Considere la siguiente reacción que procede por la interacción fuerte, en la cual se conserva la extrañeza. Discuta esta reacción en su grupo y responda lo siguiente: ¿Cuáles son las posibles identidades de la partícula misteriosa?



3. Considere las siguientes reacciones que proceden de la interacción débil, en la que la extrañeza no se conserva. Supongamos que la extrañeza cambia en una unidad. Discuta estas reacciones en su grupo y responda lo siguiente: ¿Cuáles son las posibles identidades de las partículas misteriosas?

- (a)  $\Omega^- \rightarrow ? + \pi^-$
- (b)  $K^+ \rightarrow ? + \mu^+ + \nu_\mu$

4. **ACTIVIDAD** Su equipo está estudiando el mesón phi, que tiene una masa de 1 019 MeV/c<sup>2</sup> y carga eléctrica cero. (a) Determine cuál de los siguientes esquemas de descomposición son posibles para el mesón phi en reposo:

- (i)  $\phi \rightarrow K^+ + K^- + \pi^0$
- (ii)  $\phi \rightarrow K^+ + K^-$
- (iii)  $\phi \rightarrow K^+ + e^-$
- (iv)  $\phi \rightarrow K^+ + \pi^-$

- (b) Para la(s) reacción(es) que ocurren, encuentre la energía cinética de los productos de descomposición.

## Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

### SECCIÓN 44.2 Positrones y otras antipartículas

1. Dos fotones son producidos cuando un protón y un antiprotón se aniquilan uno al otro. Dentro del marco de referencia en que el centro de la masa del sistema protón-antiprotón permanece estacionario, (a) ¿cuál es la frecuencia mínima y (b) la longitud de onda correspondiente de cada fotón?

2. Usted es contratado como testigo experto para la defensa de un empleado que está siendo demandado por exponer a su supervisor a radiación dañina. El empleado tuvo una tomografía por emisión de positrones (PET) y se le inyectó a las 4:30 PM glucosa conteniendo del orden de  $10^{14}$  átomos de  $^{14}\text{O}$ , con una vida media de 70.6 s. Inmediatamente después de que se completó el escaneo, a las 5:30 PM, el empleado se reunió con su supervisor para una cena, le dio la mano

y se sentó en la misma mesa para cenar. El supervisor se sorprendió cuando el empleado mencionó que acababa de hacerse una tomografía por emisión de positrones antes de la reunión. Más tarde esa noche, el supervisor comenzó a sentirse enfermo y se convenció de que era una intoxicación por radiación debido a la radiación significativa que recibió durante su encuentro con el empleado. El supervisor presentó rápidamente una demanda por daños por radiación a su cuerpo contra el empleado en base a esta conclusión. Para generar un argumento de defensa para el empleado, calcule la actividad del  $^{14}\text{O}$  en el cuerpo del empleado cuando los dos se sentaron a cenar a las 5:30.

### SECCIÓN 44.3 Mesones y el principio de la física de las partículas

3. Uno de los conciliadores de la interacción débil es el bosón  $Z^0$ , que tiene una masa de 91 GeV/c<sup>2</sup>. Use esta información para encontrar el orden de magnitud del alcance de la interacción débil.



- CIC** 4. (a) Demuestre que el intercambio de una partícula virtual de masa  $m$  se puede asociar con una fuerza con un alcance determinado por

$$d \approx \frac{1}{4\pi mc^2} = \frac{98.7}{mc^2}$$

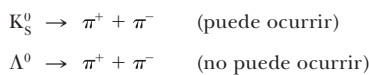
donde  $d$  está en nanómetros y  $mc^2$  en electrón volts.

- (b) Establezca el patrón de dependencia del intervalo en la masa. (c) ¿Cuál es el alcance de la fuerza que se puede producir por el virtual intercambio de un protón?

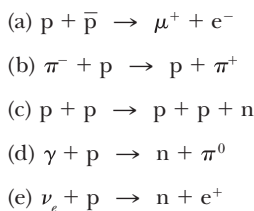
**SECCIÓN 44.5 Leyes de conservación**

5. Cuando un protón o pión de alta energía que se traslada a una velocidad cercana a la de la luz choca con un núcleo, recorre una distancia promedio de  $3 \times 10^{-15}$  m antes de interactuar. Con esta información, encuentre el orden de magnitud del intervalo de tiempo necesario para que ocurra la interacción fuerte.

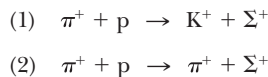
6. La primera de las siguientes dos reacciones puede ocurrir, pero no la segunda. Explique.



7. Cada una de las siguientes reacciones está prohibida. Determine la ley de conservación que se viola en cada una.

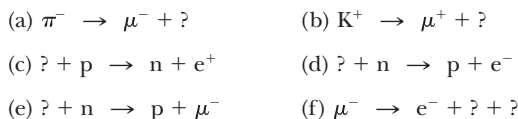


- CIC** 8. (a) Demuestre que el número bariónico y la carga se conservan en las siguientes reacciones de un pión con un protón.

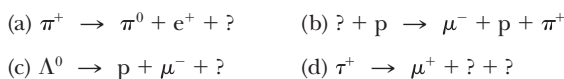


- (b) La primera reacción ocurre, pero la segunda nunca ocurre. Explique por qué.

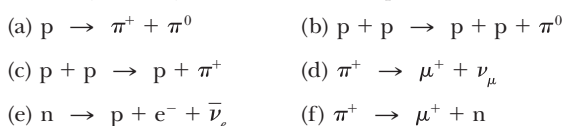
9. Las siguientes reacciones o decaimientos involucran uno o más neutrinos. En cada caso, agregue el neutrino ( $\nu_e, \nu_\mu$  o  $\bar{\nu}$ ) o antineutrino faltante.



10. Determine el tipo de neutrino y antineutrino involucrados en los siguientes procesos:



11. Determine cuál de las siguientes reacciones puede ocurrir. En aquellas que no pueden ocurrir, determine cuál o cuáles son la ley o las leyes de conservación que se violaron



12. (a) Demuestre que la reacción de decaimiento de un protón  $p \rightarrow e^+ + \gamma$  no puede ocurrir porque viola la conservación del número bariónico. (b) **¿Qué pasaría si?** Imagine que esta reacción sí ocurre y que el protón se encuentra en reposo de inicio. Determine la energía y la cantidad de movimiento del positrón y del fotón después de la reacción. (c) Determine la rapidez del positrón después de la reacción.

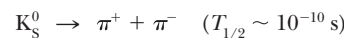
13. Una partícula  $\Lambda^0$  en reposo se desintegra en un protón y un mesón  $\pi^-$ . (a) Utilice los datos en la tabla 44.2 para encontrar el valor de  $Q$  para este decaimiento en MeV. (b) ¿Cuál es la energía cinética total compartida por el protón y el mesón  $\pi^-$  después del decaimiento? (c) ¿Cuál es la cantidad de movimiento total compartida por el protón y el mesón  $\pi^-$ ? (d) El protón y el mesón  $\pi^-$  tienen momentos con la misma magnitud después de la desintegración. ¿Tienen energías cinéticas iguales? Explique.

**SECCIÓN 44.6 Partículas extrañas y extrañeza**

- CIC** 14. El mesón neutro  $\rho^0$  decae por interacción fuerte a dos piones:

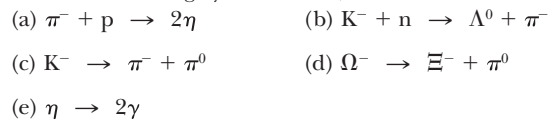


El kaón neutro también decae a dos piones:

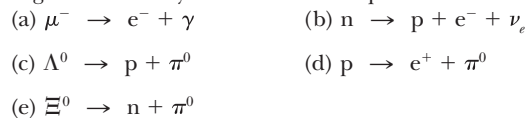


¿Cómo explica la diferencia en las vidas medias?

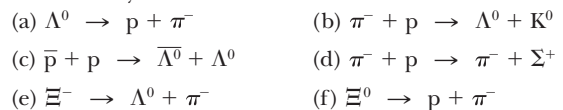
15. ¿Cuál de los procesos siguientes están permitidos con interacción fuerte, interacción electromagnética, interacción débil o sin interacción alguna? (Nota: la partícula eta ( $\eta$ ) es un mesón sin carga y no extraño).



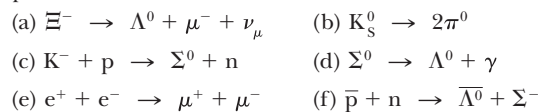
16. En cada uno de los siguientes decaimientos no permitidos, diga cuál es la ley de conservación que se viola:



17. Determine si la extrañeza se conserva en los siguientes decaimientos y reacciones.



18. Identifique las cantidades que se conservan en los siguientes procesos:



(g) ¿Cuál de las reacciones puede no ocurrir? ¿Por qué no?

- PG** 19. El decaimiento de la partícula  $\Sigma^+ \rightarrow \pi^+ + n$  es observado dentro de una cámara de burbujas. La figura P44.19 (página 1256) representa las trayectorias curvas de las partículas  $\Sigma^+$  y  $\pi^+$ , y la trayectoria invisible del neutrón, en presencia de un campo magnético uniforme de 1.15 T dirigido hacia afuera de la página. Los radios medidos de curvatura son 1.99 m para la partícula  $\Sigma^+$  y 0.580 m para la partícula  $\pi^+$ . A partir de esta información, queremos determinar la masa de la partícula  $\Sigma^+$ .



(a) Encuentre la cantidad de movimiento de las partículas  $\Sigma^+$  y  $\pi^+$ , en unidades MeV/c. (b) El ángulo entre la cantidad de movimiento de las partículas  $\Sigma^+$  y  $\pi^+$  en el momento del decaimiento es  $\theta = 64.5^\circ$ . Encuentre la cantidad de movimiento del neutrón. (c) Calcule la energía total de la partícula  $\pi^+$  y la del neutrón a partir de sus masas conocidas ( $m_\pi = 139.6 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$ ) y la relación entre energía y la cantidad de movimiento relativista. (d) ¿Cuál es la energía total de la partícula  $\Sigma^+$ ? (e) Calcule la masa de la partícula  $\Sigma^+$ . (f) Compare la masa con el valor en la tabla 44.2.

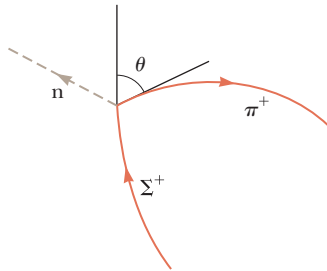


Figura P44.19

### SECCIÓN 44.8 Quarks. La conexión cósmica

20. Las composiciones de los quarks de las partículas  $K^0$  y  $\Lambda^0$  son  $d\bar{s}$  y  $uds$ , respectivamente. Demuestre que la carga, el número bariónico y la extrañeza de estas partículas son iguales, respectivamente, a las sumas de estos números para los constituyentes del quark.
21. Identifique las partículas que corresponden a las combinaciones quark (a)  $suu$ , (b)  $\bar{u}\bar{d}$ , (c)  $\bar{s}\bar{d}$  y (d)  $ssd$ .
22. Está trabajando como asistente de un profesor de física. **CE** Para una próxima conferencia, su profesor le pedirá que prepare una diapositiva de presentación con las siguientes dos reacciones propuestas que podrían proceder a través de la fuerte interacción:
- (i)  $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$
- (ii)  $\pi^- + p \rightarrow K^0 + n$

En la diapositiva, el profesor desea que muestre el análisis de quark de las reacciones y (a) identifique qué reacción se observa y (b) explique por qué no se observa la otra.

23. Una partícula  $\Sigma^0$  que se mueve a través de la materia impacta contra un protón; después surgen una partícula  $\Sigma^+$  y un rayo gamma, así como una tercera partícula. Utilice el modelo de quark de cada uno para determinar la identidad de la tercera partícula.

### SECCIÓN 44.11 Quarks

El problema 11 en el capítulo 38 se puede asignar a esta sección.

24. **Problema de repaso.** Vuelva a la sección 39.4 y demuestre que el corrimiento Doppler de la longitud de onda de las ondas electromagnéticas se describe mediante

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

en donde  $\lambda'$  es la longitud de onda medida por un observador que se mueve a una velocidad  $v$  alejándose de una fuente que emite ondas con longitud  $\lambda$ .

25. **Problema de repaso.** La radiación cósmica de fondo es una radiación de cuerpo negro de una fuente a una temperatura de 2.73 K. (a) Utilice la ley de Wien para determinar la longitud de onda a la cual esta radiación tiene una intensidad máxima. (b) ¿En qué parte del espectro electromagnético se encuentra el pico de la distribución?
26. Si la densidad promedio del Universo es pequeña comparada con la densidad crítica, la expansión del Universo, como la describe la ley de Hubble, sucede a velocidades que son casi constantes a través del tiempo. (a) Demuestre que en este caso la antigüedad del Universo se obtiene mediante el inverso de la constante de Hubble. (b) Calcule  $1/H$  y exprese en años.
27. En sus principios el Universo estaba lleno de fotones de rayo gamma con energía  $\sim k_B T$  y a una temperatura tan elevada que los protones y antiprotones se crearon mediante el proceso  $\gamma \rightarrow p + \bar{p}$  con tanta rapidez que se aniquilaban unos a otros. Conforme el Universo se enfrió por expansión adiabática, su temperatura decayó por debajo de un cierto nivel, y la producción de pares de protones se hizo menos presente. En ese tiempo existían poco más protones que antiprotones, y virtualmente todos los protones del Universo actual existen desde entonces. (a) Estime el orden de magnitud de la temperatura del Universo cuando los protones se condensaron. (b) Estime el orden de magnitud de la temperatura del Universo cuando los electrones se condensaron.

28. **CE** Está trabajando en un laboratorio de investigación de cosmología. Un colega ha propuesto que la materia oscura se distribuye uniformemente en una esfera centrada en el Sol y de radio 1 UA afectando el movimiento de la Tierra a través del espacio. Siente que esa idea no es válida. Realice un cálculo que muestre que el efecto en la Tierra de cualquier materia oscura en esta esfera es minúsculo. Las estimaciones de la densidad de la materia oscura varían ampliamente, pero un valor típico es  $5 \times 10^{-22} \text{ kg}/\text{m}^3$ .

29. **Problema de repaso.** Con ayuda de la ley de Stefan, encuentre la intensidad de la radiación cósmica de fondo emitida por la bola de fuego del Big Bang, a una temperatura de 2.73 K.

30. **CIC** La sección visible del Universo es una esfera centrada en el puente de su nariz, con radio de 13.7 mil millones de años luz. (a) Explique por qué el Universo visible se está haciendo más grande, con su radio creciendo un año luz en cada año. (b) Halle la rapidez con la cual el volumen de la sección visible del Universo está creciendo.

31. **T** El primer quásar más brillante identificado y encontrado hasta la fecha, 3C 273 en la constelación de Virgo, se observó alejándose de la Tierra con una velocidad tan alta que la línea azul de 434 nm  $H_\gamma$  de hidrógeno de Doppler cambió a 510 nm, en la parte verde del espectro. (a) ¿A qué rapidez se está alejando del quásar? (b) Edwin Hubble descubrió que todos los objetos fuera del grupo local de galaxias se alejan de nosotros, con velocidades  $v$  proporcionales a sus distancias  $R$ . La ley de Hubble se expresa como  $v = HR$ , donde la constante de Hubble tiene el valor aproximado  $H \approx 22 \times 10^{-3} \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{ly})$ . Determine la distancia de la Tierra a este quásar.

32. **S** Las diversas líneas espectrales que se observan en la luz de un quásar distante tienen longitudes de onda  $\lambda'_n$  más largas que las longitudes de onda  $\lambda_n$  obtenidas de la luz de una fuente estacionaria. En este caso,  $n$  es un índice que toma diferentes valores para diferentes líneas espectrales. El cambio fraccionario hacia el rojo en la longitud de onda es igual





para todas las líneas espectrales. Es decir, el parámetro de compresión hacia el rojo  $Z$ , definido por

$$Z = \frac{\lambda'_n - \lambda_n}{\lambda_n}$$

común a todas las líneas espectrales de un objeto. En función de  $Z$ , determine (a) la velocidad a la que se aleja el quásar, y (b) la distancia de la Tierra a este quásar.

**SECCIÓN 44.12 Problemas y perspectivas**

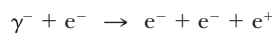
- CIC** 33. La relatividad general clásica considera la estructura del espacio-tiempo como determinística y bien definida hasta pequeñas distancias arbitrarias. Por otro lado, la relatividad cuántica general prohíbe distancias menores a la distancia de Planck, obtenida mediante  $L = (\hbar G/c^3)^{1/2}$ . (a) Calcule el valor de la distancia de Planck. La limitación cuántica sugiere que después del Big Bang, cuando todo el Universo que observamos hoy en día se encontraba dentro de un punto pequeñísimo, no podía observarse nada hasta que este punto creció más allá de la longitud de Planck. Ya que el tamaño del punto creció a la rapidez de la luz, podemos deducir que no fue imposible realizar observación alguna durante el intervalo de tiempo necesario para que la luz recorriera la distancia de Planck. (b) Calcule este intervalo de tiempo, conocido como el tiempo  $T$  de Planck, y compárelo con la época supercaliente que mencionamos en el texto.

**PROBLEMAS ADICIONALES**

34. Identifique la partícula desconocida en el lado izquierdo de la siguiente reacción:



35. Para cada uno de los decaimientos de reacciones siguientes, mencione al menos una ley de conservación que prevenga su ocurrencia
- (a)  $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^0$
  - (b)  $\mu^- \rightarrow \pi^- + \nu_e$
  - (c)  $p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$
36. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? Un fotón de rayos gamma con energía 1.05 MeV golpea un electrón estacionario, haciendo que se produzca la siguiente reacción:



Suponga que las tres partículas se mueven con la misma dirección a la misma velocidad después de la reacción.

37. **Problema de repaso.** Se estima que la supernova Shelton 1987A, ubicada a 170 000 años luz de la Tierra, que ha emitido una ráfaga de neutrinos con una energía de  $\sim 10^{46}$  J (figura P44.37). Suponga que la energía promedio del neutrino fuese de 6 MeV y que el cuerpo humano tuviese un área de sección transversal de 5000 cm<sup>2</sup>. En un orden de magnitud, ¿cuántos de estos neutrinos atravesarían el cuerpo?
38. El flujo de energía transportada por neutrinos procedentes del Sol se estima en el orden de 0.400 W/m<sup>2</sup> en la superficie de la Tierra. Determine la pérdida de masa fraccional del Sol sobre 10<sup>9</sup> años debido a la emisión de neutrinos. La masa del Sol es de  $1.989 \times 10^{30}$  kg. La distancia Tierra-Sol es igual a  $1.496 \times 10^{11}$  m.

© Observatorio Astronómico Australiano, fotografía de David Malin para láminas AAT



© Observatorio Astronómico Australiano, fotografía de David Malin para láminas AAT



**Figura P44.37** Problemas 37 y 48

39. La ley de Hubble puede expresarse en forma vectorial, como  $\vec{v} = H\vec{R}$ . Fuera del grupo local de galaxias, todos los objetos se están alejando de nosotros con velocidades proporcionales a la distancia a la que se encuentran de nosotros. Dicho así, suena como si nuestra ubicación en el Universo fuera particularmente privilegiada. Demuestre que la ley de Hubble es igualmente verdadera para un observador en cualquier otro lugar del Universo. Siga el procedimiento siguiente. Suponga que nos encontramos en el origen de las coordenadas, que un grupo de galaxias se encuentra en el punto  $\vec{R}_1$  —con una velocidad  $\vec{v}_1 = H\vec{R}_1$  respecto a nosotros—, y que otro grupo de galaxias tiene un vector de posición  $\vec{R}_2$  y una velocidad  $\vec{v}_2 = H\vec{R}_2$ . Suponga que las velocidades no son relativistas. Considere el problema desde el punto de vista de un observador ubicado en el primero de estos grupos galácticos. (a) Demuestre que nuestra velocidad respecto a ésta, así como el vector de posición de nuestro grupo galáctico respecto al primero, satisface la ley de Hubble. (b) Demuestre que el desplazamiento y la velocidad del grupo 2 respecto al grupo 1 satisfacen la ley de Hubble.
40. Identifique los conciliadores para las dos interacciones descritas por los diagramas de Feynman y que aparecen en la figura P44.40 (página 1258).
41. Una partícula inestable, en reposo inicial, decae a un protón (energía en reposo de 938.3 MeV) y un pión negativo (energía en reposo de 139.6 MeV). Existe un campo magnético de 0.250 T perpendicular a las velocidades de las partículas creadas. El radio de curvatura de cada trayectoria es de 1.33 m. ¿Cuál es la masa de la partícula inestable original?

**AMT**



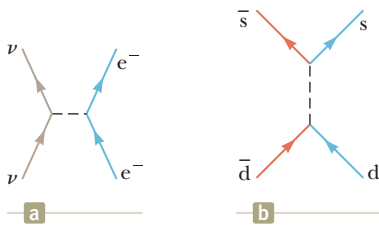


Figura P44.40

42. Una partícula inestable, en reposo inicial, decae a una partícula cargada positivamente  $+e$  y energía en reposo  $E_+$  y una partícula cargada negativamente  $-e$  y energía en reposo  $E_-$ . Existe un campo magnético de magnitud  $B$  perpendicular a las velocidades de las partículas creadas. El radio de curvatura de cada trayectoria es  $r$ . ¿Cuál es la masa de la partícula inestable original?
43. (a) ¿Qué procesos se describen en los diagramas de Feynman de la figura P44.43? (b) ¿Cuál es la partícula que se intercambia en cada proceso?

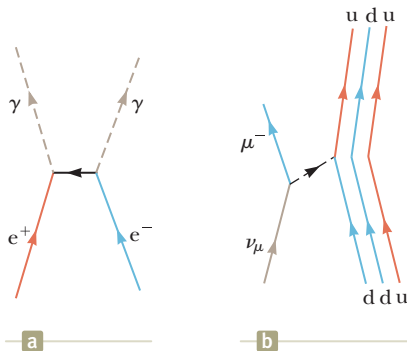


Figura P44.43

44. Está realizando trabajo como asistente de una profesora de cosmología. Ella le pide que calcule la temperatura del Universo en un momento posterior al *Big Bang* cuando los átomos neutros podrían formarse a partir del plasma y el Universo se volvería transparente. Ella le dice que la energía requerida para excitar un átomo es del orden de 1 eV y le sugiere que utilice la función de distribución de Boltzmann  $e^{-E/kBT}$  para encontrar el orden de magnitud de la temperatura umbral a la que el 1.00% de una población de fotones tiene energía mayor a 1.00 eV.
45. Dos protones se aproximan uno frente al otro, cada uno con 70.4 MeV de energía cinética, y entran en una reacción de la cual emergen un protón y un pión positivo en estado de reposo. ¿Cuál es la tercera partícula, obviamente carente de carga y por tanto difícil de detectar, que se crea con esta reacción?

### PROBLEMAS DE DESAFÍO

46. Una partícula de masa  $m_1$  es disparada hacia una partícula estacionaria, con masa  $m_2$ , y ocurre una reacción en la que se crean nuevas partículas de la energía cinética incidente. Tomadas en conjunto, las partículas producto tienen una masa total  $m_3$ . La energía cinética mínima que debe tener la partícula que bombardea para poder inducir esta reacción se conoce como energía de umbral. A este nivel de energía, la energía cinética de los productos está en un nivel mínimo, por lo que la fracción de la energía cinética incidente que está disponible para crear nuevas partículas está en un nivel máximo. Esto ocurre cuando todas las partículas producto

tienen la misma velocidad, de manera que las partículas no tienen energía cinética por movimiento unas respecto a otras. (a) Con ayuda de la conservación de la energía relativista y la cantidad de movimiento, así como la relación energía-cantidad de movimiento relativista, demuestre que la energía de umbral está dada por

$$K_{\min} = \frac{[m_3^2 - (m_1 + m_2)^2]c^2}{2m_2}$$

Calcule la energía de umbral para las reacciones siguientes: (b)  $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$  (Uno de los protones iniciales se encuentra en reposo. Se producen antiprotones.) (c)  $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$  (El protón se encuentra en reposo. Se producen partículas extrañas.) (d)  $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$  (Uno de los protones iniciales se encuentran en reposo. Se producen piones.) (e)  $p + \bar{p} \rightarrow Z^0$ . (Una de las partículas iniciales se encuentra en reposo. Se producen partículas  $Z^0$ , con una masa de 91.2 GeV/c<sup>2</sup>.)

47. Suponga que la densidad media del Universo es igual a la densidad crítica. (a) Demuestre que la edad del universo está dada por  $2/(3H)$ . (b) Calcule  $2/(3H)$  y expréselo en años.
48. La supernova visible a simple vista más reciente fue la supernova Shelton 1987A (figura P44.37). Se encontraba a 170 000 años luz, en nuestra galaxia vecina, la gran Nebulosa de Magallanes. Alrededor de 3 h antes de que su brillantamiento óptico fuera observado, dos experimentos de detección de neutrinos en operación continua registraron al mismo tiempo los primeros neutrinos provenientes de una fuente distinta al Sol. El experimento Irvine-Michigan Brookhaven, dentro de una mina de sal en Ohio, registró 8 neutrinos en un periodo de 6 segundos, y el experimento Kamiokande II, dentro de una mina de zinc en Japón, registró 11 neutrinos en 13 segundos. (Dado que la supernova se encuentra muy al sur en el cielo, estos neutrinos fueron detectados desde abajo. Pasaron a través de la Tierra antes de ser absorbidos por casualidad por núcleos en los detectores.) Las energías de los neutrinos tenían magnitudes de entre 8 MeV y 40 MeV. Si los neutrinos no tienen masa, entonces los neutrinos de todos los rangos de energía deberían viajar juntos a la velocidad de la luz, los datos coinciden con esta posibilidad. Los tiempos de llegada podrían indicar dispersión, simplemente porque los neutrinos fueron creados en diferentes momentos conforme el núcleo de la estrella se colapsaba, convirtiéndose en una estrella de neutrones. Si los neutrinos tienen una masa distinta de cero, los de menor energía deberían moverse comparativamente más despacio. Los datos indican que un neutrino de 10 MeV requeriría, a lo más, 10 segundos más de lo que tardaría un fotón en viajar desde la supernova hasta nosotros. Encuentre el límite superior que esta observación impone a la masa de un neutrino. (Otras evidencias establecen un límite más pequeño.)

49. Se ha sugerido un motor cohete para viajes espaciales con propulsión por medio de fotones y aniquilación de materia antimateria. Suponga que el combustible para una combustión de corta duración consiste de  $N$  protones y  $N$  antiprotones cada uno con una masa  $m$ . (a) Suponga que todo el combustible es aniquilado para producir fotones. Cuando éstos son expulsados del cohete, ¿cuál es la cantidad de movimiento que se le imparte? (b) ¿Qué pasaría si? Si la mitad de los protones y antiprotones se aniquilaran entre sí y la energía liberada fuera utilizada para expulsar las partículas restantes, ¿cuál sería la cantidad de movimiento impartida al cohete? (c) ¿Cuál de los métodos resulta en un cambio mayor en la velocidad del cohete?

# Apéndice A Tablas

**TABLA A.1** Factores de conversión

## Longitud

	<b>m</b>	<b>cm</b>	<b>km</b>	<b>km</b>	<b>pie</b>	<b>mi</b>
1 metro	1	102	$10^{-3}$	39.37	3.281	$6.214 \times 10^{-4}$
1 centímetro	$10^{-2}$	1	$10^{-5}$	0.393 7	$3.281 \times 10^{-2}$	$6.214 \times 10^{-6}$
1 kilómetro	103	105	1	$3.937 \times 10^4$	$3.281 \times 10^3$	0.621 4
1 pulgada	$2.540 \times 10^{-2}$	2.540	$2.540 \times 10^{-5}$	1	$8.333 \times 10^{-2}$	$1.578 \times 10^{-5}$
1 pie	0.304 8	30.48	$3.048 \times 10^{-4}$	12	1	$1.894 \times 10^{-4}$
1 milla	1 609	$1.609 \times 10^5$	1.609	$6.336 \times 10^4$	5 280	1

## Masa

	<b>kg</b>	<b>g</b>	<b>slug</b>	<b>u</b>
1 kilogramo	1	103	$6.852 \times 10^{-2}$	$6.024 \times 10^{26}$
1 gramo	$10^{-3}$	1	$6.852 \times 10^{-5}$	$6.024 \times 10^{23}$
1 slug	14.59	$1.459 \times 10^4$	1	$8.789 \times 10^{27}$
1 unidad masa atómica	$1.660 \times 10^{-27}$	$1.660 \times 10^{-24}$	$1.137 \times 10^{-28}$	1

*Nota:* 1 ton métrica = 1 000 kg.

## Tiempo

	<b>s</b>	<b>min</b>	<b>h</b>	<b>día</b>	<b>año</b>
1 segundo	1	$1.667 \times 10^{-2}$	$2.778 \times 10^{-4}$	$1.157 \times 10^{-5}$	$3.169 \times 10^{-8}$
1 minuto	60	1	$1.667 \times 10^{-2}$	$6.994 \times 10^{-4}$	$1.901 \times 10^{-6}$
1 hora	3 600	60	1	$4.167 \times 10^{-2}$	$1.141 \times 10^{-4}$
1 día	$8.640 \times 10^4$	1 440	24	1	$2.738 \times 10^{-5}$
1 año	$3.156 \times 10^7$	$5.259 \times 10^5$	$8.766 \times 10^3$	365.2	1

## Rapidez

	<b>m/s</b>	<b>cm/s</b>	<b>pie/s</b>	<b>mi/h</b>
1 metro por segundo	1	102	3.281	2.237
1 centímetro por segundo	$10^{-2}$	1	$3.281 \times 10^{-2}$	$2.237 \times 10^{-2}$
1 pie por segundo	0.304 8	30.48	1	0.681 8
1 milla por hora	0.447 0	44.70	1.467	1

*Nota:* 1 mi/min = 60 mi/h = 88 pies/s.

## Fuerza

	<b>N</b>	<b>lb</b>
1 newton	1	0.224 8
1 libra	4.448	1

(Continúa)

**TABLA A.1** Factores de conversión (*continuación*)**Energía, transferencia de energía**

	<b>J</b>	<b>pie · lb</b>	<b>eV</b>
1 joule	1	0.737 6	$6.242 \times 10^{18}$
1 pie-libra	1.356	1	$8.464 \times 10^{18}$
1 electrón volt	$1.602 \times 10^{-19}$	$1.182 \times 10^{-19}$	1
1 caloría	4.186	3.087	$2.613 \times 10^{19}$
1 unidad térmica británica	$1.055 \times 10^3$	$7.779 \times 10^2$	$6.585 \times 10^{21}$
1 kilowatt-hora	$3.600 \times 10^6$	$2.655 \times 10^6$	$2.247 \times 10^{25}$

	<b>cal</b>	<b>Btu</b>	<b>kWh</b>
1 joule	0.238 9	$9.481 \times 10^{-4}$	$2.778 \times 10^{-7}$
1 pie-libra	0.323 9	$1.285 \times 10^{-3}$	$3.766 \times 10^{-7}$
1 electrón volt	$3.827 \times 10^{-20}$	$1.519 \times 10^{-22}$	$4.450 \times 10^{-26}$
1 caloría	1	$3.968 \times 10^{-3}$	$1.163 \times 10^{-6}$
1 unidad térmica británica	$2.520 \times 10^2$	1	$2.930 \times 10^{-4}$
1 kilowatt-hora	$8.601 \times 10^5$	$3.413 \times 10^2$	1

**Presión**

	<b>Pa</b>	<b>atm</b>
1 pascal	1	$9.869 \times 10^{-6}$
1 atmósfera	$1.013 \times 10^5$	1
1 centímetro de mercurio <sup>a</sup>	$1.333 \times 10^3$	$1.316 \times 10^{-2}$
1 libra por pulgada cuadrada	$6.895 \times 10^3$	$6.805 \times 10^{-2}$
1 libra por pie cuadrado	47.88	$4.725 \times 10^{-4}$

	<b>cm Hg</b>	<b>lb/pulg<sup>2</sup></b>	<b>lb/pie<sup>2</sup></b>
1 pascal	$7.501 \times 10^{-4}$	$1.450 \times 10^{-4}$	$2.089 \times 10^{-2}$
1 atmósfera	76	14.70	$2.116 \times 10^3$
1 centímetro de mercurio <sup>a</sup>	1	0.194 3	27.85
1 libra por pulgada cuadrada	5.171	1	144
1 libra por pie cuadrado	$3.591 \times 10^{-2}$	$6.944 \times 10^{-3}$	1

<sup>a</sup>A 0 °C y en una ubicación donde la aceleración tiene su valor "estándar",  $9.806 65 \text{ m/s}^2$ .

**TABLA A.2** Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas

<b>Cantidad</b>	<b>Símbolo común</b>	<b>Unidad<sup>a</sup></b>	<b>Dimensiones<sup>b</sup></b>	<b>Unidades en términos de las unidades básicas del SI</b>
Aceleración	$\vec{a}$	m/s <sup>2</sup>	L/T <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Cantidad de sustancia	$n$	MOL		mol
Ángulo	$\theta, \phi$	radián (rad)		
Aceleración angular	$\vec{\alpha}$	rad/s <sup>2</sup>	T <sup>-2</sup>	s <sup>-2</sup>
Frecuencia angular	$\omega$	rad/s	T <sup>-1</sup>	s <sup>-1</sup>
Cantidad de movimiento angular	$\vec{L}$	kg · m <sup>2</sup> /s	ML <sup>2</sup> /T	kg · m <sup>2</sup> /s
Velocidad angular	$\vec{\omega}$	rad/s	T <sup>-1</sup>	s <sup>-1</sup>
Área	$A$	m <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
Número atómico	$Z$			
Capacitancia	$C$	farad (F)	Q <sup>2</sup> T <sup>2</sup> /ML <sup>2</sup>	A <sup>2</sup> · s <sup>4</sup> /kg · m <sup>2</sup>
Carga	$q, Q, e$	coulomb (C)	Q	A · s

**TABLA A.2** Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas (*continuación*)

Cantidad	Símbolo común	Unidad <sup>a</sup>	Dimensiones <sup>b</sup>	Unidades en términos de las unidades básicas del SI
Densidad de carga				
Lineal	$\lambda$	C/m	Q/L	A · s/m
Superficial	$\sigma$	C/m <sup>2</sup>	Q/L <sup>2</sup>	A · s/m <sup>2</sup>
Volumétrica	$\rho$	C/m <sup>3</sup>	Q/L <sup>3</sup>	A · s/m <sup>3</sup>
Conductividad	$\sigma$	1/Ω · m	Q <sup>2</sup> T/ML <sup>3</sup>	A <sup>2</sup> · s <sup>3</sup> /kg · m <sup>3</sup>
Corriente	$I$	AMPERE	Q/T	A
Densidad de corriente	$J$	A/m <sup>2</sup>	Q/TL <sup>2</sup>	A/m <sup>2</sup>
Densidad	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	M/L <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>
Constante dieléctrica	$\kappa$			
Momento dipolar eléctrico	$\vec{p}$	C · m	QL	A · s · m
Campo eléctrico	$\vec{E}$	V/m	ML/QT <sup>2</sup>	kg · m/A · s <sup>3</sup>
Flujo eléctrico	$\Phi_E$	V · m	ML <sup>3</sup> /QT <sup>2</sup>	kg · m <sup>3</sup> /A · s <sup>3</sup>
Fuerza electromotriz	$\mathcal{E}$	volt (V)	ML <sup>2</sup> /QT <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /A · s <sup>3</sup>
Energía, transferencia de energía	$E, U, K, T$	joule (J)	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Entropía	$S$	J/K	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup> K	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> · K
Fuerza	$\vec{F}$	newton (N)	ML/T <sup>2</sup>	kg · m/s <sup>2</sup>
Frecuencia	$f$	Hertz (Hz)	T <sup>-1</sup>	s <sup>-1</sup>
Calor	$Q$	joule (J)	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Inductancia	$L$	henry (H)	ML <sup>2</sup> /Q <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /A <sup>2</sup> · s <sup>2</sup>
Longitud	$\ell, L$	METRO	L	m
Desplazamiento	$\Delta x, \Delta \vec{r}$			
Distancia	$d, h$			
Posición	$x, y, z, \vec{r}$			
Ancho, altura, radio	$w, h, r, R, a, b$			
Momento dipolar magnético	$\vec{\mu}$	N · m/T	QL <sup>2</sup> /T	A · m <sup>2</sup>
Campo magnético	$\vec{B}$	tesla (T) (= Wb/m <sup>2</sup> )	M/QT	kg/A · s <sup>2</sup>
Flujo magnético	$\Phi_B$	weber (Wb)	ML <sup>2</sup> /QT	kg · m <sup>2</sup> /A · s <sup>2</sup>
Masa	$m, M$	KILOGRAMO	M	kg
Momento de inercia	$I$	kg · m <sup>2</sup>	ML <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup>
Cantidad de movimiento	$\vec{p}$	kg · m/s	ML/T	kg · m/s
Periodo	$T$	s	T	s
Permeabilidad del espacio libre	$\mu_0$	N/A <sup>2</sup> (= H/m)	ML/Q <sup>2</sup>	kg · m/A <sup>2</sup> · s <sup>2</sup>
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0$	C <sup>2</sup> /N · m <sup>2</sup> (= F/m)	Q <sup>2</sup> T <sup>2</sup> /ML <sup>3</sup>	A <sup>2</sup> · s <sup>4</sup> /kg · m <sup>3</sup>
Potencial	$V$	volt (V) (= J/C)	ML <sup>2</sup> /QT <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /A · s <sup>3</sup>
Potencia	$P$	watt (W) (= J/s)	ML <sup>2</sup> /T <sup>3</sup>	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
Presión	$P$	pascal (Pa) (= N/m <sup>2</sup> )	M/LT <sup>2</sup>	kg/m · s <sup>2</sup>
Resistencia	$R$	ohm (Ω) (= V/A)	ML <sup>2</sup> /Q <sup>2</sup> T	kg · m <sup>2</sup> /A <sup>2</sup> · s <sup>3</sup>
Calor específico	$c$	J/kg · K	L <sup>2</sup> /T <sup>2</sup> K	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> · K
Rapidez	$v$	m/s	L/T	m/s
Temperatura	$T$	KELVIN	K	K
Tiempo	$t$	SEGUNDO	T	s
Momento de torsión	$\vec{\tau}$	N · m	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Velocidad	$\vec{v}$	m/s	L/T	m/s
Volumen	$V$	m <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>
Longitud de onda	$\lambda$	m	L	m
Trabajo	$W$	joule (J) (= N · m)	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>

<sup>a</sup>Las unidades del SI base están dadas en mayúsculas.<sup>b</sup>Los símbolos M, L, T, K y Q denotan masa, longitud, tiempo, temperatura y carga, respectivamente.



# Apéndice B

## Repaso matemático

Este apéndice en matemáticas tiene la intención de ser un breve repaso de operaciones y métodos. Desde las primeras etapas de este curso usted debió estar familiarizado con las técnicas algebraicas básicas, la geometría analítica y la trigonometría. Las secciones acerca de cálculo diferencial e integral son más detalladas y se dedican a aquellos estudiantes que tengan dificultad para aplicar los conceptos del cálculo a situaciones físicas.

### B.1 Notación científica

Muchas cantidades utilizadas por los científicos con frecuencia tienen valores o muy grandes o muy pequeños. La rapidez de la luz, por ejemplo, es de aproximadamente 300 000 000 m/s, y la tinta requerida para hacer el punto sobre una *i* en este libro tiene una masa de aproximadamente 0.000 000 001 kg. Obviamente, es muy complicado leer, escribir y seguir la pista de estas cantidades. Este problema se evita al usar un método que incorpora potencias del número 10:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

y así sucesivamente. El número de ceros corresponde a la potencia a la que se eleva el diez, llamado **exponente** de diez. Por ejemplo, la rapidez de la luz, 300 000 000 m/s, se puede expresar como  $3.00 \times 10^8$  m/s.

En este método, algunos números representativos menores que la unidad son los siguientes:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = 0.01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,1$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,01$$

En estos casos, el número de lugares que el punto decimal está a la izquierda del dígito 1 es igual al valor del exponente (negativo). Los números expresados como alguna potencia de diez, multiplicados por otro número entre uno y diez, están en notación científica. Por ejemplo, la notación científica para 5 943 000 000 es  $5.943 \times 10^9$  y para 0.000 083 2 es  $8.32 \times 10^{-5}$ .

Cuando se multiplican números expresados en notación científica, la siguiente regla general es muy útil:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \quad (\text{B.1})$$

donde  $n$  y  $m$  pueden ser *cualquier* número (no necesariamente enteros). Por ejemplo,  $10^2 \times 10^5 = 10^7$ . La regla también se aplica si uno de los exponentes es negativo:  $10^3 \times 10^{-8} = 10^{-5}$ .

Cuando se dividen números expresados en notación científica, observe que

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m} \quad (\text{B.2})$$

## Ejercicios

Con la ayuda de las reglas anteriores, compruebe las respuestas de las ecuaciones siguientes:

- $86\,400 = 8.64 \times 10^4$
- $9\,816\,762.5 = 9.816\,762\,5 \times 10^6$
- $0.000\,000\,039\,8 = 3.98 \times 10^{-8}$
- $(4.0 \times 10^8)(9.0 \times 10^9) = 3.6 \times 10^{18}$
- $(3.0 \times 10^7)(6.0 \times 10^{-12}) = 1.8 \times 10^{-4}$
- $\frac{75 \times 10^{-11}}{5.0 \times 10^{-3}} = 1.5 \times 10^{-7}$
- $\frac{(3 \times 10^6)(8 \times 10^{-2})}{(2 \times 10^{17})(6 \times 10^5)} = 2 \times 10^{-18}$

## B.2 Álgebra

### Algunas reglas básicas

Cuando se realizan operaciones algebraicas, se aplican las leyes de la aritmética. Los símbolos como  $x$ ,  $y$  y  $z$  por lo general se usan para representar cantidades no especificadas, llamadas **incógnitas**.

Primero, considere la ecuación

$$8x = 32$$

Si quiere despejar  $x$ , divida (o multiplique) cada lado de la ecuación por el mismo factor sin destruir la igualdad. En este caso, si divide ambos lados entre 8, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{8x}{8} &= \frac{32}{8} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Luego, considere la ecuación

$$x + 2 = 8$$

En este tipo de expresión se puede sumar o restar la misma cantidad de cada lado. Si resta 2 de cada lado, obtiene

$$\begin{aligned} x + 2 - 2 &= 8 - 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

En general, si  $x + a = b$ , entonces  $x = b - a$ .

Ahora considere la ecuación

$$\frac{x}{5} = 9$$



Si multiplica cada lado por 5, queda  $x$  sola a la izquierda y 45 a la derecha:

$$\left(\frac{x}{5}\right)(5) = 9 \times 5$$

$$x = 45$$

En todos los casos, cualquier operación que realice en el lado izquierdo de la igualdad también la debe realizar en el lado derecho.

Debe recordar las siguientes reglas para multiplicar, dividir, sumar y restar fracciones, donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son cuatro números:

	Regla	Ejemplo
<b>Multiplicar</b>	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$	$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$
<b>Dividir</b>	$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2/3}{4/5} = \frac{(2)(5)}{(4)(3)} = \frac{10}{12}$
<b>Sumar</b>	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{(2)(5) - (4)(3)}{(3)(5)} = -\frac{2}{15}$

## Ejercicios

En los ejercicios siguientes, despeje  $x$ :

### Respuestas

- $a = \frac{1}{1+x}$        $x = \frac{1-a}{a}$
- $3x - 5 = 13$        $x = 6$
- $ax - 5 = bx + 2$        $x = \frac{7}{a-b}$
- $\frac{5}{2x+6} = \frac{3}{4x+8}$        $x = -\frac{11}{7}$

## Potencias

Cuando multiplique potencias de una cantidad conocida  $x$ , aplique las siguientes reglas:

$$x^n x^m = x^{n+m} \quad (\text{B.3})$$

Por ejemplo,  $x^2 x^4 = x^{2+4} = x^6$ .

Cuando divida potencias de una cantidad conocida, la regla es

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad (\text{B.4})$$

Por ejemplo,  $x^8/x^2 = x^{8-2} = x^6$ .

Una potencia que es fracción, como  $\frac{1}{3}$ , corresponde a una raíz del modo siguiente:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad (\text{B.5})$$

Por ejemplo,  $4^{1/3} = \sqrt[3]{4} = 1.5874$ . (Para tales cálculos es útil una calculadora científica.)

Por último, cualquier cantidad  $x^n$  elevada a la potencia  $m$  es

$$(x^n)^m = x^{nm} \quad (\text{B.6})$$

La tabla B.1 resume las reglas de exponentes.

## Ejercicios

Verifique las siguientes ecuaciones

- $3^2 \times 3^3 = 243$
- $x^5 x^{-8} = x^{-3}$

**TABLA B.1** Reglas de los exponentes

$$x^0 = 1$$

$$x^1 = x$$

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$x^n/x^m = x^{n-m}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$



3.  $x^{10}/x^{-5} = x^{15}$
4.  $5^{1/3} = 1.709\ 976$  (Use una calculadora.)
5.  $60^{1/4} = 2.783\ 158$  (Use una calculadora.)
6.  $(x^4)^3 = x^{12}$

## Factorización

Las siguientes son algunas fórmulas útiles para factorizar una ecuación:

$$ax + ay + az = a(x + y + z) \quad \text{factor común}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{cuadrado perfecto}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad \text{diferencia de cuadrados}$$

## Ecuaciones cuadráticas

La forma general de una ecuación cuadrática es

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{B.7})$$

donde  $x$  es la cantidad desconocida y  $a$ ,  $b$  y  $c$  son factores numéricos conocidos como **coeficientes** de la ecuación. Esta ecuación tiene dos raíces, dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{B.8})$$

Si  $b^2 \geq 4ac$ , las raíces son reales.

### Ejemplo B.1

Encuentre las raíces de la ecuación  $x^2 + 5x + 4 = 0$ .

#### SOLUCIÓN

Use la ecuación B.8 para encontrar las raíces:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4)(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

Evalúe las raíces para cada una de las posibilidades del signo:

$$x_+ = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \quad x_- = \frac{-5 - 3}{2} = -4$$

donde  $x_+$  se refiere a la raíz correspondiente al signo positivo y  $x_-$  se refiere a la raíz que corresponde al signo negativo.

## Ejercicios

Resuelva las ecuaciones cuadráticas siguientes:

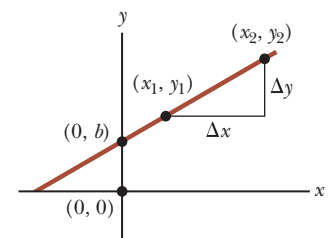
Respuestas		
1. $x^2 + 2x - 3 = 0$	3. $x_+ = 1$	3. $x_- = -3$
2. $2x^2 - 5x + 2 = 0$	$x_+ = 2$	$x_- = \frac{1}{2}$
3. $2x^2 - 4x - 9 = 0$	$x_+ = 1 + \sqrt{22}/2$	$x_- = 1 - \sqrt{22}/2$

## Ecuaciones lineales

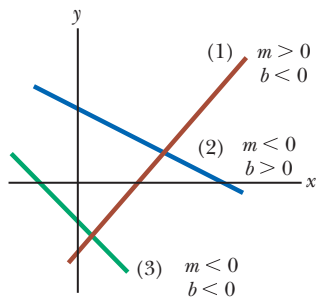
Una ecuación lineal tiene la forma general

$$y = mx + b \quad (\text{B.3})$$

donde  $m$  y  $b$  son constantes. A esta ecuación se le conoce como lineal porque la gráfica de  $y$  en función de  $x$  es una línea recta, como se muestra en la figura B.1. La constante  $b$ , llamada **ordenada al origen**, representa el valor de  $y$  en el que la línea recta interseca el eje  $y$ . La constante  $m$  es igual a la **pendiente** de la línea recta. Si dos puntos cualesquiera en la



**Figura B.1** Una línea recta graficada sobre un sistema coordenado  $xy$ . La pendiente de la recta es el cociente  $\Delta y/\Delta x$ .



**Figura B.2** La línea café tiene una pendiente positiva y una ordenada al origen negativa. La línea azul tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen positiva. La línea verde tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen negativa.

línea recta se especifican mediante las coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , como en la figura B.1, la pendiente de la línea recta se expresa como

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{B.10})$$

Note que  $m$  y  $b$  pueden tener valores positivos o negativos. Si  $m > 0$ , la línea recta tiene una pendiente positiva, como en la figura B.1. Si  $m < 0$ , la línea recta tiene una pendiente negativa. En la figura B.1, tanto  $m$  como  $b$  son positivos. En la figura B.2 se muestran otras tres posibles situaciones. En la figura B.1, tanto  $m$  como  $b$  son positivos. En la figura B.2 se muestran otras tres posibles situaciones.

## Ejercicios

1. Dibuje las gráficas de las siguientes líneas rectas: (a)  $y = 5x + 3$  (b)  $y = -2x + 4$  (c)  $y = -3x - 6$ .
2. Encuentre las pendientes de las líneas rectas descritas en el ejercicio 1.

**Respuestas** (a) 5, (b)  $-2$ , (c)  $-3$ .

3. Encuentre las pendientes de las líneas rectas que pasan por los siguientes conjuntos de puntos: (a)  $(0, -4)$  y  $(4, 2)$ , (b)  $(0, 0)$  y  $(2, -5)$  (c)  $(-5, 2)$  y  $(4, -2)$ .

**Respuestas** (a)  $\frac{3}{2}$  (b)  $-\frac{5}{2}$  (c)  $-\frac{4}{9}$

## Resolución de ecuaciones lineales simultáneas

Considere la ecuación  $3x + 5y = 15$ , que tiene dos incógnitas,  $x$  y  $y$ . Tal ecuación no tiene una solución única. Por ejemplo  $(x = 0, y = 3)$ ,  $(x = 5, y = 0)$  y  $(x = 2, y = \frac{9}{5})$  son todas soluciones a esta ecuación.

Si un problema tiene dos incógnitas, una solución única sólo es posible si se tienen dos piezas de información que, en la mayoría de los casos, son dos ecuaciones. En general, si un problema tiene  $n$  incógnitas, su solución requiere  $n$  ecuaciones. Para resolver dos ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas,  $x$  y  $y$ , resuelva una de las ecuaciones para  $x$  en términos de  $y$  y sustituya esta expresión en la otra ecuación.

En algunos casos, las dos piezas de información pueden ser (1) una ecuación y (2) una condición sobre las soluciones. Por ejemplo, suponga que tenemos la ecuación  $m = 3n$  y la condición de que  $m$  y  $n$  los menores enteros positivos diferentes de cero. Entonces, la única ecuación que no permite una solución única, pero la suma de las condiciones de  $n = 1$  y  $m = 3$ .

### Ejemplo B.2

Resuelva las dos ecuaciones simultáneas

$$(1) \quad 5x + y = -8$$

$$(2) \quad 2x - 2y = 4$$

### SOLUCIÓN

Despeje  $x$  de la ecuación (2)

$$(3) \quad x = y + 2$$

Sustituya la ecuación (3) en la ecuación (1):

$$5(y + 2) + y = -8$$

$$6y = -18$$

$$y = -3$$

Utilice la ecuación (3) para encontrar  $x$ :

$$x = y + 2 = -1$$





**B.2** continuación**Solución alternativa**

Multiplique cada término en la ecuación (1) por 2:

Sume la ecuación (2):

Despeje  $x$ :

Utilice la ecuación (3) para encontrar  $y$ :

$$10x + 2y = -16$$

$$2x - 2y = 4$$

$$12x = -12$$

$$x = -1$$

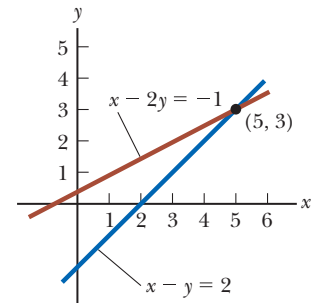
$$y = x - 2 = -3$$

Dos ecuaciones lineales que contienen dos incógnitas también se pueden resolver mediante un método gráfico. Si las líneas rectas que corresponden a las dos ecuaciones se grafican en un sistema coordenado convencional, la intersección de las dos líneas representa la solución. Por ejemplo, considere las dos ecuaciones

$$x - y = 2$$

$$x - 2y = -1$$

Estas ecuaciones se grafican en la figura B.3. La intersección de las dos rectas tiene las coordenadas  $x = 5$  y  $y = 3$ , que representan la solución a las ecuaciones. Debe comprobar esta solución mediante la técnica analítica explicada anteriormente.



**Figura B.3** Solución gráfica para dos ecuaciones lineales.

**Ejercicios**

Resuelva los siguientes pares de ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas:

**Respuestas**

1.  $x + y = 8$   
 $x - y = 2$

$x = 5, y = 3$

2.  $98 - T = 10a$   
 $T - 49 = 5a$

$T = 65, a = 3.27$

3.  $6x + 2y = 6$   
 $8x - 4y = 28$

$x = 2, y = -3$

**Logaritmos**

Suponga que una cantidad  $x$  se expresa como una potencia de alguna cantidad  $a$ :

$$x = a^y \quad (\text{B.11})$$

El número  $a$  se llama número **base**. El **logaritmo** de  $x$  respecto a la base  $a$  es igual al exponente al que se debe elevar la base para satisfacer la expresión  $x = a^y$ :

$$y = \log_a x \quad (\text{B.12})$$

A la inversa, el **antilogaritmo** de  $y$  es el número  $x$ :

$$x = \text{antilog}_a y \quad (\text{B.13})$$

En la práctica, las dos bases usadas con más frecuencia son la base 10, llamada base de logaritmo *común*, y la base  $e = 2.718\ 282$ , llamada constante de Euler o base de logaritmo *natural*. Cuando se usan logaritmos comunes:

$$y = \log_{10} x \quad (\text{o } x = 10^y) \quad (\text{B.14})$$

Cuando se usan logaritmos naturales:

$$y = \ln x \quad (\text{o } x = e^y) \quad (\text{B.15})$$

Por ejemplo,  $\log_{10} 52 = 1.716$ , de modo que  $\text{antilog}_{10} 1.716 = 10^{1.716} = 52$ . Del mismo modo,  $\ln 52 = 3.951$ , de modo que  $\text{antiln } 3.951 = e^{3.951} = 52$ .

En general, observe que puede convertir entre base 10 y base  $e$  con la igualdad

$$\ln x = (2.302\ 585) \log_{10} x \tag{B.16}$$

Por último, las siguientes son algunas propiedades útiles de los logaritmos:

$$\left. \begin{aligned} \log(ab) &= \log a + \log b \\ \log(a/b) &= \log a - \log b \\ \log(a^n) &= n \log a \end{aligned} \right\} \text{cualquier base}$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a$$

$$\ln \left( \frac{1}{a} \right) = -\ln a$$

### B.3 Geometría

La **distancia**  $d$  entre dos puntos que tienen coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{B.17}$$

Dos ángulos son iguales si sus lados son perpendiculares, lado derecho con lado derecho y lado izquierdo con lado izquierdo. Por ejemplo, los dos ángulos marcados  $\theta$  en la figura B.4 son iguales debido a la perpendicularidad de los lados de los ángulos. Para distinguir los lados izquierdo y derecho de un ángulo, imagine estar de pie en el vértice del ángulo y de frente al ángulo.



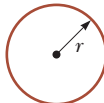
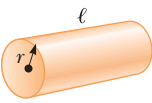

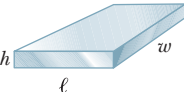
**Medida radián:** La longitud de arco  $s$  de un arco circular (figura B.5) es proporcional al radio  $r$  para un valor fijo de  $\theta$  (en radianes):

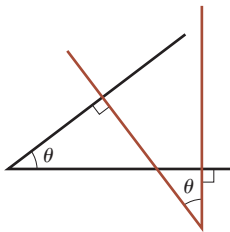
$$s = r\theta$$

$$\theta = \frac{s}{r} \tag{B.18}$$

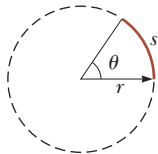
La tabla B.2 da las áreas y volúmenes para varias formas geométricas usadas en todo el texto.

**TABLA B.2** Información útil para geometría

Forma	Área o volumen	Forma	Área o volumen
 Rectángulo	Área = $\ell w$	 Esfera	Área superficial = $4\pi r^2$ Volumen = $\frac{4\pi r^3}{3}$
 Círculo	Área = $\pi r^2$ Circunferencia = $2\pi r$	 Cilindro	Área de superficie lateral = $2\pi r\ell$ Volumen = $\pi r^2\ell$
 Triángulo	Área = $\frac{1}{2}bh$	 Caja rectangular	Área superficial = $2(\ell h + \ell w + hw)$ Volumen = $\ell wh$



**Figura B.4** Los ángulos son iguales porque sus lados son perpendiculares.



**Figura B.5** El ángulo  $\theta$  en radianes es el cociente de la longitud de arco  $s$  dividido entre el radio  $r$  del círculo.



La ecuación de una **línea recta** (figura B.6) es

$$y = mx + b$$

donde  $b$  es la ordenada al origen y  $m$  la pendiente de la recta.

La ecuación de un **círculo** de radio  $R$  con centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = R^2$$

La ecuación de una **elipse** que tiene el origen en su centro (figura B.7) es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde  $a$  es la longitud del semieje mayor (el más grande) y  $b$  es la longitud del semieje menor (el más pequeño).

La ecuación de una **parábola** cuyo vértice está en  $y = b$  (figura B.8) es

$$y = ax^2 + b$$

La ecuación de una **hipérbola rectangular** (Figura B.9) es

$$xy = \text{constante}$$

## B.4 Trigonometría

La parte de las matemáticas basada en las propiedades especiales del triángulo rectángulo se llama trigonometría. Por definición, un triángulo rectángulo es aquel que contiene un ángulo de  $90^\circ$ . Considere el triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10, donde el lado  $a$  es opuesto al ángulo  $\theta$ , el lado  $b$  es adyacente al ángulo  $\theta$  y el lado  $c$  es la hipotenusa del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas por tal triángulo son el seno (sen), el coseno (cos) y la tangente (tan). En términos del ángulo  $\theta$ , estas funciones se definen del modo siguiente:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{a}{b}$$

El teorema de Pitágoras proporciona la siguiente relación entre los lados de un triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

A partir de las definiciones anteriores y del teorema de Pitágoras se sigue que

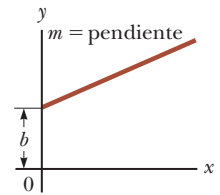
$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

$$\text{tan } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$$

Las funciones cosecante, secante y cotangente se definen como

$$\text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} \quad \text{sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta} \quad \text{cot } \theta = \frac{1}{\text{tan } \theta}$$

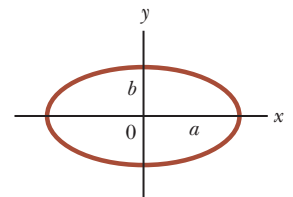
(B.19)



(B.20)

**Figura B.6** Una línea recta con una pendiente  $m$  y una ordenada

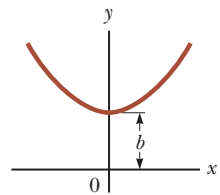
(B.21)



**Figura B.7** Una elipse con semieje mayor  $a$  y semieje menor  $b$ .

(B.22)

(B.23)

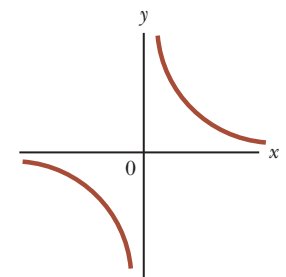


**Figura B.8** Una parábola con su vértice en  $y = b$ .

(B.24)

(B.25)

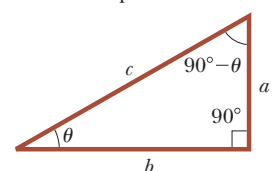
(B.26)



**Figura B.9** Una hipérbola

(B.27)

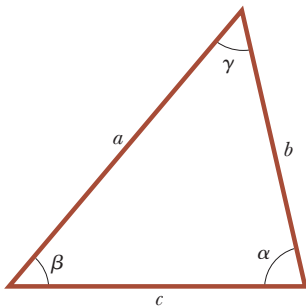
$a$  = lado opuesto  
 $b$  = lado adyacente  
 $c$  = hipotenusa



**Figura B.10** Un triángulo rectángulo, que se usa para definir las funciones básicas de la trigonometría.

**TABLA B.3** Algunas identidades trigonométricas

$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\text{csc}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$
$\text{sec}^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$	$\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$
$\text{sen} 2\theta = 2 \text{sen} \theta \cos \theta$	$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$
$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$	$1 - \cos \theta = 2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}$
$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$
$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen} A \cos B \pm \cos A \text{sen} B$	
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \text{sen} A \text{sen} B$	
$\text{sen} A \pm \text{sen} B = 2 \text{sen} [\frac{1}{2}(A \pm B)] \cos [\frac{1}{2}(A \mp B)]$	
$\cos A + \cos B = 2 \cos [\frac{1}{2}(A + B)] \cos [\frac{1}{2}(A - B)]$	
$\cos A - \cos B = 2 \text{sen} [\frac{1}{2}(A + B)] \text{sen} [\frac{1}{2}(B - A)]$	



**Figura B.11** Un triángulo arbitrario no rectángulo.

Las siguientes relaciones se deducen directamente del triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10:

$$\begin{aligned} \text{sen} \theta &= \cos(90^\circ - \theta) \\ \cos \theta &= \text{sen}(90^\circ - \theta) \\ \cot \theta &= \tan(90^\circ - \theta) \end{aligned}$$

Algunas propiedades de las funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{sen}(-\theta) &= -\text{sen} \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta \end{aligned}$$

Las relaciones que siguen son aplicables a cualquier triángulo, como se muestra en la figura B.11:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \\ \text{Ley de los cosenos} &\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases} \\ \text{Ley de los senos} &\frac{a}{\text{sen} \alpha} = \frac{b}{\text{sen} \beta} = \frac{c}{\text{sen} \gamma} \end{aligned}$$

La tabla B.3 menciona algunas identidades trigonométricas útiles.

**Ejemplo B.3**

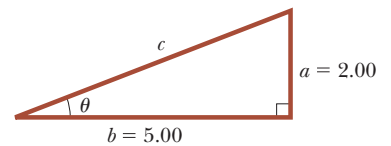
Considere el triángulo rectángulo de la figura B.12 en el que  $a = 2.00$ ,  $b = 5.00$  y  $c$  es desconocido. **(A)** Encuentre  $c$ .

**SOLUCIÓN**

Usando el teorema de Pitágoras:  $c^2 = a^2 + b^2 = 2.00^2 + 5.00^2 = 4.00 + 25.0 = 29.0$   
 $c = \sqrt{29.0} = 5.39$

**(B)** Encuentre el ángulo  $\theta$ .

Utilice la función tangente:  $\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{2.00}{5.00} = 0.400$



**Figura B.12** (Ejemplo B.3)

**B.3** continuación

Con una calculadora se encuentra que  $\theta = \tan^{-1}(0.400) = 21.8^\circ$

donde  $\tan^{-1}(0.400)$  es la notación para “ángulo cuya tangente es 0.400”, que a veces se escribe como  $\arctan(0.400)$ .

**Ejercicios**

1. En la figura B.13, identifique (a) el lado opuesto a  $\theta$ , (b) el lado adyacente a  $\phi$  y luego encuentre (c)  $\cos \theta$ , (d)  $\sin \phi$  y (e)  $\tan \phi$ .

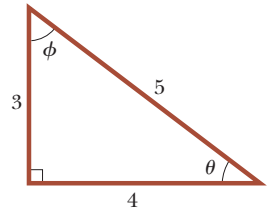
**Respuestas** (a) 3 (b) 3 (c)  $\frac{4}{5}$  (d)  $\frac{4}{5}$  (e)  $\frac{4}{3}$

2. En cierto triángulo rectángulo, los dos lados que son mutuamente perpendiculares miden 5.00 m y 7.00 m. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?

**Respuesta** 8.60 m.

3. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 3.00 m de largo y uno de sus ángulos mide  $30^\circ$ . (a) ¿Cuál es la longitud del lado opuesto al ángulo de  $30^\circ$ ? (b) ¿Cuál es el lado adyacente al ángulo de  $30^\circ$ ?

**Respuestas** (a) 1.5 m, (b) 2.6 m.



**Figura B.13** (Ejercicio 1)

**B.5** Desarrollo de series

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2} x^2 \pm \frac{1}{3} x^3 - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

}  $x$  en radianes

Se pueden usar las siguientes aproximaciones:

Para  $x \ll 1$ :  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$       Para  $x \leq 0.1$  rad:  $\sin x \approx x$

$e^x \approx 1 + x$        $\cos x \approx 1$

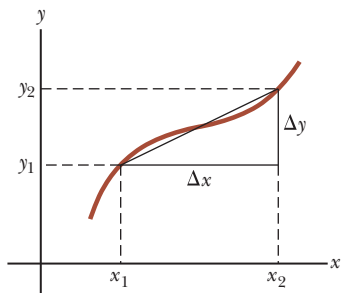
$\ln(1 \pm x) \approx \pm x$        $\tan x \approx x$

**B.6** Cálculo diferencial

En diferentes ramas de la ciencia, a veces, es necesario usar las herramientas básicas del cálculo, inventadas por Newton, para describir fenómenos físicos. El uso del cálculo es fundamental en el tratamiento de diferentes problemas en mecánica newtoniana, electricidad y magnetismo. En esta sección simplemente se establecen algunas propiedades básicas y “reglas empíricas” que deben ser un útil repaso para el estudiante.







**Figura B.14** Las longitudes  $x$  y  $y$  se usan para definir la derivada de esta función en un punto.

Primero, se debe especificar una función que relacione una variable con otra (por ejemplo, una coordenada como función del tiempo). Suponga que una de las variables se llama  $y$  (la variable dependiente) y la otra  $x$  (la variable independiente). Puede tener una relación funcional como

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Si  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son constantes específicas, y se puede calcular para cualquier valor de  $x$ . Por lo general se trata con funciones continuas, es decir, aquellas para las que  $y$  varía “de manera uniforme” con  $x$ .

La derivada de  $y$  respecto a  $x$  se define como el límite a medida que  $x$  tiende a cero de las pendientes de las cuerdas dibujadas entre dos puntos sobre la curva  $y$  en función de  $x$ . En términos matemáticos, esta definición se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \quad (\text{B.28})$$

donde  $\Delta y$  y  $\Delta x$  se definen como  $\Delta x = x_2 - x_1$  y  $\Delta y = y_2 - y_1$  (figura B.14). Note que  $dy/dx$  no significa  $dy$  dividido entre  $dx$ , simplemente es una notación del proceso de límite de la derivada según se define por la ecuación B.28.

Una expresión útil de recordar cuando  $y(x) = ax^n$ , donde  $a$  es una constante y  $n$  es cualquier número positivo o negativo (entero o fracción), es

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} \quad (\text{B.29})$$

**TABLA B.4** Derivadas de varias funciones

$\frac{d}{dx}(a) = 0$
$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$
$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$
$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax$
$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \sin ax$
$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$
$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$
$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} ax) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} ax) = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} ax) = \frac{a}{1 + a^2x^2}$

Nota: Los símbolos  $a$  y  $n$  representan constantes.

Si  $y(x)$  es un polinomio o función algebraica de  $x$ , se aplica la ecuación B.29 a cada término en el polinomio y se toma  $d[\text{constante}]/dx = 0$ . En los ejemplos B.4 al B.7 se evalúan las derivadas de varias funciones.

## Propiedades especiales de la derivada

**A. Derivada del producto de dos funciones.** Si una función  $f(x)$  está dada por el producto de dos funciones, por decir,  $g(x)$  y  $h(x)$ , la derivada de  $f(x)$  se define como

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x)h(x)] = g \frac{dh}{dx} + h \frac{dg}{dx} \quad (\text{B.30})$$

**B. Derivada de la suma de dos funciones.** Si una función  $f(x)$  es igual a la suma de dos funciones, la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} \quad (\text{B.31})$$

**C. Regla de la cadena para cálculo diferencial.** Si  $y = f(x)$  y  $x = g(z)$ , entonces  $dy/dz$  se puede escribir como el producto de dos derivadas:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz} \quad (\text{B.32})$$

**D. La segunda derivada.** La segunda derivada de  $y$  respecto a  $x$  se define como la derivada de la función  $dy/dx$  (la derivada de la derivada). Por lo general se escribe como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) \quad (\text{B.33})$$

Algunas de las derivadas de las funciones más comúnmente usadas se mencionan en la tabla B.4.

**Ejemplo B.4**

Utilice la ecuación B.28 para encontrar la derivada de la siguiente función:  $y(x) = ax^3 + bx + c$ , donde  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son constantes.

**SOLUCIÓN**

Evalúe la función en  $x + \Delta x$ :

$$\begin{aligned} y(x + \Delta x) &= a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c \\ &= a(x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x + \Delta x) + c \end{aligned}$$

Evalúe el numerador de la ecuación B.28:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3) + b \Delta x$$

Sustituya en la ecuación B.28 y tome el límite:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [a(3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2)] + b \\ \frac{dy}{dx} &= 3ax^2 + b \end{aligned}$$

**Ejemplo B.5**

Encuentre la derivada de

$$y(x) = 8x^5 + 4x^3 + 2x + 7$$

**SOLUCIÓN**

Al aplicar la ecuación B.29 a cada término independientemente y recordar que la derivada de una constante es cero, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 8(5)x^4 + 4(3)x^2 + 2(1)x^0 + 0 \\ \frac{dy}{dx} &= 40x^4 + 12x^2 + 2 \end{aligned}$$

**Ejemplo B.6**

Encuentre la derivada de  $y(x) = x^3/(x + 1)^2$  respecto a  $x$ .

**SOLUCIÓN**

Reescriba la función como un producto:

$$y(x) = x^3(x + 1)^{-2}$$

Utilice la ecuación B.30 para encontrar la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x + 1)^{-2} \frac{d}{dx} (x^3) + x^3 \frac{d}{dx} (x + 1)^{-2} \\ &= (x + 1)^{-2} 3x^2 + x^3 (-2)(x + 1)^{-3} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2}{(x + 1)^2} - \frac{2x^3}{(x + 1)^3} = \frac{x^2(x + 3)}{(x + 1)^3} \end{aligned}$$

**Ejemplo B.7**

Una fórmula útil que se deduce de la ecuación B.30 es la derivada del cociente de dos funciones. Demuestre que

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{g(x)}{h(x)} \right] = \frac{h \frac{dg}{dx} - g \frac{dh}{dx}}{h^2}$$



## B.6 continuación

## SOLUCIÓN

El cociente se puede escribir como  $gh^{-1}$  y luego se aplican las ecuaciones B.29 y B.30:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{h}\right) &= \frac{d}{dx}(gh^{-1}) = g \frac{d}{dx}(h^{-1}) + h^{-1} \frac{d}{dx}(g) \\ &= -gh^{-2} \frac{dh}{dx} + h^{-1} \frac{dg}{dx} \\ &= \frac{h \frac{dg}{dx} - g \frac{dh}{dx}}{h^2}\end{aligned}$$

## B.7 Cálculo Integral

La integración se considera como el inverso de la derivación. Como ejemplo, considere la expresión

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b \quad (\text{B.34})$$

que fue el resultado de derivar la función

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

en el ejemplo B.4. La ecuación B.34 se puede escribir como  $dy = f(x)dx = (3ax^2 + b) dx$  y se obtiene  $y(x)$  al “sumar” sobre todos los valores de  $x$ . En términos matemáticos, esta operación inversa se escribe como

$$y(x) = \int f(x) dx$$

Para la función  $f(x)$  dada por la ecuación B.34 se tiene

$$y(x) = \int (3ax^2 + b) dx = ax^3 + bx + c$$

donde  $c$  es una constante de integración. Este tipo de integral se llama integral indefinida, porque su valor depende de la elección de  $c$ .

Una **integral indefinida** general  $I(x)$  se define como

$$I(x) = \int f(x) dx \quad (\text{B.35})$$

donde  $f(x)$  se llama *integrando* y  $f(x) = dI(x)/dx$ .

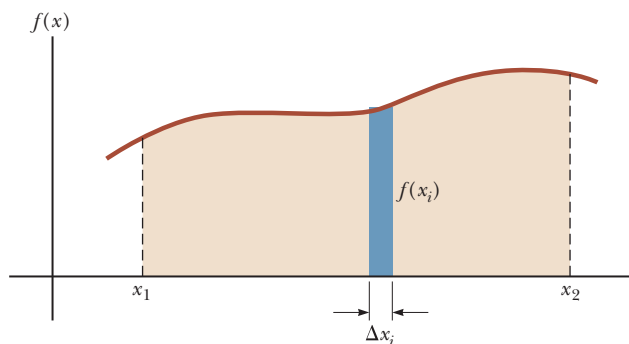
Para una función *continua general*  $f(x)$ , la integral se puede describir como el área bajo la curva acotada por  $f(x)$  y el eje  $x$ , entre dos valores específicos de  $x$ , por decir,  $x_1$  y  $x_2$ , como en la figura B.15.

El área del elemento azul en la figura B.15 es aproximadamente  $f(x_i) \Delta x_i$ . Si suma todos estos elementos de área entre  $x_1$  y  $x_2$  y toma el límite de esta suma cuando  $x_i \rightarrow 0$ , obtiene el área verdadera bajo la curva acotada por  $f(x)$  y el eje  $x$ , entre los límites  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\text{Área} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (\text{B.36})$$

Las integrales del tipo definido por la ecuación B.36 se llaman **integrales definidas**.





**Figura B.15** La integral definida de una función es el área bajo la curva de la función entre los límites  $x_1$  y  $x_2$ .

Una integral común que surge en situaciones prácticas tiene la forma

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \quad (\text{B.37})$$

Este resultado es obvio, pues la derivación del lado derecho respecto a  $x$  da  $f(x) = x^n$  directamente. Si los límites de la integración se conocen, esta integral se vuelve una *integral definida* y se escribe

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \quad (\text{B.38})$$

## Ejercicios

En los ejercicios siguientes, evalúe la integral

	Respuestas		Respuestas
1. $\int_0^a x^2 dx$	$\frac{a^3}{3}$	3. $\int_3^5 x dx$	8
2. $\int_0^b x^{3/2} dx$	$\frac{2}{5} b^{5/2}$		

## Integración parcial

A veces es útil aplicar el método de integración parcial (también llamado “integración por partes”) para evaluar ciertas integrales. Este método usa la propiedad

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{B.39})$$

donde  $u$  y  $v$  se eligen con cuidado para reducir una integral compleja a una más simple. En muchos casos, tienen que hacerse muchas reducciones. Considere la función

$$I(x) = \int x^2 e^x dx$$

que se puede evaluar al integrar por partes dos veces. Primero, si elige  $u = x^2$ ,  $v = e^x$ , obtiene

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - 2 \int e^x x dx + c_1$$



Ahora, en el segundo término, elija  $u = x$ ,  $v = e^x$ , que produce

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx + c_1$$

o

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c_2$$

## El diferencial perfecto

Otro método útil para recordar es el del diferencial perfecto, en el que se busca un cambio de variable tal que el diferencial de la función sea el diferencial de la variable independiente que aparece en el integrando. Por ejemplo, considere la integral

$$I(x) = \int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx$$

Esta integral se vuelve fácil de evaluar si reescribe el diferencial como  $d(\cos x) = -\operatorname{sen} x dx$ . Entonces la integral se convierte en

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x)$$

Si ahora se cambian variables, con  $y = \cos x$ , obtenemos

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx = -\int y^2 dy = -\frac{y^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

La tabla B.5 menciona algunas integrales indefinidas útiles. La tabla B.6 da la integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas. Una lista más completa se puede encontrar en varios textos, como *The Handbook of Chemistry and Physics* (Boca Ratón, FL: CRC Press, que se publica anualmente).

**TABLA B.5** Algunas integrales indefinidas (a cada una de estas integrales debe agregar una constante arbitraria.)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ (siempre que } n \neq -1)$$

$$\int \ln ax dx = (x \ln ax) - x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln x$$

$$\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a+be^{cx})$$

$$\int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln(a+bx)$$

$$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{x+a}{x}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sen} ax)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \quad (a^2-x^2 > 0)$$

$$\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a} \ln \left[ \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad (x^2-a^2 > 0)$$

$$\int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a} \ln \left( \tan \frac{ax}{2} \right)$$



continuación



**TABLA B.5** Algunas integrales indefinidas (*continuación*)

$\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2)$	$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} = -\operatorname{cos}^{-1} \frac{x}{a} \quad (a^2 - x^2 > 0)$	$\int \operatorname{cos}^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax$
$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$	$\int \frac{dx}{\operatorname{cos}^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax$
$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\int \tan^2 ax dx = \frac{1}{a} (\tan ax) - x$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{ a } \right)$	$\int \cot^2 ax dx = -\frac{1}{a} (\cot ax) - x$
$\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2}$	$\int \operatorname{sen}^{-1} ax dx = x(\operatorname{sen}^{-1} ax) + \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{a}$
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$	$\int \operatorname{cos}^{-1} ax dx = x(\operatorname{cos}^{-1} ax) - \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{a}$
$\int x(\sqrt{x^2 \pm a^2}) dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2}$	$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

**TABLA B.6** Integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{Integral de probabilidad de Gauss})$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2}$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} x^5 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2 I_1}{da^2} = \frac{1}{a^3}$$

$$\vdots$$

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_0$$

$$I_{2n+1} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_1$$



## B.8 Propagación de incertidumbre

En experimentos de laboratorio una actividad común es tomar mediciones que fungen como datos no analizados. Estas mediciones son de varios tipos (longitud, intervalo de tiempo, temperatura, voltaje, y así sucesivamente) y se toman mediante varios instrumentos. Sin importar la medición y la calidad de la instrumentación, **siempre hay incertidumbre asociada con una medición física**. Esta incertidumbre es una combinación de la que se asocia con el instrumento y la relacionada con el sistema a medir. Un ejemplo de lo anterior es la incapacidad de determinar con exactitud la posición de una medición de longitud entre las líneas de una regleta. Otro ejemplo de incertidumbre relacionado con el sistema a medir es la variación de la temperatura dentro de una muestra de agua, de modo que es difícil determinar una sola temperatura para la muestra.

Las incertidumbres se expresan en dos formas. La **incertidumbre absoluta** se refiere a una incertidumbre expresada en las mismas unidades que la medición. Por tanto, la longitud de una etiqueta de disco de computadora se puede expresar como  $(5.5 \pm 0.1)$  cm. Sin embargo, la incertidumbre de  $\pm 0.1$  cm por sí misma no es lo suficientemente descriptiva para algunos propósitos. Esta incertidumbre es grande si la medición es 1.0 cm, pero es pequeña si la medición es 100 m. Para dar una explicación más descriptiva de la incertidumbre, se usa la **incertidumbre fraccionaria** o la **incertidumbre porcentual**. En este tipo de descripción la incertidumbre se divide entre la medición real. Por tanto, la longitud de la etiqueta del disco de computadora podría expresarse como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm \frac{0.1 \text{ cm}}{5.5 \text{ cm}} = 5.5 \text{ cm} \pm 0.018 \quad (\text{incertidumbre fraccionaria})$$

o como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm 1.8\% \quad (\text{incertidumbre porcentual})$$

Cuando se combinan mediciones en un cálculo, la incertidumbre porcentual en el resultado final por lo general es mayor que la incertidumbre en las mediciones individuales. A esto se le llama **propagación de incertidumbre** y es uno de los retos de la física experimental.

Algunas reglas simples pueden proporcionar estimaciones razonables de incertidumbre en un resultado calculado:

**Multiplicación y división:** Cuando las mediciones con incertidumbres se multiplican o dividen, sume las *incertidumbres porcentuales* para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

### Ejemplo B.8

Encuentre el área, con incertidumbre asociada, de una placa rectangular de dimensiones  $5.5 \text{ cm} \pm 1.8\%$  por  $6.4 \text{ cm} \pm 1.6\%$ .

### SOLUCIÓN

Debido a que el resultado es una multiplicación, agregue la incertidumbre porcentual.

$$\begin{aligned} A &= \ell w = (5.5 \text{ cm} \pm 1.8\%)(6.4 \text{ cm} \pm 1.6\%) \\ &= 35 \text{ cm}^2 \pm 3.4\% = (35 \pm 1) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

**Suma y resta:** Cuando se suman o restan mediciones con incertidumbre, sume las *incertidumbres absolutas* para obtener la incertidumbre absoluta en el resultado.



**Ejemplo B.9**

Encuentre el cambio en la temperatura, con la incertidumbre asociada, cuando la temperatura aumenta de  $(27.6 \pm 1.5)^\circ\text{C}$  a  $(99.2 \pm 1.5)^\circ\text{C}$

**SOLUCIÓN**

Debido a que el resultado es una resta, sume las incertidumbres absolutas:

$$\begin{aligned}\Delta T &= T_2 - T_1 = (99.2 \pm 1.5)^\circ\text{C} - (27.6 \pm 1.5)^\circ\text{C} \\ &= (71.6 \pm 3.0)^\circ\text{C} = \mathbf{1.6^\circ\text{C} \pm 4.2\%}\end{aligned}$$

**Potencias:** Si una medición se eleva a una potencia, la incertidumbre porcentual se multiplica por dicha potencia para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

**Ejemplo B.10**

Encuentre el volumen de una esfera de radio  $6.20\text{ cm} \pm 2.0\%$ .

**SOLUCIÓN**

Dado que el resultado se determina elevando una cantidad a una potencia, multiplique la potencia por el porcentaje de incertidumbre:

$$\begin{aligned}V &= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6.20\text{ cm} \pm 2.0\%)^3 \\ &= 998\text{ cm}^3 \pm 6.0\% = \mathbf{(998 \pm 60)\text{ cm}^3}\end{aligned}$$

Para cálculos complicados muchas incertidumbres se suman juntas, lo que puede hacer que la incertidumbre en el resultado final sea indeseablemente grande. Los experimentos se deben diseñar de modo que los cálculos sean tan simples como sea posible.

Note que las incertidumbres en un cálculo siempre se suman. Como resultado, un experimento que involucre una resta se debe evitar, si es posible, en especial si las mediciones a restar están cercanas. El resultado de tal cálculo es una diferencia pequeña en las mediciones e incertidumbres que se suman. ¡Es posible que la incertidumbre en el resultado pueda ser mayor que el resultado mismo!



# Apéndice C Tabla periódica de los elementos

Grupo I	Grupo II	Elementos de transición							
<b>H</b> 1 1.007 9 1s									
<b>Li</b> 3 6.941 2s <sup>1</sup>	<b>Be</b> 4 9.0122 2s <sup>2</sup>								
<b>Na</b> 11 22.990 3s <sup>1</sup>	<b>Mg</b> 12 24.305 3s <sup>2</sup>								
<b>K</b> 19 39.098 4s <sup>1</sup>	<b>Ca</b> 20 40.078 4s <sup>2</sup>	<b>Sc</b> 21 44.956 3d <sup>1</sup> 4s <sup>2</sup>	<b>Ti</b> 22 47.867 3d <sup>2</sup> 4s <sup>2</sup>	<b>V</b> 23 50.942 3d <sup>3</sup> 4s <sup>2</sup>	<b>Cr</b> 24 51.996 3d <sup>5</sup> 4s <sup>1</sup>	<b>Mn</b> 25 54.938 3d <sup>5</sup> 4s <sup>2</sup>	<b>Fe</b> 26 55.845 3d <sup>6</sup> 4s <sup>2</sup>	<b>Co</b> 27 58.933 3d <sup>7</sup> 4s <sup>2</sup>	
<b>Rb</b> 37 85.468 5s <sup>1</sup>	<b>Sr</b> 38 87.62 5s <sup>2</sup>	<b>Y</b> 39 88.906 4d <sup>1</sup> 5s <sup>2</sup>	<b>Zr</b> 40 91.224 4d <sup>2</sup> 5s <sup>2</sup>	<b>Nb</b> 41 92.906 4d <sup>4</sup> 5s <sup>1</sup>	<b>Mo</b> 42 95.96 4d <sup>5</sup> 5s <sup>1</sup>	<b>Tc</b> 43 (98) 4d <sup>5</sup> 5s <sup>2</sup>	<b>Ru</b> 44 101.07 4d <sup>7</sup> 5s <sup>1</sup>	<b>Rh</b> 45 102.91 4d <sup>8</sup> 5s <sup>1</sup>	
<b>Cs</b> 55 132.91 6s <sup>1</sup>	<b>Ba</b> 56 137.33 6s <sup>2</sup>	57-71*	<b>Hf</b> 72 178.49 5d <sup>2</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Ta</b> 73 180.95 5d <sup>3</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>W</b> 74 183.84 5d <sup>4</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Re</b> 75 186.21 5d <sup>5</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Os</b> 76 190.23 5d <sup>6</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Ir</b> 77 192.2 5d <sup>7</sup> 6s <sup>2</sup>	
<b>Fr</b> 87 (223) 7s <sup>1</sup>	<b>Ra</b> 88 (226) 7s <sup>2</sup>	89-103**	<b>Rf</b> 104 (267) 6d <sup>2</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Db</b> 105 (268) 6d <sup>3</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Sg</b> 106 (269) 6d <sup>4</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Bh</b> 107 (270) 6d <sup>5</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Hs</b> 108 (277) 6d <sup>6</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Mt</b> <sup>††</sup> 109 (278) 6d <sup>7</sup> 7s <sup>2</sup>	

Símbolo — **Ca** 20 — Número atómico  
 Masa atómica<sup>†</sup> — 40.078  
 4s<sup>2</sup> — Configuración electrónica

\*Serie lantánidos

<b>La</b> 57 138.91 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Ce</b> 58 140.12 5d <sup>1</sup> 4f <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Pr</b> 59 140.91 4f <sup>3</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Nd</b> 60 144.24 4f <sup>4</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Pm</b> 61 (145) 4f <sup>5</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Sm</b> 62 150.36 4f <sup>6</sup> 6s <sup>2</sup>
<b>Ac</b> 89 (227) 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Th</b> 90 232.04 6d <sup>2</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Pa</b> 91 231.04 5f <sup>2</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>U</b> 92 238.03 5f <sup>3</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Np</b> 93 (237) 5f <sup>4</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Pu</b> 94 (244) 5f <sup>6</sup> 7s <sup>2</sup>

\*\*Serie actínidos

Nota: Los valores de masa atómica son promedios sobre isótopos en los porcentajes en los que existen en la naturaleza.

<sup>†</sup> Para un elemento inestable el número de masa del isótopo conocido más estable aparece entre paréntesis.

<sup>††</sup> Para los elementos 109 y superiores, las configuraciones electrónicas se predicen teóricamente.

			Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo 0
							<b>H</b> 1 1.007 9 1s <sup>1</sup>	<b>He</b> 2 4.002 6 1s <sup>2</sup>
			<b>B</b> 5 10.811 2p <sup>1</sup>	<b>C</b> 6 12.011 2p <sup>2</sup>	<b>N</b> 7 14.007 2p <sup>3</sup>	<b>O</b> 8 15.999 2p <sup>4</sup>	<b>F</b> 9 18.998 2p <sup>5</sup>	<b>Ne</b> 10 20.180 2p <sup>6</sup>
			<b>Al</b> 13 26.982 3p <sup>1</sup>	<b>Si</b> 14 28.086 3p <sup>2</sup>	<b>P</b> 15 30.974 3p <sup>3</sup>	<b>S</b> 16 32.066 3p <sup>4</sup>	<b>Cl</b> 17 35.453 3p <sup>5</sup>	<b>Ar</b> 18 39.948 3p <sup>6</sup>
<b>Ni</b> 28 58.693 3d <sup>8</sup> 4s <sup>2</sup>	<b>Cu</b> 29 63.546 3d <sup>10</sup> 4s <sup>1</sup>	<b>Zn</b> 30 65.39 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup>	<b>Ga</b> 31 69.723 4p <sup>1</sup>	<b>Ge</b> 32 72.64 4p <sup>2</sup>	<b>As</b> 33 74.922 4p <sup>3</sup>	<b>Se</b> 34 78.96 4p <sup>4</sup>	<b>Br</b> 35 79.904 4p <sup>5</sup>	<b>Kr</b> 36 83.80 4p <sup>6</sup>
<b>Pd</b> 46 106.42 4d <sup>10</sup>	<b>Ag</b> 47 107.87 4d <sup>10</sup> 5s <sup>1</sup>	<b>Cd</b> 48 112.41 4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup>	<b>In</b> 49 114.82 5p <sup>1</sup>	<b>Sn</b> 50 118.71 5p <sup>2</sup>	<b>Sb</b> 51 121.76 5p <sup>3</sup>	<b>Te</b> 52 127.60 5p <sup>4</sup>	<b>I</b> 53 126.90 5p <sup>5</sup>	<b>Xe</b> 54 131.29 5p <sup>6</sup>
<b>Pt</b> 78 195.08 5d <sup>9</sup> 6s <sup>1</sup>	<b>Au</b> 79 196.97 5d <sup>10</sup> 6s <sup>1</sup>	<b>Hg</b> 80 200.59 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Tl</b> 81 204.38 6p <sup>1</sup>	<b>Pb</b> 82 207.2 6p <sup>2</sup>	<b>Bi</b> 83 208.98 6p <sup>3</sup>	<b>Po</b> 84 (209) 6p <sup>4</sup>	<b>At</b> 85 (210) 6p <sup>5</sup>	<b>Rn</b> 86 (222) 6p <sup>6</sup>
<b>Ds</b> 110 (281) 6d <sup>8</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Rg</b> 111 (282) 6d <sup>9</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Cn</b> 112 (285) 6d <sup>10</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Nh</b> 113 (286) 7p <sup>1</sup>	<b>Fl</b> 114 (289) 7p <sup>2</sup>	<b>Mc</b> 115 (289) 7p <sup>3</sup>	<b>Lv</b> 116 (293) 7p <sup>4</sup>	<b>Ts</b> 117 (294) 7p <sup>5</sup>	<b>Og</b> 118 (294) 7p <sup>6</sup>

<b>Eu</b> 63 151.96 4f <sup>7</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Gd</b> 64 157.25 4f <sup>7</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Tb</b> 65 158.93 4f <sup>8</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Dy</b> 66 162.50 4f <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Ho</b> 67 164.93 4f <sup>11</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Er</b> 68 167.26 4f <sup>12</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Tm</b> 69 168.93 4f <sup>13</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Yb</b> 70 173.04 4f <sup>14</sup> 6s <sup>2</sup>	<b>Lu</b> 71 174.97 4f <sup>14</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>
<b>Am</b> 95 (243) 5f <sup>7</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Cm</b> 96 (247) 5f <sup>7</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Bk</b> 97 (247) 5f <sup>8</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Cf</b> 98 (251) 5f <sup>10</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Es</b> 99 (252) 5f <sup>11</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Fm</b> 100 (257) 5f <sup>12</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Md</b> 101 (258) 5f <sup>13</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>No</b> 102 (259) 5f <sup>14</sup> 7s <sup>2</sup>	<b>Lr</b> 103 (262) 5f <sup>14</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>

Nota: Para obtener una descripción de los datos atómicos, visite [physics.nist.gov/PhysRefData/Elements/per\\_text.html](https://physics.nist.gov/PhysRefData/Elements/per_text.html).





# Apéndice D Unidades del SI

**TABLA D.1** Unidades del SI

Cantidad básica	Unidad básica del SI	
	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

**TABLA D.2** Algunas unidades derivadas del SI

Otra cantidad	Nombre	Símbolo	Expresión en términos de unidades básicas	Expresión en términos de unidades del SI
Ángulo plano	radián	rad	m/m	
Frecuencia	hertz	Hz	s <sup>-1</sup>	
Fuerza	newton	N	kg · m/s <sup>2</sup>	J/m
Presión	pascal	Pa	kg/m · s <sup>2</sup>	N/m <sup>2</sup>
Energía	joule	J	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	N · m
Potencia	watt	W	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	J/s
Carga eléctrica	coulomb	C	A · s	
Potencial eléctrico	volt	V	kg · m <sup>2</sup> /A · s <sup>3</sup>	W/A
Capacitancia	farad	F	A <sup>2</sup> · s <sup>4</sup> /kg · m <sup>2</sup>	C/V
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	kg · m <sup>2</sup> /A <sup>2</sup> · s <sup>3</sup>	V/A
Flujo magnético	weber	Wb	kg · m <sup>2</sup> /A · s <sup>2</sup>	V · s
Campo magnético	tesla	T	kg/A · s <sup>2</sup>	
Inductancia	henry	H	kg · m <sup>2</sup> /A <sup>2</sup> · s <sup>2</sup>	T · m <sup>2</sup> /A

# Respuestas a exámenes rápidos y problemas impares

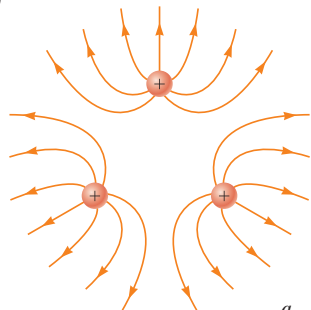
## Capítulo 22

### Respuestas a exámenes rápidos

- (a), (c), (e)
- (e)
- (b)
- (a)
- A, B, C

### Respuestas a problemas impares

- (a)  $+1.60 \times 10^{-19}$  C,  $1.67 \times 10^{-27}$  kg  
(b)  $+1.60 \times 10^{-19}$  C,  $3.82 \times 10^{-26}$  kg  
(c)  $-1.60 \times 10^{-19}$  C,  $5.89 \times 10^{-26}$  kg  
(d)  $+3.20 \times 10^{-19}$  C,  $6.65 \times 10^{-26}$  kg  
(e)  $-4.80 \times 10^{-19}$  C,  $2.33 \times 10^{-26}$  kg  
(f)  $+6.40 \times 10^{-19}$  C,  $2.33 \times 10^{-26}$  kg  
(g)  $+1.12 \times 10^{-18}$  C,  $2.33 \times 10^{-26}$  kg  
(h)  $-1.60 \times 10^{-19}$  C,  $2.99 \times 10^{-26}$  kg
- $3.60 \times 10^6$  N hacia abajo
- (a)  $8.74 \times 10^{-8}$  N (b) repulsiva
- (a) 0.951 m (b) sí, si la tercera perla tiene carga positiva
- (a)  $8.74 \times 10^{-8}$  N (b)  $2.19 \times 10^6$  m/s
- $k_e \frac{Q^2}{d^2} \left[ \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{i} + \left( 2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \hat{j} \right]$
- (b)  $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{md^3}{k_e q Q}}$  (c)  $4a \sqrt{\frac{k_e q Q}{md^3}}$
- (a)  $-(5.58 \times 10^{-11} \text{ N/C}) \hat{j}$  (b)  $(1.02 \times 10^{-7} \text{ N/C}) \hat{j}$
- (a)  $k_e \frac{Q}{d^2} [(1 - \sqrt{2}) \hat{i} + \sqrt{2} \hat{j}]$   
(b)  $-k_e \frac{Q}{4d^2} [(1 + 4\sqrt{2}) \hat{i} + 4\sqrt{2} \hat{j}]$
- (a)  $1.80 \times 10^4$  N/C a la derecha (b)  $8.98 \times 10^{-5}$  N a la izquierda
- (a)  $(-0.599 \hat{i} - 2.70 \hat{j})$  kN/C (b)  $(-3.00 \hat{i} - 13.5 \hat{j})$   $\mu$ N
- (a)



- (b) hacia la barra (c)  $1.7k_e \frac{q}{a^2}$   
(d) hacia arriba en el plano de la página
- (a) 111 ns (b) 5.68 mm (c)  $(450 \hat{i} + 102 \hat{j})$  km/s
  - $4.52 \times 10^{-14}$  C
  - $-\frac{\pi^2 k_e q}{6a^2} \hat{i}$

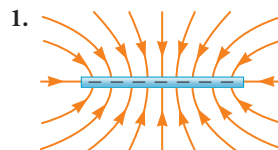
- $\frac{mg}{|Q|} \sin \theta$  (b)  $3.19 \times 10^3$  N/C bajo el plano inclinado
- (a)  $1.09 \times 10^{-8}$  C (b)  $5.44 \times 10^{-3}$  N
- (a)  $24.2 \hat{i}$  N/C (b)  $(-4.21 \hat{i} + 8.42 \hat{j})$  N/C
- 25.9 cm
- $1.67 \times 10^{-5}$  C
- 1.98  $\mu$ C
- $1.14 \times 10^{-7}$  C sobre una esfera y  $5.69 \times 10^{-8}$  sobre la otra
- (a)  $\theta_1 = \theta_2$
- (a) 0.307 s (b) Sí; la fuerza de la gravedad hacia abajo no es despreciable en esta situación, por lo que la tensión en la cuerda depende tanto de la fuerza de la gravedad como de la fuerza eléctrica.
- (a)  $\vec{E} = \frac{935x}{(0.0625 + x^2)^{3/2}} \hat{i}$  donde  $\vec{E}$  está en newtons por coulomb y  $x$  está en metros (b)  $4.00 \hat{i}$  kN/C  
(c)  $x = 0.0168$  m y  $x = 0.916$  m  
(d) en ninguna parte el campo es mayor que 16 000 N/C

## Capítulo 23

### Respuestas a exámenes rápidos

- (e)
- (b) y (d)

### Respuestas a problemas impares



- $6.64 \times 10^6$  N/C lejos del centro del anillo
  - $2.41 \times 10^7$  N/C lejos del centro del anillo
  - $6.39 \times 10^6$  N/C lejos del centro del anillo
  - $6.64 \times 10^5$  N/C lejos del centro del anillo
- $9.35 \times 10^7$  N/C lejos del centro del disco
  - $1.04 \times 10^8$  N/C lejos del centro del disco
  - $5.15 \times 10^5$  N/C lejos del centro del disco (casi 11% mayor)
  - $5.19 \times 10^5$  N/C lejos del centro del disco (casi 0.7% mayor)
- (a)  $k_e \frac{\lambda_0}{x_0}$  (b) hacia la izquierda
- (a)  $\frac{k_e Q \hat{i}}{h} \left[ \frac{1}{(d^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{1}{((d+h)^2 + R^2)^{1/2}} \right]$   
(b)  $\frac{2k_e Q \hat{i}}{R^2 h} \left[ h + (d^2 + R^2)^{1/2} - ((d+h)^2 + R^2)^{1/2} \right]$
- (a)  $1.98 \times 10^6$  N  $\cdot$  m<sup>2</sup>/C (b) 0
- 28.2 N  $\cdot$  m<sup>2</sup>/C
- $-Q/\epsilon_0$  para  $S_1$ ; 0 para  $S_2$ ;  $-2Q/\epsilon_0$  para  $S_3$ ; 0 para  $S_4$

17. (a)  $339 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$  (b) No. El campo eléctrico no es uniforme en esta superficie, por lo que la integral en la ecuación 23.7 no puede ser evaluada.
19.  $-18.8 \text{ kN} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
21. (a)  $\frac{q}{2\epsilon_0}$  (b)  $\frac{q}{2\epsilon_0}$  (c) Los flujos son iguales. El plano y el cuadrado parecen iguales a la carga.
23. (a)  $EA \cos \theta$  (b)  $-EA \sin \theta$  (c)  $-EA \cos \theta$  (d)  $EA \sin \theta$   
(e) 0 para las dos caras (f) 0 (g) 0
25.  $3.50 \text{ kN}$
27.  $508 \text{ kN/C}$  arriba
29. (a)  $51.4 \text{ kN/C}$  exterior (b)  $645 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
31.  $\vec{E} = \rho r/2\epsilon_0 = 2\pi k_e \rho r$  lejos del eje
33. (a) 0 (b)  $3.65 \times 10^5 \text{ N/C}$  (c)  $1.46 \times 10^6 \text{ N/C}$   
(d)  $6.49 \times 10^5 \text{ N/C}$
35. (a)  $r = a \left( \frac{-q}{4Q} \right)^{1/3}$  (b) Sí, esto es posible para cualquier valor de  $r > a$ .
37.  $0.438 \cdot \text{m}^2/\text{C}$
39.  $-\frac{k_e \lambda_0}{2x_0} \hat{i}$
41.  $-0.706 \hat{i} \text{ N}$
43.  $8.27 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
45. (a)  $E = \frac{Cd^3}{24\epsilon_0}$  a la derecha para  $x > d/2$  y a la izquierda para  $x < -d/2$  (b)  $\vec{E} = \frac{Cx^3}{3\epsilon_0} \hat{i}$
47. (a)  $\frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \left( a - \frac{2r}{3b} \right)$  (b)  $\frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} \left( a - \frac{2R}{3b} \right)$

## Capítulo 24

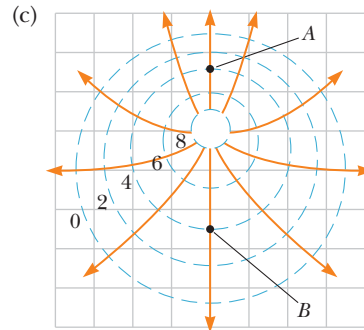
### Respuestas a exámenes rápidos

1. (i) (b) (ii) (a)  
2. Ⓑ a Ⓒ, Ⓒ a Ⓓ, Ⓐ a Ⓑ, Ⓓ a Ⓔ  
3. (i) (c) (ii) (a)  
4. (i) (a) (ii) (a)

### Respuestas a problemas impares

1.  $1.35 \text{ MJ}$
3. (a)  $1.13 \times 10^5 \text{ N/C}$  (b)  $1.80 \times 10^{-14} \text{ N}$  (c)  $4.37 \times 10^{-17} \text{ J}$
5. (a)  $0.400 \text{ m/s}$  (b) Es lo mismo. Debido a que el campo eléctrico es uniforme, cada barra siente una fuerza del mismo tamaño que antes.
7.  $6.93 k_e \frac{Q}{d}$
9.  $-k_e \frac{Q}{R}$
11. a)  $4\sqrt{2} k_e \frac{Q}{a}$  (b)  $4\sqrt{2} k_e \frac{qQ}{a}$
15. (a) No tiene sentido (b)  $\frac{2k_e q}{a}$
17. (a)  $10.8 \text{ m/s}$  y  $1.55 \text{ m/s}$  (b) Serían mayores. Las esferas conductoras se polarizarán entre sí, con la mayor parte de la carga positiva de una y la carga negativa de la otra en sus caras interiores. Inmediatamente antes de que las esferas colisionen, sus centros de carga estarán más cerca que sus centros geométricos, por lo que tendrán menos energía potencial eléctrica y más energía cinética.

19.  $22.8 k_e \frac{q^2}{s}$
21.  $E_y = \frac{k_e Q}{y\sqrt{\ell^2 + y^2}}$
23. (a)  $E_A > E_B$  El campo eléctrico se puede interpretar como la tasa de cambio del potencial eléctrico en el espacio. Las superficies equipotenciales están más juntas en A que en B, por lo que el potencial cambia más rápidamente en el espacio en A. (b) La magnitud del campo eléctrico en B es de aproximadamente  $200 \text{ V/m}$  según la velocidad de cambio de la electricidad potencial en el espacio y ecuación 24.16.



- (c)
25. (a)  $\text{C/m}^2$  (b)  $k_e \alpha \left[ L - d \ln \left( 1 + \frac{L}{d} \right) \right]$
27.  $k_e \lambda (\pi + 2 \ln 3)$
29. No. Un conductor de cualquier forma establece una superficie equipotencial. Sin embargo, si la superficie varía en forma, no hay una forma clara de relacionar el campo eléctrico en un punto de la superficie con el potencial de la superficie.
31.  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$
33.  $E_{\text{cristal}} = E_{\text{Al}}$
35. (a)  $0, 1.67 \text{ MV}$  (b)  $5.84 \text{ MN}$  fuera,  $1.17 \text{ MV}$   
(c)  $11.9 \text{ MN/C}$  fuera,  $1.67 \text{ MV}$
37. Usando la ecuación 24.13 para la energía potencial del átomo y usando los valores numéricos proporcionados,  $n$  no resulta ser un número entero. Por tanto, el problema no describe un estado permitido del átomo.
39. (a)  $-\frac{k_e q}{4a}$  (b) la expresión aproximada  $-2k_e qa/x^2 \text{ da}$   
 $-k_e q/4.5$ , la cual solo es diferente por un 11%.
41.  $k_e \lambda \ln \left[ \frac{a + L + \sqrt{(a + L)^2 + b^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right]$
43. (a)  $4.07 \text{ kV/m}$  (b)  $488 \text{ V}$  (c)  $7.82 \times 10^{-17} \text{ J}$  (d)  $306 \text{ km/s}$   
(e)  $3.89 \times 10^{11} \text{ m/s}^2$  hacia la placa negativa  
(f)  $6.51 \times 10^{-16} \text{ N}$  hacia la placa negativa  
(g)  $4.07 \text{ kV/m}$  (h) son iguales.
45. (a)  $Q \left( \frac{r}{a} \right)^3$  (b)  $k_e \frac{Qr}{a^3}$  (c)  $Q$  (d)  $k_e \frac{Q}{r^2}$  (e)  $E = 0$   
(f)  $-Q$  (g)  $+Q$  (h) la superficie interior de radio  $b$
47. (a)  $-4.01 \text{ nC}$  (b)  $+9.57 \text{ nC}$  (c)  $+4.01 \text{ nC}$  (d)  $+5.56 \text{ nC}$
49.  $\pi k_e C \left[ R\sqrt{R^2 + x^2} + x^2 \ln \left( \frac{x}{R + \sqrt{R^2 + x^2}} \right) \right]$



51. (a)  $\frac{k_e Q}{h} \ln \left[ \frac{d + h + \sqrt{(d+h)^2 + R^2}}{d + \sqrt{d^2 + R^2}} \right]$   
 (b)  $\frac{k_e Q}{R^2 h} \left[ (d+h)\sqrt{(d+h)^2 + R^2} - d\sqrt{d^2 + R^2} - 2dh - h^2 + R^2 \ln \left( \frac{d + h + \sqrt{(d+h)^2 + R^2}}{d + \sqrt{d^2 + R^2}} \right) \right]$

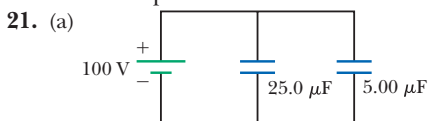
## Capítulo 25

### Respuestas a exámenes rápidos

- (d)
- (a)
- (a)
- (b)
- (a)

### Respuestas a problemas impares

- (a) 9.00 V (b) 12.0 V
- 4.43  $\mu\text{m}$
- $\frac{(2N-1)\epsilon_0(\pi-\theta)R^2}{d}$
- (a) 2.81  $\mu\text{F}$  (b) 12.7  $\mu\text{F}$
- Diez
- (a) 5.96  $\mu\text{F}$  (b) 89.5  $\mu\text{C}$  en 20  $\mu\text{F}$ , 63.2  $\mu\text{C}$  en 6  $\mu\text{F}$ , y 26.3  $\mu\text{C}$  en 15  $\mu\text{F}$  y 3  $\mu\text{F}$
- 12.9  $\mu\text{F}$
- 6.00 pF y 3.00 pF
- (a) 216  $\mu\text{J}$  (b) 54.0  $\mu\text{J}$
- (a)  $2.50 \times 10^{-2}$  J (b) 66.7 V (c)  $3.33 \times 10^{-2}$  J  
 (d) El agente positivo realiza el trabajo positivo separando las placas.



- (b) 0.150 J (c) 268 V  
 (d)

23. (b)  $\frac{k_e q_1^2}{2R_1} + \frac{K_e(Q - q_1)^2}{2R_2}$  (c)  $\frac{R_1 Q}{R_1 + R_2}$  (d)  $\frac{R_2 Q}{R_1 + R_2}$   
 (e)  $V_1 = \frac{k_e Q}{R_1 + R_2}$  y  $V_2 = \frac{k_e Q}{R_1 + R_2}$  (f) 0

- (a) 81.3 pF (b) 2.40 kV
- 1.04 m
- (a) 40.0  $\mu\text{J}$  (b) 500 V
- (a) 100 pF (b) 0.22  $\mu\text{C}$  (c) 2.2 kV
- $2.51 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 2.51 \text{ L}$
- (a)  $25.0 \mu\text{F}(1 - 0.846f)^{-1}$  (b) 25.0  $\mu\text{F}$ , la expresión general concuerda (c) 162  $\mu\text{F}$ ; la expresión general concuerda.

39. (a)  $\frac{Q_0^2 d(\ell - x)}{2\epsilon_0 \ell^3}$  (b)  $\frac{Q_0^2 d}{2\epsilon_0 \ell^3}$  a la derecha (c)  $\frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 \ell^4}$   
 (d)  $\frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 \ell^4}$  (e) Son precisamente iguales.

41. 579 V  
 43. (a) Un condensador no se puede usar solo: se consumiría. El técnico puede usar dos capacitores en serie, conectados en paralelo a otros dos capacitores en serie. Otra posibilidad son dos capacitores en paralelo, conectados en serie a otros dos capacitores en paralelo. En cualquier caso, un capacitor quedará en la caja.  
 (b) Cada uno de los cuatro capacitores estará expuesto a un voltaje máximo de 45 V.

45.  $k = \frac{C(\Delta V)^2}{f^2(1-f)d^2}$   
 47.  $\frac{C_0}{2}(\sqrt{3} - 1)$   
 49. (a)  $\frac{\epsilon_0 \ell}{d}[\ell + x(\kappa - 1)]$  (b)  $\frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 \ell[\ell + x(\kappa - 1)]}$   
 (c)  $\frac{Q^2 d(\kappa - 1)}{2\epsilon_0 \ell[\ell + x(\kappa - 1)]^2} \hat{i}$  (d)  $205 \hat{i} \mu\text{N}$

## Capítulo 26

### Respuestas a exámenes rápidos

- (a) > (b) = (c) > (d)
- (b)
- (b)
- (a)

### Respuestas a problemas impares

- 27.0 años
- 1.05 mA
- (a)  $0.632 I_0 \tau$  (b)  $0.999 95 I_0 \tau$  (c)  $I_0 \tau$
- (a) 17.0 A (b) 85.0 kA/m<sup>2</sup>
- 0.256 C
- 8.89  $\Omega$
- (a) 1.82 m (b) 280  $\mu\text{m}$
- $6.00 \times 10^{-15} (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
- 0.12
- (a) 31.5 n $\Omega \cdot \text{m}$  (b) 6.35 MA/m<sup>2</sup> (c) 49.9 mA  
 (d) 658  $\mu\text{m/s}$  (e) 0.400 V
- 227°C
- (a)  $3.00 \times 10^8$  W (b)  $1.75 \times 10^{17}$  W
- 36.1%
- (a) \$1.48 (b) \$0.005 34 (c) \$0.381
- \$0.494/día
- (a) 4.75 m (b) 340 W
- ~ \$10
- 50.0 MW
- (a)  $\frac{Q}{4C}$  (b)  $\frac{Q}{4}$  en C,  $\frac{3Q}{4}$  en 3C  
 (c)  $\frac{Q^2}{32C}$  in C,  $\frac{3Q^2}{32C}$  in 3C (d)  $\frac{3Q^2}{8C}$



39. (a) 8.00 V/m en la dirección de  $x$  positiva (b) 0.637  $\Omega$   
 (c) 6.28 A en la dirección de  $x$  positiva. (d) 200 MA/m<sup>2</sup>
41. (a) Cualquier diámetro  $d$  y longitud  $\ell$  relacionadas por  $d^2 = (4.77 \times 10^{-8})\ell$  donde  $d$  y  $\ell$  están en metros.
43. (b) Las cargas fluyen en la dirección del voltaje decreciente. La energía fluye por calor en la dirección de la disminución de la temperatura.
45. (a)  $\frac{\epsilon_0 \ell}{2d}(\ell + 2x + \kappa \ell - 2\kappa x)$  (b)  $\frac{\epsilon_0 \ell v \Delta V}{d}(\kappa - 1)$  en el sentido de las manecillas del reloj.
47. El valor de 11.4 A es el resultado de sustituir el voltaje y la resistencia dados en la ecuación 26.7. Sin embargo, la resistencia medida para una bombilla con un ohmímetro no es la resistencia a la que opera, debido al cambio en la resistividad con la temperatura. La mayor resistencia del filamento a la temperatura de funcionamiento reduce significativamente la corriente.

## Capítulo 27

### Respuestas a exámenes rápidos

- (a)
- (b)
- (a)
- (i) (b) (ii) (a) (iii) (a) (iv) (b)
- (i) (c) (ii) (d)

### Respuestas a problemas impares

- (a) 4.59  $\Omega$  (b) 8.16%
- (a) 75 W (b) 100 W (c) 175 W (d) Dos: posiciones 3 y 4 del interruptor. En ambos casos la potencia es de 100 W.
- (a)  $I_A = \mathcal{E}/R$ ,  $I_B = I_C = \mathcal{E}/2R$  (b) B y C tienen la misma brillantez debido a que transportan la misma corriente.
- $0.6 \Omega < R_{\text{extra}} < 1.6 \Omega$  y  $0.672 \text{ k}\Omega < R_{\text{extra}} < 1.74 \text{ k}\Omega$
- (a) 1.00 k $\Omega$  (b) 2.00 k $\Omega$  (c) 3.00 k $\Omega$
- (a) El hot dog solo y los dos en paralelo se cocinarán primero. (b) hot dog solo y los dos en paralelo: 57.3 s; dos hot dog en serie: 229 s
- 14.2 W a 2.00  $\Omega$ , 28.4 W a 4.00  $\Omega$ , 1.33 W a 3.00  $\Omega$ , 4.00 W a 1.00  $\Omega$
- (a)  $\Delta V_1 = \frac{\mathcal{E}}{3}$ ,  $\Delta V_2 = \frac{2\mathcal{E}}{9}$ ,  $\Delta V_3 = \frac{4\mathcal{E}}{9}$ ,  $\Delta V_4 = \frac{2\mathcal{E}}{3}$   
 (b)  $I_1 = I$ ,  $I_2 = I_3 = \frac{I}{3}$ ,  $I_4 = \frac{2I}{3}$  (c)  $I_4$  aumenta y  $I_1$ ,  $I_2$ , y  $I_3$  disminuyen (d)  $I_1 = \frac{3I}{4}$ ,  $I_2 = I_3 = 0$ ,  $I_4 = \frac{3I}{4}$
- (a) 0.846 A en la resistencia de 8.00- $\Omega$ , 0.462 A en la rama media, 1.31 A en la rama derecha (b) -2.222 J por la batería de 4.00V, 1.88 kJ por la batería de 12.0-V (c) 687 J a 8.00  $\Omega$ , 128 J a 5.00  $\Omega$ , 25.6 J a la resistencia de 1.00- $\Omega$  en la rama central, 616 J a 3.00  $\Omega$ , 205 J a la resistencia de 1.00- $\Omega$  en la rama derecha (d) la energía química en el batería 12.0-V se transforma en energía interna en las resistencias. La batería de 4.00-V se está cargando, por lo que su energía potencial química se incrementa a expensas de alguna energía potencial química en la batería de 12.0-V. (e) 1.66 kJ
- 50.0 mA de  $a$  a  $e$
- (a) No. El circuito no se puede simplificar más, y las reglas de Kirchhoff se deben usar para analizarlo. (b)  $I_1 = 3.50 \text{ A}$  (c)  $I_2 = 2.50 \text{ A}$  (d)  $I_3 = 1.00 \text{ A}$

- (a) 2.00 ms (b)  $1.80 \times 10^{-4} \text{ C}$  (c)  $1.14 \times 10^{-4}$
- (a) 1.50 s (b) 1.00 s (c)  $i = 200 + 100e^{-4} \text{ C}$  donde  $i$  está en microamperes y  $t$  en segundos
- 587 k $\Omega$
- No.
- (a)  $\sim 10^{-14}$  (b)  $\sim 10^{-10} \text{ V}$
- 7.49  $\Omega$
- (a) 1.02 A descendente (b) 0.364 A descendente  
 (c) 1.38 A ascendente (d) 0 (e) 66.0  $\mu\text{C}$
- (a) 4.00 V (b) El punto  $a$  está en el potencial más alto.
- 6.00  $\Omega$ , 3.00  $\Omega$
- (a)  $q = 240(1 - e^{-t/6})$  (b)  $q = 360(1 - e^{-t/6})$ , donde en ambas respuestas,  $q$  está en microcoulombs y  $t$  en milisegundos
- (a) 4.40  $\Omega$  (b) 32.0 W (c) 9.60 W (d) 70.4 W (e) 48.0 W
- (a) 9.30 V (b) 2.51  $\Omega$  (c) 18.6 V (d) 3.70 A (e) 1.09 A (f) 14.3 W (g) 8.54 W (h) Debido a la resistencia interna de las baterías, el voltaje del terminal del par de baterías no es el mismo en ambos casos.
- (a) 0 in 3 k $\Omega$ , 333  $\mu\text{A}$  in 12 k $\Omega$  y 15 k $\Omega$  (b) 50.0  $\mu\text{C}$   
 (c)  $i(t) = 278e^{-t/0.180}$ , donde  $i$  está en microamperes y  $t$  en segundos (d) 290 ms
- (a)  $R_x = R_2 - \frac{1}{4}R_1$  (b) No;  $R_x = 2.75 \Omega$ , así que la estación está inadecuadamente aterrizada.
- ( $R_1 + 2R_2$ ) Cln 2

## Capítulo 28

### Respuestas a exámenes rápidos

- (e)
- (i) (b) (ii) (a)
- (c)
- (i) (c), (b), (a) (ii) (a) = (b) = (c)

### Respuestas a problemas impares

- Fuerza de gravedad:  $8.93 \times 10^{-30} \text{ N}$  hacia abajo; fuerza eléctrica:  $1.60 \times 10^{-17} \text{ N}$  hacia arriba; y la fuerza magnética:  $4.80 \times 10^{-17} \text{ N}$  hacia abajo.
- (a) hacia la página (b) hacia la derecha (c) hacia la parte baja de la página.
- (a)  $1.25 \times 10^{-13} \text{ N}$  (b)  $7.50 \times 10^{13} \text{ m/s}^2$
- 20.9  $\hat{j}$  mT
- (a)  $\sqrt{2}r_p$  (b)  $\sqrt{2}r_p$
- 115 keV
- (a) 5.00 cm (b)  $8.79 \times 10^6 \text{ m/s}$
- $1.56 \times 10^5$
- (a)  $7.66 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$  (b)  $2.68 \times 10^7 \text{ m/s}$  (c) 3.75 MeV  
 (b)  $3.13 \times 10^3$  revoluciones (e)  $2.57 \times 10^{-4} \text{ s}$
- (a) Sí. El componente del haz está presente en todo tipo de átomos (b) Sí. Todo en el rayo tiene una sola relación de carga a masa (c) En un objeto macroscópico cargado, la mayoría de los átomos no están cargados. Por tanto, su relación carga a masa es pequeña, del orden de  $10^{-6} \text{ C/kg}$ . Una molécula nunca tiene todos sus átomos ionizados. Cualquier átomo que no sea hidrógeno contiene neutrones y, por tanto, tiene más masa por carga si está ionizado que el hidrógeno. Por tanto, la mayor relación de carga a masa que Thomson podía esperar era para el hidrógeno ionizado,  $1.6 \times 10^{-19} \text{ C} / 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \sim 10^8 \text{ C/kg}$ , menor que el valor  $e/m$  que midió,  $1.6 \times 10^{-19} \text{ C} / 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $10^{11} \text{ C/kg}$ , por un factor de 1836.



Las partículas en su haz no pueden ser átomos enteros, sino que deben ser mucho más pequeñas en masa (d) No. Las partículas se mueven con una velocidad del orden de diez millones de metros por segundo, por lo que caen en una cantidad inmensamente pequeña en una distancia inferior a 1 m.

21.  $-2.88 \hat{j}$  N
23. 1.07 m/s
25. (a) este (b) 0.245 T
27. (a)  $2\pi rIB \sin \theta$  (b) arriba, lejos del imán
29. (a) al norte a  $48.0^\circ$  por debajo de la horizontal (b) al sur a  $48.0^\circ$  por encima de la horizontal (c)  $1.07 \mu\text{J}$
31. (a) 0.713 A (b) la corriente es independiente del ángulo.
33. (a)  $9.98 \text{ N} \cdot \text{m}$  (b) en el sentido de las manecillas del reloj como se ve mirando hacia abajo desde una posición en el eje y positivo.
35. (a)  $118 \mu\text{N} \cdot \text{m}$  (b)  $-118 \mu\text{J} \leq U_B \leq +118 \mu\text{J}$
37. 2.75 Mrad/s
39. (a) 12.5 km (b) No llegará al centro. Debido a que el radio de curvatura de la trayectoria del protón es mucho más pequeño que el radio del cilindro, el protón ingresa al campo magnético solo durante una corta distancia antes de girar y salir del campo.
41.  $3R/4$
43. (a) en la dirección  $z$  positiva (b) 0.696 m (c) 1.09 m (d) 54.7 ns
45. (a)  $B \sim 10^{-1} \text{ T}$  (b)  $\tau \sim 10^{-1} \text{ N} \cdot \text{m}$  (c)  $I \sim 1 \text{ A} = 10^0 \text{ A}$  (d)  $A \sim 10^{-3} \text{ m}^2$  (e)  $N \sim 10^3$
47. (a) 1.33 m/s (b) Los iones positivos transportados por el flujo sanguíneo experimentan una fuerza hacia arriba que da como resultado que la pared superior del vaso sanguíneo en el electrodo  $A$  se cargue positivamente y la pared inferior del vaso sanguíneo en el electrodo  $B$  se cargue negativamente. (c) No. Los iones negativos que se mueven en la dirección de  $v$  se desviarían hacia el punto  $B$ , dando a  $A$  un potencial más alto que  $B$ . Los iones positivos que se mueven en la dirección de  $v$  se desviarían hacia  $A$ , lo que daría a  $A$  un potencial más alto que  $B$ . Por tanto, el signo de la diferencia de potencial no depende de si los iones en la sangre tienen carga positiva o negativa.
49.  $3.71 \times 10^{-24} \text{ N} \cdot \text{m}$
51. (a) 0.128 T (b) bajo la horizontal.

## Capítulo 29

### Respuestas a exámenes rápidos

1.  $B > C > A$
2. (a)
3.  $c > a > d > b$
4.  $a = c = d > b = 0$
5. (c)

### Respuestas a problemas impares

1.  $1.60 \times 10^{-6} \text{ T}$
3. 12.5 T
5.  $\frac{\mu_0 I}{2r} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \right)$
7. (a)  $53.3 \mu\text{T}$  hacia la parte inferior de la página (b)  $20.0 \mu\text{T}$  hacia la parte inferior de la página (c) cero
9.  $\frac{\mu_0 I}{2\pi ad} (\sqrt{d^2 + a^2} - d)$  hacia la página

11. (a)  $4.00 \mu\text{T}$  hacia debajo de la página (b)  $6.67 \mu\text{T}$  a  $167.0^\circ$  desde el eje  $x$  positivo
13. (a)  $3.00 \times 10^{-5} \text{ N/m}$  (b) atractiva
15.  $k = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi d(d + \ell)}$
17. (a) direcciones opuestas (b) 67.8 A (c) Sería más pequeño. Una fuerza gravitacional más pequeña jalaría los cables hacia abajo, lo que requiere menos fuerza magnética para elevar los cables al mismo ángulo y por tanto menos corriente.
19. (a) 3.60 T (b) 1.94 T
21. (a) 4.00 m (b) 7.50 nT (c) 1.26 m (d) cero
23. 31.8 mA
25.  $5.96 \times 10^{-2} \text{ T}$
27. (a)  $-\pi BR^2 \cos \theta$  (b)  $\pi BR^2 \cos \theta$
29. (a)  $7.40 \mu\text{Wb}$  (b)  $2.27 \mu\text{Wb}$
31. 3.18 A
33. (a)  $\sim 10^{-5} \text{ T}$  (b)  $\sim 10^{-1}$  tan grande como el campo magnético de la Tierra.
35. 143 pT
37. (a)  $\mu_0 \sigma v$  hacia la página (b) cero (c)  $\frac{1}{2} \mu_0 \sigma^2 v^2$  hacia arriba de la página (d)  $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ ; en el capítulo 33 encontramos que esta rapidez es la de la luz. También encontramos en el capítulo 38 que esta rapidez no es posible a través de las placas de los capacitores.
39. 1.80 mT
41. (b)  $3.20 \times 10^{-13} \text{ T}$  (c)  $1.03 \times 10^{-24} \text{ N}$  (d)  $2.31 \times 10^{-22} \text{ N}$
43.  $B = 4.36 \times 10^{-4} \text{ T}$ , donde  $B$  está en teslas e  $I$  en amperes
45. (a)  $\frac{\mu_0 I N}{2\ell} \left[ \frac{\ell - x}{\sqrt{(\ell - x)^2 + a^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right]$
47. (b)  $\frac{\mu_0 I}{4\pi} (1 - e^{-2\pi})$  fuera de la página
49. (a)  $\frac{\mu_0 I (2r^2 - a^2)}{\pi r (4r^2 - a^2)}$  a la izquierda (b)  $\frac{\mu_0 I (2r^2 + a^2)}{\pi r (4r^2 + a^2)}$  hacia arriba de la página
51. (b)  $5.92 \times 10^{-8} \text{ N}$

## Capítulo 30

### Respuestas a exámenes rápidos

1. (c)
2. (c)
3. (b)
4. (a)

### Respuestas a problemas impares

1. 2.26 mV
3.  $1.89 \times 10^{-11} \text{ V}$
5. (a) 1.60 A en sentido contrario a las manecillas del reloj cuando se ve desde la izquierda de la figura (b)  $20.1 \mu\text{T}$  (c) izquierda
7. 272 m
9.  $\mathcal{E} = 0.422 \cos 120\pi t$ , donde  $\mathcal{E}$  está en volts y  $t$  en segundos
11. 2.83 mV
13.  $\frac{Rmv}{B^2 \ell^2}$
15. (a) 0.729 m/s (b) en sentido contrario a las manecillas del reloj (c) 0.650 mW (d) El trabajo debe ser realizado por una fuerza externa si la barra debe moverse con



velocidad constante. Esta entrada de energía por trabajo aparece como energía interna en la resistencia.

- 17.  $3.32 \times 10^3$  rev/min
- 19. 1.00 T
- 21. (a)  $8.01 \times 10^{-21}$  N (b) tangente a un círculo de radio  $r$ , en dirección horaria (c)  $t = 0$  or  $t = 1.33$  s
- 23. 13.3 V
- 25. (a)  $\Phi_B = 8.00 \times 10^{-3} \cos 120\pi t$  donde,  $\Phi_B$  está en T · m<sup>2</sup> y  $t$  en segundos (b)  $\mathcal{E} = 3.02 \sin 120\pi t$ , donde  $\mathcal{E}$  está en volts y  $t$  en segundos (c)  $I = 3.02 \sin 120\pi t$ , donde  $I$  está en amperes y  $t$  en segundos (d)  $P = 9.10 \sin 120\pi t$ , donde  $P$  está en watts y  $t$  en segundos (e)  $\tau = 0.0241 \sin^2 120\pi t$ , donde  $\tau$  está en newtons-metro y  $t$  en segundos
- 29. 3.79 mV
- 31. 8.80 A
- 33.  $\mathcal{E} = -7.22 \cos 1046\pi t$ , donde  $\mathcal{E}$  está en milivolts y  $t$  en segundos
- 35. (a) 3.50 A hacia arriba en 2.00 Ω y 1.40 A hacia arriba en 5.00 Ω (b) 34.3 W (c) 4.29 N
- 37. 2.29 μC
- 39. (a) 0.125 V en sentido horario (b) 0.020 0 A en sentido horario
- 41. (a) Necesitaríamos saber si el campo está aumentando o disminuyendo (b) 248 μΩ (c) Una resistencia más alta reduciría la potencia entregada.
- 43. (a)  $NBlv$  (b)  $\frac{NBlv}{R}$  (c)  $\frac{N^2B^2\ell^2v^2}{R}$  (d)  $\frac{N^2B^2\ell^2v}{R}$   
(e) en sentido horario (f) dirigido a la izquierda
- 45.  $\mathcal{E} = -87.1 \cos (200\pi t + \phi)$ , donde  $\mathcal{E}$  está en milivolts y  $t$  en segundos
- 47. (a)  $\frac{(1.18 \times 10^{-4})t}{0.800 - 4.90t^2}$  (b) cero (c) infinito (d) 98.3 μV
- 51.  $\frac{MgR}{B^2\ell^2} [1 - e^{-B^2\ell^2 t / R(M+m)}]$

### Capítulo 31

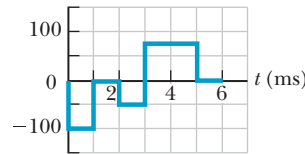
#### Respuestas a exámenes rápidos

- 1. (c), (f)
- 2. (i) (b) (ii) (f)
- 3. (a), (d)
- 4. (a)
- 5. (i) (c) (ii)(f)

#### Respuestas a problemas impares

- 1. 100 V
- 3.  $19.2 \mu\text{T} \cdot \text{m}^2$
- 5.  $\frac{\mathcal{E}_0}{Lk^2}$
- 7.  $\mathcal{E} = -18.8 \cos 120\pi t$ , donde  $\mathcal{E}$  está en volts y  $t$  en segundos
- 9. (a) 5.90 mH (b) 23.6 mV
- 11. (a) 1.00 kΩ (b) 3.00 ms
- 13. (a) 20.0% (b) 4.00%
- 15. (a)  $i_L = 0.500(1 - e^{-10.0t})$ , donde  $i_L$  está en amperes y  $t$  en segundos (b)  $i_s = 1.50 - 0.25e^{-10.0t}$ , donde  $i_s$  está en amperes y  $t$  en segundos
- 17. (a) 6.67 A/s (b) 0.332 A/s
- 19. Para  $t \leq 0$ , la corriente en el inductor es cero; para  $0 \leq t \leq 200 \mu\text{s}$ ,  $i_L = 10.0(1 - e^{-10^6 t})$ , donde  $i_L$  está en amperes y  $t$  en segundos; para  $t \geq 200 \mu\text{s}$ ,  $i_L = 63.9e^{-10^6 t}$ , donde  $i_L$  está en amperes y  $t$  en segundos

- 21. 2.44 μJ
- 23. (a) 18.0 J (b) 7.20 J
- 25. 80.0 mH
- 27. (a)  $M_{12} = \mu_0 \pi R_2^2 N_1 N_2 / \ell$  (b)  $M_{21} = \mu_0 \pi R_2^2 N_1 N_2 / \ell$   
(c) Ellos son lo mismo.
- 29. 281 mH
- 31. 20.0 V
- 33. (a) 2.51 kHz (b) 69.9 Ω
- 35. (a)  $0.693 \left(\frac{2L}{R}\right)$  (b)  $0.347 \left(\frac{2L}{R}\right)$
- 37.  $\frac{Q}{2N} \sqrt{\frac{3L}{C}}$
- 39. (a)  $\frac{1}{2} \mu_0 \pi N^2 R$  (b)  $\sim 10^{-7}$  H (c)  $\sim 10^{-9}$  s
- 41. 1.20
- 43.  $3.67 \times 10^{-5}$  C
- 45.  $\Delta v_{ab}$  (mV)



- 47. (a) 50.0 mT (b) 20.0 mT (c) 2.29 MJ (d) 318 Pa
- 51. (a)  $\frac{2\pi B_0^2 R^3}{\mu_0}$  (b)  $2.70 \times 10^{18}$  J
- 53.  $\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$

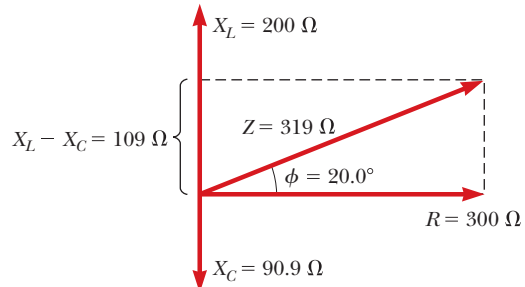
### Capítulo 32

#### Respuestas a exámenes rápidos

- 1. (i) (c) (ii) (b)
- 2. (b)
- 3. (a)
- 4. (b)
- 5. (a)  $X_L < X_C$  (b)  $X_L = X_C$  (c)  $X_L > X_C$
- 6. (c)
- 7. (c)

#### Respuestas a problemas impares

- 1. (a) 193 Ω (b) 144 Ω
- 3. 14.6 Hz
- 5. (a) 25.3 rad/s (b) 0.114 s
- 7. 5.60 A
- 9. (a) 12.6 Ω (b) 6.21 A (c) 8.78 A
- 11. 32.0 A
- 13. (a) 141 mA (b) 235 mA
- 15.



- 17. 11.1 A

19. (a) 17.4° (b) el voltaje  
 21. 353 W  
 23. 88.0 W  
 25. (a) 156 pF (b) 8.84 Ω  
 27.  $1.41 \times 10^5 \text{ rad/s}$   
 $\frac{4\pi RC \sqrt{LC} (\Delta V_{\text{rms}})^2}{4R^2C + 9L}$   
 29. 1.88 V  
 31. 1.88 V  
 33. La frecuencia de resonancia para este circuito no está en el rango de frecuencia AM de América del Norte.  
 35. 2.6 cm  
 37. (b) 31.6  
 39. (a) 19.7 cm at 35.0° (b) 19.7 cm at 35.0°  
 (c) las respuestas son idénticas (d) 9.36 cm a 169°  
 41. (a) La tensión  $T$  y la separación  $d$  deben estar relacionadas por  $T = 274 d^2$ , donde  $T$  está en newtons y  $d$  en metros. (b) Una posibilidad es  $T = 10.9 \text{ N}$  y  $d = 0.200 \text{ m}$ .  
 43. (a) 78.5 Ω (b) 1.59 kΩ (c) 1.52 kΩ (d) 138 mA  
 (e) -84.3° (f) 0.0987 (g) 1.43 W  
 45. (a) capacitor (b) resistor (c)  $\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$   
 (d)  $\frac{1}{\sqrt{R^2 C^2 \omega^2 + 1}}$   
 47.  $1.00 \times 10^4 \text{ rad/s}$   
 49. (a) 580 μH (b) 54.6 μF (c) 1.00 (d) 894 Hz (e) At 200 Hz,  $\phi = -60.0^\circ$  ( $\Delta v_{\text{fuera}}$  conduce a  $\Delta v_{\text{in}}$ ); at  $f_0$ ,  $\phi = 0$  ( $\Delta v_{\text{fuera}}$  está en fase con  $\Delta v_{\text{dentro}}$ ); y a  $4.00 \times 10^3 \text{ Hz}$ ,  $\phi = +60.0^\circ$  ( $\Delta v_{\text{fuera}}$  se atrasa  $\Delta v_{\text{dentro}}$ ). (f) A 200 Hz y a  $4.00 \times 10^3 \text{ Hz}$ ,  $P = 1.56 \text{ W}$ ; y a  $f_0$ ,  $P = 6.25 \text{ W}$ . (g) 0.408  
 51. 58.7 Hz o 35.9 Hz. El circuito puede estar por encima o por abajo de la resonancia.

### Capítulo 33

#### Respuestas a exámenes rápidos

- (i) (b) (ii) (c)
- (c)
- (c)
- (b)
- (a)
- (c)
- (a)

#### Respuestas a problemas impares

- (a)  $7.19 \times 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$  (b)  $2.00 \times 10^{-7} \text{ T}$
- $(-2.87\hat{j} + 5.75\hat{k}) \times 10^9 \text{ m/s}^2$
- (a) 681 yr (b) 8.32 min (c) 2.56 s
- $2.25 \times 10^8 \text{ m/s}$
- $2.9 \times 10^8 \text{ m/s} \pm 5\%$
- La relación de  $\omega$  a  $k$  es mayor que la velocidad de la luz en el vacío, por lo que como se describe la ola es imposible.
- $3.34 \mu\text{J/m}^3$
- (a) 2.33 mT (b) 650 MW/m<sup>2</sup> (c) 511 W
- $\sim 1 \times 10^4 \text{ m}^2$
- 5.16 m
- $5.31 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$
- (a) 1.90 kN/C (b) 50.0 pJ (c)  $1.67 \times 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
- (a)  $1.60 \times 10^{-10} \hat{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  cada segundo (b)  $1.60 \times 10^{-10} \hat{i} \text{ N}$   
 (c) las respuestas son iguales. La fuerza es la rapidez de cambio de la transferencia de la cantidad de movimiento.
- (a)  $1.00 \times 10^3 \text{ km}$  or 621 mi (b) Aunque el proyecto puede ser teóricamente posible, no es muy práctico, debido al tamaño requerido de la antena.

- 56.2 m
- (a)  $\sim 10^8 \text{ Hz}$  onda de radio (b)  $\sim 10^{13} \text{ Hz}$  infrarrojo
- (a)  $3.85 \times 10^{26} \text{ W}$  (b) 1.02 kV/m and 3.39 μT
- $5.50 \times 10^{-7} \text{ m}$
- 75.0 MHz
- $\sim 10^6 \text{ J}$
- 378 nm
- (a) 625 kW/m<sup>2</sup> (b) 21.7 kV/m (c) 72.4 μT (d) 17.8 min
- (a) 388 K (b) 363 K
- $-1.25 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$
- (a) 0.161 m (b) 0.163 m<sup>2</sup> (c) 76.8 W (d) 470 W/m<sup>2</sup>  
 (e) 595 V/m (f) 1.98 μT (g) 119 W
- (a) 3.33 m (b) 11.1 ns (c) 6.67 pT  
 (d)  $\vec{E} = (2.00 \times 10^{-3}) \cos 2\pi \left( \frac{x}{3.33} - 90.0 \times 10^6 t \right) \hat{j}$  y  
 $\vec{B} = (6.67 \times 10^{-12}) \cos 2\pi \left( \frac{x}{3.33} - 90.0 \times 10^6 t \right) \hat{k}$   
 (e)  $5.31 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$  (f)  $1.77 \times 10^{-17} \text{ J/m}^2$   
 (g)  $3.54 \times 10^{-17} \text{ Pa}$

### Capítulo 34

#### Respuestas a exámenes rápidos

- (d)
- Los rayos ② y ④ son reflejados; los rayos ③ y ⑤ son refractados
- (c)
- (c)
- (i) (b) (ii) (b)

#### Respuestas a problemas impares

- 114 rad/s
- $2.27 \times 10^8 \text{ m/s}$
- $\beta = 2\delta$
- (a) 1.94 m (b) 50.0° arriba de la horizontal
- (a)  $1.81 \times 10^8 \text{ m/s}$  (b)  $2.25 \times 10^8 \text{ m/s}$   
 (c)  $1.36 \times 10^8 \text{ m/s}$
- (a) 29.0° (b) 25.8° (c) 32.0°
- (a) 1.52 (b) 417 nm (c)  $4.74 \times 10^{14} \text{ Hz}$  (d) 198 Mm/s
- $\sim 10^{-11} \text{ s}$ ,  $\sim 10^3$  longitudes de onda
- $n = 1.55$
- (a) 1.67 m (b) sí
- El índice de refracción de la atmósfera disminuye al aumentar la altitud debido a la disminución de la densidad de la atmósfera con el aumento de la altitud, al igual que el índice de refracción de las losas al moverse hacia arriba desde la parte inferior en la figura P34.21. Imagine que el Sol es la fuente de luz en la esquina superior izquierda del diagrama. Imagínese usted en el punto donde la luz golpea la superficie inferior de la losa inferior. La dirección desde la cual viene hacia usted la luz refractada del Sol tiene un ángulo más alto con relación a la posición geométrica horizontal que la posición geométrica real del Sol.
- $\tan^{-1}(n_g)$
- $\sin^{-1} \left\{ n_v \sin \left[ \Phi - \sin^{-1} \left( \frac{\sin \theta}{n_v} \right) \right] \right\} - \sin^{-1} \left\{ n_r \sin \left[ \Phi - \sin^{-1} \left( \frac{\sin \theta}{n_r} \right) \right] \right\}$

27. (a) 27.0° (b) 37.1° (c) 49.8°
29. (a) 10.7° (b) aire (c) Al observar la tabla 16.1, vemos que las velocidades del sonido para los sólidos son de un orden de magnitud mayor que la velocidad del sonido en el aire. Por tanto, podemos estimar el ángulo crítico para la interfaz aire-hormigón utilizando la ecuación 34.9 y dejando que la relación de índices de refracción sea de  $\sim 0.1$ . Esto da un ángulo crítico de aproximadamente 6°. Por tanto, todo el sonido que golpea la pared en ángulos mayores que 6° se refleja por completo.
31. (a)  $\frac{nd}{n-1}$  (b)  $R_{\min} \rightarrow 0$ . Sí, para una  $d$  muy pequeña, la luz incide en la interfaz en grandes ángulos de incidencia. (c)  $R_{\min}$  disminuye. Sí; a medida que  $n$  aumenta, el ángulo crítico se hace más pequeño. (d) Sí; como  $n \rightarrow 1$ , el ángulo crítico se vuelve cercano a 90° y cualquier curva permitirá que la luz se escape. (e) 350  $\mu\text{m}$
33. Cinco veces desde el espejo de la derecha y seis veces desde la izquierda
35. El ángulo de 38.0° sobre la horizontal es equivalente a 52.0° con respecto a la normal en la superficie del agua. Como se encuentra en el **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 34.6, toda la luz desde arriba del agua es vista por el buceador en un círculo correspondiente a un ángulo de 48.8° con respecto a la normal. Por tanto, el Sol se vería dentro de este círculo. En 52.0° con respecto a lo normal en la superficie del agua, o 38.0° sobre la horizontal, el buzo vería un reflejo del fondo del lago.
37. (a) 0.042 6 o 4.26% (b) no hay diferencia
39. (a) 334  $\mu\text{s}$  (b) 0.014 6%
41. (a) La reflexión interna total ocurre para todos los valores de  $\theta$ , o el ángulo máximo es 90°. (b) 30.3% (c) La reflexión interna total nunca ocurre cuando la luz pasa de un poliestireno de índice más bajo a un disulfuro de carbono de índice más alto.
43.  $\text{sen}^{-1} \left[ \frac{L}{R^2} (\sqrt{n^2 R^2 - L^2} - \sqrt{R^2 - L^2}) \right]$  or  $\text{sen}^{-1} \left[ n \text{sen} \left( \text{sen}^{-1} \frac{L}{R} - \text{sen}^{-1} \frac{L}{nR} \right) \right]$
45. (a) 53.1° (b)  $\theta_1 \geq 38.7^\circ$
47. 36.5°
49. (a)  $n = \sqrt{1 + \left(\frac{4t}{d}\right)^2}$  (b) 2.10 cm (c) violeta
51. (a) 0.172 mm/s (b) 0.345 mm/s (c) y (d) hacia el norte y hacia abajo a 50.0° debajo de la horizontal.
53. (a)  $\left(\frac{4x^2 + L^2}{L}\right)\omega$  (b) 0 (c)  $L\omega$  (d)  $2L\omega$  (e)  $\frac{\pi}{8\omega}$
57. 70.6%

## Capítulo 35

### Respuestas a exámenes rápidos

1. falso
2. (b)
3. (b)
4. (d)
5. (a)
6. (b)
7. (c)

## Respuestas a problemas impares

1. (a) más joven (b)  $\sim 10^{-9}$  s más joven
3. (a)  $p_1 + h$ , detrás del espejo bajo (b) virtual (c) vertical (d) 1.00 (e) no
5. (a) 33.3 frente al espejo (b) -0.666 (c) real (d) invertida
7. (a) 7.50 cm detrás del espejo (b) vertical (c) real
9. 3.33 m a partir del punto más profundo en el nicho
11. (a) convexo (b) 30.0 cm en la marca de los (c) -20.00 cm
13. (a) 0.708 cm frente a la esfera (b) vertical
15. (a) 25.6 m (b) 0.058 7 rad (c) 2.51 m (d) 0.023 9 rad (e) 62.8 m
17. (a) 45.1 cm (b) -89.6 cm (c) -6.00 cm
19. (a) (i) 3.77 cm desde el frente de la pared, en el agua, (ii) 19.3 cm desde la pared frontal, en el agua (b) (i) +1.01, (ii) +1.03 (c) El plástico tiene espesor uniforme, por lo que las superficies de entrada y salida para cualquier rayo en particular son casi paralelas. El rayo se desplaza ligeramente, pero no cambiará de dirección al atravesar la pared de plástico con aire en ambos lados. Solo la diferencia entre el aire y el agua es responsable de la refracción de la luz (d) sí (e) Si  $p = |R|$ , entonces  $q = -p = -|R|$ ; si  $p > |R|$ , entonces  $|q| > |R|$ . Por ejemplo, si  $p = 2|R|$ , entonces  $q = -3.00 |R|$  y  $M = +2.00$ .
21. (a)  $1.00 < M < 1.99$  (b) No; la luz del sol no se enfoca dentro del tazón.
23. (a) 6.40 cm (b) -0.250 (c) convergente
25. 20.0 cm
27. (a) 20.0 cm a partir del lente en el parte frontal (b) 12.5 cm a partir del lente en el parte frontal (c) 6.67 cm a partir del lente en el parte frontal (d) 8.33 cm a partir del lente en el parte frontal
29. (a) -5.00 cm (b) +0.500 (c) La imagen de una lente convergente de un objeto colocado en el punto focal está infinitamente lejos y tiene un aumento infinito.
31. (a) 3.05 cm (b) 0.17 cm
33. 21.3 cm
35. 2.18 mm alejado del CCD
37. -575
39. (a) Sí, si los lentes son bifocales. (b) +1.78 dioptrías (c) -1.18 dioptrías
41. (a)  $+50.8 \text{ dioptrías} \leq P \leq 60.0 \text{ dioptrías}$  (b) -0.800 dioptrías, divergente
43. La imagen se invierte, es real y disminuye de tamaño.
45. -40.0 cm
47. (a) 1.50 (b) 1.90
51. 8.00 cm
53. (a)  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{1.50 - p_1}$  (b)  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1 + 0.900} + \frac{1}{0.600 - p_1}$  (c) 0.300 m (d) 0.240 m
55. Ambas imágenes se forman en la misma posición, y no hay dos ubicaciones en las que el alumno pueda sostener una pantalla para ver imágenes formadas por este sistema.
57.  $d = p$  y  $d = p + 2f_M$

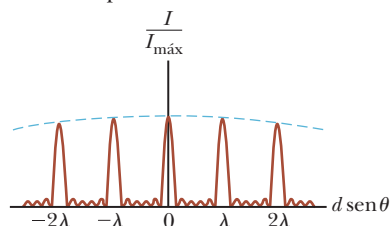
## Capítulo 36

### Respuestas a exámenes rápidos

1. (c)
2. La gráfica se muestra en la siguiente página. La anchura de los máximos primarios es ligeramente más estrecha



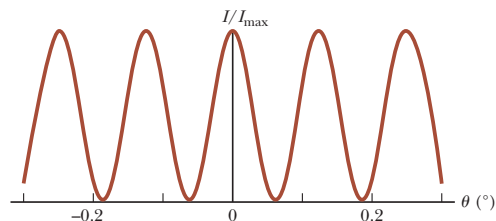
que el  $N = 5$  ancho  $N = 5$  del primario, pero más ancha que la anchura del primario  $N = 10$ . Debido a que  $N = 6$ , los máximos secundarios son  $1/36$  de la intensidad de los máximos primarios.



3. (a)

### Respuestas a problemas impares

1. 641
3. 632 nm
5.  $2.40 \mu\text{m}$
7.  $0.318 \text{ m/s}$
11. 506 nm
13. (a)  $1.93 \mu\text{m}$  (b)  $3.00\lambda$  (c) Corresponde a un máximo. La diferencia en el patrón es un múltiplo entero de la longitud de onda.
15.  $ER = 10.0$  y  $\phi = 52.1^\circ$
- 17.



19. 96.2 nm
21. (a) 276 nm, 138 nm, 92.0 nm (b) Sin longitudes de onda visibles se intensifican.
23. 1.31
25. (a) 238 nm (b) aumenta la longitud de onda de la luz transmitida (c) 328 nm
27.  $39.6 \mu\text{m}$
29. 1.62 cm
31.  $x_1 - x_2 = (m - \frac{1}{48})650$ , donde  $x_1$  y  $x_2$  están en nanómetros y  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
33.  $\frac{\lambda}{2(n-1)}$
35. (a) 72.0 m (b) 36.0 m
37. (a) 70.6 m (b) 136 m
39. (a)  $14.7 \mu\text{m}$  (b) 1.53 cm (c)  $-16.0 \text{ m}$
41. 0.505 mm
43. 140 nm
45.  $3.58^\circ$
47. 115 nm
49. (a)  $m = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}$  (b) 266 nm

## Capítulo 37

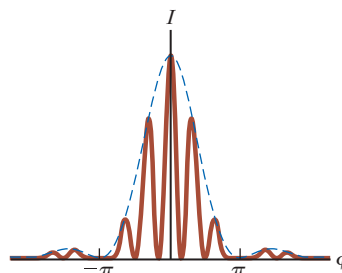
### Respuestas a exámenes rápidos

1. (a)
2. (b)
3. (a)

4. (c)
5. (b)
6. (c)

### Respuestas a problemas impares

1. 4.22 mm
3. (a) 1.50 m (b) 4.05 mm
- 5.



7.  $1.62 \times 10^{-2}$
9. 0.284 m
11. 30.5 m
13.  $0.40 \mu\text{rad}$
15. 16.4 m
17. (a) tres (b)  $0^\circ, +45.2^\circ, -45.2^\circ$
19. (a) cinco (b) diez
21. 514 nm
23. (a) dos, at  $\pm 52.3^\circ$  (b) no
25. (a) 0.109 nm (b) cuatro
27. (a) 93.3% (b) 50.0% (c) 0.00%
29.  $60.5^\circ$
31. (a)  $20.5^\circ$  (b) El rayo refractado llega a la segunda superficie en el ángulo de Brewster.
33. (a) 0.045 0 (b) 0.016 2
35. 5.51 m, 2.76 m, 1.84 m
37. (a)  $7.26 \mu\text{rad} = 1.50 \text{ arc segundos}$  (b) 0.189 ly (c)  $50.8 \mu\text{rad}$  (d) 1.52 mm
39. (a)  $25.6^\circ$  (b)  $18.9^\circ$
41.  $13.7^\circ$
43. (b)  $428 \mu\text{m}$
45. (b)  $3.77 \text{ nm/cm}$
47. (a)  $\phi = 4.49$  en comparación con la predicción de la aproximación de  $1.5\pi = 4.71 \text{ rad}$  (b)  $\phi = 7.73$  en comparación con la predicción de la aproximación de  $2.5\pi = 7.85 \text{ rad}$
49. (b)  $0.00190 \text{ rad} = 0.109^\circ$
51. (b)  $15.3 \mu\text{m}$

## Capítulo 38

### Respuestas a exámenes rápidos

1. (c)
2. (d)
3. (d)
4. (a)
5. (c)
6. (d)
7. (i) (c) (ii) (a)
8. (a)  $m_3 > m_2 = m_1$  (b)  $K_3 = K_2 > K_1$  (c)  $u_2 > u_3 = u_1$

### Respuestas a problemas impares

3. (a) 0.436 m (b) menor que 0.436 m
5. 5.00 s



## A-34

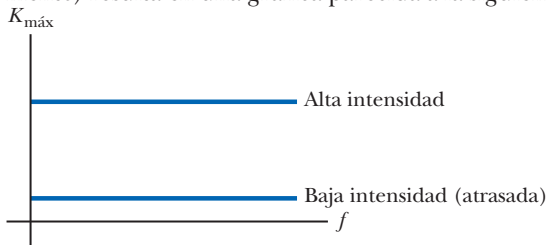
### Respuestas a preguntas rápidas y problemas impares

7.  $0.140c$
9.  $0.800c$
11. (b)  $0.0504c$
13. (a)  $39.2 \mu\text{s}$  (b) exacto a un dígito
15. (c)  $2.00 \text{ kHz}$  (d)  $0.075 \text{ m/s} = 0.168 \text{ mi/h}$  ( $0.250\%$ )
17. (a)  $17.4 \text{ m}$  (b)  $3.30^\circ$
19. (a)  $2.50 \times 10^8 \text{ m/s} = 0.834c$  (b)  $4.98 \text{ m}$  (c)  $-1.33 \times 10^{-8} \text{ s}$
21.  $0.960c$
23. (a)  $2.73 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  (b)  $1.58 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$   
(c)  $5.64 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
25. (a)  $929 \text{ MeV}/c$  (b)  $6.58 \times 10^3 \text{ MeV}/c$  (c) No
27.  $0.285c$
29. (a)  $0.582 \text{ MeV}$  (b)  $2.45 \text{ MeV}$
31. (a)  $0.999997c$  (b)  $3.74 \times 10^5 \text{ MeV}$
33.  $1.63 \times 10^3 \text{ MeV}/c$
35. (a)  $0.979c$  (b)  $0.0652c$  (c)  $15.0$   
(d)  $0.99999997c$ ;  $0.948c$ ;  $1.06$
37.  $2.97 \times 10^{-26} \text{ kg}$
39. larger;  $\sim 10^{-9} \text{ J}$
41. (a)  $2.66 \times 10^7 \text{ m}$  (b)  $3.87 \text{ km/s}$  (c)  $-8.35 \times 10^{-11}$   
(d)  $5.29 \times 10^{-10}$  (e)  $+4.46 \times 10^{-10}$
43. (a)  $v/c = 1 - 1.12 \times 10^{-10}$  (b)  $6.00 \times 10^{27} \text{ J}$   
(c)  $\$2.17 \times 10^{20}$
45. (a)  $6.67 \times 10^4$  (b)  $1.97 \text{ h}$
47. (a)  $3.65 \text{ MeV}/c^2$  (b)  $0.589c$
49. (a)  $0.905 \text{ MeV}$  (b)  $0.394 \text{ MeV}$   
(c)  $0.747 \text{ MeV}/c = 3.99 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  (d)  $65.4^\circ$
51. (b)  $1.48 \text{ km}$
55. (a) Tau Ceti explotó 16.0 años antes del Sol. (b) Las dos estrellas explotaron simultáneamente.

## Capítulo 39

### Respuestas a exámenes rápidos

1. (b)
2. Luz de sodio, microondas, radio FM, radio AM.
3. (c)
4. La expectativa clásica (la cual no coincide con el experimento) resulta en una gráfica parecida a la siguiente:



5. (d)
6. (c)
7. (b)
8. (a)

### Respuestas a problemas impares

1. (a) un rayo:  $\sim 10^{-7} \text{ m}$ ; explosión:  $\sim 10^{-10} \text{ m}$  (b) rayos: ultravioleta; explosión: rayos X y rayos gamma
3.  $2.27 \times 10^{30}$  fotones
5. (a)  $5.78 \times 10^3 \text{ K}$  (b)  $501 \text{ nm}$
7. (a)  $0.263 \text{ kg}$  (b)  $1.81 \text{ W}$  (c)  $-0.015 \text{ }^\circ\text{C/s} = -0.919^\circ\text{C/min}$   
(d)  $9.89 \mu\text{m}$  (e)  $2.01 \times 10^{-20} \text{ J}$  (f)  $8.99 \times 10^{19}$  fotones

9. (a)  $4.20 \text{ mm}$  (b)  $1.05 \times 10^{19}$  fotones  
(c)  $8.82 \times 10^{16} \text{ mm}^{-3}$
11. (a)  $295 \text{ nm}$ ,  $1.02 \text{ PHz}$  (b)  $2.69 \text{ V}$
13. (a)  $288 \text{ nm}$  (b)  $1.04 \times 10^{15} \text{ Hz}$  (c)  $1.19 \text{ eV}$
15.  $4.85 \times 10^{-12} \text{ m}$
17.  $70.0^\circ$
19. (a)  $43.0^\circ$  (b)  $E = 0.601 \text{ MeV}$ ;  $p = 0.601 \text{ MeV}/c = 3.21 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  (c)  $E = 0.279 \text{ MeV}$ ;  $p = 0.601 \text{ MeV}/c = 3.21 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
21. (a)  $0.101 \text{ nm}$  (b)  $80.8^\circ$
23. Para tener energía fotónica de  $10 \text{ eV}$  o mayor, de acuerdo con esta definición, la radiación ionizante es la luz ultravioleta, los rayos X y los rayos  $\gamma$  con longitud de onda más corta que  $124 \text{ nm}$ , es decir, con la frecuencia mayor que  $2.42 \times 10^{15} \text{ Hz}$ .
25. (a)  $1.66 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  (b)  $1.82 \text{ km/s}$
27. (a)  $3.91 \times 10^{-4}$  (b)  $20.0 \text{ GeV}/c = 1.07 \times 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$   
(c)  $6.20 \times 10^{-17} \text{ m}$  (d) La longitud de onda es dos órdenes de magnitud menor que el tamaño del núcleo.
29.  $3.76 \mu\text{V}$
31. La velocidad con la que el alumno debe pasar por la puerta para experimentar la difracción es extremadamente baja. Es imposible para el estudiante caminar esto lentamente. A esta velocidad, si el espesor de la pared en la que está construida la puerta es de  $15 \text{ cm}$ , el intervalo de tiempo requerido para que el estudiante pase a través de la puerta es  $1.4 \times 10^{33} \text{ s}$ , que es  $10^{15}$  veces la edad del Universo.
35.  $105 \text{ V}$
37.  $3 \times 10^{-29} \text{ J} \approx 2 \times 10^{-10} \text{ eV}$
41. (a)  $1.7 \text{ eV}$  (b)  $4.2 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$  (c)  $7.3 \times 10^2 \text{ nm}$
43.  $2.81 \times 10^{-8}$
45. (a)  $8.72 \times 10^{16} \frac{\text{electrones}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2}$  (b)  $14.0 \text{ mA/cm}^2$   
(c) La corriente real puede ser más baja que en el inciso (b).
47. (a) El cambio Doppler aumenta la frecuencia aparente de la luz incidente
51. (b)  $2.897755 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

## Capítulo 40

### Respuestas a exámenes rápidos

1. (d)
2. (i) (a) (ii) (d)
3. (c)
4. (a), (c), (f)

### Respuestas a problemas impares

1. (a)  $126 \text{ pm}$  (b)  $5.27 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  (c)  $95.3 \text{ eV}$
3.  $\frac{1}{2}$
5. (a)  $0.511 \text{ MeV}$ ,  $2.05 \text{ MeV}$ ,  $4.60 \text{ MeV}$   
(b) Lo hacen; el MeV es la unidad natural para la energía irradiada por un núcleo atómico

7. (a)
 

$n$	
4	603 eV
3	339 eV
2	151 eV
1	37.7 eV

- (b)  $2.20 \text{ nm}$ ,  $2.75 \text{ nm}$ ,  $4.12 \text{ nm}$ ,  $4.71 \text{ nm}$ ,  $6.59 \text{ nm}$ ,  $11.0 \text{ nm}$

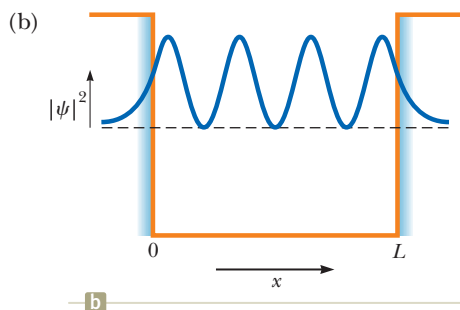
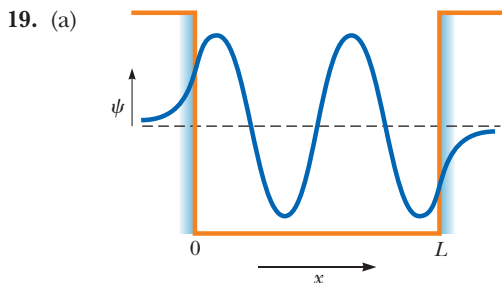
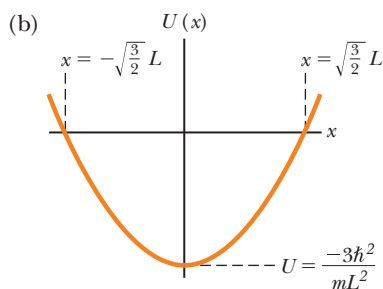
9. (a)  $\frac{\hbar}{2L}$  (b)  $\hbar^2/8mL^2$  (c) Esta estimación es demasiado baja en  $4\pi^2 \approx 40$  veces, pero muestra correctamente el patrón de dependencia de la energía en la masa y en la longitud del pozo.

11. (a)  $\frac{L}{2}$  (b)  $5.26 \times 10^{-5}$  (c)  $3.99 \times 10^{-2}$   
 (d) En la gráfica para  $n = 2$  en la figura 40.4 (b) del texto, es más probable encontrar la partícula ya sea cerca de  $x = L/4$  o  $x = 3L/4$  que en el centro, donde la densidad de probabilidad es cero. No obstante, la simetría de la distribución indica que la posición promedio es  $x = L/2$

13. (a) 0.196 (b) 0.609

15. (b)  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

17. (a)  $U = \frac{\hbar^2}{mL^2} \left( \frac{2x^2}{L^2} - 3 \right)$

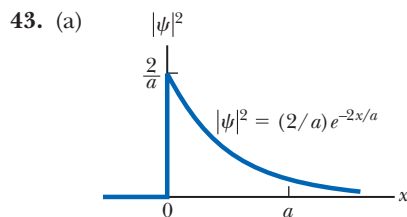


21. (a)  $1.03 \times 10^{-3}$  (b) 1.91 nm  
 23. 600 nm  
 25. (a)  $B = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}$  (b)  $\delta \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2}$   
 33. (a) 0.903 (b) 0.359 (c) 0.417 (d)  $10^{-6.59 \times 10^{32}}$   
 35.  $\frac{1}{2} m g \hbar \left( \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{\hbar^2}} - 1 \right)$   
 37. (a)  $L = \left( \frac{\hbar \lambda}{m_e c} \right)^{1/2}$  (b)  $\lambda' = \frac{8}{5} \lambda$

39. (a)  $K_n = \sqrt{\left( \frac{n\hbar c}{2L} \right)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$  (b)  $4.68 \times 10^{-14}$  J

(c) 28.6% más grande

41. (a)  $1.03U$  (b) 0.172



(b) 0 (d) 0.865

45. (b) 0.0920 (c) 0.908

47. (a)  $\frac{3}{2}\hbar\omega$  (b)  $x = 0$  (c)  $x = \pm \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$  (d)  $B = \left( \frac{4m^3\omega^3}{\pi\hbar^3} \right)^{1/4}$

(e) 0 (f)  $8\delta e^{-4} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$

## Capítulo 41

### Respuestas a exámenes rápidos

- (c)
- (a)
- (b)
- (a) cinco (b) nueve
- (c)
- cierto

### Respuestas a problemas impares

- (a) 121.5 nm, 102.5 nm, 97.20 nm (b) ultravioleta
- (a)  $\lambda_{mn} = \left| \frac{1}{1/\lambda_{m1} - 1/\lambda_{n1}} \right|$  (b)  $k_{mn} = |k_{m1} - k_{n1}|$
- (a) 2.86 eV (b) 0.472 eV
- (a) 1.89 eV (b) 656 nm (c) 3.02 eV (d) 410 nm (e) 365 nm
- (a) 0.476 nm (b) 0.997 nm
- (a)  $E_n = -54.4 \text{ eV}/n^2$  for  $n = 1, 2, 3, \dots$

$n$	$E$ (eV)
$\infty$	0
4	-3.40
3	-6.05
2	-13.6

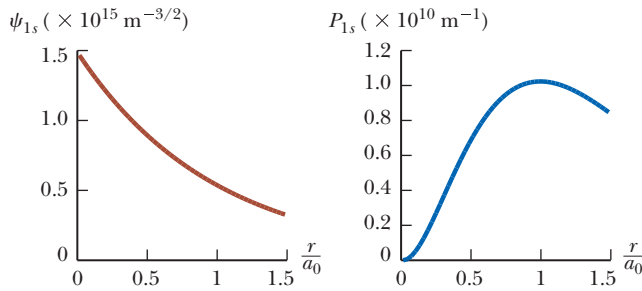


(b) 54.4 eV

13. (b)  $\lambda = 0.179 \text{ nm}$



15.



17. (b) 0.497

19. (a)  $\sqrt{6}\hbar$  (b)  $-2\hbar, -\hbar, 0, \hbar$  y  $2\hbar$ .  
(c)  $145^\circ, 114^\circ, 90.0^\circ, 65.9^\circ$ , y  $35.3^\circ$

21. (a)  $3.99 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$  (b) 8.17 am (c) 1.77 Tm/s (d) Es  $5.91 \times 10^3 c$ , que es enorme en comparación con la velocidad de la luz, e imposible.

23. n	$\ell$	$m_\ell$	s	$m_s$
3	2	-2	1	-1
3	2	-2	1	0
3	2	-2	1	1
3	2	-1	1	-1
3	2	-1	1	0
3	2	-1	1	1
3	2	0	1	-1
3	2	0	1	0
3	2	0	1	1
3	2	1	1	-1
3	2	1	1	0
3	2	1	1	1
3	2	2	1	-1
3	2	2	1	0
3	2	2	1	1

25. (a) la subcapa 4s (b). Esperaríamos que [Ar]  $3d^4 4s^2$  tuviera menos energía, pero [Ar]  $3d^5 4s^1$  tiene más espines desemparejados y menos energía según la regla de Hund. (c) cromo

27. (a)  $1s^2 2s^2 2p^3$

(b) n	$\ell$	$m_\ell$	$m_s$
1	0	0	$\frac{1}{2}$
1	0	0	$-\frac{1}{2}$
2	1	1	$\frac{1}{2}$
2	1	1	$-\frac{1}{2}$
2	1	0	$\frac{1}{2}$
2	1	0	$-\frac{1}{2}$
2	1	-1	$\frac{1}{2}$
2	1	-1	$-\frac{1}{2}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$
2	0	0	$-\frac{1}{2}$

29. (a) 30 (b) 36

31. (a) 14 keV (b)  $8.8 \times 10^{-11} \text{ m}$

33. La longitud de onda mínima desde el consultorio del médico es 35.4 p. M. La radiación proviene de otros lugares.

35. (a)  $1.26 \times 10^{-33}$  (b)  $-1.15 \times 106 \text{ K}$  (c) Como se puede ver en el inciso (b), una inversión de población requiere que la temperatura absoluta sea negativa, lo que posiblemente no ocurra naturalmente.

37. (a)  $1.57 \times 10^{14} \text{ m}^{-3/2}$  (b)  $2.47 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  (c)  $8.69 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$

39. ~ entre  $10^4 \text{ K}$  y  $10^5 \text{ K}$ ; use la ecuación 20.19 e iguale la energía cinética con las energías típicas de ionización.

41.  $\frac{1}{a_0}$ , no

43. (a)  $\frac{r^2}{8a_0^3} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}$

(b)  $\frac{r}{8a_0^5} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/a_0} (r^2 - 6a_0 r + 4a_0^2)$

(c)  $r = 0, r = 2a_0$ , y  $r = \infty$  (d)  $r = (3 \pm \sqrt{5})a_0$

(e)  $r = (3 + \sqrt{5})a_0$  donde  $P = 0.191/a_0$

45. (a) Al:  $2.55 \times 10^{-10} \text{ m} \sim 10^{-1} \text{ nm}$  y U:  $2.76 \times 10^{-10} \text{ m} \sim 10^{-1} \text{ nm}$  (b) El electrón más externo en cualquier átomo ve la carga nuclear filtrada por todos los electrones debajo de ella. Si podemos visualizar un único electrón externo, se mueve en el campo eléctrico de la carga neta  $+Ze - (Z - 1)e = +e$ , la carga de un solo protón, como lo siente el electrón en el hidrógeno. Entonces, el radio de Bohr establece la escala para el diámetro externo de cada átomo.

Por otro lado, un electrón más interno, ve la carga nuclear no apantallada, y su órbita de escala (capa-K) es  $a_0/Z$ .

47. (a) 3 (b) 520 km/s

49. (a) 4.20 mm (b)  $1.05 \times 10^{19}$  fotones (c)  $8.84 \times 10^{16} \text{ nm}^{-3}$

## Capítulo 42

### Respuestas a exámenes rápidos

1. (a) van der Waals (b) iónica (c) hidrógeno (d) covalente

2. (c)

3. (a)

4. A: semiconductor; B: conductor; C: aislante

### Respuestas a problemas impares

1. ~10 K

3. (a) 74.2 pm (b) 4.46 eV

5. (a)  $1.46 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  (b) Los resultados son iguales, lo que sugiere que el enlace molecular no cambia mesurablemente entre las dos transiciones.

7. (a) 0.014 7 eV (b) 84.1  $\mu\text{m}$

9. (a) 12.0 pm (b) 9.22 pm

11. (a) 472  $\mu\text{m}$  (b) 473  $\mu\text{m}$  (c) 0.715  $\mu\text{m}$

13. (a)  $4.60 \times 10^{-48} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  (b)  $1.32 \times 10^{14} \text{ Hz}$  (c) 0.074 1 nm

15.  $6.25 \times 10^9$

17. (a)  $\sim 10^{17}$  (b)  $\sim 10^5 \text{ m}^3$

19. (a) 1.57 Mm/s (b) La velocidad es mayor en diez órdenes de magnitud.

21. (a) 4.23 eV (b)  $3.27 \times 10^4 \text{ K}$

27. (a) 276 THz (b) 1.09  $\mu\text{m}$

29. 2.42 eV

31. (a)  $a' = \left(\frac{m_e}{m^*}\right) \kappa a_0$  (b) 2.81 nm (c)  $E'_n = -\left(\frac{m^*}{m_e}\right) \frac{E_n}{\kappa^2}$

(d) -0.021 9 eV

33. 4.18 mA

35.  $-2.35 \times 10^{17}$

37. 7

39. 4.74 eV  
 41. (a) 0.350 nm (b) -7.02 eV (c) -1.20 ħ nN  
 43.  $\Delta f = (J + 1) \frac{h(m_{Cl_{37}} - m_{Cl_{35}})}{4\pi^2 r^2 m_{Cl_{35}} m_{Cl_{37}}}$  (b)  $9.60 \times 10^8$  Hz  
 45. (a)  $6.15 \times 10^{13}$  Hz (b)  $1.59 \times 10^{-46}$  kg · m<sup>2</sup> (c) 4.78 μm or 4.96 μm  
 47. (a)  $r_0$  (b)  $B$  (c)  $\frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{B}{2\mu}}$  (d)  $B - \frac{ha}{\pi} \sqrt{\frac{B}{8\mu}}$

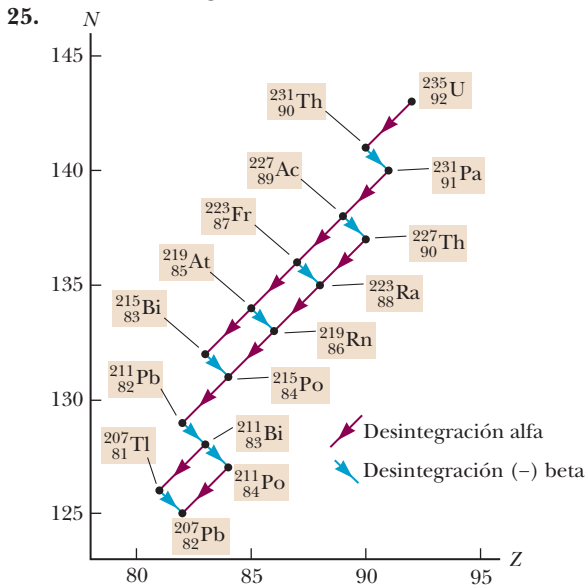
## Capítulo 43

### Respuestas a exámenes rápidos

- (i) (b) (ii) (a) (iii) (c)
- (e)
- (b)
- (c)
- (b)
- (a), (b)
- (d)

### Respuestas a problemas impares

- ~ 10<sup>28</sup> protones (b) ~ 10<sup>28</sup> neutrones (c) ~ 10<sup>28</sup> electrones
- (a) 0.360 MeV (b) La figura P43.3 muestra el punto más alto en la curva a aproximadamente 4 MeV, un factor de diez más que el valor en (a).
- (a)  $2.82 \times 10^{-5}$  (b)  $1.38 \times 10^{-14}$
- (a) 0.210 MeV (b) Hay menos repulsión de protones en <sup>23</sup><sub>11</sub>Na; es un núcleo más estable.
- (a) <sup>139</sup><sub>55</sub>Cs (b) <sup>139</sup><sub>57</sub>La (c) <sup>139</sup><sub>55</sub>Cs
- ~ 200 MeV
- $9.47 \times 10^9$  núcleos
- (a) 0.755 (b) 0.570 (c)  $9.766 \times 10^{-4}$  (d) No. El modelo de descomposición depende de una gran cantidad de núcleos. Después de un tiempo largo pero finito, solo quedará un núcleo sin defecto. Es probable que la descomposición de este núcleo final ocurra antes del tiempo infinito.
- (a) no puede ocurrir (b) no puede ocurrir (c) puede ocurrir
- (a)  $e^- + p \rightarrow n + \nu$  (b) 2.75 MeV
- (a)  $1.05 \times 10^{21}$  (b)  $1.37 \times 10^9$  (c)  $3.83 \times 10^{-12} s^{-1}$  (d)  $3.17 \times 10^3$  desintegraciones/semana (e) 951 desintegraciones/semana (f)  $9.95 \times 10^3$  años

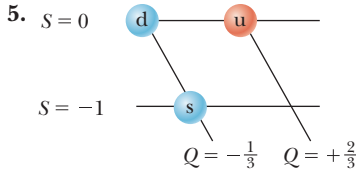


- (a) <sup>21</sup><sub>10</sub>Ne (b) <sup>144</sup><sub>54</sub>Xe (c)  $e^+ + \nu$
- ${}^1_0n + {}^{232}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{233}_{91}\text{Th}; {}^{233}_{91}\text{Th} \rightarrow {}^{233}_{92}\text{Pa} + e^- + \bar{\nu}; {}^{233}_{92}\text{Pa} \rightarrow {}^{233}_{92}\text{U} + e^- + \bar{\nu}$
- (a)  $3.08 \times 10^{10}$  g (b)  $1.31 \times 10^8$  mol (c)  $7.89 \times 10^{31}$  núcleos (d)  $2.53 \times 10^{21}$  J (e) 5.34 yr (f) la fisión no es suficiente para suministrar al mundo energía a un precio de \$130 o menos por kilogramo de uranio
- (a)  $4.56 \times 10^{-24}$  kg · m/s (b) 0.145 nm (c) Este tamaño tiene el mismo orden de magnitud que la nube de electrones externa de un átomo, y es considerablemente más grande que un núcleo.
- (a) 3.24 fm (b) 444 keV (c)  $\frac{2}{5}v_i$  (d) 740 keV (e) El deuterón puede hacer un túnel a través de la barrera de energía.
- (a)  $2.23 \times 10^6$  m/s (b)  $\sim 10^{-7}$  s
- (a) 2.5 mrem/x-ray (b) La exposición ocupacional del técnico es alta: 38 veces la radiación de fondo local de 0.13 rem/año.
- $3.96 \times 10^{-4}$  J/kg
- (a)  $\sim 10^6$  átomos (b)  $\sim 10^{-15}$  g
- (a) El proceso no puede ocurrir, porque la energía de reposo final es mayor que la energía de reposo inicial: se requeriría la entrada de energía (b) Cuando un protón o un neutrón está en un núcleo, el resto del núcleo no está energizado solo la suma de las energías de resto de sus partículas, la diferencia correspondiente a la energía de enlace del núcleo. Como resultado de diferentes energías de enlace, el resto de la energía del núcleo de nitrógeno es mayor que la de las partículas en el lado derecho de la reacción, por lo que la reacción puede continuar. (c) 1.20 MeV
- (a) 8.68 MeV (b) Las partículas deben tener suficiente energía cinética para superar su repulsión electrostática mutua para que puedan acercarse lo suficiente como para fusionarse.
- (b)  $1.95 \times 10^{-3}$  eV
- (a) <sup>93</sup><sub>42</sub>Mo (b) captura del electrón; todos los niveles;  $e^+$  emisión: solo 2.03 MeV, 1.48 MeV, y 1.35 MeV
- (b) 1.16 u
- 2.66 d
- (a) 27.6 min (b) 30 min ± 27%
- $2.57 \times 10^4$  kg
- (b) 26.7 MeV
- (a) <sup>238</sup><sub>92</sub>U:  $3.4 \times 10^{-4}$  Ci, <sup>235</sup><sub>92</sub>U: 16 μCi, <sup>234</sup><sub>92</sub>U:  $3.1 \times 10^{-4}$  Ci (b) <sup>238</sup><sub>92</sub>U: 50%, <sup>235</sup><sub>92</sub>U: 2.3%, <sup>234</sup><sub>92</sub>U: 47% (c) Esto es peligroso, sobre todo si el material es inhalado como un polvo. Sin embargo, con las precauciones para minimizar el contacto humano, las fuentes de microcuries son utilizadas en los laboratorios de forma rutinaria.
- (a)  $2.24 \times 10^7$  kWh (b) 17.6 MeV (b) 17.6 MeV por cada fusión D-T (c)  $2.34 \times 10^8$  kWh (d) 9.36 kWh (e) El carbón es barato en este momento en la historia humana. Esperamos que la seguridad y los problemas de eliminación de residuos puedan ser resueltos de modo que la energía nuclear pueda ser asequible antes de que la escasez aumente el precio de los combustibles fósiles. La quema de carbón al aire libre expone el dióxido de carbono a la atmósfera, empeorando el calentamiento global. El plutonio es un material muy peligroso, especialmente en forma de polvo, en el que puede inflamarse o inhalarse y causar cáncer.

### Capítulo 44

#### Respuestas a exámenes rápidos

1. (a)
2. (i) (c), (d) (ii) (a)
3. (b), (e), (f)
4. (b), (e)



6. falso

#### Respuestas a problemas impares

1. (a)  $2.27 \times 10^{23}$  Hz (b)  $1.32 \times 10^{-15}$  m
3.  $\sim 10^{-18}$  m
5.  $\sim 10^{-23}$  s
7. (a) el número leptónico de muones y el número leptónico de electrones (b) carga (c) movimiento angular y número bariónico (d) carga (e) número leptónico de electrones
9. (a)  $\bar{\nu}_\mu$  (b)  $\nu_\mu$  (c)  $\bar{\nu}_e$  (d)  $\nu_e$  (e)  $\nu_\mu$  (f)  $\bar{\nu}_e + \nu_\mu$
11. (a) Esto no puede ocurrir porque viola la conservación del número bariónico (b) Puede ocurrir (c) Esto no puede ocurrir porque viola la conservación del número bariónico (d) Puede ocurrir (e) Puede ocurrir (f) Esto no puede ocurrir porque viola la conservación del número bariónico, la conservación del número leptónico de muones y la conservación de la energía
13. (a) 37.7 MeV (b) 37.7 MeV (c) 0 (d) No. La masa del mesón  $\pi^-$  es mucho menor que la del protón, por lo que se mueve a una velocidad mucho mayor que el protón y transporta mucha más energía cinética. El análisis

correcto que utiliza la conservación de la energía relativista muestra que la energía cinética del protón es de 5.35 MeV, mientras que la del mesón  $\pi^-$  es de 32.3 MeV.

15. (a) No se permite debido a que ni el número bariónico ni el momento angular se conservan. (b) interacción fuerte (c) interacción débil (d) interacción débil (e) interacción electromagnética
17. (a) La extrañeza no se conserva. (b) extrañeza se conserva. (c) extrañeza se conserva. (d) La extrañeza no se conserva. (e) La extrañeza no se conserva. (f) La extrañeza no se conserva.
19. (a)  $p_{\Sigma^+} = 686$  MeV/c,  $p_{\pi^+} = 200$  MeV/c (b) 626 MeV/c (c)  $E_{\pi^+} = 244$  MeV,  $E_n = 1.13$  GeV (d) 1.37 GeV (e) 1.19 GeV/c<sup>2</sup> (f) El resultado en la parte (e) está dentro del 0.05% del valor en la tabla 44.2.
21. (a)  $\Sigma^+$  (b)  $\pi^-$  (c)  $K^0$  (d)  $\Xi^-$
23. La partícula desconocida es un neutrón, udd
25. (a) 1.06 mm (b) microonda
27. (a)  $\sim 10^{13}$  K (b)  $\sim 10^{10}$  K
29.  $3.15 \times 10^{-6}$  W/m<sup>2</sup>
31. (a) 0.160c (b)  $2.18 \times 10^9$  ly
33. (a)  $1.62 \times 10^{-35}$  m (b)  $5.39 \times 10^{-44}$  s; este resultado es del mismo orden de magnitud que el descrito como época ultra caliente junto con la figura 44.14.
35. (a) no se conserva la carga. (b) La energía, el número leptónico de muones y el número leptónico de electrones no se conserva. (c) el número bariónico no se conserva.
37.  $\sim 10^{14}$
41. 1.12 GeV/c<sup>2</sup>
43. (a) aniquilación electrón-positrón (b) Un neutrino colisiona con un electrón produciendo un protón y un muón
45. neutrón
47. (b) 9.08 Gyr
49. (a)  $2Nmc$  (b)  $\sqrt{3}Nmc$  (c) método (a)





# Índice

Nota del localizador: **negrita** indica una definición; la letra cursiva indica una figura; *t* indica una tabla; *n* indica una nota al pie.

## A

Aberraciones cromáticas en lentes, 947, 947  
Aberraciones esféricas en lentes, 947, 947  
Abertura circular y resolución de una sola rendija, 988-992, 989, 990, 992  
Absorción estimulada, 1133-1134, 1134  
Absorción selectiva, polarización por, 998-999, 999  
Academia de Ciencias Francesa, 984  
Academia de Ciencias Naturales, 825  
Accidente de la planta de energía nuclear de Chernobyl (Ucrania, 1986), 1206  
Acelerador, haz de partículas en, 773.  
*Véase también* Física de partículas y cosmología  
Actividad del material radiactivo (rapidez de desintegración), 1188-1190  
Acuerdo de París, Cambio climático, 1155  
Administración de Alimentos y Drogas de Estados Unidos (FDA), 1215  
Aeropuerto Internacional de Vancouver (British Columbia, Canadá), 745  
Afinidad electrónica, 1146  
Agencia de Exploración Aeroespacial de Japón (JAXA), 885  
Agencia Espacial Europea, 1248  
Agua, como molécula polar, 680  
Agujas de la brújula, 743, 743, 745  
Aisladores eléctricos, 591, 1162-1163  
Alambre curvado, campo magnético debido a, 774-775, 775  
Alambre de nicromo, resistencia de, 697-698  
Alambre portador de corriente, campo magnético, creado por 780, 780-781  
Álgebra, A-5-A-10  
Alojamiento, en enfoque ocular, 949  
Altura de la barrera, 1093  
Alunizaje del *Apolo 11*, 904, 904, 918  
Ampère (A, unidad base SI de corriente), 692, 694-695  
Ampère, Andre-Marie, 779, 779  
Ampliación angular, 951  
Ampliación lateral, 927  
Ampliación, aumento *versus*, 929  
Amplitud de probabilidad (función de onda), 1080  
Análisis de activación de neutrones, radioactividad, en, 1214  
Análisis de materiales, radioactividad en, 1214  
Anderson, Carl, 1228, 1230  
Ángulo  
crítico (de incidencia), 915-916  
de ápice del prisma ( $\Phi$ ), 910, 910  
de Brewster, 1000

de desviación ( $\delta$ ), 910, 910, 913  
de divergencia, 1135  
de incidencia, 902, 914, 915  
de reflexión, 902  
de refracción, 905, 908-909  
Anillo de carga uniforme, 618-619, 619, 649, 649  
Anillos de Newton, 971, 971-972  
Aniquilación de electrones y positrones, 1229  
Antena de media onda, 886-887, 887  
Antena dipolo, 886-887  
Antena, para onda electromagnética, producción, 886-887, 887  
Antilogaritmos, **A-9**  
Antipartículas  
antineutrino, 1196, 1230, 1230n  
antineutrón, 1228  
antiprotón, 1228  
antiquarks, 1240, 1240t  
de electrones, positrones como, 1187  
descripción general, 1227, 1227-1229, 1228, 1229  
Arago, Dominique-François-Jean, 984  
Arcoíris 898, 898, 913, 913, 914  
Arcoíris doble, 913, 914  
Área (A) de formas geométricas, **A-10**, A-10t  
Astronauta *Apolo*, 1137  
ATLAS (A Toroidal LHC Apparatus), 1245  
Atmósfera, de la Tierra  
desenfoque atmosférico para telescopios y, 991-992, 992  
Átomo *Véase también* física atómica;  
Hidrógeno  
modelos de 1107, 1107-1108, 1108  
momentos magnéticos de, 786, 786-787, 787  
Átomos donantes, en semiconductores dopados, 165  
Aumento  
ampliación *versus*, 929  
lateral, 927  
lupa para, 951, 951  
por lentes delgadas, 941-943, 941t, 942, 943  
Autoinducción, 825, 825-826

## B

Balmer, Johann Jacob, 1107  
Banda de conducción, 1163  
Banda de valencia, 1163  
Bardeen, John, 703, 1168  
Barrera cuadrada, 1093  
Baterías, 714-716  
Bequerel, Antoine-Henri, 1177, 1187  
Bednorz, J. Georg, 703  
Betatron, 823  
Betelgeuse (estrella), 1050  
Bethe, Hans, 1222

Biot, Jean-Baptiste, 772  
Biot-Savart Ley de, 772, 772-776, 773, 774, 775, 776  
Bobina captadora, en guitarra eléctrica, 800  
Bobina de Rogowski, 817  
Bohr, Niels, 791, 1109, 1109, 1184  
Bola de fuego primordial, radiación de, 1247, 1247-1248, 1248  
Bombas de sangre electromagnéticas, 768  
Bonaparte, Napoleón, envenenamiento por arsénico de, 1214  
Bosón de Higgs, 1245  
Bosón *Véase también* física de partículas y cosmología  
calibre, 1226  
espín integral de 1226n  
fuerza débil mediada por W y Z, 1227  
Higgs, 1245  
Botellas magnéticas, 752, 752  
Boyle, Willard S., 1060  
Bragg, W. L., 997  
Braquiterapia ("semillas" de radiación implantadas en tejido canceroso, 1214  
Brattain, Walter, 1168  
Brecha de energía ( $E_g$ ) de material (energía separación entre valencia y bandas de conducción), 1163, 1163t  
*Bremsstrahlung* (rayos X de desaceleración de electrones; radiación de frenado) 1131, 1131  
Brewster, David, 1000  
Brogie, Louis de 1064-1065, 1071  
Buckminsterfullereno, 1157  
Bunsen, Robert, 724  
Búsqueda de inteligencia extraterrestre (SETI), 892

## C

Cable coaxial, 698-699, 832, 832  
Cableado doméstico, 732, 732-733, 733  
Cables vivos, 732n, 733, 733  
Caída de voltaje, 717n  
Cálculo diferencial, A-13-A-16  
Cálculo integral, A-16-A-19  
Cálculo  
diferencial, A-13-A-16  
integral, A-16-A-19  
Calefacción Joule, 704n  
Calentamiento global, 1155  
Calor específico ( $c$ )  
molar, de hidrógeno, 1097-1098  
Calor molar específico de hidrógeno, 1097-1098  
Cámaras, 947, 947-948, 1059  
Cambio climático, 1155  
Cambio de fase, 969, 969-970, 970  
Cambio de fase de reflexión, 969, 969-970, 970



- Campo conservador, 642
- Campo magnético que rodea un alambre delgado, recto, 773-774, 774  
resumen, 591
- Campos eléctricos ( $\vec{E}$ ), 588-615. *Véase también* distribuciones de carga continua; corriente y resistencia
- carga eléctrica ( $q$ )  
de electrones, protones y neutrones, 594*t*  
en partículas en un modelo de campo (eléctrico), 598-603  
fuerza eléctrica y, 593-598  
propiedades, 589, 589-591, 590  
unidad más pequeña ( $e$ ) de libre, 593
- dipolo eléctrico en, 678, 678-680, 679, 680
- inducción para cargar objetos, 591-592, 592
- ley de Coulomb, 592, 592-598, 594  
cero, como valor de fuerza neta, 596, 596-597  
descripción general, 592-594  
ejemplo de átomo de hidrógeno, 594-595, 595  
ejemplo de carga en esferas, 597, 597-598  
ejemplo de fuerza resultante, 595, 595-596
- líneas de campo eléctrico, 603, 603-605, 604, 605
- movimiento de partículas cargadas uniformemente, 605-607, 606, 607
- partícula en campo eléctrico, modelo de análisis de, 598, 598-603, 599, 601, 602, 603
- potencial eléctrico para el valor de, 645-646, 646
- imagina sobre, 588-589
- sinusoidal, 880-881, 881
- Campos magnéticos ( $\vec{B}$ ), 742-770. *Véase también* Ondas electromagnéticas
- aplicaciones de, 752, 752-755, 753, 754
- conductor de corriente en, 755, 755-757, 756
- descripción general, 748-752, 749, 750, 751, 752
- efecto Hall, 761, 761-762
- extraterrestres, 1122
- movimiento de partículas cargadas en un campo magnético uniforme  
par en el lazo de corriente en uniforme, 757, 757-760, 758, 759, 760
- partícula en un campo (magnético), análisis de modelo de, 743, 743-748, 744, 746, 747*t*, 748
- imagina sobre, 742-743
- sinusoidal, 880-881, 881
- Campos magnéticos extraterrestres, efecto Zeeman de medida, 1122
- Campos magnéticos, fuentes de, 771-796
- de solenoides, 782, 782-783, 783
- en materia, 786, 786-789, 787, 788, 789
- fuerza entre dos conductores paralelos, 777, 777-778, 778
- ley Biot-Savart, 772, 772-776, 773, 774, 775, 776
- ley de Ampère, 779, 779-782, 780, 781
- ley del magnetismo de Gauss, 784, 784-786, 785
- imagina sobre, 771-772
- Cáncer, detección y terapias para, 1214, 1215, 1225
- Cantidad de movimiento angular espín, para electrones, 1125, 1125*n*
- Cantidades físicas, unidades de, A-2-A-3
- Cañones de riel, 794
- Capa de ozono, para bloquear la radiación UV, 889
- Capas atómicas, 1116, 1116*t*
- Capacitancia (C), 663-690
- cálculo, 665-668, 666, 667, 668
- capacitores con dieléctricos, 676-678, 677, 677*t*
- capacitores en circuitos de corriente alterna, 854, 854-856, 855
- combinaciones de capacitores, 668, 668-672, 669, 670, 671
- corriente de desplazamiento en condensadores, 875, 875
- definición de 664, 664-665, 665
- dieléctricos, descripción atómica de, 681, 681-683, 682, 683
- dipolo eléctrico en el campo eléctrico, 678, 678-680, 679, 680
- energía almacenada en condensadores cargados, 672-676, 673, 674
- equivalente, 671-672
- ley de Coulomb, 592, 592-598, 594  
cero, como valor de fuerza neta, 596, 596-597  
descripción general, 592-594  
ejemplo de átomo de hidrógeno, 594-595, 595  
ejemplo de carga en esferas, 597, 597-598  
ejemplo de fuerza resultante, 595, 595-596
- imagina sobre, 663-664
- Capacitor (es), 664
- de placas paralelas, 666, 676, 678, 681-682
- Capas, atómicas, 1116, 1116*t*
- Captura de electrones, 1197, 1200*t*
- Carga
- de colores, propiedades de los quarks, 1242-1243
- de núcleo, 1179
- eléctrica *Véase también* campos eléctricos
- eléctrica cuantizada, 591
- eléctrica negativa, 590
- eléctrica positiva, 590
- en esferas, como el ejemplo de la ley de Coulomb, 597, 597-598
- Cargador de batería inalambrico, 833, 833
- Cargador de batería, inalambrico, 833, 833
- Cargas eléctricas, campos magnéticos moviéndose a partir de, 772
- Cargas puntuales, 593, 642, 642-645, 643
- Caronte (luna de Plutón), 992, 992
- Catástrofe ultravioleta, 1051
- Cavidad dentro del conductor, 654, 654-655
- CCD (dispositivo de carga acoplada), 948, 1060
- Celdas fotovoltaicas, 883, 1167
- Celdas solares, revestimientos no reflectantes para, 973, 973
- Central nuclear de Fukushima I (Japón), 1206
- Centros para el Control y la Prevención de Enfermedades (CDC), 1215
- CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, cambiado a Laboratorio Europeo de Partículas Física), 1011, 1022, 1227*n*, 1242, 1245
- Cero, valor de la fuerza como, 596, 596-597
- Chadwick, James, 1223
- Chamberlain, Owen, 1228
- Charanka Solar Park (India), 1167
- Chip (circuito integrado), 1170
- Chu, Steven, 1143
- Ciclo protón-protón, fusión nuclear en, 1207
- Ciclotrón, 750, 754, 754-755
- Cilindro
- como simetría para la distribución de carga, 627-628, 628
- como simetría para un capacitor, 667, 667
- Cinturones de radiación Van Allen, 752, 752
- Circonia cúbica *versus* diamante, 915
- Circuito de CA puramente capacitivo, 855-856
- Circuito de CA puramente inductivo, 853
- Circuito de corriente circular, campo magnético eje de, 775, 775-776, 776
- Circuitos de corriente alterna (CA), 847-872. *Véase también* Corriente y resistencia
- Circuitos de corriente continua (CC), 713-741, 714. *Véase también* Corriente y resistencia
- cableado doméstico, 732, 732-733, 733
- fuerza electromotriz (fem, “), 714, 714-716, 716
- seguridad eléctrica, 733, 733-734, 734
- Circuitos de la serie *RLC*
- como circuito de corriente alterna, 856, 856-859, 857, 858
- resonancia en 861-863, 862
- Circuitos integrados, 1144, 1170, 1170-1171
- Circuitos *LC*, 834, 834-837, 836, 877
- Circuitos *RC*, 725-732
- capacitores de carga, 725-728, 727, 728, 729-730
- capacitores de descarga, 728-729, 729, 730-731
- constante de tiempo, 728
- energía entregada a la resistencia, 731-732
- limpiaparabrisas intermitentes, ejemplo 729
- resistencias, 716-722
- ejemplo de luces de paisaje, 720, 720
- en paralelo, 718, 718-720, 720
- en serie, 716-718, 717, 718
- resistencia equivalente, cálculo de la, 721, 721
- tres, en paralelo, 722, 722
- imagina sobre, 713-714
- Circuitos *RC*, 725-732
- capacitores de carga, 725-728, 727, 728, 729-730

- capacitores de descarga, 728-729, 729, 730-731
- ejemplo de limpiaparabrisas intermitente, 729
- energía entregada a la resistencia, 731-732
- Circuitos *RL*, 827, 827-830, 828, 829, 830
- Circuitos *RLC*, 837-839, 838, 838, 839
- Cirugía ocular Lasik, 1136-1137
- CMS (solenoides compacto Muon), 1011, 1245
- COBE (Explorador de fondo cósmico) satélite, 1248
- Cobre, efecto Hall para el, 762
- Coefficiente de reflexión (*R*), 1093
- Coefficiente de transmisión (*T*), 1093-1094
- Cohen-Tannoudji, Claude, 1143
- Colisionador LEP (Large Electron-Positron), 1245
- Colisionador protón-antiprotón, 1227
- Colisionadores (aceleradores de haces colisionantes), 1245
- Color, longitudes de onda de luz visible correspondiente a 888, 888*t*
- Colores, ángulos de desviación de, 913
- Coma cúmulo de galaxias, 1250
- Combinación de capacitores en serie, 670, 670-671
- Combinación de resistencias en serie, 716-718, 717
- Combinación en paralelo de resistencias, 718, 718-722
- Combinación paralela de capacitores, 669, 669-670
- Combustible de deuterio (agua pesada) para reacciones de fusión, 1207
- Complementariedad, principio de, 1064
- Compton, Arthur Holly, 1061, 1061
- Condensados de Bose-Einstein, 1144
- Condiciones energéticamente favorables, moléculas para formar, 1146
- Condon, E.U., 1195
- Conducción eléctrica
- en aislantes, 1162-1163
  - en metales, 1162, 1162
  - modelo de, 699-701
  - en semiconductores, 1163, 1163-1165, 1163a, 1164, 1165
- Conducción térmica, analogía actual a, 692
- Conducción
- eléctrica, 699-701
  - térmica, 692
- Conductividad (es), 695, 700
- Conductores
- campo magnético entre dos alambres paralelos, 777, 777-778, 778
  - corriente, en campos magnéticos, 755, 755-757, 756
  - en equilibrio electrostático, 651, 651-655, 652, 653, 654
- Conexión máxima, en patrones de difracción, 984
- Confinamiento inercial de reacciones de fusión, 1210, 1210-1211
- Confinamiento magnético de reacciones de fusión, 1209, 1209-1210
- Conos y varillas, en ojos, 949
- Conservación de alimentos, radiación para, 1215, 1215
- Conservación de carga eléctrica, 590-591
- Conservación de extrañeza, 1237
- Conservación de la ecuación de energía.
- Véase *también* energía de conservación de la cantidad de movimiento. Véase *también* cantidad de movimiento lineal
- Conservación de su número de leptón, 1236
- Conservación de un número de leptón de electrones, 1235
- Conservación del momento angular. Véase *también* Momento angular
- Conservación del número bariónico, 1233
- Conservación del número de muón leptón, 1236
- Constante de Boltzmann (*k*B), 712, 1050
- Constante de Coulomb (*ke*), 593
- Constante de decaimiento, 1187
- Constante de Hubble, 1248
- Constante de Madelung, 1156
- Constante de Planck (*h*), 786, 1051-1052, 1131
- Constante de Rydberg, 1107
- Constante de tiempo (*t*),
- de los circuitos *RL*, 829-830, 830
  - del circuito *RC*, 728
- Constante dieléctrica (*k*), 676-677, 677*t*
- Constante Stefan-Boltzmann, 1049
- Contaminación por mercurio, absorción atómica espectroscopia de, 1106
- Convención Marco de las Naciones Unidas sobre Cambio climático, 1155
- Cooper, Gordon, 1043
- Cooper, L.N., 703
- Cornu, Marie, 870
- Corriente (*I*)
- conducción 874 874
  - desplazamiento, 874, 874-875, 875
  - en el inductor en el circuito de CA, 852
  - en fase con el voltaje, 849
  - instantánea, 692
  - promedio ( $I_{\text{prom}}$ ), 692
  - RMS (raíz-media-cuadrado), 850-851, 862
- Corriente y resistencia, 691-712. Véase *también* circuitos de corriente alterna; circuitos de corriente continua; Faraday ley de inducción de coeficientes de temperatura de la resistividad, 697*t*, 701
- corriente y resistencia, y 701, 701-702
  - corriente, resumen de 692, 692-694, 693
  - energía eléctrica, 703, 703-706, 705
  - modelo de conducción eléctrica, 699-701
  - poder de la radiación emitida aumenta con la 1049
  - resistencia, visión general de, 694-699, 695, 695, 696, 696, 697, 697, 698
  - imagina sobre, 691-692
  - superconductores, 702, 702-703, 702*t*
  - temperatura y 701, 701-702
- Corrientes de eddy, 814, 814-815, 865
- Corrimiento al azul, en longitud de onda, 1029
- Corrimiento al rojo, en longitud de onda, 1029
- Corrimientos Doppler, 1248
- Cosmología. Véase física de partículas y cosmología
- Coulomb, Charles, 593
- Coulomb (C, unidad de carga eléctrica), 593
- Cristales líquidos, 1144
- Criterio de Rayleigh, 989-990
- Cromodinámica cuántica (QCD), 1243
- Cuantización del espacio, 1122-1124, 1124
- Curie, Marie, 1187
- (radioactividad), 1187
- Curie, Pierre, 1187
- (radioactividad), 1187
- Curvatura del espacio-tiempo, 1040-1041
- ## D
- Daltonismo, 950
- Daño por radiación biológica, 1211-1213, 1212*t*
- Datación de carbono por decaimiento de radiactividad, 1198-1199
- Davisson, C. J., 1065
- De Broglie, Louis, 1064
- Debye, Peter, 1061
- Decaimiento beta, en radioactividad, 1195-1198, 1196, 1197, 1200*t*
- Declinación magnética, 745
- Defecto en masa, en fisión nuclear, 1202
- Densidad (es)
- ( $\rho$ ), de núcleo, 1180-1181
  - crítica, destino universal y, 1249, 1249-1250
  - de carga, 616-617, 681-682
  - lineal, 617, 650
  - superficial, 617, 649
  - volumétrica ( $\rho$ ), 616
- de corriente (*J*), 694, 700
  - de energía instantánea, 883
  - total de energía instantánea (*u*), 883
- Departamento de Agricultura de los Estados Unidos, 1215
- Derivada, en cálculo, A-14
- Descarga eléctrica, 733, 733-734, 800
- Descubrimientos de Hertz, 876-878, 877, 878
- Desfibrilador, 663, 663, 676
- Desintegración alfa, en radioactividad, 1095, 1191, 1191-1195, 1192*t*-1193*t*, 1195, 1200*t*
- Desintegración gamma, en radioactividad, 1199, 1199-1200, 1200*t*
- Desintegraciones radiactivas sucesivas, ley de 1220
- Detector de solenoides muón compacto (CMS) (CERN), 1011, 1245
- Diagramas
- de circuito, 668
  - de Feynman, 1230, 1231, 1243
  - de nivel de energía, 1051, 1051, 1051*n*
  - de rayos para espejos esféricos, 931, 931-933, 931, 932, 933
- Diamagnetismo, 788-789, 789, 845
- perfecto, en superconductores, 845
- Diamante, circonia cúbica v., 915
- Dieléctricos
- capacitores con, 676-678, 677, 677*t*
  - descripción atómica de, 681, 681-683, 682, 683

- Diferencia de potencial ( $\Delta V$ )  
 a través de la resistencia de carga, 714  
 a través del capacitor, 676  
 descripción general, 637-639, 638  
 en campo eléctrico uniforme, 639-642, 640, 641  
 para material óhmico y no óhmico, 697
- Diferencia de trayectoria ( $\delta$ ), óptica  
 ondulatoria, 965
- Diferencial perfecto, en cálculo, **A-18**
- Difracción de rayos X por cristales, 996, 996-997, 997
- Difracción, distribución de intensidad a partir de la, 969
- Dimensiones, A-2-A-3
- Diodo de unión, 1165, 1165-1166, 1166
- Diodos de unión *p-n*, 1165, 1166
- Diodos emisores de luz (LED) y diodos de fotoabsorción, 1166-1168, 1167
- Diodos  
 de unión 1165, 1165-1166, 1166  
 emisor de luz y absorbente de luz, 1166-1168, 1167  
 láser, 1136
- Dioptrías, en prescripciones de lentes, 950
- Dipolo, potencial eléctrico debido a 648, 648
- Dirac, Paul, 1125, 1227
- Disco de carga uniforme, 620, 620, 649, 649-650
- Discos Blu-ray, 981
- Disipadores de calor, 704
- Dispersión de eventos, reacciones como, 1201
- Dispersión de luz, 912-914, 913, 914
- Dispersión, polarización de ondas de luz por, 1002, 1002-1003
- Dispositivo  
 de bobina de búsqueda, 821  
 de carga acoplada (CCD), 948, 1060  
 de confinamiento magnético Tokamak, para reacciones de fusión, 1209, 1209-1210  
 de confinamiento magnético toroidal, para reacciones de fusión, 1209, 1209-1210  
 de fusión Stellarator, 1210  
 digital de microespejo, en equipo de proyección, 904, 904-905
- Dispositivos semiconductores  
 circuitos integrados, 1170, 1170-1171  
 diodo de unión, 1165, 1165-1166, 1166  
 diodos emisores de luz y de absorción de luz, 1166-1168, 1167  
 transistor MOSFET (metal-óxido-semiconductor transistor de efecto de campo), 1168, 1168-1169  
 unión 1168  
 tunelización resonante, 1169-1170, 1170
- Distancia de la imagen ( $q$ ), 926
- Distancia del objeto ( $p$ ), 926
- Distancia focal ( $f$ ), 930, 930, 940-941, 941
- Distribuciones continuas de carga, 615-635. *Véase también* campos eléctricos  
 campo eléctrico de, 616, 616-620, 618, 619, 620
- flujo eléctrico ( $\Phi_E$ ) y, 620-623, 621, 621, 622, 623
- imagina sobre, 615-616
- ley de Gauss  
 aplicación de, 625-629, 626, 627, 628, 629  
 descripción general, 623, 623-625, 624
- potencial eléctrico debido a, 646, 646-651, 648, 649, 650
- Divergencia, ángulo de, 1135
- Doble refracción, polarización de ondas de luz por, 1001, 1001-1002, 1002*t*
- Doblete óptico, 960
- Domingo por la tarde en la isla de La Grande Jatte*, A (Seurat), 1005
- Dominios, en materiales ferromagnéticos, 787, 788
- Domo geodésico, 1157
- Drude, Paul, 699
- Dualidad onda-partícula, 1070, 1080
- DVDs, como rejillas de difracción, 993-994, 994
- E**
- Ecuación de corrimiento Compton, 1062
- Ecuación de los fabricantes de lentes, 940-941
- Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, 1090
- Ecuación espejo, 930
- Ecuaciones  
 cuadráticas, A-7  
 de corrimiento Compton, 1062  
 de factorización, A-7  
 de lentes delgadas, 941  
 de Maxwell, 876-878, 877, 878  
 de Schrödinger, 1089-1091, 1090, 1090, 1092, 1114, 1115*n*, 1120*n*, 1121*n*  
 de transformación de Galileo espacio-tiempo, 1014  
 velocidad, 1015-1016  
 de transformación de Lorentz, 1030, 1030-1031  
 de transformación de velocidad de Lorentz, 1031-1034, 1033  
 de transformación espacio-tiempo, galileana, 1014  
 efecto fotoeléctrico, 1058  
 espejo, 930  
 fabricante de lentes, 940-941  
 lente delgada 941  
 ley de Brewster, 1000  
 ley de desplazamiento de Wien, 1050  
 ley de Malus, 999  
 ley de Stefan, 1049  
 ley Raleigh-Jeans, 1050  
 lineales, A-7, A-7-A-9, A-8, A-9  
 Maxwell, de, 876-878  
 Schrödinger, 1092  
 transformación de Lorentz, 1030, 1030-1034, 1033
- Edison, Thomas, 865
- Efecto  
 Compton en la física cuántica, 1061, 1061-1063, 1063
- de campo de metal-óxido-semiconductor transistor (MOSFET), 1168, 1168-1169
- de simetría, en el modelo de gota líquida, 1184-1185
- de superficie, en modelo de la gota líquida, 1184
- del volumen, en el modelo de gota líquida, 1184
- Doppler, 1029  
 dilatación del tiempo, 1019, 1019-1024, 1020, 1021, 1021, 1023  
 gráficos espacio-tiempo, 1026, 1026-1029, 1028  
 paradoja de los gemelos, 1024, 1024-1025  
 relativo, 1029  
 simultaneidad y relatividad del tiempo, 1019, 1019-1020
- fotoeléctrico, 1055, 1055-1060, 1058*t*, 1059
- Hall, 761, 761-762
- invernadero, 1155, 1155
- Meissner, 789-790, 790
- Zeeman, 1122, 1122, 1123*n*
- Efectos nucleares de espín-órbita, 1187
- Eficacia biológica relativa (RBE), 1212, 1212*t*
- Einstein, Albert  
 ecuación energética de, 1231  
 experimento Michelson-Morley y, 1016-1017  
 modelo de efecto fotoeléctrico de 1057-1058  
 ondas gravitacionales predichas por, 975, 975  
 principio de relatividad de, 1018, 1018-1019, 1018*n*  
 resultados de Planck rederivados por, 1053  
 teoría especial de la relatividad de, 1011  
 teoría general de la relatividad de 1039-1041
- Eje de rotación. *Véase también* movimiento de rotación
- Eje fijo *Véase también* movimiento de rotación
- Eje principal de los espejos, 928, 928, 929
- El gato de Schrödinger, 1252
- Electrones  
 carga y peso de 594*t*  
 coeficiente de transmisión de, 1094  
 como fotoelectrones, 1055*n*  
 como leptones, 1233  
 desintegración del muón a, 1230  
 en campos magnéticos, 748, 748  
 en efecto fotoeléctrico, 1055-1056  
 en los primeros modelos atómicos, 1107-1109  
 flexión de haz de 751, 751  
 momento angular para el espín, 1125, 1125*n*  
 momento lineal de, 1035  
 naturaleza de onda de 1064-1066  
 positrones como antipartículas de, 1187  
 principio de incertidumbre y ubicación de, 1072  
 propiedad del espín de 786-787, 787



- Elemento halógeno, 1129  
 Elementos de combustible, de uranio, 1205  
 Elementos de metales alcalinos, 1129-1130  
 Eliminación de residuos en reactores nucleares, 1206-1207  
 Elipse, A-11  
 Emisión espontánea, 1134  
 Emisión estimulada, 1134, 1134-1135  
 Emisiones atómicas, 1072-1073  
 En fase, corriente y voltaje, 849  
 Endoscopios, láseres utilizados con, 1137  
 Energía ( $E$ ). Véase también la física atómica; energía  
   mecanismos de transferencia; energía cinética; energía potencial  
   almacenada en capacitores cargados, 672-676, 673, 674  
   celdas solares fotovoltaicas para, 1167  
   cinética (K). Véase también Energía; teorema de la energía de trabajo cinético  
   de partículas cargadas en el campo magnético, 747  
   relativista, 1035-1036, 1036  
   como afinidad electrónica del átomo, 1146  
   cuantizada, 1051  
   de disociación, 1146, 1146n  
   de enlace, 1145, 1182, 1182-1184, 1183  
   de ionización, 1111, 1130  
   de rayos x, 1133  
   de reacción ( $Q$ ), 1201  
   de reposo ( $E_R$ ), 1036  
   decaimiento del radio y liberación de, 1194-1195  
   disociación, 1146  
   eléctrica 691, 691, 703, 703-706, 705  
   en campos eléctricos, 672-674, 673  
   en campos magnéticos, 830-832, 832  
   en el análisis del circuito de CA, 859-861  
   en inductores, 831  
   enlace nuclear, 1182, 1182-1184, 1183  
   entregado a la resistencia, 731-732  
   estados de, en moléculas  
     espectros de 1153, 1153-1156, 1154, 1155  
     movimiento rotacional de las moléculas, 1148-1151, 1149  
     movimiento vibratorio de las moléculas, 1151, 1151-1153, 1152  
     resumen, 1148  
   factores de conversión para A-2  
   Fermi, 1158-1160, 1160a, 1163n  
   Fermi ( $E_F$ ), 1158-1160, 1160t, 1162-1163, 1163n  
   fisión, liberación de, 1203-1204  
   frecuencia, relación a, 1053  
   ionización, 1111, 1130  
   masa como forma de, 1036  
   misteriosa, del universo, 1251  
   ondas electromagnéticas para llevar, 882-884, 883  
   oscura, 1251, 1251n  
   para plantas de energía, 812-813  
   potencial ( $U$ ). Véase también potencial eléctrico; Energía; Energía, conservación de  
   configuración rotacional asociada con, 679  
   del capacitor, 672n  
   efecto túnel a través de la barrera de, 1093, 1093-1094  
   en el enlace molecular, 1145  
   en sólidos iónicos, 1156  
   potencial gravitacional ( $U_g$ ), 643n  
   radiada por electricidad acelerada, carga 878  
   reacción ( $Q$ ) 1201  
   relativista, 1035-1039, 1036  
   reposo ( $E_R$ ), 1036  
   de partículas seleccionadas, 1179t  
   de protón, 1038-1039  
   equivalente para la unidad de masa atómica, 1179  
   para quarks y leptones, 1242t  
   y energía total, 1037  
   total ( $E$ ), 1037  
   unión, de moléculas, 1145  
 Enfermedad de Alzheimer, escaneos PET para, 1229, 1229  
 Enlaces  
   descripción general, 1145, 1145  
   en ADN (ácido desoxirribonucleico) en metales, 1157-1158, 1158  
   en sólidos covalentes, 1157, 1157  
   en sólidos iónicos, 1156, 1156  
   en sólidos metálicos, 1157-1158, 1158  
   energía potencial en molecular, 1145  
   hidrógeno molecular, 1147-1148, 1148  
   molecular covalente, 1146-1147, 1147  
   molecular iónico, 1145-1146, 1146  
   moleculares covalentes, 1146-1147, 1147  
   moleculares de hidrógeno, 1147-1148, 1148  
   moleculares de Van der Waals, 1147, 1243  
   moleculares iónicos, 1145-1146, 1146  
   moléculas, 1148, 1148  
   Van der Waals, 1147, 1243  
 Entropía (S)  
   en sistemas cuánticos, 1127  
 Equilibrio electrostático, 651, 651-655, 652, 653, 654  
 Equilibrio estático. Véase también equilibrio  
 Equilibrio, electrostático, 651, 651-655, 652, 653, 654  
 Equivalente de radiación en el hombre (REM), 1212  
 Ergonomía, 593  
 Escaneos PET (tomografía de emisión de positrones) para el diagnóstico médico, 1177, 1213, 1225, 1225, 1229, 1229  
 Esferas  
   capacitancia de carga aislada, 665  
   capacitor como, 668, 668  
   carga en, como un ejemplo de la ley de Coulomb, 591-592, 597, 597-598  
   distribución de carga simétrica a, 626, 626-627, 627  
 Espacio libre, permeabilidad de ( $\mu_0$ ), 772  
 Espacio libre, permitividad de ( $\epsilon_0$ ), 593  
 Espacio-tiempo, curvatura de, 1040-1041  
 Espectro lineal, 1106  
 Espectrómetro de masas Bainbridge, 753  
 Espectrómetro de masas, 753, 753  
 Espectros  
   de gases, 1106, 1106-1107, 1107  
   de ondas electromagnéticas, 887-889, 888, 888, 889, 889  
   molecular 1153, 1153-1156, 1154, 1155  
   rayos X, 1131, 1131-1133, 1132, 1133  
   visibles, 913, 1130, 1130-1131  
 Espectroscopia  
   atómica, 994-995  
   como una aplicación de red de difracción, 994-996, 995  
   de absorción, 1106  
   de emisión, 1106, 1106  
   Kirchhoff y Bunsen como fundadores de, 724  
   transformada de Fourier infrarroja (FTIR), 974-975  
 Espejismos, 914  
 Espejo de Lloyd, 969  
 Espejo divergente, 931  
 Espejos esféricos  
   cóncavos, 928, 928-930, 929, 930, 933-934  
   convexos, 930-931, 931, 935, 935  
   diagramas de rayos para, 931, 931-933, 931t, 932, 933  
   laterales, automóviles, 935, 935  
   planos, 926, 926-928, 927, 928  
   espejo de Lloyd, 969  
   múltiples imágenes formadas por dos, 927, 927  
   retrovisor inclinable, 928, 928  
   retrovisores basculantes, 928, 928  
 Estabilidad, nuclear, 1181-1182, 1182  
 Estación espacial internacional, 630, 891  
 Estadísticas cuánticas, 1158  
 Estados cuánticos, 1051  
 Estados estacionarios de electrones, 1109  
 Estándares SI (Système International), A-24  
 Estroncio-90, 1222  
 Exoplanetas, 890-891, 891  
 Expansión del universo, evidencia de, 1248-1249  
 Expansión térmica de sólidos y líquidos. Véase también Temperatura  
 Experimento  
   Davisson-Germer, 1064-1065, 1070  
   de doble rendija, 1070, 1070-1071  
   de doble rendija de Young en óptica ondulatoria 963, 963-965, 964, 965  
   de la gota de aceite Millikan, 656-657  
   helicoidalmente simétrico, en fusión nuclear (EE. UU.), 1210  
   Irvine-Michigan-Brookhaven, 1234, 1258  
   Kamiokande II, 1258  
   Michelson-Morley, 1016, 1016-1018  
   Nacional de toros esféricos (NSTX), 1209  
   Explorador de fondo cósmico (COBE) satélite, 1248  
 Explosiones de supernova, 1045  
 Exponentes, A-4, A-6-A-7  
**F**  
 Factor de calidad ( $Q$ ), 863, 863n  
 Factor de potencia ( $\cos \Phi$ ), 860  
 Factores de conversión, A-1-A-2  
 Fairchild Camera and Instrument, Inc., 1170



- Falsificaciones de arte, análisis de activación de neutrones  
identificar, 1214
- Farad (F, unidad de capacitancia), 664
- Faraday, Michael, 587, 664, 772, 797, 798
- Fasor, 849, 849, 850, 857
- fem autoinducida ( $\epsilon_L$ ), 825
- fem contraelectromotriz, 825
- fem de movimiento, 801, 801-805, 802, 803, 805
- Fermat, Pierre de, 924
- Fermi, Enrico, 1196, 1202, 1205
- Ferromagnetismo, 787-788, 788, 788t
- Feynman, Richard P., 609, 1230
- Fibras ópticas, 916, 916-917, 917
- Física atómica, 1105-1143  
átomo, modelos de, 1107, 1107-1108, 1108  
espectros visibles y de rayos X, 1130, 1130-1133, 1131, 1132, 1133  
funciones de onda para el hidrógeno, 1117, 1117-1120, 1118, 1119  
gases, espectros atómicos de 1106, 1106-1107, 1107  
láseres 1135-1137, 1136  
modelo cuántico del átomo de hidrógeno, 1114, 1114-1117, 1115, 1116t  
modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, 1109, 1109-1114, 1110, 1111  
números cuánticos  
espín magnético ( $m_s$ ), 1123, 1123-1126, 1124, 1125, 1126t  
orbital ( $\ell$ ), 1120  
orbital magnético ( $m_\ell$ ), 1120-1123, 1121, 1122  
principal ( $n$ ), 1115  
principio de exclusión y tabla periódica, 1126, 1126-1130, 1127t, 1128, 1128, 1129, 1130  
imagina sobre, 1105  
transiciones espontáneas y estimuladas, 1133-1134, 1134
- Física cuántica, 1048-1078  
efecto Compton, 1061, 1061-1063, 1062  
efecto fotoeléctrico, 1055, 1055-1060, 1058t, 1059  
experimento de doble rendija, 1070, 1070-1071  
modelo de partículas cuánticas, 1067, 1067-1069, 1068  
ondas electromagnéticas, 1063-1064  
principio de incertidumbre, 1071, 1071-1073  
imagina sobre, 1048-1049  
propiedades de onda de las partículas, 1064, 1064-1066, 1066  
radiación de cuerpo negro e hipótesis de Planck, 1049, 1049-1055, 1050, 1051, 1052, 1053
- Física de estado sólido, 1144
- Física de la materia condensada, 1144
- Física de partículas y cosmología, 1225-1258  
clasificación de partículas, 1231-1233, 1232t  
conexión entre densidad crítica y destino universal, 1249, 1249-1250  
leyes de conservación para, 1233-1236, 1234
- materia oscura y masa faltante de universo, 1250-1251  
descripción general, 1246, 1246-1247  
misteriosa energía del universo, 1251  
radiación de bola de fuego primordial, 1247, 1247-1248, 1248  
universo en expansión, evidencia para, 1248-1249
- mesones y comienzos de, 1229-1231, 1230, 1231
- modelo estándar para, 1244-1245, 1245  
para las fuerzas fundamentales en la naturaleza, 1226-1227, 1227t
- partículas extrañas y extrañeza, 1236-1238, 1237
- patrones en, 1238, 1238-1239, 1239
- positrones y otras antipartículas, 1227, 1227-1229, 1228, 1229
- problemas y perspectivas en, 1251-1253, 1252
- quarks, 1240-1244, 1240t, 1242t, 1243, 1244  
imagina sobre, 1225-1226
- Física estadística, 1158
- Física Nuclear, 1177-1224  
daño por radiación biológica, 1211-1213, 1212t  
energía de enlace nuclear, 1182, 1182-1184, 1183  
fisión nuclear, 1202-1204, 1203  
fusión nuclear, 1095, 1207-1211, 1208, 1209, 1210  
modelo de capas (Goeppert-Mayer y Jensen) en, 1185-1187, 1186  
modelo de gota líquida (Bohr) en, 1184-1185, 1185  
núcleos, propiedades de, 1178-1182, 1179t, 1180, 1182  
proceso de desintegración en  
alfa, 1191, 1191-1195, 1192t-1193t, 1195  
beta, 1195-1198, 1196, 1197  
datación por carbono, 1198-1199  
descripción general, 1190-1191  
gamma, 1199, 1199-1200, 1200t  
radioactividad natural, 1200  
radioactividad y, 1187-1190, 1188  
reacciones nucleares, 1200-1202  
reactores nucleares, 1204, 1204-1207, 1205, 1206  
resonancia magnética nuclear e imágenes de resonancia usos de la radiación 1213, 1213-1215, 1215  
imagina sobre, 1177-1178
- Fizeau, Armand H. L., 900, 900-901, 918
- Flujo eléctrico ( $\Phi_E$ ). Véase también ley de Gauss  
corriente de desplazamiento y 875 875-876  
descripción de, 620-623, 621, 621, 622, 623  
diferencias de campo magnético desde, 785, 785
- Flujo magnético ( $\Phi_B$ ), 784, 784-786, 785, 799, 799-800, 800, 832
- Fluorodesoxiglucosa, 1177
- Formación de imagen, 925-961  
aberraciones de lentes y, 947, 947  
al refractar superficies, 935-939  
descripción general, 939-941, 940, 941
- diagramas de rayos para, 931, 931-933, 931t, 932, 933
- instrumentos ópticos para  
cámara, 947, 947-948  
lupa, 951, 951  
microscopio compuesto, 952, 952  
ojos, 948, 948-950, 949, 950  
telescopio, 953, 953-954, 954
- por espejos esféricos  
cóncavo, 928, 928-930, 929, 930, 933-934  
convexo, 930-931, 931, 935, 935
- por espejos planos, 926, 926-928, 927, 928
- por lentes delgadas, 939-946  
aumento de, 941-943, 941t, 942, 943  
combinaciones de, 945, 945-946  
convergente, 943, 943-944  
divergente, 944, 944-945  
imagina sobre, 925-926
- Fotometría fotoeléctrica, 1059-1060
- Fotones  
como partícula de luz, 899  
fuerza electromagnética mediada por, 1227  
luz cuantificada como 1057  
virtual, 1230-1231  
virtuales, 1230-1231
- Fototubo, efecto fotoeléctrico, 1059
- Fragmento de fisión, 1203
- Franjas  
brillantes, en óptica de ondas, 986  
en el experimento Young de doble-rejilla, 963, 963  
en óptica ondulatoria, 986-987  
oscuras, en óptica ondulatoria, 986-987
- Franklin, Benjamín, 590
- Frecuencia ( $f$ )  
de corte, en efecto fotoeléctrico ( $f$ ), 1056  
de partículas, 1064  
relación de energía a, 1053
- Frecuencias de resonancia ( $\nu_0$ ), 861-862
- Fresnel, Augustin, 984
- Frisch, Otto, 1202
- FTIR (infrarrojo de transformada de Fourier) espectroscopia, 974-975
- Fuentes de CA, 848, 848  
capacitores en, 854, 854-856, 855  
circuitos RLC en serie  
descripción general, 856, 856-859, 857, 858  
resonancia en 861-863, 862  
fasores, 849, 849-850, 852, 852, 854, 854  
inductores en, 851, 851-853, 852, 853  
poder en 859-861  
resistencias en, 848, 848-851, 849, 850  
imagina sobre, 847-848  
transformadores y transmisión de potencia 863-866, 864, 864, 865
- Fuentes de luz coherente, 964, 995, 1135
- Fuentes de luz incoherentes, 964
- Fuentes de luz monocromática, 964, 1135
- Fuerza ( $\vec{F}$ ). Véase también Torque  
atractiva, 589, 589, 590  
cero como valor neto de, 596, 596-597  
color, entre quarks, 1243  
conservativa entre las cargas descritas por la ley de Coulomb, 637  
de color, entre quarks, 1243  
de dispersión, 1147

- de Lorentz, 752, 876  
de repulsión, 589, 589, 590  
débil, 1226-1227, 1227*t*  
dipolar inducida por un dipolo, 1147  
dipolo inducido por dipolo, 1147  
dipolo-dipolo, 1147  
dispersión, 1147  
eléctrica, 590, 590  
electromagnética, 1226-1227, 1227*t*  
electromotriz (fem,  $\epsilon$ )  
  autoinducida (“ $\epsilon_L$ ”), 825  
  de movimiento, 801, 801-805, 802, 803, 805  
  descripción general, 714, 714-716, 716  
  inducida, 800, 800-801, 812  
factores de conversión para A-1  
fuerte, 1231, 1242  
fundamental, física de partículas en,  
  1226-1227, 1227 *t*  
gravitacional, 1226-1227, 1227*t*  
Lorentz, 752, 876  
magnética, 745-746, 746  
  repulsiva, 790  
nuclear, 1181, 1226-1227, 1227, 1231  
repulsiva, 589, 589, 590, 790  
repulsiva de Coulomb  
  en el modelo de gota líquida, 1184  
  entre partículas alfa y núcleo, 1095  
  estabilidad nuclear, 1182, 1182-1183,  
  1183  
  reacciones de fusión obstaculizadas por,  
  1208  
  tamaño y estructura de los núcleos  
  determinados por, 1179-1181, 1180  
  repulsiva magnética, 790  
  resultante, en la ley de Coulomb, 595,  
  595-596  
Fuerzas conservadoras, 637  
Fuerzas fundamentales, 1226-1227, 1227*a*  
Fuller, R. Buckminster, 1157  
Función de densidad de probabilidad  
  radial, 1117, 1119  
Función de distribución de Fermi-Dirac,  
  1158, 1158  
Función de onda ( $\Psi$ )  
  en un problema de partículas en una caja,  
  1084-1085  
  para el hidrógeno, 1117, 1117-1120, 1118,  
  1119  
  resumen, 1079-1083, 1080, 1082  
Función de onda unidimensional ( $\Psi$ ),  
  1081-1082  
Funciones de onda normalizadas, 1082  
Funciones de trabajo de metales, 1057-1058,  
  1058*t*  
Funciones, en cálculo, A-14  
Fusión, nuclear, 1207-1211, 1208, 1209, 1210
- G**  
Gabor, Dennis, 995  
Gafas de sol, para reducir el daño por la luz,  
  ultravioleta, 889, 889  
Galilei, Galileo, 899  
Gases  
  espectros atómicos de 1106, 1106-1107,  
  1107  
  inertes, 1128, 1147  
  nobles, 1128, 1147  
Gasolina para motores pequeños, 921  
Gauge Boon, 1226. *Véase también* Física de  
  partículas y cosmología  
Gauss, Karl Friedrich, 624  
Geiger, Hans, 1107-1108  
Geim, Andre, 1157  
Gell-Mann, Murray, 1238-1241  
Generador Homopolar, 818  
Generador Van de Graaff, 709-710  
Generadores de corriente alterna (CA), 811,  
  811-813, 812  
Generadores de corriente continua (CC),  
  810-811, 811  
Generadores y motores, 810-814, 811, 811,  
  812  
Geometría, A-10-A-11  
Gerlach, Walter, 1124, 1124-1126  
Germer, L. H., 1065  
Glashow, Sheldon, 1244  
Glaucoma, tratamiento con láser para, 1137  
Gluones, 1227, 1243-1244  
Goepfert-Mayer, María, 1186  
Golmud Solar Park (China), 1167  
Golpe de retorno de un rayo, 636, 636  
Goudsmit, Samuel, 1123-1124  
Grafeno, 1157  
Gráficos espacio-tiempo, en la teoría  
  especial de relatividad, 1026,  
  1026-1029, 1028  
Gran Colisionador de Hadrones (LHC),  
  CERN, 1200, 1242, 1245  
Gran Colisionador de Positrones de  
  Electrones (LEP), 1245  
Gran dispositivo helicoidal, para la fusión  
  nuclear (Japón), 1210  
Gran Telescopio Canarias (Islas Canarias,  
  España), 954  
Gravedad  
  como fundamental en la naturaleza,  
  1226-1227, 1227*t*  
  fuerza gravitacional ( $\vec{F}_g$ )  
  teoría de Einstein de la, 1039  
Gravitones, fuerza gravitacional mediada  
  por, 1227  
Guía escalonada de un rayo, 636, 636  
Guitarra eléctrica, 800, 800  
Gurney, R.W., 1195
- H**  
Hahn, Otto, 1202  
Hall, Edwin, 761  
*Heiligenschein* (retroreflexión), 914  
Heisenberg, Werner, 1071, 1071  
Helio, 1106  
Henry (H, unidad de inductancia), 825  
Henry, Joseph, 587, 772, 797, 825, 825  
Herramientas eléctricas, corrientes de eddy  
  y, 815  
Hertz, Heinrich Rudolf, 878, 878, 899  
Hidrógeno  
  calor específico molar de, 1097-1098  
  cuantización del espacio para, 1122-1123  
  espectros de, 1107  
  funciones de onda para, 1117, 1117-1120,  
  1118, 1119  
  ley de Coulomb y, 594-595, 595  
  modelo cuántico de átomo de, 1114,  
  1114-1117, 1115, 1116*t*  
  modelo de Bohr del átomo de, 1109,  
  1109-1114, 1110, 1111  
  modelo nuclear de Rutherford, 1108  
  serie Balmer (espectro de emisión) para,  
  1106, 1107, 1107  
  Thomson (J.J.) modelo incorrecto del  
  átomo de, 630  
  transiciones electrónicas en, 1113-1114  
Hipérbola rectangular, ecuación para, A-11  
Hipérbola, ecuación para, A-11  
Hipermetropía (hipermetropía), 949-950  
Hipótesis de Planck sobre la radiación del  
  cuerpo negro, 1049, 1049-1055,  
  1050, 1051, 1052, 1053  
Hofstadter, Robert, 1076  
Holografía, 995, 995-996  
Horno de inducción, 823  
Hubble, Edwin P., 1029, 1248, 1256  
Hueco, en la banda de valencia, 1163, 1227  
Humanson, Milton, 1248  
Huygens, Christiaan, 899, 899-900
- I**  
IKAROS (cometa interplanetaria)  
  Acelerado por la radiación del Sol,  
  JAXA), 885  
Imagen por resonancia magnética (MRI),  
  771, 771, 790, 1215-1217, 1216, 1216,  
  1217  
Imagen real, 926  
Imagen virtual 926  
Imagina  
  campos eléctricos, 588-589  
  campos magnéticos, 742-743  
  campos magnéticos, fuentes de, 771-772  
  circuitos de corriente alterna, 847-848  
  circuitos de corriente continua, 713-714  
  corriente y resistencia, 691-692  
  distribuciones de carga continua, 615-616  
  física atómica, 1105  
  física cuántica, 1048-1049  
  física de partículas y cosmología,  
  1225-1226  
  física nuclear, 1177-1178  
  formación de imágenes, 925-926  
  ley de Inducción de Faraday, 797-798  
  mecánica cuántica, 1079  
  moléculas y sólidos, 1144-1145  
  ondas electromagnéticas, 873-874  
  óptica de luz y rayos, 898-899  
  patrones de difracción, 983  
  potencial eléctrico, 636-637  
  relatividad, 1012-1013  
Impedancia ( $Z$ ), 857  
Incertidumbre absoluta, **A-20**  
Incertidumbre fraccional, A-20  
Incertidumbre, propagación de, A-20-A-21  
Índice de refracción ( $n$ ), 906-908, 907, 907*t*,  
  914, 970  
Inducción para cargar objetos, 591-592, 592  
Inductancia ( $L$ ), 824-846. *Ver también* ley de  
  inducción de Faraday  
  autoinducción y, 825, 825-826  
  circuitos  $RL$ , 827, 827-830, 828, 829, 830  
  circuitos  $RLC$ , 837-839, 838, 838*t*, 839

- energía en campos magnéticos, 830-832, 832
- mutua, 832, 832-833, 833
- oscilaciones en circuitos *LC*, 834, 834-837, 836
- imagina sobre, 824
- Inductancia mutua, 832, 832-833, 833
- Inductores, 827
- en circuitos de corriente alterna, 851, 851-853, 852, 853
- Inestabilidad Plateau-Rayleigh, 612
- Instalación de neutrinos Super Kamiokande, 1234-1235
- Instalación Nacional de Encendido, Lawrence Laboratorio Nacional Livermore (CA), 1210
- Instalación Omega, Universidad de Rochester (NY), laboratorio de fusión láser, 1210
- Institución Smithsonian, 825
- Instituto de Estudios Avanzados (Copenhague, Dinamarca), 1109
- Instituto Politécnico (París, Francia), 870
- Instituto Radiológico de Ucrania, 1206
- Instrumento óptico
- cámara, 947, 947-948
- lupa, 951, 951
- microscopio compuesto 952, 952
- ojos, 948, 948-950, 949, 950
- telescopio, 953, 953-954, 954
- Integración parcial, en cálculo, A-17-A-18
- Integral definida, en cálculo, A-16, A-17, A-19*t*
- Integral indefinida, en cálculo, A-16, A-18*t*-A-19*t*
- Intel, Inc., 1170
- Intensidad (I)
- de la radiación infrarroja del tímpano, 1053, 1053
- de los patrones de difracción de dos rendijas, 988
- de los patrones de difracción de una sola rendija 987, 987-988, 988
- de ondas electromagnéticas, 882-884
- Distribución de, en la interferencia de doble rendija patrón, 968-969, 969
- Intensidad de onda (*I*), 882
- Intensidad radiante, 882
- Intercambio de partículas, 1226. *Véase también* Física de partículas y cosmología
- Intercepción  $\gamma$ , en ecuaciones lineales, A-7
- Interferencia
- constructiva, 964, 964-966, 965, 1067
- destruktiva, 964, 964-966, 965, 986
- distribución de intensidad de doble rendija en películas delgadas, 970, 970-973, 971, 973
- experimento de doble rendija de Young sobre, 963, 963-964, 964
- modelo de análisis de ondas en, 965, 965-968, 966
- patrón de, 968-969, 969
- Interferómetro de Michelson, 973-975, 974, 975
- Interferómetro láser onda gravitacional observatorio (LIGO), 975, 975
- Internet, Wi-Fi para conectarse, 873
- Interruptores de circuito de falla a tierra (GFCI), 734, 800, 800
- Interruptores de circuito de falla a tierra GFCIs, 734, 800, 800
- Intervalo de tiempo adecuado, 1022
- Inversión de la población, en láseres, 1135
- IPCC (Panel Intergubernamental sobre el Cambio Climático), 1155
- Iridesencia, 972
- Irradiancia (potencia por unidad de área), 882
- Isobaras, 1219-1220
- Isotones, 1186
- Isótopos, 1178, 1190
- ITER (Termonuclear internacional) (Reactor Experimental, en Francia), 1210
- ## J
- Jaula de Faraday, 654
- Jensen, Hans, 1186
- Jewett, Frank Baldwin, 753
- Jewett, John W., Jr., 753
- ## K
- Kamerlingh-Onnes, Heike, 702
- Kao, Charles K., 916
- Kilby, Jack, 1170
- Kirchhoff, Gustav, 724, 724
- ## L
- La integral de probabilidad de Gauss, A-19*t*
- Laboratorio, 1245
- Cavendish, Universidad de Cambridge, 753
- de Física de Plasma de Princeton, 1209
- de Investigación de IBM Zurich (Suiza), 703
- Europeo de Física de Partículas. *Véase* CERN
- Nacional Brookhaven, 1239, 1241, 1242
- Nacional de Aceleradores de Fermi (Fermilab), 1045, 1233, 1241, 1245
- Nacional Lawrence Livermore (CA), 1210
- Laboratorios Bell, 1247
- Land, E.H., 999
- Láser, 1134-1136, 1135
- de rubí pulsado, 1143
- Excimer, 1136
- Láseres de dióxido de carbono, 1136-1137
- Láseres de gas helio-neón, 1135-1136, 1136
- Laue, Max von, 996
- Lawrence, E. O., 754
- Lazos supernumerarios 898
- LED (diodos emisores de luz) y diodos de absorción de luz, 1166-1168, 1167
- Lente Fresnel, 943, 943
- Lentes
- aberraciones de, 947, 947
- aumento por, 941-943, 941*t*, 942, 943
- combinaciones de, 945, 945-946
- delgadas, 939-946
- convergentes, 943, 943-944
- divergentes, 944, 944-945
- derivación de, 950*n*
- descripción general, 939-941, 940, 941
- Lenz, Heinrich, 805*n*
- Ley de Ampère
- campo magnético del solenoide ideal desde, 783
- descripción general, 779, 779-782, 779*n*, 780, 781
- forma general, 874, 874-875, 875
- Ley Ampère-Maxwell, 875
- Ley de Bragg, 997
- Ley de Brewster, 1000
- Ley de conservación de la extrañeza, 1237
- Ley de conservación del lepton electrónico número, 1235
- Ley de conservación del lepton muon número, 1236
- Ley de conservación del número de bariones, 1233
- Ley de conservación del número de leptón tau, 1236
- Ley de Coulomb, 593-598
- cero, como valor de fuerza neta, 596, 596-597
- descripción general, 592, 592-594, 594*t*
- ejemplo de átomo de hidrógeno, 594-595, 595
- ejemplo de carga en esferas, 597, 597-598
- ejemplo de fuerza resultante, 595, 595-596
- en la determinación de la capacitancia, 664*n*
- fuerza conservadora entre cargas en, 637
- Ley de decaimientos radiactivos sucesivos, 1220
- Ley de desplazamiento de Wien, 1050, 1050
- Ley de distribución de Boltzmann, 1052
- Ley de Gauss. *Véase también* flujo eléctrico ( $\Phi_E$ )
- aplicación de 625-629, 626, 627, 628, 629
- descripción general, 623, 623-625, 624
- ecuaciones de Maxwell y, 876
- energías de rayos X y longitudes de onda de, 1132
- sobre conductores en equilibrio electrostático, 652
- Ley de Hooke, 619
- Ley de Hubble, 1248
- Ley de Inducción de Faraday, 797-823. *Véase también* Inductancia
- corrientes de eddy, 814, 814-815
- descripción general, 798, 798-801, 799, 799, 800
- forma general de 808, 808-810, 809
- fuerza electromotriz, 801, 801-805, 802, 803, 805
- generadores y motores 810-814, 811, 811, 812
- ley Ampère-Maxwell y, 876
- ley de Lenz, 805-808, 806, 807, 808, 813
- ondas electromagnéticas planas predichas por, 878-879
- imagina sobre, 797-798
- Ley de la reflexión, 902
- Ley de Lenz, 805-808, 806, 807, 808
- Ley de Magnetismo de Gauss, 784, 784-786, 785
- Ley de Malus, 999
- Ley de Ohm, 695
- Ley de refracción, 908

- Ley de refracción de Snell, 907-908, 912, 924
- Ley de Stefan, 1049-1050, 1053, 1256
- Ley de Stokes, 657
- Ley Dulong-Petit, 1172
- Ley Rayleigh-Jeans, 1050-1051, 1053, 1053Z
- Leyes de conservación para la física de partículas, 1233-1236, 1234
- Leyes del movimiento. *Véase* movimiento
- LHC (Gran Colisionador de Hadrones), CERN, 1200, 1242, 1245
- Libro Guinness de los Récords, 1105
- LIGO (observatorio interferómetro láser onda gravitacional), 975
- Límite aire-agua, ángulo crítico (de incidencia) para 915-916, 916
- Límite de serie, de la serie Balmer, 1107
- Línea de carga, finita, 650, 650-651
- Línea de mundo (caminata por el espacio), 1026-1027
- Livingston, M. S., 754
- Lloyd, Humphrey, 969*n*
- Lociones de protección solar, para reducir el daño por la luz ultravioleta, 889
- Logaritmos, A-9-A-10
- Longitud
- adecuada, 1025
  - contracción de, 1025-1026, 1026
  - de onda ( $\lambda$ )
    - ángulo de Brewster como función de, 1000
    - componentes de señal identificados por, 975*n*
  - Compton, 1062
  - corrimiento a azul y corrimiento al rojo en, 1029
  - corte, en efecto fotoeléctrico, 1059
  - de De Broglie, 1064, 1084
  - de electrones Compton, 1062
  - de luz visible versus color, 888t
  - efecto de ley de desplazamiento de Wien es, 1050, 1050
  - medición 967
  - separando franjas de doble ranura de dos, 967-968
  - de Planck, 1252-1253
  - factores de conversión para, A-1
- Lorentz, H., 1018*n*
- Luna
- distancia a, medición de, 904, 904, 1137
- Lupa simple, 951, 951
- Luz visible, 888, 888t
- Luz, velocidad de, 1015, 1015-1016
- M**
- Magnetón Nuclear, 1216
- Malus, E.L., 999*n*
- Máquinas artificiales de riñón, 768
- Máquinas de corazón y pulmón, 768
- Mar de Dirac (electrones en estados de energía negativa), 1227
- Marco de referencia inercial, 1013-1014, 1014
- Marsden, Ernest, 1107
- Masa ( $m$ )
- cambios de desintegración radiactiva en, 1194
  - como forma de energía, 1036
  - de electrones, protones y neutrones, 594t
  - del núcleo de los átomos, 1179
  - factores de conversión para, A-1
  - gravitacional, 1039
  - inercial, 1039
  - invariable, 1037
  - reducida de moléculas, 1149
  - de partículas seleccionadas, 1179t
- Materia oscura, 1250-1251
- Materia, campos magnéticos en, 786, 786-789, 787, 788, 789
- Material Polaroid, 999
- Máximo central, en patrones de difracción, 984
- Máximos secundarios, en difracción patrones, 984
- Maxwell, James Clerk, 587, 772, 874, 874, 899, 1015, 1108
- Mecánica cuántica, 1079-1104
- aplicaciones de la tunelización, 1094, 1094-1096
  - ecuación de Schrödinger, 1089-1091, 1090, 1090
  - función de onda, 1079-1083, 1080, 1082
  - oscilador armónico simple, 1096-1098, 1097
  - partícula cuántica bajo condiciones de frontera, modelo de análisis de, 1084, 1084-1089, 1085, 1089
  - partícula en un pozo de altura finita, 1091, 1091-1093, 1092
  - imagina sobre, 1079
  - tunelización a través de una barrera de energía potencial 1093-1093-1094
- Mecánica estructural, 593
- Mecánica matricial (Heisenberg), 1071
- Mecanismos de transferencia de energía
- radiación electromagnética ( $T_{ER}$ ), 878-884
  - transmisión eléctrica ( $T_{ET}$ ), 703-706
- Medidores de receptáculos, 847, 847
- Meitner, Lise, 1202
- Mendeleev, Dmitri, 1128
- Mesón Pi ( $\pi$ , pion), 1230
- Metal Niobio, 792
- Metales
- conducción eléctrica en, 1162, 1162
  - electrones libres en, 591*n*
  - enlaces en, 1157-1158, 1158
  - funciones de trabajo de, 1057-1058, 1058t
  - teoría de electrones libres, 1158, 1158-1160, 1159, 1160t
- Michelson, A. A., 973, 1016
- Microondas, 888
- Microscopio
- compuesto 952, 952
  - electrónico, 1066, 1066
  - de barrido (SEM), 1066
  - de transmisión (TEM), 1066
  - compuesto, 952, 952
- Microscopios de exploración de túneles (STM), 1095, 1095-1096
- Microscopios, túnel de barrido, 1095
- Millikan, Robert A., 591, 656-657, 1074, 1077
- Mínima, en patrones de difracción, 984
- Minkowski, H., 1018*n*
- Miopía (miopía), 950
- Modelo
- colectivo de núcleo, 1187
  - cuántico del átomo de hidrógeno, 1114, 1114-1118, 1115, 1116a
  - de Bohr del átomo de hidrógeno
    - descripción de, 1109, 1109-1112, 1110, 1111
    - modelo cuántico del átomo de hidrógeno *versus* 1117-1118
    - principio de correspondencia en, 1112-1113
    - transiciones electrónicas en, 1113-1114
  - de capas (Goeppert-Mayer y Jensen) en física nuclear, 1185-1187, 1186
  - de Drude de conducción eléctrica, 699-701
  - de gota líquida (Bohr), en física nuclear, 1184-1185, 1185
  - de onda de luz (Huygens), 899
  - de partícula independiente del núcleo, 1186
  - de partículas de luz (Newton), 899
  - de quark original, 1241
  - estándar (teoría electrodébil y QCD), 1244-1245, 1245
- Modelos de análisis
- onda bajo reflexión, 902, 902-905, 903, 904, 905
  - onda bajo refracción
    - ángulo de refracción para vidrio, 908-909
    - descripción general, 905, 905-907, 906, 908, 908
    - índice de refracción, 906-908, 907, 907t
    - luz a través de losa, 909-910, 910
    - luz a través del prisma, 910, 910
    - ondas en interferencia, 965, 965-968, 966, 966
    - partícula bajo fuerza neta, 749
    - partícula cuántica bajo condiciones de frontera, 1084, 1084-1089, 1085, 1089
    - partícula en un campo (eléctrico), 598, 598-603, 599, 601, 602, 603
    - partícula en un campo (magnético), 743, 743-748, 744, 746, 747, 748
- Modelos. *Véase también* modelos de análisis
- conducción eléctrica, 699-701
- Moderadores, colisiones elásticas de, 1201
- Molécula de monóxido de carbono (CO), 1150-1153
- Moléculas de ADN (ácido desoxirribonucleico), enlaces de hidrógeno en 1148, 1148
- Moléculas diatómicas, 1146
- Moléculas no polares, 680
- Moléculas polares, 680, 681
- Moléculas y sólidos, 1144-1176
- conducción eléctrica y
    - en aisladores, 1162-1163
    - en metales, 1162, 1162
    - en semiconductores, 1163, 1163-1165, 1163t, 1164, 1165
  - dispositivos semiconductores
    - circuitos integrados, 1170, 1170-1171
    - diodo de unión, 1165, 1165-1166, 1166
    - emisor de luz y diodos absorbentes de luz, 1166-1168, 1167



- transistores, 1168-1170  
 unión, 1168  
 MOSFET (transistor semiconductor de efecto de campo), 1168, 1168-1169  
 túneles resonantes, 1169-1170, 1170
- electrones libres teoría de metales, 1158, 1158-1160, 1159, 1160*t*
- enlaces moleculares  
 covalente, 1146-1147, 1147  
 descripción general, 1145, 1145  
 hidrógeno, 1147-1148, 1148  
 iónico, 1145-1146, 1146  
 van der Waals, 1147
- estados de energía y espectros de  
 espectros moleculares, 1153, 1153-1156, 1154, 1155  
 movimiento de rotación de las moléculas, 1148-1151, 1149  
 movimiento vibratorio de las moléculas 1151, 1151-1153, 1152  
 resumen, 1148
- sólidos, unión en  
 imagina sobre, 1144-1145  
 sólidos covalentes, 1157, 1157  
 sólidos iónicos, 1156, 1156  
 sólidos metálicos, 1157-1158, 1158
- teoría de bandas de sólidos, 1160-1162, 1161, 1161
- Molinos de viento, 797, 797
- Momento angular ( $\vec{L}$ )  
 espín **1125**, 1125*n*  
 estado de fondo del átomo 1112  
 orbital cuantizado, 786, 786
- Momento angular orbital cuantizado, 786, 786
- Momento dipolar eléctrico, 678
- Momento dipolar magnético, 759
- Momento lineal ( $\vec{p}$ )  
 relativista, 1034-1035
- Momentos magnéticos de átomos, 786, 786-787, 787
- Momentum ( $\vec{p}$ ), 884-886, 1061. *Véase también* Cantidad de movimiento angular; cantidad de movimiento lineal
- Morley, Edward W., 1016
- Moseley, Henry G. J., 1133, 1133
- MOSFET (transistor semiconductor de efecto de campo), 1168, 1168-1169
- Motores y generadores, 810-814, 811, 811, 812
- Movimiento armónico simple *Véase* movimiento oscilante
- Movimiento críticamente amortiguado, 839
- Movimiento de onda *Véase también* ondas electromagnéticas; Movimiento oscilatorio gravitacional, 1042
- propiedades de partículas de 1064, 1064-1066, 1066
- Movimiento de rotación, estados de energía de moléculas en, 1148-1151, 1149
- Movimiento oscilatorio *Véase también* movimiento ondulatorio
- amortiguado, 838, 838*t*  
 cuantizado, 1054-1055  
 en circuitos *LC*, 834, 834-837, 836
- oscilador armónico simple, 1096-1098, 1097
- Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme, 605-607, 606, 607
- de partículas cargadas en un campo magnético uniforme  
 aplicaciones de, 752, 752-755, 753, 754  
 descripción general, 748-752, 749, 750, 751, 752  
 sobreamortiguado, 839  
 vibratorio, 1151, 1151-1153, 1152
- MRI (resonancia magnética), 771, 789, 1215-1217
- Müller, K. Alex, 703
- N**
- Napoleón, envenenamiento por arsénico de, 1214
- NASA (Aeronáutica Nacional y Espacio) Administración), 890, 895, 1141, 1248
- Naturaleza, fuerzas fundamentales en, 1226-1227, 1227*t*
- Navegación solar, para propulsión de naves espaciales, 885
- Ne'emman, Yuval, 1239
- Neutrones  
 carga y masa de, 594*t*  
 como partículas de bariones, 1233  
 niveles de dióxido de carbono en 1155, 1155  
 térmico, 1202  
 térmicos, moderador y, 1202
- NMR (resonancia magnética nuclear), 1215-1217, 1216, 1216, 1217
- Notación científica, A-4-A-5
- Novoselov, Konstantin, 1157
- Noyce, Robert, 1170
- NSTX (Experimento toro esférico nacional), 1209
- Nube de electrones, 1118
- Núcleo hija, en la desintegración radiactiva, 1191
- Núcleo principal, en la desintegración radiactiva, 1191
- Núcleos, propiedades de 1108, 1178-1182, 1179*t*, 1180, 1182
- Núclidos, 1178
- Número atómico (*Z*), **1112**, **1178**, 1182  
 bariónico **1233**-1234  
 base de logaritmos, **A-9**  
 cuántico  
 magnético de espín (*m<sub>s</sub>*), 1123, 1123-1126, 1124, 1125, 1126*t*  
 magnético orbital (*m<sub>l</sub>*), 1115, 1116, 1120-1123, 1121, 1122  
 orbital (*l*), 1115, 1116*t*, 1120  
 principal (*n*), 1115, 1116*t*  
 vibracional, 1151
- de Euler (*e*, base de logaritmo natural), 712
- de Lepton, 1235-1236
- de masa (*A*), 1178
- de neutrones (*N*), 1178, 1182
- de orden, en interferencia constructiva, 965-966
- Números complejos, 1081*n*
- Números cuánticos  
 cima, para quarks, 1241  
 descripción de, 1051*n*  
 encanto, para quarks, 1240*t*, 1241  
 espín magnético (*m<sub>s</sub>*), 1123, 1123-1126, 1124, 1125, 1126*t*  
 extrañeza (*S*), 1237  
 fondo, para quarks, 1241  
 lepton número 1235-1236  
 número bariónico, 1233-1234  
 orbital (*l*), 1115, 1116, 1120  
 orbital magnético (*m<sub>l</sub>*), 1115, 1116, 1120-1123, 1121, 1122  
 principal (*n*), 1115, 1116*t*  
 vibratorio, 1151
- O**
- Observatorio del Monte Wilson (CA), 1248  
 Keck (Mauna Kea, HI), 954, 954, 991-992, 1005  
 Mauna Loa (HI), 1155  
 Yerkes (Williams Bay, WI), 954
- Ocho vías (patrones en partículas de bariones), 1239
- Oersted, Hans Christian, 587, 743, 743, 772
- Ohm ( $\Omega$ , unidad de resistencia eléctrica), 695
- Ohm, Georg Simon, 695, 695
- Ojos 948, 948-950, 949, 950, 990, 990-991
- Omega menos ( $\Omega^-$ ) sss barión, 1242
- Onda bajo reflexión, modelo de análisis de, 902, 902-905, 903, 904, 905
- Onda bajo refracción, modelo de análisis de, 905-910  
 ángulo de refracción para vidrio, 908-909  
 descripción general, 905, 905-906, 906, 907, 908, 908  
 índice de refracción, 906-908, 907, 907*t*  
 luz a través de un prisma, 910, 910  
 luz a través de una losa, 909-910, 910
- Ondas de frecuencia extremadamente baja (ELF), 893
- Ondas de radio, 887
- Ondas electromagnéticas, 873-896. *Véase también* ley de inducción de Faraday; Campos magnéticos  
 cambio de fase de la reflexión, 970  
 corriente de desplazamiento y forma general de la Ley de Ampère, 874, 874-875, 875  
 dispositivos electrónicos y 797-798  
 ecuaciones de Maxwell y descubrimientos de Hertz, 876-878, 877, 878  
 en física cuántica, 1063-1064  
 energía transportada por, 882-884, 883  
 espectro de 887-889, 888, 888, 889, 889  
 imagina sobre, 873-874  
 momento y presión de radiación, 884-886  
 plana, 878, 878-882, 879, 881  
 planas, 878, 878-882, 879, 881



- producción de antenas de, 886-887, 887
- Ondas ELF (extremadamente baja frecuencia), 893
- Ondas gravitacionales, 1042
- Ondas infrarrojas (IR), 888
- Ondas polarizadas linealmente, 881
- Ondas ultravioleta, 888-889
- Óptica. *Véase también* óptica de luz y rayos; Óptica ondulatoria
- Óptica (Ptolomeo), 918
- Óptica adaptiva, 992
- Óptica de luz y rayos, 897-924. *Véase también* Física cuántica
- aproximación de rayos en, 901, 901
- color correspondiente a las longitudes de onda de, 888*t*
- como radiación electromagnética, 877
- dispersión, 912-914, 913, 914
- historia en, 898-899
- naturaleza de la luz, 899-901
- onda bajo reflexión, modelo de análisis de, 902, 902-905, 903, 904, 905
- onda bajo refracción, modelo de análisis de, 905-910
- ángulo de refracción para vidrio, 908-909
- descripción general, 905, 905-906, 906, 907, 908, 908
- índice de refracción, 906-908, 907, 907*t*
- luz a través de un prisma, 910, 910
- luz a través de una losa, 909-910, 910
- polarización de ondas de luz, 998, 998-1003, 999, 1000, 1001, 1002, 1002*t*
- Principio de Huygens, 911, 911-912, 912
- reflexión interna total, 914, 914-917, 915, 916, 917
- velocidad de, 1015, 1015-1016, 1018
- Óptica geométrica. *Véase* óptica de luz y rayos
- Óptica ondulatoria, 962-982. *Véase también* patrones de difracción
- distribución de intensidad de doble rendija patrón de interferencia, 968-969, 969
- en interferencia, modelo de análisis de, 965, 965-968, 966, 966
- experimento de doble rendija de Young, 963, 963-964, 964
- interferencia en películas delgadas, 970, 970-973, 971, 973
- interferómetro de Michelson, 973-975, 974, 975
- reflexión que causa el cambio de fase, 969, 969-970, 970
- imagina sobre, 962
- Orbital, 1127
- Orbitales atómicos, **1127**, 1127*t*
- Organización Meteorológica Mundial, 1155
- Organización Mundial de la Salud, 1215
- Oro, energía de Fermi de, 1160
- Oscilaciones amortiguadas, 838, 838*t*
- Oscilador armónico simple, 1096-1098, 1097
- Ótzi el hombre de hielo (permanece en los Alpes italianos, encontrado en 1991), datación radiactiva de, 1198
- P**
- Panel Intergubernamental sobre el Cambio Climático (IPCC), 1155
- Paquetes de ondas, 1067, 1067-1068
- Par de aniquilación, 1228
- Par de producción, como fuente de positrones, 1228
- Parábola, A-11
- Paradoja de la pértiga en el granero, 1028, 1028-1029
- Paradoja de los gemelos, en la teoría especial de la relatividad, 1024, 1024-1025
- Paramagnetismo, 788
- Pares de huecos de electrones, en semiconductores intrínsecos, 1163
- Parque Solar Gujarat (India), 1167
- Partícula (s). *Véase también* modelos de condiciones de frontera, 1088-1089
- bajo el modelo de fuerza neta, 749
- cargada en un campo magnético uniforme
- aplicaciones de, 752, 752-755, 753, 754
- descripción general, 748-752, 749, 750, 751, 752
- cuántica, bajo condiciones de frontera, modelo de análisis de, 1084, 1084-1089, 1085, 1089
- en movimiento armónico amortiguado 838, 838*t*
- en un campo eléctrico, 598, 598-603, 599, 601, 602, 603
- en un modelo de campo (magnético), 743, 743-748, 744, 746, 747, 748
- en un modelo de campo, 637
- en un modelo de movimiento armónico simple 619
- en un modelo de movimiento circular uniforme 1110
- en un pozo de altura finita, 1091, 1091-1093, 1092
- energía de carga, 878
- frecuencia de, 1064
- función de onda para 1082-1083
- gluino súper compañero, 1253
- $J/\Psi$ , 1241
- Kaon (K), 1236-1237, 1239
- Lambda ( $\Lambda$ ), 1236-1237
- modelo de partículas cuánticas, 1067, 1067-1069, 1068
- movimiento de, en campos eléctricos uniformes, 605-607, 606, 607
- omega menos ( $\Omega^-$ ), 1239, 1239
- propiedades de onda de 1064, 1064-1066, 1066
- sigma ( $\Sigma$ ), 1236-1237
- súper compañero electrón, 1253
- súper compañero squark, 1253
- Partículas
- bariónicas, **1233**, 1238, 1238-1239, 1239, 1242, 1242*t*
- de campo, 1226. *Véase también* Física de partículas y cosmología
- de Fermion, 1242
- de Lepton, 1231, 1232*t*, 1233, 1242*t*
- de Muon ( $\mu$ ), 1022, 1230, 1233
- de neutrinos ( $\nu$ ), 1042, 1196, 1230, 1233
- extrañas y extrañeza, 1236-1238, 1237
- hadrón, 1231-1233, 1232, 1232
- mesón, 1229-1231, 1230, 1230, 1231, 1232, 1232*t*, 1242*t*
- Pion ( $\pi$ ), 1230-1231
- positrones, 1187, 1227, 1227-1229, 1228, 1229
- Patrón de difracción Fraunhofer, 985, 985
- Patrón de difracción Fresnel, 985*n*
- Patrón de interferencia de doble rendija, distribución de intensidad, 968-969, 969
- Patrón Laue, 996, 996-997, 997
- Patrones de difracción, 983-1010. *Véase también* óptica ondulatoria
- a partir de ranuras angostas, 985, 985-988, 987, 988
- abertura única y apertura circular
- descripción general, 984, 984
- en la naturaleza ondulatoria de las partículas, 1065
- rejilla de difracción y, 992-996, 993, 994, 995, 1065
- resolución, 988-992, 989, 990, 992
- imagina sobre, 983
- Patrones de difracción de dos rendijas, intensidad de 988
- Patrones de difracción de una sola rendija, intensidad de, 987, 987-988, 988
- Pauli, Wolfgang, 1123, 1126, 1126, 1196, 1227
- Películas delgadas, interferencia en 970, 970-973, 971, 973
- Péndulo, 1023-1024
- Penetración de barrera, **1093**
- Penzias, Arno A., 1247, 1247-1248
- Periscopio, 956
- Perlmutter, Saul, 1251
- Permeabilidad del espacio libre, constante de ( $\mu_0$ ), 772
- Permitividad del espacio libre ( $\epsilon_0$ ), 593
- Pfund, A. H., 923
- Phillips, William, 1143
- Phipps, T. E., 1124-1126
- Planck, Max, 1011, 1051, 1052
- Plano de carga, 628-629, 629
- Plantas de energía, fuentes de energía para, 812-813
- Plasma quark-gluón, 1242
- Plasma, 1142
- Pletismógrafo, 710
- Plutón (planeta enano), 992, 992
- Poisson, Simeon, 984
- Polarización de ondas de luz, 998-1003
- descripción general, 998
- por absorción selectiva, 998-999, 999
- por dispersión, 1002, 1002-1003
- por doble refracción, 1001, 1001-1002, 1002*t*
- por reflexión, 999-1001, 1000, 1001
- Polarización inducida, 680
- Polarización lineal, 998
- Polinomios de Laguerre, 1160*n*
- Polos magnéticos, 744-745
- Porcentaje de incertidumbre, **A-20**
- Postes geomagnéticos, 744-745
- Potencia ( $P$ )
- de la radiación emitida, 1049
- de lentes en dioptrías, 950

- en circuitos de corriente alterna, 859-861
- intensidad de la onda electromagnética y 882
- Potencia media ( $P_{prom}$ ), 860-862
- Potencial de frenado, 1056
- Potencial eléctrico (UE), 636-662
- caída de voltaje a medida que disminuye, 717<sub>n</sub>
- cargas puntuales como fuente de, 642, 642-645, 643
- conductores en equilibrio electrostático, 651, 651-655, 652, 653, 654
- de cables activos, 732<sub>n</sub>
- descripción general, 637-639, 638
- diferencia de potencial y
- distribuciones de carga continua como fuente de, 646, 646-651, 648, 649, 650
- en el campo eléctrico uniforme, 639-642, 640, 641
- imagina sobre, 636-637
- valor de campo eléctrico de, 645-646, 646
- Potencias, manejo algebraico de, A-6-A-7
- Pozo cuadrado, partícula en caja, 1090
- Pozo, partícula en una caja en un, 1090
- Premio Nobel de Física
- Anderson, Carl (detección de positrones), 1228
- Bardeen, John (teoría de superconductividad), 703
- Bardeen, John (transistor), 1168
- Bethe, Hans (ciclo del carbono en estrellas), 1222
- Bohr, Niels (estructura atómica), 1109
- Boyle, Willard S. (dispositivo de carga acoplada [CCD]), 1060
- Brattain, Walter (transistor), 1168
- Chu, Steven (luz láser para enfriar y atrapar átomos), 1143
- Cohen-Tannoudji, Claude (luz láser para enfriar y atrapar átomos), 1143
- Compton, Arthur Holly (efecto Compton), 1061
- Cooper, L. N. (teoría de superconductividad), 703
- de Broglie, Louis (naturaleza ondulatoria de los electrones), 1064
- Dirac, Paul (física cuántica), 1227
- Einstein, Albert (radiación electromagnética), 1057
- Fermi, Enrico (descubrimiento de la reacción nuclear), 1205
- Feynman, Richard P. (electrodinámica cuántica), 1230
- Gabor, Dennis (holografía), 995
- Geim, Andre (estudios del grafeno), 1157
- Gell-Mann, Murray (partículas subatómicas), 1238
- Glashow, Sheldon (teoría electrodébil), 1244
- Goepfert-Mayer, María (modelo de capas del núcleo), 1186-1187
- Heisenberg, Werner (modelos del núcleo), 1071
- Hofstadter, Robert (dispersión de electrones), 1076
- Investigadores principales de COBE, 1248
- Jensen, Hans (modelo de capas del núcleo), 1186
- Kao, Charles K. (fibra óptica), 916
- Kilby, Jack (circuito integrado), 1170
- Novoselov, Konstantin (estudios del grafeno), 1157
- Penzias, Arno A. (Teoría del Big Bang, evidencia), 1248
- Perlmutter, Saul (aceleración de la expansión del Universo), 1251
- Phillips, William (luz láser para enfriar y capturar átomos), 1143
- Planck, Max (naturaleza cuantizada de la energía), 1052
- Reines, Frederick (detección de neutrinos), 1196
- Richter, Burton (detección de partículas  $J/\Psi$ ), 1241
- Riess, Adam (acelerando la expansión de Universo), 1251
- Rubbia, Carlo (descubrimiento del bosón  $W$  y  $Z$ ), 1227
- Salam, Abdus (teoría electrodébil), 1244
- Schmidt, Brian P. (acelerando la expansión del Universo), 1251
- Schrieffer, J. R. (teoría de la superconductividad), 703
- Schwinger, Julian (electrodinámica cuántica), 1230
- Shockley, William (transistor), 1168
- Smith, George E. (dispositivo de carga acoplada [CCD]), 1060
- Thomson, J.J. (descubrimiento de los electrones), 1107
- Ting, Samuel (detección de partículas  $J/\Psi$ ), 1241
- Tinibagam Sin Itiro (electrodinámica cuántica), 1230
- Van der Meer, Simon (descubrimiento del bosón  $W$  y  $Z$ ), 1227
- Weinberg, Steven (teoría electrodébil), 1244
- Wilson, Robert A. (Teoría del *Big Bang* evidencia), 1248
- Yukawa, Hideki (predicción del mesón), 1229
- Premio Nobel de Química Becquerel, Antoine-Henri (radiactividad), 1187
- Presbicia, 950<sub>n</sub>
- Presión ( $P$ ), factores de conversión para A-2
- Presión de radiación de ondas electromagnéticas, 884-886
- Principio
- de complementariedad, 1064
- de correspondencia de Bohr, 1112-1113
- de exclusión, 1126-1130, 1127<sub>th</sub>, 1128
- para electrones en Dirac Sea, 1227
- para fermiones, 1242-1243
- tabla periódica y 1128, 1128-1130, 1129, 1130
- de Fermat, 924
- de Huygens, 911, 911-912, 912, 985
- de incertidumbre de Heisenberg, 1071
- de incertidumbre, 1071, 1071-1073
- Principio de la Relatividad* (Lorentz, Einstein, Minkowski y Weyl), 1018<sub>n</sub>
- Prisma, luz a través de un, 910, 910. Véase también Luz y óptica geométrica
- Problema de partículas en una caja, 1084, 1084-1087, 1085, 1086, 1090-1091
- Procesos nucleares, energía de (MeV), 638
- Programa Ambiental de las Naciones Unidas, 1155
- Propagación de incertidumbre, A-20-A-21
- Propiedad del espín de los electrones, 786-787, 787
- Protones
- carga y peso de 594<sub>t</sub>
- como partículas de bariones, 1233
- detectando la descomposición de 1234, 1234-1235
- energía de 1038-1039
- moviéndose perpendicularmente a un campo magnético uniforme, 750
- en un campo eléctrico uniforme, 641, 641-642
- Proyecto Manhattan (armas nucleares), 1230
- Proyecto Solar Agua Caliente (AZ), 1167
- Ptolomeo, Claudio, 918
- Puntero láser, presión de radiación de, 886
- Punto
- cercano, en enfoque ocular, 949
- cuántico, 1093, 1169-1170, 1170
- de enfoque, punto focal *versus*, 931
- focal, 930, 930-931, 941
- lejano, en enfoque ocular, 949
- Q**
- QCD (cromodinámica cuántica), 1243
- QUaD, 1248
- Quarks multicolores, 1242-1244
- Quarks, 593<sub>n</sub>, 1240-1244, 1240<sub>t</sub>, 1242<sub>t</sub>, 1243, 1244
- Quasars, 1248-1249, 1256
- Qubic, 1248
- R**
- Rad (dosis absorbida por radiación), 1212
- Radiación
- Cerenkov, 1047
- de cuerpo negro, 1049, 1049-1055, 1050, 1051, 1052, 1053
- de fondo, 1212
- de frenado (bremsstrahlung), 1131
- electromagnética ( $T_{ER}$ ). Véase también Mecánica cuántica; Física cuántica
- infrarroja, intensidad de, 1053, 1053
- térmica, 1053-1054
- Radiación. Véase también radiación de cuerpo negro
- daño biológico de, 1211-1213, 1212<sub>t</sub>
- de la bola de fuego primordial, 1247, 1247-1248, 1248
- usos para, 1213, 1213-1215, 1215
- Radiactividad
- artificial, 1200
- descubrimiento de 1187-1190, 1188
- natural 1200
- proceso de desintegración
- alfa, 1191, 1191-1195, 1192<sub>t</sub>-1193<sub>t</sub>, 1195
- beta, 1195-1198, 1196, 1197
- datación por carbono por, 1198-1199
- descripción general, 1190-1191

- gamma, 1199, 1199-1200, 1200*t*  
 Radian (rad, unidad de posición angular), A-10  
 Radio de Bohr ( $a_0$ ), 1110, 1117  
 Radioactividad artificial, **1200**  
 Radioactividad natural, 1200  
 Radioterapia, 1214, 1215  
 Ranuras estrechas, patrones de difracción de, 985, 985-988, 987, 988  
 Rapidez de decaimiento, 1188  
 Rastreo, radioactividad en 1213, 1213-1214  
 Rayo de luz doblemente reflejado, 903, 903  
 Rayos cósmicos, 752  
 Rayos gamma, 889  
 Rayos paraxiales de espejos, 929, 929  
 Rayos X, 889, 996, 996-997, 997, 1063  
 Rayos X característicos, 1131-1132  
 RBE (efectividad biológica relativa), 1212, 1212*t*  
 Reacción en cadena nuclear autosostenida, 1205  
 Reacciones  
   de captura de neutrones, 1202  
   de fisión natural, 1205*n*  
   de fusión termonuclear, 1207  
   de fusión terrestre, 1207-1209  
   nucleares, 1200-1202  
     endotérmicas, 1201  
     exotérmicas, 1201  
 Reactor (ITER, en Francia), 1210  
 Reactores, nucleares, 1204, 1204-1207, 1205, 1206  
 Reflejo difuso, 902  
 Reflexión  
   cambio de fase desde, 969, 969-970, 970  
   especular, 902  
   interna total, 914, 914-917, 915, 916, 917  
   onda bajo, modelo de análisis de, 902, 902-905, 903, 904, 905  
   polarización por, 999, 999-1001, 1000, 1001  
   principio de Huygens aplicado a, 911, 911-912, 912  
 Refracción  
   ángulo de refracción para vidrio, 908-909  
   descripción general, 905, 905-908, 906, 907, 908, 908  
   formación de imágenes por, 935, 935-939, 936, 937, 937, 938  
   índice de refracción, 906-908, 907, 907  
   índice de refracción, 970  
   luz a través de un prisma, 910, 910  
   luz a través de una losa, 909-910, 910  
   onda bajo, modelo de análisis de, 905-910  
   principio de Huygens aplicado a, 911, 911-912, 912  
 Región de agotamiento, en diodos de unión, 1165-1166  
 Regla de Hund, 1128, 1128  
 Regla de la cadena de cálculo diferencial, A-14  
 Regla de la espira (reglas de Kirchhoff), 723, 844  
 Regla de unión (reglas de Kirchhoff), 723  
 Reglas de Kirchhoff, 723, 723-726, 724, 725, 844  
 Reglas de selección para transiciones permitidas, 1131, 1150  
 Rejilla de interferencia, 992  
 Rejilla de reflexión, 992  
 Rejilla de transmisión, 992  
 Relámpago, 615, 615, 636, 636, 713  
 Relatividad  
   cantidad de movimiento lineal relativo, 1034-1035  
   consecuencias de la teoría especial de contracción de longitud, 1025-1026, 1026  
   dilatación del tiempo, 1020, 1020-1024, 1021, 1021, 1021, 1023  
   ecuaciones de transformación de Lorentz, 1030, 1030-1031  
   efecto Doppler relativo, 1029  
   energía relativista, 1035-1039, 1036  
   experimento Michelson-Morley, 1016, 1016-1018  
   galileana, 1013, 1013-1016, 1014, 1015  
   gráficos de espacio-tiempo, 1026, 1026-1029, 1028  
   imagina sobre, 1012-1013  
   paradoja de la pértiga en el granero, 1028, 1028-1029  
   paradoja de los gemelos, 1024, 1024-1025  
   principio de Einstein de 1018, 1018-1019  
   simultaneidad y relatividad del tiempo, 1019, 1019-1020  
   teoría general de 1039-1041, 1040, 1040, 1041  
   transformación de velocidad de Lorentz, ecuaciones, 1031-1034, 1033  
 Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) Brookhaven National Laboratory, 1242  
 Rem (equivalente de radio en el hombre), 1212  
 Repaso de matemáticas  
   álgebra, A-5-A-10  
   cálculo diferencial, A-13-A-16  
   cálculo integral, A-16-A-19  
   geometría, A-10-A-11  
   notación científica, A-4-A-5  
   propagación de la incertidumbre, A-20-A-21  
   serie de expansión, A-13  
   trigonometría, A-11-A-13  
 Resistencia ( $R$ ), 864. *Véase también* corriente y resistencia  
 Resistencia  
   bobinada, 696  
   de carga, 714, 716, 716, 864  
   de composición, 695  
   ejemplo de luces de paisaje, 720, 720  
   en circuitos de corriente alterna, 848, 848-851, 849, 850  
   en paralelo, 718, 718-720, 720  
   en serie, 716-718, 717, 718  
   equivalente, 717, 719, 721, 721, 864  
   interna ( $r$ ), 714  
   resistencia equivalente, cálculo, 721, 721  
   tres, en paralelo, 722, 722  
 Resistividad ( $r$ ), 696, 697, 700-701  
 Resolución de abertura única y abertura circular, 988-992, 989, 990, 992  
 Resonancia ( $\omega_0$ ), 861-862  
   de espín electrónico, 1216  
   detección de ondas electromagnéticas de Hertz por, 877  
   en circuitos de la serie  $RLC$ , 861-863, 862  
   en emisión estimulada, 1134*n*  
   magnética nuclear (RMN), 1215-1217, 1216, 1216, 1217  
 Resortes *Véase* movimiento oscilatorio  
 Retinopatía, tratamiento con láser para, 1137  
 Retroreflexión, 904, 914  
 RHIC (Columna de iones pesados relativista) Brookhaven National Laboratory, 1242  
 Rhine, Frederick, 1196  
 Richter, Burton, 1241  
 Riess, Adam, 1251  
 Rigel (estrella), 1050  
 Rigidez dieléctrica, 677, 677*t*  
 Roemer, Ole, 899-900, 918  
 Roentgen (R) unidad de radiación ionizante, **1211**  
 Roentgen, Wilhelm, 996  
 Rollos del mar Muerto, datación con carbono de, 1198  
 Rubbia, Carlo, 1227  
 Rutherford, Ernest, 1107-1108, 1108, 1178-1179, 1187  
 Rydberg, Johannes, 1107, 1111  
**S**  
 Sabores de quarks, 1240  
 Salam, Abdus, 1244  
 Satélite Planck, 1248  
 Savart, Félix, 772  
 Schmidt, Brian P., 1251  
 Schrieffer, J. R., 703  
 Schrödinger, Erwin, 1090  
 Schwinger, Julian, 1230  
 Segré, Emilio, 1228  
 Segunda derivada, en cálculo, A-14  
 Seguridad  
   eléctrica, 733, 733-734, 734, 800, 800  
   en reacciones de fisión nuclear, 1206-1207  
 Selector de velocidad, 752, 752  
 SEM (microscopio electrónico de barrido), 1066  
 Semiconductor tipo  $p$ , 1164  
 Semiconductores, 591, 702, 1163, 1163-1165, 1163a, 1164, 1165  
   de tipo  $n$ , 1165  
   dopados, 1164-1165, 1165  
   extrínsecos, 1165  
   intrínsecos, 1163  
 Señales de Wi-Fi, 873, 873, 889  
 Separador de células, láser utilizado con, 1137  
 Serie  
   de Balmer (espectro de emisión de hidrógeno, 1106, **1107**, *1107*, 1111, *1111*)  
   de Brackett, en espectros de hidrógeno, 1107  
   de expansión, A-13  
   de Lyman, en espectros de hidrógeno, 1107  
   Paschen, en espectros de hidrógeno, 1107  
   Triboelectrónica, 609

- SETI (Búsqueda de inteligencia extraterrestre, 892)
- Seurat, Georges, 1005
- Shockley, William, 1168
- Símbolos, A-2-A-3  
de circuito, 668
- Simultaneidad y relatividad del tiempo, 1019-1020, 1031
- Sistema American Wire Gauge (AWG), 708
- Sistema AWG (American Wire Gauge), 708, 708t
- Sistema de lente de zoom, 961
- Sistemas de frenado, corrientes de eddy y, 815
- Sistemas. *Véase* análisis de modelos
- SLAC (Stanford Linear Accelerator), 1241
- Slipher, Vesto Melvin, 1248
- Smartphones, actividades físicas que involucran, 636, 664, 711, 742, 873, 920, 925, 956
- Smith, George E., 1060
- Sol  
atmósfera, análisis de gases en, 1106  
campo magnético de 747t  
fusión en, 1207  
longitud de onda de radiación de 1054
- Solar Star (CA), 1167
- Solenoides  
campo eléctrico inducido por el cambio campo magnético en, 809, 809-810  
campos magnéticos de 782, 782-783, 783  
inductancia de, 830-831  
inductancia mutua de, 833
- Sólidos amorfos, 1144
- Sólidos covalentes, 1157, 1157
- Sólidos iónicos, 1156, 1156
- Sólidos. *Véase* Moléculas y sólidos
- Sonda de anisotropía para microondas Wilkinson, 1248
- Sorbona (Francia), 1064
- Stanford Linear Accelerator (SLAC), 1241
- Stanford Linear Collider, 1245
- Stern, Otto, 1124-1126
- STM (microscopios de efecto túnel de barrido), 1095, 1095-1096
- Strassmann, Fritz, 1202
- Subcapas atómicas, 1116, 1116t
- Super Proton Synchrotron, CERN, 1245
- Superconductores basados en óxido de cobre de alta temperatura, 703
- Superconductores, 702, 702-703, 702t, 789-790, 790, 792, 845
- Superficie cerrada, flujo eléctrico a través, 622, 622, 622-623
- Superficie equipotencial, 640
- Superficies de refracción plana, 937, 937
- Supernova Shelton 1987A, 1257, 1257-1258
- Supersimetría (SUSY), 1253
- Surfactantes, 680
- T**
- Tabla Periódica  
ejemplo de, A-22-A-23  
elementos faltantes, predicción de, 1239  
principio de exclusión y, 1126, 1126-1130, 1127, 1128, 1128, 1129, 1130
- Tau ( $\tau$ ) partículas, 1233
- Taylor J. B., 1124-1126
- TC, para diagnóstico médico, 1177, 1213, 1225
- Telégrafo 792
- Telescopio  
de refracción, 953  
del Polo Sur, 1248  
espacial Hubble, 992, 992  
Hale (Palomar Mountain, CA), 1005  
reflectante, 954
- Telescopios 953, 953-954, 954, 991
- Televisores QLED, 1093
- TEM (microscopio electrónico de transmisión), 1066
- Temperatura (T)  
Curie, 788, 788
- Temperaturas de Curie para sustancias ferromagnéticas, 788, 788t
- Teorema de la energía cinética del trabajo. *Véase también* energía cinética en campos magnéticos, 747  
relativista, 1035-1036, 1036
- Teorema de Pitágoras, A-11
- Teoría  
BCS de la superconductividad, 703  
de bandas de sólidos, 1160-1162, 1161, 1161  
de cuerdas, 1252, 1252-1253  
de electrones libres de metales, 591n, 1158, 1158-1160, 1159, 1160s  
de Gauge, 1226n  
del Big Bang de la creación del Universo, 1246  
del Todo, 1252  
electrodébil, 1244  
especial de la relatividad contracción de longitud, 1025-1026, 1026  
general de la relatividad, 1039-1041, 1040, 1040, 1041  
M, 1253  
probabilística cuántica-mecánica de la estructura atómica, 1109
- Termodinámica, 705-706. *Véase también* Termómetro de oídos, 1053, 1053
- Termómetros, 1053, 1053. *Véase también* Temperatura
- Terremoto (Japón): causa del desastre de energía nuclear (2011), 1206
- Tesla (T, unidad de campo magnético), 747
- Tesla, Nikola, 865, 865
- Tevatron, Fermi National Accelerator
- Texas Instruments, Inc., 1170
- TFTR (Tokamak Fusion Test Reactor), 1209, 1210
- Thomson, G. P., 1065
- Thomson, J. J., 630, 753, 753, 766, 1075, 1107, 1107
- Thorud, Richard A., 921
- Tiempo (t)  
dilatación de, a partir de la teoría especial de relatividad, 1019, 1019-1024, 1020, 1021, 1021, 1021, 1023, 1031  
factores de conversión para A-1
- Tierra  
borroso atmosférico para telescopios, 991-992, 992  
campo magnético de 743-745, 744  
capa de ozono 889  
niveles atmosféricos de dióxido de carbono, 1155, 1155
- Tierra, cable conectado a, 592
- Tijeras, Láser, 1136
- Ting, Samuel, 1241
- Tinibagam Sin Itiro, 1230
- Tipo  
de quark *abajo* (d), 1240  
de quark *arriba* (u), 1240  
de quark *encanto* (c), 1241  
de quark *extraño* (s), 1240  
inferior de quark (b), 1241  
*superior* de quark (t), 1241
- Tokamak Fusion Test Reactor (TFTR), 1209, 1210
- Tomografía por emisión de positrones (PET), para el diagnóstico médico, 1177, 1213, 1225, 1225, 1229, 1229
- Toro Company, Inc., 921
- Toroide, campo magnético creado por, 781, 781-782
- Torque ( $\vec{\tau}$ )  
sobre un circuito de corriente en un campo magnético uniforme 757, 757-760, 758, 759, 760
- Tragedia del transbordador espacial *Challenger* de 1986, 1230
- Transformada de Fourier infrarroja (FTIR) espectroscopia, 974-975
- Transformador elevador, 864
- Transformador reductor, 864
- Transformadores  
bajada, 864  
corrientes de eddy en, 815, 865  
subida, 864  
y transmisión de potencia, 863-866, 864, 864, 865
- Transiciones  
espontáneas y estimuladas, 1133-1134, 1134  
permitidas, reglas de selección para, 1131  
prohibidas, 1130  
reglas de selección para permitidas 1131
- Transistor  
de efecto de campo, 1168  
de unión, 1168  
efecto de campo, 1168, 1168-1169  
resonante de tunelización, 1169-1170, 1170  
tunelización resonante, 1169-1170  
unión 1168
- Transmisión de potencia, 863-866, 864, 864, 865
- Trenes Maglev, 587, 587
- Tricromatos anómalos, en daltonismo, 950
- Trigonometría, A-11-A-13, A-12t
- Tsunami (Japón) -causa del desastre de la energía nuclear (2011), 1206
- Tubo Geiger-Mueller, 661, 688
- Tubos fotomultiplicadores, 1059, 1059, 1234
- Tunelización  
a través de la barrera de energía potencial, 1093, 1093-1094  
aplicaciones para, 1094, 1094-1096
- U**
- Uhlenbeck, George, 1123-1124



- Un gran experimento del colisionador de iones (proyecto ALICE), 1242
- Unidad de Faraday, 818
- Unidad de masa atómica, **1179**
- Unidades de cantidades físicas, A-2-A-3
- Unión Magnética Alemana, 624
- Universidad
- de Cambridge (Reino Unido), 753
  - de Chicago, 1061
  - de Columbia, 1229
  - de Helmstedt (Alemania), 624
  - de Manchester (Reino Unido), 1157
  - de Múnich (Alemania), 695, 1071
  - de Princeton, 1061, 1210, 1247
  - de Stanford, 1241
- Universo abierto, 1249
- Big Bang* teoría de la creación del, 1246, 1246-1248
  - cerrado, 1249
  - densidad crítica y destino de, 1249, 1249-1250
  - energía misteriosa del 1251
  - evidencia de la expansión de, 1248-1249
  - materia oscura y masa faltante de, 1250-1251
  - Oscilante, 1249
  - plano, 1249, 1251
- Uranio, fisión de, 1109
- V**
- Valores expectantes, 1081-1082, 1082*n*, 1087-1088
- Van der Meer, Simon, 1227
- Variables de estado, 672*n*
- Varillas y conos, en ojos, 949
- Vector de Poynting ( $\vec{S}$ ), 882, 883, 883, 886
- Velocidad ( $v$ )
- de deriva, 693-694, 700, 701*n*, 761
  - de fase de las ondas en paquetes de ondas 1068-1069
  - de luz, 899-901, 900, 1015, 1015-1016, 1018
  - de ondas electromagnéticas, 878, 880
  - ecuaciones de transformación de Galileo, 1015-1016
  - ecuaciones transformación de velocidad de Lorentz, 1031-1034, 1033
  - factores de conversión para A-1
  - fase, de ondas en paquetes de ondas, 1068-1069
  - relativa, 1014, 1031-1034
- Very Large Array (VLA, NM), 1007
- Vida media del material radiactivo, 1188-1189
- Visión escópica, de ojos, 949
- VLA (Very Large Array, NM), 1007
- Voltaje ( $\Delta V$ )
- a través del capacitor, 855
  - amplitud de, 848-850
  - de circuito abierto, 714
  - de electrones (eV, unidad de energía), 638
  - diferencia de potencial como, 638
  - en la terminal de la batería, 714-716
  - Hall ( $\Delta V_H$ ), 761
  - instantáneo, 849
  - máximo posible de la batería, 714
- Voltímetro, diferencia de potencial medida por, 676
- Volts (V, unidad de potencial eléctrico), 638
- Volumen ( $V$ )
- de formas geométricas, A-10, A-10*t*
  - del núcleo, 1180-1181
- W**
- Weber (Wb, unidad de flujo magnético), 784
- Weber, Wilhelm, 792
- Weinberg, Steven, 1244
- Wendelstein 7-X stellarator, para fusión nuclear (Alemania), 1210
- Weyl, H., 1018*n*
- Wilson, Charles, 1061
- Wilson, Robert W., 1247, 1247-1248
- Wooster College, 1061
- Y**
- Young, Thomas, 899, 963, 984
- Yukawa, Hideki, 1229-1231, 1243
- Z**
- Zweig, George, 1240-1241
- Zwicky, Fritz, 1250







## Algunas constantes físicas

Cantidad	Símbolo	Valor <sup>a</sup>
Unidad de masa atómica	u	$1.660\,538\,782\,(83) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $931.494\,028\,(23) \text{ MeV}/c^2$
Número de Avogadro	$N_A$	$6.022\,141\,79\,(30) \times 10^{23} \text{ partículas/mol}$
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9.274\,009\,15\,(23) \times 10^{-24} \text{ J/T}$
Radio de Bohr	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$5.291\,772\,085\,9\,(36) \times 10^{-11} \text{ m}$
Constante de Boltzmann	$k_B = \frac{R}{N_A}$	$1.380\,650\,4\,(24) \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$	$2.426\,310\,217\,5\,(33) \times 10^{-12} \text{ m}$
Constante de Coulomb	$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8.987\,551\,788 \dots \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \text{ (exacto)}$
Masa del deuterón	$m_d$	$3.343\,583\,20\,(17) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $2.013\,553\,212\,724\,(78) \text{ u}$
Masa del electrón	$m_e$	$9.109\,382\,15\,(45) \times 10^{-31} \text{ kg}$ $5.485\,799\,094\,3\,(23) \times 10^{-4} \text{ u}$ $0.510\,998\,910\,(13) \text{ MeV}/c^2$
Electronvolt	eV	$1.602\,176\,487\,(40) \times 10^{-19} \text{ J}$
Carga elemental	e	$1.602\,176\,487\,(40) \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante de gas	R	$8.314\,472\,(15) \text{ J/mol} \cdot \text{K}$
Constante gravitacional	G	$6.674\,28\,(67) \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Masa del neutrón	$m_n$	$1.674\,927\,211\,(84) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $1.008\,664\,915\,97\,(43) \text{ u}$ $939.565\,346\,(23) \text{ MeV}/c^2$
Magnetón nuclear	$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5.050\,783\,24\,(13) \times 10^{-27} \text{ J/T}$
Permeabilidad del espacio libre	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \text{ (exacto)}$
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \text{ (exacto)}$
Constante de Planck	$h$	$6.626\,068\,96\,(33) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,628\,(53) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Masa del protón	$m_p$	$1.672\,621\,637\,(83) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $1.007\,276\,466\,77\,(10) \text{ u}$ $938.272\,013\,(23) \text{ MeV}/c^2$
Constante de Rydberg	$R_H$	$1.097\,373\,156\,852\,7\,(73) \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
Rapidez de la luz en el vacío	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s} \text{ (exacto)}$

*Nota:* Estas constantes son los valores recomendados en 2006 por CODATA, con base en un ajuste de mínimos cuadrados de los datos provenientes de diferentes mediciones. Para una lista más completa, consulte P. J. Mohr y B. N. Taylor, "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants; 2006." *Rev. Mod. Phys.* **80**:2, 633–730, 2008.

<sup>a</sup>Los números entre paréntesis para los valores representan las incertidumbres de los últimos dos dígitos.



## Datos del Sistema Solar

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo (s)	Distancia desde el Sol (m)
Mercurio	$3.30 \times 10^{23}$	$2.44 \times 10^6$	$7.60 \times 10^6$	$5.79 \times 10^{10}$
Venus	$4.87 \times 10^{24}$	$6.05 \times 10^6$	$1.94 \times 10^7$	$1.08 \times 10^{11}$
Tierra	$5.97 \times 10^{24}$	$6.37 \times 10^6$	$3.156 \times 10^7$	$1.496 \times 10^{11}$
Marte	$6.42 \times 10^{23}$	$3.39 \times 10^6$	$5.94 \times 10^7$	$2.28 \times 10^{11}$
Júpiter	$1.90 \times 10^{27}$	$6.99 \times 10^7$	$3.74 \times 10^8$	$7.78 \times 10^{11}$
Saturno	$5.68 \times 10^{26}$	$5.82 \times 10^7$	$9.29 \times 10^8$	$1.43 \times 10^{12}$
Urano	$8.68 \times 10^{25}$	$2.54 \times 10^7$	$2.65 \times 10^9$	$2.87 \times 10^{12}$
Neptuno	$1.02 \times 10^{26}$	$2.46 \times 10^7$	$5.18 \times 10^9$	$4.50 \times 10^{12}$
Plutón <sup>a</sup>	$1.25 \times 10^{22}$	$1.20 \times 10^6$	$7.82 \times 10^9$	$5.91 \times 10^{12}$
Luna	$7.35 \times 10^{22}$	$1.74 \times 10^6$	—	—
Sol	$1.989 \times 10^{30}$	$6.96 \times 10^8$	—	—

<sup>a</sup>En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional adoptó una definición de planeta que separa a Plutón de los otros ocho planetas. Plutón ahora se define como “planeta enano” (como el asteroide Ceres).

### Datos físicos usados con frecuencia

Distancia promedio Tierra-Luna	$3.84 \times 10^8$ m
Distancia promedio Tierra-Sol	$1.496 \times 10^{11}$ m
Radio promedio de la Tierra	$6.37 \times 10^6$ m
Densidad del aire (20°C y 1 atm)	$1.20$ kg/m <sup>3</sup>
Densidad del aire (0°C y 1 atm)	$1.29$ kg/m <sup>3</sup>
Densidad del agua (20°C y 1 atm)	$1.00 \times 10^3$ kg/m <sup>3</sup>
Aceleración de caída libre	$9.80$ m/s <sup>2</sup>
Masa de la Tierra	$5.97 \times 10^{24}$ kg
Masa de la Luna	$7.35 \times 10^{22}$ kg
Masa del Sol	$1.99 \times 10^{30}$ kg
Presión atmosférica estándar	$1.013 \times 10^5$ Pa

*Nota:* Estos valores son los utilizados en el texto.

### Algunos prefijos para potencias de diez

Potencia	Prefijo	Abreviatura	Potencia	Prefijo	Abreviatura
$10^{-24}$	yocto	y	$10^1$	deca	da
$10^{-21}$	zepto	z	$10^2$	hecto	h
$10^{-18}$	ato	a	$10^3$	kilo	k
$10^{-15}$	femto	f	$10^6$	mega	M
$10^{-12}$	pico	p	$10^9$	giga	G
$10^{-9}$	nano	n	$10^{12}$	tera	T
$10^{-6}$	micro	$\mu$	$10^{15}$	peta	P
$10^{-3}$	mili	m	$10^{18}$	exa	E
$10^{-2}$	centi	c	$10^{21}$	zetta	Z
$10^{-1}$	deci	d	$10^{24}$	yotta	Y



## Abreviaturas estándar y símbolos para unidades

Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad
A	ampere	K	kelvin
u	unidad de masa atómica	kg	kilogramo
atm	atmósfera	kmol	kilomol
Btu	unidad térmica británica	L	litro
C	coulomb	lb	libra
°C	grado Celsius	al	año luz
cal	caloría	m	metro
d	día	min	minuto
eV	electronvolt	mol	mol
°F	grado Fahrenheit	N	newton
F	farad	Pa	pascal
ft	pie	rad	radián
G	gauss	rev	revolución
g	gramo	s	segundo
H	henry	T	tesla
h	hora	V	volt
hp	caballo de potencia	W	watt
Hz	hertz	Wb	weber
in.	pulgada	yr	año
J	joule	$\Omega$	ohm

## Símbolos matemáticos usados en el texto y su significado

Símbolo	Significado
=	es igual a
$\equiv$	se define como
$\neq$	no es igual a
$\propto$	es proporcional a
$\sim$	está en el orden de
$>$	es mayor que
$<$	es menor que
$\gg$ ( $\ll$ )	es mucho mayor (menor) que
$\approx$	es aproximadamente igual a
$\Delta x$	el cambio en $x$
$\sum_{i=1}^N x_i$	la suma de todas las cantidades $x_i$ desde $i = 1$ hasta $i = N$
$ x $	la magnitud de $x$ (siempre una cantidad no negativa)
$\Delta x \rightarrow 0$	$\Delta x$ tiende a cero
$\frac{dx}{dt}$	la derivada de $x$ con respecto a $t$
$\frac{\partial x}{\partial t}$	la derivada parcial de $x$ con respecto a $t$
$\int$	integral



## Conversiones

### Longitud

- 1 in. = 2.54 cm (exacto)
- 1 m = 39.37 in. = 3.281 ft
- 1 ft = 0.304 8 m
- 12 in. = 1 ft
- 3 ft = 1 año luz
- 1 yd = 0.914 4 m
- 1 km = 0.621 mi
- 1 mi = 1.609 km
- 1 mi = 5 280 ft
- 1  $\mu\text{m}$  =  $10^{-6}$  m =  $10^3$  nm
- 1 año luz =  $9.461 \times 10^{15}$  m

### Área

- 1 m<sup>2</sup> = 10<sup>4</sup> cm<sup>2</sup> = 10.76 ft<sup>2</sup>
- 1 ft<sup>2</sup> = 0.092 9 m<sup>2</sup> = 144 in.<sup>2</sup>
- 1 in.<sup>2</sup> = 6.452 cm<sup>2</sup>

### Volumen

- 1 m<sup>3</sup> = 10<sup>6</sup> cm<sup>3</sup> = 6.102  $\times 10^4$  in.<sup>3</sup>
- 1 ft<sup>3</sup> = 1 728 in.<sup>3</sup> = 2.83  $\times 10^{-2}$  m<sup>3</sup>
- 1 L = 1 000 cm<sup>3</sup> = 1.057 6 qt = 0.035 3 ft<sup>3</sup>
- 1 ft<sup>3</sup> = 7.481 gal = 28.32 L = 2.832  $\times 10^{-2}$  m<sup>3</sup>
- 1 gal = 3.786 L = 231 in.<sup>3</sup>

### Masa

- 1 000 kg = 1 t (tonelada métrica)
- 1 slug = 14.59 kg
- 1 u =  $1.66 \times 10^{-27}$  kg = 931.5 MeV/c<sup>2</sup>

### Fuerza

- 1 N = 0.224 8 lb
- 1 lb = 4.448 N

### Velocidad

- 1 mi/h = 1.47 ft/s = 0.447 m/s = 1.61 km/h
- 1 m/s = 100 cm/s = 3.281 ft/s
- 1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s

### Aceleración

- 1 m/s<sup>2</sup> = 3.28 ft/s<sup>2</sup> = 100 cm/s<sup>2</sup>
- 1 ft/s<sup>2</sup> = 0.304 8 m/s<sup>2</sup> = 30.48 cm/s<sup>2</sup>

### Presión

- 1 bar = 10<sup>5</sup> N/m<sup>2</sup> = 14.50 lb/in.<sup>2</sup>
- 1 atm = 760 mm Hg = 76.0 cm Hg
- 1 atm = 14.7 lb/in.<sup>2</sup> = 1.013  $\times 10^5$  N/m<sup>2</sup>
- 1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup> = 1.45  $\times 10^{-4}$  lb/in.<sup>2</sup>

### Tiempo

- 1 año = 365 días = 3.16  $\times 10^7$  s
- 1 día = 24 h = 1.44  $\times 10^3$  min = 8.64  $\times 10^4$  s

### Energía

- 1 J = 0.738 ft · lb
- 1 cal = 4.186 J
- 1 Btu = 252 cal = 1.054  $\times 10^3$  J
- 1 eV = 1.602  $\times 10^{-19}$  J
- 1 kWh = 3.60  $\times 10^6$  J

### Potencia

- 1 hp = 550 ft · lb/s = 0.746 kW
- 1 W = 1 J/s = 0.738 ft · lb/s
- 1 Btu/h = 0.293 W

## Algunas aproximaciones útiles para problemas de estimación

- 1 m  $\approx$  1 yd
- 1 kg  $\approx$  2 lb
- 1 N  $\approx$   $\frac{1}{4}$  lb
- 1 L  $\approx$   $\frac{1}{4}$  gal
- 1 m/s  $\approx$  2 mi/h
- 1 año  $\approx$   $\pi \times 10^7$  s
- 60 mi/h  $\approx$  100 ft/s
- 1 km  $\approx$   $\frac{1}{2}$  mi

Nota: Vea la tabla A.1 del Apéndice A para una lista más completa.

## El alfabeto griego

Alfa	A	$\alpha$	Iota	I	$\iota$	Rho	P	$\rho$
Beta	B	$\beta$	Kappa	K	$\kappa$	Sigma	$\Sigma$	$\sigma$
Gamma	$\Gamma$	$\gamma$	Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	Tau	T	$\tau$
Delta	$\Delta$	$\delta$	Mu	M	$\mu$	Ípsilon	Y	$\nu$
Épsilon	E	$\epsilon$	Nu	N	$\nu$	Fi	$\Phi$	$\phi$
Zeta	Z	$\zeta$	Xi	$\Xi$	$\xi$	Ji	X	$\chi$
Eta	H	$\eta$	Ómicron	O	$o$	Psi	$\Psi$	$\psi$
Theta	$\Theta$	$\theta$	Pi	$\Pi$	$\pi$	Omega	$\Omega$	$\omega$





Esta edición de *Física para ciencias e ingeniería* tiene tres objetivos principales: proporcionar al estudiante una presentación clara de los principios de la física, fortalecer la comprensión de los conceptos básicos a través de interesantes aplicaciones al mundo real y desarrollar habilidades para resolver problemas por medio de un enfoque efectivamente organizado.

Entre sus principales características destacan:

- *Ejemplos.* Todos los ejemplos del libro se presentan en un formato de dos columnas para reforzar mejor los conceptos de física. La columna de la izquierda presenta información textual que describe los pasos para resolver el problema, mientras que la derecha muestra las manipulaciones matemáticas y los resultados que se obtienen al seguir estos pasos.
- *Prevención de riesgos ocultos.* Se incluyen más de 200 prevenciones de riesgos para ayudar al estudiante a evitar desacuerdos y errores comunes.
- *¿Qué pasaría si?* La pregunta ofrece una variante de la situación planteada en el ejemplo del libro, la cual busca desarrollar el pensamiento crítico en los resultados posibles y también contribuye a la comprensión conceptual de los principios.
- *Problemas.* Al final de cada capítulo se incluye un extenso conjunto de problemas; en total, el libro contiene más de 2 000.

Se enfatiza en argumentos físicos estructurados de forma adecuada y en estrategias efectivas para resolver problemas. Al mismo tiempo motivamos al estudiante mediante ejemplos prácticos que demuestren el papel de la física en otras disciplinas, como ingeniería, química y medicina.



Visite nuestro sitio en <http://latinoamerica.cengage.com>

ISBN-13: 978-607-526-672-5  
ISBN-10: 607-526-672-0



9 786075 266725