

FÍSICA PARA CIENCIAS DE LA VIDA

David Jou Mirabent
Josep Enric Llebot Rabagliati
Carlos Pérez García



**Mc
Graw
Hill**

SEGUNDA EDICIÓN

FÍSICA PARA CIENCIAS
DE LA VIDA
Segunda edición

FÍSICA PARA CIENCIAS DE LA VIDA

David Jou Mirabent

*Departamento de Física
Universidad Autónoma de Barcelona*

Josep Enric Llebot Rabagliati

*Departamento de Física
Universidad Autónoma de Barcelona*

Carlos Pérez García

*Departamento de Física y Matemática Aplicada
Universidad de Navarra*



MADRID * BUENOS AIRES * CARACAS * GUATEMALA * LISBOA * MÉXICO
NUEVA YORK * PANAMÁ * SANTAFÉ DE BOGOTÁ * SAN JUAN * SANTIAGO * SAO PAULO
AUCKLAND * HAMBURGO * LONDRES * MILÁN * MONTREAL * NUEVA DELHI * PARÍS
SAN FRANCISCO * SIDNEY * SINGAPUR * ST. LOUIS * TOKIO * TORONTO

FÍSICA PARA CIENCIAS DE LA VIDA

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del *Copyright*.

DERECHOS RESERVADOS © 2009, respecto a la segunda edición en español, por McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.

Edificio Valrealty, 1.ª Planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

ISBN: 978-84-481-6803-2
Depósito legal: M.

Editores: José Luis García y Cristina Sánchez
Técnicos editoriales: Blanca Pecharromán y María León
Equipo de Preimpresión: Nuria Fernández, Patricia Fernández y M.ª Ángeles Ramírez
Diseño de Cubierta: TRAMEC
Compuesto en: Linocomp, S.L.
Impreso en:

IMPRESO EN ESPAÑA – PRINTED IN SPAIN

CONTENIDO

Prefacio a la segunda edición	ix
Capítulo 1. Mecánica y biomecánica. Forma, función, tamaño	1
1.1. Cinemática	3
1.2. Dinámica. Leyes de Newton	7
1.3. Las fuerzas: interacciones fundamentales y fuerzas derivadas	10
1.4. Impulso y trabajo	17
1.5. Momento angular. Rotación	19
1.6. Biomecánica	24
1.7. Nanomecánica de motores moleculares	30
1.8. Conservación de la energía mecánica	33
1.9. Tamaño, forma y vida	39
1.10. Leyes de escala. Ritmo metabólico	40
1.11. Análisis dimensional	41
Capítulo 2. Elasticidad: huesos, músculos, macromoléculas	55
2.1. Esfuerzos	57
2.2. Esfuerzos de compresión y de tracción	58
2.3. Flexión	65
2.4. Esfuerzos tangenciales	76
2.5. Esfuerzos de torsión	77
2.6. Elasticidad del DNA y de proteínas	79
Capítulo 3. Mecánica de fluidos: atmósfera, océano, fluidos corporales ..	87
3.1. Densidad	89
3.2. Viscosidad	90
3.3. Presión	92
3.4. Tensión superficial	94
3.5. Ecuación de continuidad	97
3.6. Ecuación de Bernoulli	101
3.7. Ley de Poiseuille	108
3.8. Membranas biológicas	115
3.9. Número de Reynolds	126
3.10. Movimiento de cuerpos en fluidos	128
3.11. Fuerzas de resistencia o fuerzas de arrastre	129
3.12. Fuerza de sustentación	142

Capítulo 4. Termodinámica: calor, energía, planeta	151
4.1. Primera ley de la termodinámica. Conservación de la energía. Trabajo y calor	153
4.2. Transmisión de calor	158
4.3. La segunda ley de la termodinámica	165
4.4. Rendimientos reales de máquinas térmicas	167
4.5. La segunda ley en sistemas no aislados	171
4.6. Interpretación microscópica de la entropía	173
4.7. La segunda ley en Biología	174
4.8. Gases ideales y reales	175
4.9. Teoría cinética de los gases	181
Capítulo 5. Oscilaciones, ondas y acústica: vibraciones, oleajes, sonidos	191
5.1. Movimiento oscilatorio	193
5.2. Oscilaciones amortiguadas	196
5.3. Movimiento oscilatorio forzado. Resonancia	199
5.4. Oscilaciones periódicas. Teorema de Fourier. Análisis espectral	203
5.5. Ondas. Propagación de ondas	206
5.6. Ondas transversales y longitudinales. Ondas en una cuerda	210
5.7. Potencia transportada por una onda	212
5.8. Superposición de ondas. Ondas estacionarias en una cuerda	214
5.9. Ondas sonoras. Velocidad del sonido	221
5.10. Ondas sonoras estacionarias	226
5.11. Intensidad de las ondas sonoras. Escala decibélica. Tono y timbre	230
5.12. Física del habla y del oído medio	238
5.13. Reflexión, refracción y difracción de ondas sonoras. Ultrasonidos. Ecolocalización	243
5.14. El efecto Doppler. Ondas de choque: litotricia	249
Capítulo 6. Electricidad y magnetismo: potencial de membrana, corriente nerviosa, resonancia magnética	263
6.1. Interacción entre cargas. Ley de Coulomb. Potencial eléctrico	265
6.2. Dipolos eléctricos	269
6.3. Condensadores	273
6.4. Circuitos eléctricos. Ley de Ohm	276
6.5. Descarga de un condensador	279
6.6. Circuitos complicados. Ejemplos de interés en Biología	281
6.7. Circuitos eléctricos equivalentes de las membranas	288
6.8. Transporte de iones a través de la membrana	294
6.9. Transmisión de los impulsos nerviosos	299

6.10.	Magnetismo. Fuerza magnética sobre una partícula ..	305
6.11.	Resonancia magnética nuclear	310
6.12.	Campo producido por una corriente	314
6.13.	Inducción magnética. Ley de Faraday	316
6.14.	Corriente alterna	318
6.15.	Aerogeneradores	322
Capítulo 7.	Óptica: visión, lentes, estructuras moleculares	331
7.1.	Naturaleza de la luz. Índice de refracción. Principio de Huygens	333
7.2.	Interferencia. Experimento de Young	337
7.3.	Difracción de rayos X y de radiación sincrotrón. Estructura de proteínas	344
7.4.	Difracción	346
7.5.	Reflexión y refracción. Ley de Snell. Reflexión total. Difracción de la luz	350
7.6.	Dispersión de la luz. Interferencias en películas delgadas	361
7.7.	Polarización de la luz	368
7.8.	Imágenes formadas por refracción. Lentes delgadas. Sistemas de lentes	374
7.9.	El ojo y los defectos visuales	388
7.10.	Microscopios	402
Capítulo 8.	Radiactividad: núcleos, desintegraciones, efectos biológicos	415
8.1.	Las relaciones de Einstein-Planck y de De Broglie ..	417
8.2.	Energía de enlace: defecto de masa	420
8.3.	Fisión y fusión	423
8.4.	Radiactividad α , β y γ	428
8.5.	Semivida de desintegración	431
8.6.	Dosimetría física y biológica	434
8.7.	Efectos biológicos de la radiación ionizante	441
Tablas de algunas constantes físicas	448	
Bibliografía	449	
Índice	451	

PREFACIO A LA SEGUNDA EDICIÓN

El objetivo prioritario de este libro es ser útil al estudiante de primeros años de ciencias de la vida —biólogo, médico, veterinario, ambientólogo, farmacéutico—. Quiere convencerle de que la física proporciona sobre muchos aspectos de su campo perspectivas que le resultarán esclarecedoras a lo largo de toda la carrera. Intentamos conseguirlo con la máxima sencillez compatible con el rigor científico y la comprensión adecuada de los fenómenos, pero sin demorar la atención en aspectos formales o poco afines con las preocupaciones de la biología. No sólo ilustramos continuamente las leyes físicas con numerosos ejemplos biológicos, sino que, en muchas ocasiones, problemas biológicos constituyen la motivación esencial y la fuente de inspiración de secciones del libro.

La biología, con sus avances en las fronteras molecular y celular, en ingeniería genética, en neurobiología, con sus aplicaciones médicas y quirúrgicas, y con sus retos ecológicos y planetarios, se ha convertido en un estímulo para numerosos desarrollos de la física. A su vez, los progresos de ésta suministran nuevos instrumentos técnicos y esquemas conceptuales que ayudan a comprender con mayor profundidad y a aplicar con mayor precisión y eficacia aspectos diversos de la biología. Por ello, la biofísica es una de las áreas de la física que está recibiendo mayor atención, con una capacidad de atracción y de sorpresa comparable a la de ramas como la cosmología, partículas elementales, información cuántica, desarrollo de nuevos materiales y nanotecnología. Por estos motivos, la frontera entre la física y la biología ha sido fértil, también, en nuevos libros de texto, con la voluntad de facilitar el acceso a los desarrollos mencionados.

Por poner sólo algunos ejemplos de tales desarrollos, es conveniente recordar que los motores moleculares de la biología constituyen un reto y un ejemplo para la nanotecnología de sensores y motores ultraminiaturizados; las redes neuronales artificiales son la base de nuevos desarrollos en informática que, a su vez, ayudan a comprender mejor algunos aspectos de la neurobiología; la radiación sincrotrón y la resonancia magnética nuclear permiten explorar con mayor velocidad y poder de resolución las estructuras de las proteínas y el funcionamiento del cerebro; las fibras ópticas y los láseres, los ultrasonidos y la resonancia magnética nuclear funcional proporcionan técnicas inestimables de exploración y de actuación en medicina y en investigación básica; la comprensión de la radiación térmica desempeña un papel básico en la evaluación de las causas y los retos de un posible cambio climático; las técnicas de miniaturización permiten la manipulación directa de macromoléculas hasta hace poco inaccesibles.

Durante el tiempo transcurrido desde la edición anterior de este libro ha habido profundas modificaciones en los programas universitarios, en las redes informáticas de información y comunicación, y en el desarrollo de la física y de la biología. Los créditos dedicados a la física para las ciencias de la vida se han reducido, la capacidad de información incesantemente actualizada accesible por Internet es extraordinaria, y los avances en biofísica son considerables. Hemos procurado adaptarnos a estos cambios haciendo una versión más ágil que la anterior, eliminando algunas secciones en que el indudable interés físico no quedaba suficientemente acompañado por aplicaciones biológicas que justificaran su inclusión en este libro, e incluyendo breves presentaciones de las ideas esenciales de desarrollos recientes.

En lo que respecta a información detallada y actual, el libro ya no puede competir con las redes informáticas, pero proporciona algo que ni siquiera la navegación más asidua por la red conseguiría dar, a saber, una visión de conjunto, una capacidad crítica, una estructura metódica que sitúe de la manera más fructí-

fera posible los diversos conocimientos parciales. Así, los conocimientos extraídos de algunas situaciones concretas se hacen aplicables a nuevas situaciones que, sin una visión de conjunto, hubieran parecido completamente ajenas y desconectadas. Esta es la aspiración esencial de la presente obra.

Las presentaciones teóricas son ilustradas con numerosos ejemplos y consolidadas con problemas propuestos. Este material puede resultar especialmente útil en un momento en que las directrices universitarias europeas apuntan hacia una priorización del trabajo personal por encima de las clases magistrales. Un texto adecuado puede permitir que las clases magistrales se reduzcan realmente a lo más esencial, sin que el estudiante quede desamparado en su tarea de ampliación y consolidación de conocimientos. Algunas secciones del libro enfocadas a ilustraciones concretas pueden ser omitidas, como es lógico, sin menoscabo de la visión de conjunto.

Y antes de finalizar este prólogo, no nos podemos olvidar del profesor Carlos Pérez García, coautor de la primera edición de esta obra, quien falleció en 2005, a los cincuenta y dos años de edad, en un accidente de montaña. Habíamos hablado en muchas ocasiones de posibles mejoras en nuestro libro, para hacerlo más ágil, más actual, más atractivo, más útil. Su presencia generosa e imaginativa, y siempre rica en ilusión y buen humor, nos ha acompañado de pensamiento durante la elaboración de esta nueva edición. Conseguir que la transmisión de la física en los ámbitos de las ciencias de la vida sea adecuada y lo más estimulante posible fue un objetivo que nos unió durante muchos años. Si con esta nueva edición conseguimos llevar un poco más allá este propósito, será nuestra mayor satisfacción, y el mejor recuerdo para nuestro compañero ausente.

Nos place, finalmente, agradecer el estímulo de los editores de McGraw-Hill de España, al invitarnos a realizar esta nueva edición. Su impulso ha sido decisivo para concretar nuestras inquietudes de actualización del texto que, durante varios años, no pasaban de los buenos propósitos, y que ahora, por fin, está a disposición del lector.

D. JOU, J. E. LLEBOT
Abril 2008

CAPÍTULO

Mecánica y biomecánica. Forma, función, tamaño

1

Procedemos en esta introducción a una breve presentación de los conceptos fundamentales de la Mecánica. El principal objetivo de ésta es describir (cinemática) y explicar (dinámica) el movimiento de los cuerpos y hallar, al mismo tiempo, las condiciones necesarias para su estado de reposo (estática). Las situaciones de mayor interés en biomecánica son las configuraciones estáticas de conjuntos de músculos y huesos, por un lado, y las implicaciones energéticas generales de su funcionamiento. (Los detalles de éstas se deberán tratar, sin embargo, en otros capítulos, como el de termodinámica y el de electricidad.) Explicaremos también los sistemas de medida y el análisis dimensional, que proporcionan métodos generales para determinar la forma funcional de algunas leyes, no sólo en Mecánica, sino en otras partes de la Física. Prestamos también atención a la relación entre el tamaño y la forma en los seres vivos, lo cual nos lleva a considerar las leyes de escala, que describen la variación de las características mecánicas en función del tamaño de las estructuras y de los organismos.

1.1. Cinemática

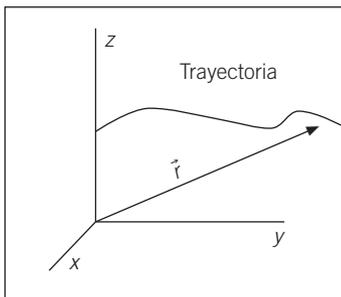


Figura 1.1.

Esta parte de la mecánica describe el movimiento de los cuerpos. Un cuerpo describe una trayectoria, que queda determinada por su posición en cada instante, dada por el vector de posición \vec{r} . Para determinar la evolución de la posición del cuerpo necesitamos conocer la velocidad instantánea definida por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad [1]$$

Pero, por razones que aparecerán más claras en el apartado sobre la dinámica, necesitamos aún introducir la variación instantánea de la velocidad, a la que se denomina aceleración \vec{a}

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad [2]$$

Normalmente, los problemas en cinemática vienen planteados a la inversa de la presentación que acabamos de hacer: se conoce la dependencia de la aceleración con alguna de las variables del sistema y se trata de determinar la trayectoria del cuerpo. Veamos a continuación un ejemplo característico:

Ejemplo 1.1.

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión. Se supone que la aceleración es constante y que se conoce la velocidad inicial v_0 de un cuerpo y su posición inicial r_0 . Se quiere saber cómo depende la posición del cuerpo con el tiempo.

Puesto que $dv/dt = a = \text{cte}$, podemos integrar esta relación, es decir,

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \Rightarrow (v - v_0) = at$$

Si ahora tenemos en cuenta que $v = dr/dt$ y usando el resultado anterior

$$\int_{r_0}^r dr = \int_0^t (v_0 + at) dt \Rightarrow r - r_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

resultan las conocidas fórmulas del movimiento uniformemente acelerado. Apliquemos estos resultados a un ejemplo concreto.

Ejemplo 1.2.

Una pulga salta 0,1 m en salto vertical. ¿Cuál es su velocidad inicial? Si ha alcanzado esa velocidad mediante una extensión de sus patas en una distancia de 0,0008 m, ¿cuál ha sido la aceleración inicial? La distancia de aceleración en el hombre es de 0,5 m. Si una persona saltase con la misma aceleración que una pulga, ¿a qué altura llegaría?

Las ecuaciones cinemáticas de un movimiento uniformemente acelerado en una dirección, donde la aceleración es la de la gravedad, son

$$v = v_0 - gt \quad , \quad y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

donde v e y son la velocidad y la altura en un instante cualquiera e y_0 y v_0 la altura y velocidad iniciales.

Suponemos que la dirección de la velocidad inicial es la opuesta a la dirección de g y que $y_0 = 0$. Por lo tanto, tenemos en el punto más elevado del salto

$$0 = v_0 - gt, \quad y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, v y t , que tiene como solución

$$t = \left(\frac{2y}{g} \right)^{1/2}, \quad v_0 = (2gy)^{1/2}$$

Sustituyendo los datos del problema, y teniendo en cuenta que $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, se obtiene

$$v_0 = 1,4 \text{ ms}^{-1} \quad \text{y} \quad t = 0,14 \text{ s}$$

Si ha llegado a esa velocidad inicial a partir del reposo, acelerándose bajo la acción de la fuerza muscular, supuesta constante, en una distancia de 0,0008 m,

utilizando las mismas ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado nos queda

$$v_0 = at \quad , \quad d = \frac{1}{2}at^2$$

donde ahora las incógnitas son t y a , con $v_0 = 1,4 \text{ m s}^{-1}$ y $d = 0,0008 \text{ m}$. Resolviendo este sistema, resulta

$$a = \frac{v_0^2}{2d} = 1226,25 \text{ m s}^{-2}$$

Si la distancia de aceleración en la persona es $d' = 0,5 \text{ m}$, para calcular hasta qué altura saltaría podemos escribir, de nuevo, las ecuaciones siguientes:

$$t = \left(\frac{2d}{a} \right)^{1/2} \quad , \quad v = at \quad , \quad h = \frac{v^2}{2g}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior se obtiene

$$t = 0,029 \text{ s}, \quad v = 35,02 \text{ m s}^{-1}, \quad h = 62,5 \text{ m}$$

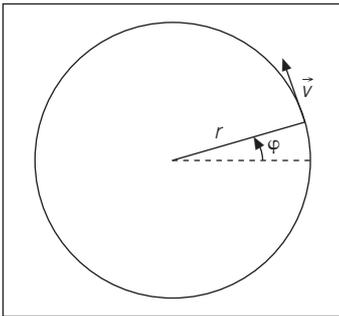


Figura 1.2. Movimiento circular.

También tiene interés especial el caso del movimiento circular, cuya variable natural es el ángulo.

Se define la velocidad angular y la aceleración angular como la variación instantánea del ángulo y de la velocidad angular, respectivamente

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad [3]$$

Nótese que existe una relación simple entre la velocidad lineal v y la angular ω , dada por la relación

$$|v| = \omega r \quad [4]$$

siendo r el radio de giro, ya que la distancia lineal s viene dada por $s = \varphi r$.

Procediendo de modo análogo al del movimiento lineal uniformemente acelerado, se obtiene para el *movimiento circular uniformemente acelerado* ($\alpha = \text{cte.}$)

$$\alpha = \text{cte} \quad , \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad [5]$$

Otro movimiento cuya cinemática puede ser descrita con detalle es el *armónico simple*, cuya aceleración depende del tiempo como

$$\alpha = -A\omega^2 \cos \omega t \quad [6]$$

donde ω es un parámetro característico de este movimiento, la frecuencia angular. Si para simplificar se supone que inicialmente el objeto se halla en el origen de coordenadas en reposo, resulta que su velocidad es

$$v = -A\omega^2 \int_0^t \cos \omega t \, dt = -A\omega \sin \omega t \quad [7]$$

y, teniendo en cuenta que $v = dr/dt$, al integrar se encuentra para la posición

$$r = A \cos \omega t \quad [8]$$

Esta ecuación corresponde a un movimiento sinusoidal.

Para acabar este breve repaso de la cinemática hemos de aludir a la aceleración que se produce como consecuencia de un movimiento circular. Consideremos el caso más simple, en el cual el módulo de la velocidad no varía, pero sí su dirección (véase Figura 1.3).

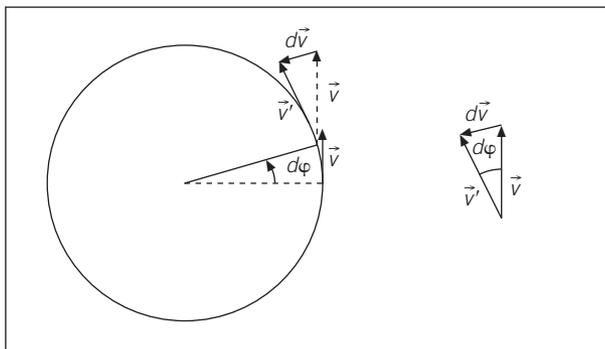


Figura 1.3. Variación de la velocidad en el movimiento circular.

En este caso hay una aceleración, por el hecho de que la velocidad varía de dirección. Dicha aceleración, denominada *aceleración centrípeta*, se obtiene combinando las expresiones

$$a_c = \frac{dv}{dt} \quad , \quad rd\varphi = v dt \quad \text{y} \quad dv = vd\varphi \quad [9]$$

Sustituyendo las expresiones de dv y dt en la definición de a_c se llega a la relación

$$a_c = \frac{dv}{dt} = \frac{vd\varphi}{rd\varphi/v} = \frac{v^2}{r} \quad [10]$$

Es de notar que si el módulo de la velocidad no varía, no hay aceleración angular y, por tanto, la velocidad angular ω es constante.

La aceleración centrípeta se puede escribir también de la forma

$$a_c = \omega^2 r \quad [11]$$

Ejemplo 1.3.

Supongamos que una partícula dista 0,1 m del eje de un motor que gira a 3.000 rpm (revoluciones por minuto). Calcúlese la aceleración centrípeta a la que se ve sometida esta partícula y compárese con la de la gravedad.

En primer lugar hemos de pasar de las rpm a rad s^{-1} , que son las unidades naturales de la velocidad angular ω

$$6000 \text{ rpm} = 6000 \text{ vueltas minuto}^{-1} = 6000 \times \frac{2\pi}{60} \text{ rad s}^{-1} = 2\pi \times 100 \text{ rad s}^{-1}$$

y la aceleración centrípeta resulta entonces

$$a_c = \omega^2 r = 4\pi^2 100^2 \text{ s}^{-2} \times 0,1 \text{ m} = 39.478,4 \text{ m s}^{-2}$$

Si dividimos este valor por el valor de la aceleración de la gravedad g , a saber, $9,8 \text{ m s}^{-2}$, tenemos

$$\frac{a_c}{g} = 4028,4$$

Por tanto, la partícula se ve sujeta a una aceleración superior a cuatro mil veces la de la gravedad. (Este es el fundamento de la centrifugación, que se estudiará con más detalle en capítulos posteriores.)

Otro de los movimientos que presentan gran interés son los de *resistencia*, para los cuales aparece una deceleración proporcional a la velocidad instantánea del móvil

$$a_r = -\beta v \quad [12]$$

Trataremos ejemplos de aplicación de este tipo de aceleración en la dinámica de fluidos.

1.2. Dinámica. Leyes de Newton

La dinámica estudia las causas del movimiento. Empezamos su estudio enunciando las leyes de Newton, siguiendo así, en parte, el desarrollo histórico de esta materia. Dichas leyes son tres:

1. *Ley de inercia*, formulada por vez primera por Galileo y generalizada por Descartes. Según esta ley, si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, éste sigue o bien en reposo o bien en movimiento rectilíneo y uniforme. Esta ley, opuesta a la visión que aportaba la física aristotélica, supuso el inicio, hacia finales del siglo xvi, de la mecánica tal como la entendemos en la actualidad.

2. *Ley fundamental de la dinámica*. Se denomina cantidad de movimiento, momento lineal o simplemente ímpetu de un objeto de masa m que se mueve con velocidad \vec{v} a la magnitud \vec{p} definida como

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [13]$$

Según la ley de inercia, si no actúa ninguna fuerza sobre el objeto, \vec{p} permanece constante. ¿Cómo varía \vec{p} cuando actúa una fuerza? Newton propuso que la variación correspondiente viene dada por

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad [14]$$

conocida como ecuación fundamental de la dinámica. Para cuerpos de masa constante esta ecuación toma la forma

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad [15]$$

3. *Ley de acción y reacción.* Si un objeto A ejerce una fuerza \vec{F} sobre un objeto B , dicho objeto B ejerce sobre el objeto A una fuerza de igual módulo y signo opuesto que \vec{F} . Obsérvese que, como dichas fuerzas actúan sobre objetos diferentes (una sobre A y otra sobre B), sus efectos no se cancelan.

A partir de la ley de acción y reacción se puede generalizar [14] para un sistema de N partículas cada una de velocidad v_i y masa m_i . Así pues, tenemos

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} \quad [16]$$

con

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \Sigma m_i \vec{v}_i \quad [17]$$

la cantidad de movimiento o ímpetu total y $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}}$, la suma de las fuerzas exteriores que actúan sobre las partículas. Las fuerzas internas entre partículas se cancelan, según el principio de acción y reacción, para el sistema global.

De la ecuación [16] se obtiene el principio de conservación de la cantidad de movimiento: si en un sistema $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = 0$, se cumple que \vec{p}_{tot} es constante. Veamos algunos ejemplos de la aplicación de este principio.

Ejemplo 1.4.

Un hombre que pesa 80 kg y un chico de 40 kg llevan patines en una superficie de hielo (rozamiento despreciable). Después de empujarse mutuamente, el hombre se aleja del chico a una velocidad de $0,3 \text{ m s}^{-1}$ respecto al hielo. ¿A qué distancia estarán después de 5 s?

El hombre y el chico pueden considerarse un sistema único, que inicialmente tiene cantidad de movimiento total nula. Como éste se conserva, pues no actúa ninguna fuerza externa, tendremos

$$p_h + p_c = m_h v_h + m_c v_c \Rightarrow v_c = -\frac{m_h v_h}{m_c} = -\frac{80 \text{ kg} \cdot 0,3 \text{ m s}^{-1}}{40 \text{ kg}} = -0,6 \text{ m s}^{-1}$$

donde el subíndice c indica las variables del chico y el h las del hombre. Al cabo de 5 s habrán recorrido una distancia

$$x_h = 0,3 \cdot 5 = 1,5 \text{ m} \quad , \quad x_c = -0,6 \cdot 5 = -3 \text{ m}$$

y se hallarán separados, por consiguiente, una distancia

$$x_{\text{total}} = 1,5 + 3 = 4,5 \text{ m}$$

Una aplicación interesante del principio de acción y reacción es la propulsión a chorro. Aparte de las aplicaciones tecnológicas a las turbinas de

aviación y los cohetes propulsores de las naves espaciales, este principio es usado por el calamar y el pulpo para realizar movimientos rápidos. En efecto, estos animales almacenan agua en la bolsa y al expelerla muy rápidamente consiguen una fuerza igual y en sentido contrario que los propulsa a una velocidad que les permite huir de los depredadores, como se indica en la Figura 1.4.

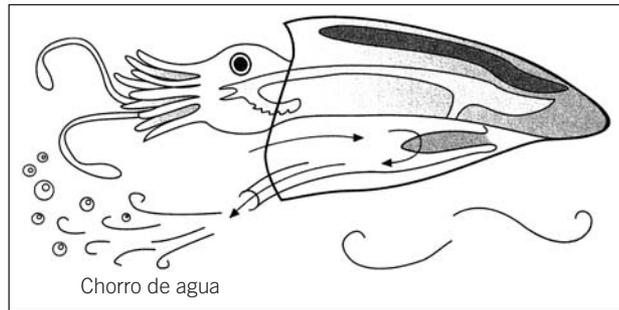


Figura 1.4. Movimiento de reacción en el calamar.

Ejemplo 1.5.

En un estudio sobre el vuelo de las moscas se puede suponer que el mecanismo de sustentación viene dado por la fuerza de reacción que ejerce el aire impulsado por sus alas. Suponiendo que una mosca tiene una masa $m = 0,001$ g, que el área de sus alas es $0,006$ cm² y que la densidad del aire es $0,0013$ g cm⁻³, calcular la frecuencia con que el insecto ha de mover las alas para sustentarse.

Si el insecto tiene masa m , el movimiento de sus alas le debe proporcionar una fuerza igual a su peso, mg . Suponemos que esta fuerza se produce de acuerdo con el siguiente mecanismo: al batir un ala se ejerce una fuerza sobre una masa M de aire de modo que la impulsa con una velocidad v . Por la tercera ley de Newton, esta masa de aire ejerce una fuerza igual y de sentido opuesto, que se opone al peso.

La relación entre la fuerza, supuesta constante, la masa del aire, la velocidad y el tiempo Δt que actúa se describe mediante la expresión

$$F \Delta t = M \Delta v$$

donde el término de la izquierda es el impulso mecánico. El término de la derecha es el incremento del ímpetu que se produce en el aire. Si F iguala al peso, para sostener el insecto en el aire, se cumplirá

$$mg = \frac{m \Delta v}{\Delta t}$$

La masa de aire M se puede escribir también como el producto de su densidad ρ por el volumen de aire batido por el ala. Podemos aproximar este volumen de acuerdo con la relación

$$v = Az$$

donde A es el área del ala y z el arco que ésta recorre durante el batido. Si el insecto tiene dos alas,

$$M = 2\rho Az$$

Si suponemos que su movimiento es armónico con velocidad angular ω y amplitud z , podemos escribir la velocidad v como

$$v = \omega z$$

Así, siguiendo este modelo, el período o tiempo de cada batido es igual a $\Delta t = 2\pi/\omega$. Por tanto,

$$mg = \frac{Mv}{\Delta t} = \frac{2\rho Az\omega z}{2\pi/\omega} = \frac{\rho Az^2}{\pi}\omega^2$$

Para simplificar se puede suponer que $z^2 = A$, y se obtiene

$$\omega^2 = \frac{\pi mg}{\rho A^2}$$

La frecuencia f , relacionada con la frecuencia angular ω según $\omega = 2\pi f$, vale entonces

$$f = \left(\frac{mg}{4\pi\rho A^2} \right)^{1/2}$$

y sustituyendo valores se obtiene

$$f = \left(\frac{0,001 \text{ g} \times 981 \text{ cm s}^{-2}}{4\pi \times 0,0013 \text{ g cm}^{-3} \times (0,006 \text{ cm}^2)^2} \right)^{1/2} = 1291,54 \text{ s}^{-1}$$

Si se compara este resultado con los que se obtienen de las experiencias, se observa que es alrededor de cinco veces mayor. ¿A qué podemos atribuir esta discrepancia? Entre todas las aproximaciones que hemos realizado, la que puede dar lugar a una desviación mayor es aquella que supone que el volumen de aire batido por el ala, V_b , coincide con el volumen de aire puesto en movimiento, V_m . Así, si bien es lógico que V_m se tome proporcional a V_b , no lo es tanto suponer la igualdad.

Si se tiene en cuenta que las moléculas de aire interactúan entre sí y que forman un fluido viscoso y no un conjunto de partículas libres se obtiene que V_m es mayor que V_b , alcanzando a veces el valor $V_m = 25V_b$, que hace concordar los resultados del modelo con los experimentales.

1.3. Las fuerzas: interacciones fundamentales y fuerzas derivadas

La ecuación [14] estaría desprovista de sentido si no tuviésemos modo alguno de determinar las fuerzas. Así pues, esa ecuación, de carácter general, se debe complementar con ecuaciones más particulares referentes a los diversos tipos de fuerzas.

En la naturaleza observamos una gran variedad de fuerzas que, sin embargo, corresponden sólo a cuatro interacciones fundamentales: dos de ellas son de largo alcance (gravitatoria y electromagnética) y las dos restantes de muy corto alcance, por lo que sólo actúan a nivel nuclear (interacción fuerte e interacción débil). Se ha conseguido unificar en un formalismo único las fuerzas electromagnéticas y las interacciones débiles, y también estas dos con la interacción fuerte. La fuerza de la gravedad sigue siendo la que resulta más difícil de unificar en un formalismo común con las restantes.

La fuerza gravitatoria que se ejercen dos cuerpos de masas m y M entre sí viene dada por la ley de la gravitación universal de Newton, según la cual la fuerza F es atractiva, va en la dirección de la recta que une ambos cuerpos, y su módulo viene dado por

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad [18]$$

siendo r la distancia entre los centros de m y M . Aquí, G es la constante de gravitación universal $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

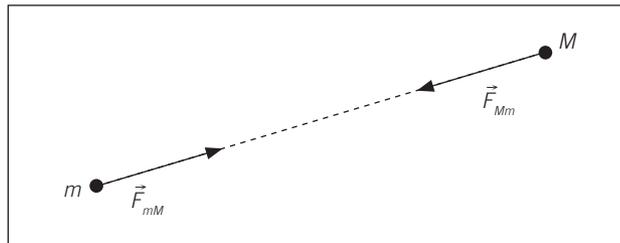


Figura 1.5. Atracción gravitatoria entre dos masas.

La ecuación [18], combinada con la [14], permitió describir con todo detalle los movimientos de los planetas, y significó la consolidación y el triunfo de la mecánica en el siglo XVII.

A continuación, se proponen algunos ejemplos en los que se utiliza esta importante ley.

Ejemplo 1.6.

Sabiendo que el radio de la Tierra es $R = 6,36 \times 10^6 \text{ m}$ y su masa $M = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$, calcúlese la aceleración de la gravedad cerca de la superficie terrestre.

Un cuerpo de masa m , situado a una altura h (supuesta pequeña frente a R), es atraído por la Tierra con una fuerza

$$F = G \frac{mM}{(R + h)^2} \approx G \frac{M}{R^2} m$$

Ahora bien, como el peso corresponde a $F = mg$, la relación anterior nos permite hallar g a partir de los valores de R , M y G . Al efectuar el cálculo obtenemos

$$g = G \frac{M}{R^2} = 6,67 \times 10^{-11} \frac{5,98 \times 10^{24}}{(6,36)^2 \times 10^{12}} = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

Ejemplo 1.7.

Un satélite describe una órbita circular de radio R_0 en torno a un planeta. El período de rotación T es constante. Hállese la relación entre el radio de la órbita R_0 y el período orbital T .

Un objeto describe un movimiento circular cuando sobre él actúa una aceleración centrípeta. En este ejemplo, la atracción gravitacional entre el satélite y el planeta es la causa de la aceleración centrípeta. Aplicando la segunda ley de la dinámica se puede escribir entonces

$$M_s a_c = M_s \frac{v_s^2}{R_0} = G \frac{M_s M_p}{R_0^2}$$

donde el subíndice s indica las variables del satélite y p las del planeta. El módulo de la velocidad del satélite es constante

$$v_s = \frac{2\pi R_0}{T}$$

pues describe una circunferencia de radio R_0 con período T . Sustituyendo la última expresión en la ecuación [10] se llega a la relación

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_p} R_0^3$$

Este resultado fue establecido en 1609 por Kepler (tercera ley de Kepler), a partir de observaciones experimentales: el cuadrado del período es proporcional al cubo del radio de la órbita.

No nos ocuparemos aquí de las otras interacciones fundamentales, que serán tratadas en el capítulo de Electricidad y Magnetismo, y en el de Radiactividad y Física Nuclear.

Las restantes fuerzas que observamos en la naturaleza pueden deducirse de la interacción electromagnética, básicamente mediante un procedimiento estadístico que tiene en cuenta la interacción entre un gran número de moléculas. No es este el lugar para dicha deducción, por lo cual nos limitaremos a mencionar algunas de las fuerzas derivadas más conocidas:

a) *Fuerza elástica.* Cuando un muelle, resorte o pieza de material elástico se estira una cierta longitud Δx más allá de su configuración de equilibrio, dicho muelle ejerce una fuerza que viene dada por la expresión:

$$F = -k \Delta x \quad [19]$$

donde k es una constante, denominada constante elástica, característica del material y la forma del muelle. Esta ley se conoce con el nombre de ley de Hooke, y tendremos ocasión de estudiarla en el capítulo de Elasticidad.

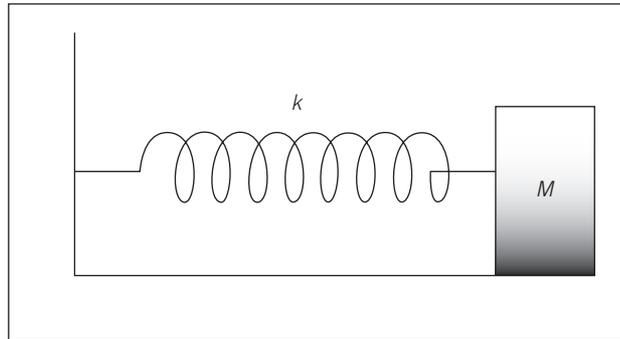


Figura 1.6. Fuerza sobre un muelle.

b) *Fuerza de fricción entre sólidos.* La fuerza de fricción o rozamiento entre un cuerpo y una superficie se opone siempre al movimiento, es independiente del área de contacto y de la velocidad relativa entre el cuerpo y la superficie —al menos, si ésta no es muy grande—, depende de la naturaleza de las superficies de contacto del cuerpo y de la superficie, y su módulo es proporcional a la fuerza de contacto entre ambos según la fórmula

$$F_r = \mu N \quad [20]$$

N es la componente normal a la superficie, reacción de la que el cuerpo ejerce sobre ésta, y μ es un coeficiente denominado coeficiente de rozamiento, que depende de las características de las superficies de contacto y que puede ser *estático* o *dinámico*, dependiendo de si éstas están en reposo o en movimiento relativo.

El coeficiente de rozamiento estático está relacionado con la fuerza necesaria para empezar a mover un cuerpo, el dinámico da razón de la fuerza que se opone al movimiento. (En general, el dinámico es menor que el estático. Además, el coeficiente de rozamiento dinámico suele depender de la velocidad relativa entre las superficies en contacto, pero a velocidades bajas se puede suponer constante.) Para disminuir los efectos del rozamiento sobre las superficies en contacto se suele usar un líquido lubricante. Este es, por ejemplo, el papel de los líquidos sinoviales en las articulaciones. La presencia de un líquido, sin embargo, hace que la fuerza de fricción dependa del área y de la velocidad relativa.

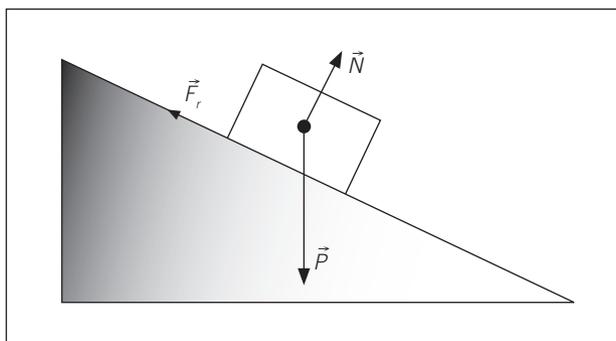


Figura 1.7. Fuerza de rozamiento dinámico.

Ejemplo 1.8.

Calcular la velocidad máxima con que un coche puede entrar en una curva dado el radio de curvatura r , el ángulo de peralte φ y el coeficiente de rozamiento μ entre los neumáticos y el asfalto.

Nos situamos en el sistema de referencia del coche. Sobre el coche actúan las siguientes fuerzas:

1. el peso mg
2. la fuerza centrífuga mv^2/r
3. la fuerza del asfalto sobre los neumáticos
4. la fuerza de contacto N del asfalto contra el coche

Descomponemos estas fuerzas en sus componentes tangencial y normal a la superficie:

1. componente tangencial $mg \operatorname{sen} \varphi$
normal $mg \operatorname{cos} \varphi$
2. componente tangencial $mv^2 \operatorname{cos} \varphi / r$
normal $mv^2 \operatorname{sen} \varphi / r$
3. componente tangencial μN
normal 0
4. componente tangencial 0
normal N

(Las direcciones de las fuerzas vienen indicadas en la Figura 1.8.)

En el balance de fuerzas tratamos por separado las componentes normales y las tangenciales. Tenemos así:

Balance de fuerzas normales

$$mg \operatorname{cos} \varphi + m \frac{v^2}{r} \operatorname{sen} \varphi - N = 0$$

Balance de fuerzas tangenciales

$$m \frac{v^2}{r} \cos \varphi - mg \sin \varphi - \mu N = 0$$

La primera ecuación nos proporciona el valor de N , que introducido en la segunda lleva a

$$m \frac{v^2}{r} \cos \varphi - mg \sin \varphi - \mu \left(mg \cos \varphi + m \frac{v^2}{r} \sin \varphi \right) = 0$$

De aquí llegamos fácilmente a la siguiente expresión para $v_{\text{máx}}^2$

$$v_{\text{máx}}^2 = gr \frac{\text{sen } \varphi + \mu \text{cos } \varphi}{\text{cos } \varphi - \mu \text{sen } \varphi}$$

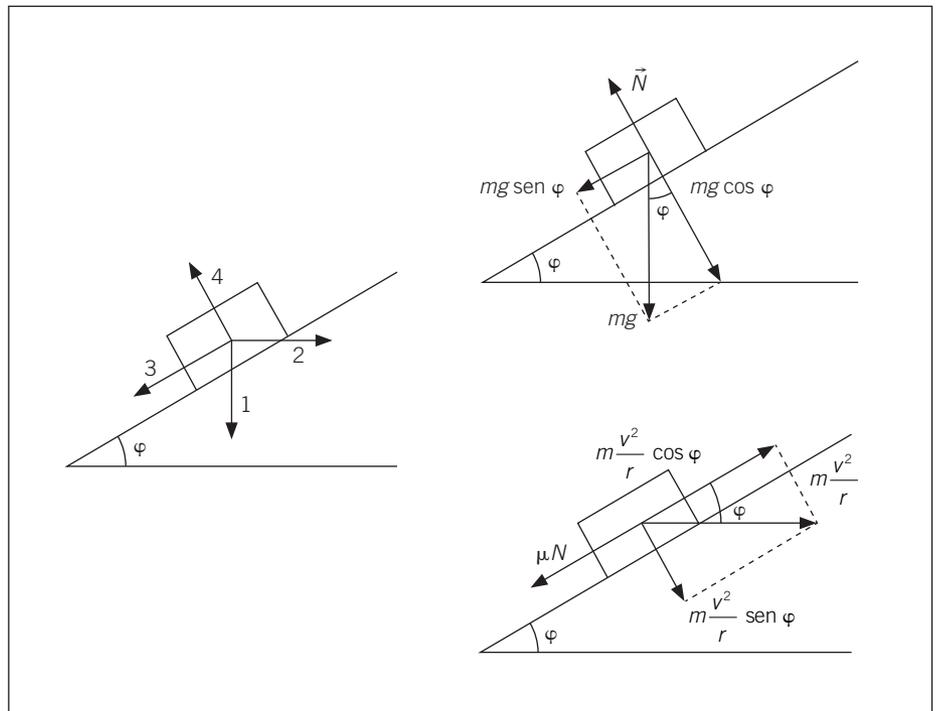


Figura 1.8. Fuerzas que intervienen en el Problema 1.8.

Si el coche va a una velocidad superior a $v_{\text{máx}}$, el rozamiento y el peso serán menores que la componente tangencial de la fuerza centrífuga, la cual hará que el coche se desplace lateralmente; es decir, derrape. Esta fórmula es la que aplicaría un ingeniero para fijar la limitación de velocidad en curva en una carretera, ya que conoce r y φ (características de la curva) y μ (característica de los neumáticos y del asfalto, para la cual se toma un valor indicativo).

Podemos ver que esta fórmula responde a la intuición que tenemos del fenómeno. Efectivamente:

1. Si aumenta r , $v_{\text{máx}}$ también aumenta. Es decir, en una curva abierta se puede ir más deprisa que en una curva cerrada.

2. Si μ aumenta, el numerador aumenta y el denominador disminuye. Es decir, con buenos neumáticos y asfalto en buenas condiciones (μ elevado) podemos ir a mayor velocidad que con neumáticos malos. En días de lluvia o humedad μ disminuye, y en consecuencia disminuye la velocidad con la que podemos entrar en la curva.

3. Si μ aumenta, también lo hace el numerador y disminuye el denominador de la fracción para ángulos pequeños. Así, la velocidad máxima, que en una curva sin peralte vale

$$v_{\text{máx}}^2 = \mu r g$$

aumenta con el ángulo de peralte φ si la curva tiene peralte. Si el ángulo φ no es muy grande, podemos aproximar $\sin \varphi \approx \varphi$ y $\cos \varphi \approx 1$ y, por tanto,

$$v_{\text{máx}}^2 = r g \frac{\varphi + \mu}{1 - \varphi \mu}$$

donde vemos que si μ o φ aumenta, $v_{\text{máx}}$ aumenta. Este resultado naturalmente no es extrapolable a ángulos grandes. Dados r y μ habrá un peralte óptimo, a partir del cual nos interesará no tanto la velocidad máxima sin derrapar, sino la velocidad mínima para que el coche no se deslice en razón de su propio peso.

c) *Fuerza de resistencia de un fluido a baja velocidad.* Un sólido que se mueve en el seno de un fluido viscoso experimenta una fuerza de resistencia que viene dada por la expresión

$$F = -\alpha v \quad [21]$$

con v la velocidad y α una constante que depende de la viscosidad del fluido y de la forma y dimensiones del objeto. En el capítulo dedicado a los fluidos estudiaremos con mayor profundidad este tipo de fuerzas.

Existen, además, otros tipos de fuerzas como las fuerzas de contacto, las fuerzas de adherencia, las fuerzas de resistencia en fluidos a alta velocidad, etcétera, algunas de las cuales aparecerán a lo largo del texto.

Antes de finalizar esta sección hemos de advertir que en un sistema no inercial aparecen fuerzas ficticias, es decir, fuerzas no reales que aparecen por el hecho de analizar el movimiento desde un sistema acelerado. En el movimiento circular, por ejemplo, un observador en un sistema inercial, es decir, en reposo respecto a un giro, ve que éste se mantiene porque actúa una fuerza centrípeta, que da lugar a la tensión de una cuerda; en cambio, un observador que gire con la cuerda advierte en ella una tensión que atribuye a una fuerza centrífuga.

En general, las trayectorias no son vistas del mismo modo desde sistemas inerciales y no inerciales. Esas diferencias pueden ser atribuidas a fuerzas ficticias. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.9.

Una persona se mueve sobre el borde de la plataforma de un tiovivo, y con el mismo sentido de giro. Usando la fuerza centrípeta, encontrar una expresión para la aceleración ficticia (de Coriolis) que siente la persona.

La velocidad total de la persona, vista desde un sistema inercial, es

$$v_t = v_{ni} + \omega \times r$$

donde v_{ni} es la velocidad que lleva respecto a la plataforma que gira (no inercial), ω la velocidad angular de la plataforma y r su radio. La aceleración centrípeta, vista desde un observador inercial, es

$$a_{ct} = \frac{v_t^2}{r} = \frac{v_{ni}^2}{r} + \omega^2 r + 2\omega v$$

Por tanto, el observador no inercial advierte la aceleración centrífuga debida a su propio movimiento, la del giro de la plataforma y otra suplementaria $2\omega v$ conocida como aceleración de Coriolis. (La fuerza correspondiente será estudiada con más detalle en el apartado dedicado al momento angular.)

1.4. Impulso y trabajo

Para calcular las consecuencias que produce sobre el movimiento de un objeto una fuerza que actúa durante un intervalo de tiempo a lo largo de un camino en el espacio, se calcula el *impulso*, que es la integral temporal de la fuerza en un cierto intervalo

$$\vec{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad [22]$$

y el *trabajo*, que es la integral espacial de la fuerza a lo largo de una cierta trayectoria

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(t) \cdot d\vec{r} \quad [23]$$

donde el vector $d\vec{r}$ indica la dirección de la trayectoria en cada punto. El impulso es un vector en tanto que el trabajo es un escalar. El punto entre \vec{F} y $d\vec{r}$ indica el producto escalar de estos dos vectores.

Es inmediato demostrar, según la ley de Newton [14], que

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad [24]$$

y que

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad [25]$$

La integral [24] contiene más información, ya que da la variación de cada una de las tres componentes de la velocidad. Sin embargo, como generalmente no se conoce \vec{F} en función del tiempo, sino de la posición, es más útil la segunda integral, aunque sólo contenga información con respecto al módulo de la velocidad. La magnitud

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad [26]$$

que aparece en el segundo miembro de [25] se denomina *energía cinética*, y es la energía que posee un cuerpo en virtud de su movimiento y de su masa. Apliquemos ahora estas relaciones a algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 1.10.

Un inui que recurre frecuentemente para su alimentación y la de su familia a la caza de osos polares y focas, dispara con su rifle desde un trineo sobre la nieve (sin rozamiento), balas de 0,013 kg con una velocidad de salida de 800 m s⁻¹ a) ¿Cuánto vale la cantidad de movimiento de cada bala? b) Si cada disparo dura 0,2 s, ¿qué fuerza media experimenta el hombre por cada bala que dispara? c) ¿Qué velocidad alcanza el trineo con el inui — la masa total es de 90 kg — después de disparar diez balas? (Despréciase la pérdida de masa de las balas disparadas.)

a) La cantidad de movimiento de una bala es

$$p = mv = 1,3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot 800 \text{ m s}^{-1} = 10,4 \text{ kg m s}^{-1}$$

b) Para hallar la fuerza media aplicamos la relación dada por la ecuación [24]

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt = mv_2 - mv_1 \Rightarrow F_m \Delta t = \Delta p$$

y, por tanto,

$$F_m = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{10,4}{0,2} = 52 \text{ N}$$

c) Puesto que la cantidad de movimiento de una bala es $p = 10,4 \text{ kg m s}^{-1}$, el de diez balas será simplemente $p(10 \text{ balas}) = 10 \times 10,4 = 104 \text{ kg m s}^{-1}$. Como la cantidad de movimiento se conserva y su valor inicial era cero, se debe cumplir que

$$p_{\text{total}} = 0 \Rightarrow p_b(10) + M_t v = 0$$

siendo M_t la masa del sistema trineo + hombre + rifle, $M_t = 90 \text{ kg}$. Por tanto, ese sistema alcanzará una velocidad

$$v = \frac{M_t}{p_b(10)} = \frac{104}{90} = 1,15 \text{ m s}^{-1}$$

1.5. Momento angular. Rotación

De la ecuación [16] se deduce que una condición necesaria para el equilibrio de traslación es que

$$\sum \vec{F}_i^{\text{ext}} = 0 \quad [27]$$

Dicha condición no es suficiente, ya que no impide un desequilibrio rotacional. En efecto, si suponemos una barra sobre la que actúa un par de fuerzas, como la de la Figura 1.9, vemos que aunque $\sum \vec{F} = 0$ y, por tanto, se da equilibrio traslacional, la barra gira en torno al punto central O y, en consecuencia, no hay equilibrio rotacional.

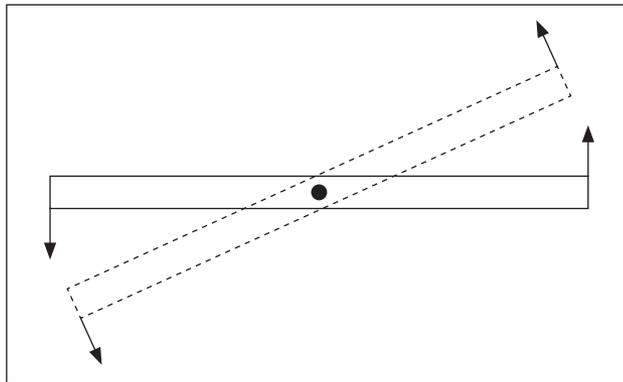


Figura 1.9. Pese a que la suma de las fuerzas exteriores es nula, la barra se acelera en un movimiento de rotación.

Para analizar los posibles movimientos de rotación hay que considerar no sólo las fuerzas, sino también el brazo de palanca con que actúan, es decir, sus momentos. En general, se define el *momento de un vector \vec{A}* respecto a un punto O como

$$\vec{M}_{AO} = \vec{r} \times \vec{A} \quad [28]$$

donde \times denota el producto vectorial y \vec{r} es el vector de posición del punto de aplicación del vector \vec{A} . Como caso particular, el *momento de una fuerza* es

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [29]$$

El momento de la cantidad de movimiento p es

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad [30]$$

y recibe también el nombre de *momento angular*.

Consideremos ahora un sistema formado por varios cuerpos. Su momento angular total vale

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_1^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad [31]$$

Y el momento total de las fuerzas externas se puede expresar como

$$\vec{M}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad [32]$$

Si las fuerzas entre los diversos cuerpos son centrales, es decir, se dirigen en la línea que une los centros de dichos cuerpos dos a dos, se tiene, a partir de la ecuación fundamental [16] y de la definición [31], que

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d(\sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i)}{dt} = \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \sum \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad [33]$$

Esos dos últimos términos pueden evaluarse sin dificultad: el primero es nulo, puesto que el vector $d\vec{r}_i/dt = \vec{v}_i$ tiene la misma dirección que \vec{p}_i y su producto vectorial se anula; si se aplica la ecuación fundamental de la dinámica al [14] segundo, se llega a la ecuación

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{M}_{\text{tot}}^{\text{ext}} \quad [34]$$

que indica que cuando el momento de las fuerzas externas no es nulo el momento angular varía en el tiempo; por el contrario, \vec{L} se conserva, es decir, se mantiene constante en el transcurso del tiempo. Esta relación se conoce como la ley de la *conservación del momento angular*.

Así, la ecuación

$$\frac{dL_{\text{tot}}}{dt} = M_{\text{tot}}^{\text{ext}} \quad [35]$$

viene a ser la expresión de la segunda ley de Newton en dinámica de rotación y \vec{M} y \vec{L} juegan respectivamente el mismo papel que el de la fuerza y el ímpetu en dinámica de traslación.

Siguiendo con esta semejanza, el módulo del momento angular \vec{L} de una partícula que gira en una trayectoria circular de radio r con velocidad v respecto al centro O se puede escribir como

$$L = rmv \quad [36]$$

Teniendo en cuenta que $v = \omega r$, con ω la velocidad angular, la expresión anterior queda

$$L = mr^2\omega \quad [37]$$

El producto mr^2 se denomina momento de inercia de la partícula respecto al punto O y es la magnitud «equivalente» en dinámica de rotación a la masa en dinámica de traslación. Para un conjunto de N partículas, el momento de inercia se escribe como

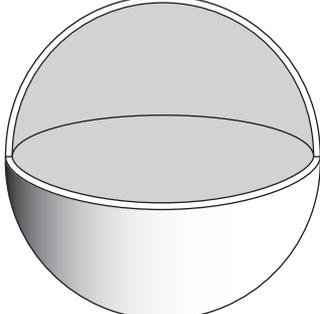
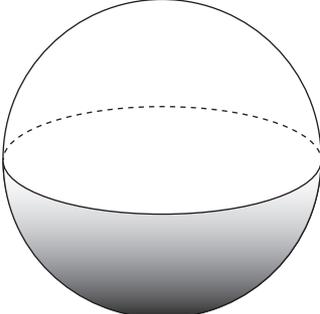
$$I = \sum_1^N m_i r_i^2 \quad [38]$$

y para los cuerpos que tengan una distribución continua de masa

$$I = \int r^2 dm \quad [39]$$

Nótese que el momento de inercia depende únicamente de la geometría del sistema y del eje de giro que se considere. En la Tabla 1.1 se recoge el valor del momento de inercia para distintas geometrías y ejes de giro.

Tabla 1.1.

<p>Esfera hueca (respecto a un diámetro)</p> 	<p>Cilindro hueco (respecto al eje de simetría)</p>  <p>$I = MR^2$</p>
<p>Esfera maciza (respecto a un diámetro)</p>  <p>$I = \frac{2}{3}MR^2$</p>	<p>Cilindro macizo (respecto al eje de simetría)</p>  <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p>
<p>$I = \frac{2}{5}MR^2$</p>	<p>Barra delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por el centro</p>  <p>$I = \frac{1}{12}ML^2$</p>

En términos de I , la relación [37] puede expresarse como

$$L = I\omega$$

Ejemplo 1.11.

Una estrella homogénea de radio R y masa M gira con velocidad angular ω . Sabemos que la estrella se contrae debido a las fuerzas gravitacionales inter-

nas siguiendo la ley $R = R_0(1 - Kt)$, donde K es una constante. Calcular cómo varía la velocidad angular de rotación en función del radio y del tiempo.

Suponemos que la estrella está muy alejada de cualquier objeto celeste, es decir, que únicamente está sometida a su propia atracción gravitacional. En consecuencia, se cumple el principio de conservación del momento angular, dado que al no actuar fuerzas externas, L , el momento angular, permanece constante.

El momento angular se puede escribir como

$$L = I\omega$$

donde I es el momento de inercia. Si la estrella tiene forma esférica, y según la Tabla 1.1, su momento de inercia es $I = (2/5)MR^2$, donde R es su radio. Si L es constante, se cumple

$$L = I_0\omega_0 = I\omega$$

donde I_0 y ω_0 son, respectivamente, el momento de inercia y la velocidad angular en el instante inicial e I y ω son las mismas magnitudes en un instante t cualquiera. A partir de la ecuación anterior

$$\omega = \frac{I_0}{I}\omega_0 = \frac{\frac{2}{5}MR_0^2}{\frac{2}{5}MR^2}\omega_0$$

y, por tanto, la dependencia de ω con el radio es $\omega = \frac{R_0^2}{R^2}\omega_0$. Cuanto más pequeño se haga R debido a la contracción gravitacional, mayor será ω .

Si queremos encontrar la dependencia temporal, sólo hay que sustituir R por su expresión en función del tiempo y se obtiene:

$$\omega = \frac{R_0^2}{R_0^2(1 - Kt)^2}\omega_0 = \frac{\omega_0}{(1 - Kt)^2}$$

Ahora estamos en condiciones de considerar de manera más detallada las fuerzas ficticias a las que aludimos al hablar de los sistemas no inerciales. Si un observador está en el centro de un tiovivo que gira y lanza una pelota hacia el borde de la plataforma, tiene que aplicar una fuerza suplementaria si quiere que la trayectoria de la bola descrita desde el tiovivo sea recta. Esta fuerza la ha de aplicar para compensar la fuerza de Coriolis. En efecto, cuando la pelota está a una distancia r del centro su momento angular es $L = mr^2\omega$; y a medida que su distancia al centro aumenta, L varía de acuerdo con la expresión

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(m\omega r^2)}{dt} = 2m\omega r v \quad [40]$$

Esa variación puede ser interpretada como proveniente del momento de una fuerza ficticia $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, si F es $F = 2m\omega v$. La forma exacta de la lla-

mada fuerza de Coriolis que aparece en sistemas no inerciales en rotación tiene la forma

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \quad [41]$$

donde \vec{v} es la velocidad del móvil en el sistema no inercial. Extendemos este análisis sencillo al caso más completo de los movimientos sobre una esfera en el ejemplo siguiente, de interés en meteorología.

Ejemplo 1.12.

Un objeto de masa m situado en un punto P con una latitud λ en el hemisferio Norte cae hacia la superficie terrestre. Se supone que P está muy próximo a la superficie (Fig. 1.10). Deseamos calcular la desviación respecto de la vertical local del punto P , en cada instante de tiempo, debida a la rotación de la Tierra.

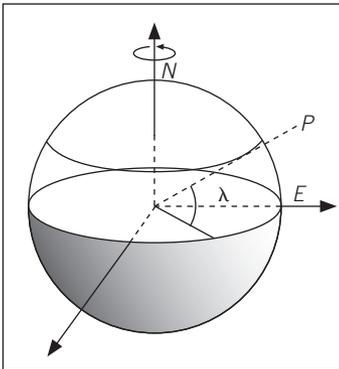


Figura 1.10.

Cuando $t = 0$, en el instante en que se suelta el objeto, éste gira solidario a la Tierra con velocidad angular ω . Suponemos que su distancia al centro de la Tierra en $t = 0$ es $r + \Delta r$ y en un instante posterior, $t > 0$, se halla a una distancia r del centro de la Tierra. Vamos a comparar los momentos angulares en ambos instantes de tiempo.

El momento angular L de una partícula se puede expresar como el producto del momento de inercia I por la velocidad angular ω . Por tanto, si se conserva el momento angular, ya que el objeto no está sometido a ningún momento externo, se cumple

$$I(0)\omega = I(t)\omega(t)$$

El momento de inercia en el instante inicial vale

$$I(0) = m[(r + \Delta r) \cos \lambda]^2$$

ya que $(r + \Delta r) \cos \lambda$ es la distancia al eje de giro, es decir, al eje terrestre. En el instante t , $I(t)$ se escribe como

$$I(t) = mr^2 \cos^2 \lambda$$

Aplicando la conservación del momento angular se obtiene

$$mr^2 \cos^2 \lambda \omega(t) = m[(r + \Delta r) \cos \lambda]^2 \omega$$

es decir,

$$\omega(t) = \omega \left(1 + \frac{\Delta r}{r} \right)^2$$

La fuerza de Coriolis es responsable de que en el hemisferio Norte los cuerpos en movimiento sean desviados hacia la derecha de su movimiento. Esto explica también que los vientos que fluyen hacia las borrascas, zonas de bajas presiones, giren en el sentido contrario de las agujas del reloj, mientras los vientos que se mueven alrededor de los anticiclones (altas pre-

siones) tiendan a arremolinarsen en el sentido de las agujas del reloj. (Estos sentidos se invierten en el hemisferio Sur.)

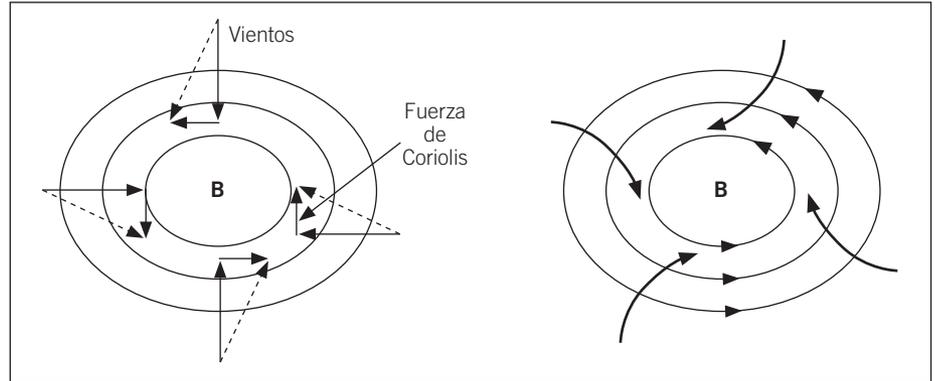


Figura 1.11. Sentido del movimiento de una borrasca en el hemisferio Norte.

Consideremos ahora la expresión de la energía cinética de rotación. Si nos fijamos de nuevo en las expresiones [4], [26] y [38], podemos deducir la expresión siguiente:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2 \omega^2) = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad [42]$$

Con ello se comprueba que la analogía entre rotación y traslación a la que hemos venido aludiendo en este apartado se cumple también para la energía cinética.

1.6. Biomecánica

Teniendo en cuenta las ecuaciones [27] y [34] se concluye que la condición para que en un sistema no se produzca una aceleración angular es $\vec{M}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = 0$, pues de lo contrario L varía en el tiempo, y con él la velocidad angular ω .

Se deduce entonces que las condiciones para que un cuerpo se halle en equilibrio son

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_i^{\text{ext}} &= 0 \text{ equilibrio traslacional} \\ \sum \vec{M}_i^{\text{ext}} &= 0 \text{ equilibrio rotacional} \end{aligned} \quad [43]$$

Estas condiciones son muy útiles para el estudio de las configuraciones estáticas, frecuentes en biomecánica. En particular, la segunda es la forma general de la ley de la palanca. Veamos ahora unas aplicaciones de estas condiciones a varios ejemplos.

Ejemplo 1.13.

La tensión máxima de la fibra lisa de los músculos aductores de los moluscos bivalvos es de 80 N cm^{-2} . Supongamos que la distancia de inserción de los músculos hasta la articulación de las valvas es de $0,5 \text{ cm}$ y que la longitud de las valvas es de 5 cm . ¿Qué fuerza tendremos que hacer para abrir un molusco si el músculo correspondiente es un cilindro de 2 mm de radio?

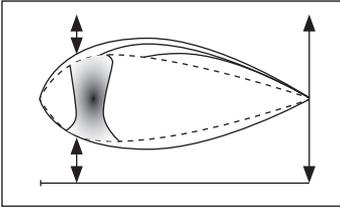


Figura 1.12. Ejemplo 1.13.

Si la tensión máxima de los músculos aductores es de 80 N cm^{-2} y el músculo es un cilindro de 2 mm de radio, la fuerza máxima que pueden realizar estos músculos es

$$F_m = 80 \text{ N cm}^{-2} \pi (0,2)^2 \text{ cm}^2 = 10,05 \text{ N}$$

Esta fuerza realizará un momento máximo

$$M_{\text{máx}} = F_m \cdot d = 10,05 \text{ N} \times 0,5 \text{ cm} = 5,03 \text{ N cm}$$

Por tanto, para abrir un molusco tal como el descrito en este ejercicio, habrá que ejercer un momento de $5,03 \text{ N cm}$. Como al abrir el molusco aplicamos una fuerza en los extremos de las valvas que están a 5 cm de la articulación, si ejercemos una fuerza F_a , el momento de ésta es $F_a d_a$ y ha de ser igual a $5,03 \text{ N cm}$. Por tanto,

$$F_a = \frac{M_{\text{máx}}}{d_a} = \frac{5,03 \text{ N cm}}{5 \text{ cm}} = 1,01 \text{ N}$$

Ejemplo 1.14.

El músculo deltoides sube el brazo hasta una posición horizontal (Fig. 1.13). El músculo está fijado a 15 cm de la articulación y forma un ángulo de 18° con el húmero. Suponiendo que el peso del brazo es de 40 N y que se puede aplicar todo él en el centro de masas, situado a 35 cm de la articulación, calcular la fuerza \vec{R} que hace la articulación, el ángulo que dicha fuerza forma con el húmero cuando el brazo está horizontal y la tensión \vec{T} que realiza el músculo.

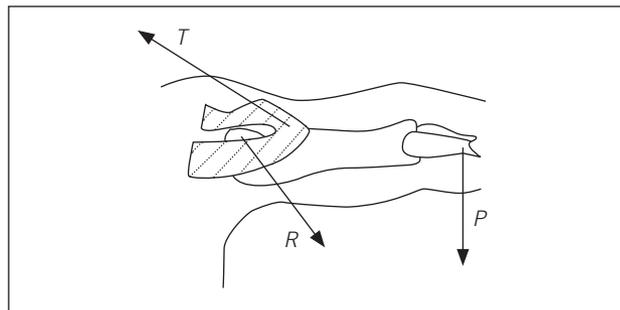


Figura 1.13. Ejemplo 1.14.

Podemos representar el húmero, el deltoides y la articulación esquemáticamente (Fig. 1.14).

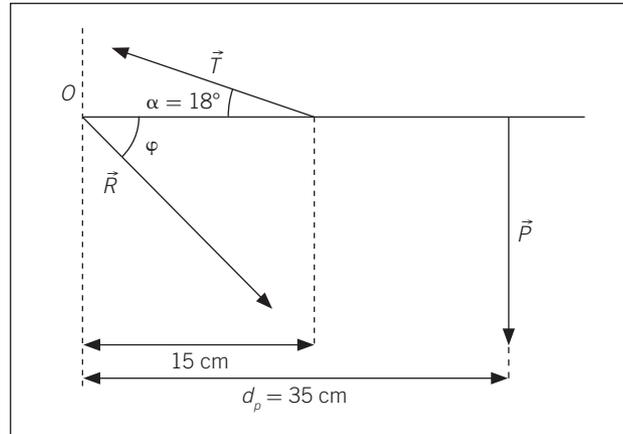


Figura 1.14. Ejemplo 1.14.

La elección de la dirección de \vec{R} es totalmente arbitraria. Los resultados del ejercicio nos dirán si la elección ha sido hecha en la dirección correcta. Aplicamos las condiciones [43] de equilibrio mecánico

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F} &= 0 \\ \Sigma \vec{M} &= 0\end{aligned}$$

La suma de fuerzas produce dos ecuaciones, una en cada dirección: la vertical y la horizontal:

$$\begin{aligned}T \operatorname{sen} \alpha - R \operatorname{sen} \varphi - P &= 0 \\ T \operatorname{cos} \alpha - R \operatorname{cos} \varphi &= 0\end{aligned}$$

El cálculo de los momentos lo realizamos respecto al punto O :

$$T d_T \operatorname{sen} \alpha - P d_p = 0$$

donde d_T es la distancia desde el punto de aplicación de T al punto O y d_p la misma magnitud pero para P .

De esta última ecuación se puede calcular el valor de T

$$T = \frac{P d_p}{d_T \operatorname{sen} \alpha} = \frac{40\text{N} \times 35 \text{ cm}}{15 \text{ cm} \operatorname{sen} 18} = 302,03\text{N}$$

Por otra parte, sustituyendo en las dos ecuaciones anteriores el valor de T podemos calcular el valor de R y de φ . En efecto,

$$\begin{aligned}R \operatorname{sen} \varphi &= T \operatorname{sen} \alpha - P \\ R \operatorname{cos} \varphi &= T \operatorname{cos} \alpha\end{aligned}$$

Dividiendo miembro a miembro estas dos ecuaciones resulta

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T \operatorname{sen} \alpha - P}{T \cos \alpha} = \frac{53,33}{287,25} = 0,19 \Rightarrow \varphi = 10,51^\circ$$

y el correspondiente valor de R

$$R = \frac{T \cos \alpha}{\cos \varphi} = \frac{302,03 \times \cos 18}{\cos 10,51} = 292,15N$$

Los resultados de este ejercicio nos muestran que el músculo analizado como máquina física tiene una efectividad muy pequeña, ya que para levantar $40N$ de peso, el músculo deltoides ha de realizar una fuerza de $302,03N$ y la articulación está sometida a una fuerza de $292,15N$, es decir, prácticamente están sometidos a una fuerza ocho veces mayor que el peso que han de levantar. A pesar de esto, la articulación está provista de una movilidad muy grande, que no se habría conseguido si el músculo estuviera a una distancia mayor de la articulación y por consiguiente gozara de una ventaja mecánica mayor.

Ejemplo 1.15.

Cuando una persona está de pie, los huesos de la pierna están distribuidos tal como se ve en la Figura 1.15. \vec{F}_a es la fuerza que realizan los músculos aductores, \vec{R} la fuerza que realiza el ilion sobre la cabeza del fémur, \vec{P}_c el peso de la pierna y \vec{N} la fuerza que ejerce el suelo sobre la pierna. Si la persona es de 85 kg , la pierna tiene una masa de 10 kg y el ángulo α vale 60° , calcular \vec{F}_a , \vec{R} y φ .

Para que un sistema esté en equilibrio se han de cumplir las condiciones [43] de equilibrio traslacional y rotacional, es decir, que la suma de todas las fuerzas y de todos los momentos de las fuerzas sea 0.

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= 0 \\ \Sigma \vec{M} &= 0 \end{aligned}$$

En este caso suponemos dos ejes, uno vertical y otro horizontal, y calculamos momentos respecto del punto O . Las ecuaciones para el equilibrio de fuerzas son

$$\begin{aligned} F_a \cos \alpha - R \cos \varphi &= 0 \\ F_a \operatorname{sen} \alpha + N - R \operatorname{sen} \varphi - P_c &= 0 \end{aligned}$$

y la ecuación de los momentos respecto al punto O

$$F_a d_{F_a} \operatorname{sen} \alpha + P_c d_c - N d_N = 0$$

donde d_{F_a} , d_{P_c} y d_N son las distancias de \vec{F}_a , \vec{P}_c y \vec{N} a la vertical de O , respectivamente.

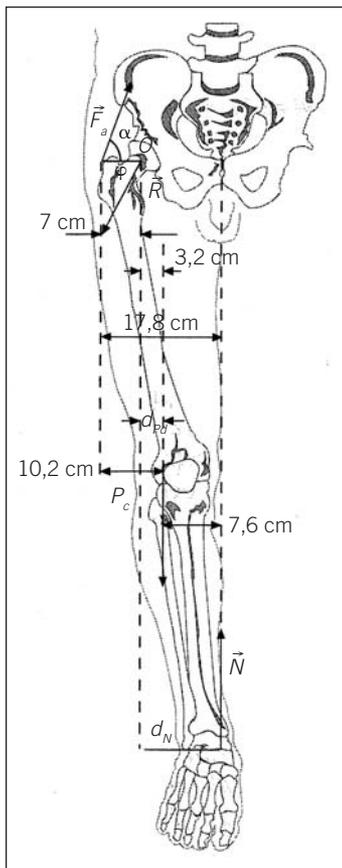


Figura 1.15.

En las tres ecuaciones las magnitudes conocidas son α , N , P_c y las incógnitas F_a , R y φ . El valor de α es de 60° , el de P_c

$$P_c = 10 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m s}^{-2} = 98,1N$$

y el de N , la mitad del peso de la persona

$$N = 42,5 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m s}^{-2} = 416,9N$$

A partir de la ecuación para los momentos resulta

$$F_a = \frac{N d_N - P_c d_c}{d_{F_a} \sin \alpha} = \frac{416,9N \times 10,8 \text{ cm} - 98,1N \times 3,2 \text{ cm}}{7 \text{ cm} \sin 60} = 690,98N$$

Conocido F_a , reordenando y dividiendo entre sí las dos primeras ecuaciones resulta

$$\text{tg } \varphi = \frac{N - P_c + F_a \sin \alpha}{F_a \cos \alpha} = \frac{416,9 - 98,1 + 690,98 \sin 60}{690,98 \cos 60} = 2,65$$

y, por tanto, $\varphi = 69,35^\circ$.

El valor correspondiente de R se obtiene ahora fácilmente:

$$R = 980,12N$$

Respecto a la fuerza R , se han realizado numerosos estudios anatómicos en los que se confirma que R actúa directamente según el eje de la cabeza del fémur. Si se examina la estructura del hueso mediante rayos X, se encuentra que está compuesto de una red denominada *trabéculas mediales*. Las radiografías muestran que los ejes de esta red están dispuestos de forma que van en la dirección de la fuerza R . Esta observación sugiere claramente que el crecimiento del hueso está influido por la fuerza que se le aplica. En consecuencia, lesiones prolongadas en los músculos aductores de una pierna, al afectar el equilibrio de fuerzas y modificar los valores y la distribución de R y F_a , pueden modificar el crecimiento de la cabeza del fémur.

Ejemplo 1.16.

La pierna en la posición de la Figura 1.16 se mantiene en equilibrio gracias a la acción del ligamento patelar. A partir de las condiciones de equilibrio, determinar la tensión T del ligamento y el valor y la dirección de la fuerza R . Tomar como datos: masa de la persona, 90 kg; masa de la pierna, 9 kg; $\alpha = 40^\circ$. (Supóngase que T actúa en un punto situado en la misma vertical del punto donde actúa la fuerza R .)

Al igual que en los problemas anteriores, debemos aplicar las condiciones de equilibrio mecánico. El valor de N es la mitad del peso de la persona

$$N = 45 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m s}^{-2} = 441,45N$$

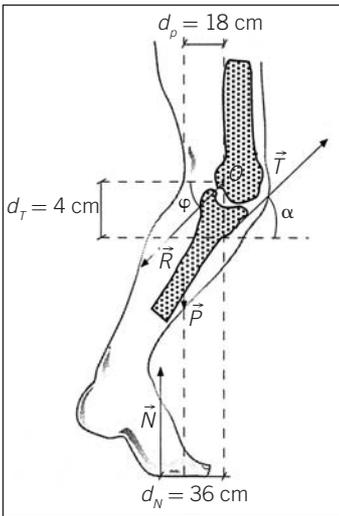


Figura 1.16.

P , el peso de la pierna, será

$$P = 9 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m s}^{-2} = 88,29 \text{ N}$$

Las condiciones de equilibrio de fuerzas comportan las siguientes ecuaciones:

$$T \cos \alpha - R \cos \varphi = 0$$

$$T \sin \alpha + N - R \sin \varphi - P = 0$$

y los momentos respecto al punto O

$$T d_T \cos \alpha + P d_p - N d_N = 0$$

De donde se obtiene

$$T = \frac{N d_N + P d_p}{d_T \cos \alpha} = \frac{441,45 \text{ N} \times 36 \text{ cm} - 88,29 \text{ N} \times 18}{4 \text{ cm} \cos 40} = 4667,80 \text{ N}$$

y al sustituir el valor de T y dividir las dos ecuaciones para el equilibrio de fuerzas se llega a

$$\text{tg } \varphi = \frac{T \sin \alpha + N - P}{T \cos \alpha} = \frac{4667,80 \text{ N} \sin 40 + 441,45 \text{ N} - 88,29 \text{ N}}{4667,80 \text{ N} \cos 40} = 0,94$$

con lo que $\varphi = 43,16^\circ$.

El valor correspondiente de R es

$$R = \frac{T \cos \alpha}{\cos \varphi} = \frac{4667,80 \text{ N} \cos 40}{\cos 43,16} = 4902,28 \text{ N}$$

Ejemplo 1.17

La Figura 1.17 muestra las fuerzas ejercidas por el suelo y por el tendón de Aquiles de una persona de 90 kg cuando está agachada. La fuerza de contacto ejercida por la tibia actúa en el punto O . a) Determinar el módulo de la fuerza que realiza el tendón de Aquiles. b) El módulo y la dirección de la fuerza de contacto.

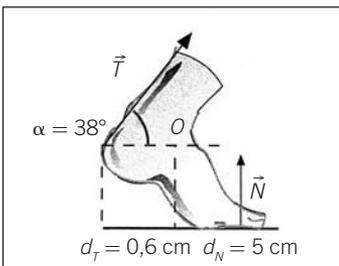


Figura 1.17.

Podemos representar este sistema mediante el siguiente esquema:

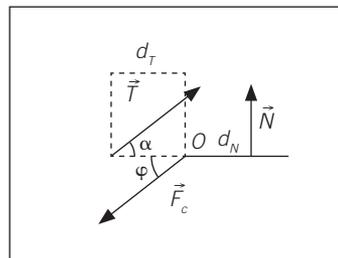


Figura 1.18.

Las condiciones de equilibrio mecánico, según hemos visto en los problemas anteriores, son:

$$\begin{aligned}T \cos \alpha - F_c \cos \varphi &= 0 \\T \sin \alpha + N - F_c \sin \varphi &= 0 \\T d_T \sin \alpha - N d_N &= 0\end{aligned}$$

donde en la última ecuación los momentos se calculan respecto del punto O .

El valor de N es la mitad del peso de la persona

$$N = 45 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m s}^{-2} = 441,45N$$

Al igual que en los ejemplos anteriores se obtiene el valor de T

$$T = \frac{N d_N}{d_T \sin \alpha} = 5975,28N$$

y al dividir entre sí las otras ecuaciones y sustituir el valor de T se obtiene

$$\text{tg } \varphi = \frac{N + T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{441,45N + 5975,28N \sin 38}{5975,28N \cos 38} = 0,88 \Rightarrow \varphi = 41,19^\circ$$

y, por tanto,

$$F_c = \frac{T \cos \alpha}{\cos \varphi} = \frac{5975,28N \cos 38}{\cos 41,19} = 6256,74N$$

1.7. Nanomecánica de motores moleculares

El estudio de los motores moleculares de las células es un campo de investigación de la biofísica. De hecho, la mayoría de los enzimas podrían ser considerados como motores, pero aquí nos referiremos tan sólo a algunos motores concretos. La quinesina, la dineina y la miosina son motores lineales, que se desplazan a lo largo de filamentos –microtúbulos, los dos primeros, y actina, el tercero– y arrastran macromoléculas o pequeñas vacuolas, como si se tratase de pequeños camiones en miniatura, aunque sometidos al huracán de las fluctuaciones térmicas, que resultan grandes a escala molecular pero que no trataremos aquí. Los motores moleculares son especialmente importantes en las células eucarióticas, que son considerablemente mayores que las procarióticas. En estas últimas, el transporte molecular es básicamente de tipo browniano, es decir, es debido a la agitación térmica molecular completamente desordenada. Este mecanismo se hace más ineficiente cuanto mayor es el sistema, ya que el intervalo típico que una molécula emplea en recorrer un camino es proporcional al cuadrado de la longitud del camino; por ello, en una célula eucariótica diez veces mayor que una célula procariótica, el intervalo típico de transporte resultaría demasiado lento e ineficaz. Por eso, entre las importantes modificaciones que fueron necesarias para

pasar de las células procarióticas a las eucarióticas —probablemente por simbiosis de diversas células procarióticas— se cuenta el desarrollo de algunos motores moleculares como la quinesina y la dineina. Los motores de miosina-actina se hallan en abundancia en el tejido muscular, y producen un deslizamiento relativo entre los filamentos de actina y miosina, que conduce a la contracción muscular. Los diversos motores mencionados juegan también un papel considerable en los mecanismos de la mitosis o reproducción celular: por un lado, hacen que los cromosomas duplicados en el plano ecuatorial de la célula que se está dividiendo se vayan desplazando cada uno hacia el centrómero correspondiente donde se formarán los núcleos de las células hijas respectivas; por otro lado, una vez los cromosomas se han agrupado en los núcleos de las células hijas, motores de miosina-actina adheridos a la pared interna de la membrana celular producen en ésta una estricción o estrangulamiento de la zona ecuatorial de la célula, produciéndose así la separación de las células hijas, en la etapa denominada telofase. El estudio de estos fenómenos ha dado origen a un gran interés por la mecánica a escala celular, que ha sido posible gracias al desarrollo de nuevas técnicas de observación y de medida. Los motores funcionan cíclicamente y los principales cambios configuracionales del ciclo han sido bastante bien identificados mediante radiación sincrotrón.

Al expresar las distancias, velocidades, fuerzas y energías que intervienen en estos motores es conveniente utilizar los nanómetros ($\text{nm} = 10^{-9} \text{ m}$) y los piconewton ($\text{pN} = 10^{-12} \text{ N}$). Además, aunque no sea una unidad estándar del sistema internacional, resulta útil expresar las energías en términos de la energía liberada por la hidrólisis de una molécula de ATP, que vale aproximadamente $8,2 \cdot 10^{-20} \text{ J}$, un valor indicativo ya que, en estricto rigor, la energía liberada depende de las concentraciones relativas de ATP, ADP y fosfato inorgánico, y de la distancia al equilibrio. Sin embargo, como los motores que consideramos consumen ATP como combustible, es clarificador usar esta magnitud como unidad energética metabólica. A continuación presentamos algunos ejemplos ilustrativos de estos motores moleculares, que nos ayudarán a estimar el orden de magnitud de velocidades, fuerzas y energías que intervienen.

Ejemplo 1.18.

La fuerza típica que ejerce un motor de quinesina es de 8 pN, y su velocidad típica es de unos 800 nm s⁻¹. a) ¿Cuántas moléculas de ATP debería consumir por unidad de tiempo el motor? b) ¿Y para recorrer 1 micra de longitud? Suponer que el rendimiento del motor es aproximadamente la unidad.

Recordemos que

$$\text{Potencia} = \text{Fuerza} \cdot \text{velocidad} = (8 \cdot 10^{-12} \text{ N}) \cdot (800 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}) = 6,4 \cdot 10^{-18} \text{ W}$$

a) El consumo de ATP por unidad de tiempo en el caso de rendimiento unidad será pues

$$\text{Consumo/tiempo} = (6,4 \cdot 10^{-18} \text{ W}/8,2 \cdot 10^{-20} \text{ J/molécula ATP}) = 78 \text{ moléculas ATP/s}$$

b) Para recorrer una micra tarda

$$\text{Tiempo} = \text{espacio/velocidad} = 10^{-6} \text{ m}/800 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-1} = 1,25 \text{ s}$$

Al multiplicar este tiempo por el consumo anterior tenemos

$$\text{Consumo} = (78 \text{ moléculas ATP s}^{-1})(1,25 \text{ s}) = 97,5 \text{ moléculas de ATP}$$

Obsérvese que al expresar los valores en moléculas de ATP el resultado tiene un interés biológico mucho más intuitivo e inmediato que al expresarlos en Joules o en Watios.

Ejemplo 1.19.

La fuerza típica máxima de un motor de miosina-actina de los que se encuentran en los músculos es 5 pN. ¿Cuántos motores debe tener un músculo que puede levantar, como máximo, un peso de 50 kg?

Recuérdese que un peso de 50 kg corresponde a $50 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m s}^{-2} = 500 \text{ N}$. El número de motores del músculo será pues

$$\begin{aligned} \text{Número de motores} &= \text{Peso máximo}/(\text{Fuerza máxima por motor}) = \\ &= 500\text{N}/(5 \cdot 10^{-12} \text{ N}) = 10^{14} \text{ motores} \end{aligned}$$

Este sencillo cálculo ayuda a hacernos una idea de los órdenes de magnitud del número de motores en los músculos.

Otro tipo de motores celulares son motores rotatorios: el motor de los flagelos bacterianos, la ATP-sintetasa F_0 - F_1 de las membranas internas de las mitocondrias, o el motor que introduce el DNA en las cápsidas de los virus. Los flagelos bacterianos tienen estructura helicoidal y giran como una hélice, gracias a la rotación del motor de su base, que está inserto en la membrana celular y que obtiene su energía del flujo de protones que lo atraviesan, entrando hacia la célula, cuyo interior tiene un potencial eléctrico menor que el del exterior. El flagelo gira un rato en un sentido dextrógiro y hace avanzar la célula en línea prácticamente recta; después, gira en sentido opuesto durante un breve período, durante el cual los flagelos se desordenan y la célula gira sobre sí misma sin avanzar. Al volver a girar en el sentido dextrógiro, la célula vuelve a avanzar, pero en una dirección que no era la original. Este procedimiento que combina trayectorias rectilíneas con cambios aleatorios de dirección permite a la célula explorar más minuciosamente su entorno en busca de nutrientes. Además, la duración de la rotación en el sentido impulsor es más larga si la concentración de nutrientes crece a lo largo del trayecto, lo cual optimiza el movimiento. También la ATP-sintetasa mitocondrial F_0 - F_1 puede girar en los dos sentidos. En un caso, la ATP-sintetasa es atravesada por protones que se dirigen de mayor a menor potencial eléctrico y, con la energía liberada por éstos, gira en un cierto sentido y produce ATP a partir de ADP y fosfato inorgánico (fosforilación). En otros casos, puede ser la hidrólisis del ATP la que suministre

energía al motor y lo haga girar, y sea éste el que tome protones de una zona de bajo potencial eléctrico y los transporte a una zona de potencial eléctrico elevado, proceso que se conoce como transporte activo. Mediante técnicas basadas en pinzas ópticas se han podido determinar con precisión aceptable los valores de las fuerzas implicadas.

Un tercer tipo de motores son las bombas moleculares que bombean iones a través de membranas externas o internas. Destacan las bombas de protones, las de sodio-potasio y las de calcio. Las primeras juegan un papel importante en la fosforilación oxidativa o fotosintética, en las mitocondrias o los cloroplastos, respectivamente. La segunda juega un papel relevante en las células animales, y especialmente en los axones de las neuronas; las bombas de calcio desempeñan un papel de primer orden en los músculos. Los estudiaremos con mayor detalle al hablar de membranas y de electricidad. Otro tipo de motores son las enzimas que abren, leen y duplican el ADN, como las polimerasas y girasas.

Ejemplo 1.20.

La velocidad típica de una DNA polimerasa es de 100 pares de bases por segundo (la separación entre pares de bases consecutivos en el ADN vale 0,34 nm). La fuerza típica que ejerce la polimerasa vale unos 35 pN. ¿Qué potencia consume la DNA polimerasa, en vatios y en moléculas de ATP por segundo?

Este ejercicio es muy parecido al que hemos hecho anteriormente, pero es interesante hacerlo para comparar máquinas y consumos. Tendremos

$$\begin{aligned} \text{Potencia} &= \text{Fuerza} \cdot \text{velocidad} = (35 \cdot 10^{-12} \text{ N})(100 \cdot 0,34 \cdot 10^{-9} \text{ m}) = \\ &= 1,19 \cdot 10^{-18} \text{ W} \end{aligned}$$

Expresado en moléculas de ATP, el consumo valdrá

$$\begin{aligned} \text{Consumo/tiempo} &= (1,19 \cdot 10^{-18} \text{ W}/8,2 \cdot 10^{-20} \text{ J/molécula ATP}) = \\ &= 14 \text{ moléculas ATP/s} \end{aligned}$$

1.8. Conservación de la energía mecánica

La ecuación de conservación o balance de la energía mecánica es la base de la ley, más general, de conservación de la energía. Esta última ley es de gran importancia conceptual y práctica, y será estudiada en el capítulo de Termodinámica. Aquí tratamos, pues, únicamente la ley de la conservación de la energía mecánica.

Vimos en [23] y [25] que el trabajo efectuado sobre un cuerpo entre dos posiciones 1 y 2 es igual al incremento de su energía cinética; es decir:

$$W_{12} = E_{c_2} - E_{c_1} \quad [44]$$

Este resultado se conoce como teorema trabajo-energía, donde W_{12} es el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Cabe distinguir dos

tipos de fuerzas: las conservativas y las no conservativas. La diferencia entre ambas estriba en el hecho de que el trabajo realizado por las primeras entre dos puntos cualesquiera 1 y 2 es independiente del camino seguido, mientras que para las segundas depende del camino.

En el caso de fuerzas conservativas, es posible definir la *energía potencial* como

$$W_{12} = U_1 - U_2 \quad [45]$$

es decir, la energía potencial en el punto 2 es igual a la de 1, menos el trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo para ir de uno a otro punto. Veamos unos cuantos ejemplos típicos.

a) *Energía potencial elástica*: El sistema está constituido por el muelle y el objeto que estudiamos. Al desplazar el objeto desde x_1 hasta x_2 , el trabajo realizado por la fuerza elástica es

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{elás}} dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} \quad [46]$$

por lo cual, según la definición [45], tenemos

$$U_1 - U_2 = k \frac{x_1^2}{2} - k \frac{x_2^2}{2} \quad [47]$$

y, por consiguiente, la energía potencial elástica es

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad [48]$$

b) *Energía potencial gravitatoria* (baja altura): El sistema que ahora vamos a considerar está constituido por la Tierra y un cuerpo determinado. Al subir el cuerpo desde la altura h_1 a una altura h_2 , el trabajo efectuado por la fuerza de la gravedad es

$$W_{12} = mg(h_1 - h_2) \quad [49]$$

por lo cual, y según la definición [45], se tiene

$$U = mgh \quad [50]$$

c) *Energía potencial gravitatoria* (a nivel planetario): El sistema considerado está formado por un planeta de masa M y un cuerpo de masa m . No podemos interpretar este problema según lo tratado en b) ya que g no es constante. Al alejarse un cuerpo del campo gravitatorio del planeta desde una distancia R_1 hasta una distancia R_2 , el trabajo realizado por la fuerza gravitatorio es

$$W_{12} = -GMm \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad [51]$$

con lo cual, según la definición [28], tenemos

$$U_1 - U_2 = -GMm \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad [52]$$

y, por consiguiente, la energía potencial gravitatoria viene dada

$$U = -G \frac{Mm}{R} \quad [53]$$

De lo visto hasta aquí se puede concluir que la energía potencial es la energía que posee un cuerpo en virtud de su posición en un campo de fuerzas.

Como se demostró en el Ejemplo 1.6, se puede deducir la aceleración de la gravedad a partir de la ley de la gravitación universal. Análogamente, se puede deducir la energía potencial gravitatoria a partir de la expresión correspondiente al nivel planetario. Lo demostramos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.21

Dedúzcase la expresión de la energía potencial gravitatoria a baja altura [50], a partir de la forma encontrada a nivel planetario (ecuación [53]).

La diferencia de la energía potencial de un objeto de masa m , a una altura h (pequeña respecto al radio terrestre) sobre la superficie de la Tierra y en el radio terrestre, viene dada por

$$U_h - U_0 = -GM_T m \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right)$$

donde M_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra, respectivamente. Como $h \ll R_T$, la primera fracción se puede desarrollar (en serie de Taylor) hasta primer orden en la forma

$$\frac{1}{R_T + h} = \frac{1}{R_T(1 + h/R_T)} \approx \frac{1}{R_T} \left(1 - \frac{h}{R_T} \right)$$

Si introducimos este resultado en la ecuación anterior y tomamos la superficie terrestre como origen de potencial ($U_0 = 0$) y tenemos en cuenta la expresión del Ejemplo 1.6 que relaciona la aceleración de la gravedad con los parámetros para la Tierra, llegamos a

$$U_h = m \frac{GM_T}{R_T^2} h = mgh$$

que es la expresión [50].

Consideremos de nuevo la relación entre trabajo y energía potencial. La ecuación [45] indica que el trabajo efectuado por las fuerzas conservativas es igual a la diferencia de energías potenciales, y relacionando este resultado con la expresión [44] del teorema trabajo-energía resulta

$$E_{c2} - E_{c1} = W_{12} = U_1 - U_2 \quad [54]$$

La *energía mecánica* se define como la suma de la energía cinética (dependiente de la velocidad) más la energía potencial (dependiente de la posición). Según [54], si todas las fuerzas son conservativas, se conserva la energía mecánica. Esta no se conservará, en cambio, si actúan fuerzas disipativas (rozamiento, resistencia), en cuyo caso [44] nos llevará a

$$(U_2 + E_{c2}) - (U_1 + E_{c1}) = W'_{12} \quad [55]$$

donde W'_{12} es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

Aplicamos ahora la conservación de la energía mecánica a los distintos tipos de energía potencial que hemos estudiado.

Ejemplo 1.22.

Un bloque de 5 kg, sujeto a un muelle cuya constante elástica vale $k = 500 \text{ N m}^{-1}$, puede deslizarse por un plano sin rozamiento. Si se comprime el sistema formado por el muelle (sin masa) y el bloque, 5 cm respecto a la posición de equilibrio, a) determínese la energía potencial elástica almacenada en el sistema; b) ¿qué velocidad máxima alcanzará el muelle y en qué posición?

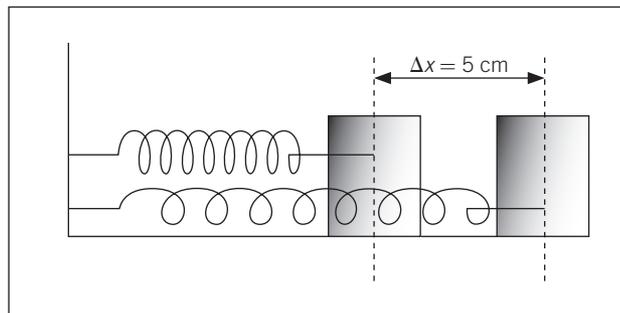


Figura 1.19.

a) La energía potencial elástica viene dada por la expresión [48]. Sustituyendo en ella los valores del enunciado se obtiene

$$U = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2} \cdot 500 \text{ Nm}^{-1} \cdot (0,05 \text{ m})^2 = 0,625 \text{ J}$$

b) Puesto que no hay rozamiento, la energía mecánica, suma de la potencial más la cinética, se conserva. El valor de la energía total es el calculado en el apartado anterior, es decir, cuando el sistema se halla con la deformación máxima y a velocidad cero. Teniendo en cuenta la expresión [54], vemos que la energía cinética máxima y, por tanto, la velocidad máxima, se obtiene cuando la energía potencial es nula, es decir, al pasar por la posición de equilibrio. En ese punto se tiene

$$E_{\text{cin}}^{\text{máx}} = U^{\text{máx}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 0,625 \text{ J}$$

de lo que se deduce que la velocidad máxima vale

$$v = \sqrt{\frac{2U}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,625}{5}} = 0,5 \text{ m s}^{-1}$$

Veamos ahora un ejemplo en el que se combina el teorema del impulso y el de la conservación de la energía.

Ejemplo 1.23.

Se ha determinado que el cráneo humano se rompe cuando es sometido a un esfuerzo superior a $5 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$. Un martillo con cabeza cilíndrica de 2 kg de masa y con un diámetro de base de 2,5 cm se suelta desde una altura h y, por desgracia, cae sobre la cabeza de una persona calva con la base del martillo paralela a la superficie de la cabeza. Si el contacto entre la cabeza y el martillo dura 1 ms, ¿cuál es el máximo valor de h para el que no habrá fractura de cráneo?

En primer lugar, calculamos la fuerza máxima que puede realizar el cráneo humano sobre el martillo en las condiciones del problema, multiplicando el esfuerzo máximo por el área de la base del martillo.

$$F_m = 5 \times 10^7 \text{ N m}^{-2} \times \frac{\pi(2,5 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{4} = 24.543,69 \text{ N}$$

Por tanto, suponiendo que el choque entre el martillo y la cabeza es totalmente inelástico, esta fuerza máxima calculada será la que, actuando durante 1 ms, frenará al martillo. Suponiendo que en el tiempo dt la fuerza es constante e igual a F_m y aplicando el teorema del impulso, dado en la ecuación [24], se cumple:

$$\int F dt = \Delta p \Rightarrow F_m \Delta t = \Delta p$$

donde Δp es el incremento del ímpetu del martillo, que vale mv , siendo m su masa y v su velocidad, ya que después del choque el martillo quedará parado y su cantidad de movimiento valdrá cero.

Por otra parte, la velocidad del martillo está relacionada con la altura desde la que cae mediante $v = (2gh)^{1/2}$ (conservación de la energía). Por tanto,

$$F_m \Delta t = mv = m\sqrt{2gh}$$

de donde la altura máxima vale

$$h = \frac{F_m^2(\Delta t)^2}{m^2 2g} = \frac{(24.543,69)^2 \text{ N}^2 10^{-6} \text{ s}^2}{4 \text{ kg}^2 \times 2 \times 9,81 \text{ m s}^{-2}} = 7,68 \text{ m}$$

Ejemplo 1.24.

Calcular la velocidad que ha de tener un proyectil para que, disparado verticalmente, pueda escapar del campo gravitatorio terrestre (radio de la Tierra, 6.380 km).

Para resolver este problema aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica. Este principio establece que en ausencia de disipación (se desprecian los efectos del rozamiento del proyectil con la atmósfera), la suma de la energía cinética más la energía potencial gravitatoria debe conservarse. La energía cinética se expresa según la conocida fórmula $(1/2)mv^2$ y la energía potencial gravitatoria entre dos masas M y m viene dada según [53] por

$$U = -G \frac{Mm}{r}$$

donde G es la constante de gravitación. En este ejercicio tomamos como M la masa de la Tierra, m la masa del proyectil y r la distancia respecto del centro de la Tierra a la que se encuentra el proyectil en cada momento.

Para calcular la energía mínima necesaria para que el proyectil escape del campo terrestre, consideramos que cualquier objeto está libre de la atracción gravitatoria terrestre cuando su energía potencial gravitatoria respecto a nuestro planeta vale cero. Si además exigimos que en ese punto la energía cinética sea lo más pequeña posible, es decir, cero, ya estamos en condiciones de resolver el ejercicio.

En efecto, la conservación de la energía mecánica implica

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{R_T} = E_\infty + U_\infty = 0$$

y, por tanto,

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} = 11,19 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

donde $g = \frac{GM}{R_T^2}$ es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, según se ha obtenido en el Ejemplo 1.6.

Ejemplo 1.25.

Laplace fue el primero en considerar la posibilidad de que existan cuerpos celestes de los que la luz no puede escapar, debido a que en ellos la velocidad de escape es superior a la velocidad de la luz. Estos objetos, por tanto, no emitirían radiación y por tanto serían negros. La teoría de los agujeros negros ha tenido un gran desarrollo en astrofísica. En este problema proponemos calcular el radio que debería tener la Tierra para que la velocidad de escape desde su superficie fuera la velocidad de la luz. (masa de la Tierra, $5,98 \times 10^{24}$ kg).

Para realizar este cálculo aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica al igual que en el problema anterior. Así, igualamos la energía mecánica de un cuerpo de masa m en la superficie terrestre con la energía mecánica mínima donde este cuerpo está libre de la atracción gravitacional terrestre, es decir, en el infinito. En estas condiciones

$$-G \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} mc^2 = 0$$

donde R es el radio de la Tierra si la velocidad de escape de la misma fuera la velocidad de la luz $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Despejando R se obtiene:

$$\begin{aligned} R &= \frac{2GM}{c^2} = \\ &= \frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \times 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}}{(3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2} = 8,86 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Es decir, para que nuestro planeta se comportara como un agujero negro, ¡toda su masa debería concentrarse en una esfera de 8,86 mm de radio!

1.9. Tamaño, forma y vida

En la naturaleza se da una gran variedad de formas y tamaños. En el caso de los seres vivos encontramos desde la descomunal ballena azul, el mayor ser vivo que ha existido, con un peso de más de 200 toneladas ($2 \cdot 10^8 \text{ g}$), hasta el micoplasma, pequeño microorganismo cuya masa es de unos $2 \cdot 10^{-13} \text{ g}$. Entre las masas de ambos hay 21 órdenes de magnitud.

Surge entonces la cuestión de hasta qué punto son comparables los fenómenos que observamos en objetos u organismos pequeños con los que se dan en otros muchos mayores. Evidentemente, para que se pueda hablar de regularidad ha de darse una cierta semejanza, tanto en el tamaño como en la función. (No se pueden comparar cosas totalmente dispares.) Suponiendo que se dé esa semejanza, la pregunta se concreta entonces en ¿cómo dependerán esos fenómenos del tamaño?

Arquímedes estableció lo que se conoce como *principio de semejanza*: en figuras geométricas semejantes, la superficie es proporcional al cuadrado de la dimensión lineal, mientras el volumen lo es al cubo de la misma. Galileo, dos mil años después, se dio cuenta de que este principio presenta limitaciones prácticas. Aun guardando la semejanza, el tamaño de las cosas no puede aumentar arbitrariamente. Un diseño eficaz a pequeña escala puede no serlo a una escala mayor —pensemos en un coche del tamaño de un camión— y, viceversa, un prototipo resultará probablemente amazacotado si se reduce de escala: basta pensar en un elefante del tamaño de una ardilla intentando trepar por los árboles.

En los seres vivos se aprecia, en general, una relación entre el tamaño y la función: a mayor tamaño, mayor complejidad. Los seres unicelulares

presentan un grado de organización menor que los pequeños organismos. Éstos, a su vez, tienen funciones más simples que los insectos. En los mamíferos aparecen mecanismos de complejidad y precisión inusitadas.

Como comentamos anteriormente, la forma responde también a restricciones de tipo funcional, a la competición de diversos factores. En los animales terrestres, por ejemplo, predominan las formas cilíndricas que facilitan la locomoción, a la par que responden a exigencias de las leyes de la elasticidad. Por supuesto, estas formas están también muy condicionadas por el tamaño. Veremos en uno de los problemas cómo una hormiga del tamaño de un hombre resultaría extraordinariamente débil: la hormiga es un animal fuerte a su escala. Análogamente, un hombre del tamaño de una bacteria encontraría grandes dificultades para poder nadar en agua.

¿Podemos encontrar relaciones generales que nos permitan extrapolar o comparar propiedades o fenómenos de una escala a otra? ¿Cómo dependen aquéllos del tamaño? La clave para responder estas y otras preguntas nos las proporcionan el análisis dimensional y las leyes de escala.

1.10. Leyes de escala. Ritmo metabólico

La primera cuestión es cómo determinar la variación de una propiedad con el tamaño. Ello será posible mediante el principio de semejanza, combinado, en el caso de los seres vivos, con alguna hipótesis biológica. Conviene insistir desde el principio en que no existen leyes generales, sino que se trata de una línea de razonamiento que pretende encontrar aquella variación para cada caso concreto. Veámoslo con un ejemplo.

El ritmo metabólico es la energía consumida en la unidad de tiempo (corresponde, por tanto, a una potencia) como consecuencia de los procesos del metabolismo y que a la larga acaba convirtiéndose en calor. Una posible hipótesis biológica consistiría en suponer que el ritmo metabólico RM es simplemente proporcional a la masa del organismo, ya que los procesos metabólicos tienen lugar en todo el cuerpo:

$$RM \sim M$$

Así, por ejemplo, en un animal con el doble de masa que otro deberíamos observar un consumo doble de energía. Éste es un ejemplo de *ley de escala*.

Esta hipótesis, sin embargo, no se ve corroborada por la experiencia en el caso de los mamíferos. Intentemos otra. Como el calor se escapa a través de la superficie del animal, el ritmo metabólico podría depender del área exterior del cuerpo:

$$RM \sim A \quad [56]$$

El área es proporcional a una longitud característica al cuadrado

$$A \sim L^2 \quad [57]$$

y la masa M del animal ha de ser proporcional al volumen V , que a su vez lo es a L al cubo

$$M \sim L^3 \quad [58]$$

o, lo que es equivalente,

$$L \sim M^{1/3} \quad [59]$$

Por ello, el área se puede expresar en función de M como

$$A \sim M^{2/3} \quad [60]$$

de donde concluimos que el ritmo metabólico seguiría en este caso una ley de escala del tipo

$$RM \sim M^{2/3} = M^{0,66} \quad [61]$$

Esta ley se aproxima más a la que se obtiene experimentalmente, pero no es del todo satisfactoria. En realidad, los mamíferos siguen una ley $RM \sim M^{0,75}$. Para explicar el resultado deberemos apoyarnos en una hipótesis más complicada.

Estos ejemplos nos han enseñado que no es posible extrapolar los resultados de una escala a otra de forma trivial, es decir, mediante una regla de tres, sino que hay que determinar la correspondiente ley de escala que, en general, será no lineal. En efecto, lo más importante de dichas leyes es precisamente el exponente con el que una magnitud se relaciona con otras.

1.11. Análisis dimensional

Hasta ahora hemos discutido únicamente la influencia del tamaño sobre las propiedades de los sistemas. Pero la longitud característica o la masa no son los únicos parámetros que determinan el funcionamiento de un organismo. Para un problema dado, existe un conjunto de parámetros que lo describen completamente. Así, por ejemplo, en el caso de un péndulo simple tenemos su longitud l , su masa m , su período τ , su frecuencia f , la aceleración de la gravedad g que actúa sobre él, etc. Sin embargo, no todos estos parámetros son independientes entre sí. El período, por ejemplo, es función de l y de g , y la frecuencia es la inversa del período.

El método para determinar las constantes características independientes y su relación con los demás parámetros se conoce como *análisis dimensional*. Se basa en el hecho de que a las magnitudes físicas están asociadas ciertas dimensiones: escogida una base de magnitudes fundamentales (longitud, masa y tiempo, en mecánica, a las que se añade la temperatura en termodinámica o la intensidad de la corriente en electricidad), cualquier otra variable puede expresarse en función de éstas. La dimensión de una variable queda determinada mediante su *ecuación dimensional*, que expresa su dependencia respecto a las magnitudes fundamentales. Por ejemplo, la ecuación dimensional de un área A es $[A] = [L]^2$, que expresa que el área es el cuadrado de una longitud. Para la velocidad la ecuación dimensional es: $[v] = [LT^{-1}]$, es decir, una longitud por la inversa de un tiempo, y decimos que la velocidad tiene dimensiones de longitud por la inversa de tiempo.

En la tabla siguiente recogemos las ecuaciones dimensionales de las variables más importantes en mecánica:

	Sistema [M] [L] [T]
Longitud, l	[L]
Masa, m	[M]
Tiempo, t	[T]
Área, A	[L ²]
Frecuencia, f	[T ⁻¹]
Velocidad, v	[LT ⁻¹]
Aceleración, a	[LT ⁻²]
Fuerza, F	[MLT ⁻²]
Presión, p , o tensión, τ	[ML ⁻¹ T ⁻²]
Energía, E ; trabajo, W , o calor, Q	[ML ² T ⁻²]
Densidad, ρ	[ML ⁻³]

A estas magnitudes añadiremos las correspondientes a la termodinámica y la electricidad.

Cualquier relación entre magnitudes físicas, una igualdad por ejemplo, exige algo más que una comparación de cantidades: debe cumplirse también una relación entre magnitudes. Dicho de otro modo, al comparar magnitudes hay que comprobar que la relación sea dimensionalmente homogénea: no se puede comparar una masa con un tiempo, o una presión con una temperatura. En una igualdad, ambos miembros deben tener las mismas dimensiones.

Ilustremos estas ideas mediante un ejemplo.

Ejemplo 1.26.

Una masa m está unida a un muelle sin masa cuya constante elástica es k . Se comprime el muelle y después se suelta de golpe, oscilando alrededor de la posición de equilibrio. (Supóngase que no hay rozamiento.) Encontrar, por análisis dimensional, la dependencia del período T de la oscilación, en función de los dos parámetros del sistema, m y k .

El período T tiene dimensiones de tiempo y debe depender de los dos parámetros físicos del sistema m y k . La masa m tiene su propia dimensión y las dimensiones de k se pueden deducir a partir de la fórmula [19]

$$k = -\frac{F}{\Delta x} \Rightarrow [k] = \frac{[F]}{[L]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L]} = [MT^{-2}]$$

El período, por tanto, depende, en general, de los parámetros a través de una ley del tipo

$$T = Cm^a k^b$$

donde C es una constante sin dimensiones y a y b dos exponentes a determinar. Se debe cumplir, por tanto,

$$[T] = [M]^a [MT^{-2}]^b$$

y, para que esa ecuación sea dimensionalmente homogénea, los exponentes de cada una de las variables fundamentales a uno y otro lado de la ecuación deben ser iguales, lo que nos lleva a

$$\text{para el tiempo } T, \quad 1 = -2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{para la masa, } a + b = 0, \quad a = \frac{1}{2}. \text{ Por tanto, } T \sim \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Ejemplo 1.27.

Aproximadamente, las necesidades alimenticias de los individuos normales de un mismo género son proporcionales a su masa. Aunque el novelista Jonathan Swift no conocía las leyes de escala, aventuró en «Los viajes de Gulliver» que los liliputienses debían dar 1.728 de sus raciones al gigante Gulliver, doce veces mayor que ellos. ¿Es correcta esta conjetura?

Como el alimento es proporcional a la masa y a su vez la masa es proporcional al volumen y éste por semejanza lo es a una longitud característica elevada al cubo, es decir,

$$M \sim V \sim L^3$$

tenemos que

$$\text{Alimento} \sim L^3$$

Por tanto, se debe cumplir que

$$\frac{(\text{Alimento})_{\text{Gulliver}}}{(\text{Alimento})_{\text{liliputiense}}} = \left(\frac{L_{\text{Gu}}}{L_{\text{il}}} \right)^3 = (12)^3 = 1728$$

La ración de Gulliver debe ser 1.728 raciones liliputienses, tal como predijo el autor de la novela.

Ejemplo 1.28.

Comparar la velocidad normal de paseo de dos personas de la misma complejión y de alturas respectivas L_1 y L_2 . Suponer que, paseando, el tiempo que tarda una pierna en dar un paso viene dado por el período de un péndulo simple de longitud proporcional a la de la pierna.

La velocidad media de la persona será:

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{espacio recorrido en un paso}}{\text{tiempo en dar un paso}}$$



Figura 1.20.

Como las personas son de la misma complejión (es decir, desde un punto de vista geométrico son parecidas), el ángulo φ es el mismo en las dos personas. Por otro lado, la longitud de las piernas respectivas l_1 y l_2 estará en la misma proporción que L_1 y L_2 ; es decir,

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

El espacio recorrido en un paso es

$$e = 2l \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$$

Por otro lado, si la pierna se comporta como un péndulo, el tiempo en dar un paso es proporcional al período; es decir,

$$t \sim 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que φ y g tienen el mismo valor para ambas personas, se obtiene

$$v = \frac{e}{t} \sim \frac{l}{\sqrt{l}} \sim \sqrt{l}$$

De este modo, las velocidades v_1 y v_2 estarían en la proporción

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

Hay que advertir que éste no es el único modelo para el cálculo de la velocidad de paseo. Los hay más elaborados y que llevan a conclusiones ligeramente distintas. Lo que podemos observar es que para correr interesa disminuir el tiempo en que se da un paso. Esto se consigue disminuyendo la longitud de la pierna, es decir, doblándola.

Ejemplo 1.29.

Una hormiga puede levantar tres veces su peso, mientras que un elefante sólo puede con la cuarta parte del suyo. Si las dimensiones medias son, respectivamente, 1,2 y 504 cm, ¿es correcto decir que la hormiga es la más fuerte?

Para resolver este problema definimos previamente el denominado factor de escala E como la relación entre la longitud característica L de dos figuras, objetos, animales, etc., parecidos, pero de distinto tamaño:

$$E = \frac{L_G}{L_P}$$

donde L_G es la longitud característica de un animal grande y L_P la de un animal pequeño.

Ya hemos comentado que hay propiedades que dependen del volumen, por ejemplo el peso, y otras que dependen del área, por ejemplo la fuerza del músculo. Por esto podemos escribir que el peso de un animal grande P_G está relacionado con el peso de un animal pequeño P_p según

$$P_G \sim L_G^3 = E^3 L_p^3 \sim E^3 P_p$$

e igualmente que la fuerza muscular de un animal grande F_G está relacionada con la fuerza de un animal pequeño F_p :

$$F_G \sim L_G^2 = E^2 L_p^2 \sim E^2 F_p$$

Definimos la fuerza relativa de un animal, f , como el cociente entre el peso que puede levantar y el peso del animal. Como el peso que puede levantar depende de la fuerza de los músculos, se puede escribir

$$f_G = \frac{F_G}{P_G} = \frac{E^2 F_p}{E^3 P_p} = \frac{f_p}{E}$$

Para comparar las fuerzas relativas, lo debemos hacer entre animales del mismo tamaño. Por tanto, calculamos el factor de escala:

$$E_{e-h} = \frac{504}{1,2} = 420$$

Supongamos que el elefante tuviera el tamaño de una hormiga. Calculamos entonces su fuerza relativa utilizando la ley de escala deducida arriba:

$$f_{e-h} = E_{e-h} f_{e-e} = 420 \times 0,25 = 105,0$$

Por tanto, el animal con tamaño del orden del de la hormiga que tendría mayor fuerza relativa sería el elefante.

¿Qué pasaría si tuviéramos una hormiga del tamaño de un elefante? ¿Cuánto valdría su fuerza relativa? Para responder, calculamos la fuerza relativa de una hormiga del tamaño de un elefante:

$$f_{h-e} = \frac{f_{h-h}}{E_{e-h}} = \frac{3}{420} = 0,01$$

Obviamente vemos que también en este caso el elefante es el más fuerte, ya que la fuerza relativa de un elefante es

$$f_{e-e} = \frac{F_e}{P_e} = 0,25$$

Ejemplo 1.30.

Supongamos que nos persigue un oso enfadado y hambriento. Si al intentar escaparnos corremos por un plano horizontal, su velocidad es superior y nos alcanzará. Utilizando argumentos de análisis dimensional, demostrar que para

tener más posibilidades de escapar es preferible correr en subida. Suponer que la potencia muscular depende del área de la sección transversal del músculo.

Al subir por un plano inclinado, sin tener en cuenta la fuerza de rozamiento, hemos de suministrar la energía necesaria para aumentar la energía potencial, o lo que es lo mismo, vencer al peso. Por tanto, la potencia necesaria para subir por un plano inclinado de ángulo φ es

$$P = Fv = mg \operatorname{sen} \varphi v$$

es decir, la potencia depende de la masa y de la velocidad. Mediante argumentos de análisis dimensional, la potencia es proporcional a

$$P \sim l^3 v$$

dado que ni g ni φ dependen de las dimensiones y l es una dimensión característica de la persona que sube.

Por otra parte, el problema dice que $P \sim l^2$, ya que nos indica que la potencia es proporcional al área de la sección transversal del músculo. Teniendo en cuenta las dos expresiones para P se obtiene

$$l^3 v \sim l^2$$

y, por tanto,

$$v \sim l^{-1}$$

Esto significa que cuanto mayor es l menor es v . Por tanto, como en general nuestra l es más pequeña que la del oso, conviene intentar escapar subiendo por una superficie inclinada, pero no es así para escapar de un perro.

Ejemplo 1.31.

Comparando la habilidad de los animales para saltar, hacemos experimentos con mamíferos e insectos. Supongamos que en el caso de los mamíferos la altura del salto no depende del tamaño de los animales y que, en cambio, en el caso de los insectos, la altura del salto depende del tamaño mediante la relación $h \sim l^{2/3}$. ¿Cuál de las dos hipótesis siguientes es la más correcta en cada caso? a) La energía suministrada por unidad de masa del músculo es la misma para todos los animales. b) La potencia suministrada por unidad de masa del músculo es la misma para todos los animales.

Estudiemos qué consecuencias comporta la hipótesis a).

Si la energía por unidad de masa del músculo es la misma para todos los animales, E/M no dependerá de las dimensiones y, por tanto,

$$E \sim M \sim l^3$$

donde M es la masa del animal y l una longitud característica. La energía para saltar hasta una altura h que han de suministrar los músculos es

$$E \sim Mgh \sim l^3$$

como la masa $M \sim l^3$ y g no depende de l se obtiene

$$l^3 h \sim l^3$$

que implica que h no depende de l y que, por consiguiente, es plausible que la altura del salto no dependa del tamaño de los animales. Por tanto, esta hipótesis se puede aplicar a los mamíferos según las condiciones de este ejercicio.

Analicemos ahora las consecuencias de la hipótesis b). La potencia P es la energía por unidad de tiempo. Según b), P/M no depende de l , por lo cual

$$P \sim M \sim l^3$$

La potencia, por tanto, depende de l^3 . Por otro lado, podemos escribir P como

$$P = Mgh/t$$

ya que Mgh es la energía que han de aportar los músculos en un tiempo t . El tiempo t , tiempo de trabajo del músculo, se puede, escribir como

$$t = d/v$$

donde d es la distancia de aceleración del músculo y v la velocidad de salida del animal. La distancia d depende de l , ya que depende de las dimensiones del animal, y $v = \sqrt{2gh}$, es decir, $v \sim \sqrt{h}$. Por tanto, por lo visto arriba quedará

$$P \sim \frac{l^3 h \sqrt{h}}{l} \sim l^2 h \sqrt{h}$$

y por otro lado según

$$P \sim l^3$$

Teniendo en cuenta los dos últimos resultados se obtiene

$$l^3 \sim l^2 h^{3/2} \Rightarrow h^{3/2} \sim l \Rightarrow h \sim l^{2/3}$$

Así, esta hipótesis es plausible para los insectos, según lo establecido en este ejercicio.

Ejemplo 1.32.

Demostrar a partir del teorema trabajo-energía que un animal será tanto más rápido cuanto más ligeras sean sus patas y cuanto más largos sean los músculos de sus patas. Probar asimismo que la velocidad de carrera de los animales no depende de su tamaño.

Consideremos un animal que corre a velocidad v . Una vez que está en movimiento, suponemos que no se requiere trabajo para mantener su cuerpo en movimiento, ya que despreciamos el rozamiento del aire. Cuando una pata golpea el suelo está instantáneamente en reposo, mientras que el resto del cuerpo del animal continúa moviéndose a velocidad v constante. Cuando la pata se levanta, adquiere un movimiento acelerado. Cuando la pata rebasa el cuerpo, adquiere un movimiento desacelerado que la pone en reposo sobre el suelo otra vez. Estas aceleraciones y desaceleraciones están

proporcionadas por un grupo de músculos que ejecutan un trabajo que hace que la pata varíe su energía cinética desde 0 hasta $(1/2)mv^2$ y de nuevo hasta 0 (m es la masa de la pata). El trabajo de los músculos se hace cuando se contraen una distancia d . A partir de la relación entre el trabajo y la energía cinética podemos escribir

$$F_m d = (1/2)mv^2$$

donde F_m es la fuerza muscular y, por tanto,

$$v^2 = 2F_m d/m$$

A partir de la ecuación anterior podemos ver la dependencia de la velocidad con respecto a la masa de la pierna y a la distancia d de contracción del músculo. Según esta relación, cuanto menor sea m y mayor d , se obtendrán velocidades v mayores. Es decir, un animal será tanto más rápido cuanto menor sea la masa de sus patas y mayor la longitud de las mismas. Este hecho se puede observar en animales que son grandes corredores, como el caballo de carreras, el galgo y el avestruz, que se caracterizan por tener patas muy largas y delgadas, lo que les permite alcanzar velocidades de carrera altas y mantenerlas durante largo tiempo. En cambio, los felinos, que se caracterizan por tener las patas más bien gruesas, pueden alcanzar grandes velocidades, pero son incapaces de mantenerlas durante intervalos de tiempo prolongados.

La fuerza muscular depende de la sección del músculo, es decir, $F_m \sim l^2$, la distancia $d \sim l$ y la masa $\sim l^3$. En estas condiciones podemos escribir

$$v^2 \sim l^2/l^3$$

es decir, v^2 no depende del tamaño del animal, por lo que podemos afirmar que la velocidad de carrera de dos animales de la misma especie pero de distinto tamaño es la misma en terreno plano.

Ejemplo 1.33.

Determinar cómo depende de las dimensiones de un animal terrestre la energía por unidad de masa y de longitud recorrida utilizada en moverse.

Sea L una dimensión característica del animal. Su masa es proporcional a L^3 . Si el animal corre, se puede suponer como primera aproximación que sus patas se mueven como un péndulo. Así invierten un tiempo τ en dar un paso que es proporcional a $L^{1/2}$, ya que el período de un péndulo simple es $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. La longitud recorrida en cada paso d es proporcional a la longitud de la pata. Por tanto, la velocidad, supuesta constante, se puede escribir:

$$v = \frac{d}{\tau} \sim \frac{L}{L^{1/2}} = L^{1/2}$$

El factor que limita el movimiento es el ritmo al que se adquiere energía. En este caso el combustible es el oxígeno y su entrada en el organismo se

realiza en los pulmones, por lo que es proporcional a su área, es decir, a L^2 si suponemos además que el ritmo de respiración no depende del tamaño.

Así, la energía por unidad de masa y por unidad de longitud recorrida C , $C = \frac{E}{md}$, se puede evaluar según

$$C = \frac{P}{vm}$$

siendo P la potencia debida al consumo de oxígeno, proporcional a L^2 . Por tanto,

$$C \sim \frac{L^2}{L^{1/2}L^3} = L^{-3/2} \quad \text{o bien} \quad C \sim M^{-0,5}$$

Datos de Schmidt y Nielsen dan para C una dependencia con respecto a la masa con un exponente $-0,4$. Las discrepancias entre el resultado de este problema y el experimental pueden comprenderse al analizar las limitaciones de las hipótesis utilizadas. Pero aun así, es de notar cómo argumentos sencillos de análisis de escala nos aproximan notablemente al comportamiento experimental.

Ejemplo 1.34.

Experimentalmente se observa que el coste energético por unidad de masa y por unidad de longitud recorrida en animales que nadan depende de la masa según un exponente $-0,3$. Justificar este resultado mediante argumentos de análisis dimensional.

Si la natación no se realiza a gran velocidad, la fuerza de arrastre F_r que se opone al movimiento depende entre otros factores del área transversal del animal y de la velocidad v^2 a que se mueve. Así, la potencia que debe proporcionar el metabolismo para moverse a velocidad constante v es la que dé la energía que se pierde por unidad de tiempo debida a la fuerza de resistencia; es decir,

$$P = F_r v \sim L^2 v^3$$

El trabajo por unidad de tiempo lo realizan los músculos del animal. La fuerza que ejerce un músculo se relaciona con su sección transversal, ya que depende del número de fibras musculares, el cual depende de lo ancho que sea el músculo. Si v' es la velocidad de contracción del músculo, la potencia muscular vale

$$P_m = F_m v' = L^2 v'$$

Igualando las dos expresiones anteriores:

$$L^2 v' = L^2 v^3$$

Si v' se supone independiente del tamaño y que únicamente depende de las propiedades de las fibras musculares individuales, se cumple que v aproximadamente no depende del tamaño del animal, o lo que es lo mismo,

$$v \sim L^0$$

Así pues, si evaluamos C teniendo en cuenta que el oxígeno que entra en el cuerpo del animal es proporcional a L^2 y que el oxígeno representa el aporte energético imprescindible para el mantenimiento del movimiento, se cumple

$$C \sim L^2 L^0 L^{-3} = L^{-1}$$

y, por tanto,

$$C \sim M^{-1/3} = M^{-0.33}$$

resultado muy próximo al experimental.

Ejemplo 1.35.

Supongamos que un cachalote de 500 kg pueda estar bajo el agua media hora sin respirar. ¿Cuál será el tiempo de inmersión de una ballena de 5.000 kg? Suponer que el ritmo metabólico es a) proporcional al área, b) proporcional a $M^{3/4}$.

El tiempo de inmersión de un animal depende de la cantidad de oxígeno que pueda almacenar y del ritmo metabólico, ya que el oxígeno respirado da la energía necesaria para el funcionamiento del animal y el ritmo metabólico indica las necesidades energéticas del animal para vivir. Por tanto, se puede escribir

$$\text{volumen de } O_2 \sim \text{ritmo metabólico} \times \text{tiempo de inmersión}$$

El volumen de O_2 almacenado es proporcional al volumen de los pulmones del animal, que a su vez es proporcional al volumen del mismo. El volumen es proporcional a l^3 , donde l es una dimensión característica del animal. En consecuencia,

$$l^3 \sim \text{ritmo metabólico} \times t$$

Si según el apartado a) el ritmo metabólico es proporcional al área $\sim l^2$, se cumple

$$l^3 \sim l^2 t \Rightarrow t \sim l \sim M^{1/3}$$

donde M es la masa del animal. Dividiendo el tiempo de inmersión del cachalote por el de la ballena:

$$\frac{t_c}{t_b} = \left(\frac{M_c}{M_b} \right)^{1/3} \Rightarrow t_b = t_c \left(\frac{M_b}{M_c} \right)^{1/3} = 30 \text{ min} \left(\frac{5000}{500} \right)^{1/3} = 64,63 \text{ min}$$

Según el apartado b), el ritmo metabólico es proporcional a $M^{3/4}$ y, por tanto,

$$l^3 \sim M^{3/4} t \Rightarrow M \sim M^{3/4} t \Rightarrow t \sim M^{1/4}$$

Al igual que en el apartado anterior, dividiendo t_c entre t_b :

$$\frac{t_c}{t_b} = \left(\frac{M_c}{M_b} \right)^{1/4} \Rightarrow t_b = t_c \left(\frac{M_b}{M_c} \right)^{1/4} = 30 \text{ min} \left(\frac{5000}{500} \right)^{1/4} = 53,35 \text{ min}$$

Problemas propuestos

1. Al caminar, nuestro centro de gravedad describe, aproximadamente, un arco de circunferencia cuyo radio es la longitud de la pierna. La transición del paso a la carrera se caracteriza porque, al caminar, siempre se mantiene uno de los pies en el suelo, mientras que en la carrera se dan saltos. Calcular aproximadamente la velocidad para la cual se produce la transición del paso a la carrera en una persona cuya pierna sea de un metro de longitud.

Resultado: $3,13 \text{ m s}^{-1}$.

2. El Código de la Circulación establece que la distancia mínima que un vehículo debe guardar con respecto al vehículo anterior debe ser igual, en metros, al cuadrado de la velocidad expresado en miriámetros por hora. Así, en el caso de que la velocidad sea de $90 \text{ km h}^{-1} = 9 \text{ Mm h}^{-1}$, la distancia debe ser de 81 m. *a)* ¿Cuál es el fundamento físico de esta disposición legal? *b)* ¿Qué valor considera para la aceleración esta norma?

Resultado: $3,86 \text{ m s}^{-2}$.

3. Un avión de acrobacia aérea goza de gran maniobrabilidad, y como consecuencia puede describir arcos de circunferencia de pequeño radio a gran velocidad. En un picado, el avión alcanza una velocidad de 100 m s^{-1} y describe un arco de 100 m de radio. *a)* ¿Qué aceleración centrífuga actúa sobre el piloto? *b)* Compararla con la de la gravedad.

Resultados: *a)* 100 m s^{-2} ; *b)* diez veces mayor, aproximadamente.

4. Las hormonas del crecimiento de las plantas se orientan en la misma dirección y en sentido contrario a la aceleración que actúa sobre ellas. Si únicamente están sometidas a la acción de la gravedad, se orientarán según la vertical. ¿Qué ángulo formarán con la vertical si la planta crece sobre el borde de una plataforma de 1 m de radio, que gira con una velocidad angular de 2 rad s^{-1} ?

Resultado: $22,18^\circ$.

5. Un atleta alcanza la velocidad máxima de $10,5 \text{ m s}^{-1}$ en su carrera previa a un salto. En un salto de longitud se alza a una altura de 0,6 m. *a)* ¿Cuál será su velocidad máxima durante el salto? *b)* ¿Dónde la alcanza? *c)* ¿Cuál es la máxima longitud de su salto?

Resultados: *a)* $11,05 \text{ m s}^{-1}$; *c)* 7,35 m.

6. La velocidad de un tren al ponerse en marcha se puede expresar mediante la ecuación

$$v(t) = v_f(1 - e^{-t/\tau_0})$$

a) Calcular la posición en función del tiempo. *b)* Representar gráficamente $r(t)$ y $v(t)$ en función del tiempo. *c)* Si $v_f = 100 \text{ km h}^{-1}$ y $\tau_0 = 2 \text{ min}$, ¿qué distancia habrá recorrido después de un minuto de haber comenzado el movimiento?

Resultados: *a)* $r(t) = v_f(t - \tau_0) + v_f\tau_0 e^{-t/\tau_0}$; *c)* 355,10 m.

7. ¿Con qué tensión hay que estirar de la cuerda para levantar un bloque de 100 kg de masa? (Fig. 1.21).

Resultado: 245,5 N.

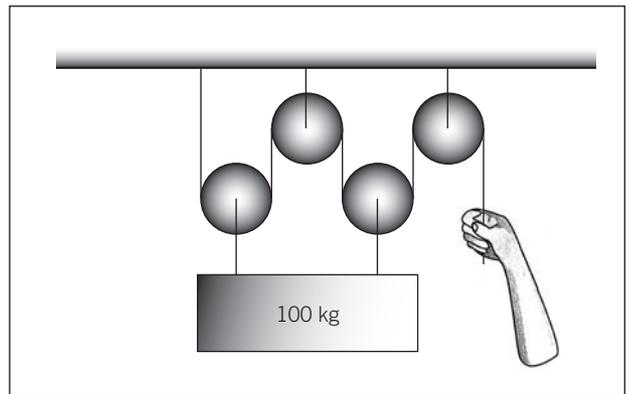


Figura 1.21.

8. La bolsa de un calamar contiene 100 g de tinta. Para ahuyentar a sus posibles depredadores y poder huir de ellos, expulsa de golpe esa tinta, que sale a una velocidad de 5 m s^{-1} . Si la masa del calamar sin tinta es de 400 g, ¿qué velocidad adquiere al expulsar la tinta?

Resultado: $1,25 \text{ m s}^{-1}$.

9. Sabiendo que la velocidad máxima de carrera de un atleta es $10,5 \text{ m s}^{-1}$, calcular la máxima altura a la que puede llegar en salto de pértiga. (El centro de gravedad del atleta se halla a un metro del suelo.)

Resultado: 6,6 m aproximadamente.

10. Los amortiguadores de un coche tienen una constante elástica de 10^5 N m^{-1} y sostienen una masa de 600 kilos. Si logramos comprimirlos 10 cm respecto de su posición de equilibrio: *a)* Calcular la máxima velocidad en el movimiento de oscilación del coche. *b)* ¿Hasta qué altura subirá su centro de gravedad si en reposo estaba a 60 cm del suelo? (Se hace la hipótesis de que los amortiguadores no «amortiguan», es decir, su movimiento es puramente elástico.)

Resultados: *a)* $1,29 \text{ m s}^{-1}$; *b)* 70 cm.

11. Un pez se mueve gracias a los impulsos que genera en el agua circundante con su cola (Fig. 1.22). Supongamos que la masa del pez es m , la masa del agua impulsada M , \vec{V} la velocidad del agua, \vec{v} la velocidad del pez y α el ángulo entre \vec{V} y la dirección del movimiento. Demostrar, aplicando el principio de conservación del movimiento, que

$$v = \frac{MV \cos \alpha}{m}$$

y que la energía necesaria para moverse, que proporciona su ritmo metabólico, se aprovecha más cuanto mayor es M , es decir, cuanto mayor es la cola.

12. El lucio es un pez cuyo movimiento consiste básicamente en aceleraciones rápidas y poco duraderas (Figura 1.22). Si suponemos que un lucio de 1 kg impulsa mediante su cola 3 litros de agua en 0,5 s con una velocidad de 5 m s⁻¹ formando un ángulo de 60° con la dirección del movimiento: a) ¿Cuál será la velocidad de su movimiento? b) ¿Cuánta energía habrá consumido, suponiendo que estaba inicialmente en reposo? c) ¿Qué potencia ha desarrollado?

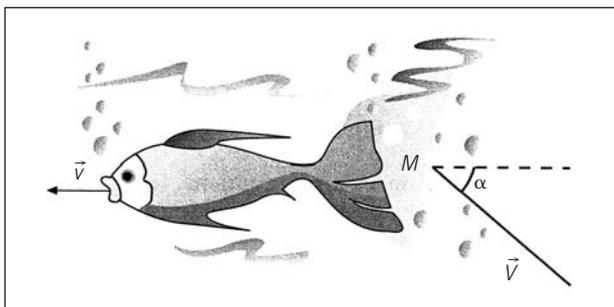


Figura 1.22.

Resultados: a) 7,5 m s⁻¹; b) 65,6 J; c) 131,3 W.

13. a) Calcular el momento de inercia del ala respecto a su inserción en el tronco de un insecto. Supóngase que dicha ala es un rectángulo de 1 cm de largo, 1 mm de ancho y 0,1 g de masa. b) Calcular el momento de las fuerzas que se deben aplicar al ala para comunicarle una aceleración angular de 100 rad s⁻².

Resultados: a) $3,3 \times 10^{-2}$ g cm²; b) $3,3 \times 10^{-7}$ Nm.

14. Calcular el momento de inercia respecto a su eje de simetría de una hélice de DNA de 10 Å de radio y 10⁵ daltons de peso. Dicho momento de inercia interviene en algunos modelos físicos para el cálculo del tiempo de desdoblamiento de las hélices de DNA. Para simplificar, considérese la hélice como un cilindro hueco (1 dalton = 1,67 × 10⁻²⁷ kg).

Resultado: 1,67 × 10⁻⁴⁰ kg m².

15. Se denomina satélite geostacionario a aquel ingenio cuya órbita es tal que se mantiene siempre sobre la vertical del mismo lugar, es decir, no se mueve respecto de la Tierra. Si el radio de la Tierra es de 6.380 kilómetros, calcular: ¿qué altura sobre la superficie del planeta ha de tener la órbita?

Resultado: 35.870 km.

16. El sistema GPS de posicionamiento local está constituido por un mínimo de 24 satélites que orbitan alrededor de la Tierra en seis planos diferentes. El período de su rotación es aproximadamente, de doce horas. Hallar a qué altura sobre la superficie de la Tierra se halla su órbita.

Resultado: 20.200 km.

17. La Figura 1.23 representa a un hombre de puntillas intentando levantar un peso. Si su peso es de 70 kg, ¿cuál será el peso máximo que podrá levantar sin caer hacia delante, suponiendo que todas sus articulaciones son rígidas?

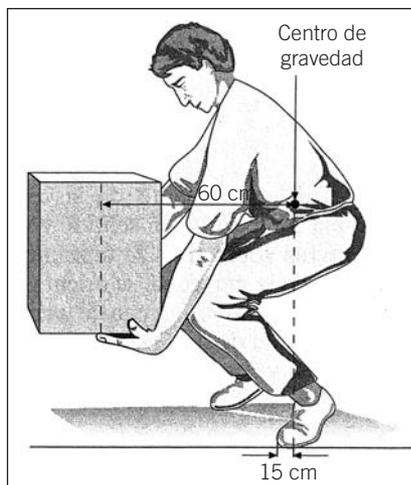


Figura 1.23.

Resultado: 17,5 kg.

18. Un árbol se puede esquematizar suponiendo que tiene un tronco rígido y una copa esférica. Cuando sopla viento fuerte, llega a hacer una fuerza de hasta 10⁴ N (Fig. 1.24). ¿Qué fuerza tiene que hacer el suelo contra las raíces para que el árbol no caiga? (Supóngase que se trata de un sólido rígido. En el capítulo de elasticidad se tendrán en cuenta los efectos elásticos del tronco.)

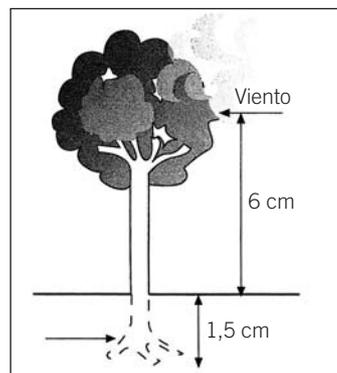


Figura 1.24.

Resultado: 4 × 10⁴ N.

19. Un hombre que pesa 700 N se apoya sobre una pierna (Fig. 1.25). Si el músculo de la pierna se inserta a 5 cm del tobillo con un ángulo de 83° , determinar: a) la fuerza del músculo; b) la fuerza de contacto y el ángulo de la misma. (El punto O es la vertical del punto de aplicación de la fuerza de contacto.)

Resultados: a) 2.821,0 N; b) 3.516,8 N; $84,4^\circ$.

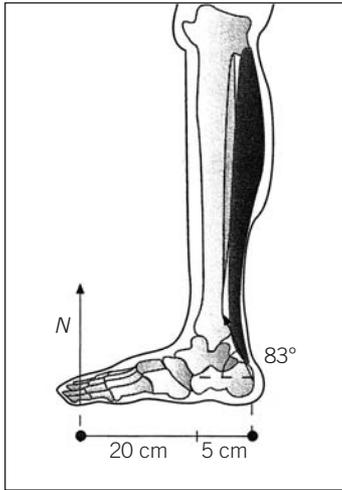


Figura 1.25.

20. La representación de las fuerzas que ejerce una persona que levanta un peso se puede esquematizar como muestra la Figura 1.26. La fuerza F_1 representa el

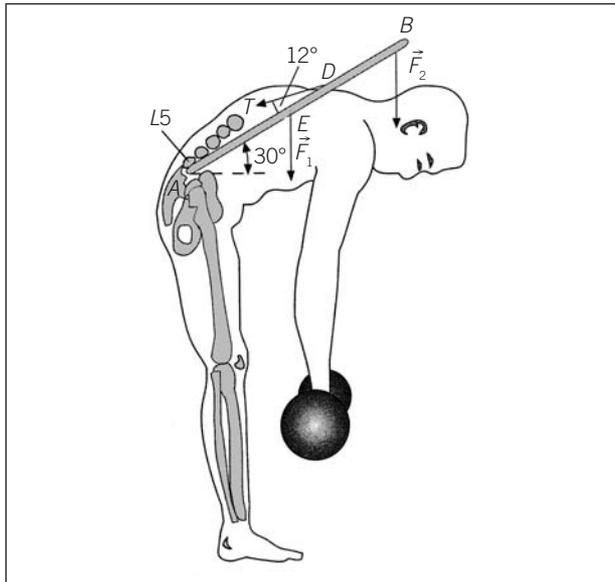


Figura 1.26.

peso del tronco y vale 320 N. La fuerza F_2 es la resultante del peso de la cabeza más el de las pesas que levanta y vale 382 N. Calcular: a) el valor de la fuerza T de tensión de los músculos; b) el módulo y el ángulo que forma con la horizontal la resultante R sobre la quinta vértebra lumbar. (Se supone que esa vértebra recibe en el punto A la reacción del resto del cuerpo. Los puntos de aplicación de las fuerzas están situados a distancias $AD = (2/3)AB$ y $AE = (1/2)AB$, donde AB es la longitud del tronco.)

Resultados: a) 2278,45 N; b) 2583,15 N; c) $32,9^\circ$.

21. El volumen de sangre en el sistema circulatorio de los mamíferos es directamente proporcional a la masa del animal. ¿En qué relación están el volumen sanguíneo de un animal adulto (longitud característica, $L = 180$ cm) y un cachorro ($L = 90$ cm)?

Resultado: 8.

22. Demostrar mediante el análisis de escala para cuál de las posibles dependencias de la fuerza muscular con las dimensiones la altura del salto vertical desde el reposo no depende del tamaño de la persona.

Resultado: $F \sim L^2$.

23. Un ser humano puede levantar la mitad de su peso, mientras que un elefante sólo puede levantar un cuarto del suyo. Si sus longitudes características son 173 y 504 cm, respectivamente: a) ¿es correcto afirmar que el hombre es más fuerte que el elefante?; b) ¿cuánto valdría la fuerza relativa de un hombre del tamaño de un elefante? c) ¿cuánto valdría la fuerza relativa de un elefante del tamaño de un hombre?

Resultados: a) no; b) 0,17; c) 0,73.

24. En un experimento para determinar la potencia muscular hacemos correr conejos por una rampa de 2 m de longitud que forma un ángulo de 15° con la horizontal. Hacemos la experiencia con conejos de 2, 4 y 8 kg. ¿Qué dependencia de la potencia muscular respecto a la masa es la más plausible si se obtuviera uno de los siguientes resultados?

- a) la velocidad observada no depende de la masa de los conejos;
- b) las velocidades están en la proporción siguiente:

$$v_2 : v_4 : v_8 = 2^{-1/3} : 4^{-1/33} : 8^{-1/3}$$

Resultados: a) $P \sim M$; b) $P \sim M^{2/3}$.

25. Demostrar que la velocidad límite de caída libre de dos animales con la misma forma y distinto tamaño es mayor para el animal mayor.

26. La velocidad de las aves para mantener el vuelo sigue una ley de escala del tipo $v \sim M^{1/6}$, en promedio, para cada especie. Demostrar este resultado suponiendo que la fuerza de sustentación depende del área de las alas y de la velocidad al cuadrado.

27. Suponiendo que el ritmo metabólico sigue una ley de escala $RM \sim M^{3/4}$ y suponiendo también que el volu-

men del corazón del animal es proporcional a su masa, encontrar la ley de escala para la frecuencia cardíaca. ¿Está de acuerdo la ley hallada con los datos empíricos?

Resultado: $f \sim M^{-1/4}$. Esta ley coincide bastante bien con los datos empíricos, ya que se observa que los animales más pequeños tienen una frecuencia cardíaca mayor.

CAPÍTULO

Elasticidad: huesos, músculos, macromoléculas

2

La mecánica clásica elemental se sustenta sobre los conceptos de fuerza, de partícula y de sólido rígido. Basándose en estos supuestos se analiza el movimiento de objetos que no cambian de tamaño ni de forma. Sin embargo, los objetos constituidos por materiales reales siempre pueden deformarse e incluso romperse cuando se les aplican fuerzas o momentos. En este capítulo estudiamos aquellas sustancias que por la acción de fuerzas o momentos no sólo se mueven, sino que también se deforman y que, una vez desaparecida la causa de la deformación, recuperan completa o parcialmente su forma y su tamaño inicial.

El comportamiento de los materiales deformables se debe a las fuerzas de interacción que actúan entre sus moléculas; sin embargo, los efectos de estas fuerzas pueden determinarse fácilmente, al menos a un nivel elemental como es nuestra pretensión, atendiendo a sólo unas pocas magnitudes macroscópicas. En este capítulo no abordaremos una descripción molecular de la deformación, sino que nos limitaremos a una descripción macroscópica.

2.1. Esfuerzos

Al analizar el comportamiento de los objetos deformables, se utiliza el concepto de *esfuerzo* σ que se define como la fuerza por unidad de área, es decir,

$$\sigma = F/A \quad [1]$$

donde el área A en cada objeto depende del tipo particular de esfuerzo de que se trate.

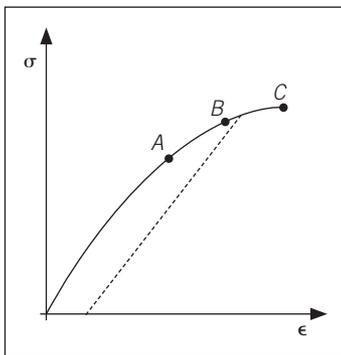


Figura 2.1.

Cuando un material se deforma por la acción de un esfuerzo no muy grande, los desplazamientos relativos de los diversos puntos del material son proporcionales a la fuerza; decimos entonces que el material se comporta linealmente. Si, en cambio, el esfuerzo aplicado es grande, la deformación deja de ser proporcional a la causa que la produce y estamos entonces en la región denominada no lineal. La región de no linealidad puede ser elástica y no elástica. Si es elástica (región A-B de la Figura 2.1), al cesar el esfuerzo aplicado el objeto recupera el tamaño y la forma iniciales; en cambio, en la región no elástica o región plástica (región B-C de la Figura 2.1), al cesar el esfuerzo persiste una deformación permanente. Un material no resiste indefinidamente cualquier esfuerzo que se le aplique, sino que es capaz de soportar un esfuerzo máximo más allá del cual se produce una rotura del material. En la Figura 2.1 se ilustra el comportamiento típico de un material sometido a un esfuerzo de tracción donde aparecen los distintos comportamientos descritos en este párrafo.

Este capítulo lo dedicamos esencialmente al comportamiento elástico de los materiales, es decir, a la región de la Figura 2.1 que abarca hasta el punto A, aunque también nos referiremos en algunos casos a ciertos aspectos elementales del comportamiento no lineal y del comportamiento plástico.

En la Figura 2.2 podemos ver los cuatro tipos de esfuerzo más elementales, a saber, el de tracción, el de compresión, el tangencial y el de torsión.

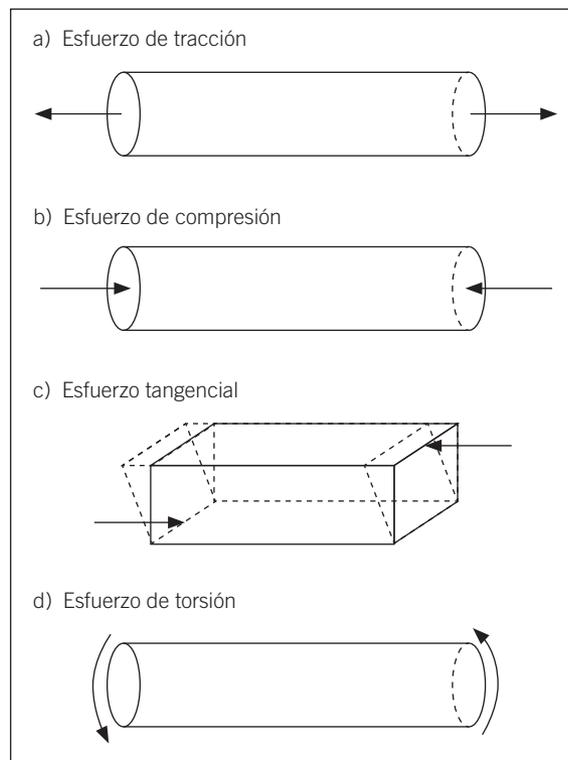


Figura 2.2. Cuatro tipos de esfuerzos.

2.2. Esfuerzos de compresión y de tracción

El esfuerzo de tracción se da cuando se somete un cuerpo a dos fuerzas iguales y de sentido contrario tal como se ve en la Figura 2.2a. El esfuerzo es la fuerza por unidad de área transversal con que se estira del objeto. Si estiramos de una goma elástica, de una barra de madera o de una viga de hierro, estamos sometiendo estos objetos a esfuerzos de tracción. Si no actúa ninguna otra fuerza, los objetos seguirán en reposo, ya que la fuerza total sobre cada uno de ellos es cero, pero en cambio se deformarán.

La deformación que corresponde a un esfuerzo de tracción se mide mediante un parámetro denominado *deformación unitaria* ε , que corresponde al cociente entre la variación de longitud del objeto en una dirección y su longitud en esa misma dirección antes de estar sometido a la tracción.

Empecemos considerando la deformación en la dirección de la tracción. La deformación se define como el cociente

$$\varepsilon = \Delta l / l_0 \quad [2]$$

donde Δl es el alargamiento del objeto y l_0 su longitud inicial.

Si el esfuerzo no es muy grande, es decir, el objeto se mantiene en la región de linealidad, el esfuerzo es proporcional a la deformación. La constante de proporcionalidad es un parámetro característico de las propiedades

elásticas del material, que se denomina módulo de Young (E). En la Tabla 2.1 se ofrecen valores del módulo de Young de diversos materiales. La expresión matemática que define la relación entre el esfuerzo y la deformación es la siguiente:

$$\sigma = E\varepsilon \quad [3]$$

Tabla 2.1. Valores aproximados del módulo de Young E para un esfuerzo de tracción, expresados en N m^{-2}

Acero	20×10^{10}
Aluminio	7×10^{10}
Caucho	1×10^6
Cobre	11×10^{10}
Hierro	19×10^{10}
Hueso	$1,6 \times 10^{10}$
Latón	9×10^{10}
Plomo	$1,6 \times 10^{10}$
Tungsteno	36×10^{10}
Vidrio	7×10^{10}

La ecuación [3] es idéntica a la ley de Hooke, que se suele usar en mecánica elemental para relacionar la fuerza que ejerce un muelle separado de su posición de equilibrio una distancia Δl :

$$F = k\Delta l \quad [4]$$

donde k es la denominada constante elástica. Las ecuaciones [3] y [4] son fáciles de relacionar. En efecto, si el objeto de longitud l_0 es mantenido bajo la acción de un esfuerzo de tracción constante σ y se deforma una longitud Δl , al sustituir [1] y [2] en [3] y reordenar términos la fuerza se puede expresar mediante la ecuación siguiente:

$$F = (EA/l_0)\Delta l \quad [5]$$

expresión que formalmente es idéntica a [4]. El término entre paréntesis nos da una forma para la constante elástica de un objeto homogéneo y de sección A constante. La relación anterior se mantiene válida mientras el objeto esté sometido a esfuerzos que se encuentran en la región lineal.

Ejemplo 2.1

El módulo de Young de la resilina, una proteína flexible parecida al caucho que se encuentra en los artrópodos, se determinó mediante experimentos hechos con el tendón elástico de las patas del saltamontes. El tendón tenía inicialmente 0,72 mm de longitud y 0,13 mm de diámetro y una carga de 2,4 g lo alargaba hasta una longitud de 1,39 mm. A partir de estos datos, calcular el esfuerzo, la deformación unitaria y el módulo de Young.

Los datos del ejercicio nos permiten conocer directamente tanto el esfuerzo como la deformación unitaria. En efecto,

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

donde F , la fuerza de tracción que alarga el tendón, corresponde al peso, es decir,

$$F = mg = (2,4 \times 10^{-3} \text{ kg})(9,81 \text{ m s}^{-2}) = 2,35 \times 10^{-2} \text{ N}$$

y A es el área, que se calcula según

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} (0,13 \times 10^{-3})^2 \text{ m}^2 = 1,33 \times 10^{-8} \text{ m}^2$$

Por tanto, el esfuerzo σ resulta

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2,35 \times 10^{-2} \text{ N}}{1,33 \times 10^{-8} \text{ m}^2} = 1,77 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}$$

La deformación unitaria es el cociente entre el alargamiento y la longitud original, es decir,

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

El alargamiento lo calculamos a partir de la diferencia entre la longitud inicial y la longitud del tendón después de ser cargado con el peso,

$$\Delta l = l - l_0 = (1,39 - 0,72) \text{ mm} = 0,67 \text{ mm} = 0,67 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Por tanto, la deformación ϵ queda

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0,67 \times 10^{-3} \text{ m}}{0,72 \times 10^{-3} \text{ m}} = 0,93$$

En la expresión [5] podemos despejar el módulo de Young E :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

En consecuencia, como los valores del esfuerzo y de la deformación unitaria ya se han determinado, el cálculo del módulo de Young es directo,

$$E = \frac{1,77 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}}{0,93} = 1,9 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}$$

Observemos que el valor del módulo de Young obtenido para la resilina corresponde al de un material elástico parecido al caucho.

El esfuerzo de compresión se produce cuando dos fuerzas iguales y de sentidos opuestos comprimen un objeto (véase Figura 2.2b). La expresión que relaciona el esfuerzo de compresión con la deformación es la misma ecuación [3] con la salvedad de que el valor del módulo de Young para los

esfuerzos de compresión en los materiales no homogéneos es menor que para los esfuerzos de tracción. Los materiales homogéneos tienen el mismo módulo de Young para la compresión y la tracción.

Al comprimir o estirar un objeto en una dirección se produce también una contracción o una expansión en las direcciones perpendiculares a la misma. La contracción o expansión en anchura w o en altura h están relacionadas con la deformación en la longitud de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma' \frac{\Delta l}{l_0} \quad [6]$$

donde σ' es el módulo de Poisson, que tiene un valor característico para cada material y que suele ser positivo. El módulo de Young y el módulo de Poisson especifican de forma completa las propiedades elásticas de un material homogéneo e isotrópico. En los materiales cristalinos las dilataciones o las contracciones pueden diferir de una dirección a otra y, por tanto, para caracterizarlos hay que disponer de más coeficientes. No obstante, en los casos de interés para nuestro análisis, basta suponer que el material es isotrópico y homogéneo y que, por tanto, los dos parámetros mencionados son suficientes.

Al trabajar con esfuerzos de tracción o con esfuerzos de compresión nos queda tener en cuenta una última consideración, que se refiere a la actuación simultánea de varios esfuerzos. Si se cumplen las ecuaciones [3] y [6], es decir, que los desplazamientos dependen linealmente de los esfuerzos, se cumple el denominado *principio de superposición* según el cual si sobre un cuerpo actúan unas fuerzas en una dirección que originan una deformación y sobre otra dirección actúan varias fuerzas que producen diversas deformaciones, la deformación final será la suma de cada una de las deformaciones que individualmente ejerza cada fuerza. Este principio es muy útil para analizar lo que ocurre cuando un objeto está sometido a un esfuerzo de compresión global, es decir, cuando está sometido a una presión.

Se define el módulo de compresibilidad como la relación entre el esfuerzo volumétrico o presión y la deformación volumétrica $\delta V/V$ con que responde el material. Si la presión no supera la región lineal de comportamiento del material, la relación entre ambas magnitudes se escribe

$$p = -\kappa \frac{\delta V}{V}$$

donde κ es el módulo de deformación volumétrica o módulo de compresibilidad. Si las propiedades elásticas de un material homogéneo e isotrópico están caracterizadas únicamente por dos coeficientes, debe existir una relación entre el módulo de Young E , el módulo de Poisson σ' y el módulo de compresibilidad κ , que vale

$$\kappa = -\frac{E}{3(1 - 2\sigma')}$$

Vemos por tanto que el módulo de compresibilidad no es una magnitud independiente del módulo de Poisson y del módulo de Young. Este caso particular se cumple en general, como hemos dicho arriba, si el objeto es isotrópico y homogéneo.

La ley de Hooke sirve también para encontrar la relación entre la fuerza por unidad de longitud, la tensión de una pared elástica de módulo de Young conocido, en función del grosor h y el radio en reposo de un conducto cilíndrico elástico. Esta situación se asemeja a la dilatación periódica que experimentan las arterias al conducir la sangre.

Para encontrar esta relación supongamos que la situación corresponde a la de la Figura 2.3. Según la ley de Hooke,

$$\frac{F}{A} = E \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right) \quad [7]$$

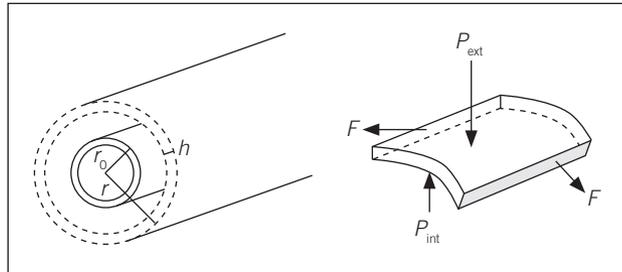


Figura 2.3.

En el caso que nos ocupa, la longitud de la pared sin deformar es $l_0 = 2\pi r_0$, mientras que la longitud l del conducto deformado es $l = 2\pi r$. Por tanto, la expresión [7] queda

$$\frac{F}{A} = E \left(\frac{2\pi r - 2\pi r_0}{2\pi r_0} \right) \quad [8]$$

El conducto es cilíndrico de longitud L , por tanto el área que corresponde a las ecuaciones anteriores corresponde al producto hL , ya que es en esa área donde actúa la fuerza que produce la dilatación del conducto. En efecto, si es un exceso de la presión entre el interior y el exterior lo que induce la dilatación del tubo, esta dilatación estará producida por un esfuerzo de tracción F que induce la variación de la longitud de un elemento de superficie y, por tanto, una variación del radio (véase Figura 2.3).

Con estas condiciones, la ecuación [8] queda

$$\frac{F}{L} = Eh \left(\frac{2\pi r - 2\pi r_0}{2\pi r_0} \right) \quad [9]$$

o lo que es lo mismo,

$$T = Eh \frac{(r - r_0)}{r_0} \quad [10]$$

donde T , la tensión, es la fuerza por unidad de longitud $T = F/L$. La relación entre la tensión y el exceso de presión $p_e = p_{int} - p_{ext}$ se suele escribir como

$$p_e = \frac{T}{r_0} \quad [11]$$

y por tanto, la relación [10] queda finalmente

$$p_e = Eh \frac{(r - r_0)}{r_0^2} \quad [12]$$

Esta última ecuación relaciona la diferencia de la presión entre el exterior y el interior del conducto, con el radio y el radio de equilibrio.

Ejemplo 2.2.

Determinar la presión p_e que hay que ejercer sobre una manguera de paredes de goma ($E = 10^6 \text{ N m}^{-2}$) de 1 cm de radio y de un espesor de 1 mm para obturar totalmente el flujo de agua.

La obturación completa de la manguera comporta que el radio r sea 0. Por tanto, la ecuación [12] quedará

$$p_e = \frac{Eh}{r_0}$$

Si se sustituyen los datos del ejercicio resulta

$$p_e = \frac{10^6 \text{ N m}^{-2} \cdot 10^{-3} \text{ m}}{10^{-2} \text{ m}} = 10^5 \text{ N m}^{-2}$$

Para acabar busquemos la relación entre p_e y la tensión T ejercida por un material. Esta relación recibe el nombre de ley de Laplace. Consideremos sistemas elásticos que contienen o transportan un fluido, como los vasos sanguíneos, las membranas celulares, la manguera del ejercicio anterior, o un balón. Estos sistemas se caracterizan, como acabamos de ver, por un equilibrio entre la presión parietal, es decir, la diferencia de presiones entre el interior y el exterior, y la tensión producida por el material.

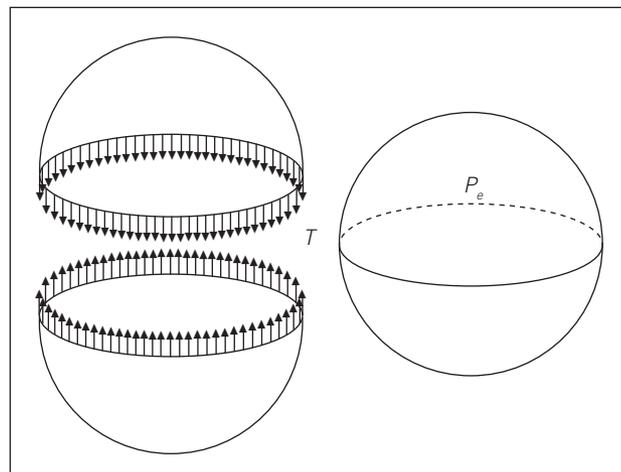


Figura 2.4. Tensión parietal en una esfera.

Consideraremos sistemas con simetría esférica o cilíndrica por mor de sencillez. La situación dinámica que pretendemos estudiar es el equilibrio entre la tensión parietal y el exceso de presión. Imaginemos el sistema de la Figura 2.4. En él vemos una esfera que se mantiene en equilibrio porque, por una parte, la presión en su interior es más grande que en el exterior y que, por otra parte, no se separa en dos mitades, por ejemplo, gracias a la tensión parietal. La fuerza ejercida por la presión es $p_e \pi r^2$, ya que el área de la semiesfera proyectada sobre la dirección vertical es el área del círculo πr^2 ; la fuerza ejercida por la tensión T (fuerza por unidad de longitud) es $T2\pi r$, donde $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia. La condición de equilibrio es

$$T2\pi r = p_e \pi r^2 \quad [13]$$

con lo cual resulta

$$p_e = \frac{2T}{r} \quad [14]$$

La expresión [14] se conoce como la ley de Laplace para la esfera. Los dos casos más interesantes son aquellos en que T cumple la ley de Hooke y depende del tamaño de la superficie, como en el ejemplo anterior, como, por ejemplo, en los vasos sanguíneos, en la membrana celular o, en general, en los sistemas elásticos, y aquellos en que T no depende del tamaño de la superficie, como son los casos de líquidos en contacto con un gas, que serán estudiados más adelante.

De forma análoga podemos ver la expresión que corresponde al estudio de un sistema con geometría cilíndrica (véase Figura 2.5). En este caso la fuerza ejercida por la presión p_e resulta ser $p_e 2rl$, donde l es la longitud del conducto y r su radio interno, y la fuerza que ejerce la tensión es $T2l$. La condición de equilibrio conduce a

$$p_e 2rl = T2l \quad [15]$$

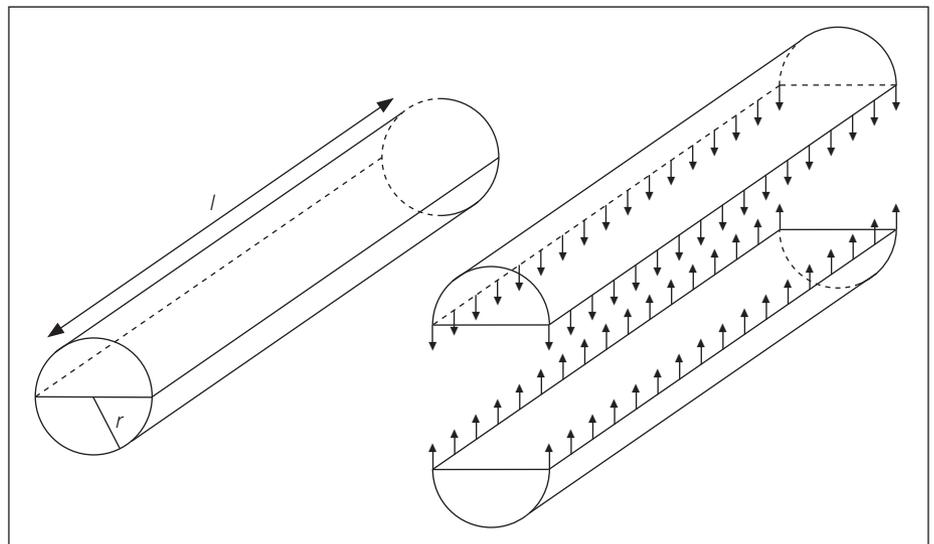


Figura 2.5. Tensión parietal en un cilindro.

con lo cual

$$p_e = \frac{T}{r} \quad [16]$$

En fisiología a la presión p_e se la conoce como presión transmural, que es la diferencia de presión entre las paredes de un vaso sanguíneo. A pesar de su sencillez, las ecuaciones anteriores tienen numerosas aplicaciones, algunas de las cuales veremos en este texto.

Ejemplo 2.3.

En un recién nacido sano la tensión superficial alveolar al final de la espiración es de $5 \times 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$ y el radio del alvéolo es de $50 \times 10^{-6} \text{ m}$. En los niños que sufren la enfermedad de la membrana hialina, la tensión superficial al final de la espiración vale $25 \times 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$ y el radio alveolar $25 \times 10^{-6} \text{ m}$. Evaluar el valor de la presión necesaria para inflar los alvéolos en cada caso.

Para calcular la diferencia de presiones necesaria para inflar los alvéolos utilizamos la ley de Laplace suponiendo que los alvéolos son esferas, con lo que la utilizamos en la forma de la ecuación [14]. En un recién nacido sano

$$p_e = \frac{2T}{r} = \frac{2 \times 5 \times 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}}{50 \times 10^{-6} \text{ m}} = 2 \times 10^2 \text{ Nm}^{-2}$$

En cambio, en un recién nacido enfermo

$$p_e = \frac{2T}{r} = \frac{2 \times 25 \times 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}}{25 \times 10^{-6} \text{ m}} = 2 \times 10^3 \text{ Nm}^{-2}$$

Por tanto, el niño enfermo deberá realizar un esfuerzo superior para respirar, dado que tendrá que conseguir una presión p_e diez veces mayor que la del niño sano.

2.3. Flexión

Casi todas las estructuras mecánicas, desde las vigas hasta los huesos, pasando por los troncos de los árboles, están sometidas a diferentes esfuerzos. Al considerar en el apartado anterior los esfuerzos de tracción y de compresión, la forma de un objeto sometido a estos esfuerzos era irrelevante, dado que la deformación depende únicamente del área. No obstante, para ciertos tipos de esfuerzos, como la flexión y la torsión, la forma juega un papel importante. Por ejemplo, un tubo hueco resiste mejor a ciertos esfuerzos que una barra maciza de la misma longitud construida con la misma cantidad de material. Otro punto interesante es la relación entre la longitud y el radio del tronco de los árboles y de los miembros de los animales.

En la Figura 2.6 se muestran dos casos clásicos de flexión: una barra fija por un extremo y una barra fija por sus dos extremos. En ambos casos la

barra se deforma debido a su propia carga y a la carga que debe soportar. Si las fuerzas se mantienen dentro de unos límites, la flexión será elástica, esto es, una vez cese la causa que la origina la barra recuperará su forma inicial. Si los esfuerzos son moderados, la deformación será proporcional al esfuerzo. En la mayoría de los casos interesará conocer, en un problema de flexión, si alguna de las partes del objeto que flexiona está sometida a esfuerzos que superan la región elástica y, por tanto, aparecen deformaciones permanentes o si incluso se alcanza la zona de fractura.

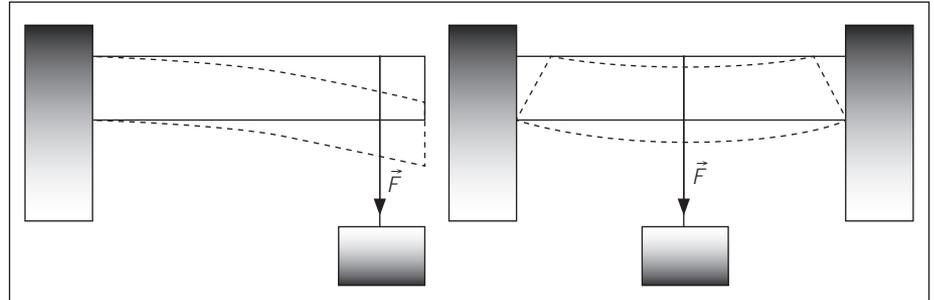


Figura 2.6. Flexión de una barra.

Por supuesto no son sólo las barras horizontales las que están sometidas a los esfuerzos de flexión, sino que hay muy diversas situaciones donde se producen este tipo de esfuerzos. Por ejemplo, las columnas que sostienen los edificios están sometidas a esfuerzos de compresión, pero en ciertas circunstancias pueden estar sometidas también a esfuerzos laterales que conducen a flexiones o pandeos. En lo que sigue vamos a analizar este proceso.

Observemos la Figura 2.7 en que se ha elegido el caso de una barra sometida únicamente a la deformación causada por su propio peso. Suponemos que la situación es de equilibrio, es decir, la suma de todas las fuerzas y de todos los momentos que actúan sobre ella se anulan. Por una parte está el peso P de la barra que se supone acumulado en el centro de la barra; las dos fuerzas ejercidas entonces por los dos soportes son iguales y su valor es la mitad del peso. Por otra parte las líneas de acción de estas fuerzas no coinciden, generándose globalmente un momento que hace que la barra adopte la forma característica que aparece en la figura. Para comprender mejor esto último observemos la Figura 2.8.

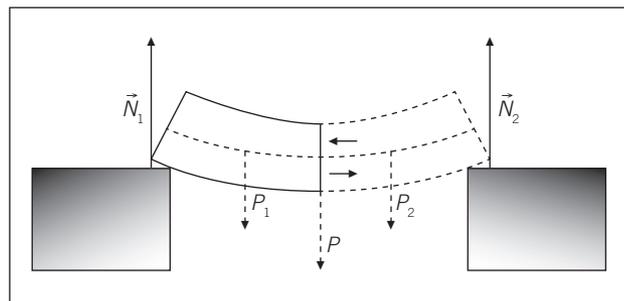


Figura 2.7. Flexión de una barra.

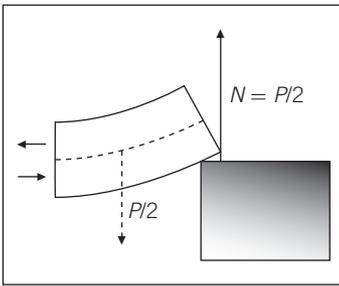


Figura 2.8. Flexión de una barra.

En esta figura se representa la mitad derecha de la barra. Por una parte actúa la fuerza $N = P/2$ que ejerce el soporte y por otra el peso de la mitad de la barra. Ambas fuerzas son iguales pero tienen distintas líneas de acción, lo cual produce un momento neto sobre el objeto. Este momento es compensado por otro momento igual y de sentido contrario generado por las fuerzas producidas por la otra media barra, que induce unas fuerzas que se esquematizan en la figura mediante dos flechas. Estas fuerzas comportan que la mitad superior de la barra esté sometida a esfuerzos de compresión, mientras que la mitad inferior esté sometida a esfuerzos de tracción. Ambas zonas están separadas por una región conocida como superficie neutra, en la que no actúa ninguna fuerza de esta naturaleza.

Aquí radica la dependencia de la flexión con la forma del cuerpo. En efecto, a partir de un simple análisis geométrico podemos ver que aquellas zonas más separadas del centro de la barra, es decir, de la superficie neutra, experimentan una deformación mayor, lo cual quiere decir que sobre ellas se produce un esfuerzo mayor.

A continuación intentamos cuantificar este fenómeno. Para ello primero tenemos que cuantificar la deformación. En la Figura 2.9 vemos un fragmento de barra flexionada en el cual la línea OO' representa la intersección de la superficie neutra con el plano del papel y la línea CC' representa la intersección de una superficie cualquiera situada a una distancia x de la superficie neutra con el plano del papel. Si bien antes de que la barra flexione ambas longitudes son iguales, al flexionar la barra, CC' es mayor que OO' . La diferencia de ambas longitudes la denotamos como δl . Este alargamiento inducido sobre CC' lo podemos escribir como $\delta l = 2a$, donde a es la deformación del segmento CC' en cada lado. El segmento a puede expresarse en función del radio de curvatura, que caracteriza la flexión. En efecto, el radio de curvatura R se define como el radio del arco de circunferencia que sigue la línea OO' . El radio de curvatura caracteriza la flexión de tal forma que un radio de curvatura pequeño comporta una gran flexión, mientras que un radio de curvatura grande comporta poca flexión.

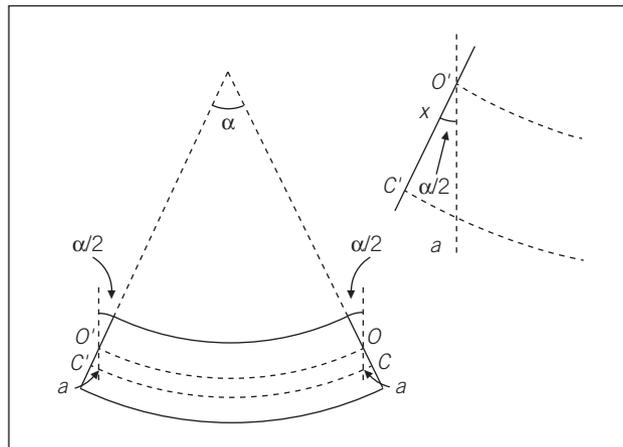


Figura 2.9. Flexión.

En estas condiciones podemos expresar la distancia a según

$$a = x \operatorname{tg}(\alpha/2) \quad [17]$$

pero teniendo en cuenta que el segmento de barra es pequeño y, por tanto, α es pequeño también, podemos aplicar la aproximación

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) \approx \alpha/2 \quad [18]$$

y por tanto,

$$\delta l = 2a = 2x \operatorname{tg}(\alpha/2) \approx 2x\alpha/2 = x\alpha \quad [19]$$

La deformación ε queda ahora

$$\varepsilon = \frac{\delta l}{l} = \frac{x\alpha}{\alpha R} = \frac{x}{R} \quad [20]$$

donde hemos hecho uso de que la longitud l , es decir, OO' , puede escribirse como $l = \alpha R$.

La expresión [20] nos cuantifica hechos comentados anteriormente. Por un lado, cuanto mayor es la separación respecto de la superficie neutra, mayor es la deformación. Por otro lado, cuanto más pequeño es el radio de curvatura también mayor es la deformación.

Además, para cada deformación hay un esfuerzo. Por tanto, en la barra se produce una distribución de esfuerzos. En cada sección estos esfuerzos son distintos, ya que las deformaciones también lo son. Estos esfuerzos producen un momento respecto de la superficie neutra que es precisamente el que compensa el momento producido por el peso y por las fuerzas de los soportes laterales. Este momento se denomina *momento flexor*. En lo que sigue vamos a profundizar en su cuantificación.

Hemos dicho que estudiamos la flexión teniendo en cuenta que las fuerzas son tales que el proceso es lineal, es decir, se cumple la ley de Hooke. En estas condiciones es válida la ecuación [3], en nuestro caso

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{x}{R} \quad [21]$$

Esta expresión nos muestra que el esfuerzo depende de la posición de la superficie en que se evalúe, es decir, $\sigma = \sigma(x)$. Por otra parte

$$\sigma(x) = \frac{dF}{dA} \quad [22]$$

y, por tanto, $dF = \sigma(x) dA$. Como hemos dicho antes, la barra ejerce un momento flexor. Este momento puede calcularse siguiendo el procedimiento clásico de la mecánica. En efecto, el momento elemental dM producido por la fuerza dF es (véase Figura 2.10)

$$dM = x dF = x\sigma(x) dA \quad [23]$$

Si además tenemos en cuenta la expresión [21] resulta

$$dM = E \frac{x^2}{R} dA \quad [24]$$

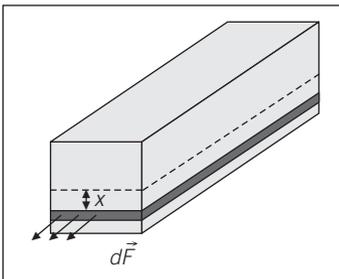


Figura 2.10.

El momento total será, por tanto, la suma de los momentos producidos en todos los elementos de área infinitesimales. Esta suma de infinitos elementos corresponde con la operación matemática de la integración, con lo que podemos escribir

$$M_f = \int dM = \int \frac{Ex^2}{R} dA = \frac{E}{R} I_A \quad [25]$$

donde I_A es el denominado momento de inercia respecto de la superficie neutra, que se define a partir de [25] como

$$I_A = \int x^2 dA \quad [26]$$

y M_f es el momento total, es decir, el momento flexor interno de la barra. La ecuación [25] muestra que cuanto mayor es el módulo de Young de un material, mayor momento flexor interno se induce, e igualmente, cuanto menor es el radio de curvatura, la barra está más deformada y produce un mayor momento interno. En cambio, para un momento externo dado, cuanto mayor sea el radio de curvatura, menor será la flexión experimentada por la barra, lo cual significa que la barra es poco flexible, es decir, que tiene un módulo de Young alto y probablemente tiene una forma adecuada, lo cual le proporciona también un momento de inercia grande.

En efecto, el momento de inercia respecto de la superficie neutra depende de la forma. Cuanto mayor sea I_A para un momento flexor dado, menor será la deformación producida.

Ejemplo 2.4.

Calcular el momento de inercia de la superficie neutra de una barra de anchura a y altura h cuando está apoyada sobre a y cuando está apoyada sobre h (véase la Figura 2.11 y la Tabla 2.2). Calcular los momentos de inercia en el caso de que $a = 20$ cm y $h = 40$ cm.

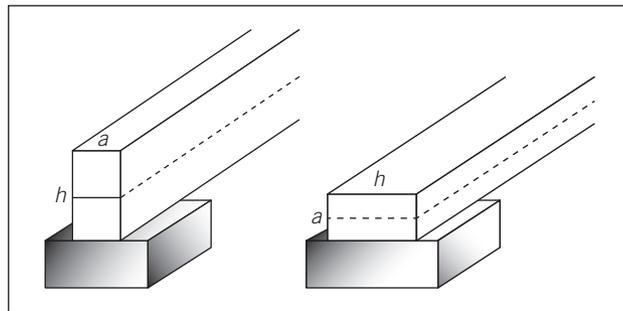


Figura 2.11.

En la Tabla 2.2 figura el momento de inercia de un paralelepípedo de dimensiones transversales a y b . Si la barra está apoyada sobre a , dicha expresión da

$$I_A = \frac{1}{12} ah^3$$

Si, en cambio, la barra está apoyada sobre h , entonces

$$I_A = \frac{1}{12}ha^3$$

Si sustituimos ahora los valores propuestos en el ejemplo, resulta en el caso en que la barra se apoye en a

$$I_A = \frac{1}{12}ah^3 = \frac{1}{12}0,2 \text{ m} \times (0,4 \text{ m})^3 = 0,00107 \text{ m}^4$$

Si, en cambio, la barra se apoya sobre el lado h , el valor del momento de inercia resulta ser

$$I_A = \frac{1}{12}ha^3 = \frac{1}{12}0,4 \text{ m} \times (0,2 \text{ m})^3 = 0,00027 \text{ m}^4$$

Observemos el valor considerablemente más alto en el primer caso, por lo que si la barra se somete a un mismo momento flexor, se deformará menos en el primer caso que en el segundo.

Ejemplo 2.5.

Demostrar que de dos cilindros de masa igual y del mismo material, uno hueco con radios a y b y otro macizo de radio r , el cilindro hueco tendrá un radio de curvatura mayor y, por tanto, flexionará menos.

Para comparar la deformación de los dos cilindros utilizamos la expresión [25]. Despejando R , el radio de curvatura que nos indica la deformación, resulta

$$R = \frac{E}{M_f} I_A$$

Los dos cilindros tienen la misma masa, están sometidos al mismo momento flexor y al ser del mismo material tienen el mismo módulo de Young; por tanto, se deforman de forma distinta porque tienen distintos momentos de inercia. En estas condiciones podemos escribir

$$\frac{I_A}{R} = \frac{I'_A}{R'}$$

Según la Tabla 2.2, el momento de inercia del cilindro macizo es $I_A = \pi r^4/4$ y en cambio el momento de inercia del cilindro hueco es $I'_A = \pi(a^4 - b^4)/4$. Por otra parte, si ambos cuerpos tienen la misma masa y la misma densidad, su volumen debe ser el mismo, por lo cual

$$\pi r^2 l = \pi(a^2 - b^2)l$$

es decir,

$$r^2 = a^2 - b^2$$

Tabla 2.2. Momentos de inercia sobre la superficie neutra de varias figuras geométricas

Paralelepípedo apoyado sobre b	$I_A = (1/12)a^3b$
Cilindro macizo	$I_A = \pi r^4/4$
Cilindro hueco	$I_A = \pi(a^4 - b^4)/4$
Viga en I	$I_A = (a^2bt/2) + (a^3t/12)$

Si probamos que en estas condiciones I_A es menor que I'_A , resultará que $R' > R$ y habremos resuelto el ejercicio. En efecto:

$$I_A = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi(r^2)^2}{4} = \frac{\pi(a^2 - b^2)^2}{4} = \frac{\pi(a^4 + b^4 - 2a^2b^2)}{4} <$$

$$< \frac{\pi(a^4 + b^4 - 2b^4)}{4} = \frac{\pi(a^4 - b^4)}{4} = I'_A$$

y, por tanto, si $I_A < I'_A$, se cumple que $R' > R$ y por tanto se deformará más el cilindro macizo.

Ejemplo 2.6.

De un cilindro macizo de hierro de 20 cm de radio y 2 metros de longitud cuelga un peso de 1.000 kg perpendicularmente al eje longitudinal del cilindro. ¿Cuál será el radio de curvatura en el equilibrio?

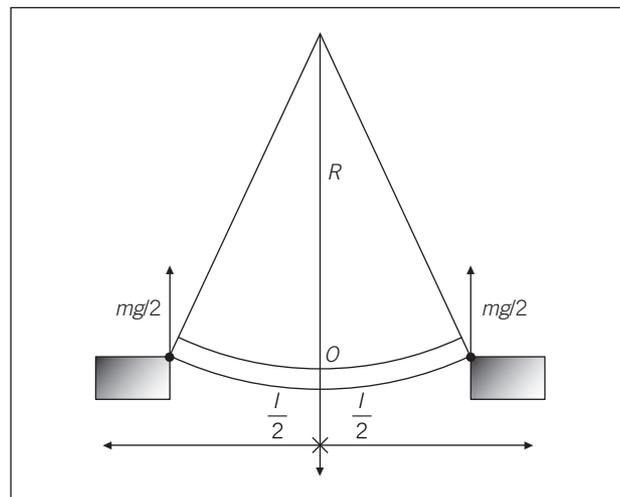


Figura 2.12. Flexión de una barra cilíndrica.

A pesar de que la suma de todas las fuerzas de la Figura 2.12 (por una parte el peso y por otra las fuerzas de contacto con los soportes de los ex-

tremos) sea nula, las fuerzas tienden a flexionar la barra. El momento de las fuerzas externas en cada media barra, respecto del centro de la barra O , es

$$M_e = \frac{mg}{2} \frac{l}{2}$$

La barra flexiona hasta que las fuerzas elásticas respecto de O contrarrestan el momento de las fuerzas de los soportes. El momento de las fuerzas elásticas viene dado por la relación [25]

$$M_f = E \frac{I_A}{R}$$

donde $I_A = \pi r^4/4$. Así pues, existe equilibrio cuando ambos momentos se igualan, es decir, cuando

$$mg \frac{l}{4} = E \frac{\pi r^4}{4R}$$

Despejando R queda

$$R = \frac{E\pi r^4}{mgl}$$

Cuanto mayor sea E mayor será R y el cuerpo flexionará menos, mientras que cuanto mayor sea l , R será más pequeño y mayor será la deformación. En este ejemplo resulta

$$R = \frac{19 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2} \times \pi(0,2 \text{ m})^4}{1000 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m s}^{-2} \times 2 \text{ m}} = 48.726,7 \text{ m}$$

Nótese que este radio de curvatura es muy grande, lo cual corresponde a que la barra se deforma muy poco.

En general, si nos detenemos a pensar sobre los valores de los momentos de inercia respecto de la superficie neutra de la Tabla 2.2, vemos que para construir objetos estructuralmente resistentes y ligeros conviene situar la mayor parte del material lo más lejos posible de la superficie neutra. Esta tendencia tiene, sin embargo, una limitación que reside en la resistencia a la flexión lateral de las paredes finas, que disminuye con el espesor.

La naturaleza tiene buenos ejemplos de estas soluciones estructurales óptimas en los huesos de los animales. El material de que están formados debe tener un gran módulo de Young para evitar el máximo posible las deformaciones, pero también han de formar estructuras suficientemente ligeras para facilitar el movimiento. El módulo de Young de los huesos es moderadamente grande y cubre los requerimientos de resistencia a la compresión y a la tracción y también al ser huecos forman estructuras suficientemente ligeras e igualmente fuertes. Sin embargo, en la naturaleza los fallos de los elementos estructurales se deben más a momentos laterales o de torsión que a la falta de resistencia a los esfuerzos de tracción y compresión.

En lo que sigue vamos a analizar la flexión lateral. En la Figura 2.13 representamos de una forma exagerada lo que entendemos por flexión lateral. Si una columna como la de la figura no tiene su centro de gravedad alineado con la parte central de su base, su peso genera un momento lateral que debe ser compensado por la fuerza estructural de la columna. En ese caso hay equilibrio y la estructura funciona, pero si la columna es demasiado alta, puede ocurrir que las propiedades elásticas del material no sean suficientes para soportar el esfuerzo lateral y la columna se rompa.

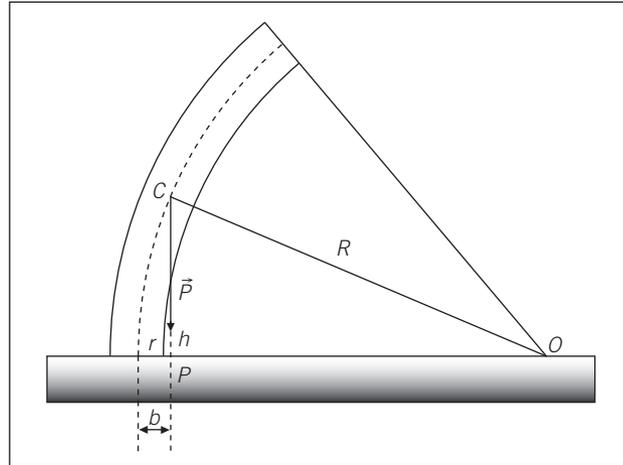


Figura 2.13. Flexión lateral.

Puede obtenerse una relación aproximada entre la altura, el radio y el material de que está compuesta la columna. En lo que sigue vamos a deducir esta expresión.

Sea l la altura de la columna cilíndrica de radio r compuesta de un material de peso específico p_0 y de módulo de Young E . Tal como se ve en la Figura 2.13, b es la distancia entre la vertical del centro de masas, situado a una altura h sobre el suelo, y el centro de la base de la columna. El momento externo M_e generado por el peso de la barra viene dado por

$$M_e = p_0 \pi r^2 h b \quad [27]$$

donde $\pi r^2 h$ es el volumen de la columna. Este momento, si hay equilibrio, ha de ser compensado por el momento flexor, que viene dado por la expresión [25], es decir,

$$M_f = E \frac{I_A}{R}$$

La igualdad de ambas expresiones conduce a

$$\frac{E \pi r^4}{4R} = p_0 \pi r^2 l b \quad [28]$$

La Figura 2.13 está muy exagerada, porque en realidad el radio de curvatura es grande y por tanto la altura h del centro de masas con la columna

deformada puede considerarse aproximadamente igual a la mitad de la altura de la columna, es decir,

$$h \approx \frac{1}{2}l \quad [29]$$

Si, por otra parte, consideramos el triángulo OCP de la figura, el teorema de Pitágoras relaciona R , b y l según

$$R^2 = (R - b)^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2 \quad [30]$$

El desarrollo de esta expresión nos lleva a

$$b^2 - 2Rb + \frac{l^2}{4} = 0 \quad [31]$$

donde despreciamos el término en b^2 frente a los otros términos, dado que en general b es una distancia pequeña comparada con las otras que aparecen en la ecuación anterior y, por lo tanto, b^2 es todavía más pequeña. En estas condiciones nos queda

$$b = \frac{l^2}{8R} \quad [32]$$

Si sustituimos la ecuación [32] en la ecuación [28] y reordenamos términos nos queda

$$l^3 = \frac{2Er^2}{p_0} \quad [33]$$

que se escribe finalmente como

$$l = \left(\frac{2E}{p_0}\right)^{1/3} r^{2/3} \quad [34]$$

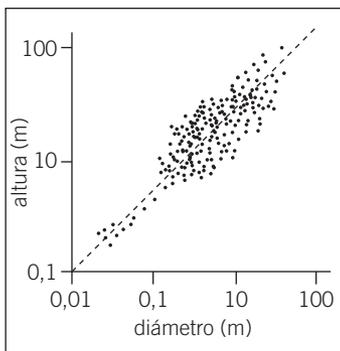


Figura 2.14.

Esta última expresión relaciona la altura de una columna cilíndrica y homogénea con su composición y con el radio.

La expresión [34] se ha usado para justificar la altura de los árboles suponiendo que el pandeo o flexión lateral es la causa última que modula su altura. Efectivamente, T. McMahon publicó en la revista *Science* el año 1973 datos sobre la altura y el diámetro de árboles en Norteamérica (véase Figura 2.14), donde un análisis estadístico muestra que siguen en general y de una forma representativa un comportamiento como el descrito en la ecuación [34]. En los datos de McMahon se observa, sin embargo, una dispersión alrededor de la recta $l \approx r^{2/3}$ que obedece a las distintas formas de árboles que hay en la naturaleza y al hecho de que los momentos laterales debidos al propio peso no son los únicos momentos laterales que deben soportar los árboles, sino que la fuerza del viento sobre la copa del árbol genera un momento lateral aún mayor.

Ejemplo 2.7.

Comparar la resistencia al pandeo de una columna uniforme de madera de radio r de módulo de Young $E = 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ y de peso específico $p_0 = 5.900 \text{ N}$

m^{-3} con el pandeo de un árbol del mismo radio que sigue una ley fenomenológica descrita por $l = cr^{2/3}$, donde c vale $34,9 \text{ m}^{1/3}$.

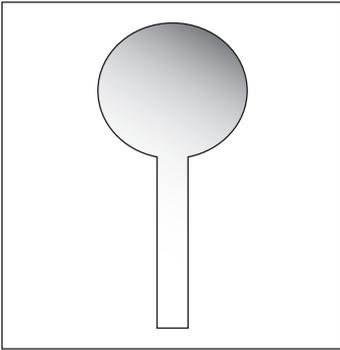


Figura 2.15.

De la expresión [34] se puede calcular directamente el valor de c para la columna. En efecto:

$$c_{\text{col}} = \left(\frac{2E}{\rho_0} \right)^{1/3} = \left(\frac{2 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}}{5900 \text{ N m}^{-3}} \right)^{1/3} = 150,22 \text{ m}^{1/3}$$

Para la columna resulta, pues, una constante c mucho mayor que la que corresponde al árbol. La explicación de esta discrepancia puede encontrarse en la forma del árbol. Árboles como el pino, el olivo o el algarrobo tienen una forma como la de la Figura 2.15. En este tipo de árboles la mayor parte de la masa está lejos del suelo y contribuirá a su inestabilidad. Además, al ser árboles con una copa considerable, los efectos del viento pueden todavía inestabilizarlos más. Así pues, para estos árboles, la altura máxima será menor que la que se obtendría para una columna de radio uniforme.

El caso opuesto se da en árboles como el abeto o el cedro, cuya forma representamos esquemáticamente en la Figura 2.16. Éstos tienen la mayor parte de su masa concentrada cerca de su base, contribuyendo de esta forma a su estabilidad. Para estos árboles el valor de la constante c será superior comparada con los anteriores.

Ejemplo 2.8.

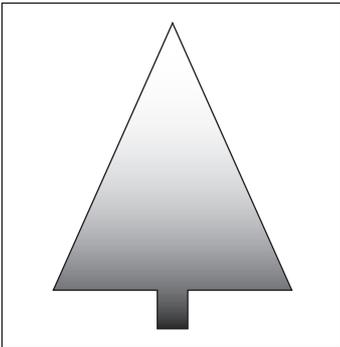


Figura 2.16.

Contrastar las hipótesis formuladas en el Capítulo 1 con los datos experimentales según los cuales el área superficial del cuerpo de los mamíferos superiores está relacionada con la masa según la relación $A \sim m^{0,63}$ y con las hipótesis que el resultado [34] permite formular.

Efectivamente, en el Capítulo 1 usábamos la hipótesis $A \sim l^2$. Teniendo en cuenta que $m \sim l^3$ se obtiene $A \sim m^{2/3}$, es decir, $A \sim m^{0,67}$ que frente al resultado experimental $A \sim m^{0,63}$ representa un buen acuerdo.

Sin embargo, teniendo en cuenta que el cuerpo de los mamíferos superiores tiene una simetría aproximadamente cilíndrica y teniendo en cuenta el resultado [34] se puede mejorar esta relación. En efecto, la masa de un animal está relacionada con su volumen y su densidad ρ , cumpliendo $V = m/\rho$, donde el volumen de un cuerpo de simetría cilíndrica depende de dos parámetros: el radio de la sección transversal y su longitud. Así se cumple

$$V = \pi r^2 l \sim r^2 l$$

Teniendo en cuenta [34], resulta $l \sim r^{2/3}$, con lo cual

$$V \sim r^2 l \sim (l^{3/2})^2 l \sim l^4$$

y, por tanto, $m \sim l^4$, o lo que es lo mismo, $l \sim m^{1/4}$.

El área del animal con simetría cilíndrica es $S = 2\pi r l$. Teniendo en cuenta [34] resulta

$$S \sim r l \sim l^{3/2} l \sim l^{5/2} \sim (m^{1/4})^{5/2} \sim m^{5/8} \sim m^{0,625}$$

Este resultado está mucho más próximo a los resultados experimentales que el obtenido previamente.

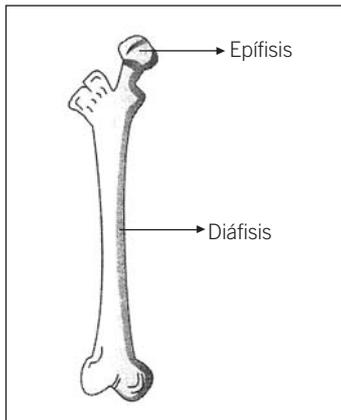


Figura 2.17.

Antes hemos comentado la peculiaridad de los huesos por lo que respecta a su resistencia y a su peso. A continuación hacemos una consideración respecto a su forma. En la Figura 2.17 representamos un hueso largo como el fémur. En cierta forma, en sus extremos o epífisis podemos encontrar un símil con el diseño de las columnas que aguantan los edificios clásicos. En efecto, se sabe que los fallos de las columnas no se producen porque se aplasten bajo la acción de un esfuerzo de compresión, sino que generalmente fallan porque las fuerzas que actúan sobre ellas no están adecuadamente centradas. Si las fuerzas no están centradas, la columna experimenta un pandeo, fenómeno que además es progresivo, es decir, cuanto mayor es, la estructura de la columna es más incapaz de soportar momentos laterales.

Para evitar este efecto los clásicos diseñaron las columnas acabadas con capiteles, que a lo largo de la historia han dado lugar a bellas páginas de la historia del arte, pero cuyo objetivo primordial es dirigir las fuerzas a lo largo del eje de la columna, evitando el pandeo, o retrasándolo en términos de la fuerza. Pues bien, los huesos del esqueleto que estructuralmente han de soportar más peso han diseñado un capitel, como las columnas, llamado epífisis. Su estructura evita de forma efectiva el pandeo.

2.4. Esfuerzos tangenciales

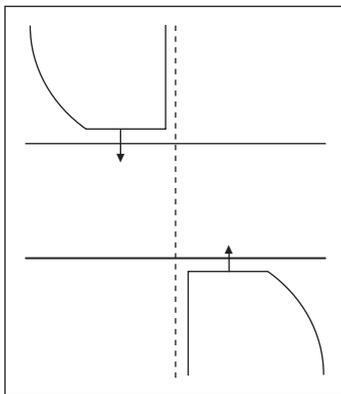


Figura 2.18.

Hasta ahora hemos discutido los esfuerzos de compresión y de tracción. En lo que sigue vamos a considerar los esfuerzos tangenciales que originan las deformaciones tangenciales. En la Figura 2.18 se representa gráficamente en qué consiste un esfuerzo tangencial. Corresponde a la aplicación de fuerzas semejantes a las que se ejercen al cortar un papel con unas tijeras.

Al igual que en los dos apartados anteriores puede hallarse una relación entre el esfuerzo tangencial, la deformación y las características del material. Supongamos que un bloque como el de la Figura 2.19 está sometido a una fuerza F sobre la superficie superior manteniendo la superficie inferior fija. La superficie superior se desplaza una distancia δ como resultado de la aplicación de un esfuerzo tangencial σ_t . La deformación tangencial se define entonces como

$$\varepsilon_t = \frac{\delta}{h} \quad [35]$$

Observemos que la deformación tangencial ε_t es mayor cuanto menor es h . Si nos mantenemos en el régimen lineal, el esfuerzo tangencial es proporcional a la deformación tangencial según la ecuación

$$\sigma_t = G\varepsilon_t \quad [36]$$

donde G es un parámetro que caracteriza el material, denominado módulo de rigidez o módulo cortante. Como ya hemos comentado antes para un só-

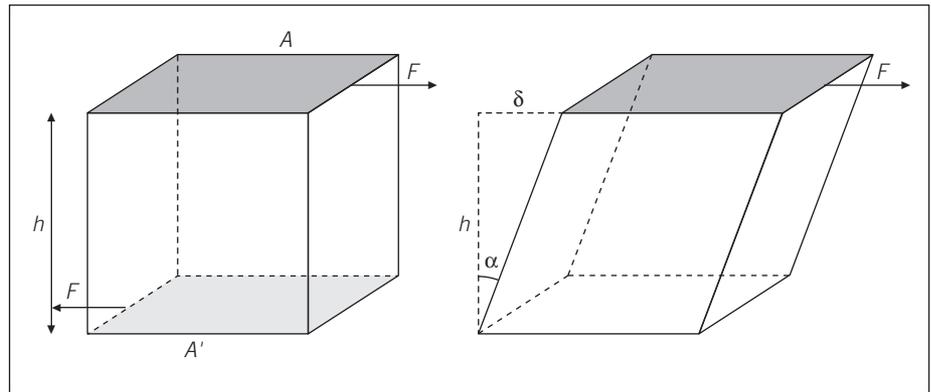


Figura 2.19. Esfuerzos tangenciales.

lido homogéneo e isotrópico, sólo hay dos parámetros independientes que caracterizan sus propiedades elásticas, por lo que existe una relación entre el módulo de rigidez y el módulo de Young y el módulo de Poisson, dada por

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma')} \quad [37]$$

2.5. Esfuerzos de torsión

A continuación analizamos un tipo de deformación que puede estudiarse a partir del análisis del apartado anterior: la torsión. Cuando a un cuerpo se le somete a un momento externo como el de la Figura 2.20, el momento externo produce una deformación que queda compensada por el momento interno generado por el material. En este apartado nos proponemos tratar la relación entre el momento, denominado momento torsor, la deformación y las propiedades elásticas del material.

Supongamos un objeto cilíndrico como el de la Figura 2.20 que está sometido a un momento torsor externo Γ que produce una deformación δ como la de la Figura 2.21 (suponemos que la base del cilindro está fija y no se deforma). Si δ es pequeño, podemos establecer la relación siguiente entre el ángulo α , δ y h :

$$\alpha \approx \frac{\delta}{h} \quad [38]$$

En general, teniendo en cuenta que $\delta = \delta(r)$ (véase Figura 2.22), es decir, cuanto más próxima es la posición al centro del cilindro, menor es la deformación δ , y se cumple

$$\delta = r\varphi \quad [39]$$

con lo cual queda para α

$$\alpha \approx \frac{r\varphi}{h} \quad [40]$$

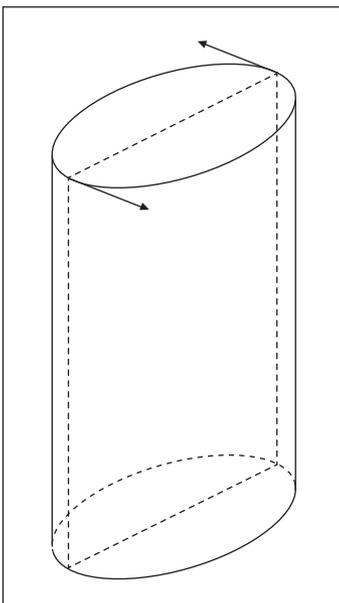


Figura 2.20. Torsión.

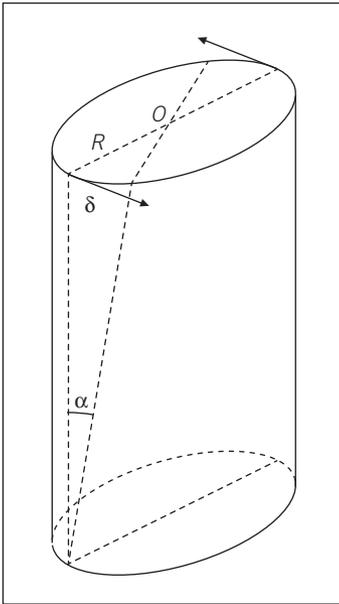


Figura 2.21.

La torsión se produce porque el momento externo se transmite a todos los puntos del cuerpo. Así, si sobre un elemento de área dA actúa una fuerza dF ; como el área está a una distancia r del eje del cilindro, se genera un momento infinitesimal $d\Gamma$, que viene dado por

$$d\Gamma_t = r dF \quad [41]$$

Según [36]

$$\sigma_t = G\varepsilon_t$$

por tanto, teniendo en cuenta [40]-[41] nos queda

$$d\Gamma_t = \frac{G\varphi}{h} r^2 dA \quad [42]$$

dado que $\sigma_t = dF/dA$. El cálculo del momento total se lleva a cabo integrando para todos los elementos de área

$$\Gamma_t = \int_0^R d\Gamma_t = \frac{G\varphi}{h} \int_0^R r^2 dA \quad [43]$$

Análogamente a la flexión, se define el momento de inercia polar I_p como

$$I_p = \int_0^R r^2 dA \quad [44]$$

magnitud que representa la geometría del cuerpo.

Ejemplo 2.9.

Probar que el momento de inercia polar de un cilindro de radio R es $\pi R^4/2$.

Tal como expresa la ecuación [44], el momento de inercia polar se define como:

$$I_p = \int_0^R r^2 dA$$

donde r es la distancia al eje de torsión y dA el elemento infinitesimal de área. En un cilindro, $dA = d(\pi r^2) = 2\pi r \cdot dr$. Por tanto, la expresión anterior queda

$$I_p = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

como se quería demostrar.

De las expresiones [43] y [44] se obtiene

$$\Gamma_t = GI_p \frac{\varphi}{h} \quad [45]$$

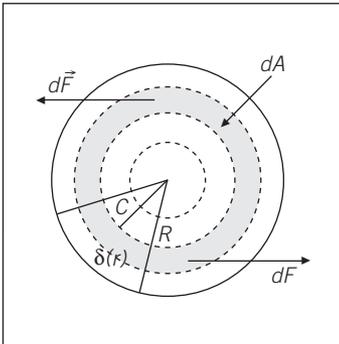


Figura 2.22.

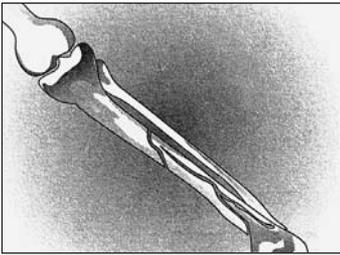


Figura 2.23.

expresión que sirve para relacionar el momento torsor con las propiedades elásticas del material, con su deformación y con su geometría.

Para completar este apartado hacemos referencia a la rotura de los huesos por torsión. Este accidente suele ser la causa más frecuente de las fracturas óseas, especialmente en los accidentes relacionados con la práctica del esquí. Aunque se ha producido un considerable progreso técnico de los materiales usados en este deporte, la acción sobre los huesos de la pierna de momentos grandes, propiciados por la longitud de los esquís y por la sujeción del esquí a la bota, conlleva a menudo lesiones de fracturas espirales como la de la Figura 2.23.

Ejemplo 2.10.

El ángulo máximo que se puede deformar sin romperse una tibia humana es de $3,4^\circ$. Suponiendo que dos tibias de igual longitud y de radios r y r' , con $r > r'$, están sometidas al mismo momento de torsión, ¿cuál de ellas se rompe antes?

La relación entre el momento y la deformación viene dada por la expresión [45], a saber,

$$\Gamma_t = GI_p \frac{\varphi}{h}$$

Si $r > r'$ se cumple que $I_p > I'_p$ dado que el momento polar de inercia es proporcional al radio. En estas condiciones, de la expresión anterior se despeja φ y se obtiene

$$\varphi = \frac{\Gamma_t}{G} \frac{h}{I_p}$$

Si de la expresión anterior calculamos el cociente entre los ángulos φ , teniendo en cuenta que el módulo de rigidez es el mismo para los dos huesos y que ambos huesos son de la misma longitud, resulta

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{I_p}{I'_p}$$

Por tanto, de esta ecuación se deduce que $\varphi > \varphi'$ y que por tanto el hueso de mayor radio puede romperse antes.

2.6. Elasticidad del DNA y de proteínas

Uno de los progresos más llamativos en biomecánica han sido los estudios sobre las propiedades elásticas de macromoléculas biológicas individuales, que tienen una considerable relevancia en el plegamiento de proteínas, en la compactación del DNA, y en las interacciones entre DNA y proteínas como las histonas en la cromatina, las polimerasas en la replicación o las topoisomerasas y helicasas que intervienen en la producción o eliminación

de bucles y anudamientos. Anteriormente, los estudios de elasticidad se llevaban a cabo en muestras macroscópicas que contenían un gran número de moléculas. Por ejemplo, los estudios sobre la contracción muscular se llevaban a cabo a partir de pequeñas fibras musculares de actina y miosina, que contienen centenares o miles de pequeños motores moleculares, en tanto que en la actualidad se estudia el comportamiento detallado de un solo motor de actina-miosina.

Desde 1995, aproximadamente, el desarrollo de técnicas microscópicas sofisticadas, como las pinzas ópticas, las trampas magnéticas, las nanopalan- cas, o los microscopios de fuerza atómica, han permitido el estudio singularizado de macromoléculas, con medidas precisas de las posiciones de sus extremos (hasta el orden de los nanómetros, 10^{-9} m) y de las fuerzas efectua- das sobre los mismos (hasta el orden de los piconewton, 10^{-12} N). Unos de los experimentos usuales consisten en fijar un extremo de una macromolé- cula —DNA, RNA, proteínas— a una superficie y fijar al otro extremo una diminuta bola de material transparente, la posición de la cual puede ser mo- nitorizada con precisión. A continuación, se aumenta suavemente la fuerza sobre el extremo y se mide la elongación de la macromolécula.

Los resultados indican que las propiedades elásticas de las moléculas son fuertemente no lineales, es decir, el alargamiento no es proporcional a la fuerza, salvo en el caso de fuerzas muy pequeñas. La relación entre la se- paración x de extremo a extremo de una molécula de DNA y la fuerza F que actúa sobre dichos extremos viene dada por la expresión matemática

$$F = \frac{k_B T}{l_p} \left[\frac{x}{l} + \frac{1}{4 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2} - \frac{1}{4} \right]$$

donde l_p es la longitud de persistencia, que vale unos 50 nm, l es la longitud máxima del DNA completamente desarrollado, k_B es la constante de Boltz- mann y T la temperatura absoluta. Fragmentos más cortos que la longitud de persistencia se comportan como pequeñas barras rígidas, mientras que fragmentos mucho más largos actúan como hilos perfectamente flexibles. De hecho, la rigidez del DNA depende de la composición relativa de pares GC y AT; los pares GC están unidos por una energía mayor que los de AT y ha- cen que el DNA sea más rígido en las regiones en que son más abundantes.

Al estirar los extremos de la molécula de DNA se observa que para fuerzas menores que unos 15 pN la molécula se alarga linealmente: su elasti- cidad es de tipo entrópico, es decir, está relacionada con la tendencia al des- orden molecular, que hace que la molécula tienda a estar contraída (cues- tión que trataremos en el capítulo 4). Al llegar a unos 25 pN, la molécula alcanza una longitud máxima l , por encima de la cual cuesta mucho producir un alargamiento posterior: hasta unos 60 pN, la macromolécula no se alarga hasta que, alcanzada dicha fuerza, se alarga bruscamente. Este alargamiento es debido a un cambio en la estructura de la doble hélice del DNA, que pasa de la forma B habitual a una nueva forma llamada forma S (de *stretched*, estirada). En la forma B, la distancia entre nucleótidos consecutivos es de

0,34 nm, en tanto que en la forma S la distancia es de unos 0,70 nm. Este cambio de estructura conlleva una cierta energía de transición.

El módulo de Young para la molécula vale

$$E = 4k_B T l_p / (\pi r^4)$$

donde r es el radio del DNA, que vale 1 nm, aproximadamente. La dependencia del módulo de Young con la temperatura es característica de los polímeros e implica que, al calentarlos se encogen, en lugar de dilatarse como ocurre con la mayoría de los sólidos. A la temperatura del cuerpo humano ($T = 310$ K), la energía térmica $k_B T$ vale unos $4 \cdot 10^{-21}$ J. Así pues, como $l_p = 50$ nm y $r = 1$ nm, E vale unos $270 \cdot 10^6$ N m⁻², comparable al de muchos sólidos.

Las fuerzas elásticas tienen una importancia considerable en el plegamiento de las macromoléculas. La energía necesaria para enrollar un alambre de radio r y longitud L , de módulo de Young E formando una espira de radio R , es del orden de

$$W = \frac{1}{8} E r^4 \frac{1}{R^2} L$$

Esta expresión nos servirá para evaluar las energías implicadas en el proceso de formación de la cromatina, en que el DNA se enrolla alrededor de unas esferas de histonas, cosa que reduce mucho su longitud efectiva.

Ejemplo 2.11.

Calcular la energía necesaria para enrollar un fragmento de unos 150 pares de bases de DNA alrededor de una esfera de histonas de 5 nm de radio. El radio medio del enrollamiento es de unos 3 nm, menor que el radio máximo de la esfera.

Como la separación entre pares de bases sucesivos vale unos 0,34 nm, 150 pares de bases corresponderán aproximadamente a unos 50 nm de longitud. Podemos pues llevar a cabo el cálculo de la energía solicitada

$$W = (1/8)(2,7 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2})(10^{-9} \text{ m})^4(3 \cdot 10^{-9} \text{ m})^{-2} 5 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 19,6 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Este valor es unas cuatro veces superior al de la energía térmica típica a esta temperatura, por lo cual es necesario aportar energía.

Así, compactar DNA a una escala reducida requiere un trabajo elástico, que queda agravado por el hecho de que la molécula de DNA está ionizada, es decir, tiene carga eléctrica no compensada a lo largo de su longitud, como veremos en el capítulo dedicado a electricidad (en términos técnicos, decimos que el DNA se comporta como un polielectrolito). Introducir DNA en el reducido espacio de la cápsida de un virus requiere trabajo, que es realizado por un motor molecular rotatorio en la base de la cápsida. Se han efectuado medidas muy detalladas de la fuerza que dicho motor molecular ejerce sobre el DNA, estirándolo por un extremo hasta que el motor ya no puede introducirlo en la cápsida.

Otro tipo de investigaciones en mecánica biomolecular consiste en separar mecánicamente las dos hélices del DNA, estirando una de ellas mientras

se mantiene fija la otra (las fuerzas requeridas son del orden de unos 10 pN). Como las fuerzas de unión de los pares complementarios AT (adenina-timina) y GC (guanina-citosina) son diferentes, si se pudiera medir con gran precisión las fuerzas necesarias para ir rompiendo los enlaces se podría llegar a secuenciar el DNA, es decir, a determinar la secuencia de pares AT o GC, por medios mecánicos. Ello resulta muy difícil ya que los pares de bases están ligados no solamente de forma interna (la A con la T, por ejemplo), sino también con las bases contiguas, los que da lugar a avalanchas en el proceso de ruptura.

También resulta interesante el estudio de la elasticidad de proteínas, y la relación con su estructura terciaria. Las proteínas tienen varios niveles estructurales: la estructura primaria es, simplemente, la lista de la sucesión lineal de aminoácidos que componen la proteína. La estructura secundaria consiste en algunas estructuras locales causadas generalmente por interacciones de tipo puente de hidrógeno entre aminoácidos más o menos próximos. Los dos tipos más usuales de estructuras son las hélices alfa y las láminas beta, así como algunos fragmentos sin estructura especial, o fragmentos en forma de hilo aleatorio. La estructura terciaria consiste en la distribución espacial de hélices alfa, láminas beta e hilos aleatorios; el plegamiento consiguiente tiene una gran importancia para que las proteínas puedan llevar a cabo su función. El plegamiento de proteínas es un problema de gran relevancia en biofísica, y en buena parte se efectúa bajo las interacciones con el agua circundante: las zonas hidrofóbicas tienden a esconderse del agua y las hidrofílicas a estar en contacto con ella. Para que una sucesión de aminoácidos pueda constituir una proteína biológicamente viable debe ser capaz de plegarse en segundos o en unos pocos minutos a una estructura final que pueda llevar a cabo alguna función biológica de interés. Esto es un factor que, evolutivamente, ha hecho que el número de sucesiones de aminoácidos que encontramos en las proteínas sea relativamente bajo en comparación con todas las sucesiones imaginables.

Al someter las proteínas a fuerzas de estiramiento los alargamientos pueden reflejar algunas características de la estructura terciaria y secundaria. Por ejemplo, cuando se alcanza una cierta fuerza crítica, del orden de 10^{-10} N, las estructuras secundarias, hélices alfa y láminas beta, se desenrollan, lo cual conlleva un alargamiento súbito de la longitud total de la proteína. Estos estudios permiten identificar las partes más rígidas y menos rígidas de las proteínas, lo cual conduce a explorar qué papel desempeña esta rigidez diferencial en el funcionamiento de la proteína. También se estudian las fuerzas de las interacciones entre diversas proteínas, o entre proteínas y membranas biológicas, o las fuerzas de anclaje de las proteínas de membrana, lo cual abre conocimientos de interés para la biomedicina. Este conjunto de estudios hacen que temas tan clásicos como la elasticidad vuelvan a ser temas de frontera, pero ahora a escala molecular.

Problemas propuestos

1. La ley de Hooke establece que la fuerza recuperadora al estirar un muelle o un objeto elástico es proporcional al alargamiento o compresión (Δl). Recordando que la energía potencial elástica viene dada por la ecuación

$$U = (1/2)k(\Delta l)^2$$

calcular la energía potencial elástica almacenada en un músculo de langosta ($E = 2 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}$, $l_0 = 0,72 \text{ mm}$, diámetro $0,13 \text{ mm}$) cuando se comprime $0,30 \text{ mm}$. ¿Con qué velocidad saltaría un saltamontes de 2 g si convirtiera esta energía potencial elástica de los músculos de sus patas impulsoras en energía cinética?

Resultados: $U = 1,66 \times 10^{-6} \text{ J}$; $v = 0,06 \text{ m s}^{-1}$.

2. Un peso de 5 kg cuelga de un hilo de acero de 60 cm de longitud y $0,625 \text{ mm}^2$ de sección. De él cuelga un hilo de acero como el anterior que aguanta un peso de $2,5 \text{ kg}$. Calcular el alargamiento de cada hilo. Considerar que el peso de los hilos es despreciable (módulo de Young del acero, $2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$). (Véase Figura 2.24.)

Resultados: $3,53 \times 10^{-4} \text{ m}$ y $1,17 \times 10^{-4} \text{ m}$.

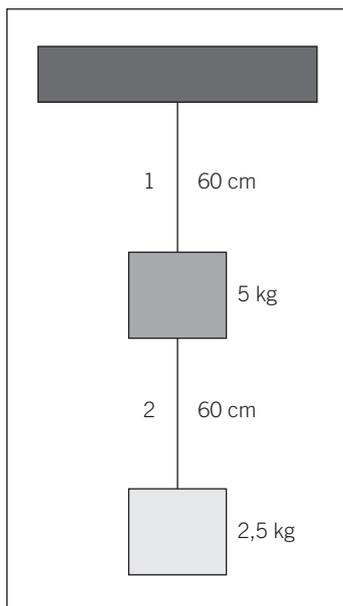


Figura 2.24.

3. Del centro de un hilo de acero de 2 m de longitud y $0,75 \text{ mm}^2$ de sección colgamos un bloque de manera que el hilo forma un ángulo de 10° con la horizontal (Figura 2.25).

¿Cuánto vale la masa del bloque? (módulo de Young del acero, $2 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$).

Resultado: 82 kg .

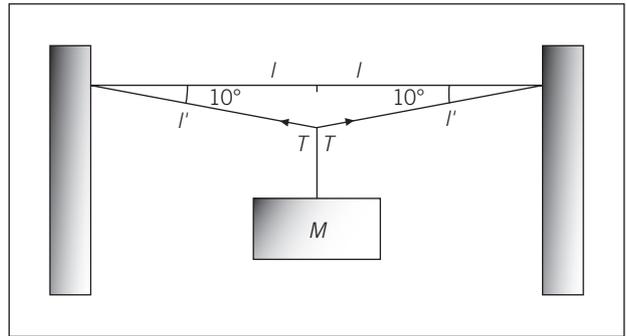


Figura 2.25.

4. Calcular la máxima altura desde la que puede saltar una persona de 70 kg si al llegar al suelo mantiene las piernas rígidas, suponiendo que los huesos de las piernas tienen $0,5 \text{ m}$ de longitud y pueden soportar como máximo una deformación unitaria de 10^{-2} . Suponer que la superficie transversal del hueso en promedio es de 8 cm^2 y que el módulo de Young de los huesos es $2 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$. Suponer que las articulaciones son infinitamente resistentes de modo que no absorben energía potencial.

Resultado: $1,16 \text{ m}$.

5. Un ingeniero diseña un ascensor para unos grandes locales comerciales de forma que pueda subir y bajar como máximo 20 personas de 80 kg de masa media, con un margen de seguridad del 25 por 100 . El peso de la cabina del ascensor es de 10.000 N . La aceleración máxima a la que estará sometido el ascensor tanto al subir como al bajar es de 1 m s^{-2} . En la memoria de calidades de la construcción se especifica que se utilizará un cable de acero de $0,9 \text{ cm}$ de diámetro. El esfuerzo máximo a que puede someterse al acero sin romperlo es de $5 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$. a) Calcular la tensión del cable cuando el ascensor sube y cuando el ascensor baja. b) ¿Se romperá el cable? c) En caso afirmativo, ¿a cuántas personas deberíamos limitar el uso del ascensor para evitar un accidente? d) Si usted tuviera que elegir el cable, de qué diámetro lo elegiría?

Resultados: a) Al subir la tensión es de $32.620,4 \text{ N}$ y al bajar de $26.579,6 \text{ N}$. b) El cable se romperá al subir. c) 19 personas.

6. La elastina es una proteína elástica que se encuentra en los vertebrados. Su módulo de Young vale aproximadamente $6 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. Si estiramos una muestra de elastina de 1 cm de longitud y 0,2 mm de diámetro bajo la acción de una carga de 5 gramos, ¿cuál será su longitud final?

Resultado: 3,6 cm.

7. Un cabello se rompe cuando está sometido a una tensión de 1,2 N. ¿Cuál es el área de su sección transversal si la resistencia a la ruptura de dicho material es $1,96 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$?

Resultado: $6,1 \times 10^{-9} \text{ m}^2$.

8. Hallar la longitud de un alambre de cobre que colgado verticalmente se rompe por su propio peso (esfuerzo de ruptura del cobre, $3,4 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$; densidad del cobre, $8,9 \text{ g cm}^{-3}$).

Resultado: 3.894,2 m.

9. Los músculos de las patas de un insecto se contraen 0,2 mm antes de saltar. La longitud inicial del músculo es de 0,60 mm, su diámetro es 0,10 mm y su módulo de Young $2 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}$. Hallar con qué velocidad inicial saltará el insecto si se impulsa con dos patas y su masa es de 2 gramos.

Resultado: $3,24 \text{ cm s}^{-1}$.

10. ¿Qué aumento de presión es necesario para hacer que 1 m^3 de agua disminuya 10^{-4} m^3 de volumen? El módulo de compresibilidad del agua es $2 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$.

Resultado: $2 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$.

11. Supóngase que las paredes del intestino son un cilindro elástico de 3 mm de grosor y que el tejido tiene de módulo de Young $E = 10^7 \text{ N m}^{-2}$. Su radio en estado de reposo es de 2 cm. Hallar la tensión a la que estarán sometidas las paredes del intestino cuando se dilata hasta 3 cm.

Resultado: $1,5 \times 10^4 \text{ N m}^{-1}$.

12. Determinar la diferencia entre la presión en el interior de una membrana esférica de 268 cm^3 de volumen y la presión exterior si la membrana está sometida a una tensión parietal de 5.000 N m^{-1} .

Resultado: $2,5 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$.

13. Calcular la tensión parietal de un vaso sanguíneo de 0,5 mm de radio que contiene fluido a la presión manométrica de 100 mm de Hg.

Resultado: $6,58 \text{ N m}^{-1}$.

14. Sea una membrana formada por dos capas lipídicas paralelas. Su tensión superficial vale 3 d cm^{-1} . Estimar el orden de magnitud de la fuerza de interacción entre las moléculas lipídicas contiguas si se supone que el radio de cada una de ellas es del orden de 10 \AA . Supóngase, asimismo, que sólo interactúan las moléculas contiguas más próximas.

Resultado: $1,5 \times 10^{-12} \text{ N}$.

15. Supongamos que la energía necesaria para mantener la tensión en las paredes del corazón es proporcional a la propia tensión parietal. A partir de esta hipótesis: a) ¿Cuál es el factor en que se incrementa esta necesidad metabólica en una persona que sufre de hipertensión? (presión sanguínea alta: 150 mm de Hg en comparación con los 90 mm de Hg de una persona normal). b) Examinar en qué factor se incrementa en un atleta cuyo corazón tiene un radio un 10 por 100 mayor del que tiene una persona de vida normal. En los dos casos el corazón puede suponerse como una esfera.

Resultados: a) $5/3$; b) 1,1.

16. Comparar la curvatura C (se define como la inversa del radio de curvatura) de dos barras de madera de las mismas dimensiones, $l = 1 \text{ m}$, $a = 20 \text{ cm}$ y $h = 10 \text{ cm}$, que soportan el mismo momento externo, colocadas en las posiciones que se muestran en la Figura 2.26.

Resultado: $C' = 0,25C$.

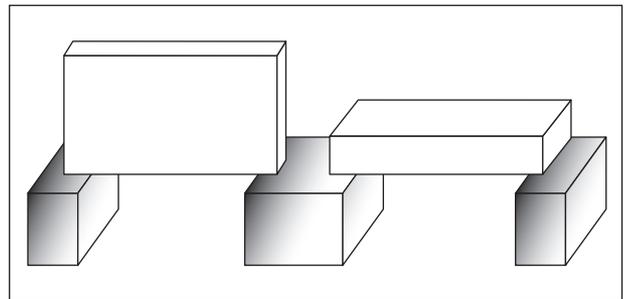


Figura 2.26.

17. Una determinada madera de módulo de Young 10^9 N m^{-2} se parte cuando su deformación unitaria es del orden del 1 por 100. La deformación unitaria de un cilindro de radio r al flexionarse con un radio de curvatura R es del orden de r/R . ¿Qué momento flexor debe aplicarse a un cilindro de radio $r = 2 \text{ cm}$ para que se rompa?

Resultado: 62,8 Nm.

18. Dos cilindros, uno macizo de radio r y otro hueco de radio interior $r/2$, con la misma masa, de la misma longitud y del mismo material, están sujetos a la misma carga, colocada perpendicularmente a su eje transversal. ¿Cuál de los dos se deformará más?

Resultado: El cilindro macizo, ya que la razón de los radios de curvatura es $2/3$.

19. El esfuerzo de ruptura del aluminio es de $5 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$. La tensión parietal de ruptura de una lámina de grosor h viene dada por el producto del esfuerzo de ruptura por el grosor. Hallar el espesor mínimo que debe tener una lámina de aluminio utilizada para construir un depósito esférico de radio $r = 2 \text{ m}$ que ha de contener gas a 16 atmósferas de presión.

Resultado: $h = 3,03 \text{ mm}$.

20. Una rama cilíndrica de radio r se rompe al flexionar cuando su radio de curvatura disminuye hasta $R = 100r$. a) Si $r = 2 \text{ cm}$ y el módulo de Young de la madera es $E = 10^9 \text{ N m}^{-2}$, hallar a qué distancia del tronco central podrá alejarse un mono de 5 kg sin que la rama se rompa. b) ¿Y si el radio fuera de 3 cm ?

Resultados: a) $1,28 \text{ m}$; b) $4,32 \text{ m}$.

21. Se construye un puente provisional sobre un río con troncos cilíndricos de madera de 5 cm de radio y 8 m de longitud. Los troncos se rompen cuando su radio de curvatura es de 3 m . Hallar cuánto vale la carga máxima que pueden soportar los troncos ($E = 10^{10} \text{ N m}^{-2}$. Considerar que el momento flexor es la mitad del peso por la mitad de la longitud).

Resultado: 8.120 N .

22. En un andamio se dispone de un tablón de una madera de $E = 10^{10} \text{ N m}^{-2}$, de sección transversal rec-

tangular de 3 m de longitud, 4 cm de grosor y 30 cm de ancho. ¿Cuánto vale el radio de curvatura del tablón de 30 kg de masa, al sostener en su centro un albañil de 70 kg ? Suponer que el momento de flexión es la mitad del peso multiplicada por la mitad de la longitud.

Resultado: $21,7 \text{ m}$.

23. Se tiene una goma elástica con un módulo de Young $E = 10^6 \text{ N m}^{-2}$, 1 cm^2 de sección y 1 m de longitud. De su extremo se cuelga una masa de 1 kg de masa. a) ¿Cuánto se alargará la goma? b) ¿Cuál será la frecuencia de vibración de la masa al perturbarla de su posición de equilibrio? (Ver capítulo 5).

Resultados: a) $0,1 \text{ m}$; b) $1,59 \text{ Hz}$.

24. El momento de torsión de ruptura en una tibia es 100 Nm . Hallar la fuerza que deben aguantar, como máximo, las fijaciones de un esquí para que no se produzcan rupturas de tibia. Supóngase que la longitud del pie es de 30 cm .

Resultado: $333,3 \text{ N}$.

25. Con una llave inglesa de 25 cm de longitud ejercemos una fuerza de 500 N alrededor de una barra cilíndrica de acero de 2 cm de radio, fija al suelo por uno de sus extremos. Calcular el ángulo de torsión producido si la barra mide 1 m de longitud y si el módulo de rigidez del acero es $G = 8 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$.

Resultado: $0,0062$ radianes.

26. Comparar el ángulo de torsión de dos cilindros de la misma masa, del mismo material y de la misma longitud, uno de ellos macizo con un radio de 1 cm y el otro, hueco, con un radio interior de $0,5 \text{ cm}$.

Resultado: $3/2$.

CAPÍTULO

3

Mecánica de fluidos:
atmósfera, océano, fluidos corporales

Un fluido es tanto un líquido como un gas. La diferencia esencial entre un fluido y un sólido es que aquél no soporta esfuerzos tangenciales, mientras que un sólido, como hemos visto, soporta los esfuerzos tangenciales. En los fenómenos relacionados con la vida los fluidos con los que se trata son sobre todo el agua, el aire y la sangre. Realmente estos fluidos no son los únicos que intervienen en la vida, pero sus propiedades y su comportamiento describen prácticamente todos los entornos y toda la fenomenología que queremos describir en este libro. Por esto les dirigiremos nuestra mayor atención. La comprensión de la atmósfera y el océano exige asimismo algunas ideas básicas de mecánica de fluidos.

3.1. Densidad

Al estudiar los fluidos el esquema clásico de la mecánica elemental cambia un poco. Un buen ejemplo de ello es la poca utilidad del concepto de masa, que se reemplaza por el concepto de densidad, que corresponde a la masa por unidad de volumen. También se utiliza el concepto de volumen específico que es el recíproco de la densidad, es decir, el volumen ocupado por la unidad de masa. La densidad del aire a la presión atmosférica normal es de $1,3 \text{ kg m}^{-3}$, mientras que la densidad del agua es casi mil veces más grande: la densidad del agua dulce es 1000 kg m^{-3} . En general, la densidad de cualquier líquido es mayor que la densidad de cualquier gas.

La densidad de los fluidos depende de la temperatura y de la presión. La relación que expresa esta dependencia se denomina ecuación de estado, que se tratará en el capítulo de termodinámica. La variación de la densidad con la temperatura da lugar a la convección, fenómeno muy importante para el transporte de calor en un fluido. En la mayoría de los líquidos cualquier aumento de la temperatura comporta una disminución de la densidad. Sin embargo hay excepciones de extraordinaria importancia a este comportamiento: así, el agua dulce a cero grados centígrados tiene una densidad inferior que a cuatro grados centígrados.

La densidad del agua depende también de la salinidad, es decir, de la cantidad de sustancias disueltas en el agua. Cuanto mayor es la salinidad, mayor es la densidad. La salinidad y la temperatura son las propiedades más importantes que determinan la densidad del agua. En el océano el agua más profunda es más densa y, por tanto, más pesada, por lo que la configuración del océano, en general, es estable verticalmente. Así, los movimientos del agua más importantes a estudiar en el océano son los horizontales, sin excluir, naturalmente, los movimientos verticales en algunas zonas determinadas que caracterizan los afloramientos de aguas profundas y que se asocian a zonas con considerables recursos pesqueros.

En este capítulo consideraremos que la densidad no depende de la presión; es decir, que el fluido es incomprensible. Más adelante nos referiremos con más detalle a esta variable. En el capítulo anterior veíamos cómo la presión modificaba el volumen y en cambio ahora formulamos la hipótesis de que la densidad no depende apreciablemente de la presión. ¿Cómo es ello posible? A primera vista parece una inconsistencia, y sobre todo si consi-

deramos un gas, como por ejemplo el aire que comprimimos al hinchar la rueda de una bicicleta.

Efectivamente, los gases se comprimen con facilidad, los líquidos en cambio se comprimen con mucha dificultad. Sin embargo, el punto clave para la hipótesis de incompresibilidad radica en que el análisis de los fluidos casi siempre lo realizaremos cuando éstos están en movimiento. Es decir, es muy difícil comprimir un fluido en movimiento. Para que la variación de la densidad con la presión sea apreciable hay que producir una compresión que se mueva a velocidades próximas a la del sonido. En el aire esta velocidad es de 340 m s^{-1} , y en el agua de 1500 m s^{-1} . Ningún movimiento de los que consideraremos se produce a estas velocidades; por tanto, la independencia de la densidad con la presión es una simplificación que tiene mucho sentido en nuestro análisis.

3.2. Viscosidad

En el capítulo anterior hemos visto cómo los sólidos resisten los esfuerzos tangenciales deformándose. Los fluidos, por el contrario, no resisten los esfuerzos tangenciales, ya que no tienen módulo de rigidez, es decir, son infinitamente deformables. Por tanto, en un fluido lo más importante no es saber cuánto se deforma, sino cuán rápidamente lo hace. Sus fuerzas internas no están relacionadas con la deformación, sino con la velocidad, de acuerdo con la ecuación siguiente:

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{v}{h} \quad [1]$$

donde la constante de proporcionalidad μ entre la velocidad por unidad de longitud en la dirección perpendicular a la dirección de la fuerza tangencial v/h y el esfuerzo tangencial F/S . La relación [1] es una forma simple de la ley de Newton de la viscosidad, que supone una relación lineal entre la causa del movimiento del fluido, el esfuerzo tangencial, y la respuesta del fluido, el gradiente de velocidades, mediante una constante de proporcionalidad, la *viscosidad*, que depende de cada fluido. La ley de Newton de la viscosidad se escribe entonces

$$\tau = \mu \frac{dv}{dh} \quad [2]$$

donde τ es la fuerza por unidad de superficie del fluido. Si la viscosidad no depende del movimiento, el fluido se dice newtoniano. En este texto nos dedicaremos esencialmente al estudio de los fluidos newtonianos, aunque en algunos fluidos importantes para la vida, como por ejemplo la sangre, la viscosidad depende del gradiente de la velocidad y, por tanto, es un fluido no newtoniano.

La viscosidad se mide en el sistema internacional en $\text{N} \cdot \text{s m}^{-2}$. En el sistema cgs su unidad, que equivale a $\text{d} \cdot \text{s cm}^{-2}$, se denomina poise, en honor de Poiseuille. También se usa comúnmente el centipoise (cp) = 10^{-2} poise.

La viscosidad del aire es unas cien veces inferior a la del agua. Ambas viscosidades, sin embargo, son pequeñas comparadas con la de la glicerina, que es unas mil veces más grande que la del agua. En la Tabla 3.1 podemos ver los valores de la viscosidad de algunos fluidos.

Tabla 3.1. Viscosidad de algunos fluidos a 20 °C expresada en $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$

Agua	$1,005 \times 10^{-3}$
Aire	$1,81 \times 10^{-5}$
Sangre	$3,015 \times 10^{-3}$
Aceite	0,986
Plasma sanguínea	$1,810 \times 10^{-3}$

El valor relativamente pequeño de la viscosidad del aire y del agua comporta que en muchas situaciones de interés práctico ambos fluidos puedan considerarse como fluidos no viscosos. Con este criterio avanzaremos también en el desarrollo de los temas de este capítulo.

La ecuaciones dinámicas del flujo de un fluido pueden expresarse en función del cociente entre la viscosidad μ y la densidad ρ . La variable que se forma con este cociente es la *viscosidad cinemática* ν , definida como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [3]$$

La viscosidad cinemática es decisiva para discriminar qué tipo de flujo se produce en un fluido. Así su valor será esencial para determinar si un fluido fluye ordenadamente o bien generando una sucesión de vórtices o remolinos. En contraste con la viscosidad dinámica μ , la viscosidad cinemática del aire es unas quince veces mayor que la del agua. Un tema interesante y motivo de controversia está ligado a las implicaciones biológicas de la variación de la viscosidad con la temperatura. La viscosidad es un factor importante al tener en cuenta el consumo energético del corazón para mover la sangre. ¿Representa este argumento energético una tendencia evolutiva hacia sistemas más eficientes desde el punto de vista energético que justifica la temperatura de la sangre en los animales superiores? Por otra parte, los organismos que forman el plancton son más densos que el agua. En aguas tropicales, cuya temperatura es más alta que las aguas de latitudes medias o altas, el plancton se hundiría más fácilmente, ya que la viscosidad del agua es inferior. El plancton en aguas tropicales es más pequeño y tiene formas menos redondeadas que el de las zonas polares. ¿Significa esta característica una adaptación a los distintos valores de la viscosidad?

La viscosidad en un fluido da razón de la fricción entre dos capas de fluido que se mueven una respecto de la otra. Supongamos que estudiamos un fluido, inicialmente en reposo, sobre un plano que se mueve con una cierta velocidad. Si el fluido es perfecto, es decir, sin viscosidad, el movimiento del plano no afecta al fluido. Sin embargo, si el fluido es viscoso, la capa de fluido en contacto con el plano tiende a moverse solidariamente con él. Así, un fluido viscoso mantiene una capa de fluido moviéndose con el plano, y esta capa transmite al resto del fluido su movimiento.

3.3. Presión

La presión es el esfuerzo perpendicular a una superficie dada. Se mide en unidades de fuerza por unidad de superficie, esto es, en el sistema internacional N m^{-2} , también llamada Pascal. Frecuentemente se utiliza como unidad de medida la presión atmosférica estándar o atmósfera, que vale $1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. Esta presión equivale también a 760 mm de Hg o 760 torr, que es una unidad útil para medir diferencias de presión en ciertos entornos, como se verá más adelante.

La presión de un fluido en reposo se puede evaluar a partir de relaciones mecánicas sencillas. Por ejemplo, supongamos que queremos determinar la presión de un fluido en el fondo de un lago de profundidad h en equilibrio hidrostático. Sea p_a la presión ejercida por la atmósfera en la superficie del lago. Sobre un elemento de fluido cualquiera actúan las fuerzas ejercidas por el resto del fluido. Las fuerzas laterales han de anularse unas con otras, de otro modo el elemento de fluido se movería. Por tanto, la única fuerza ejercida por el resto del fluido, que es equilibrada por la fuerza del suelo, es el peso de la columna de fluido más la fuerza correspondiente a la presión atmosférica, que puede expresarse en términos de presión

$$p = p_a + \rho gh \quad [4]$$

El término ρgh se denomina presión manométrica, ya que corresponde a la presión obtenida de la lectura de un manómetro, es decir, la diferencia entre la presión total y una presión de referencia que con frecuencia resulta ser la presión atmosférica. Según esta relación, la presión del agua aumenta a medida que se baja hacia el fondo, y por la misma razón a medida que nos alejamos de la superficie de la Tierra la presión del aire disminuye.

Dado que como hemos dicho antes la presión del aire es unas mil veces inferior a la del agua, el aumento de la presión al descender un metro en

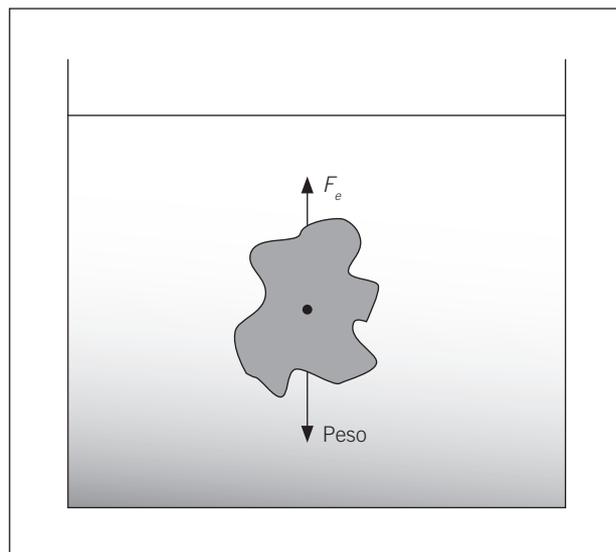


Figura 3.1.

agua es mil veces superior a la disminución de la presión del aire al ascender un metro.

Una consecuencia inmediata de la ecuación [4] es el *principio de Arquímedes*. En efecto, supongamos un objeto sumergido en un fluido tal como se ve en la Figura 3.1. Antes de introducir el objeto, el fluido está en equilibrio, por tanto el resto del fluido ejerce una fuerza, sobre la porción de fluido que ocupa el espacio que ocupará el cuerpo, que iguala el peso de la porción de fluido. Esta fuerza también actúa sobre el objeto sumergido, y se conoce como empuje. Así se enuncia, pues, el principio de Arquímedes: «El empuje sobre un objeto sumergido en un fluido es igual al peso del fluido desalojado».

Ejemplo 3.1.

Una burbuja de aire caliente (30 °C) formada en el suelo sube rodeada de aire frío (10 °C). ¿Cuál es la fuerza total sobre la burbuja si tiene un volumen de 8 m³? (masa molecular media del aire, 29,03 g mol⁻¹, R = 8,314 J K⁻¹mol⁻¹, p = 1 atm).

El principio de Arquímedes constata que el empuje que actúa sobre un cuerpo sumergido en el seno de un fluido es igual al peso del fluido desalojado. En este ejemplo, el cuerpo es la burbuja de aire a 30 °C y el fluido es el aire a 10 °C que la rodea. Por tanto, las dos fuerzas que actúan sobre la burbuja son el empuje y el peso. La fuerza total será la diferencia de ambas fuerzas, es decir,

$$F_T = \rho_{10^\circ\text{C}} Vg - \rho_{30^\circ\text{C}} Vg = (\rho_{10^\circ\text{C}} - \rho_{30^\circ\text{C}}) Vg$$

donde V es el volumen de la burbuja. Para resolver este ejemplo nos falta saber las densidades del aire a las dos temperaturas. Según la ecuación $pV = nRT$ de los gases ideales el número de moles se puede expresar como:

$$n = \frac{m}{M_m} = \frac{\rho V}{M_m}$$

donde m es la masa y M_m la masa molecular media del aire. Introduciendo la ecuación anterior en la ecuación de los gases ideales y despejando ρ queda

$$\rho = \frac{pM_m}{RT}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la expresión para la fuerza total y poniendo los valores numéricos del ejemplo, resulta

$$\begin{aligned} F_T &= \frac{pM_m}{R} \left(\frac{1}{T_{10^\circ\text{C}}} - \frac{1}{T_{30^\circ\text{C}}} \right) Vg = \\ &= \frac{1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} \cdot 29,03 \text{ g mol}^{-1}}{8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}} \left(\frac{1}{283 \text{ K}} - \frac{1}{303 \text{ K}} \right) 8 \text{ m}^3 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} = 6,514 \text{ N} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.

Una barcaza cargada de carbón llega a un puente sobre el canal por donde navega y se encuentra que el carbón está apilado demasiado alto para que pueda pasar por debajo del puente. ¿Qué hay que hacer, sacar o apilar carbón de la barcaza para que pueda pasar?

Supongamos que se añade carbón de tal manera que el nivel del mismo aumenta Δh_c ; la barcaza, al tener más peso, se hunde Δh_b . El principio de Arquímedes establece la relación entre las dos magnitudes constatando que el peso añadido es igual al peso del volumen desalojado, es decir,

$$\rho_c \Delta h_c S g = \rho_a \Delta h_b S g$$

donde ρ_c es la densidad del carbón, ρ_a la densidad del agua, S la sección horizontal de la barcaza y g la aceleración de la gravedad. A partir de la ecuación anterior se puede escribir

$$\frac{\Delta h_c}{\Delta h_b} = \frac{\rho_a}{\rho_c}$$

A la vista de la ecuación anterior podemos analizar dos casos: si el carbón es carbón vegetal, $\rho_c < \rho_a$, y si es carbón mineral, $\rho_c > \rho_a$. En el primer caso, la barcaza se hunde menos que el aumento del nivel del carbón, mientras que en el segundo caso conviene añadir carbón, ya que entonces se da la situación contraria a la anterior y la barcaza se hunde más de lo que aumenta el nivel del carbón.

3.4. Tensión superficial

La cohesión interna, la atracción entre las moléculas del fluido, es un atributo básico que distingue los líquidos de los gases. Así, en condiciones de ingravidez, una gota de líquido al minimizar su área superficial adquiere una forma esférica. Asimismo, en un lago en calma la superficie del agua es plana y sin rizos, ya que ésta es la condición que minimiza el área superficial. Los insectos acuáticos pueden caminar por encima de la superficie del agua, ya que su peso está compensado por la resistencia de la superficie a su deformación.

Las fuerzas de cohesión dan lugar a la tensión superficial, que corresponde a una fuerza por unidad de longitud, o a una energía por unidad de área de la superficie del fluido. ¿De dónde proviene esta energía? Para mostrarlo utilizaremos un modelo molecular del fluido. En un fluido podemos distinguir dos regiones (véase Figura 3.2): la región interior y la región superficial. Mientras que una molécula de la región interior en promedio tiene el mismo número de moléculas que la atraen hacia la derecha que hacia la izquierda, hacia arriba o hacia abajo, y, por tanto, la resultante de las fuerzas es cero, una molécula de la región superficial tiene una fuerza resultante dirigida hacia el

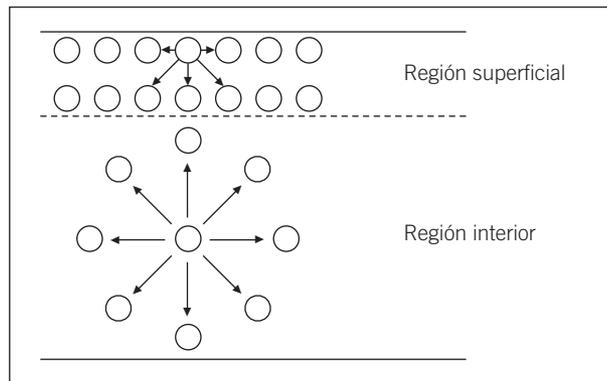


Figura 3.2.

interior del fluido. Esto hace que para desplazar una molécula a la superficie tenga que realizarse un trabajo, es decir, hay que aportar una energía que, evaluada por unidad de área, es lo que conocemos como tensión superficial.

Así, para aumentar la superficie de un fluido tenemos que realizar un trabajo que equivale a la energía potencial de las moléculas de fluido que han de pasar de la región interior a la región superficial. La tensión superficial es una propiedad de cada fluido, en la medida que las moléculas de cada fluido tienen distintas fuerzas de interacción y, por supuesto, si se disuelve una sustancia en un fluido, la disolución tiene una tensión superficial distinta de la del fluido disolvente. Un ejemplo especialmente importante de este fenómeno es el cambio de la tensión superficial del agua a causa de la adición de detergentes o de productos polucionantes.

La tensión superficial no tiene unidades propias y se mide en el sistema internacional en N m^{-1} .

Un último aspecto especialmente interesante relacionado con la tensión superficial es la capilaridad. El experimento clásico del efecto de capilaridad se produce cuando dentro de un recipiente lleno de un líquido, por ejemplo agua, colocamos un tubo delgado, por ejemplo de vidrio (Fig. 3.3), y se observa que el fluido asciende por el tubo hasta una altura determinada. Decimos entonces que el fluido asciende por capilaridad. El efecto depende de la

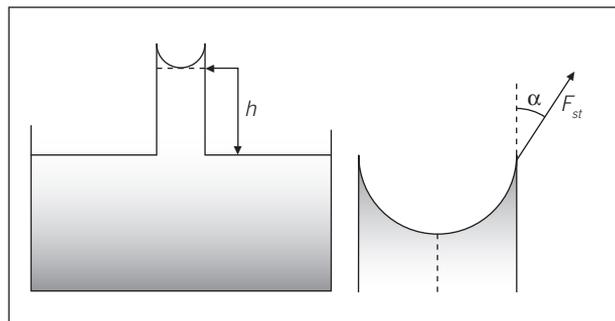


Figura 3.3.

competición entre dos fuerzas, la fuerza de cohesión del líquido y la fuerza entre el líquido y las paredes. Por un lado, la atracción del vidrio hacia las moléculas de agua hace subir el agua por el tubo, pero por otro lado la resistencia a aumentar la superficie del agua, consecuencia directa de la tensión superficial, tiende a frenar el ascenso.

La altura h del tubo a la que llega el agua es aquella en la que la fuerza debida a la tensión superficial iguala en magnitud al peso de la columna de agua, es decir,

$$\gamma 2\pi r = \pi r^2 h \rho g \quad [5]$$

donde γ es la tensión superficial y r el radio del tubo. Así, cuanto mayor es la tensión superficial, el ascenso capilar es más alto, y cuanto mayor es el radio del tubo, menor es el ascenso capilar.

Ejemplo 3.3.

Cuando dos placas de vidrio húmedas de longitud l se mantienen juntas, al sumergirlas en agua observamos que el agua asciende hasta una altura h dentro del espacio entre las dos placas. Encontrar la expresión que relaciona la altura h con la distancia entre las placas d , la tensión superficial γ , el ángulo de contacto φ y la densidad del fluido ρ .

El agua sube por las dos placas gracias a la tensión superficial que actúa en los dos lados con un ángulo de contacto φ , hasta que la componente vertical de la tensión superficial iguala al peso. La componente vertical de la tensión superficial F_y viene dada por

$$F_y = 2\gamma l \cos \varphi$$

donde el factor 2 se debe a que la tensión superficial actúa en las dos placas. El peso del fluido de densidad ρ entre las dos placas es

$$P = \rho V g = \rho l h d g$$

donde $V = l h d$ ya que h es la altura media del agua entre las placas. Si la tensión superficial iguala al peso, estaremos en una situación de equilibrio, y se cumplirá

$$2\gamma l \cos \varphi = \rho l h d g$$

de donde despejando h queda

$$h = \frac{2\gamma \cos \varphi}{\rho d g}$$

que es la expresión que se buscaba.

Durante un tiempo se creyó que el ascenso capilar de la savia por el xilema de los árboles justificaba el ascenso de la savia a todas las ramas y hojas de los árboles, pero tal como se muestra en el ejemplo que sigue, al medir las dimensiones de estos conductos se pudo comprobar que por sí solo no es un efecto suficientemente fuerte para justificar este proceso.

Ejemplo 3.4.

¿Qué diámetro deberían tener los capilares del xilema de los árboles para que la tensión superficial sea una explicación satisfactoria del ascenso de la savia a la copa de una secoya gigante de 100 m de altura? Suponer que la tensión superficial de la savia es igual a la del agua (tensión superficial del agua, $73 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$; ángulo de contacto, $\varphi = 0^\circ$; densidad del agua, 1000 kg m^{-3}).

Supongamos que el xilema de los árboles está formado por capilares de forma cilíndrica de radio r . La savia subirá hasta una altura h gracias a la tensión superficial. La componente vertical de la tensión superficial F_v es

$$F_v = 2\pi r \gamma \cos \varphi$$

donde $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia de radio r donde la savia está en contacto con el capilar. Por otra parte, el peso P de la savia viene dado por

$$P = \rho V g = \rho \pi r^2 h g$$

Por tanto, teniendo en cuenta la situación en que hay equilibrio entre la fuerza de la tensión superficial y la del peso, y despejando r resulta

$$r = \frac{2\gamma \cos \varphi}{\rho h g} = \frac{2 \times 73 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1} \cos 0^\circ}{1000 \text{ kg m}^{-3} 100 \text{ m } 9,81 \text{ m s}^{-2}} = 1,49 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Para que la tensión superficial sea una explicación del ascenso de la savia por los árboles, el xilema debe tener capilares con un diámetro de $0,3 \mu\text{m}$. Las medidas experimentales de este diámetro dan un valor de $2,5 \times 10^{-5} \text{ m}$, que es mucho mayor que el anterior. Por tanto, la tensión superficial no explica por sí sola el ascenso de la savia en los árboles.

3.5. Ecuación de continuidad

A continuación vamos a estudiar propiedades de fluidos en movimiento y propiedades de movimiento de objetos en fluidos. Consideramos un fluido incompresible y newtoniano, es decir, un fluido cuya densidad no depende de la presión y cuya viscosidad no depende del gradiente de velocidad. Este modelo permite comprender una abundante fenomenología.

La ecuación de continuidad es el resultado de aplicar el principio de conservación de la masa al flujo de un fluido. Supongamos un conducto por el cual circula un fluido de densidad ρ constante como el de la Figura 3.4. Nuestro objetivo es evaluar el cambio en la velocidad del fluido al pasar del punto 1 al punto 2. Sea A_1 el área de la sección transversal del conducto en la zona 1 y A_2 el área correspondiente en la zona 2. (En el caso en que el conducto se divida en varias ramificaciones, A_2 es la suma de las áreas de las secciones transversales de cada una de las ramificaciones.) La ecuación de continuidad surge de aplicar el principio de que la masa de fluido que entra por 1 debe salir por 2.

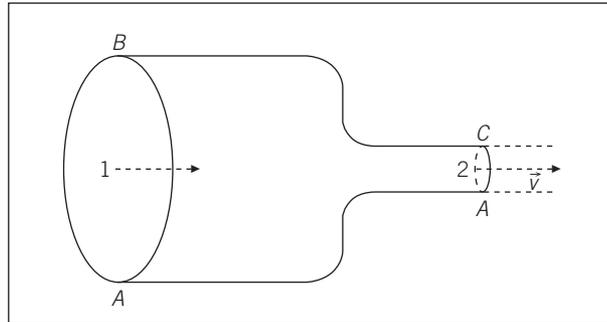


Figura 3.4.

En efecto, en el punto 1, la masa de fluido que pasa a través del área A_1 durante un tiempo infinitesimal dt es

$$dm = \rho A_1 v_1 dt \quad [6]$$

Si el fluido es incompresible, el fluido que pasa por el punto 2 en el mismo tiempo es el mismo, es decir,

$$dm = \rho A_2 v_2 dt \quad [7]$$

La igualdad de ambas ecuaciones nos lleva a la ecuación de continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad [8]$$

El producto Av corresponde al caudal Q de fluido que circula por el tubo. Por tanto, la ecuación [8] equivale a la constancia del caudal. Si el área de salida es mayor que el área de entrada, la velocidad de salida será inferior a la velocidad de entrada.

Si la velocidad del fluido no es la misma en todos los puntos de la sección transversal del conducto, como se da en el flujo de un fluido viscoso, las velocidades v_1 y v_2 que aparecen en [8] corresponderán a la velocidad media sobre la sección correspondiente.

Hay muchos casos de la vida cotidiana regidos por la ecuación de continuidad. Por ejemplo, la ecuación de continuidad explica la forma del chorro de agua que sale por un grifo. Al salir del grifo el agua forma una especie de columna que se hace cada vez más estrecha. Esta forma característica se debe a que el agua se acelera debido a la acción de la gravedad. La continuidad implica, por tanto, que la sección se haga cada vez inferior. Así, a medida que el agua está más alejada del grifo, la velocidad es mayor y la sección es menor hasta llegar incluso a una situación en que la sección es tan pequeña que los efectos de la tensión superficial y la fuerza de resistencia del aire rompen la columna para formar gotas.

Ejemplo 3.5.

Las esponjas de mar son animales que viven en el fondo del mar y cuya alimentación está basada en la continua filtración de agua. En su superficie la es-

ponja tiene aberturas de distintos tamaños por donde circula el agua. El agua entra por las aberturas pequeñas y sale por las grandes. El caudal del agua que fluye por la esponja es muy grande, ya que una esponja es capaz de propulsar a través suyo un volumen de agua igual a su propio volumen cada cinco segundos. Durante mucho tiempo los zoólogos especialistas en estos animales se habían preguntado cómo las esponjas impulsaban el agua por sus conductos internos. Se formulaban distintas hipótesis: la existencia de unos músculos, el impulso mediante flagelos, etc. Para esta última hipótesis existían serias dudas sobre la capacidad de los flagelos de impulsar el agua. Si suponemos que los flagelos pueden impulsar el agua con una velocidad máxima de $50 \mu\text{m s}^{-1}$ y sabiendo que el agua sale a 20 cm s^{-1} por los conductos grandes de salida de 1 cm^2 de área y que el área de los conductos de entrada es de unos 6000 cm^2 , probar si es plausible la propulsión de agua mediante los flagelos.

El flujo del agua está gobernado por la ecuación de continuidad. Por consiguiente, aplicamos la ecuación [8]:

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = \frac{20 \text{ cm s}^{-1} 1 \text{ cm}^2}{6000 \text{ cm}^2} = 0,0033 \text{ cm s}^{-1} = 33,3 \mu\text{m s}^{-1}$$

con lo cual se muestra que es plausible suponer que el agua es impulsada por los flagelos.

Aparte de este cálculo, parece probado que el mecanismo de impulsión del agua a través de las esponjas es el de los flagelos. Sin embargo, en todos los animales no se ha adoptado la misma solución por lo que hace referencia al transporte de fluidos. En los animales superiores se utilizan grandes bombas, el corazón, mientras que los animales pequeños utilizan para impulsar el agua en sus sistemas de filtración flagelos y cilios.

Ejemplo 3.6.

Otro ejemplo de la utilización de la ecuación de continuidad pertenece al campo de la fisiología vegetal y hace referencia a la conducción de la savia en los árboles. En un ejemplo anterior hemos constatado que la acción capilar por sí sola no puede justificar el ascenso de la savia en los árboles. El mecanismo principal que propulsa la alimentación de los árboles es el esfuerzo de tracción o presión negativa que se produce cuando se evapora el agua de las hojas de los árboles. Un árbol evapora $1,5 \times 10^{-8} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ de líquido por cada m^2 de área. Así un árbol de 2 m^2 de área evapora $3 \times 10^{-8} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. El tronco está formado por conductos denominados xilema de $100 \mu\text{m}$ de diámetro que ocupan un 7 por 100 del tronco, y que, por tanto, ocupan un área de $1,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Con estos datos, calcular la velocidad de ascenso de la savia.

El cálculo de la velocidad es simple si se usa la ecuación de continuidad. En efecto:

$$Q = vA$$

donde Q es el caudal total y A el área. Despejando v de la ecuación anterior resulta

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{3 \times 10^{-8} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}}{1,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 2 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$$

La determinación experimental de la velocidad de ascenso de la savia mediante métodos no invasivos lleva a valores de unas cincuenta veces el valor anterior. Este resultado se interpreta como que los xilemas no conducen todos ellos la savia, ya que la mayor parte de ellos no son funcionales y están llenos de aire. En este caso la ecuación de continuidad indica que sólo el 2 por 100 de los xilemas de un árbol conducen la savia.

Hasta aquí nos hemos referido a la ecuación de continuidad para recintos cerrados. Si, en cambio, estudiamos el flujo abierto de un fluido, este principio se cumple también siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones. Definimos línea de corriente como aquella línea que es tangente en todos sus puntos al vector velocidad. Para representar el flujo de un fluido podemos dibujar tantas líneas de corriente como nos convenga, pero dos líneas de corriente no pueden cruzarse, ya que esto querría decir que una misma partícula de fluido puede moverse en dos direcciones diferentes, lo cual es imposible.

En cada línea de corriente, la componente perpendicular de la velocidad es nula. En un flujo en dos dimensiones, dos líneas de corriente configuran un tubo de corriente, en el cual se aplica la ecuación de continuidad, aunque no haya fronteras físicas para el flujo. De esta forma, las líneas de corriente permiten dividir conceptualmente el flujo en un conjunto de tubos de corriente con paredes inmateriales. Los efectos viscosos y el calor pueden atravesarlos, pero, en cambio, no puede haber ningún flujo de masa a su través.

A pesar del gran interés conceptual de las líneas de corriente, su aplicación más importante se da cuando el flujo del fluido es estacionario, es decir, cuando no varía con el tiempo, ya que entonces las líneas de corriente coinciden con las trayectorias de las partículas de fluido. Es precisamente en el flujo estacionario cuando tratamos con la ecuación de Bernoulli, ecuación importantísima y muy útil para la descripción del flujo de fluidos.

La ecuación de continuidad se puede visualizar en múltiples entornos de estudio en meteorología. En las capas altas de la atmósfera (aproximadamente 5000 m) el aire se mueve paralelo a las líneas de corriente que suelen coincidir con las líneas de presión constante. Cuando éstas tienden a unirse, la velocidad del aire aumenta produciéndose una convergencia. El aire entonces tiende a moverse hacia la superficie dando origen a un anticiclón. Si, en cambio, las líneas de presión constante se separan, por la ecuación de continuidad el aire tiende a frenarse y este movimiento indica, en la vertical, una fuerza de succión que impulsa el aire superficial hacia las capas altas, dando lugar a una borrasca.

3.6. Ecuación de Bernoulli

En el apartado anterior hemos aplicado el principio de conservación de la masa. En este apartado aplicamos a la mecánica de fluidos el principio de conservación de la energía. El ámbito de esta aplicación es el de los fluidos ideales, es decir, los fluidos sin viscosidad, además de las hipótesis de incompresibilidad y de flujo estacionario ya mencionadas anteriormente.

Consideremos un tubo de fluido como el de la Figura 3.5. En el apartado anterior hemos visto que podemos escribir que el producto $A_i v_i$ es constante, donde el subíndice i indica la zona del tubo que se considera. Para transportar una determinada cantidad de fluido de volumen dV (sombreado en la figura) desde la zona 1 hasta la zona 2 hay que realizar un trabajo dT definido por

$$dT = (p_1 - p_2) dV \tag{9}$$

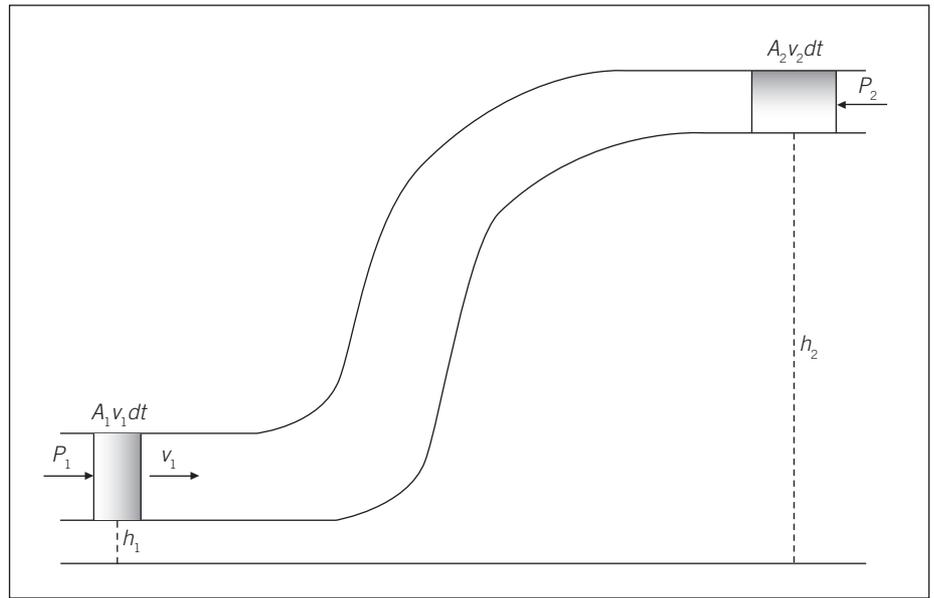


Figura 3.5.

En ausencia de rozamiento, este trabajo debe transformarse en un aumento de energía mecánica del fluido, es decir,

$$dE_m = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)\rho dV + g(h_2 - h_1)\rho dV \tag{10}$$

donde

$$dm = \rho dV \tag{11}$$

en que ρ es la densidad del fluido. El principio de conservación de la energía comporta que

$$dT = dE_m \tag{12}$$

es decir,

$$(p_1 - p_2) dV = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)\rho dV + g(h_2 - h_1)\rho dV \quad [13]$$

Si se reordenan los términos y se elimina dV queda

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad [14]$$

o lo que es lo mismo,

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{cte} \quad [15]$$

donde el valor de la constante es el mismo para todos los puntos de un mismo tubo de corriente. Según la ecuación anterior, o ecuación de Bernoulli, el flujo de un fluido ideal mantiene constante la energía por unidad de volumen. Si se trata del flujo de un fluido viscoso, la suma de los tres términos de la ecuación [15] deja de ser constante y pasa a ser una función decreciente con la distancia. El trabajo por unidad de volumen que hay que suministrar a un fluido viscoso para mantener constante la suma de estos tres términos se denomina pérdida de carga, y es muy utilizada para caracterizar el flujo de fluidos reales por conductos.

A continuación tratamos algunas aplicaciones sencillas de la ecuación de Bernoulli.

1. Fórmula de Torricelli

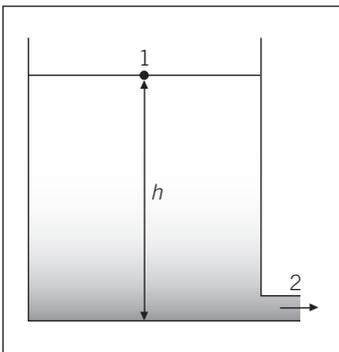


Figura 3.6.

En este primer caso aplicamos la ecuación de Bernoulli al estudio de la velocidad de salida de un fluido ideal por un agujero situado a una cierta profundidad, tal como se muestra en la Figura 3.6. Aplicamos la ecuación [15] entre los puntos 1 y 2 de la figura. En ambos puntos la presión es la exterior; por tanto, $p_1 = p_2$. En el punto 1 la velocidad de descenso del fluido es muy pequeña, ya que el recipiente es muy ancho si se compara con el tamaño del agujero y el volumen del fluido que se escapa por el orificio es pequeño comparado con el volumen total del fluido; por tanto, $v_1 \approx 0$. Además, las alturas las referimos respecto el nivel del fondo del recipiente, con lo que $h_2 = 0$. En estas condiciones, la ecuación [15] se escribe

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 \quad [16]$$

donde hemos tenido en cuenta que $h_1 = h$ y que $v_2 = v$. Eliminando ρ y despejando v queda

$$v = \sqrt{2gh} \quad [17]$$

expresión que es la conocida fórmula de Torricelli, que indica que la velocidad de salida del agua por un orificio viene determinada por la misma expresión de la velocidad de caída libre de un objeto desde una altura dada.

2. Anemometría

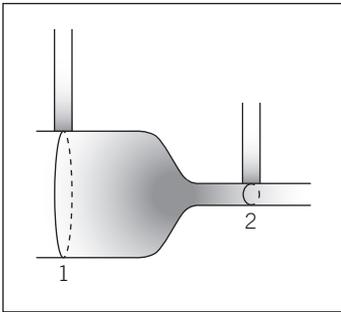


Figura 3.7.

Supongamos un conducto por donde circula fluido por dos regiones 1 y 2 con velocidades v_1 y v_2 respectivamente. El conducto está nivelado (Figura 3.7). Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 resulta

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \quad [18]$$

La ecuación anterior significa que a partir de la medida de las diferencias de la presión puede obtenerse información sobre las velocidades.

También, si A_1 es mayor que A_2 , la velocidad en el punto 2 es mayor que la velocidad en 1 y, según [18], la presión en 2 es menor que la presión en 1. Así, un estrechamiento conduce a una reducción de la presión. Este fenómeno se ha utilizado para construir las llamadas bombas de agua, que son dispositivos muy sencillos que se utilizan en el laboratorio para conseguir presiones inferiores a la presión atmosférica. Estos dispositivos consisten en la circulación de agua a presión por un tubo que reduce considerablemente su sección, con la consiguiente reducción de presión. La zona donde la presión disminuye se conecta con el recipiente donde se quiere reducir la presión, formando el conjunto una bomba de vacío.

Otro entorno de interés es el que se produce cuando en el sistema vascular, como consecuencia de la deposición de una placa arterioesclerótica, la luz de una arteria disminuye. La velocidad aumenta en esa zona y la presión disminuye, por lo que la tensión de las paredes no es compensada por la presión interior y el conducto se colapsa, es decir, se cierra y se abre aleatoriamente. Este fenómeno se conoce como aleteo.

Ejemplo 3.7.

En una arteria se ha formado una placa arterioesclerótica que reduce el área transversal a 1/5 del valor normal. ¿En qué porcentaje disminuye la presión en el punto donde ha habido este accidente vascular? (presión media normal de la sangre, 100 mm de Hg; velocidad normal de la sangre, 0,12 m s⁻¹; densidad de la sangre, 1,056 kg m⁻³).

La ecuación de Bernoulli [15] da una relación entre la presión, la velocidad y la altura de un fluido. Si suponemos que tenemos establecido un flujo sin cambio apreciable de nivel y señalamos como 1 el punto donde la arteria es normal y como punto 2 la zona donde se ha producido la deposición alteradora (véase la Figura 3.8), podemos escribir a partir de [15]

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

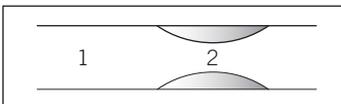


Figura 3.8.

Por otra parte, dado que suponemos que no hay hemorragias, es decir, toda la sangre que pasa por 1 debe pasar por 2, se cumple la ecuación de continuidad

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Como $A_2 = (1/5)A_1$, se cumple entonces $v_2 = 5v_1$

Teniendo en cuenta este último resultado y sustituyendo el valor de $v_1 = 0,12 \text{ m s}^{-1}$ se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho(25v_1^2 - v_1^2) = \\ &= 12\rho v_1^2 = 12 \times 1,056 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} (0,12 \text{ m s}^{-1})^2 = \\ &= 182,47 \text{ N m}^{-2} = 1,37 \text{ mm de Hg} \end{aligned}$$

A partir de este resultado es sencillo calcular el porcentaje de disminución de la presión

$$\frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{1,37 \text{ mm de Hg}}{100 \text{ mm de Hg}} = 0,01137 = 1,37 \text{ por 100}$$

3. Barómetros y manómetros

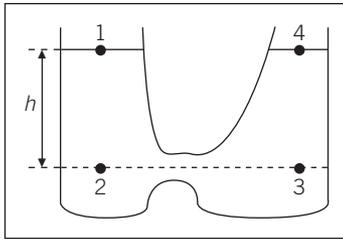


Figura 3.9.

Consideremos un recipiente como el de la Figura 3.9. Suponemos que el fluido está en reposo. Si aplicamos la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 considerando que en 1 la presión es la presión exterior y en 2 la presión es p_2 , resulta

$$p_2 = p_1 + \rho g(h_1 - h_2) = p_1 + \rho gh \quad [19]$$

Así, la presión en un fluido en reposo depende de h , la profundidad a la cual se mide. Por argumentos similares resulta que $p_1 = p_4$ y $p_2 = p_3$, ya que los puntos 1 y 4 y los puntos 2 y 3 están al mismo nivel.

Para determinar la presión exterior se puede utilizar un dispositivo como el de la Figura 3.10 y la expresión [19]. El barómetro consiste en un recipiente lleno de un fluido y un tubo invertido donde se ha hecho el vacío en su interior, es decir, $p_3 \approx 0$. El fluido asciende por el tubo hasta la altura h , donde la presión en el punto 2 multiplicada por el área de la sección transversal del tubo se iguala con el peso de la columna de fluido. Así, la presión en el punto 2 vale

$$p_2 = \rho gh \quad [20]$$

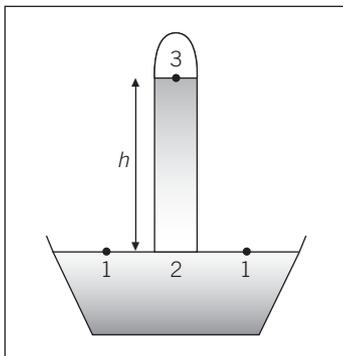


Figura 3.10.

Como la presión en los puntos 1 y 2 es la misma y la presión en el punto 1 es la presión exterior, la medida de la altura de la columna de fluido sirve para determinar la presión exterior. Es importante el fluido que se utiliza, ya que debe elegirse de tal manera que a la temperatura ambiente (o en cada caso a la temperatura de utilización del barómetro) su presión de vapor sea pequeña de tal manera que la condición $p_3 \approx 0$ se mantenga. Por otro lado, el ascenso del fluido por el tubo debido al ascenso capilar ha de ser adecuado.

El fluido más utilizado es el mercurio por su elevada densidad (13600 kg m^{-3}). Así se define la atmósfera, como una unidad de medida de presión que corresponde a la altura de una columna de mercurio de 760 mm. En estas condiciones se cumple, pues,

$$1 \text{ atm} = 13600 \text{ kg m}^{-3} 9,82 \text{ m s}^{-2} 0,760 \text{ m} = 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$$

Esta unidad es igual a la presión media de la atmósfera al nivel del mar, aunque la situación meteorológica la hace variar continuamente.

En meteorología se ha utilizado tradicionalmente como unidad de presión el milibar (mb), que corresponde a 10^2 N m^{-2} , que hoy corresponde al hectopascal (hPa).

Ejemplo 3.8.

Calcular la altura que alcanzaría la columna de un barómetro que usara agua como fluido de trabajo si la presión es de $p = 2 \text{ atm}$ (densidad del agua, 1000 kg m^{-3}).

La relación entre la presión y la altura de la columna de fluido viene dada por la ecuación [20]

$$p = \rho gh$$

Por tanto,

$$h = \frac{p}{\rho g}$$

La presión de 2 atm expresada en las unidades del sistema internacional es $p = 2,026 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. Por tanto,

$$h = \frac{2,026 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}}{10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} = 20,64 \text{ m}$$

Este ejemplo nos muestra una de las razones por las que no se utilizan manómetros de agua para medir la presión atmosférica: el tamaño. Otra razón es el valor de la presión de vapor del agua que hace que ésta se evapore con relativa facilidad y que, por tanto, la condición $p_3 \approx 0$ deje de cumplirse.

Ejemplo 3.9.

Realizando un esfuerzo de aspiración intenso, la presión alveolar en los pulmones puede ser 80 mm de Hg inferior a la presión atmosférica. En estas condiciones, ¿a qué altura máxima puede aspirarse agua con la boca, utilizando un pequeño tubo de plástico? (densidad del agua, 1000 kg m^{-3}). ¿A qué altura máxima puede aspirarse ginebra mediante el mismo dispositivo? (densidad de la ginebra, 920 kg m^{-3}).

En el interior del tubo de plástico el líquido llegará hasta una altura h tal que la presión en el interior de la boca (760 mm de Hg - 80 mm de Hg) más la presión ejercida por el líquido iguale la presión exterior (1 atm = 760 mm de Hg). Por tanto,

$$\begin{aligned} \rho gh &= p_{\text{ext}} - p_{\text{boca}} = 760 \text{ mm de Hg} - 680 \text{ mm de Hg} = 80 \text{ mm de Hg} = \\ &= \frac{80 \text{ mm de Hg}}{760 \text{ mm de Hg atm}^{-1}} 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} \text{ atm}^{-1} = 1,07 \times 10^4 \text{ N m}^{-2} \end{aligned}$$

Despejando h de la ecuación anterior se obtiene para el agua

$$h = \frac{p_{\text{ext}} - p_{\text{boca}}}{\rho g} = \frac{1,07 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}}{9,81 \text{ m s}^{-2} \times 1000 \text{ kg m}^{-3}} = 1,09 \text{ m}$$

y para la ginebra

$$h = \frac{p_{\text{ext}} - p_{\text{boca}}}{\rho g} = \frac{1,07 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}}{9,81 \text{ m s}^{-2} \times 920 \text{ kg m}^{-3}} = 1,18 \text{ m}$$

Como se puede comprobar cuanto más denso es el líquido menos se puede aspirar.

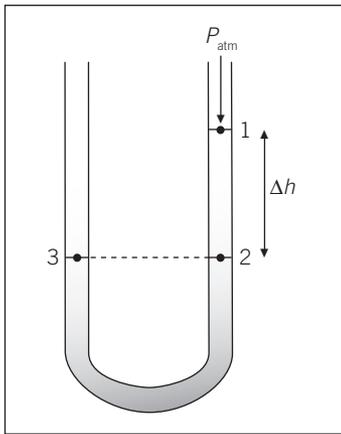


Figura 3.11.

En la ecuación [19] la diferencia entre la presión p_2 y la presión p_1 se denomina presión manométrica, ya que es el valor de la presión que se obtiene cuando se utiliza un manómetro, dispositivo que mide la diferencia de presión con respecto a una presión dada, por ejemplo la presión atmosférica. En la Figura 3.11 se muestra un esquema sencillo de un manómetro. La presión en el punto 1 de la figura suponemos que es la presión atmosférica.

En los puntos 2 y 3 la presión es la misma, ya que están al mismo nivel. La presión en el punto 2 viene dada por la ecuación [20]

$$p_2 = p_1 + \rho g \Delta h \tag{21}$$

donde Δh es la diferencia de alturas entre las dos columnas del fluido y ρ la densidad del fluido. El término $\rho g \Delta h$ es la presión manométrica y nos indica en este caso si la presión en 3 es mayor o menor a la atmosférica.

Un caso muy común en que se usan las presiones manométricas se da cuando se mide la presión arterial. Se dice comúnmente que la presión media de la sangre en la especie humana es de 100 mm de Hg. Esta es la presión manométrica, es decir, la presión que excede a la presión atmosférica. Si la presión atmosférica es de 760 mm de Hg, la presión media absoluta es de 860 mm de Hg, es decir,

$$p = \rho g h = 13\,600 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,860 \text{ m} = 1,15 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$$

La presión manométrica de la sangre se mide siempre en el brazo, ya que se elige como punto de referencia la presión de la sangre en el corazón. Si, en cambio, medimos la presión arterial en el pie, por ejemplo, hemos de tener en cuenta la diferencia de alturas entre el pie y el corazón, lo que nos añadirá una presión adicional. En el siguiente ejemplo tratamos este problema.

Ejemplo 3.10.

Se mide la presión arterial de una persona en el brazo y resulta ser de 105 mm de Hg. ¿Cuál sería la presión arterial que mediríamos en el pie si la persona se mantiene erguida y su corazón está 1,40 m por encima de los pies? (densidad de la sangre, $1,05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$).

La presión en los pies difiere de la presión en el corazón en un término ρgh , donde ρ es la densidad de la sangre. Por tanto,

$$p_p - p_c = \rho gh$$

donde p_p es la presión en los pies y p_c la presión en el corazón. Si sustituimos los datos del ejemplo resulta

$$p_p - p_c = 1,05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} 9,81 \text{ m s}^{-2} 1,4 \text{ m} = 14435,4 \text{ N m}^{-2}$$

Si tenemos en cuenta que 1 mm de Hg equivale a la presión de 133,5 N m⁻², esta diferencia de la presión resulta ser

$$p_p - p_c = 108 \text{ mm de Hg}$$

Esta diferencia de presión manométrica es la causa de que personas que permanecen de pie durante mucho tiempo durante su jornada laboral sean más propensas a tener problemas de circulación de la sangre en las piernas.

La presión manométrica real en la aorta varía durante el ciclo cardiaco. La presión máxima suele ser de unos 120 mm de Hg, tiene lugar durante la contracción del músculo, mientras que la presión mínima se da cuando el corazón se relaja y es de unos 80 mm de Hg.

Al contrario que en las piernas, la presión manométrica de la sangre en la cabeza es inferior a la del corazón, ya que la cabeza está por encima del corazón. Este efecto es especialmente interesante en las jirafas. En el siguiente ejemplo lo evaluamos.

Ejemplo 3.11.

Las jirafas tienen un cuello muy largo que hace que su cabeza esté unos 3 m por encima del corazón. ¿Cuál ha de ser la presión de la sangre a la salida del corazón si para moverla a través del cerebro de este animal hace falta una presión de 60 mm de Hg? (densidad de la sangre, $1,05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$).

La presión de la sangre en el corazón, p_c , será la presión de la sangre en la cabeza, p_{ca} , más la presión manométrica entre la cabeza y el corazón. Así,

$$p_c - p_{ca} = \rho gh = 1,013 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} 9,81 \text{ m s}^{-2} 3 \text{ m} = 29843,0 \text{ N m}^{-2}$$

La cantidad anterior expresada en mm de Hg resulta $p_c - p_{ca} = 223 \text{ mm de Hg}$. Por tanto, el corazón de la jirafa ha de impulsar la sangre con una presión manométrica de 283 mm de Hg, presión que casi triplica la presión arterial humana. La presión arterial que soportan las jirafas es la mayor presión que soporta un mamífero y ha sido objeto de estudio por numerosos científicos.

4. Efecto Magnus

Este efecto nos permite explicar cómo es posible que un jugador de fútbol marque un gol directo desde la esquina del campo.

En efecto, el jugador imprime sobre el balón una velocidad angular de rotación ω sobre un eje, de tal forma que, como se puede ver en la Figura 3.12, si r es el radio del balón, la velocidad del aire en el punto 1 de la figura es $v_1 = v + \omega r$, mientras que la velocidad en el punto 2 es $v_2 = v - \omega r$, ya que en el punto 1 la dirección de la rotación va en la dirección del movimiento, mientras que en el punto 2 va en la dirección contraria. Por tanto, $v_1 > v_2$ y la ecuación de Bernoulli [15], teniendo en cuenta que $h_1 = h_2$, indica que la presión en el punto 2 es mayor que la presión en el punto 1 y por tanto se da sobre el balón una fuerza en la dirección transversal al movimiento.

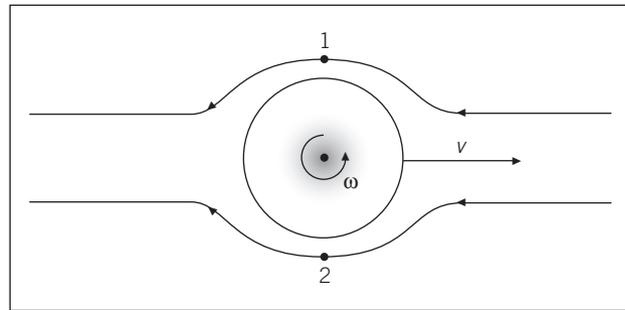


Figura 3.12.

3.7. Ley de Poiseuille

La ecuación de Bernoulli define un entorno, muy útil pero limitado, sin viscosidad. Sin embargo, en los sistemas reales los rozamientos no son despreciables y, por tanto, la ecuación [15] normalmente no se cumple. Si mediante un dispositivo externo se aporta al sistema la energía necesaria para mantener la ecuación [15] válida, esta energía es la que el flujo del fluido disipa debido a la viscosidad.

Al introducir el concepto de viscosidad hemos visto cómo el movimiento de una parte del fluido puede afectar al movimiento de otra parte. Así, en la Figura 3.13 podemos ver cómo el fluido en contacto con un plano móvil tiene la misma velocidad que el plano, y ésta paulatinamente va disminuyendo a medida que las capas del fluido están más próximas al plano inferior, que está parado. Esta estructura del flujo del fluido en láminas o capas de fluido se denomina flujo laminar y se presenta a velocidades pequeñas. Si la velocidad del fluido aumenta, la viscosidad hace que el flujo deje de discurrir en láminas, las trayectorias de las partículas del fluido son entonces más complicadas y la propia descripción del flujo se hace muy difícil. Estamos entonces en el denominado flujo turbulento, donde se disipa más energía que en el flujo laminar.

Por tanto, el análisis más simple del flujo de un fluido empieza considerando el caso laminar, sobre todo al estudiar el flujo en conductos y tuberías cilíndricas o en las arterias y las venas humanas. La ley de Poiseuille, cuyo nombre se debe a un médico francés especialista en el flujo de la sangre en los vasos sanguíneos, nos permite saber cómo es la velocidad de un fluido que se mueve de forma laminar por un tubo, y relacionar el caudal que circula por un tubo con la diferencia de presión que lo origina y con las características físicas del fluido y las características geométricas del tubo.

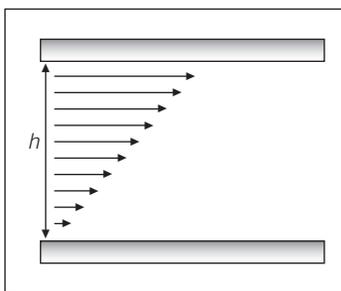


Figura 3.13.

Supongamos un tubo de radio R y de longitud l por el que circula un fluido de viscosidad μ . Sea Δp la diferencia de la presión entre los extremos del tubo. Sobre un tubo de fluido de radio r (véase Figura 3.14) esta diferencia de presiones resulta en una fuerza $F = \Delta p A$, donde $A = \pi r^2$ es el área transversal del tubo de fluido. Si no actuara ninguna otra fuerza, el fluido se aceleraría continuamente; sin embargo, el fluido suponemos se mueve sin acelerarse, lo cual implica que debe actuar una fuerza opuesta a la de la presión que la equilibre. Esta fuerza se debe a la viscosidad y actúa sobre toda la superficie lateral del tubo de fluido. Teniendo en cuenta la ley de Newton [2], esta fuerza viene dada por:

$$F_f = A_l \mu \left(\frac{dv}{dr} \right) = 2\pi r l \mu \left(\frac{dv}{dr} \right) \quad [22]$$

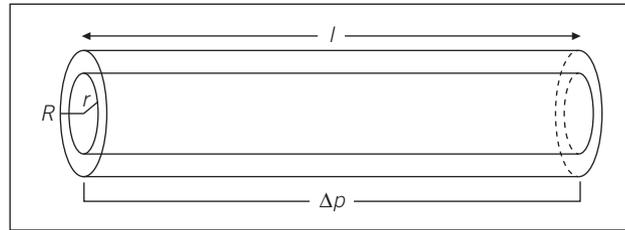


Figura 3.14.

Notemos que dv/dr es negativa, ya que la velocidad disminuye a medida que r crece; en particular, cuando $r = R$, es decir, en las paredes del tubo, la velocidad es cero. Si se aplica la segunda ley de Newton, es decir, que la suma de todas las fuerzas en equilibrio mecánico ha de anularse, resulta

$$\Delta p \pi r^2 + 2\pi r l \mu \frac{dv}{dr} = 0 \quad [23]$$

de donde despejando dv se obtiene la siguiente relación:

$$-dv \frac{\Delta p \pi r^2}{2\pi r l \mu} dr = \frac{\Delta p}{2\mu l} r dr \quad [24]$$

Esta ecuación integrada entre un punto genérico de radio r donde la velocidad es v y el extremo del tubo donde $r = R$ y la velocidad es $v = 0$ resulta

$$-\int_v^0 dv = \frac{\Delta p}{2\mu l} \int_r^R r dr \quad [25]$$

integrales que resueltas conducen a

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2) \quad [26]$$

La expresión [26] corresponde a un perfil parabólico (Fig. 3.15), característico del flujo de Poiseuille. En esta ecuación se constata que la velocidad máxima se alcanza cuando $r = 0$, es decir, en el centro del tubo, mientras que la velocidad mínima se da en los bordes del tubo cuando $r = R$. Esta

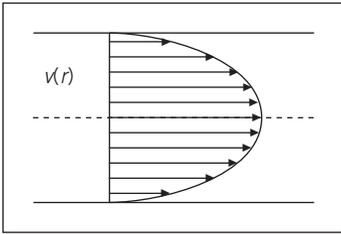


Figura 3.15.

característica, junto con la ecuación de Bernoulli, hace que la presión en los bordes del tubo sea superior a la presión en el centro del conducto y que, por tanto, si el fluido transporta partículas en suspensión, éstas están sometidas a una fuerza lateral que las desplaza hacia el centro del conducto. Esta característica hace, por ejemplo, que si el tubo tiene ramificaciones laterales, éstas contendrán menos partículas en suspensión que las ramificaciones centrales que eventualmente recogerán la mayor parte de las partículas en suspensión. La sangre es un ejemplo de esta situación, ya que está formada por una suspensión de glóbulos rojos (un 45 por 100 en volumen) en un fluido, el plasma. Así, la concentración de glóbulos rojos en el centro de una arteria es superior a la de los glóbulos que se mueven cercanos a sus paredes.

Otro aspecto de interés es el caudal que circula por el tubo. Como la velocidad a la que se mueve el fluido en una zona determinada depende de la distancia al centro del tubo, el fluido que atraviesa un área determinada depende también de la distancia del área al centro del tubo. En efecto, supongamos que queremos calcular el caudal de fluido dQ que circula por el anillo de radio r y espesor dr de la Figura 3.16:

$$dQ = v(r)dA = v(r)2\pi r dr \tag{27}$$

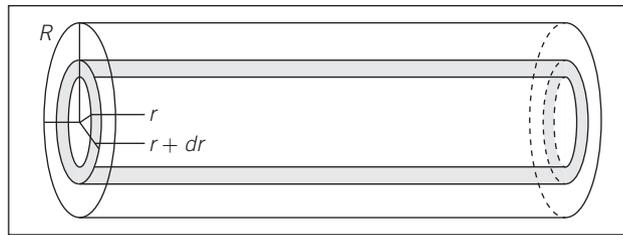


Figura 3.16.

Para el cálculo del caudal total hay que tener en cuenta para $v(r)$ la expresión [26] e integrar dQ entre el centro $r = 0$ y el extremo $r = R$

$$Q = \int dQ = \int_0^R \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2) 2\pi r dr \tag{28}$$

que resulta, finalmente,

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu l} \Delta p \tag{29}$$

que es la ley de Poiseuille. Esta ley relaciona la causa, la diferencia de presiones Δp , con el caudal. La constante de proporcionalidad depende del fluido, a través de la viscosidad μ , y de las características del conducto como son su radio y su longitud.

Es de notar la dependencia del caudal con la cuarta potencia del radio: si se dobla el radio del conducto, el caudal se multiplica por dieciséis. También es de notar la analogía formal entre esta ley y otras leyes lineales de transporte que aparecen en Física. En efecto, la ley de Poiseuille es análoga formalmente a la ley de Ohm, que se estudia en el capítulo 6, según la cual la intensidad de corriente eléctrica I está relacionada con la diferencia de potencial eléctrico, según $I = \Delta V/R$, donde R es la resistencia eléctrica.

También la ley de Poiseuille es análoga a la ley de Fourier de conducción del calor en un material.

Sin embargo, es la analogía con la ley de Ohm la que se explota con mayor intensidad. En efecto, al término que relaciona la diferencia de presiones en la ecuación [29] con el caudal Q se denomina, resistencia hidrodinámica.

$$R_h = \frac{8\mu l}{\pi R^4} \quad [30]$$

De la expresión anterior vemos que la resistencia hidrodinámica es tanto mayor cuanto mayor es la viscosidad del fluido y cuanto más largo y más estrecho es el conducto. La semejanza con la ley de Ohm es tan completa que cuando se unen dos o más conductos uno a continuación del otro, es decir, en serie, su resistencia hidrodinámica global se comporta del mismo modo que lo hace la resistencia eléctrica al conectar dos resistencias en serie y, por tanto, resulta ser la suma de las resistencias hidrodinámicas individuales. Si los tubos se unen en paralelo, la resistencia hidrodinámica global seguirá la misma relación que sigue la resistencia eléctrica de los resistores conectados en paralelo.

Ejemplo 3.12.

Desde un frasco, y a través de un tubo circular, fluye plasma que llega al brazo de un paciente. Cuando el frasco está a 1,5 m de altura por encima del brazo, ¿cuál es la presión del plasma que entra en la vena? La presión sanguínea en la vena es 12 mm de Hg superior a la presión atmosférica. Introducimos en ella plasma con una aguja de 3 cm de longitud y 0,36 mm de radio interior. ¿Qué caudal de plasma recibe el enfermo? (densidad del plasma, 1,05 g cm⁻³; viscosidad del plasma, 1,3 cp).

La presión que se produce en la entrada del plasma en la vena es la presión exterior más la presión correspondiente a la columna de plasma. Sin embargo, todas las medidas de la presión referidas a la circulación sanguínea se suelen expresar como la diferencia respecto de la presión atmosférica; por tanto, aquí bastará calcular la presión de la columna de plasma, es decir,

$$p_{\text{hid}} = \rho gh = 1,05 \text{ g cm}^{-3} 981 \text{ cm s}^{-2} 150 \text{ cm} = 1,55 \times 10^5 \text{ d cm}^{-2}$$

Teniendo en cuenta que 760 mm de Hg es una atmósfera, resulta

$$p_{\text{hid}} = \frac{1,55 \times 10^5 \text{ d cm}^{-2} 760 \text{ mm de Hg}}{1,013 \times 10^6 \text{ d cm}^{-2}} = 116 \text{ mm de Hg}$$

El caudal se obtiene mediante la ley de Poiseuille, ya que se trata del cálculo del flujo de un fluido a través de un tubo (la aguja). En nuestro caso

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\mu l} = \frac{\pi (3,6 \times 10^{-2})^4 \text{ cm}^4 \left(1,55 \times 10^5 - \frac{12 \times 1,013 \times 10^6}{760} \right) \text{ d cm}^{-2}}{8 \times 1,3 \times 10^{-2} \text{ d s cm}^{-2} 3 \text{ cm}} = 2,35 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

Ejemplo 3.13.

Calcular el valor global de la resistencia hidrodinámica de todas las arterias, arteriolas y capilares del cuerpo humano a partir de los datos siguientes: caudal, $0,83 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$; caída de la presión desde la aorta hasta los capilares, $1,2 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}$.

¿Qué consecuencia comporta un aumento de la resistencia de los vasos sanguíneos? Durante la realización de un ejercicio físico se produce un aumento en la presión y una vasodilatación. ¿Qué implicaciones tienen estas modificaciones desde el punto de vista del flujo sanguíneo?

En este ejemplo la resistencia hidrodinámica se obtiene a partir de la expresión

$$R_h = \frac{\Delta p}{Q}$$

Sustituyendo valores resulta

$$R_h = \frac{1,2 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}}{0,83 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}} = 1,446 \times 10^8 \text{ N s m}^{-5}$$

Un aumento de la resistencia de los vasos sanguíneos implica que para mantener el mismo caudal hay que aumentar la presión, es decir, hay que aumentar el esfuerzo cardiaco.

Si durante la realización de un ejercicio físico se produce un aumento en la presión y una vasodilatación, ambos fenómenos contribuyen a aumentar el caudal, es decir, a aumentar la oxigenación de los tejidos, ya que la vasodilatación implica un aumento del radio de los vasos, con la consiguiente reducción de la resistencia hidrodinámica y el consiguiente aumento de caudal.

Ejemplo 3.14.

Una aguja hipodérmica tiene una longitud de 8 cm y un radio interno de 0,4 mm. ¿Cuál es la resistencia hidrodinámica de la aguja al paso del agua? La aguja se pone en una jeringa con un émbolo de $3,5 \text{ cm}^2$ de área. ¿Con qué fuerza hay que apretar el émbolo para conseguir que el caudal del medicamento sea de $2 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ en un tejido cuya presión es de 9 mm de Hg (viscosidad del medicamento, 1 cp).

La resistencia hidrodinámica se calcula directamente a partir de su expresión

$$R = \frac{8\mu l}{\pi r^4} = \frac{8 \times 10^{-2} \text{ d s cm}^{-2} \cdot 8 \text{ cm}}{\pi(0,04 \text{ cm})^4} = 7,96 \times 10^4 \text{ d s cm}^{-5}$$

A partir de la ley de Poiseuille se evalúa la diferencia de presiones que hay que mantener para conseguir el caudal de $2 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$, que resulta ser

$$\Delta p = R_h Q = 7,96 \times 10^4 \text{ d s cm}^{-5} \cdot 2 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} = 1,6 \times 10^5 \text{ d cm}^{-2}$$

La presión que se ha de aplicar sobre el émbolo resulta ser entonces

$$p = p_{vej} + p = \frac{9 \text{ mm de Hg } 1,013 \times 10^6 \text{ d cm}^{-2} \text{ atm}^{-1}}{760 \text{ mm de Hg atm}^{-1}} + 1,6 \times 10^5 \text{ d cm}^{-2} = 1,72 \times 10^5 \text{ d cm}^{-2}$$

Dado que el área del émbolo es de $3,5 \text{ cm}^2$, la fuerza que hay que ejercer es

$$F = pA = 1,72 \times 10^5 \text{ d cm}^{-2} 3,5 \text{ cm}^2 = 6,01 \times 10^5 \text{ d} = 6,01 \text{ N}$$

Como hemos visto antes, la velocidad del fluido depende de la posición respecto del centro del cilindro. Definimos la velocidad media v_m a partir de la ecuación siguiente:

$$Q = v_m \pi R^2 \quad [31]$$

Si comparamos la ecuación anterior con la ley de Poiseuille, se obtiene para v_m

$$v_m = \frac{\Delta p R^2}{8\mu l} \quad [32]$$

que resulta ser la mitad de la velocidad máxima. También puede calcularse la potencia hidrodinámica, es decir, la energía por unidad de tiempo necesaria para mantener el flujo, utilizando la analogía eléctrica. La potencia se calcula a partir de la relación siguiente:

$$P = Q\Delta p = Q^2 R_h = \frac{(\Delta p)^2}{R_h} \quad [33]$$

Ejemplo 3.15.

Evaluar la potencia suministrada por el corazón sabiendo que la presión de salida del ventrículo izquierdo es seis veces la del ventrículo derecho y que, en cambio, la velocidad de salida en ambos conductos es apreciablemente la misma.

La sangre es un fluido viscoso; por tanto, su flujo implica pérdida de energía mecánica. Esta energía la suministra el corazón. Si utilizamos la expresión [15], al nivel del corazón queda

$$\frac{E}{V} = p + \frac{1}{2} \rho v^2$$

donde E es la energía aportada por el corazón a un volumen V de fluido. Para calcular la potencia suministrada por el músculo cardiaco hay que tener en cuenta el caudal, es decir, el volumen por unidad de tiempo. Por otra parte, dividimos nuestro análisis en la potencia suministrada por la parte derecha y por la parte izquierda del corazón. En estas condiciones la ecuación anterior se reescribe de la forma siguiente:

$$P_T = P_I + P_D = p_I Q + p_D Q + \frac{1}{2} \rho v_I^2 Q + \frac{1}{2} \rho v_D^2 Q$$

donde P_T es la potencia total, P_D es la potencia suministrada por la mitad derecha del corazón y P_I la potencia suministrada por la mitad izquierda. Midiendo experimentalmente el comportamiento del corazón se cumplen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}v_D &\approx v_I \\v^2 &\approx 3,5\bar{v}^2 \\6p_D &\approx p_I\end{aligned}$$

con lo cual, teniendo en cuenta que

$$Q = \bar{v}A$$

resulta en la ecuación siguiente

$$P_T = \frac{7}{6}p_I Q + \frac{3,5 \rho Q^3}{A^2}$$

En la expresión anterior todos los datos están referidos al ventrículo izquierdo. Si sustituimos los valores en reposo de la presión media $P_I = 100$ mm de Hg y del caudal $Q = 5,5 \text{ l min}^{-1}$, siendo el área de la aorta $A = 4,5 \text{ cm}^2$ y la densidad de la sangre $\rho = 1,05 \text{ g ml}^{-1}$, resulta

$$\frac{7}{6} p_I Q = 1,5 \text{ W} \quad \text{Potencia hidrostática}$$

$$\frac{3,5 \rho Q^3}{A^2} = 0,02 \text{ W} \quad \text{Potencia cinética}$$

$$\text{Potencia total} = 1,52 \text{ W}$$

Hay que notar que la potencia invertida en el movimiento de la sangre es notablemente inferior a la invertida en mantener la presión, con lo que en estado de reposo la contribución cinética es prácticamente despreciable. Si se evalúan estos dos términos para una situación de actividad, donde $Q = 35 \text{ l min}^{-1}$, la potencia hidrostática crece unas seis veces, mientras que la potencia cinética crece unas doscientas veces. En ese caso, la potencia total consumida ronda los 14 W.

Ejemplo 3.16.

Evaluar la potencia máxima y mínima desarrollada por el corazón sabiendo que la presión arterial en una persona sana es de 120 mm de Hg durante la sístole y de 80 mm de Hg durante la diástole. Suponemos que la presión en las venas es casi cero. La diferencia de alturas entre la aurícula y el ventrículo es de 15 cm y la velocidad de salida de la sangre es de 40 cm s⁻¹. Por otra parte, la presión de la arteria pulmonar es de 20 mm de Hg y la diferencia de alturas entre la aurícula derecha y el ventrículo derecho es prácticamente despreciable.

Empezamos por la parte izquierda. Por cada mililitro de sangre por segundo la potencia máxima desarrollada es la siguiente:

$$(p_2 - p_1)Q = (120/760) \text{ atm } 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} \text{ atm}^{-1} 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ ml}^{-1} \text{ s}^{-1} = 15,9 \times 10^{-3} \text{ W ml}^{-1}$$

$$\frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) Q = \frac{1}{2} 1,1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} (0,40 \text{ m s}^{-1})^2 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ ml}^{-1} = 0,088 \times 10^{-3} \text{ W ml}^{-1}$$

$$\rho g (h_2 - h_1) Q = 1,1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} 9,8 \text{ m s}^{-2} 0,15 \text{ m } 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ ml}^{-1} = 1,62 \times 10^{-3} \text{ W ml}^{-1}$$

Por tanto, por cada mililitro de sangre que sale cada segundo por el corazón se realiza un trabajo de $17,6 \times 10^{-3} \text{ J}$. Observemos que el gasto energético del corazón en esta situación se invierte casi todo en mantener la presión y, en cambio, la energía invertida en los aspectos cinéticos del movimiento de la sangre es prácticamente despreciable.

Si calculamos ahora lo que ocurre cuando la presión es mínima, únicamente hay que rehacer los cálculos anteriores, teniendo en cuenta que el primer término cambiará sustancialmente, el segundo término cambiará también, ya que la velocidad de salida de la sangre en las condiciones de presión mínima es de 30 cm s^{-1} , pero, en cambio, su contribución al resultado global es prácticamente despreciable, y el tercer término se mantiene igual. Por tanto,

$$(p_2 - p_1)Q = (80/760) \text{ atm } 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} \text{ atm}^{-1} 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ ml}^{-1} \text{ s}^{-1} = 10,6 \times 10^{-3} \text{ W ml}^{-1}$$

y entonces la potencia mínima desarrollada por la parte izquierda del corazón será de $12,3 \times 10^{-3} \text{ W ml}^{-1}$. Si realizamos ahora el cálculo para la parte derecha del corazón, teniendo en cuenta que la presión de la arteria pulmonar es de 20 mm de Hg, que el cambio de alturas entre la salida del ventrículo y la entrada de la aurícula es muy pequeño y que la velocidad de salida de la sangre también es considerablemente inferior, se obtiene que

$$(p_2 - p_1)Q = (40/760) \text{ atm } 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} \text{ atm}^{-1} 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ ml}^{-1} \text{ s}^{-1} = 2,65 \times 10^{-3} \text{ W ml}^{-1}$$

La potencia máxima desarrollada por el corazón es, pues, la suma de los dos términos, es decir, $20,25 \times 10^{-3} \text{ W ml}^{-1}$. Cada latido del corazón impulsa 60 ml, con lo que la potencia máxima desarrollada por el corazón es de 1,21 W.

3.8. Membranas biológicas

Las membranas separan dos regiones del espacio y permiten el paso de sustancias a su través mediante poros pasivos y bombas moleculares activas. Se dice que una membrana es permeable a una sustancia cuando ésta la puede atravesar. Si una membrana permite el paso únicamente de ciertas sustan-

cias, se denomina semipermeable. Si queremos describir el funcionamiento de cualquier sistema biológico, necesitamos entender los fundamentos básicos de los procesos de transporte a través de las membranas.

Las membranas biológicas están compuestas por lípidos y proteínas. Los lípidos son esencialmente colesterol y fosfolípidos, y están colocados en la membrana en una doble capa de tal forma que las colas hidrofóbicas están orientadas hacia el interior para evitar el contacto con el agua (véase Figura 3.17). Las proteínas quedan absorbidas dentro de la doble capa lipídica, formando una especie de conductos que representan los poros, a través de los cuales se efectúa el transporte de moléculas pequeñas. Antes de abordar la descripción de algunos procesos de transporte a través de la membrana, vamos a definir el *flujo*, que indica la cantidad de sustancia que en la unidad de tiempo atraviesa el área unidad. Se simboliza mediante la letra J .

El mecanismo más sencillo mediante el que una sustancia puede atravesar la membrana es el puramente mecánico. En efecto, una diferencia de presión hidrostática entre ambos lados de la membrana produce un flujo de materia. Este proceso se describe mediante la ley de Poiseuille que hemos visto en el apartado anterior, donde suponiendo que el poro es cilíndrico, de radio a y de longitud l , que coincide con el espesor de la membrana, y que la membrana tiene N poros por unidad de área, se obtiene que el flujo J está relacionado con la diferencia de presión a ambos lados según

$$J = \frac{N\pi a^4}{8\mu l} \Delta p = L_p \Delta p \tag{36}$$

donde el coeficiente L_p se denomina *permeabilidad* o coeficiente de filtración.

Con refinadas técnicas experimentales puede evaluarse el radio medio de los poros de la membrana, así como su espesor l . Suponiendo que los poros son cilíndricos y todos iguales, así como también que la membrana tiene el mismo espesor en todas partes, puede calcularse el flujo por un poro y puede medirse el flujo total de fluido por unidad de área de la membrana.

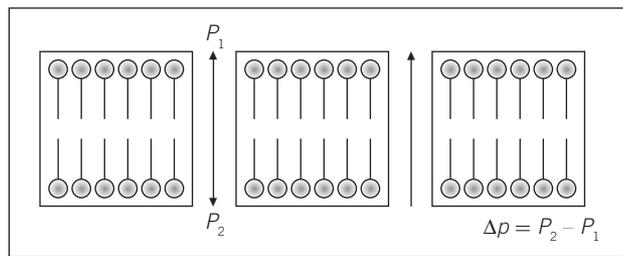


Figura 3.17.

La resistencia hidrodinámica total $R_{h,T}$ puede relacionarse fácilmente con la resistencia hidrodinámica de un poro $R_{h,p}$, teniendo en cuenta que todos los poros pueden suponerse distribuidos en paralelo. Por tanto, resulta

$$\frac{1}{R_{h,T}} = \frac{N}{R_{h,p}}$$

donde N es el número de poros por unidad de área. La ecuación anterior comporta que el caudal total Q_T esté relacionado con el caudal que circula por cada poro Q_p , según $Q_T = NQ_p$, y, por tanto, si se consigue medir el caudal total de fluido por unidad de área de la membrana y se puede calcular el caudal que circula por cada poro, puede determinarse fácilmente el número N de poros de la membrana.

Supongamos ahora que tenemos dos disoluciones del mismo compuesto pero de distinta concentración separadas por una membrana semipermeable que permite el paso del disolvente, pero no del soluto. Ya que la concentración es distinta, se producirá un flujo de disolvente que irá de la zona menos concentrada a la más concentrada. Desde un punto de vista cualitativo, podemos explicar este fenómeno si pensamos que el número de moléculas de disolvente que chocan con la membrana en la disolución más concentrada es inferior al número de choques que experimentan las moléculas de disolvente en la disolución menos concentrada. Como el flujo de partículas a través de la membrana es proporcional al número de choques, el flujo neto de disolvente irá de las zonas de menor hacia las zonas de mayor concentración. Así, este flujo es proporcional a la diferencia de concentraciones y podemos entonces escribir

$$J' = -k\Delta C \quad [35]$$

donde J' es el flujo neto de disolvente y k una constante de proporcionalidad.

Si se producen distintas concentraciones y presiones diferentes, el flujo total se debe a ambos procesos y se escribe entonces

$$J_T = L_p \Delta p - k\Delta C \quad [36]$$

En una membrana semipermeable perfecta es posible demostrar que $k = L_p RT$, donde R es la constante universal de los gases y T la temperatura absoluta. Así

$$J_T = L_p (\Delta p - RT \Delta C) \quad [37]$$

El producto $RT \Delta C$ tiene unidades de presión y se denomina *presión osmótica* π . Una forma de determinar experimentalmente la presión osmótica de una disolución es variar Δp hasta que $J_T = 0$, con lo que entonces $\Delta p = \Delta \pi = RT \Delta C$ y el valor de Δp coincide con el de la presión osmótica.

Ejemplo 3.17.

La savia en los árboles se puede considerar como una disolución de sacarosa en agua de concentración $291,2 \text{ mol m}^{-3}$. Si la temperatura es de 27°C , ¿hasta qué altura puede subir la savia en un árbol únicamente por presión osmótica? (Considerar que la densidad de la savia es 1000 kg m^{-3} .)

La presión osmótica en este caso es

$$\begin{aligned} \pi &= CRT = 29,2 \text{ mol m}^{-3} \times 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 300 \text{ K} = \\ &= 7,279 \times 10^4 \text{ N m}^{-2} \end{aligned}$$

La savia podrá subir en el árbol hasta que el peso de la columna de savia ejerza una presión igual a la osmótica. Por tanto, la columna de savia llegará hasta una altura h tal que

$$\rho gh = \pi$$

y entonces

$$h = \frac{\pi}{\rho g} = \frac{7,279 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}}{1000 \text{ kg m}^{-3} \times 9,81 \text{ m s}^{-2}} = 7,42 \text{ m}$$

Ejemplo 3.18.

Una célula esférica de radio $2 \times 10^{-6} \text{ m}$ tiene una concentración interior de sustancias que no pueden atravesar la membrana de $0,001 \text{ mol l}^{-1}$. La tensión de ruptura de la membrana es 10^{-2} N m^{-1} . ¿Se romperá la membrana cuando la célula se introduzca en un baño de agua pura? ($T = 300 \text{ K}$).

Al ser la concentración en el interior de la célula superior a la del exterior, se producirá una entrada de agua pura. En la membrana se producirá un equilibrio dinámico, es decir, que la cantidad de agua que entre será la misma que la que salga, cuando la diferencia de presiones entre el exterior y el interior sea la presión osmótica evaluada según la concentración inicial, ya que suponemos que la cantidad total de agua que entra es muy pequeña y no altera el valor de la concentración. Por tanto,

$$\pi = CRT = 0,001 \text{ mol l}^{-1} \times 0,082 \text{ atm l K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 300 \text{ K} = 0,0246 \text{ atm}$$

Por la ley de Laplace, que relaciona la presión dentro de la membrana esférica, la tensión y el radio de curvatura

$$T = \frac{r\Delta p}{2}$$

vemos que la tensión correspondiente será

$$\begin{aligned} T &= \frac{2 \times 10^{-6} \text{ m} \times 0,0246 \text{ atm} \times 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}}{2} = \\ &= 2,492 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1} \end{aligned}$$

y, por tanto, dado que la tensión es inferior a la de ruptura, la célula no se romperá.

Ejemplo 3.19.

Un glóbulo rojo típico de 5000 \AA de radio tiene una membrana cuya tensión superficial máxima es $5 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$. Lo introducimos en una disolución de 1 M de NaCl . Suponemos que el NaCl no puede atravesar la membrana de

la célula. La concentración interior de sustancias que no pueden atravesar la membrana es 3 M. a) ¿Reventará el glóbulo rojo? b) ¿Cuál es la concentración mínima de NaCl necesaria para que el glóbulo rojo no reviente? ($T = 300 \text{ K}$; $R = 0,082 \text{ atm l K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$).

Al introducir un glóbulo rojo en una disolución de NaCl, dependiendo de la concentración de la misma, habrá una tendencia del agua a entrar o salir del glóbulo. Esta tendencia vendrá reflejada por la presión osmótica π , que es función de la diferencia de concentraciones y de la temperatura.

Si la disolución es 1 M, quiere decir que hay 1 mol l^{-1} de NaCl y, por tanto, el número de moles de sustancias, que no pueden atravesar la membrana es de 2, ya que en la disolución acuosa el NaCl se descompone en Na^+ y Cl^- . Por tanto, la diferencia de concentraciones es de 1 mol l^{-1} y la presión osmótica

$$\begin{aligned}\pi &= \Delta C RT = 1 \text{ mol l}^{-1} \times 0,082 \text{ atm l K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 300 \text{ K} = \\ &= 24,6 \text{ atm} = 2,49 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}\end{aligned}$$

Cuando el agua que entra en el glóbulo rojo produce un aumento de presión igual a la presión osmótica, el flujo de agua cesa. El valor de C se supone constante por el hecho de que aunque el flujo de agua es suficiente como para variar la presión, es muy pequeño como para variar la concentración apreciablemente. Aplicando la ley de Laplace

$$T = \frac{r\Delta p}{2} = \frac{5 \times 10^{-7} \text{ m} \times 2,49 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}}{2} = 62,3 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$$

Como esta tensión es mucho mayor que la tensión superficial máxima, el glóbulo rojo se rompe. Podemos calcular la diferencia de presiones máxima que puede haber entre el exterior y el interior sin que la membrana se rompa:

$$\Delta p = \frac{2T}{r} = \frac{2 \times 5 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}}{5 \times 10^{-7} \text{ m}} = 2 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} = 1,97 \text{ atm}$$

y, por, tanto, la máxima diferencia de concentraciones viene dada por

$$\Delta C = \frac{\pi}{RT} = \frac{1,97 \text{ atm}}{0,082 \text{ atm l K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 300 \text{ K}} = 0,08 \text{ mol l}^{-1}$$

por lo que la concentración de iones Na y Cl conjunta debe ser como mínimo de 2,92 M, es decir, una concentración de NaCl de $1,46 \text{ mol l}^{-1}$. Luego, si el glóbulo rojo se introduce en una disolución de concentración acuosa 1,46 M o menor se romperá.

Ejemplo 3.20.

¿Cuánto cuesta desalinizar un metro cúbico de agua de mar por ósmosis inversa? (Temperatura, 27°C , $R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$; p.a. Cl 35, Na 23; suponemos que en un litro de agua hay 5,8 g de NaCl y que el precio del kilowatio-hora es de 0,09 €.)

Para calcular el trabajo que hay que hacer para desalinizar un litro de agua de mar en primer lugar hemos de calcular la presión osmótica, que viene dada por la expresión

$$\pi = CRT$$

Para conocer C , sabemos que el peso molecular del NaCl es 58 y, por tanto, que en un litro hay 0,1 mol de NaCl. Como que tanto el ion Na^+ como el ion Cl^- son partículas que no atraviesan la membrana, el número de moles que contribuye a C es 0,2. Por tanto,

$$\pi = 0,2 \times 10^3 \text{ mol m}^{-3} \times 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 300 \text{ K} = 4,99 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$$

El trabajo necesario para filtrar 1 l de agua de estas condiciones es

$$W = \pi \Delta V = 4,99 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 498,60 \text{ J}$$

Por otra parte,

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

y el número de kWh necesarios será

$$\frac{498,60 \text{ J}}{3,6 \times 10^6 \text{ J} \times \text{kWh}^{-1}} = 1,385 \times 10^{-4}$$

que implica un gasto de $G = 1,385 \times 10^{-4} \text{ kWh} \times 0,09 \text{ (kWh)}^{-1} = 1,25 \times 10^{-5} \text{ €}$.

Como $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ l}$, el coste de desalinizar 1 m^3 de agua de mar es 0,012 €.

Ejemplo 3.21.

En un dispositivo de desalinización por ósmosis inversa hay una membrana de 4 cm^2 de área y $5 \times 10^{-4} \text{ cm}$ de espesor. El radio de los poros es de $1,85 \times 10^{-5} \text{ cm}$ y hay 2×10^7 poros por centímetro cuadrado. a) Calcular la resistencia hidrodinámica de la membrana. Ésta, que es impermeable a la sal, separa una disolución de agua salada de concentración $1,08 \text{ mol l}^{-1}$. b) Calcular la presión osmótica en esta disolución a la temperatura de 20 °C . c) ¿Qué potencia hemos de aplicar para desalinizar 72 litros cada hora? (viscosidad del agua = viscosidad de la disolución = $0,01 \text{ poise}$; constante de los gases, $R = 0,082 \text{ atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$).

a) La ley de Poiseuille que regula el flujo laminar de un fluido viscoso a través de un tubo se expresa:

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\mu l} \Delta p$$

donde Q es el caudal, Δp la diferencia de presiones entre dos puntos del tubo de radio r , separados una distancia l , y μ la viscosidad del fluido. La resistencia hidrodinámica viene dada por la expresión

$$R = \frac{8\mu l}{\pi r^4}$$

Para evaluar la resistencia hidrodinámica de la membrana es necesario en primer lugar calcular la de los poros. Para un poro

$$R_p = \frac{8 \times 10^{-2} \text{ d s cm}^{-2} \times 5 \times 10^{-4} \text{ cm}}{\pi(1,85 \times 10^{-5})^4 \text{ cm}^4} = 1,087 \times 10^{14} \text{ d s cm}^{-5}$$

b) Una vez determinada la resistencia de un poro, la resistencia hidrodinámica total se podrá evaluar teniendo en cuenta que la membrana está formada por un conjunto de n poros iguales conectados en paralelo. Por tanto,

$$\frac{1}{R} = \frac{n}{R_p} \Rightarrow R = \frac{R_p}{n}$$

y sustituyendo valores numéricos

$$R = \frac{1,087 \times 10^{14} \text{ d s cm}^{-5}}{2 \times 10^7 \text{ poros cm}^{-2} \times 4} = 1,359 \times 10^6 \text{ d s cm}^{-5}$$

La presión osmótica es la presión adicional que hay que hacer para que no pase fluido (agua) a la disolución (de agua salada). El cálculo de la presión osmótica se realiza según la expresión

$$\pi = CRT.$$

En este caso,

$$\pi = 1,08 \text{ mol l}^{-1} \times 0,082 \text{ atm l K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 293 \text{ K} = 25,9 \text{ atm}$$

c) La presión osmótica calculada en el apartado anterior da la presión que hay que hacer para evitar el flujo de agua a la disolución. Una presión ligeramente superior, por ejemplo de 26 atm, produce la ósmosis inversa, es decir, que el agua de la disolución pase a través de la membrana hacia el agua pura. El ritmo al que el agua pura fluye a través de la membrana depende de la presión. Para obtener un caudal de $72 \text{ l h}^{-1} = 20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ calculemos la diferencia de presión necesaria:

$$\begin{aligned} \Delta p &= Q \times R_{\text{hid}} = 20 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \times 1,359 \times 10^6 \text{ d} \times \text{s cm}^{-5} = \\ &= 2,717 \times 10^7 \text{ d cm}^{-2} = 26,8 \text{ atm} \end{aligned}$$

y, por tanto, la diferencia de presión total ha de ser

$$\Delta p_T = 26,8 \text{ atm} + 25,9 \text{ atm} = 52,7 \text{ atm}$$

con lo que la potencia resulta ser entonces

$$\begin{aligned} P &= \Delta p \times Q = 52,7 \text{ atm} \times 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} \text{ atm}^{-1} \times 20 \times \\ &\quad \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 106,7 \text{ W} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.22.

Mecanismo de Starling. La sangre, en su flujo a través de los capilares sanguíneos, transporta oxígeno y nutrientes en su camino hacia las células. Los productos de desecho se extraen de las células, son transportados por la sangre y

después de ser filtrados se eliminan del cuerpo. Dar una explicación de cómo se produce este intercambio a partir de los datos siguientes:

Presión arterial, 25 mm de Hg.

Presión venosa, 10 mm de Hg.

Presión osmótica dentro del capilar, 28 mm de Hg.

Presión osmótica del fluido intersticial, 5 mm de Hg.

Presión del fluido intersticial, -6 mm de Hg.

Todos los valores están referidos a diferencias respecto a la presión atmosférica

(la presión del fluido intersticial se mantiene por debajo de la presión atmosférica por la rigidez de los tejidos).

Starling fue el primero que propuso el mecanismo de intercambio que vamos a describir aquí, basado simplemente en la presión hidrostática y en la presión osmótica.

El plasma sanguíneo está compuesto de agua, electrólitos, moléculas pequeñas como la glucosa, oxígeno disuelto, dióxido de carbono y moléculas largas, las proteínas. Las paredes de los capilares forman una membrana que permite el paso de todas las sustancias, excepto las proteínas. Dado que el contenido proteínico del fluido intersticial y del plasma sanguíneo es distinto, ambos fluidos tienen valores distintos de la presión osmótica. Así, el plasma sanguíneo tiene una presión osmótica de 28 mm de Hg. La presión total en el extremo arterial es

$$P_{T_p} = P_a - \pi = 25 - 28 = -3 \text{ mm de Hg}$$

y en el extremo venoso

$$P_{T_p} = P_v - \pi = 10 - 28 = -18 \text{ mm de Hg}$$

Así, del extremo arterial al venoso, la presión total decrece linealmente desde -3 mm de Hg hasta -18 mm de Hg.

Por otra parte, el fluido intersticial tiene una presión total tanto en el extremo venoso como en el extremo arterial

$$P_{T_i} = P_{f_i} - \pi = -6 - 5 = -11 \text{ mm de Hg}$$

En vista de estos resultados vemos que cerca del extremo arterial la presión es mayor en el interior del capilar que en el exterior y que, por tanto, habrá un flujo neto de productos hacia el fluido intersticial, produciéndose en consecuencia una entrada de nutrientes y de oxígeno al medio intercelular.

En el extremo venoso, en cambio, esta relación se invierte y la presión en el fluido intersticial es superior que la presión interior del capilar, por lo que el flujo es el inverso, produciéndose entonces una circulación de material desde el fluido intercelular hacia el plasma sanguíneo.

En cambio, el flujo hacia fuera del capilar es ligeramente superior al flujo hacia el interior. El exceso de fluido vuelve a la circulación vía el sistema linfático.

Las anomalías en este mecanismo explican algunas disfunciones en los organismos. Así, por ejemplo, pacientes con un funcionamiento deficiente

de la parte derecha del corazón, encargada de bombear la sangre a los pulmones, experimentan un aumento en la presión venosa, lo cual provoca una acumulación de fluido en las piernas o en la espalda del paciente.

Esta situación también se presenta en pacientes con un bajo contenido de proteínas en el plasma sanguíneo que reduce la presión osmótica de la sangre. Así, p_{T_p} sube y se desequilibra el proceso hacia una entrada de fluido en el líquido intersticial. La hipoproteinemia se puede producir por un funcionamiento defectuoso del riñón, hígado o por una nutrición deficiente.

Por el contrario, si aumenta la temperatura, es decir, si el paciente tiene fiebre, la presión osmótica $\pi = CRT$ aumenta y el equilibrio se desplaza en la dirección contraria, produciéndose un desequilibrio de forma que el flujo desde el líquido intersticial se ve favorecido. Así, períodos prolongados de fiebre conducen a una deshidratación de los tejidos.

Supongamos que dos disoluciones del mismo compuesto con distintas concentraciones están separadas por un tabique. Las partículas de soluto y de disolvente chocan constantemente contra ambos lados del tabique. En el lado en que hay más partículas de soluto, es decir, donde la concentración es superior, los choques son más frecuentes. Al eliminar el tabique habrá más partículas de soluto que pasarán de la zona más concentrada a la menos concentrada que las que realizarán el proceso inverso. Así se establece un flujo neto de partículas hacia la disolución menos concentrada. La ley de Fick establece que este flujo es proporcional al gradiente de concentraciones que expresado en una dimensión (dirección x) es

$$J \sim -\frac{dC}{dx} \quad [38]$$

donde $C(x)$ es la distribución de la concentración en la dirección x . La constante de proporcionalidad es la constante de difusión D , que es proporcional a la temperatura. La expresión para D es

$$D = ukT \quad [39]$$

donde u se denomina movilidad y k es la constante de Boltzmann. Así pues, se puede escribir la *ley de Fick* como

$$J = -ukT \frac{dC}{dx} \quad [40]$$

o en general

$$J = -D \text{ grad } C \quad [41]$$

Así, según esta ley, el flujo es proporcional al gradiente de la concentración, y la constante de proporcionalidad depende de la sustancia que se difunde, a través de u , y de la temperatura.

Un resultado importante, en cuanto a las aplicaciones en biología se refiere, es el que se obtiene calculando el desplazamiento cuadrático medio $\overline{r^2}$ de una partícula por difusión, que resulta ser, en una dimensión

$$\overline{r^2} = 2Dt \quad [42]$$

Ejemplo 3.23.

Supongamos una membrana de espesor l que contiene N poros cilíndricos de radio a por unidad de área. Se define permeabilidad de una membrana para un determinado soluto (P) como el cociente entre el flujo de soluto ($\text{mol cm}^{-2} \text{s}^{-1}$) (J_s) y la diferencia de concentraciones de dicho soluto a un lado y otro de la membrana (ΔC), cuando los dos lados de la membrana están a la misma presión, es decir, $J_s = P\Delta C$. a) A partir de la ley de Fick, obtener una expresión para la permeabilidad de esta membrana en función de sus características (N , a , l) y del coeficiente de difusión D del soluto en agua. b) Si $N = 6,36 \times 10^4$ poros cm^{-2} , $a = 2 \times 10^{-5}$ cm, $l = 5 \times 10^{-4}$ cm y $D = 2 \times 10^{-5}$ $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ para un determinado soluto en agua, calcular la permeabilidad de la membrana para este soluto.

a) Según la ley de Fick, el flujo de soluto que atraviesa un cilindro de longitud l , entre cuyos extremos hay una diferencia de concentraciones ΔC , es

$$J_s (\text{poro}) = D \frac{\Delta C}{l}$$

Como hay N poros por unidad de área y la sección de un poro es πa^2 , tendremos

$$J_s = \frac{N\pi a^2 D}{l} \Delta C$$

y según la definición de permeabilidad obtenemos

$$P = \frac{N\pi a^2 D}{l}$$

Observemos que las unidades de P en el sistema internacional son m s^{-1} .

b) Introduzcamos ahora los datos numéricos del problema. Tendremos

$$\begin{aligned} P &= \frac{6,36 \times 10^4 \text{ poros cm}^{-2} \times \pi(2 \times 10^{-5})^2 \text{ cm}^2 \times 2 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}}{5 \times 10^{-4} \text{ cm}} = \\ &= 3,2 \times 10^{-6} \text{ cm s}^{-1} \end{aligned}$$

Este problema proporciona una manera de evaluar el orden de magnitud del radio a de los poros y el número N de poros de la membrana por unidad de área. Efectivamente, el coeficiente de filtración L_p y la permeabilidad P de un determinado soluto se pueden medir experimentalmente. A partir de estos datos, y si se determina l , μ y D (que se pueden hallar experimentalmente), podemos calcular N y a . En la práctica, los poros no son rectos ni cilíndricos y por tanto estos resultados se han de ver como una simple evaluación aproximada de las órdenes de magnitud correspondientes. Por otra parte, en muchas membranas biológicas los canales son proteínas de longitud $l \approx 10$ nm, $a \approx 4$ nm con $N = 10^{12}$ proteínas cm^{-2} . Los datos de este problema, sin embargo, corresponden a membranas artificiales.

Ejemplo 3.24.

Sabiendo que las moléculas de glucosa necesitan 0,1 segundos para recorrer por difusión una distancia media de 10 μm , calcular el tiempo que tardarán en recorrer una distancia media de 1 cm.

La relación entre la distancia cuadrática media recorrida por difusión y el tiempo t que se tarda en recorrerla es

$$\bar{r}^2 = 2 D t$$

donde D es la constante de difusión.

Así pues, si conocemos las dos distancias medias y el tiempo en recorrer una de ellas, podemos determinar el tiempo deseado a partir de la siguiente relación:

$$\frac{\bar{r}_1^2}{\bar{r}_2^2} = \frac{t_1}{t_2}$$

es decir,

$$t_2 = t_1 \left(\frac{\bar{r}_1^2}{\bar{r}_2^2} \right) = 10^{-1} \text{ seg} \left(\frac{1 \text{ cm}}{10^{-3} \text{ cm}} \right)^2 = 10^5 \text{ s} = 100\,000 \text{ segundos}$$

Este resultado muestra la gran lentitud de los procesos de difusión. ¡Por esto agitamos el café! Si dejáramos que el azúcar se difundiera sin la ayuda de la agitación, tendríamos que esperar mucho rato antes de poder tomar el café, si éste nos gusta dulce, naturalmente.

Ejemplo 3.25.

¿Cuál es la máxima velocidad a la que puede circular el plasma sanguíneo por los capilares que rodean a un alvéolo pulmonar para que el intercambio de oxígeno se realice por difusión? Suponer que el radio de los capilares alveolares es de 5 μm , que la pared es de 0,2 μm de espesor, que tienen 100 μm de longitud y que la constante de difusión es $D = 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

El intercambio gaseoso se realiza por difusión. En esas condiciones, el tiempo típico de la difusión se calcula a partir de la expresión

$$\bar{r}^2 = 2 D t$$

donde \bar{r}^2 es la distancia cuadrática media recorrida por difusión, que se puede identificar con el radio medio del capilar.

$$t = \frac{\bar{r}^2}{2 D} = \frac{(5 \times 10^{-4} \text{ cm})^2}{2 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}} = \frac{25 \times 10^{-8}}{2 \times 10^{-5}} \text{ s} = 12,5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Si la longitud del alvéolo es de $100 \mu\text{m}$, usando el resultado anterior obtenemos para la velocidad máxima de la sangre en los alvéolos

$$v_m = \frac{l}{t} = \frac{100 \times 10^{-4} \text{ cm}}{12,5 \times 10^{-2} \text{ s}} = 0,8 \text{ cm s}^{-1}$$

La velocidad real en los alvéolos pulmonares es de $0,1 \text{ cm s}^{-1}$. Por tanto, el mecanismo de difusión es una explicación plausible del intercambio de gases entre los pulmones y la sangre.

Ejemplo 3.26.

La hemoglobina es una proteína globular, de forma aproximadamente esférica. Calcular su radio a partir de la relación de Einstein para el coeficiente de difusión ($D = kT/6\pi\mu r$) si la constante de difusión de la hemoglobina en agua a 20°C es $D = 6,9 \times 10^{-7} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ [$\mu(\text{agua a } 20^\circ\text{C}) = 0,01 \text{ poise}$, $k = 1,38 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$].

Este problema pone en relieve el gran interés práctico de la fórmula de Einstein para el coeficiente de difusión, que nos permite obtener una magnitud, el radio molecular, muy difícil de medir directamente, en función de una magnitud de fácil medida directa. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} r &= \frac{kT}{6\pi\mu D} = \frac{1,38 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1} \times 293 \text{ K}}{6\pi \times 0,01 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \times 6,9 \times 10^{-7} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}} = \\ &= 3,11 \times 10^{-7} \text{ cm} = 31,1 \text{ \AA} \end{aligned}$$

3.9. Número de Reynolds

Hasta ahora hemos explicado el flujo de un fluido en régimen laminar. En el ejemplo del flujo por un tubo, a medida que aumenta la diferencia de presiones entre sus extremos, el fluido adquiere una velocidad cada vez más grande. El flujo laminar se mantiene hasta que la velocidad alcanza un valor determinado. Superado este valor, el flujo se hace inestable y cualquier pequeña perturbación acaba desestabilizándolo. Decimos entonces que se ha desarrollado la turbulencia. El flujo turbulento es muy complicado, tanto desde el punto de vista físico como matemático. La velocidad local presenta grandes fluctuaciones desordenadas que producen muchos choques internos y disipan mucha energía. En efecto, la inestabilidad de un flujo turbulento genera vórtices de tamaños muy distintos, donde se produce una buena parte de la disipación del flujo.

Sin embargo, el análisis de los fenómenos turbulentos a pesar de ser muy interesante, desde el punto de vista biológico no se hace imprescindible. En efecto, la mayor parte de situaciones de interés en biología se dan en condiciones donde el flujo es laminar. Incluso en los conductos donde la sangre

sale del corazón, el flujo prácticamente es laminar. Sólo en las fosas nasales parece que se ha desarrollado un entorno donde se ha favorecido el flujo turbulento para facilitar la mezcla completa del aire y, por tanto, mejorar el olfato y el intercambio de calor.

En la atmósfera, en cambio, los procesos turbulentos son importantes. Aunque la circulación atmosférica suele ser laminar, la formación de los anticiclones y las borrascas es una muestra de los mecanismos de disipación de energía a gran escala. A una escala mucho menor, se forman movimientos turbulentos en la superficie de separación entre aire de distintas características que se mueve también de forma diferente. Esta turbulencia incide en el confort del vuelo de los aviones comerciales.

En el flujo de un fluido por un conducto si las dimensiones del tubo varían, o si varía el fluido, varían las condiciones en las que se da la transición a la turbulencia. Existe una magnitud adimensional denominada número de Reynolds cuyo valor determina si un flujo es laminar o turbulento. La utilización de magnitudes adimensionales es muy útil en mecánica de fluidos para analizar de forma bastante directa y sencilla la relación entre el comportamiento de los fluidos o el movimiento de los cuerpos en el seno de fluidos a escalas espaciales diferentes.

El número de Reynolds para el flujo de un fluido por un tubo de radio R se define según la relación siguiente:

$$Re = \frac{\rho v R}{\mu} \quad [43]$$

donde ρ es la densidad del fluido, v su velocidad y μ su viscosidad.

Experimentalmente, en los conductos de simetría cilíndrica se ha encontrado que si $Re < 1000$, el flujo es laminar, si $1000 < Re < 1500$ el flujo es inestable y no se puede afirmar de forma categórica si es laminar o turbulento, y si $Re > 1500$ el flujo es turbulento. A la vista de [43] podemos comprobar lo que afirmábamos antes: para alcanzar valores del número de Reynolds grandes puede aumentarse la velocidad, pero también puede lograrse el mismo efecto aumentando el radio del tubo, o incluso cambiando el tipo de fluido y reduciendo la viscosidad.

Ejemplo 3.27.

Evaluar el número de Reynolds que corresponde a los datos del flujo de la sangre en el sistema cardiovascular. Datos: velocidad media, 35 cm s^{-1} en el extremo arterial y $3,9 \text{ mm s}^{-1}$ en el extremo capilar; radio arterial medio, $1,19 \text{ cm}$; radio capilar medio, $4 \mu\text{m}$, $\rho = 1,1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\mu = 2,084 \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$.

El cálculo del número de Reynolds es inmediato a partir de [43]. En el extremo arterial

$$Re = \frac{\rho v R}{\mu} = \frac{1,1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 0,35 \text{ m s}^{-1} \cdot 1,19 \times 10^{-2} \text{ m}}{2,084 \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}} = 2198$$

y en el extremo capilar

$$Re = \frac{\rho v R}{\mu} = \frac{1,1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 3,9 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1} \cdot 4 \times 10^{-6} \text{ m}}{2,084 \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}} = 8 \times 10^{-3}$$

Es evidente que en el extremo capilar el flujo es laminar. Generalmente en el extremo arterial, a poca distancia del corazón, el régimen de flujo alcanza un número de Reynolds característico del flujo laminar, aunque inmediatamente a la salida del corazón el flujo es turbulento.

El número de Reynolds es un cociente entre dos fuerzas: la fuerza inercial y la fuerza viscosa:

$$Re = \frac{\text{Fuerza de inercia}}{\text{Fuerza viscosa}} = \frac{\rho V (dv/dt)}{A \mu (dv/dr)} = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3 (dv/dt)}{4 \pi R^2 \mu} \approx \frac{\rho v R}{\mu} \quad [44]$$

donde V es el volumen de un objeto esférico de área A . La expresión anterior no pretende ser una deducción rigurosa de la forma del número de Reynolds, pero nos permite ver cómo representa el cociente entre la fuerza viscosa y la fuerza de inercia. Así, un flujo caracterizado por números de Reynolds grandes corresponde a un flujo donde la inercia domina sobre la viscosidad. Este tipo de flujo suele caracterizarse por velocidades grandes. En cambio, el flujo a bajos números de Reynolds se caracteriza por el dominio de las fuerzas viscosas sobre las inerciales.

3.10. Movimiento de cuerpos en fluidos

El número de Reynolds también es útil para analizar el movimiento de los cuerpos en los fluidos. En efecto, si utilizamos la definición de número de Reynolds explicitada en la ecuación [43], donde ahora R se entiende como una dimensión característica del objeto y v como su velocidad en el fluido, la idea de número de Reynolds como cociente entre la fuerza inercial y la fuerza viscosa nos sirve para identificar el régimen de movimiento de un objeto en un fluido. Así, distinguiremos dos regímenes, el movimiento a bajo número de Reynolds, en el cual las fuerzas viscosas son más importantes que las fuerzas inerciales, y el movimiento a alto número de Reynolds donde la inercia es el factor importante.

Al analizar el movimiento de los animales a partir de su número de Reynolds, nos encontramos con diferencias de 16 órdenes de magnitud. En efecto, mientras que el movimiento de una ballena corresponde a un número de Reynolds de 200 000 000, el movimiento de una bacteria en una solución acuosa se caracteriza por un número de Reynolds de 0,000001, pasando por el número de Reynolds que caracteriza el vuelo de una gaviota (100 000) o el vuelo de una mosca (100). Esta diversidad de ordenes de magnitud del

número de Reynolds indica que el movimiento de animales en la naturaleza responde a dinámicas muy distintas. Efectivamente, el movimiento de la ballena está caracterizado por un número de Reynolds muy grande, lo cual significa que los efectos viscosos son despreciables frente a los inerciales. Su movimiento es análogo al de un nadador ($Re = 100\,000$) en cuyo movimiento la inercia juega un papel importante. En general, nuestra intuición está educada a considerar el movimiento en que el número de Reynolds es grande.

Si nos situamos en el otro extremo, el movimiento de una bacteria, los efectos inerciales son despreciables frente a los efectos viscosos, ya que el número de Reynolds característico es muy pequeño. Esto configura un movimiento sobre el cual nuestra intuición está muy poco educada. En efecto, si los efectos inerciales son despreciables, significa que en cuanto cesa la acción de un mecanismo propulsor el organismo se para. También son distintos los movimientos realizados por los organismos para obtener propulsión, ya que a números de Reynolds grandes se usa frecuentemente la propiedad de que un mismo movimiento produce un efecto distinto si se hace más rápido o se hace más lento, mientras que a números de Reynolds pequeños esta característica no se da. Para hacernos una idea intuitiva de lo que supone moverse en un régimen de número de Reynolds pequeño podemos imaginar lo que supondría nadar en una piscina llena de alquitrán. Actualmente tiene un gran auge la microfluídica, que consiste en la producción de flujos fluidos en canales de pocas micras de radio, de manera que se produzcan fuerzas minuciosamente controladas sobre las diversas zonas de macromoléculas introducidas en dichos canales, y que permite miniaturizar los análisis de procesos diversos, actividad que ha dado un gran impulso a los estudios a bajos números de Reynolds.

Las fuerzas que ejerce un fluido en movimiento respecto de un cuerpo se dividen en dos categorías: fuerzas de resistencia y fuerzas de sustentación. La fuerza de resistencia se produce en la dirección del movimiento del fluido; la fuerza de sustentación va en la dirección perpendicular a la dirección del movimiento. Vamos a concentrarnos ahora en estos dos tipos de fuerzas.

3.11. Fuerzas de resistencia o fuerzas de arrastre

Cuando el flujo del fluido se produce con un número de Reynolds grande, puede verse de una forma intuitiva cómo se originan estas fuerzas usando la ecuación de Bernoulli [15]. En efecto, supongamos que un fluido se mueve a velocidad horizontal u_0 constante dirigida según la dirección x (véase Figura 3.18) y que es aplicable el principio de Bernoulli. Apliquémoslo primero entre los puntos 1 y 1' de la figura. Suponemos que la altura de los dos puntos respecto al nivel de referencia es la misma y que la velocidad del fluido en el punto 1', $v_{1'}$, es mayor que la velocidad del fluido en el punto 1, v_1 , ya que en el punto 1 se produce un denominado punto de estancamiento, es decir, un punto donde la velocidad del fluido prácticamente es cero. La ecuación de Bernoulli es pues

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{1'} + \frac{1}{2}\rho v_{1'}^2$$

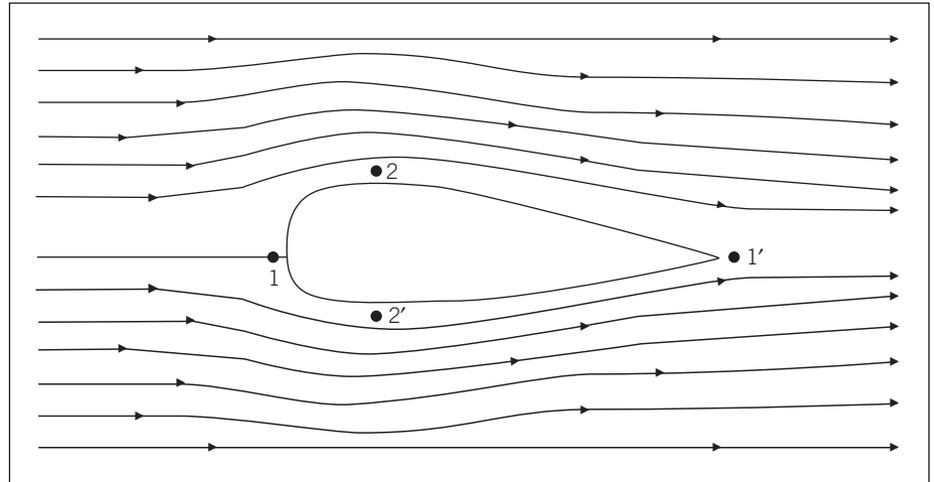


Figura 3.18.

y si $v_{1'} > v_1$, por la condición anteriormente mencionada, la ecuación anterior implica

$$p_1 - p_{1'} = \frac{1}{2} \rho (v_{1'}^2 - v_1^2) > 0$$

lo cual significa que la fuerza por unidad de superficie es mayor en el punto 1 que en el punto 1'. Este resultado puede comprobarse de una forma muy simple midiendo la distribución de la presión alrededor del cuerpo de la Figura 3.18. Los valores medios confirmarán el resultado obtenido de la aplicación del principio de Bernoulli. La fuerza de resistencia viene dada entonces por el producto de la diferencia de presiones por el área transversal en la dirección x , A_x , es decir,

$$F_r = (p_1 - p_{1'})A_x = \frac{1}{2} \rho (v_{1'}^2 - v_1^2) A_x \quad [45]$$

En la ecuación anterior, la diferencia de velocidades entre los puntos 1 y 1' depende de la forma del objeto y, por supuesto, de la velocidad del fluido del cuerpo. En estas condiciones escribimos pues

$$F_r = \frac{1}{2} \rho C_r A_x u_0^2 \quad [46]$$

donde el coeficiente C_r , que depende de la forma del objeto pero también de las condiciones del flujo, es decir, del número de Reynolds, se denomina coeficiente de resistencia o de arrastre. Este coeficiente se utiliza frecuentemente como índice de la calidad aerodinámica de un automóvil y bajo la denominación de coeficiente C_x aparece frecuentemente en la publicidad de los automóviles. Cuanto menor sea este coeficiente menor será la fuerza de resistencia que ha de vencer el motor del coche y, por tanto, será menor la potencia necesaria.

En efecto, la potencia que hay que vencer para compensar la fuerza de resistencia viene dada por

$$P = F_r u_0 = \frac{1}{2} \rho C_r A_x u_0^3 \quad [47]$$

Ejemplo 3.28.

Los músculos natatorios de un pez desarrollan una potencia de $0,4 \times 10^3$ W, de la cual un 60 por 100 se aplica a la natación. Si el pez nada a una velocidad de 5 m s^{-1} y si su sección transversal máxima en la dirección del movimiento es de 100 cm^2 , ¿cuál es el valor de su coeficiente de resistencia?

De la ecuación [47] se despeja el coeficiente C_r , con lo cual queda

$$C_r = \frac{2P}{\rho A v^3}$$

donde v es la velocidad del pez. En este ejemplo resulta

$$C_r = \frac{2 \times 0,6 \times 400 \text{ W}}{1000 \text{ kg m}^{-3} \times 10^{-2} \text{ m}^2 (5 \text{ m s}^{-1})^3} = 0,38$$

Notemos que el coeficiente de resistencia es un coeficiente sin dimensiones.

Ejemplo 3.29.

Se ha evaluado en atletas de élite de una masa media de 75 kg que la máxima potencia que pueden desarrollar durante el esprint es de 3 kW. De esta potencia el 10 por 100 se emplea en vencer la resistencia aerodinámica del aire. Si $C_r = 0,9$ y $A_x = 0,5 \text{ m}^2$, calcular la velocidad máxima que se puede conseguir si la densidad del aire al nivel del mar es $1,23 \text{ kg m}^{-3}$. ¿En qué porcentaje puede mejorarse la velocidad máxima si la competición se realiza en Ciudad de México, donde la densidad del aire es un 18 por 100 inferior que al nivel del mar? Comparar los resultados obtenidos con los de un corredor de la prueba de maratón que desarrolla una potencia de 1,5 kW, pero que invierte únicamente un 3 por 100 de ella en vencer la fuerza de resistencia del viento.

La energía necesaria para caminar, para correr o saltar se mide a partir de la medida del consumo de oxígeno. El resultado de muchos trabajos experimentales al respecto ha llevado a concluir que la potencia necesaria para moverse a una velocidad v es

$$P(v) = P(0) + mcv + \frac{1}{2} \rho C_r A_x v^3$$

donde m es la masa del animal, c la energía consumida por unidad de longitud, $P(0)$ el ritmo metabólico en reposo, que normalmente corresponde a 1,5 o 2 veces el ritmo metabólico basal. Comúnmente c se interpreta que es la energía necesaria para realizar el trabajo mecánico para correr. Por otra parte, en la expresión anterior el último término da cuenta de la potencia necesaria para vencer la resistencia aerodinámica del aire. A este último término vamos a dedicar nuestra atención en este ejemplo.

La expresión [47] da cuenta igualmente de la resistencia aerodinámica. Despejando la velocidad y sustituyendo los datos del problema se obtiene

$$u_0 = \sqrt[3]{\frac{2P}{\rho C_r A_x}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 0,1 \times 3000 \text{ W}}{1,23 \text{ kg m}^{-3} \times 0,9 \times 0,5}} = 10,27 \text{ m s}^{-1}$$

Si la carrera se realiza en Ciudad de México, en las condiciones expresadas en el enunciado, la densidad del aire será $\rho' = \rho - 0,18\rho = 0,82\rho$; por tanto, la velocidad en Ciudad de México u'_0 vendrá dada por

$$u'_0 = \sqrt[3]{\frac{2P}{0,82 \rho C_r A_x}}$$

Si dividimos esta velocidad por el valor de la velocidad al nivel del mar, resulta

$$\frac{u'_0}{u_0} = \sqrt[3]{\frac{1}{0,82}} = 1,078$$

Por tanto, la velocidad máxima puede aumentar en un 7,8 por 100. Evidentemente, este resultado supone que la potencia máxima que puede desarrollar un atleta es la misma y que la fracción de la potencia que utiliza el corredor en vencer la fuerza de resistencia también es la misma.

En el caso del corredor de la prueba de maratón, el cálculo de la velocidad u_0 lleva al resultado siguiente:

$$u_0 = \sqrt[3]{\frac{2P}{\rho C_r A_x}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 0,03 \times 1500 \text{ W}}{1,23 \text{ kg m}^{-3} \times 0,9 \times 0,5}} = 5,46 \text{ m s}^{-1}$$

La repercusión sobre esta velocidad del cambio de la prueba a una localización donde la densidad es más pequeña no suele tener repercusión notable sobre la velocidad final obtenida.

Una situación de considerable interés se produce cuando el organismo se mueve en un fluido con un número de Reynolds pequeño. Entonces los argumentos aplicados anteriormente no son aplicables y la expresión de la fuerza de resistencia adopta una forma distinta de la que se muestra en la ecuación [46]. La deducción exacta de la fuerza de arrastre en esas condiciones supera el nivel de este texto. En general, en esas situaciones la fuerza de resistencia depende de la primera potencia de la velocidad y de la visco-

sidad. A partir de argumentos de análisis dimensional puede obtenerse de una forma fácil una expresión para la fuerza de resistencia cuando el número de Reynolds es muy pequeño.

En efecto, si suponemos que $F_r \sim v$ y que, en general, la fuerza de resistencia puede depender de las dimensiones del cuerpo, por ejemplo de R su parámetro característico, de la viscosidad μ del fluido y de la densidad ρ del fluido, a partir de argumentos de análisis dimensional podremos deducir la forma de esta dependencia.

En efecto, si M , L y T son las dimensiones mecánicas básicas (masa, longitud y tiempo, respectivamente), se cumple

$$\begin{aligned}[F] &= MLT^{-2} \\ [R] &= L \\ [\rho] &= ML^{-3} \\ [\mu] &= ML^{-1}T^{-1}\end{aligned}$$

y si expresamos en general la dependencia de F_r en las variables arriba comentadas queda

$$F_r \sim R^a \rho^b \mu^c v$$

donde a , b y c son exponentes a determinar. En función de las dimensiones la ecuación anterior queda

$$MLT^{-2} = L^a M^b L^{-3b} M^c L^{-c} T^{-c} LT^{-1}$$

que, a su vez, si se requiere que las dimensiones de ambos lados de la igualdad coincidan, lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}b + c &= 1 \\ a - 3b - c &= 0 \\ -c &= -1\end{aligned}$$

y que resuelto comporta $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$. La fuerza de resistencia queda

$$F_r \sim R\mu v$$

Notemos que por argumentos de análisis dimensional resulta que la fuerza no depende de la densidad, lo cual es lógico, ya que los efectos de la inercia a números de Reynolds bajos son despreciables. Por otra parte, el factor de proporcionalidad que falta en la expresión anterior no lo podemos obtener a partir de argumentos de dimensionalidad. Sólo se podrá llegar a este factor a partir de la resolución de las ecuaciones del movimiento del fluido. Si el cuerpo es una esfera, este factor resulta ser 6π . Entonces la ecuación que resulta es la ecuación [48].

El caso más frecuente consiste en considerar una esfera, cuando la velocidad a la que se mueve es tal que el número de Reynolds de su movimiento es inferior a 1. En ese caso

$$F_r = 6\pi\mu Rv \quad [48]$$

donde R es el radio de la esfera. Esta expresión se conoce como la *ley de Stokes*. En casos más complicados, cuando el cuerpo no tiene una forma geométrica simple, la expresión que hay que utilizar es

$$F_r = \phi\mu Rv \quad [49]$$

donde ϕ es un parámetro adimensional que habitualmente se determina experimentalmente.

La ley de Stokes es muy útil para analizar los procesos de sedimentación de partículas pequeñas en un fluido. Esta situación se da en muchos ámbitos de la vida: por ejemplo, en un lago las partículas que llegan a la superficie arrastradas por el viento o por otros agentes y que son más densas que el agua caen lenta y suavemente hacia el fondo si el fluido está en reposo o son arrastradas por el fluido en sus movimientos convectivos. La velocidad en un caso es la velocidad de sedimentación y en el otro es la diferencia de velocidades entre la velocidad de la partícula y la del fluido. Otro entorno interesante es la sangre. Si dejamos reposar una muestra de sangre, los glóbulos rojos, más pesados que el plasma, caen lentamente hacia el fondo del recipiente. La velocidad de caída, que denominamos velocidad de sedimentación, depende del peso de los glóbulos y de la fuerza de resistencia del fluido que se opone a su movimiento.

Analicemos este proceso. En la Figura 3.19 se representa esquemáticamente cómo sedimenta un glóbulo rojo de densidad ρ_g y de radio R bajo la acción de su peso en un fluido de densidad ρ_0 y de viscosidad μ . El análisis dinámico del problema comporta tener en consideración tres fuerzas: el peso

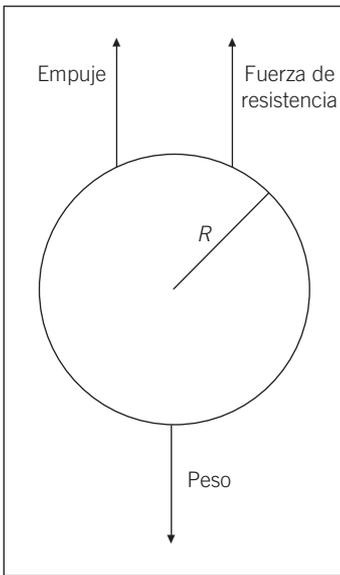


Figura 3.19.

$$\text{peso} = mg = \rho_g \frac{4}{3} \pi R^3 g \quad [50]$$

el empuje de Arquímedes

$$\text{empuje} = \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3 g \quad [51]$$

y, finalmente, la fuerza de resistencia [48] $F_r = 6\pi\mu Rv$.

Si estudiamos la situación estacionaria cuando se da el equilibrio dinámico de las tres fuerzas, resulta

$$6\pi\mu Rv_s + \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3 g = \rho_g \frac{4}{3} \pi R^3 g \quad [52]$$

donde v_s es la velocidad terminal, o velocidad de sedimentación que se alcanza precisamente cuando se establece el equilibrio. Despejando v_s de [52] se obtiene la expresión para la velocidad de sedimentación

$$v_s = \frac{2}{9} (\rho_g - \rho_0) g \frac{R^2}{\mu} \quad [53]$$

En esta ecuación vemos que la sedimentación es tanto más rápida cuanto mayor es la diferencia de densidades del fluido y de la partícula y cuanto menor es la viscosidad del fluido.

Ejemplo 3.30.

Determinar el máximo radio para el que se puede utilizar la ley de Stokes si se quiere determinar la velocidad terminal de partículas esféricas de polvo de

densidad $3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$: a) cuando están en aire a 20°C ; b) cuando están en agua a 20°C (densidad del aire a 20°C , $1,20 \text{ kg m}^{-3}$; viscosidad del aire a 20°C , $1,81 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$; densidad del agua a 20°C , 1000 kg m^{-3} ; viscosidad del agua a 20°C , $1,005 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$).

La expresión [48] da la fuerza de Stokes. En este ejemplo pretendemos determinar el radio máximo para el que se puede utilizar dicha ley, es decir, aquel radio para el que se cumple $Re < 1$. Para verificarlo hemos de tener en cuenta que la velocidad terminal también depende del radio y, por tanto, introducimos la expresión [53] en la definición del número de Reynolds y obtenemos

$$Re < 1 \Rightarrow \frac{2}{9} \rho_0 \frac{R^3 g (\rho_p - \rho_0)}{\mu^2} < 1$$

Por tanto, despejando R queda

$$R < \left[\frac{9\mu^2}{2\rho_0 g (\rho_p - \rho_0)} \right]^{1/3}$$

Para sedimentación en el aire resulta

$$R < \left[\frac{9 \times (1,81 \times 10^{-5})^2 \text{ kg}^2 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2}}{2 \times 1,20 \text{ kg m}^{-3} \times 9,81 \text{ m s}^{-2} (3000 - 1,20) \text{ kg m}^{-3}} \right]^{1/3} =$$

$$= 3,47 \times 10^{-5} \text{ m}$$

y para el caso del agua

$$R < \left[\frac{9 \times (1,005 \times 10^{-3})^2 \text{ kg}^2 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2}}{2 \times 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 9,81 \text{ m s}^{-2} (3000 - 1000) \text{ kg m}^{-3}} \right]^{1/3} =$$

$$= 6,14 \times 10^{-5} \text{ m}$$

En ambos casos el radio de las partículas es muy pequeño. Al analizar la calidad del aire en las ciudades se ha visto que el principal problema para la salud pública es la presencia de partículas procedentes de la combustión en motores o en instalaciones industriales, del tráfico rodado o de la erosión del suelo. Las más peligrosas para la salud son las PM_{2,5}, partículas cuyo diámetro no supera los $2,5 \times 10^{-6} \text{ m}$, aunque también hay partículas PM₁₀, cuyo diámetro es inferior a $1 \times 10^{-5} \text{ m}$. Según el cálculo anterior, ambos tipos de partículas sedimentan según la ley de Stokes.

Ejemplo 3.31.

Calcular la velocidad de caída de una gota de lluvia de 10^{-3} cm de radio (viscosidad del aire, 0,01 cp; densidad del aire, $0,001$ g cm $^{-3}$; densidad del agua, 1 g cm $^{-3}$). ¿Es correcto aplicar la ley de Stokes?

En principio vamos a suponer que se cumple la ley de Stokes y a partir de los resultados obtenidos veremos si el número de Reynolds resultante está por debajo de 1. Mediante la expresión [53] calculamos la velocidad terminal, teniendo en cuenta que $1 \text{ cp} = 0,01 \text{ poise} = 0,001 \text{ N s m}^{-2}$. Así

$$v_s = \frac{2}{9}(\rho_p - \rho_b)g \frac{R^2}{\mu} = \frac{2}{9}(1 - 0,001) \text{ g cm}^{-3} 981 \text{ cm s}^{-2} \frac{10^{-6} \text{ cm}^2}{10^{-4} \text{ ds cm}^{-2}} =$$

$$= 2,178 \text{ cm s}^{-1}$$

Para evaluar si es posible aplicar la ley de Stokes a este ejemplo, sabemos que esta ley puede aplicarse cuando el número de Reynolds es menor que la unidad. En este caso:

$$Re = \frac{\rho_b v R}{\mu} = \frac{0,001 \text{ g cm}^{-3} \times 2,178 \text{ cm s}^{-1} \times 0,001 \text{ cm}}{10^{-4} \text{ d cm}^{-2} \text{ s}} = 0,021$$

Por tanto, el valor del número de Reynolds es inferior a 1, por lo que es correcto utilizar la ley de Stokes en este problema. Para gotas mayores, las más numerosas, el número de Reynolds es mayor que la unidad, por lo cual debe utilizarse una expresión de la fuerza de resistencia que depende del cuadrado de la velocidad.

A partir de la ecuación [48] puede calcularse fácilmente también la potencia necesaria para mantener un movimiento constante si la fuerza de resistencia que actúa es la fuerza de Stokes. En efecto, la potencia viene dada por la expresión siguiente:

$$P = F_r v_s = 6\pi\mu R v_s^2 \quad [54]$$

Ejemplo 3.32.

¿Qué energía consume una célula esférica de $10 \mu\text{m}$ de radio para moverse en agua ($\mu = 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$) a una velocidad de $50 \mu\text{m s}^{-1}$? Calcular el número de Reynolds correspondiente al movimiento de la célula.

Para moverse a una velocidad dada, la célula tiene que vencer la fuerza de resistencia dada por la ley de Stokes y, por tanto, la potencia que tiene que desarrollar viene dada por la ecuación [54]. Por tanto,

$$P = F_r v_s = 6\pi\mu R v_s^2 = 6\pi 10^{-3} \text{ N s m}^{-2} \times 10 \times 10^{-6} \text{ m} \times$$

$$\times (50 \times 10^{-6})^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = 4,71 \times 10^{-16} \text{ W}$$

El número de Reynolds correspondiente al movimiento viene dado por

$$Re = \frac{\rho_0 v R}{\mu} =$$

$$= \frac{1000 \text{ kg m}^{-3} \times 50 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1} \times 10 \times 10^{-6} \text{ m}}{10^{-3} \text{ N s m}^{-2}} = 5 \times 10^{-4}$$

que es mucho menor que 1 y, en consecuencia, justifica la utilización de la ley de Stokes para este problema.

Ejemplo 3.33.

Una bacteria puede consumir una potencia motriz de $2 \times 10^{-18} \text{ W}$. Su radio es $R = 1 \text{ }\mu\text{m}$. ¿A qué velocidad puede moverse en un líquido de viscosidad $\mu = 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$?

La potencia motriz de la bacteria se utiliza en vencer la resistencia hidrodinámica al movimiento. Suponiendo que se puede utilizar la ley de Stokes para la fuerza de resistencia, la expresión [54] nos da la potencia necesaria para moverse a velocidad v . Por tanto, despejando de [54] v nos queda

$$v = \left(\frac{P}{6\pi\mu R} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{2 \times 10^{-18} \text{ W}}{6\pi \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-2} \times 10^{-6} \text{ m}} \right)^{1/2} = 1,03 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$$

Para probar si es lícita la utilización de la ley de Stokes, calculamos el número de Reynolds suponiendo que el líquido donde se mueve la bacteria es agua. El número de Reynolds que se obtiene es $1,03 \times 10^{-5}$, que corresponde a un movimiento descrito por la ley de Stokes.

Ejemplo 3.34.

En la superficie de una charca de profundidad l hay una población de microorganismos compuesta por un 50 por 100 de células de $5 \text{ }\mu\text{m}$ de radio y un 50 por 100 de células de $10 \text{ }\mu\text{m}$ de radio. Durante 2,4 horas estas células sedimentan, ¿cuál será la composición de la población en la superficie de la zona suponiendo sedimentación pasiva después de transcurrido este tiempo? ($l = 1 \text{ m}$, viscosidad del agua, $1,005 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$; densidad de los microorganismos, 1500 kg m^{-3}).

Consideremos la charca como un paralelepípedo de base A y altura l . Sea n el número de microorganismos por unidad de volumen. En una determina-

da región de volumen V , su variación por unidad de tiempo viene dada por la relación

$$\frac{d(Vn)}{dt} = -nvA$$

donde v es la velocidad de sedimentación de los microorganismos y el signo menos indica que con el paso del tiempo su número de partículas disminuye, ya que sedimentan. Al elegir un volumen constante la ecuación anterior puede escribirse de la forma siguiente:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{nvA}{V} = -\frac{nv}{l}$$

o bien

$$l \frac{dn}{n} = -vdt$$

Integrando esta ecuación diferencial entre el instante 0 y un tiempo genérico t y entre la concentración inicial $n(0)$ y la concentración $n(t)$ en el tiempo t resulta

$$\int_{n(0)}^{n(t)} l \frac{dn}{n} = -\int_0^t vdt$$

Resolviendo las integrales se obtiene

$$\ln \frac{n(t)}{n(0)} = -\frac{v}{l}t$$

o bien invirtiendo el logaritmo

$$n_i(t) = n_i(0)e^{-\frac{v_i}{l}t}$$

donde $i = 1$ para las partículas de $5 \mu\text{m}$ de radio e $i = 2$ para las partículas de $10 \mu\text{m}$ de radio. Dividiendo los dos miembros de la ecuación anterior por $n_1(t) + n_2(t)$, definiendo $p_i(t)$, la fracción de partículas i en suspensión como

$$p_i(t) = \frac{n_i(t)}{n_1(t) + n_2(t)}$$

y teniendo en cuenta que en el instante inicial $n_1(0) = n_2(0)$ resulta

$$\frac{p_1(t)}{p_2(t)} = e^{-\frac{(v_1 - v_2)}{l}t}$$

Por otra parte, estas son las únicas partículas que hay en suspensión, por tanto $p_1(t) + p_2(t) = 1$. Así tenemos dos ecuaciones para los dos porcentajes y tenemos dos incógnitas $p_1(t)$ y $p_2(t)$. El valor de v_i se calcula a partir de la ley de Stokes:

$$v_i = \frac{2}{9}g \frac{(\rho - \rho_0)R^2}{\mu}$$

y sustituyendo los valores del ejemplo

$$v_1 = \frac{2}{9} 9,81 \text{ m s}^{-2} \frac{(1500 - 1000) \text{ kg m}^{-3} (5 \times 10^{-6} \text{ m})^2}{1,005 \times 10^3 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}} = 2,71 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{2}{9} 9,81 \text{ m s}^{-2} \frac{(1500 - 1000) \text{ kg m}^{-3} (10 \times 10^{-6} \text{ m})^2}{1,005 \times 10^3 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}} = 10,84 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$$

Por tanto, la relación entre los dos porcentajes vale

$$p_1(t) = p_2(t) e^{-\frac{(v_1 - v_2)t}{1}} = p_2(t) e^{-\frac{(2,71 - 10,84) \text{ m s}^{-1} (2,4 \text{ h } 3600 \text{ s h}^{-1})}{1 \text{ m}}} = 2,02 p_2(t)$$

Como las dos fracciones suman 1, resulta

$$p_1(2,4 \text{ h}) = 0,67 \quad \text{y} \quad p_2(2,4 \text{ h}) = 0,33$$

es decir, después de 2,4 horas, la composición de partículas hasta 1 m de profundidad es de un 33 por 100 de partículas de 10 μm de radio y de un 67 por 100 de partículas de 5 μm de radio.

En muchas ocasiones la velocidad de sedimentación resulta ser muy pequeña, con lo que la sedimentación pasiva es muy lenta. Para atajar este problema se utilizan las centrifugadoras, que, permiten sustituir el peso en la ecuación [52] por la fuerza centrífuga, lo cual consiste en sustituir g por la aceleración centrífuga $\omega^2 r$ en la ecuación [53], donde ω es la velocidad angular de rotación de la centrifugadora y r el radio de rotación de la máquina. Así, la ecuación [53] se convierte en

$$v_s = \frac{2}{9} (\rho - \rho_0) \omega^2 r \frac{R^2}{\mu} \quad [55]$$

Ejemplo 3.35.

Calcular el tiempo que un glóbulo rojo tarda en sedimentar 1 cm en plasma sanguíneo suponiendo que tiene una forma esférica, sabiendo las características siguientes: $R = 2 \mu\text{m}$, $\rho_g = 1,3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\mu = 2,084 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\rho_p = 1,056 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Para calcular el tiempo de sedimentación hay que saber el valor de la velocidad de sedimentación, ya que una vez conocida,

$$t = \frac{d}{v_s}$$

Por tanto, sustituimos en [53] los valores de este problema y resulta

$$v_s = \frac{2}{9} g(\rho_g - \rho_p) \frac{R^2}{\mu} = \frac{2}{9} 9,81 \text{ m s}^{-2} (1,3 \times 10^3 - 1,056 \times 10^3) \text{ kg m}^{-3} \frac{(2 \times 10^{-6})^2}{2,084 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}} = 1,021 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$$

Por tanto, para sedimentar 1 cm se invierte un tiempo

$$t = \frac{10^{-2} \text{ m}}{1,021 \times 10^{-6} \text{ s}} = 9795 \text{ s}$$

Si, en cambio, la suspensión se introduce en una centrifugadora donde $\omega^2 r = 10^5 \text{ g}$, resulta que la nueva velocidad de sedimentación v'_s vale

$$v'_s = 10^5 v_s$$

y, por tanto, el tiempo de sedimentación, queda reducido en un factor 10^{-5} , es decir,

$$t' = 10^{-5} t = 0,097 \text{ s}$$

Ejemplo 3.36.

Para separar partículas muy pequeñas de densidad muy parecida a la del disolvente se utiliza una ultracentrifugadora con un rotor de 20 cm de radio. Si se quiere separar partículas que sin centrifugación tardarían una semana en sedimentarse, ¿a qué velocidad angular tendrá que girar la máquina para que las mismas partículas sedimenten en medio minuto?

Durante la sedimentación pasiva, las partículas están sometidas a la fuerza del peso, que es la fuerza que las hace sedimentar, y el empuje de Arquímedes y la fuerza de resistencia de Stokes que se oponen a la sedimentación. Si suponemos que las tres fuerzas se equilibran, se despeja la velocidad y resulta

$$v_p = \frac{(\rho - \rho_0)V}{6\pi\mu R} \omega^2 r$$

donde v_p es la velocidad de sedimentación pasiva y V el volumen de las partículas de densidad ρ y radio R . Si sometemos la suspensión a la acción de una centrifugadora, se sustituye la aceleración de la gravedad por la aceleración centrífuga $\omega^2 r$, donde ω es la velocidad angular de rotación de la centrifugadora y r el radio de su rotor. Si escribimos la ecuación anterior, pero ahora teniendo en cuenta la aceleración centrífuga, resulta

$$v_c = \frac{(\rho - \rho_0)V}{6\pi\mu R} \omega^2 r$$

donde v_c es la velocidad de sedimentación en la centrifugadora. Dividiendo las dos ecuaciones anteriores entre sí y teniendo en cuenta que si las partículas sedimentan una distancia d , $v_p = d/t_p$ y $v_c = d/t_c$, resulta

$$\frac{v_p}{v_c} = \frac{g}{\omega^2 r} = \frac{t_c}{t_p}$$

donde $t_c = 30$ s y $t_p = 604.800$ s. Por tanto, despejando ω queda

$$\omega = \left(\frac{gt_p}{rt_c} \right)^{1/2} = \left(\frac{9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 604.800 \text{ s}}{30 \text{ s} \cdot 0,2 \text{ m}} \right)^{1/2} = 994,4 \text{ s}^{-1}$$

velocidad angular del rotor que equivale a 9496 revoluciones por minuto.

Ejemplo 3.37.

Calcular la velocidad de sedimentación a 20 °C de la hemoglobina en plasma fisiológico. Calcular la velocidad angular del rotor de una ultracentrifugadora necesaria para que una molécula de hemoglobina situada en uno de los tubos de plasma fisiológico recorra 5 cm en 10 horas si el radio del rotor es de 15 cm. (Datos de la hemoglobina: densidad, 1,335 g cm⁻³; radio, 0,27 × 10⁻⁸ m; coeficiente de rozamiento, $\phi = 1,14 \phi_{esfera}$. Datos del plasma fisiológico: densidad, 1,006 g cm⁻³; viscosidad, 1 cp.)

Cuando se alcanza la velocidad de sedimentación, la fuerza de resistencia se iguala a la acción del peso y al empuje, a saber,

$$\phi R \mu v_s = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \rho_0) g$$

es decir,

$$v_s = \frac{4\pi R^2 (\rho - \rho_0) g}{3\phi\mu}$$

que sustituyendo valores queda

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{4(0,27 \times 10^{-8} \text{ m})^2 (1,335 - 1,006) 10^3 \text{ kg m}^{-3}}{3 \times 6 \times 1,14 \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}} 9,81 \text{ m s}^{-2} = \\ &= 0,47 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\phi = 1,14 \times 6\pi$.

Esta velocidad es muy pequeña, por tanto hay que utilizar una centrifugadora. Según el problema, hay que sedimentar hemoglobina a una distancia de 5 cm en 10 horas, por tanto la velocidad de sedimentación debe ser

$$v'_s = \frac{d}{t} = \frac{5 \times 10^{-2} \text{ m}}{10 \text{ h} \times 3600 \text{ s h}^{-1}} = 1,39 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$$

Si el plasma con hemoglobina se coloca en una centrifugadora, la aceleración a la que estará sometida la muestra será la aceleración centrífuga $\omega^2 r$, con r el radio del rotor y entonces

$$v'_s = \frac{4R^2(\rho - \rho_0)}{3 \times 6,84 \mu} \omega^2 r$$

de donde despejando ω resulta

$$\begin{aligned} \omega &= \left[\frac{3 \times 6,84 \mu v'_s}{4R^2(\rho - \rho_0)r} \right]^{1/2} = \\ &= \left[\frac{3 \times 6,84 \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-2} \cdot 1,39 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1}}{4(0,27 \times 10^{-8} \text{ m})^2 (1,335 - 1,006) 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 0,15 \text{ m}} \right]^{1/2} = \\ &= 4452 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

3.12. Fuerza de sustentación

Hemos definido las fuerzas de sustentación como aquellas que son perpendiculares a la dirección del flujo. Al igual que hicimos con las fuerzas de arrastre, podemos hacer un argumento basado en la ecuación de Bernoulli, que indica la esencia del mecanismo físico que produce las fuerzas de sustentación. En efecto, en la Figura 3.18 consideremos los puntos 2 y 2' y apliquemos el principio de Bernoulli despreciando la diferencia de alturas entre estos dos puntos

$$p_{2'} - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_{2'}^2) \quad [56]$$

Si como resultado de la forma del objeto se consigue que la velocidad en el punto 2 sea mayor que en el punto 2', resulta que la presión en 2' es mayor que en 2 y por tanto el cuerpo está sometido a una fuerza hacia arriba. Si, al igual que antes, queremos calcular la fuerza, tendremos que multiplicar por el área horizontal A_y , quedando

$$F_s = (p_{2'} - p_2) A_y = \frac{1}{2} \rho A_y C_s v^2 \quad [57]$$

donde también se ha considerado que las velocidades en 2 y 2' dependen de la velocidad del cuerpo y de la forma de este, que viene caracterizada por el coeficiente C_s , denominado coeficiente de sustentación. (El coeficiente C_s también depende del ángulo que presenta el cuerpo respecto al flujo, llamado ángulo de ataque, aunque este aspecto no lo tendremos en cuenta.)

La ecuación [57] contiene la fenomenología más simple que caracteriza el vuelo. Así, cuanto mayor es la velocidad mayor es la fuerza de sustentación. Igualmente, cuanto mayor sea el área del ala mayor será la fuerza de sustentación. Sin embargo, hemos de pensar que la generación de sus-

tentación no está exenta del gravamen de la fuerza de resistencia. Esto es, alas grandes y voluminosas generan sustentación, pero también generan fuerza de resistencia que tiende a frenar el movimiento de cuerpo.

Para mantener estable el vuelo de un cuerpo de masa m hace falta que la fuerza de sustentación compense al peso, es decir,

$$mg = \frac{1}{2} \rho A_y C_s v^2 \quad [58]$$

por tanto, despejando de la relación anterior, la velocidad mínima de despegue viene dada por

$$v \geq \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2} \rho A_y C_s}} \quad [59]$$

donde el signo igual se refiere al mantenimiento del vuelo y el signo mayor se aplica para despegar.

Ejemplo 3.38.

Analizar la dependencia en las dimensiones de la velocidad de despegue y relacionarla con el vuelo de algunas aves. Aplicarlo al cálculo de la velocidad de despegue de una avestruz, que es unas veinticinco veces más grande que un vencejo, que levanta el vuelo cuando alcanza una velocidad de 21 km h^{-1} .

Utilizando la ecuación [59] se puede analizar cómo depende la velocidad de despegue de las dimensiones del animal. En esta ecuación dependen del tamaño del animal m y A_y . La masa depende del volumen del animal y por tanto depende de L^3 , mientras que A_y es un área y por tanto depende de L^2 . Por tanto, usando [59] nos queda

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2} \rho A_y C_s}} \sim \sqrt{\frac{L^3}{L^2}} = \sqrt{L}$$

Este resultado implica que cuanto mayor es el tamaño del ave mayor es la velocidad de despegue. Si lo aplicamos a los datos del vencejo y del avestruz, utilizando la expresión anterior y dividiendo ambas velocidades, resulta

$$\frac{v_a}{v_v} = \sqrt{\frac{L_a}{L_v}} = \sqrt{25} = 5$$

donde v_a es la velocidad de despegue del avestruz y v_v la velocidad de despegue del vencejo. Por tanto, la velocidad de despegue del avestruz resulta ser

$$v_a = 5v_v = 5 \times 21 \text{ km h}^{-1} = 105 \text{ km h}^{-1}$$

Esta es una velocidad imposible de alcanzar, incluso para las avestruces, que se caracterizan por tener una buena velocidad de carrera.

Algunas aves voladoras grandes no alcanzan la velocidad de vuelo mediante la carrera, sino despegando desde acantilados o montañas, y es precisamente mediante un elegante y bello planeo como consiguen adquirir la velocidad necesaria para volar.

Por otra parte, en un vuelo estabilizado la potencia muscular o la potencia de los motores se utilizan en vencer la fuerza de resistencia dada por [46], necesaria para alcanzar la velocidad de [59]. Por tanto, la potencia viene dada por la expresión siguiente:

$$P = F_r v = \frac{1}{2} \rho C_r A_x v^3 = \frac{1}{2} \rho C_r A_x \left(\frac{mg}{\frac{1}{2} \rho A_y C_s} \right)^{3/2} \quad [60]$$

Ejemplo 3.39.

Si una maqueta de avión necesita una potencia P_m para levantar el vuelo, ¿qué potencia necesita un prototipo a tamaño real, cien veces mayor, para despegar?

En este ejemplo pretendemos hacer un análisis de la dependencia de la potencia con las dimensiones del objeto. En efecto, si consideramos la ecuación [60], la dependencia en las dimensiones del objeto se concentra en A_x , A_y y m . El área depende de L^2 , donde L es una dimensión característica del objeto, mientras que la masa depende de L^3 . Así, la potencia dada por [60] depende de las dimensiones como

$$P \sim L^2 \left(\frac{L^3}{L^2} \right)^{3/2} = L^{7/2}$$

Por tanto, si comparamos las potencias de la maqueta P_m y del prototipo P_p resulta

$$\frac{P_p}{P_m} = \frac{L_p^{7/2}}{L_m^{7/2}} = (100)^{7/2} = 10^7$$

ya que $L_p/L_m = 100$.

Ejemplo 3.40.

Un diseñador construye una avioneta de 1000 kg que tiene un coeficiente de resistencia de 0,04 y vuela a una velocidad constante de 50 m s⁻¹. Su área frontal es de 3 m² y cada una de sus alas tiene una longitud de 5 m y una anchura de 2 m. Calcular la potencia que han de desarrollar los motores para mante-

ner esta velocidad. Calcular también el coeficiente de sustentación (densidad del aire a 20 °C, $1,2 \text{ kg m}^{-3}$).

Los motores han de actuar venciendo la fuerza aerodinámica de resistencia y por tanto han de proporcionar una potencia dada por la expresión [47], con lo cual sustituyendo valores resulta

$$P = \frac{1}{2} C_r A_r v^3 = \frac{1}{2} 0,04 \times 1,2 \text{ kg m}^{-3} 3 \text{ m}^2 (50 \text{ m s}^{-1})^3 = 9000 \text{ W}$$

Para evaluar el coeficiente de sustentación hay que considerar que cuando el avión vuela nivelado, es decir, sin ascender ni descender, la fuerza de sustentación iguala al peso y por tanto se cumple

$$mg = \frac{1}{2} C_s \rho A_y v^2$$

de donde despejando C_s resulta

$$C_s = \frac{2 \text{ m g}}{\rho A_y v^2} = \frac{2 \times 1000 \text{ kg } 9,81 \text{ m s}^{-2}}{1,2 \text{ kg m}^{-3} 20 \text{ m}^2 (50 \text{ m s}^{-1})^2} = 0,33$$

donde se ha tenido en cuenta que $A_y = 2 \times (2 \text{ m} \times 5 \text{ m}) = 20 \text{ m}^2$.

Ejemplo 3.41.

Un gorrión de 15 g de masa necesita una velocidad de 5 m s^{-1} para comenzar a volar desde el suelo. Si coge del suelo un gusano de 8 g, ¿cuál tendrá que ser su velocidad para que pueda levantar el vuelo?

El ave, antes de cazar el gusano, volaba cuando su fuerza de sustentación igualaba su peso, es decir,

$$mg = \frac{1}{2} C_s \rho A_y v^2$$

Después de cazar el gusano, el pájaro tiene una masa m' y deberá alcanzar una velocidad v' para levantar el vuelo, por tanto,

$$m'g = \frac{1}{2} C_s \rho A_y v'^2$$

Dividiendo las dos ecuaciones anteriores y despejando v' se obtiene

$$v' = \sqrt{\frac{m'}{m}} v = \sqrt{\frac{23 \text{ g}}{15 \text{ g}}} 5 \text{ m s}^{-1} = 6,19 \text{ m s}^{-1}$$

Problemas propuestos

1. Un globo de 3 m de radio se llena de helio de densidad $0,178 \text{ kg m}^{-3}$. ¿Cuál será la máxima carga que puede sostener en vuelo horizontal? Densidad del aire, $1,20 \text{ kg m}^{-3}$.

Resultado: 1133,9 N.

2. Un cilindro de madera de densidad $0,75 \text{ g cm}^{-3}$ flota en agua con su eje perpendicular a la superficie. El radio es de 10 cm y la altura de 15 cm. *a)* ¿Qué fracción del cilindro está sumergida? *b)* ¿Cuánto vale la altura de la fracción sumergida? *c)* Si ahora el cilindro flota con el eje paralelo a la superficie, ¿cuánto vale la fracción del cilindro sumergida?

Resultados: *a)* 75 por 100; *b)* 11,25 cm; *c)* 75 por 100.

3. ¿Qué trabajo hay que realizar contra las fuerzas de tensión superficial para inflar una pompa de jabón de 4 cm de diámetro? (tensión superficial, $0,042 \text{ N m}^{-1}$).

Resultado: $4,22 \times 10^{-4} \text{ J}$.

4. En dos disoluciones 1 M de agua, una de ellas es glucosa (peso molecular, 180) y la otra de un biopolímero (peso molecular, 500). Suponemos que el volumen de glucosa y del biopolímero es despreciable comparado con el del agua. En cada una de ellas introducimos un papel de filtro que tiene unos poros longitudinales del orden de 0,02 mm de radio. ¿Hasta qué altura subirá cada disolución en el papel de filtro sabiendo que la tensión superficial en ambos casos es $\gamma = 60,8 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$.

Resultados: *a)* 10,3 cm; *b)* 8,1 cm.

5. ¿Cuál es el diámetro mínimo que debe tener un barómetro de mercurio si la corrección de la altura de la columna debida a la capilaridad no debe exceder los 0,5 mm de Hg? ($\gamma = 0,465 \text{ N m}^{-1}$, ángulo de contacto $\varphi = 140^\circ$, $\rho = 13,6 \text{ g cm}^{-3}$).

Resultado: 2,14 cm.

6. En un grifo que gotea, deducir el tamaño aproximado de las gotas en función del radio R del tubo de salida. (*Sugerencia:* considerar que el goteo se produce porque hay una competencia entre la tensión superficial y el peso de la gota.)

Resultado: $r = \left(\frac{3R\gamma}{2\rho g} \right)^{1/3}$

7. El corazón bombea sangre por la aorta con una presión media de 100 mm de Hg. Si el área de la sección

transversal de la aorta es de 3 cm^2 , ¿cuál es la fuerza media que ejerce el músculo sobre la sangre?

Resultado: 3,99 N.

8. El pulmón humano ejerce una presión máxima al espirar de 120 mm de Hg. Los indios del Amazonas usan esta presión para acelerar una flecha envenenada introducida en un tubo. Despreciando las fuerzas de rozamiento y de arrastre, calcular la velocidad máxima que puede alcanzar la flecha si tiene una masa de 1 g y el tubo tiene una longitud de 3 m y una sección transversal de 1 cm^2 .

Resultado: $98,0 \text{ m s}^{-1}$.

9. La presión con que el corazón bombea sangre oxigenada es de 120 mm de Hg. *a)* Si la cabeza está 40 cm por encima del corazón, ¿cuánto vale la presión en la cabeza? *b)* ¿Cuánto vale la presión en los pies si se supone que en una persona están 140 cm por debajo del corazón? *c)* Si un avión vuela en picado a 200 m s^{-1} describiendo un arco de 2 km, ¿cuánto vale ahora la presión arterial en la cabeza del piloto? (véase Figura 3.20). Densidad de la sangre, 1059 kg m^{-3} .

Resultados: *a)* 88,9 mm de Hg; *b)* 229,2 mm de Hg; *c)* 25,2 mm de Hg.

10. Desde un frasco y a través de un tubo circular fluye plasma hasta la vena de un enfermo. Cuando el recipiente está a 1,6 m sobre el brazo del paciente, *a)* ¿cuál es la presión del plasma que entra en la vena? *b)* Si la presión sanguínea en la vena es de 12 mm de Hg y despreciando los efectos viscosos, ¿cuál es la mínima altura a la que hemos de colocar el recipiente para que el plasma circule por la vena? (densidad del plasma, $1,05 \text{ g cm}^{-3}$).

Resultados: *a)* 123 mm de Hg; *b)* 0,15 m. *Nota:* Si se consideran los efectos viscosos, el frasco debe colocarse más alto.

11. Si el radio de la aorta de una persona es de 0,9 cm y su corazón bombea 5 litros por minuto, calcular: *a)* la velocidad media de la sangre en la aorta, *b)* la velocidad media en los capilares si la persona tiene unos 5×10^9 capilares en todo el cuerpo de radio medio $r = 2 \mu\text{m}$.

Resultados: *a)* $32,7 \text{ cm s}^{-1}$; *b)* $0,13 \text{ cm s}^{-1}$.

12. Un fluido de $1,5 \text{ g cm}^{-3}$ de densidad fluye a través de un tubo de 2 cm de radio con una velocidad de 300 cm s^{-1} a una presión de 900 mm de Hg. El tubo se es-

trecha hasta alcanzar un radio de 1 cm cuando está 20 cm más alto que antes. Calcular: *a)* la velocidad en este último punto, *b)* la presión.

Resultados: *a)* 1200 cm s^{-1} ; *b)* 118,3 mm de Hg.

13. En los árboles, por cada metro de altura hay una diferencia de presión de 0,15 atm. La savia fluye por el xilema formado por capilares de $2 \times 10^{-5} \text{ m}$ de radio. Si la viscosidad de la savia es 1 cp, ¿cuánta savia por segundo conduce cada uno de los capilares?

Resultado: $0,95 \times 10^{-6} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

14. Para realizar una transfusión de sangre a un enfermo colocamos el frasco con el plasma a 1,3 m por encima del brazo. La aguja que penetra en la vena tiene un diámetro interior de 0,36 mm y 3 cm de longitud. El flujo de sangre es de $4,5 \text{ cm}^3$ por minuto. Calcúlese la viscosidad de la sangre sabiendo que su densidad es de 1020 kg m^{-3} .

Resultado: $2,4 \times 10^{-3} \text{ Ns m}^{-2}$.

15. ¿Cuál ha de ser el diámetro del tubo capilar de 15 centímetros de longitud de un viscosímetro para que estando sometido a la diferencia de presión producida por dos columnas de agua de 19 cm de diferencia de altura todo el contenido del contenedor del viscosímetro ($5,2 \text{ cm}^3$) tarde un minuto y siete segundos en vaciarse (viscosidad del agua, $10^{-3} \text{ Ns m}^{-2}$).

Resultado: 0,07 cm.

16. Un músculo activado está irrigado por 10^6 capilares. Se puede suponer que estos conductos están en paralelo y que su longitud media es de 20 mm y su radio $10 \mu\text{m}$. La diferencia de presión entre sus extremos es de 20 mm de Hg). *a)* Calcular la resistencia hidrodinámica del músculo, *b)* la potencia disipada en el músculo por efectos hidrodinámicos (viscosidad de la sangre, $10^{-3} \text{ Ns m}^{-2}$).

Resultados: *a)* $0,51 \times 10^{10} \text{ Ns m}^{-5}$, *b)* $1,39 \times 10^{-3} \text{ W}$.

17. Determinar la presión osmótica a 15°C de una disolución de 10 g de azúcar en 1000 cm^3 de agua, si la masa molar del azúcar es 360 g.

Resultado: $6,64 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}$.

18. Al disolver 10 g de azúcar ($\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$) en 0,5 l de agua, la presión osmótica de la disolución es $1,52 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. ¿A qué temperatura se halla dicha disolución?

Resultado: 313 K.

19. La concentración de proteínas en el plasma sanguíneo se compone de albúminas (p.m. 75000), cuya

concentración es de 4,5 g por cada 100 ml, y de globulina (p.m. 170000) en la proporción de 2,0 g en 100 ml. Evaluar sus respectivas presiones osmóticas a 37°C .

Resultados: 0,015 atm; 0,003 atm.

20. Consideremos que los poros de la membrana celular son cilindros de 4 \AA de radio y de 80 \AA de longitud (grosor de la membrana). Supongamos que hay $2,5 \times 10^{10}$ poros por cada centímetro cuadrado de membrana. Si se aplica una diferencia de presión Δp de 5 mm de Hg entre el exterior y el interior de la célula, ¿qué cantidad de agua entrará por los poros cada centímetro cuadrado y cada segundo si la viscosidad del agua es $10^{-3} \text{ Ns m}^{-2}$?

Resultado: $2 \times 10^{-14} \text{ m}^3$.

21. Los aspectos hidrodinámicos de un cierto órgano del cuerpo pueden ser descritos por una combinación en paralelo de dos conductos cilíndricos de 0,5 mm de radio y 5 cm de longitud, por cada uno de los cuales circula un caudal sanguíneo de $10^{-4} \text{ m}^3/\text{minuto}$ (viscosidad de la sangre = $1,3 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$). Calcular: *a)* la diferencia de presiones entre la entrada y la salida del órgano; *b)* la potencia consumida para impulsar la sangre en el órgano; *c)* ¿cómo variarían los resultados anteriores si el órgano sufriera una embolia que obturase uno de los dos conductos, de manera que todo el caudal tuviera que pasar por el conducto restante?

Resultado: *a)* $73,6 \text{ N m}^{-2}$; *b)* $4,1 \times 10^{-6} \text{ W}$.

22. Si el agua del medio celular está en reposo y si en el exterior de la célula hay una concentración de 3 moles litro⁻¹ de un determinado soluto cuya concentración interior vale 1 mol litro⁻¹, calcular cuánto soluto entra por difusión en la célula (por centímetro cuadrado y por segundo) si la constante de difusión vale $D = 2,5 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, y si los poros tienen un radio de 4 \AA , una longitud de 80 \AA y hay $2,5 \times 10^{10}$ poros por centímetro cuadrado de membrana.

Resultado: $7,85 \times 10^{-6} \text{ mol}$.

23. Una membrana celular tiene 10^{10} poros por centímetro cuadrado. Con evidente optimismo simplificador, consideramos los poros como cilindros perpendiculares a la membrana. Para calcular su radio se realiza un experimento que consiste en situar la membrana entre dos soluciones de diferente concentración y en medir el flujo correspondiente de soluto. Si la diferencia de concentración a ambos lados de la membrana vale Δc , y si el flujo observado es J_s ($\text{g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$) = $5,7 \times 10^{-3} (\text{cm s}^{-1}) \Delta c$, ¿cuánto vale el radio de los poros? ($D = 2,6 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$; grosor de la membrana, 80 \AA).

Resultado: $7,5 \text{ \AA}$.

24. El coeficiente de difusión de la pepsina en agua a $20\text{ }^\circ\text{C}$ es $9 \times 10^{-11}\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$. Dos recipientes con concentraciones diferentes de pepsina están en contacto mediante un tubo de 10 cm de longitud. Si el flujo inicial de pepsina desde el recipiente de 100 mol m^{-3} hacia el otro recipiente, de concentración desconocida, es de $10^{-12}\text{ mol cm}^{-2}\text{ s}^{-1}$, determinar la concentración inicial desconocida.

Resultado: $88,9\text{ mol m}^{-3}$.

25. Una membrana de 0,3 mm de grosor separa dos disoluciones de glucosa. En la primera de ellas hay 25 g de glucosa por cada litro de disolución y en la segunda hay 7 g por cada litro de disolución. El área total de los poros de la membrana que permiten el paso de glucosa es $0,30\text{ cm}^2$. Si el flujo de agua a través de la membrana es nulo y si el coeficiente de difusión vale $D = 0,3 \times 10^{-5}\text{ cm}^2\text{ s}^{-1}$, calcúlese el flujo de glucosa y cuántos moles de glucosa la atraviesan en un minuto, suponiendo constante la concentración a ambos lados de la membrana (p.m. de la glucosa, 180).

Resultados: $10^{-8}\text{ mol cm}^{-2}\text{ s}^{-1}$; $1,8 \times 10^{-7}\text{ mol}$.

26. La movilidad de los iones K^+ y Cl^- en agua es muy parecida. Su cociente es $u_{\text{Cl}}/u_{\text{K}} = 1,03$. Calcular el potencial de difusión entre dos disoluciones de KCl, una de ellas saturada (34,7 g por cada 100 cm^3 de disolución) y la otra de concentración de 4,5 mM a $20\text{ }^\circ\text{C}$.

Resultado: 2,59 mV.

27. Percibimos los olores a causa de moléculas que llegan por el aire hasta las mucosas de las fosas nasales. En ausencia de viento, estas moléculas se mueven por difusión. El coeficiente de difusión de las moléculas de un cierto perfume vale $0,23\text{ cm}^2\text{ s}^{-1}$, en aire, a $20\text{ }^\circ\text{C}$. ¿Cuánto tiempo tardará en percibir el olor una persona situada a 1 metro de un frasco del perfume acabado de destapar?

Resultado: 217391 s

28. En 1905, Einstein propuso que el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en los fluidos es causado por colisiones de las partículas con las moléculas del fluido y halló la relación $D = kT/(6\pi\mu r)$ entre el coeficiente de difusión D de un soluto en un disolvente de viscosidad μ y el coeficiente de fricción de las partículas del soluto (de radio r) en el citado disolvente, a temperatura absoluta T (k es la constante de Boltzmann, $k = 1,38 \times 10^{-23}\text{ J/K}$). a) Evaluar el coeficiente de difusión de proteínas esféricas de 10 nm de radio en agua a $20\text{ }^\circ\text{C}$ (viscosidad: 10^{-3} Pa s). b) Evaluar el tiempo que tardarían estas proteínas en difundirse una

distancia del orden de $10\text{ }\mu\text{m}$, el radio de una célula eucariótica.

Resultados: a) $2,15 \times 10^{-7}\text{ cm}^2/\text{s}$; b) $9,3 \times 10^{-4}\text{ s}$.

29. a) Calcular el número de Reynolds del flujo de sangre en una zona de la aorta donde el radio es 0,9 cm y la velocidad $0,33\text{ m s}^{-1}$. b) Calcular, asimismo, el número de Reynolds del flujo de sangre en un capilar de $2\text{ }\mu\text{m}$ de radio donde la sangre circula a una velocidad de $0,66 \times 10^{-3}\text{ m s}^{-1}$ (densidad de la sangre, 1020 kg m^{-3} ; viscosidad, $4 \times 10^{-3}\text{ N s m}^{-2}$). A partir de estos resultados, comentar el tipo de flujo más probable en cada una de las zonas del sistema vascular.

Resultados: a) 757; b) $3,4 \times 10^{-4}$.

30. ¿Qué potencia ha de desarrollar una bacteria de $1\text{ }\mu\text{m}$ de radio para moverse a $5\text{ }\mu\text{m s}^{-1}$ en un líquido de viscosidad $\mu = 10^{-3}\text{ N s m}^{-2}$.

Resultado: $4,71 \times 10^{-19}\text{ W}$.

31. Una burbuja de cava tiene un milímetro de radio al desprenderse de una de las paredes de la copa. a) Calcular la aceleración en ese momento; b) calcular su velocidad terminal (densidad del gas, $0,5\text{ g cm}^{-3}$; densidad del cava, 1 g cm^{-3} ; viscosidad del cava, $10^{-3}\text{ N s m}^{-2}$).

Resultados: a) $9,81\text{ m s}^{-2}$; b) $1,63\text{ m s}^{-1}$.

32. En el extremo de un péndulo simple de 1 m de longitud hay una bola de 10 g de masa y de 1 cm de radio. La fuerza de rozamiento que ejerce el aire sobre la bola viene dada por la ley de Stokes. a) Calcular el período del péndulo. b) ¿Cuánto tardará en amortiguarse si la viscosidad del aire es de $10^{-5}\text{ N s m}^{-2}$? c) ¿Cuánto tardaría en pararse en agua de viscosidad $10^{-3}\text{ N s m}^{-2}$?

Resultados: a) 2 s; b) tiempo característico, $0,11 \times 10^5\text{ s}$; c) $0,11 \times 10^3\text{ s}$.

33. Un determinado flagelo helicoidal produce al girar con velocidad angular ω una fuerza impulsora $F = 3 \times 10^{-11}\omega$ expresada en newtons. a) ¿Con qué velocidad avanza una bacteria de $4\text{ }\mu\text{m}$ de radio en agua si su flagelo gira doce veces cada segundo? b) ¿Cuál es el número de Reynolds que corresponde a este movimiento? c) ¿Cuánto vale la potencia consumida en este proceso de locomoción?

Resultados: a) 3 cm s^{-1} ; b) 0,12; c) $79 \times 10^{-11}\text{ W}$.

34. ¿Cuál es el tamaño de una gota de lluvia que cae en aire a $20\text{ }^\circ\text{C}$ con un número de Reynolds igual a 0,16 y con una velocidad de 7 cm s^{-1} ? (viscosidad del aire, $10^{-5}\text{ N s m}^{-2}$; densidad del aire, $1,3\text{ kg m}^{-3}$).

Resultado: $1,74 \times 10^{-5}\text{ m}$.

35. Una barca se mueve gracias a un motor fuera borda de 15 Hp con una velocidad de 20 nudos. Si utiliza un motor de 30 Hp, ¿cuál sería la velocidad máxima que podría alcanzar?

Resultado: 25,2 nudos.

36. Un nadador moviéndose en agua a $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ nada a $1,5\text{ m s}^{-1}$. El número de Reynolds correspondiente viene a ser de 10^6 . Si su sección transversal es $0,1\text{ m}^2$ y el coeficiente de resistencia hidrodinámica 0,73, calcular: a) la fuerza de arrastre que ejerce el agua; b) la potencia necesaria para mantener este ritmo natatorio. Si el nadador en las mismas condiciones nada en agua a $24\text{ }^{\circ}\text{C}$, se observa que la fuerza de arrastre disminuye en un 7 por 100. Este resultado puede interpretarse como una disminución del coeficiente de resistencia hidrodinámica, ¿cuánto vale ahora?

Resultados: a) 82,13 N; b) 123,19 W; c) 0,68.

37. La fuerza de sustentación de las alas de algunos insectos viene caracterizada por un coeficiente aerodinámico de sustentación igual a 4. La velocidad se con-

sidera que es la velocidad lineal del ala que se alcanza con su movimiento y A la superficie de las alas. Si suponemos que el movimiento del ala es vibratorio armónico simple, cuál será la frecuencia mínima de vibración de las alas de un insecto de 2 g para poder levantar el vuelo, sabiendo que cada ala tiene un área de 1 cm^2 y una longitud media de 1 cm? (densidad del aire, $1,3\text{ kg m}^{-3}$).

Resultado: 97,8 Hz.

38. ¿Qué potencia disipa un automóvil de coeficiente aerodinámico de arrastre 0,30 moviéndose a 90 ó 120 km h^{-1} , por lo que respecta a la fuerza de arrastre aerodinámica? (supóngase un área de 4 m^2).

Resultados: a) 12.187,5 W; b) 28.888,9 W.

39. Al preparar la maniobra de aterrizaje, un piloto despliega los flaps de su aparato incrementando en un 10 por 100 el área de las alas que contribuye a la sustentación. ¿En qué porcentaje podrá disminuir la velocidad de la nave para seguir manteniendo un vuelo nivelado?

Resultado: En un 5 por 100.

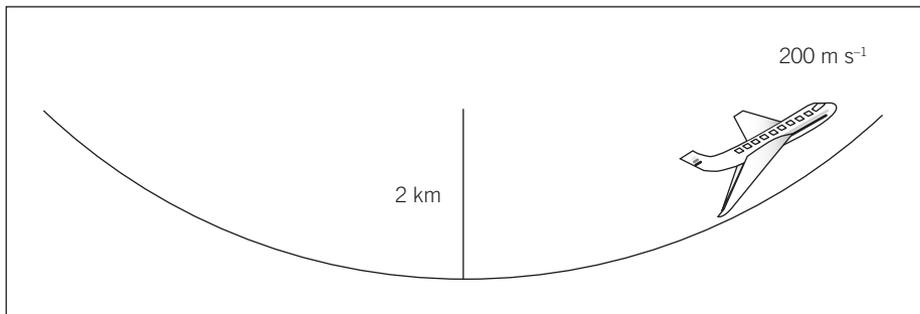


Figura 3.20.

CAPÍTULO

Termodinámica: calor, energía, planeta

4

La termodinámica es la parte de la Física que estudia macroscópicamente las transformaciones de la energía (energía térmica en energía mecánica, energía química en energía eléctrica, energía térmica en energía eléctrica, etcétera), los diversos estados de agregación de la materia y las condiciones de equilibrio químico. Como en los seres vivos el metabolismo implica numerosas transformaciones energéticas, numerosas reacciones químicas y diversos cambios de estado (de estructuras más rígidas a estructuras más fluidas en la membrana celular, de estructuras helicoidales a estructuras filamentosas en las macromoléculas, de estado abierto a estado cerrado en los canales de las membranas), la termodinámica juega un papel importante en la biofísica. La regulación de la temperatura, los intercambios térmicos y de materia, los diversos equilibrios fisiológicos, son algunos de los temas de interés de la perspectiva termodinámica. Por otro lado, el estudio térmico de la atmósfera, incorporando el efecto invernadero adicional debido a la acumulación de dióxido de carbono, metano y otros gases, y las posibles consecuencias de un cambio del clima, tienen también un gran interés.

4.1. Primera ley de la termodinámica. Conservación de la energía. Trabajo y calor

La primera ley de la termodinámica identifica el calor como una forma de energía y postula la conservación de ésta. Conceptualmente resultaron difíciles tanto esta identificación del calor, que antes se confundía con un fluido indestructible especial (calórico), como la idea de la conservación de la energía. La primera ley de la termodinámica establece

$$\Delta U = Q + W \quad [1]$$

donde U es la *energía interna* del sistema, ΔU su diferencia entre el estado final y el estado inicial, Q el *calor* suministrado al sistema y W el *trabajo* efectuado sobre el sistema. Calor y trabajo son las dos maneras de variar la energía de un sistema cerrado. En efecto, si en los sistemas mecánicos simples un trabajo produce la variación de la energía cinética o de la energía potencial, en los sistemas compuestos por muchas partículas puede realizarse trabajo (por ejemplo, comprimiendo lentamente el sistema) sin que varíe su energía potencial. Asimismo, comunicar calor al sistema produce una variación en la temperatura de éste y, posteriormente, se puede extraer cierta cantidad de trabajo del sistema al enfriarlo. Estas formas de energía relacionadas con el estado interno del cuerpo, más que con su posición o con su velocidad, constituyen la llamada energía interna. Así como U es una función del estado del sistema (sólo depende de sus propiedades actuales), Q y W dependen del proceso entre el estado inicial y el estado final, aunque su suma sólo depende del inicio y el fin del proceso.

Hay muchos tipos de trabajo: mecánico, químico, eléctrico, magnético, superficial, etc. Aquí consideraremos solamente el trabajo mecánico de compresión o expansión de un fluido, que viene dado por

$$dW = -p dV \quad [2]$$

con p la *presión* y dV la variación de *volumen* del sistema (negativa en la compresión, ya que en este caso disminuye el volumen del sistema, y positiva en la expansión).

Las medidas del *calor* y de la *temperatura* están relacionadas. Aquí tomaremos ambos conceptos como dados por intuición, sin detenernos en su definición detallada que resulta harto sutil, y pasaremos directamente a su estudio cuantitativo, para el que se deben establecer escalas y unidades. La definición de una escala se consigue asignando valores fijos de la temperatura a unos puntos de referencia. Las escalas más usuales toman como puntos fijos el de fusión del hielo y el de ebullición del agua a presión atmosférica; entre ellas destacan las escalas *Celsius* ($t_f = 0\text{ }^\circ\text{C}$, $t_{eb} = 100\text{ }^\circ\text{C}$) y la *Fahrenheit* ($t_f = 32\text{ }^\circ\text{F}$, $t_{eb} = 212\text{ }^\circ\text{F}$). La escala más importante desde el punto de vista físico por su significación fundamental es la escala *absoluta* o *Kelvin*, que operativamente coincide con la escala de temperaturas de los gases ideales y cuyo valor se obtiene al sumar $273,15^\circ$ a los valores de la escala Celsius. El cero de dicha escala es el cero absoluto, que constituye el límite inferior de temperaturas.

Los termómetros se basan en la dependencia de ciertas propiedades con la temperatura (longitud de una barra o de una columna de fluido, volumen de un gas a presión constante o presión de un gas a volumen constante, resistencia de un metal o de un semiconductor, fuerza electromotriz de un par termoelectrónico, características de la radiación electromagnética emitida, etc.). A partir de los valores directamente observables de tales magnitudes se puede asignar valores a la temperatura.

Ejemplo 4.1.

Encontrar las relaciones entre las escalas Celsius, Kelvin y Fahrenheit de temperatura, comparando los valores que toman en los puntos fijos recogidos en la siguiente tabla:

Presión = 1 atm	Celsius	Kelvin	Fahrenheit
Ebullición del agua	100°	373,15°	212°
Fusión del hielo	0°	273,15°	32°
Cero absoluto	-273,15°	0°	-459,67°

De la tabla se desprende inmediatamente que las escalas Celsius y Kelvin difieren únicamente en el cambio de origen:

$$t(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273,15$$

Para determinar la relación entre la escala Celsius y la Fahrenheit tenemos en cuenta que entre el punto de fusión del hielo t_f y el de ebullición del agua t_e hay $100\text{ }^\circ\text{C}$ y $180\text{ }^\circ\text{F}$; por tanto,

$$\frac{\Delta t (^{\circ}\text{C})}{\Delta t (^{\circ}\text{F})} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$$

Como el punto de fusión del hielo de la escala Fahrenheit está en 32 grados, tendremos:

$$t(^{\circ}\text{C}) = (5/9)(t(^{\circ}\text{F}) - 32)$$

De hecho, Fahrenheit no tomó como puntos fijos la fusión del hielo y la ebullición del agua, sino la temperatura de congelación de una mezcla saturada de agua y hielo y la temperatura del cuerpo humano: la segunda tenía, frente a la temperatura de ebullición del agua, la ventaja de no variar con la presión. Al asignar a estos puntos los valores cero y cien, obtuvo para los puntos fijos de fusión del hielo y de ebullición del agua los valores 32 °F y 212 °F, aproximadamente.

Ejemplo 4.2.

Una vía de acero mide 100 m a 20 °C. Si el coeficiente de dilatación lineal α del acero, supuesto constante, vale $1,27 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$: a) ¿Qué longitud tendrá a 40 °C? b) ¿Con qué fuerza tendríamos que estirar la vía para conseguir el mismo alargamiento? (La vía tiene 20 cm² de sección. El módulo de Young E del acero vale $2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$.)

a) El coeficiente de dilatación lineal α expresa la variación relativa de la longitud con la temperatura

$$\alpha \equiv \frac{1}{L} \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

donde L denota la longitud y t la temperatura. La dilatación podrá escribirse en la forma

$$\Delta L = \alpha L \Delta t$$

En nuestro caso

$$\Delta L = 1,27 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1} \times 100 \text{ m} \times 20 \text{ K} = 2,54 \times 10^{-2} \text{ m} = 2,54 \text{ cm}$$

Esta longitud es muy pequeña, pero veremos a continuación que las dilataciones pueden generar fuerzas muy grandes.

b) Para conseguir el mismo alargamiento, $\Delta L = 2,54 \text{ cm}$, la fuerza que tendremos que aplicar vendrá dada por la ley de Hooke:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{A}$$

donde F denota la fuerza y A la sección transversal. Despejando F

$$F = EA \frac{\Delta L}{L}$$

y sustituyendo los valores del problema obtenemos

$$F = 2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2} \times 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \frac{2,54 \times 10^{-2} \text{ m}}{100 \text{ m}} = 1,02 \times 10^5 \text{ N}$$

que da unas tensiones

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l} = 2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2} \times \frac{2,54 \times 10^{-2} \text{ m}}{100 \text{ m}} = \\ &= 5,08 \times 10^7 \text{ N m}^{-2} = 501,48 \text{ atm}\end{aligned}$$

La importancia de los efectos mecánicos asociados con las dilataciones térmicas explican, por ejemplo, la importancia de las variaciones de temperatura en la erosión de las rocas.

Vista la medida de la temperatura, queda la medida del calor. En muchos casos, el suministro de calor a un sistema produce un aumento de su temperatura, y se puede relacionar éste con la cantidad de calor proporcionada. Se define *calor específico* como el calor que debe suministrarse a una cantidad determinada de sustancia (un gramo, un mol) para que su temperatura aumente un grado. Esta magnitud física depende del material de que se trate. El calor específico c , la masa del sistema m y la variación de temperatura dT se relacionan con el calor suministrado dQ mediante la expresión

$$dQ = mcdT \quad [3]$$

(En el caso de los gases hay que especificar si el calentamiento se realiza a presión constante o a volumen constante.) En otras ocasiones, el calor suministrado no produce un aumento de temperatura, sino un cambio de fase (paso de sólido a líquido, de líquido a gas, de cristalización monoclinica a triclinica, etc.). Dichos cambios se producen, en general, a una temperatura bien determinada (temperatura de fusión, de ebullición, etc.), y se define *calor latente* como la cantidad de calor que se ha de suministrar a un gramo (o un mol) de sustancia para que ésta cambie totalmente de fase. El calor dQ utilizado para ello depende de la cantidad de masa que cambia de fase dm y del calor latente c' a través de la relación

$$dQ = c' dm \quad [4]$$

La unidad tradicional de calor es la caloría, que es el calor que debe suministrarse a un gramo de agua a 15°C para aumentar su temperatura un grado Celsius. Una caloría equivale a 4,19 julios, por lo cual en muchas ocasiones se utilizan los julios en lugar de la caloría como unidad de energía térmica.

Ejemplo 4.3.

Dentro de un calorímetro tenemos 100 g de triclorometano a 35°C . El recipiente está rodeado de 1,75 kg de agua a 18°C . Transcurrido un cierto tiempo, los dos productos están a la misma temperatura de $18,22^\circ\text{C}$. ¿Cuál es el calor específico del triclorometano?

Entre los dos productos, el triclorometano y el agua, se produce un intercambio energético que hace que aquél se enfríe y ésta se caliente. El calor cedido por el triclorometano es

$$Q_c = m_t c_t \Delta t_t$$

donde m_t es la masa de triclorometano, c_t su calor específico y Δt_t el incremento de temperatura. El calor absorbido por el agua se puede escribir:

$$Q_a = m_{(\text{H}_2\text{O})} c_{(\text{H}_2\text{O})} \Delta t_{(\text{H}_2\text{O})}$$

Igualando ambas energías se obtiene una ecuación cuya única incógnita es el calor específico c_p , cuyo valor resulta ser

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{m_{\text{H}_2\text{O}} c_{\text{H}_2\text{O}} \Delta t_{\text{H}_2\text{O}}}{m_t \Delta t_t} = \\ &= \frac{1750 \text{ g} \times 1 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1} (18,22 - 18) \text{ K}}{100 \text{ g} (35 - 18,22) \text{ K}} = 0,23 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.

¿Qué cantidad de calor es necesaria para fundir un bloque de hielo de 10 kg que inicialmente está a -10°C ? (calor específico del hielo, $0,500 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$; calor de fusión del hielo, $79,7 \text{ cal g}^{-1}$).

La temperatura de fusión del hielo a una atmósfera de presión es 0°C . Por tanto, para fundir un bloque de hielo inicialmente a -10°C primero tenemos que calentarlo hasta que llegue a 0°C . Para calcular el calor necesario para este cambio de temperatura utilizamos la expresión

$$Q = mc\Delta T$$

donde c es el calor específico del hielo, que vale $0,5 \text{ cal/g K}$ y m la masa del hielo. Por tanto,

$$Q = 10 \text{ kg} \times 0,500 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 10 \text{ K} = 5 \text{ kcal}$$

Una vez el hielo está a 0°C , para fundirlo hemos de suministrar el calor de fusión, cuyo valor viene dado por la expresión

$$Q_f = ml$$

donde l es el calor latente de fusión. En nuestro ejemplo

$$Q_f = 10 \text{ kg} \times 79,7 \text{ kcal kg}^{-1} = 797 \text{ kcal}$$

Por tanto, el calor total necesario vale

$$Q_T = Q + Q_f = 5 \text{ kcal} + 797 \text{ kcal} = 802 \text{ kcal}$$

Notemos lo poco que cuesta, desde el punto de vista energético, aumentar la temperatura 10°C comparado con la energía necesaria para fundir la misma masa de hielo.

4.2. Transmisión de calor

En biología presentan especial interés los problemas relacionados con la temperatura corporal y el metabolismo. Las propiedades de transporte de calor de los materiales biológicos tienen una gran importancia por sus repercusiones metabólicas. Asimismo, el transporte de calor desde el Sol hasta la Tierra mediante la radiación electromagnética juega un papel de primer orden en biología y meteorología.

Hay tres procesos de transporte de calor: *a) conducción*, *b) convección*, *c) radiación*. En el primer caso, el calor se transporta a través de un medio material, sin movimiento del mismo. La ley que relaciona la cantidad H de calor transportado por unidad de tiempo desde un cuerpo a temperatura T_1 , a otro a temperatura T_2 , conectados mediante una barra de longitud l y área transversal A , es

$$H = KA \frac{T_1 - T_2}{l} \quad [5]$$

K es una constante que depende del material y se denomina conductividad térmica. La expresión [5] fue formulada por Fourier en forma diferencial en 1811 y se conoce como *ley de Fourier*.

En el caso de la convección, el material que transporta el calor se mueve, bien de forma natural como cuando el aire caliente asciende en la atmósfera debido a su menor densidad o bien de forma forzada cuando se facilita mecánicamente el movimiento del fluido (ventilación). En estas circunstancias, el calor cedido por unidad de tiempo por un cuerpo de temperatura T_1 a un ambiente de temperatura inferior T_2 es

$$H = hA(T_1 - T_2) \quad [6]$$

donde A es el área superficial del cuerpo en contacto con el fluido circundante y h una constante que en el caso del cuerpo humano rodeado de aire vale $h = 1,7 \times 10^{-3} \text{ kcal s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Esta ley fue utilizada frecuentemente por Newton y se conoce por el nombre de *ley de Newton*.

El caso de la radiación es bastante diferente. En esta situación, el calor se transmite en forma de radiación electromagnética y no se necesita ningún medio material intermedio. Este es el proceso mediante el cual nos llega la energía del Sol a través del espacio exterior. La ley básica que describe la cantidad de calor H cedida por un cuerpo de área A a temperatura absoluta T por unidad de tiempo es la *ley de Stefan-Boltzmann*, según la cual

$$H = e\sigma AT^4 \quad [7]$$

Aquí σ es una constante universal que vale $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ y e se denomina coeficiente de emisividad, comprendido entre 0 y 1, que depende de las propiedades de la superficie del cuerpo y del material. Los cuerpos para los cuales $e = 1$ se denominan cuerpos negros. Este fenómeno de radiación es muy utilizado en medicina (termografía) y en la industria como método de exploración y diagnóstico. La ley de Stefan-Boltzmann juega un papel importante en la comprensión del balance térmico de los planetas y en particular en la Tierra para explicar el balance radiativo de la atmósfera y la superficie terrestre.

Ejemplo 4.5.

¿Qué calor perderá por convección una persona desnuda de $1,5 \text{ m}^2$ de superficie si está en contacto con aire a $0 \text{ }^\circ\text{C}$ y la piel está a $30 \text{ }^\circ\text{C}$? Suponer que el coeficiente de transferencia por convección vale $1,7 \times 10^{-3} \text{ kcal s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

El flujo energético por convección viene expresado por la ley de Newton:

$$H = hA\Delta T$$

En nuestro caso conocemos todos los valores de las variables; por tanto,

$$H = 1,7 \times 10^{-3} \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2 \text{ K}} \times 1,5 \text{ m}^2 \times 30 \text{ K} = 7,65 \times 10^{-2} \text{ kcal s}^{-1}$$

Notemos que, en general, el coeficiente h depende de la velocidad del fluido refrigerante. Por ejemplo, una velocidad de 10 km/hora hace que los efectos de enfriamiento sean los equivalentes a que si el aire estuviera en reposo pero a una temperatura inferior en $3 \text{ }^\circ\text{C}$ a la temperatura real del aire en movimiento.

Ejemplo 4.6.

Una habitación tiene una ventana de 3 m^2 de superficie con un cristal de 1 cm de espesor. La conductividad térmica del vidrio es $2 \times 10^{-4} \text{ kcal m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$. La temperatura del aire exterior es de $3 \text{ }^\circ\text{C}$. a) ¿A qué temperatura podrá llegar la habitación si la calentamos con una estufa de 1000 W ? b) ¿Y si es de 2000 W ? (Suponer que los efectos de convección y de radiación son despreciables.)

Supongamos que inicialmente la temperatura de la habitación es la misma que la del exterior. Las pérdidas por conducción reguladas por la ley de Fourier

$$H = KA \frac{\Delta T}{d}$$

son nulas, dado que no existe gradiente de temperaturas. Conectamos la estufa y la energía suministrada por ésta calienta el interior, por lo que, poco a poco, se establece un gradiente de temperaturas entre el interior y el exterior que implica que empiece a haber pérdidas por conducción a través de la ventana. Estas son pequeñas al principio, es decir, representan una pequeña fracción de la energía suministrada por la estufa, pero a medida que la temperatura en el interior va aumentando se hacen cada vez mayores. Nos preguntamos a qué temperatura las pérdidas conductivas igualarán la energía liberada por la estufa.

El incremento de temperaturas correspondiente a esta situación es

$$\Delta T = \frac{Hd}{KA} = \frac{1000 \text{ W} \times 0,24 \text{ cal J}^{-1} \times 0,01 \text{ m}}{0,2 \text{ cal m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 3 \text{ m}^2} = 4 \text{ K}$$

por tanto, la habitación llegará como máximo a una temperatura $T_h = T_e + \Delta T = 3\text{ }^\circ\text{C} + 4\text{ }^\circ\text{C} = 7\text{ }^\circ\text{C}$.

En el caso *b*), al ser doble la potencia de la estufa, el incremento de temperaturas también lo será y, por tanto,

$$\Delta T = \frac{2000\text{ W} \times 0,24\text{ cal J}^{-1} \times 0,01\text{ m}}{0,2\text{ cal m}^{-1}\text{ s}^{-1}\text{ K}^{-1} \times 3\text{ m}^2} = 8\text{ K}$$

y la temperatura de la habitación será $T_h = T_e + \Delta T = 3\text{ }^\circ\text{C} + 8\text{ }^\circ\text{C} = 11\text{ }^\circ\text{C}$.

Puede observarse que el resultado es muy poco realista, ya que, en realidad, en las condiciones del problema es fácil tener la habitación a temperaturas más confortables que ésta. La explicación de este resultado es que la caída de temperaturas no tiene lugar bruscamente en el vidrio, sino ya en las capas de aire próximo al vidrio. Como el aire es mal conductor del calor ($K = 0,03\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$), el flujo real de calor será mucho menor que el calculado en el problema.

Ejemplo 4.7.

Para mantener una colonia de bacterias a la temperatura constante de $30\text{ }^\circ\text{C}$, debemos suministrar 30 W de potencia calefactora. La temperatura ambiente es de $15\text{ }^\circ\text{C}$. Las bacterias están en un recipiente de vidrio, cuya conductividad térmica es $0,2\text{ cal K}^{-1}\text{ m}^{-1}\text{ s}^{-1}$, de área 20 cm^2 y cuyas paredes tienen un espesor de $0,5\text{ mm}$. ¿Cuál es el ritmo metabólico de la colonia de bacterias? En la fase de máxima actividad reproductora, el ritmo metabólico puede llegar a duplicarse. ¿Qué temperatura alcanzará la colonia si se mantiene constante la temperatura externa y la potencia calefactora?

El calor que pierde la colonia por unidad de tiempo a través de las paredes vale, usando la ley de Fourier y los datos del enunciado,

$$\begin{aligned} H &= KA \frac{\Delta T}{l} = \\ &= 0,2\text{ cal K}^{-1}\text{ m}^{-1}\text{ s}^{-1} \times 4,18\text{ J cal}^{-1} \times 20 \times 10^{-4}\text{ m}^2 \frac{(30 - 15)\text{ K}}{0,5 \times 10^{-3}\text{ m}} = \\ &= 50,16\text{ W} \end{aligned}$$

Por tanto, si suministramos desde el exterior 30 W , el ritmo metabólico debe ser

$$RM = 50,16\text{ W} - 30\text{ W} = 20,16\text{ W}$$

Si éste se duplica, la potencia total que se disipa en el interior del recipiente es $(2 \times 20,16 + 30)\text{ W} = 70,32\text{ W}$ y, en consecuencia, la diferencia de temperaturas entre el interior y el exterior será

$$\Delta T = \frac{H \cdot l}{KA} =$$

$$= \frac{70,32 \text{ W} \times 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,2 \text{ cal K}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1} \times 4,18 \text{ J cal}^{-1} \times 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 21 \text{ K}$$

La temperatura de la colonia podrá alcanzar el valor $(21 + 15) \text{ }^\circ\text{C} = 36 \text{ }^\circ\text{C}$.

Ejemplo 4.8.

El ritmo metabólico de un alumno en un examen es 100 kcal h^{-1} . ¿Qué temperatura alcanzará un aula con 50 alumnos en un examen, si la temperatura del exterior es $15 \text{ }^\circ\text{C}$ y los alumnos liberan un 50 por 100 de su energía metabólica en forma de calor? La superficie acristalada es de 10 m^2 , con un vidrio de 1 cm de espesor y conductividad térmica $0,2 \text{ cal K}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

Cada alumno libera 50 kcal h^{-1} y, en total, los 50 alumnos liberarán $50 \times 50 \text{ kcal h}^{-1}$, es decir, $694,4 \text{ cal s}^{-1}$. Este calor puede perderse por conducción a través del vidrio

$$H = KA \frac{\Delta T}{l}$$

La temperatura dejará de aumentar cuando el calor producido por los alumnos sea igual al que se pierde a través de los vidrios. La diferencia de temperaturas deberá ser entonces

$$\Delta T = \frac{H \cdot l}{KA} = \frac{694,4 \text{ cal s}^{-1} \times 1 \times 10^{-2} \text{ m}}{0,2 \text{ cal K}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1} \times 10 \text{ m}^2} = 3,5 \text{ }^\circ\text{C}$$

y, por tanto, si $T_{\text{ext}} = 15 \text{ }^\circ\text{C}$, la temperatura máxima que se alcanzará en el interior será de $18,5 \text{ }^\circ\text{C}$.

Ejemplo 4.9.

Dos animales polares cuya sangre está a la misma temperatura tienen el mismo peso. El área superficial de uno de ellos es $1,5 \text{ m}^2$ y la del otro 1 m^2 . El primero tiene una capa de pelo de 5 cm de espesor y el segundo la tiene de 3 cm. Suponiendo que únicamente pierden calor por conducción y que ambos realizan el mismo ejercicio, ¿cuál de los dos ha de comer más?

Tendrá que comer más el animal que pierda más calor por unidad de tiempo. Las pérdidas de calor están reguladas por la ley de Fourier:

$$H = KA \frac{\Delta T}{d}$$

Para ambos animales K y ΔT son las mismas, por lo cual el valor de H diferirá en los dos animales dependiendo de su área y del espesor de la capa

de pelo. En consecuencia, si H es la pérdida de calor por unidad de tiempo de animal de $1,5 \text{ m}^2$ de superficie y H' la misma magnitud para el animal de 1 m^2 , se cumplirá

$$\frac{H}{H'} = \frac{Ad'}{A'd} = \frac{1,5 \text{ m}^2 \times 3 \text{ cm}}{1 \text{ m}^2 \times 5 \text{ cm}} = 0,9$$

Por tanto, en contra de lo que parecía, el segundo animal, es decir, el de área más pequeña, es el que pierde una mayor cantidad de calor y por tanto es el que deberá comer más abundantemente.

Ejemplo 4.10.

A partir de las medidas de radiación solar recibida en la Tierra se puede calcular que la superficie del Sol radia energía a un ritmo de 6240 W cm^{-2} . Suponiendo que el Sol radia como un cuerpo negro, calcular la temperatura de la superficie del Sol.

Cualquier cuerpo por el hecho de tener una temperatura absoluta T radia ondas electromagnéticas, es decir, radia energía. La energía de radiación por unidad de tiempo y área, ξ , está regulada por la ley de Stefan-Boltzmann:

$$\xi = e\sigma T^4$$

donde e es la emisividad, que para un cuerpo negro vale 1, y σ una constante universal denominada constante de Stefan.

Si consideramos que la emisividad del Sol es 1, al medir ξ , es decir, la energía radiada por el Sol por unidad de tiempo y de área, podemos hacer una estimación de la temperatura superficial del Sol. En efecto, si

$$\xi = 6240 \text{ W cm}^{-2} = 6240 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$$

podemos escribir

$$6240 \times 10^4 \text{ W m}^{-2} = 1 \cdot 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} T^4$$

de donde, despejando T , se obtiene

$$T = \left(\frac{6240 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}}{5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}} \right)^{1/4} = 5758 \text{ K}$$

Otra determinación que se suele hacer de la temperatura superficial del Sol está basada en la *ley de Wien*. Esta ley dice que un cuerpo a temperatura T emite radiación electromagnética cuya intensidad máxima se sitúa en una longitud de onda λ_m que está relacionada con T mediante

$$\lambda_m = \frac{1}{T} \times 2,897 \text{ } \mu\text{m K}$$

Por tanto, midiendo en qué longitud de onda la radiación solar incidente tiene un máximo de intensidad, se puede determinar aproximadamente la

temperatura superficial del Sol. En este caso, $\lambda_m = 0,474 \mu\text{m}$ y por tanto la temperatura correspondiente

$$T = \frac{2897 \mu\text{m K}}{0,474 \mu\text{m}} = 6110 \text{ K}$$

Estas temperaturas son mucho menores que la que hay en el interior del Sol, que llega a unos diez millones de grados, temperatura necesaria para que se produzcan suficientes reacciones nucleares.

Ejemplo 4.11.

Un cuerpo negro gira alrededor del Sol en una órbita de $3,5 \times 10^7 \text{ km}$ de radio. El Sol tiene un radio de $7 \times 10^5 \text{ km}$ y la temperatura de su superficie vale unos 6000 K . (Suponemos que emite como un cuerpo negro.) Determinar la temperatura de equilibrio del cuerpo.

Según la ley de Stefan-Boltzmann, la energía radiada por unidad de superficie en la unidad de área y de tiempo, ξ , para un cuerpo negro a temperatura absoluta T viene dada por

$$\xi = e\sigma T^4$$

donde σ es la constante de Stefan. La energía radiada por unidad de tiempo H por el Sol, suponiendo que es un cuerpo negro y $e = 1$, será

$$H = \xi \cdot A = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4$$

Esta energía, suponiendo que no es absorbida en el espacio interestelar, alcanzará a toda la órbita donde se encuentra el cuerpo. La energía que llega en la unidad de tiempo y por unidad de área a la órbita vale

$$\xi' = \frac{H}{A'}$$

donde A' es el área de la esfera de radio $R = 3,5 \times 10^7 \text{ km}$. Por tanto,

$$\xi' = \frac{\sigma T_s^4 4\pi R_s^2}{4\pi R^2}$$

y como se cumple la ley de Stefan-Boltzmann, $\xi' = \sigma T'^4$, siendo S la superficie del satélite

$$\sigma T'^4 = \sigma T_s^4 \frac{R_s^2}{R^2} \frac{S}{2}$$

donde el área en el segundo término es la mitad, ya que el satélite recibe la radiación del Sol sólo en un lado. En estas condiciones se obtiene

$$\left(\frac{T'}{T_s} \right) = \left(\frac{R_s}{R} \right)^{1/2} \frac{1}{2^{1/4}}$$

Por tanto, la temperatura de la esfera en equilibrio será

$$T' = T_s \sqrt{\frac{R_s}{R}} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 6000 \text{ K} \sqrt{\frac{7 \times 10^5 \text{ km}}{3,5 \times 10^7 \text{ km}}} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 600 \text{ K}$$

A esta temperatura, toda la energía recibida del Sol se vuelve a emitir en forma de radiación.

Otra ley muy importante en el transporte de calor por radiación es la ley de Wien, que establece que la longitud de onda λ_{max} en la cual un cuerpo negro a temperatura absoluta T emite mayor potencia viene dada por

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2,897}{T} \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad [8]$$

Así pues el Sol, cuya temperatura superficial vale unos 6000 K, tendrá emisión máxima para una longitud de onda de aproximadamente 500 nm ($5 \cdot 10^{-7}$ m). La clorofila y los pigmentos fotosensibles de los ojos de los animales tienen su máximo de sensibilidad cerca de esta región (ver el Capítulo 7). Si viajáramos a un planeta cerca de una estrella cuya temperatura superficial fuera 4000 K, nuestros ojos no servirían de nada, ya que no serían sensibles a la radiación emitida mayoritariamente por dicha estrella.

La ley de Wien también tiene un papel importante en el efecto invernadero. Hemos visto que el Sol emite con máxima potencia con longitud de onda cercana a los 500 nm. La atmósfera y los vidrios son transparentes a esta radiación, que atraviesa todo el aire y es absorbida por el suelo, el cual se calienta con esta energía radiativa. La temperatura del suelo viene a ser de unos 295 K, en orden de magnitud. Según la ley de Wien, ello significa que la Tierra radiará energía con una longitud de onda de unos 10.000 nm, que corresponde a radiación infrarroja. Esta radiación es interceptada por los vidrios de los invernaderos, que retienen la energía radiativa correspondiente y hacen que la temperatura del invernadero aumente considerablemente con respecto a la que hubiera tenido si no hubiera estado cubierto por un vidrio. Algunos gases, como el vapor de agua, el dióxido de carbono, el óxido nitroso, el metano, también interceptan la radiación infrarroja y no la dejan escapar de la Tierra. Si la atmósfera no tuviera esta propiedad, la temperatura de nuestro planeta sería de unos 18 grados bajo cero; en cambio el efecto que produce la presencia de gases con efecto invernadero hace que la temperatura media sea de unos 15 grados sobre cero. Ahora bien, la concentración atmosférica de estos gases ha aumentado mucho con la industrialización; por ello, la retención de energía aumenta y, con ello, aumenta la temperatura del planeta. Este aumento valdría unos pocos grados, pero podría comportar un cambio climático ya que incrementaría la fusión del hielo continental y polar, reduciría la extensión de nieve, que refleja parte de la radiación incidente, con lo cual el planeta se calentaría todavía más. Las consecuencias del cambio climático serán el cambio de los patrones de funcionamiento de la atmósfera y,

quizás, del océano que podrían llevar, además de la fusión de parte de los casquetes polares, a cambios del régimen de las precipitaciones tanto en cantidad total como en su variabilidad, a variaciones en la periodicidad de las olas de calor y de frío, a un aumento de la temperatura superficial media y a una disminución del intervalo térmico, es decir, la diferencia entre la temperatura máxima y la temperatura mínima, un aumento de la aridez en las zonas de latitudes bajas o medias, un ascenso del nivel del mar, y un aumento de la irregularidad en las lluvias y los temporales.

4.3. La segunda ley de la termodinámica

La primera ley impone una restricción sobre los procesos: sólo son posibles aquellos que conservan la energía. En cambio, dicha ley no fija el sentido de los procesos, en contraste con lo que se observa en la naturaleza, donde existen unos sentidos preferentes (el calor pasa espontáneamente de caliente a frío, la materia fluye desde las zonas de mayor concentración a las de menor concentración, etc.). Para fijar la dirección de los procesos de acuerdo con las observaciones se necesita una nueva ley, independiente de la anterior. Existen diversos enunciados de dicha ley. Los dos principales, formulados en 1850, son:

- *Enunciado de Clausius:* Es imposible conseguir un dispositivo que transfiera calor de un cuerpo frío a uno caliente de forma cíclica y sin ningún otro efecto. Los refrigeradores no contradicen este principio, ya que ¡consumen energía!
- *Enunciado de Kelvin:* Es imposible conseguir un dispositivo que pueda levantar un cuerpo extrayendo energía térmica de otro, de forma cíclica y sin ningún otro efecto. En otras palabras, no puede transformar completamente calor en trabajo sin ningún otro efecto.

La formulación matemática de la segunda ley, debida a Clausius, introduce una nueva función de estado, la *entropía*, definida de tal manera que si un sistema está en un estado de referencia A y debido a que recibe una cantidad de calor pasa a un estado B , la entropía de este estado S_B viene dada por

$$S_B = S_A + \int_A^B dQ_{\text{rev}}/T \quad [9]$$

donde S_A es el valor que asignamos a la entropía del estado de referencia (arbitrario) A , T la temperatura absoluta y dQ_{rev} , el calor intercambiado en un proceso ideal reversible que conduzca desde el estado inicial A hasta el estado final B . La segunda ley afirma que en un sistema aislado sólo es posible el paso de un estado A a un estado B cuando $S_B \geq S_A$, y que es imposible en caso contrario. Para procesos reversibles se cumple la igualdad en [9]. Una aplicación habitual y especialmente ilustrativa de la segunda ley es el cálculo del máximo rendimiento de las máquinas térmicas, problema tratado por primera vez por Sadi Carnot en 1824.

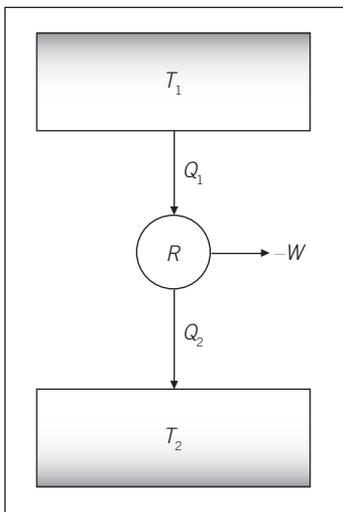


Figura 4.1. Máquina térmica.

Ejemplo 4.12.

A partir de la primera y la segunda ley de la termodinámica, obtener el máximo rendimiento posible de una máquina térmica que recibe calor de una fuente a temperatura T_1 , transforma una parte en trabajo y cede el resto de calor a otra fuente a temperatura T_2 (Fig. 4.1).

La máquina R recibe una cantidad de calor Q_1 de la fuente térmica a temperatura T_1 . Dicha máquina, durante un ciclo de su funcionamiento, transforma una parte de Q_1 en trabajo, $-W$, y cede el resto, Q_2 , en forma de calor a una fuente térmica a temperatura $T_2 < T_1$.

Según la primera ley

$$Q_1 - Q_2 = -W$$

ya que en un ciclo la energía interna de la máquina R no varía, puesto que vuelve al estado inicial.

La segunda ley impone que la variación total de entropía en cada ciclo debe ser positiva o nula, lo cual se traduce en la desigualdad

$$-(Q_1/T_1) + (Q_2/T_2) \geq 0$$

donde el signo igual vale en el caso de un proceso reversible, y la desigualdad en los demás casos. Dicha expresión se obtiene al tener en cuenta que la variación total de entropía es la suma de las variaciones de las entropías de las fuentes térmicas 1 y 2 y de la máquina R , $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_R + \Delta S_2$. Como en un ciclo $\Delta S_R = 0$ y como las fuentes térmicas se mantienen a temperatura constante tenemos $\Delta S_1 = -Q_1/T_1$ y $\Delta S_2 = Q_2/T_2$. El signo menos delante de Q_1 indica que la fuente 1 ha perdido calor (Q_1 se considera positivo, por lo cual $-Q_1$ es negativo).

Si definimos el rendimiento de la máquina como el cociente $r = -W/Q_1$, es decir, como la fracción de calor recibido transformada en trabajo, se tiene

$$r = -W/Q_1 = (Q_1 - Q_2)/Q_1 = 1 - (Q_2/Q_1)$$

donde hemos tenido en cuenta la primera ley. Al tener en cuenta ahora la segunda ley, se llega a

$$r = 1 - (Q_2/Q_1) \leq 1 - (T_2/T_1) \quad [10]$$

Este resultado, de gran importancia histórica, fue obtenido por Carnot en 1824. Como se puede observar, el rendimiento es máximo cuando el proceso es reversible. Además, el máximo rendimiento sólo depende de las temperaturas de las fuentes térmicas que intervienen en el proceso, pero no del material de trabajo de la máquina. La segunda ley de la termodinámica permite ahorrar esfuerzos de investigación destinados a aumentar indefinidamente el rendimiento, ya que establece con claridad el límite superior posible de éste. Además, indica cómo aumentar el rendimiento si modificamos convenientemente T_1 y T_2 . Sin embargo, este concepto de rendimiento tiene poco interés en biología, donde casi todos los procesos son isotérmicos. Para obtener una expresión adecuada para el rendimiento de los procesos biológicos, se debe acudir a la termodinámica de procesos irreversibles. La producción irreversible de entropía implica una reducción del rendimiento y, por tanto, un desaprovechamiento de la capacidad de hacer trabajo.

4.4. Rendimientos reales de máquinas térmicas

Las máquinas térmicas jugaron un papel decisivo en el nacimiento de la termodinámica. Hemos visto el resultado de Carnot según el cual el rendimiento máximo de una máquina térmica cíclica que trabaja entre dos fuentes térmicas sólo depende de sus temperaturas y no del material utilizado en la máquina, sea vapor de agua, nitrógeno, aire, etc. Este resultado permitió establecer, entre otras consecuencias, una escala absoluta de temperaturas, es decir, independiente de la sustancia termométrica. Sin embargo, cuando se considera el rendimiento de las máquinas térmicas reales, fácilmente se constata que es inferior al que predice el resultado de Carnot. Nos preguntamos cuáles son las causas.

La primera tentación es atribuir este valor bajo del rendimiento real a imperfecciones en el proceso. Sin embargo, previamente hay que tener en cuenta otros aspectos que no aparecen si no se tienen en cuenta los factores cinéticos, es decir, asociados con el tiempo. Un proceso es estrictamente reversible cuando es infinitamente lento. Este tipo de procesos fueron los que consideró Carnot al deducir su famosa expresión. Un proceso estrictamente reversible es infinitamente lento y exigiría un tiempo infinito para completarse. Sin embargo, en la práctica, el uso de las máquinas implica la realización del trabajo en un tiempo finito y, por lo tanto, el dato importante no es cuanto trabajo realiza sino el trabajo por unidad de tiempo que proporciona.

Por lo tanto, para analizar los rendimientos reales y la potencia de una máquina conviene estudiar las ecuaciones de transporte introducidas en otros apartados de este texto, como la ley de Fourier del transporte del calor. Las leyes que dan los flujos de calor y de masa, permiten estudiar la duración de los ciclos termodinámicos. Ya hemos dicho que el rendimiento máximo se consigue en ciclos reversibles, es decir, infinitamente lentos, en los cuales la potencia, que es el cociente entre el trabajo realizado en un ciclo y el tiempo que dura el ciclo, es nula. En la práctica hay que realizar un trabajo en un tiempo finito. Surge entonces la pregunta de cómo varían el rendimiento y la potencia con la duración del ciclo. Al aumentar la velocidad crece el aumento de entropía, lo cual reduce el rendimiento, como se puede intuir en la expresión siguiente para el trabajo W realizado en un ciclo:

$$W = Q_1 r = Q_1 - Q_{2, \text{rev}} - T_2 \Delta S \rightarrow W = W_{\text{max}} - T_2 \Delta S$$

donde W_{max} se refiere al trabajo máximo correspondiente a un ciclo reversible donde no hay variación de entropía. Por lo tanto el trabajo desaprovechado W_{des} corresponde a

$$W_{\text{des}} = T_2 \Delta S$$

La idea de mejorar la eficiencia energética de los dispositivos está más relacionada con la segunda ley de la termodinámica, que se refiere a la degradación de la calidad de la energía (si se mide en correspondencia con la capacidad de producir trabajo), que con la primera ley, que trata de la conservación de la energía. Así, la energía total de una serie de procesos siempre es la misma, pero el trabajo útil que podemos extraer de los mismos va disminuyendo hasta que se hace prácticamente nula.

En la figura se puede ver cómo varían el rendimiento y la potencia con la duración del ciclo. En la práctica interesa trabajar entre la situación de mayor rendimiento, pero de baja potencia, y la de potencia elevada pero de rendimiento bajo. La conveniencia de trabajar más cerca de una situación o de otra está vinculada, en parte, a factores económicos y de utilidad de la máquina.

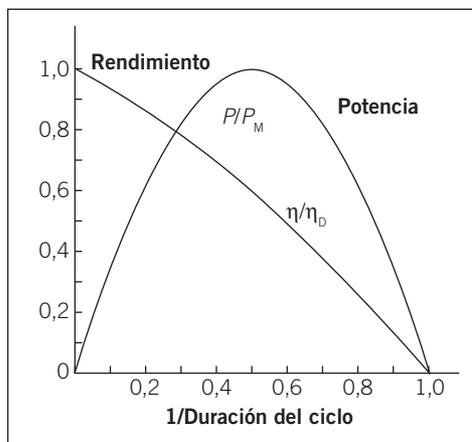


Figura 4.2. Rendimiento y potencia.

Es posible demostrar que si entre las fuentes térmicas y la máquina hay una resistencia térmica finita, descrita por la ley de Fourier, y si este intercambio de calor es la única causa de producción de entropía o disipación de la energía, el rendimiento a máxima potencia vale

$$r_{\max P} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} < 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad [11]$$

En la tabla se compara el rendimiento de Carnot y el obtenido en condiciones de máxima potencia para tres máquinas reales,

	$T_1(^{\circ}\text{C})$	$T_2(^{\circ}\text{C})$	r_{Carnot}	$r_{\max P}$	r_{real}
Caso A	565	25	64,1%	40%	36%
Caso B	300	25	48,9%	28%	30%
Caso C	250	80	32,3%	18%	16%

y se puede ver que el rendimiento real está más próximo al de máxima potencia que al de máximo rendimiento, es decir, el rendimiento real no es siempre una deficiencia técnica sino que a menudo tiene que ver con las consecuencias del incremento de la potencia.

En definitiva cuando analizamos los procesos desde la perspectiva más realista de la termodinámica de no equilibrio podemos valorar el compromiso entre potencia y rendimiento. Asimismo la maximización del rendimiento o de la potencia representan dos situaciones extremas. Se podría explorar también otros criterios que tuvieran en cuenta otras situaciones intermedias, como minimizar la producción de entropía, que está vinculada con el

desaprovechamiento del trabajo, o la optimización de la razón rendimiento/tiempo, de forma que el rendimiento fuera máximo y el tiempo mínimo. Otra opción más cercana a la gestión de las instalaciones incorporaría criterios económicos introduciendo en la expresión del rendimiento el precio del combustible (por ejemplo, en una planta de producción de energía eléctrica, el precio del petróleo, del gas o del carbón) y el precio al que se puede vender el trabajo (por ejemplo, la energía eléctrica). Así, si el precio del combustible es barato y la energía es cara se puede trabajar en condiciones de máxima potencia mientras que si la situación es la contraria probablemente conviene trabajar en la situación de máximo ahorro de combustible.

Ejemplo 4.13.

Suponiendo que la cantidad de carbón necesaria para mantener la caldera de una máquina de tren a 250 °C no depende de la temperatura exterior, sabiendo que las temperaturas medias diurna y nocturna en el Sáhara son de 50 °C y -10 °C, y suponiendo que la máquina sigue un ciclo de Carnot, ¿qué reducción habría en el presupuesto de carbón de los ferrocarriles, si los servicios fueran nocturnos y no diurnos como es habitual?

El rendimiento de una máquina de Carnot reversible vale

$$r = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

donde T_2 es la temperatura absoluta de la fuente fría y T_1 la de la fuente caliente. En consecuencia, en la máquina de tren de nuestro ejemplo, dado que la temperatura exterior (es decir, la temperatura de la fuente fría) es distinta de día que de noche, el rendimiento será distinto en ambas situaciones. Calculamos, por tanto, los rendimientos:

$$r_{\text{día}} = 1 - \frac{273 + 50}{273 + 250} = 0,38$$

$$r_{\text{noche}} = 1 - \frac{273 - 10}{273 + 250} = 0,50$$

Dado que la máquina ha de realizar el mismo trabajo (desplazar el tren en su recorrido a una velocidad dada), tanto de día como de noche, se cumple $W_{\text{día}} = W_{\text{noche}}$, y puesto que $-W = rQ_{\text{caldera}}$, donde Q es la cantidad de carbón en unidades de energía, tendremos:

$$r_{\text{día}} Q_{\text{día}} = r_{\text{noche}} Q_{\text{noche}}$$

Como la cantidad de carbón es proporcional a la energía que la caldera da a la máquina, la reducción vendrá dada por

$$\text{Reducción} = \frac{Q_{\text{día}} - Q_{\text{noche}}}{Q_{\text{día}}} = 1 - \frac{Q_{\text{noche}}}{Q_{\text{día}}} = 1 - \frac{r_{\text{día}}}{r_{\text{noche}}} = 0,24$$

Como vemos, se conseguiría una reducción del 24 por 100.

Ejemplo 4.14.

Supongamos que la pared que separa los dos sistemas de la Figura 4.3 deja pasar calor pero no materia. El conjunto de los dos sistemas está aislado del exterior. Suponiendo un intercambio calorífico de una caloría, calcular: a) ΔS del sistema, b) ΔS del medio, c) ΔS del Universo.

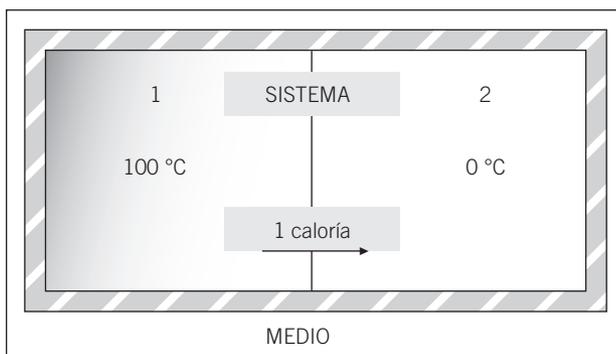


Figura 4.3. Intercambio térmico y entropía.

Suponemos que los dos sistemas son lo suficientemente grandes para que el paso de 1 caloría del subsistema 1, a 100 °C, al subsistema 2, a 0 °C, no varíe apreciablemente su temperatura. Si el proceso es reversible, el incremento de entropía de un sistema viene dado por

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

donde Q es el calor transferido y T la temperatura absoluta. En nuestro ejemplo, dado que el sistema está formado por dos subsistemas, tenemos

$$\Delta S_s = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

donde ΔS_s es la variación de entropía total del sistema. Por consiguiente

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1} = \frac{-1 \text{ cal}}{373 \text{ K}}$$

ya que el subsistema 1 cede 1 caloría y por tanto es una energía perdida por el subsistema 1 y

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T_2} = \frac{1 \text{ cal}}{273 \text{ K}}$$

La variación de entropía del sistema es

$$\Delta S_s = -\frac{1}{373} \text{ cal K}^{-1} + \frac{1}{273} \text{ cal K}^{-1} = 0,00098 \text{ cal K}^{-1}$$

Como el sistema está aislado del medio, $\Delta S_m = 0$ ya que en el medio no hay transferencia alguna de calor.

Como $\Delta S_U = \Delta S_m + \Delta S_s$, se cumple $\Delta S_U = 0,00098 \text{ cal K}^{-1}$.

Vemos, por tanto, que este resultado está de acuerdo con el segundo principio de la termodinámica, y el proceso es espontáneo.

4.5. La segunda ley en sistemas no aislados

Hemos estudiado la segunda ley para sistemas aislados. Supongamos ahora que el sistema a considerar puede intercambiar con el medio exterior calor y trabajo (pero no materia: nos restringimos a un sistema cerrado). ¿Cómo podemos formular la segunda ley para estos sistemas?

Supongamos, por ejemplo, que el sistema se halla en contacto con la atmósfera, la cual lo mantiene a temperatura T y presión p fijas. La segunda ley se puede formular si consideramos el conjunto del ambiente más el sistema en estudio como un gran sistema aislado. En este caso tendremos

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{ambiente}} \geq 0 \quad [12]$$

Esta formulación es incómoda, ya que en ella intervienen no sólo las propiedades del sistema, sino también las del ambiente. Interesaría obtener una formulación en que sólo aparecieran magnitudes del propio sistema. Ello es posible si consideramos la primera ley de la termodinámica, por un lado, y la definición de la entropía, por otro. Según la primera ley [1], se tiene $\Delta U_{\text{sistema}} = Q_s + W_s$, y según la expresión [2] del trabajo realizado sobre el sistema, $W_s = -p\Delta V_{\text{sistema}}$, podemos encontrar el calor Q_a ganado por el ambiente a partir del calor Q_s , ya que $Q_a = -Q_s$; es decir, el calor ganado por el ambiente es igual al calor perdido por el sistema. Así pues,

$$Q_a = -Q_s = -(\Delta U_s - W_s) = -(\Delta U_s + p\Delta V_s)$$

Como la temperatura del ambiente es constante aunque reciba o ceda calor, tendremos, según la definición de entropía [9], en el caso isoterma

$$\Delta S_{\text{ambiente}} = Q_a/T = -(\Delta U_s + p\Delta V_s)/T$$

donde hemos utilizado la fórmula anterior para Q_a . El criterio [12] de la segunda ley se puede escribir, aplicando la expresión para ΔS_a que acabamos de obtener, como

$$\Delta S_s + \Delta S_a = \Delta S_s - (\Delta U_s + p\Delta V_s)/T \geq 0$$

o bien, en forma más compacta,

$$T(\Delta S_s) - (\Delta U_s) - p(\Delta V_s) \geq 0 \quad [13]$$

Así pues, sólo serán espontáneos aquellos procesos que satisfagan la condición [13], que, como hemos visto, es totalmente equivalente a la segunda ley en su expresión [12] con la ventaja de que sólo aparecen en ella las variables del propio sistema, ya que T y p son comunes al ambiente y al sistema.

Se define la *energía libre de Gibbs* o *entalpía libre* G como $G = U + pV - TS$, en función de la cual el criterio [13] se escribe como

$$(\Delta G_s)_{T,p} \leq 0 \quad [14]$$

donde los subíndices T y p indican que la variación de G se lleva a término a T y p constantes. Esta es la expresión de la segunda ley para sistemas cerrados sometidos a temperatura y presión fijas.

En el caso en que V y T (el volumen y la temperatura) se mantengan fijos, $\Delta V_s = 0$, por lo cual [13] queda reducida a

$$T(\Delta S_s) - (\Delta U_s) \geq 0 \quad [15]$$

Esta relación se puede escribir de forma más elegante si se define la *energía libre de Helmholtz*, o *energía libre*, como $F = U - TS$, en función de la cual [15] se escribe como

$$(\Delta F_s)_{T,V} \leq 0 \quad [16]$$

cuyos subíndices indican que T y V se mantienen constantes.

Observemos finalmente que para un sistema aislado (energía y volumen constantes, es decir, $\Delta U_s = \Delta V_s = 0$) el criterio [13] se reduce a $T \Delta S_s \geq 0$, es decir, se recupera el criterio según el cual en un sistema aislado sólo son posibles aquellos procesos que aumentan la entropía.

La relación [15] manifiesta un compromiso entre las tendencias a minimizar la energía y a maximizar la entropía. A temperaturas bajas predomina la tendencia a la mínima energía, mientras que a temperaturas elevadas predomina la tendencia a maximizar la entropía, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.15.

Calcular la temperatura por encima de la cual tendrá lugar espontáneamente un determinado proceso termodinámico a temperatura y volumen constantes (por ejemplo, transición de sólido a líquido en un cierto metal) si la variación de energía asociada con el proceso es $\Delta U_s = 50 \text{ kcal mol}^{-1}$ y si la variación de entropía correspondiente es $\Delta S_s = 30 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

Según el criterio [15], un proceso a T y V constantes será espontáneo si

$$T\Delta S_s - \Delta U_s \geq 0$$

La temperatura a las que el proceso será espontáneo viene dada por la condición

$$T \geq \frac{\Delta H_s}{\Delta S_s} = \frac{5 \times 10^4 \text{ cal mol}^{-1}}{30 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}} = 1666,7 \text{ K}$$

Para temperaturas superiores a 1666,7 K el metal será líquido, y para temperaturas inferiores será sólido.

4.6. Interpretación microscópica de la entropía

El físico austriaco Ludwig Boltzmann propuso hacia 1870 una interpretación microscópica de la entropía, es decir, una interpretación en términos de propiedades del movimiento molecular. Hasta ahora todas nuestras afirmaciones podían prescindir de la naturaleza atómica de los sistemas: las leyes de la termodinámica resultarían válidas tanto para un continuo como para un conjunto discreto de moléculas. Boltzmann relacionó la entropía S de un estado cualquiera del sistema macroscópico con el número W de *microestados* compatibles con el *macroestado* en cuestión, según la relación

$$S = k \ln W \quad [17]$$

donde k , la *constante de Boltzmann*, vale $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K. Esta constante es universal: no depende del sistema ni de ninguna circunstancia concreta, por lo cual tiene una gran importancia en Física.

Para aclarar qué significan microestados y macroestados, acudiremos a un ejemplo sencillo. Consideremos un gas formado por cuatro moléculas, las cuales pueden hallarse en uno cualquiera de dos recipientes en contacto. Los macroestados (estados que estudia la termodinámica, es decir, apreciables a simple vista) son, si denominamos N_A el número de moléculas en el recipiente A y N_B el número de las que se encuentran en el recipiente B ,

Macroestados

$$(N_A = 0; N_B = 4), (N_A = 1; N_B = 3), (N_A = 2; N_B = 2), (N_A = 3; N_B = 1), \\ (N_A = 4; N_B = 0)$$

Tenemos, pues, cinco posibles macroestados, los cuales especifican tan sólo *cuántas* moléculas hay en cada recipiente, pero *no cuáles* de ellas. El macroestado podría ser determinado por métodos puramente macroscópicos, como, por ejemplo, pesando cada recipiente por separado. Un microestado, en cambio, es más detallado y explicita *cuáles* son las moléculas que hay a cada lado. El número de microestados correspondientes a cada macroestado viene dado, en este caso, por combinatoria elemental, por

$$W_{N_A; N_B} = (N_A + N_B)! / N_A! N_B! \quad [18]$$

Así, el número de microestados correspondientes a cada macroestado es:

Macroestado		Número de microestados
N_A	N_B	W
0	4	1
1	3	4
2	2	6
3	1	4
4	0	1

Ahora bien, sabemos por experiencia que si tenemos cuatro moléculas (o cuatro moles) de gas en el recipiente B y abrimos el conducto que lo comunica con el recipiente A , el estado final de equilibrio será la distribución

homogénea; es decir, aquella con dos moléculas en cada recipiente. ¡Pero éste es precisamente el estado con un mayor número de microestados! En términos probabilísticos, la probabilidad de encontrar un sistema en un macroestado dado es proporcional al número de microestados correspondientes y, por tanto, el estado estacionario final será el de máxima probabilidad, o de máximo número de microestados. Así pues, la tendencia de la entropía a aumentar y la tendencia del sistema a presentar el macroestado más probable quedan relacionadas por la interpretación [17] de la entropía debida a Boltzmann.

4.7. La segunda ley en Biología

El paso del mundo microscópico al macroscópico presenta diversas paradojas. Una de las más llamativas y sorprendentes se refiere a la aplicación de la segunda ley a los sistemas biológicos. Según la Física –según la termodinámica–, la naturaleza tiende hacia la máxima entropía o, según Boltzmann, al máximo desorden, ya que un sistema está tanto más desordenado cuantos más microestados resultan compatibles con su macroestado. En cambio, los sistemas biológicos tienden hacia el orden y la estructuración. ¿Obedecen, pues, los sistemas biológicos a las leyes de la termodinámica? ¿Son reductibles los sistemas biológicos a las leyes de la Física?

Esta contradicción, que preocupó mucho a físicos y biólogos, es sólo aparente. En primer lugar, los sistemas biológicos no son sistemas aislados, sino que intercambian energía y materia con el mundo exterior: comen, respiran, excretan, etc. Un sistema biológico muere poco después de ser aislado. En sistemas no aislados, según acabamos de ver en la Sección 4.5, la entropía puede disminuir, a condición de que aumente suficientemente la entropía del ambiente. Esto resuelve la paradoja y permite afirmar que no es incompatible con la segunda ley. Así, muchos seres ingieren sustancias de gran peso molecular y excretan moléculas sencillas de poco peso molecular. Como un conjunto de moléculas pequeñas puede disponerse de muchas más maneras diferentes que cuando dichas moléculas pequeñas están ligadas formando una sola molécula, se ingiere poca entropía y se expulsa mucha entropía, por lo cual la entropía interior del ser vivo puede disminuir, ya que la del exterior aumenta.

Es importante notar además que los sistemas vivos se mantienen fuera del equilibrio. (Un sistema en equilibrio es un sistema muerto.) Se ha podido comprobar que en muchos sistemas aparecen estructuras espontáneas cuando están suficientemente alejados del equilibrio, estructuras que se mantienen mientras se suministra al sistema una potencia suficiente para mantenerlo lejos del equilibrio. Si se deja de alimentar al sistema con cantidad suficiente de energía, la estructura desaparece. Este tipo de estructuras se denominan estructuras disipativas, ya que se necesita disipar energía para mantenerlas. Esto permite afirmar que no sólo la Física y la Biología son compatibles, sino que la termodinámica puede proporcionar una explicación, en ciertos casos, a los fenómenos de estructuración tan frecuentes en los seres vivos, que se hallan permanentemente fuera del equilibrio.

4.8. Gases ideales y reales

Hasta ahora hemos establecido leyes generales, sin concretar el tipo de material considerado. La especificación de éste se lleva a cabo en termodinámica mediante lo que se conoce como ecuaciones de estado. Los sistemas de más interés en Biología son los gases y las disoluciones. Como estas últimas son profusamente estudiadas en los tratados de química, nos ceñiremos aquí, a modo de ilustración, al caso especial de los gases.

El gas ideal queda descrito mediante dos *ecuaciones de estado*: la ecuación *térmica*, que da la presión del gas en función del volumen y de la temperatura, que es la famosa ley

$$p = nR \frac{T}{V} \quad [19]$$

donde n es el número de moles y R la *constante de los gases ideales*, y la ecuación *calórica*, que proporciona la energía interna en función de la temperatura,

$$U = nc_v T \quad [20]$$

donde c_v es el calor específico molar a volumen constante, $c_v = (3/2)R$ para gases monoatómicos y $c_v = (5/2)R$ para gases diatómicos.

Los tipos de procesos más usuales son a p constante (isobárico), a V constante (isócoro), a T constante (isotérmico) y el adiabático, en que no se intercambia calor con el medio. Este último proceso, el adiabático, tiene interés en muchas situaciones reales, como por ejemplo en el cálculo de la velocidad del sonido o en el estudio de la estabilidad de la atmósfera. Dicha ecuación se obtiene fácilmente a partir de las ecuaciones de estado [19] y [20] y de la primera ley [1]. Como, por definición, en un proceso adiabático $dQ = 0$, tenemos

$$dU = dQ + dW = -pdV$$

Ahora bien, según [20], $dU = nc_v dT$, y según [19], $pdV = n(RT/V)dV$, por lo cual

$$nc_v dT + n(RT/V)dV = 0$$

Al dividir por T e integrar se obtiene

$$TV^{(R/c_v)} = \text{cte}$$

Es habitual escribir esta ecuación en otra forma, sabiendo que $R = c_p - c_v$ (relación de Mayer entre el calor molar a presión constante y el calor molar a volumen constante) y utilizando el llamado coeficiente adiabático γ , definido como $\gamma = c_p/c_v$. Así pues, queda $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$, o bien eliminando T en función de p y V mediante la ecuación de estado [19] se obtiene la forma más utilizada:

$$pV^\gamma = \text{cte} \quad [21]$$

Ejemplo 4.16.

Demostrar que el calor molar a presión constante c_p y el calor molar a volumen constante c_v satisfacen $c_p = c_v + R$.

Según el primer principio, $dQ = dU + p dV$. Según [19], $dU = c_v dT$ (para $n = 1$), y según [20], $p dV = R dT$ (a p constante). Por tanto, $dQ = c_v dT + R dT = (c_v + R) dT = c_p dT$, lo que demuestra que $c_p = c_v + R$.

Ejemplo 4.17.

Un sistema termodinámico describe el ciclo que se muestra en la Figura 4.4. Calcular el trabajo en cada proceso del ciclo. Calcular el trabajo total.

Dividiremos el ciclo en tres partes: $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ y $C \rightarrow A$.

1.^a $A \rightarrow B$. Es un proceso isobárico, es decir, a p constante. Por tanto, el trabajo vale

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} p dV = -p \int_{V_A}^{V_B} dV = -p(V_B - V_A)$$

donde la presión ha podido salir de la integral porque es constante. Con estas condiciones

$$W_{A \rightarrow B} = -20 \text{ N m}^{-2} (3 - 1) \text{ m}^3 = -40 \text{ J}$$

El trabajo es negativo ya que el proceso es una expansión; es decir, el sistema realiza un trabajo sobre el exterior y por tanto pierde energía.

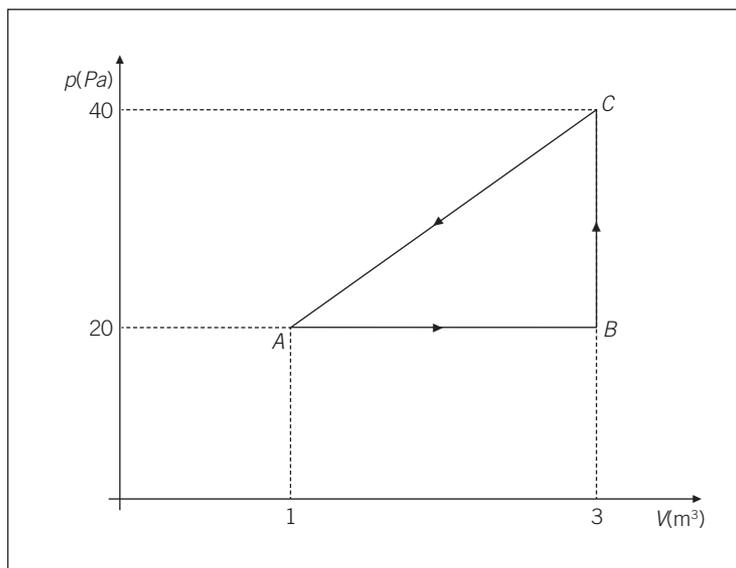


Figura 4.4. Ciclo termodinámico

2.^a $B \rightarrow C$. En este proceso, como el volumen permanece constante, $dV = 0$, el trabajo es cero:

$$W_{B \rightarrow C} = 0$$

3.^a $C \rightarrow A$. En este proceso varían tanto p como V . En un diagrama $p - V$ como el de la Figura 4.4, en el tramo de $C \rightarrow A$ la presión y el volumen varían según una recta. Es necesario, pues, calcular la ecuación de ésta.

En general,

$$p = mV + n$$

Para determinar m y n conocemos los valores de p y de V en dos puntos:

$$40 = m3 + n \quad , \quad 20 = m1 + n$$

De estas ecuaciones se obtiene:

$$m = 10 \text{ N m}^{-5} \quad , \quad n = 10 \text{ N m}^{-2}$$

es decir, que durante el proceso de $C \rightarrow A$ se cumple

$$p = 10 V + 10$$

Para calcular el trabajo debemos efectuar la integral

$$W_{C \rightarrow A} = - \int_{V_c}^{V_a} p dV = - \int_{V_c}^{V_a} (10 V + 10) dV = - \left[\frac{10 V^2}{2} + 10 V \right]_3^1 = 60 \text{ J}$$

El trabajo es positivo porque en este proceso el sistema se comprime, es decir, gana energía.

El trabajo total en todo el ciclo se obtiene sumando las contribuciones de cada una de sus partes:

$$W = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow A} = -40 \text{ J} + 60 \text{ J} = 20 \text{ J}$$

El concepto de proceso adiabático tiene un gran interés en meteorología y en el estudio del sonido. En el ejemplo 4.18 estudiamos una situación de interés meteorológico. El objetivo es comprender la estabilidad vertical de la atmósfera. Como sabemos, una masa de aire caliente es menos densa que una de aire frío y por lo tanto tiende a ascender. Ahora bien, la atmósfera se calienta debido a su contacto con el suelo ya que, como hemos dicho, es transparente a la radiación solar y la deja pasar, de manera que ésta calienta el suelo y éste calienta, desde abajo, la atmósfera. Podría parecer que la atmósfera estará, pues, siempre en movimiento, pero no es así, porque el aire, cuando sube, se enfría, ya que se dilata adiabáticamente, dado que es mal conductor del calor. Por ello, no debemos comparar directamente la densidad del aire a una cierta altura h con la densidad del aire en el suelo, sino con la densidad que tendría el aire del suelo si ascendiera rápidamente a h . Si al llegar a h el aire del suelo se ha enfriado tanto que es más denso que el aire que se hallaba originalmente allí, el aire que ascendía será más denso y volverá a bajar. Por lo tanto, la diferencia entre atmósfera estable y no estable viene dada por la condición del gradiente adiabático, que indica cuánto disminuye la temperatura de una masa de aire al subir adiabáticamente por unidad de altura.

Ejemplo 4.18.

Una masa de aire seco en contacto con el suelo tiene una temperatura T . Hallar la variación dT de su temperatura si asciende adiabáticamente una altura dz . En concreto, ¿cuánto se reducirá la temperatura si asciende 1000 m? Recuérdese que al ascender una distancia dz , la presión estática varía según $dp = -\rho g dz$, tal y como vimos en la ecuación fundamental de la hidrostática [12] del capítulo 3.

Los procesos adiabáticos están descritos por la ecuación $pV^\gamma = \text{cte}$, que puede escribirse también como

$$Tp^{(1-\gamma/\gamma)} = \text{cte}$$

Diferenciando esta expresión se tiene

$$dT = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} dp$$

Ahora bien, podemos escribir dp y el cociente T/p en función de la densidad del aire. Según la ecuación de estado de los gases ideales, y siendo M la masa del gas y M_m su masa molar, tendremos

$$\frac{T}{p} = \frac{V}{nR} = \frac{V}{M} \frac{M_m}{R} = \frac{M_m}{R} \frac{1}{\rho}$$

Al introducir esta expresión y $dp = -\rho g dz$ en la ecuación para dT tenemos

$$dT = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{M_{mol}}{R} g dz$$

Recordemos que la masa molar media del aire vale $M_m = 28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$, $R = 8,3 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ y $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ y que la constante adiabática para el aire (compuesto básicamente por N_2 y O_2 , gases de moléculas diatómicas) vale 1,4. Tenemos entonces

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{0,4}{1,4} \frac{28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}}{8,3 \text{ J/mol} \cdot \text{K}} 9,8 \text{ m/s}^2 = -9,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}$$

Por lo tanto, si la masa de aire asciende adiabáticamente 1000 m su temperatura habrá disminuido 9,7 K. Si el aire que encuentra a aquella altura es más caliente, la masa de aire que ascendía volverá a caer, ya que será más densa que el aire que hay a 1000 m. En cambio, si el aire que se encuentra a 1000 m es más frío, la masa seguirá ascendiendo.

Se llaman situaciones de inversión térmica aquéllas en que se halla aire caliente arriba en la atmósfera y aire frío abajo. En estas condiciones, el aire que asciende encuentra aire más cálido al subir y vuelve a descender. Ello impide, por ejemplo, que los contaminantes producidos en una ciudad puedan dispersarse hacia capas altas de la atmósfera, ya que este actúa como si hubiera una tapadera de vidrio encima de la misma.

La ecuación térmica de estado de los gases ideales no describe con suficiente exactitud los experimentos reales, en especial a presión elevada o a baja temperatura, ni permite explicar el fenómeno de la condensación. Van der Waals superó por primera vez estos inconvenientes con su célebre ecuación térmica de estado para gases reales:

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad [22]$$

donde a y b son constantes que dependen de los gases en cuestión. Dicha ecuación describe el paso de vapor a líquido por debajo de una cierta temperatura crítica. Por debajo de ella, al comprimir el gas a T constante se llega a una determinada presión a la cual tiene lugar el cambio de fase, durante el cual la presión no varía aunque se comprima el fluido, ya que éste va pasando de vapor a líquido. Dicha presión se denomina *presión de vapor* y depende, claro está, de la temperatura.

Ejemplo 4.19.

Antes de salir el Sol, la humedad relativa en un bosque a 10 °C es de 50 por 100. ¿Cuál será la humedad relativa al mediodía, si la temperatura ambiente es de 25 °C? (presiones de vapor saturante del agua: a 10 °C, 8,94 mm de Hg; a 25 °C, 18,45 mm de Hg).

La humedad relativa se define como el cociente entre la presión de vapor del agua existente en la atmósfera en unas condiciones dadas y la presión de vapor saturada del agua en las mismas condiciones:

$$U = 100 \frac{p_v}{p_{vs}}$$

donde p_v es la presión de vapor y p_{vs} la presión de vapor de saturación. La presión de vapor de saturación depende de la temperatura, y por tanto si varia ésta también variará U .

Si a 10 °C la humedad relativa es del 50 por 100, esto quiere decir

$$p_v = \frac{U p_{vs}}{100} = \frac{50 \times 8,94 \text{ mm de Hg}}{100} = 4,47 \text{ mm de Hg}$$

Si la temperatura ambiente es 25 °C y la presión de vapor 4,47 mm de Hg y la presión de vapor de saturación es 18,45 mm de Hg, la humedad relativa valdrá entonces

$$U = 100 \frac{4,47 \text{ mm de Hg}}{18,45 \text{ mm de Hg}} = 24,2,$$

es decir que la humedad relativa es de 24,2%.

Ejemplo 4.20.

El peso de la válvula de una olla de presión es 0,05 kg. La superficie del orificio de la válvula es 0,1 cm². ¿A qué temperatura hervirá el agua en su interior? Téngase en cuenta la siguiente tabla de presiones de vapor:

T(°C)	p_{vs} (mm de Hg)	T(°C)	p_{vs} (mm de Hg)
100	760	110	1074,6
101	787	111	1111,2
102	815	112	1148,7
103	845	113	1187,4
104	875	114	1227,2
105	906	115	1268,0

Suponemos que en el exterior la presión ambiental es de una atmósfera. La presión interior de la olla podrá llegar al valor de la presión atmosférica más la ejercida por el peso del tapón de la válvula. La presión que ejerce en la válvula es

$$p_t = \frac{m_t g}{S}$$

donde m_t es la masa del tapón y S la superficie del orificio. Así, tenemos

$$p_t = \frac{0,05 \text{ kg } 9,81 \text{ m s}^{-2}}{0,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2} =$$

$$= 409,5 \times 10^2 \text{ N m}^{-2} = 4,841 \times 10^{-1} \text{ atm} = 367,9 \text{ mm de Hg}$$

Por tanto, la presión máxima en el interior de la olla será

$$p_T = p_{\text{atm}} + p_t = 760 \text{ mm de Hg} + 367,9 \text{ mm de Hg} = 1127,9 \text{ mm de Hg}$$

Finalmente, para encontrar la temperatura de ebullición del agua a esta presión, utilizamos la tabla del ejemplo e interpolamos obteniendo

$$T_{\text{eb}} = 111 + \frac{16,7}{37,5} = 111,4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

ya que un líquido hierve a aquella temperatura para la cual la correspondiente presión de vapor iguala a la presión del sistema. Como la temperatura es mayor que los 100 °C que se podrá alcanzar en una olla normal con agua hirviendo, la cocción se efectúa más rápidamente en la olla de presión.

Ejemplo 4.21.

Un aparato de aire acondicionado actúa como un refrigerador un día de verano en que la temperatura exterior es de 25 °C y la humedad relativa exterior es del 80 por 100. Si la temperatura interior es de 15 °C, ¿qué cantidad de

agua condensará en el acondicionador de aire? Expresar el resultado como un porcentaje de agua condensada respecto a la cantidad de vapor de agua inicial (presiones de vapor de saturación: a 25 °C, 24 mm de Hg; a 15 °C, 13 mm de Hg).

Como la temperatura en el interior es más baja, la presión de vapor de saturación también lo es y puede ocurrir que el aire llegue a un 100 por 100 de humedad relativa y por tanto el resto de vapor de agua ha de condensar.

En este caso, si inicialmente la humedad relativa en el exterior es de 80 por 100, la presión de vapor de agua en el aire es

$$p_v = \frac{U \cdot p_{vs}}{100} = \frac{80 \times 24 \text{ mm de Hg}}{100} = 19,2 \text{ mm de Hg}$$

Como en el interior la temperatura máxima es 15 °C y la presión de vapor de saturación es de 13 mm de Hg, se cumple que al pasar el aire del exterior al interior una parte del vapor de agua habrá de condensarse. Esta parte es

$$\frac{19,2 \text{ mm de Hg} - 13 \text{ mm de Hg}}{19,2 \text{ mm de Hg}} = 0,32$$

es decir, un 32 por 100.

4.9. Teoría cinética de los gases

La ecuación térmica de los gases ideales, conocida desde el siglo XVIII, se puede explicar a nivel microscópico suponiendo que el gas es un conjunto de moléculas que se mueven incesantemente en el vacío. La fuerza que dichas moléculas ejercen contra las paredes en sus choques con las mismas dan lugar a la presión.

Supongamos que un gas está encerrado en el interior de una caja. La fuerza media ejercida por una molécula en los choques contra una pared puede hallarse a partir de la ley de Newton, $F = \Delta p / \Delta t$, el intercambio de momentos en un choque elástico es $2mv_x$ (suponemos la pared perpendicular al eje X) y el tiempo entre dos choques sucesivos con la misma pared es $\Delta t = 2L/v_x$, siendo L la longitud de la caja a lo largo del eje X . La fuerza media ejercida por una partícula es, pues, $F = \frac{mv_x^2}{L}$ y la fuerza ejercida por un mol (N_A moléculas) por unidad de área, la presión, será pues

$$p = \frac{1}{3} n N_A m \bar{v}^2 / V \quad [23]$$

donde N_A es el número de Avogadro, o número de moléculas por mol, n el número de moles, m la masa de una molécula y \bar{v}^2 el promedio del cuadrado de las velocidades moleculares v , mientras que el factor 1/3 proviene de hallarnos en un espacio de tres dimensiones, en el que, en promedio, 1/3 de las moléculas viaja en la dirección del eje X , otro tercio en la dirección del

eje de las Y y el tercio restante en la dirección del eje de las Z . Al comparar esta ecuación con la ecuación de estado de los gases ideales [19], $pV = nRT$, se llega a

$$m\bar{v}^2 = (R/N_A)T = 3kT$$

donde $k = R/N_A$ es la constante de Boltzmann. Es más conveniente e ilustrativo expresar este resultado en términos de la energía cinética molecular media:

$$\bar{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT \quad [24]$$

Esta ecuación tiene una gran importancia conceptual, ya que permite interpretar la *temperatura absoluta* T , magnitud típicamente termodinámica (macroscópica) en términos de propiedades microscópicas (estadísticas) como la energía cinética molecular media. Así como la fórmula [17] relaciona la entropía macroscópica con la probabilidad o el número de estados microscópicos, la relación [24] conecta la temperatura macroscópica con la energía microscópica media de agitación molecular. Tanto [17] como [24] constituyen un puente fundamental entre ambos niveles de descripción del mundo.

Además, la relación [24] tiene interés práctico, ya que permite evaluar la velocidad cuadrática media (raíz cuadrada del promedio del cuadrado de las velocidades) en función de la temperatura y de la masa molecular. Dicha velocidad de agitación microscópica resulta ser del orden de la velocidad de la propagación del sonido en el gas en cuestión (unos 340 m/s en el nitrógeno y unos 1500 m/s en el hidrógeno, a temperatura ambiente).

Una generalización interesante de este resultado es el llamado *teorema de equipartición de la energía*, según el cual la energía cuadrática media asociada a cada grado de libertad de las variables del movimiento vale $(1/2) kT$ por molécula o bien $(1/2) RT$ por mol. Así, por ejemplo, en el caso de un gas monoatómico, las moléculas sólo tienen energía cinética de traslación (no tienen energía potencial, ya que no interactúan entre sí y la gravedad no contribuye propiamente a la energía interna, sino a la energía potencial global del sistema) y cada una de ellas tiene tan sólo tres grados de libertad. Según este teorema, la energía cuadrática media por molécula deberá ser, por tanto, $E = 3 kT/2$, como habíamos deducido en [24].

En cambio, para gases diatómicos debe tenerse en cuenta también el movimiento de rotación de la molécula. La mecánica cuántica muestra que sólo deben considerarse las contribuciones a la energía cinética media que provienen de la rotación en torno a los dos ejes perpendiculares al eje de rotación. En este caso, por tanto, hay cinco grados de libertad (tres de traslación y dos de rotación) que contribuyen a la energía cinética media, que valdrá:

$$\text{Energía molecular cuadrática media} = (5/2) kT \quad [25]$$

en lugar de la expresión [24]. Finalmente, en redes cristalinas sólidas, debe tenerse en cuenta no sólo la energía cinética de traslación, sino la energía potencial elástica según los tres ejes. Como dicha energía potencial es cuadrática en el desplazamiento, tendremos en este caso seis grados de libertad

que contribuyen a la energía (tres de traslación y tres de posición), por lo cual la energía molecular cuadrática media será:

$$\text{Energía molecular cuadrática media} = (6/2) kT = 3 kT \quad [26]$$

A partir de [24], [25] y [26] es fácil obtener la energía por mol si multiplicamos dichas expresiones por el número de Avogadro. Con $kN_A = R$ tendremos para la energía interna U por mol:

$$U_{\text{mon}} = (3/2) RT, \quad U_{\text{diat}} = (5/2) RT, \quad U_{\text{crist}} = (6/2) RT \quad [27]$$

Al derivar estas expresiones respecto a la temperatura se obtienen los valores correspondientes de los calores específicos molares, $U_{\text{mon}} = (3/2) R = 3 \text{ cal/K mol}$, $U_{\text{diat}} = (5/2) R = 5 \text{ cal/K mol}$ y $C_{\text{crist}} = 3R = 6 \text{ cal/K mol}$ (esta última relación es conocida como *ley de Dulong y Petit*), en buen acuerdo con la experiencia.

Así pues, la teoría cinética permite, a partir de una hipótesis molecular, deducir de forma consistente tanto la ecuación de estado térmica como la calórica, y permite obtener los calores específicos correspondientes. La teoría cinética constituyó la base de la llamada mecánica estadística, mucho más general, cuyo objetivo es explicar los valores numéricos de las magnitudes termodinámicas de cada material en función de las interacciones entre las moléculas de dicho material. Es éste un campo de gran complejidad del que haremos sólo unos breves comentarios.

Ejemplo 4.22.

El uranio natural está compuesto de un 99,3 por 100 de ^{238}U con una masa atómica de 238 u.m.a. y de un 0,7 por 100 de ^{235}U de 235 u.m.a. El isótopo ^{235}U es el que se utiliza en los reactores nucleares. Los dos isótopos se separan mediante un proceso de difusión del fluoruro de uranio gaseoso. El método utiliza el hecho de que las velocidades cuadráticas medias en el UF_6 , son diferentes para los dos isótopos. Calcular sus velocidades cuadráticas medias a 37°C y la relación entre ellas.

La velocidad cuadrática media de un gas ideal viene dada por la expresión [24]

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, T la temperatura absoluta y m la masa molecular. Dados los valores

$$k_B = 1,3810^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

$$1 \text{ u.m.a.} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

podemos calcular las v_{cm} para los dos isótopos (la masa molecular del flúor es de 19 u.m.a.):

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \times (273 + 37) \text{ K}}{(238 + 6 \times 19) \times 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}}} =$$

$$= 148,20 \text{ m s}^{-1} \text{ para el } ^{238}\text{UF}_6$$

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \times (273 + 37) \text{ K}}{(235 + 6 \times 19) \times 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}}} =$$

$$= 148,83 \text{ m s}^{-1} \quad \text{para el } {}^{235}\text{UF}_6$$

La relación entre ellas es

$$\frac{v_{\text{cm}}({}^{235}\text{UF}_6)}{v_{\text{cm}}({}^{238}\text{UF}_6)} = \frac{148,83}{148,20} = 1,004$$

Pese a ser semejantes ambas, esta pequeña diferencia es suficiente para conseguir una separación apreciable de ambos isótopos si se repite muchas veces el proceso de difusión, ya que poco a poco el gas más ligero va dejando atrás al más pesado.

Ejemplo 4.23.

La velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas de densidad $0,84 \text{ kg m}^{-3}$ es 1414 m s^{-1} . ¿Cuál es la presión del gas?

La teoría cinética muestra, según [23], que la presión de un gas ideal se puede expresar como

$$p = \frac{2}{3} \frac{nN_a}{V} \bar{E}_{\text{cin}}$$

donde n y N_a son el número de moles y el número de Avogadro, respectivamente, V el volumen del sistema y \bar{E}_{cin} la energía cinética media por molécula, que viene dada por

$$\bar{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2$$

donde m es la masa molecular y v_{cm} la velocidad cuadrática media. La presión toma la forma

$$p = \frac{1}{3} \frac{nN_a M}{V} v_{\text{cm}}^2$$

El término nN_a/V es la densidad ρ , lo que nos permite escribir

$$p = \frac{1}{3} \rho v_{\text{cm}}^2$$

que en nuestro caso da

$$p = \frac{1}{3} \times 0,84 \text{ kg m}^{-3} \times (1414)^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = 559.830,88 \text{ N m}^{-2} = 5,53 \text{ atm}$$

La teoría cinética de los gases dio lugar a la mecánica estadística, que estudia de forma general la relación entre las propiedades microscópicas de

los gases, relacionada con las propiedades de sus moléculas, y sus propiedades macroscópicas. Una de las relaciones fundamentales es la de la probabilidad de encontrar un microestado con energía E en un sistema a temperatura constante T . Esta probabilidad viene dada por

$$Pr(E) \sim \exp[-E/kT] \quad [28]$$

donde k es la constante de Boltzmann. Esta relación tiene interés, por ejemplo, en los equilibrios de sedimentación o de ultracentrifugación, y en las concentraciones de equilibrio de ambos lados de una membrana permeable, entre cuyos lados haya una cierta diferencia de potencial. He aquí tres ilustraciones de estas situaciones.

Ejemplo 4.24.

Hallar en función de la altura la concentración de un cierto soluto, las moléculas del cual tienen masa efectiva $m' = m(1 - \rho_0/\rho)$, al alcanzar el equilibrio de sedimentación bajo la acción de la gravedad.

La concentración a una cierta altura h será proporcional a la probabilidad de encontrar partículas de soluto a esta altura. Como la energía potencial correspondiente a una altura h es la energía potencial $m'gh$, tendremos

$$C(h) \sim Pr(h) \sim \exp[-m'gh/kT]$$

o bien, si llamamos $C(0)$ la concentración en $h = 0$, tenemos

$$C(h) = C(0) \exp[-m'gh/kT]$$

Así, el estudio detallado de la variación de la concentración de un soluto con la profundidad nos permite obtener su masa molar, ya que si m' es la masa molecular, multiplicando numerador y denominador por el número de Avogadro, y recordando que $k = R/N_A$, $m'/k = M'/R$, donde M' es la masa molar efectiva, relacionada con la masa molar real M por $M' = M(1 - \rho_0/\rho)$, con ρ_0 la masa del disolvente, tenemos

$$M \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) = \frac{RT}{gh} \ln \frac{C(0)}{C(h)}$$

Ejemplo 4.25.

Hallar en función de la distancia al centro del rotor de una centrifugadora la concentración de un cierto soluto, las moléculas del cual tienen una masa efectiva $m' = m(1 - \rho_0/\rho)$, al alcanzar el equilibrio en una ultracentrifugadora que gira a velocidad angular ω .

La aceleración de la gravedad g no es lo suficientemente grande como para que la variación C con h sea perceptible cómodamente en un recipien-

te de pequeña altura. Resulta más cómodo y preciso utilizar una ultracentrifugadora, que permite obtener valores muy elevados de la aceleración. Si la centrifugadora gira con velocidad angular ω , la velocidad con que giran las moléculas que se encuentran a una distancia R del centro del giro es $v = \omega R$. Por ello, su energía cinética en este punto es $E_c = (1/2) m'v^2 = (1/2) m'\omega^2 R^2$. Así, la concentración de soluto $C(R_1)$ a una distancia R_1 del centro y la concentración de soluto $C(R_2)$ a una distancia R_2 del centro vendrán dadas por

$$C(R_1) \sim \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{m'\omega^2 R_1^2}{kT}\right]$$

$$C(R_2) \sim \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{m'\omega^2 R_2^2}{kT}\right]$$

La constante de proporcionalidad se cancelará al dividir estas expresiones miembro a miembro, y tendremos

$$\frac{C(R_1)}{C(R_2)} = \exp\left[\frac{1}{2} \frac{m'}{kT} \omega^2 (R_1^2 - R_2^2)\right]$$

de modo que la masa molar M del soluto será

$$M \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) = \frac{2RT}{\omega^2} \frac{l}{R_2^2 - R_1^2} \ln\left(\frac{C(R_1)}{C(R_2)}\right)$$

Esta expresión es utilizada habitualmente para hallar la masa de las macromoléculas en suspensión. La densidad ρ de las moléculas es, aproximadamente, la densidad de la forma sólida, de la macromolécula, convenientemente prensada.

Problemas propuestos

1. ¿Qué temperatura de la escala Celsius corresponde a 100 grados en la escala Fahrenheit?

Resultado: 37,8 °C.

2. Un termómetro con una escala arbitraria marca -20° en el punto de fusión del hielo. Sabiendo que cada grado de esta escala corresponde a dos de la escala Celsius, ¿cuál será en esa escala la temperatura del punto de ebullición de agua a presión atmosférica?

Resultado: 30°.

3. Sobre una rueda de madera de 200 cm de radio hemos de colocar una fina lámina de hierro de forma circular que tiene un diámetro de 396 cm. ¿Cuánto hay

que elevar la temperatura para que podamos cumplir nuestro objetivo? (Para el hierro, $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.)

Resultado: 841,8 K.

4. El coeficiente de dilatación cúbica se define como $\alpha = \Delta V/\Delta T$. En el vidrio Pyrex es una tercera parte del coeficiente del vidrio normal. ¿Qué implicaciones comporta este hecho con respecto a los esfuerzos térmicos?

5. El módulo de compresibilidad del bencol a 0 °C y a la presión atmosférica es $1,11 \times 10^4 \text{ atm}$ y su coeficiente de dilatación cúbica $\alpha = 1,24 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. ¿Qué presión exterior hay que ejercer sobre el bencol para que al calentarlo un grado su volumen no varíe?

Resultado: 13,76 atm.

6. La producción de energía eléctrica del conjunto de centrales europeas equivale a 2×10^{16} J diarios. Si el rendimiento medio de las centrales es de 20 por 100: a) ¿cuánto calor pasa al medio ambiente cada día?; b) ¿qué cantidad de agua se necesita para absorber esta energía suponiendo que el sistema de refrigeración impone que el aumento de temperatura no puede ser superior a 2°C ?

Resultados: a) $1,91 \times 10^{16}$ cal; b) $0,96 \times 10^{13}$ kg.

7. Un objeto de 5 kg de masa golpea repetidamente un clavo de 100 g. Ambos son de hierro. La velocidad del objeto al chocar es de 4 m s^{-1} ($c_{\text{Fe}} = 0,115 \text{ cal g}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$). Si la mitad de la energía cinética del objeto se invierte en trabajo mecánico de clavar el clavo y el resto de la energía calienta tanto el objeto como el clavo, ¿cuántos golpes deberemos dar para que la temperatura suba $0,82^\circ\text{C}$?

Resultado: 100 golpes.

8. Una bola de nieve cae desde un tejado situado 20 m por encima del nivel del suelo. Si su temperatura inicial es de -10°C y se supone que ninguna fracción de calor se pierde al medio ambiente, ¿cuál será la temperatura final de la bola? (Calor específico, $0,500 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.)

Resultado: $-9,906^\circ\text{C}$.

9. ¿Qué energía debe extraer un refrigerador de una masa de 10 kg de agua inicialmente a 20°C para tener hielo a -5°C ? (Calor latente de fusión, $79,7 \text{ kcal kg}^{-1}$.)

Resultado: 1022 kcal.

10. En una unidad de quemados de un hospital se desea mantener la temperatura de un paciente a 15°C , con objeto de disminuir la deshidratación y la posibilidad de infecciones, disminuyendo el caudal sanguíneo superficial, mientras que la temperatura interna sea de 37°C , adecuada para mantener en correcto funcionamiento los órganos internos. Para ello, se piensa en mantener el cuerpo del paciente bajo convección forzada de una corriente de aire donde el coeficiente de transferencia por convección valga $h = 0,75 v^{0,67}$, siendo v la velocidad del aire en m s^{-1} . ¿Para qué velocidad del aire la pérdida de calor por unidad de superficie iguala la pérdida convectiva que el cuerpo tendría si se sumergiera en agua donde $h = 16,5 \text{ kcal m}^{-2} \text{ h}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}$, suponiendo que en ambos casos el aire y el agua están a la misma temperatura?

Resultado: 101 m s^{-1} .

11. Normalmente, la temperatura de la piel es 34°C y la del organismo 37°C . a) Calcular las pérdidas por conducción si la conductividad calorífica vale $121 \times 10^{-3} \text{ cal cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ y que este flujo se establece en una distancia de 3 cm. b) ¿En cuánto se incrementaría esta can-

tidad si la temperatura de la piel fuera 15°C ? (Suponer que el área superficial es $1,8 \text{ m}^2$.)

Resultados: a) $21,78 \text{ cal s}^{-1}$; b) $159,72 \text{ cal s}^{-1}$.

12. Una cacerola de aluminio de 15 cm de diámetro, llena de agua, está en un hornillo. Cada minuto hierven 300 g de agua. ¿A qué temperatura está la parte exterior del fondo de la cacerola si su espesor es de 2 m, despreciando las pérdidas térmicas, sabiendo que la conductividad térmica del aluminio es de $210 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$? (Calor latente de ebullición, 539 kcal kg^{-1} .)

Resultado: $106,1^\circ\text{C}$.

13. Una caja de dimensiones $0,5 \times 0,3 \times 0,35 \text{ m}$ está aislada con un material de espesor que tiene una conductividad térmica de $10^{-3} \text{ kcal/s m K}$. Si la diferencia de temperaturas entre el exterior y el interior es de 35°C , ¿cuánta energía atraviesa las paredes de la caja por segundo? b) ¿Cuánto hielo se fundirá en una hora dentro de la caja? (Calor latente de fusión del hielo, $79,7 \text{ kcal kg}^{-1}$.)

Resultados: a) $1,51 \text{ kcal s}^{-1}$; b) $67,97 \text{ kg}$.

14. En el interior de una célula esférica en reposo de 10000 \AA de radio se producen reacciones metabólicas que producen una energía de $1,7 \text{ cal h}^{-1}$. La célula está en un medio acuoso a 20°C y su temperatura se ha de mantener constante a 30°C . ¿Cuál será la máxima potencia que puede desarrollar la célula si la conductividad térmica celular es de $0,80 \text{ cal K}^{-1} \text{ cm h}^{-1}$, siendo el espesor de la membrana 100 \AA ?

Resultado: $0,7 \text{ cal h}^{-1}$.

15. El ritmo metabólico de un insecto vale 12 cal h^{-1} y su temperatura es de 20°C . ¿A qué temperatura se mantendrá en invierno si reduce su ritmo metabólico a la mitad y se protege con una capa de segregaciones de un milímetro de espesor y de conductividad térmica de $10 \text{ cal K}^{-1} \text{ h}^{-1} \text{ cm}^{-1}$? (Temperatura ambiente invernal, 5°C ; superficie del insecto, $0,5 \text{ cm}^2$.)

Resultado: $5,12^\circ\text{C}$.

16. Una persona desnuda con un cuerpo de $1,5 \text{ m}^2$ de área y con la piel a 40°C de temperatura está en una sauna a 80°C . a) ¿Cuánto calor absorbe la persona por radiación de las paredes, suponiendo que el coeficiente de emisión vale 1. b) ¿Cuánto calor absorbe la persona por conducción suponiendo que la conductividad calorífica vale $1,21 \times 10^{-3} \text{ cal cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ y que el flujo se establece en una distancia de 3 cm? c) ¿Cuánta energía radia la persona? d) ¿Cuánto sudor ha evaporado por hora, suponiendo que no haya ninguna transferencia

convectiva? (Despréciase la producción metabólica de calor. Calor latente de ebullición, 539 kcal s⁻¹.)

Resultados: a) 317,1 cal s⁻¹; b) 242 cal s⁻¹; c) 196 cal s⁻¹; d) 2,4 kg h⁻¹.

17. Si se desea poner en órbita un satélite alimentado con paneles diseñados para poder alcanzar hasta 600 K (suponer que actúan como cuerpos negros), ¿hasta qué distancia se podrá acercar el satélite al Sol sin que sus paneles se deterioren? (Temperatura de la superficie del Sol, 6000 K; radio del Sol, 0,7 × 10⁶ km.)

Resultado: 0,7 × 10⁸ km.

18. La Tierra recibe en promedio 350 W/m² de energía de radiación solar. La emisión de energía radiante de la Tierra viene dada por Q/A (potencia/área) = $\epsilon\sigma T^4$, donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann y ϵ un coeficiente (denominado emisividad) que depende, entre otros factores, de las concentraciones de H₂O, CO₂ y CH₄ en la atmósfera (designadas, respectivamente, C₁, C₂ y C₃, en moles/m³), según $\epsilon = 1 - 10^{-3} C_1 - 10^{-2} C_2 - 2 \times 10^{-2} C_3$. a) Evaluar la temperatura media de la atmósfera cuando C₁ = C₂ = C₃ = 0. b) ¿Cuánto aumentará la temperatura de la atmósfera cuando C₁ = 0,3 mol m⁻³, C₂ = 0,4 mol m⁻³, C₃ = 0,01 mol m⁻³? El incremento de temperatura debido al aumento de la concentración de estos gases se denomina efecto invernadero.

Resultados: a) 280,3 K; b) 280,6 K.

19. Encerrados en un cilindro con pistón hay cinco moles de hielo que lentamente se transforman de un

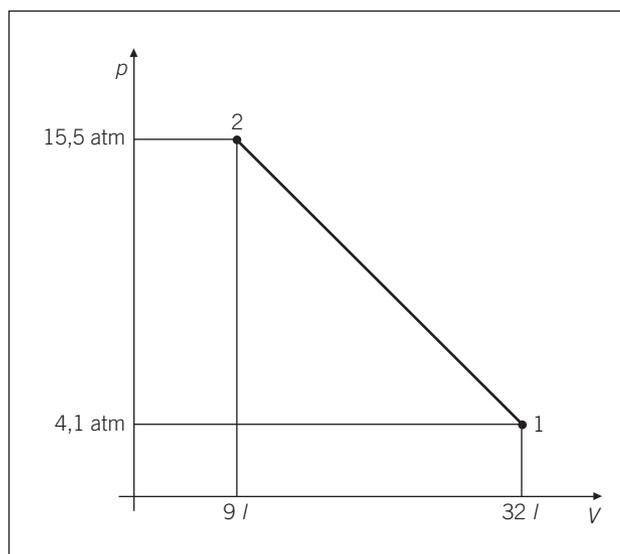


Figura 4.5. Ciclo termodinámico.

estado con volumen $V_1 = 32$ l y presión $p_1 = 4,1$ atm a otro con volumen $V_2 = 9$ l y $p_2 = 15,5$ atm (Fig. 4.4). a) Determinar la dependencia del volumen con la temperatura. b) ¿Para qué volumen T es máxima? c) ¿Cuánto vale T entonces?

Resultados: a) $-0,5$ (atm l⁻¹) $V^2 + 20$ (atm) $V = 5$ RT; b) 20 l; c) 488 K.

20. Un mol de un gas ideal monoatómico sigue el ciclo de la Figura 4.6. El calor específico a volumen constante es 12,5 J mol⁻¹ K⁻¹. La presión en los puntos 1 y 2 vale, respectivamente, 5×10^6 N m⁻² y 1×10^6 N m⁻² y la isotermia se realiza a $T = 550$ K. Calcular el trabajo y el calor absorbido por el gas en cada proceso.

Resultados:

1 → 2 $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$; $W_{1 \rightarrow 2} = -5561$ J,
 2 → 3 $Q_{2 \rightarrow 3} = 5561$ J; $W_{2 \rightarrow 3} = 0$,
 3 → 1 $Q_{3 \rightarrow 1} = -4412,3$ J; $W_{3 \rightarrow 1} = 4412,3$.

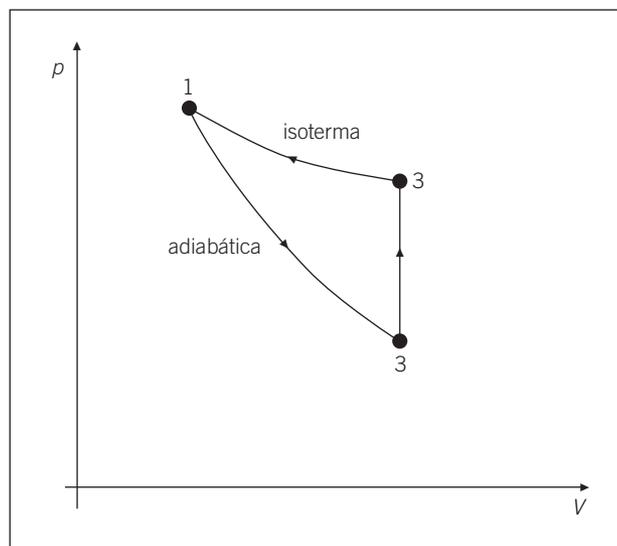


Figura 4.6. Ciclo termodinámico.

21. En la Figura 4.7 se muestra un diagrama pV simplificado del ciclo de Joule para un mol de un gas ideal. Todos los procesos son cuasiestáticos y el calor específico a presión constante es constante. Hallar el trabajo realizado y el calor cedido en cada proceso si $V_4 = 3 V_1$; $p_2 = 2 p_1$; $p_1 = 1$ atm; $V_1 = 15$ l y $\gamma = C_p/C_v = 5/3$.

Resultados:

1 → 2 $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$; $W_{1 \rightarrow 2} = 112,5$ atm l,
 2 → 3 $Q_{2 \rightarrow 3} = 99$ atm l; $W_{2 \rightarrow 3} = -39,6$ atm l,
 3 → 4 $Q_{3 \rightarrow 4} = 0$; $W_{3 \rightarrow 4} = -21,6$ atm l,
 4 → 1 $Q_{4 \rightarrow 1} = -75$ atm l; $W_{4 \rightarrow 1} = 30$ atm l.

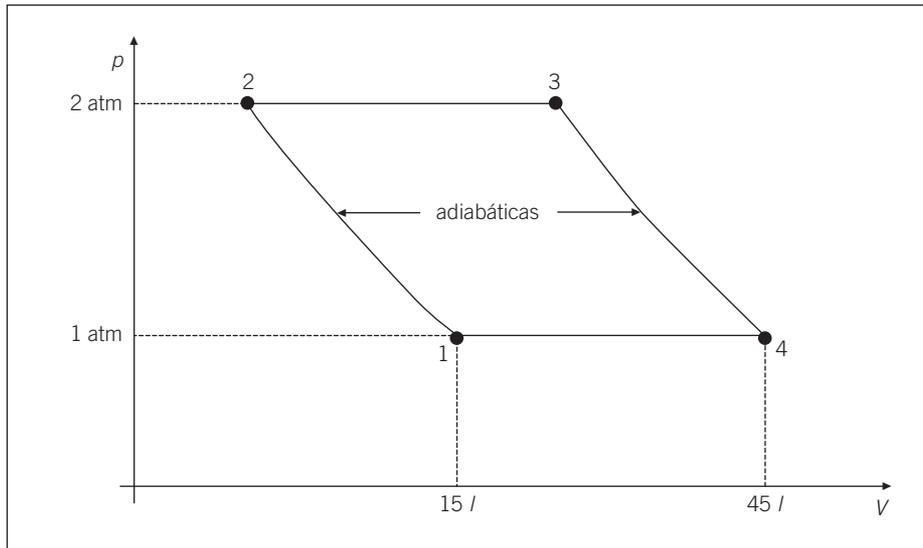


Figura 4.7.

22. ¿Cuál es el máximo rendimiento de una máquina que trabaja entre 100 °C y 400 °C?

Resultado: 45 por 100.

23. Para fabricar hielo en un recipiente lleno de agua se han de extraer 2×10^5 J. Si usamos un refrigerador de Carnot de 100 W de potencia de entrada que opera entre las temperaturas de 170 y 310 K, ¿cuánto tiempo emplearemos para extraer la energía mencionada anteriormente? ¿Es congruente este resultado con los tiempos característicos habituales?

Resultado: 27,4 minutos.

24. Dos sistemas del mismo material y con temperaturas de 700 y 400 K se ponen en contacto térmico. Si la capacidad térmica del material es 2 cal K^{-1} : a) ¿cuál es la temperatura de equilibrio?; b) ¿cuánto vale el aumento total de entropía del proceso?; c) ¿cuánto trabajo hemos desaprovechado?

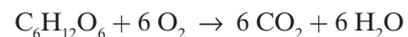
Resultados: a) 550 K; b) $0,155 \text{ cal K}^{-1}$.

25. Un sistema está formado por dos bloques idénticos de masa M y de calor específico c , uno de ellos a temperatura $T_1 = 400$ K y el otro a $T_2 = 200$ K. Calcular el incremento de entropía con respecto al estado inicial que corresponde a los estados B y C definidos respectivamente como: estado B ($T_1 = 300$ K, $T_2 = 300$ K), estado C ($T_1 = 500$ K,

$T_2 = 100$ K). ¿Cuál de los dos procesos es espontáneo?

Resultados: Estado B: $\Delta S = 0,12 \text{ Mc}$; estado C: $\Delta S = -0,47 \text{ Mc}$. La transición hacia el estado B.

26. La variación de energía interna en condiciones normales (25 °C, 1 atm) de la reacción



vale $\Delta U = -637,1 \text{ kcal}$. Si $\Delta S = 57 \text{ cal K}^{-1}$, hallar cuánto valen la variación de entalpía ΔH y la de energía libre de Gibbs ΔG .

Resultados: $\Delta H = -640,4 \text{ kcal}$; $\Delta G = -657,4 \text{ kcal}$.

27. Un grupo de N aves vuela al azar en todas las direcciones con una velocidad v . De repente se orientan todas hacia el sur (dentro de $\pm 1^\circ$) con velocidad v . Calcular el cambio de entropía.

Resultado: $-5,2 \text{ J K}^{-1}$.

28. La entropía de una cadena elastomérica está relacionada con la distancia según la ecuación

$$S = a - br^2$$

donde a y b son constantes y r es la longitud. Demostrar que la fuerza necesaria para producir un alargamiento será $F = -2 Tbr$, donde T es la temperatura absoluta.

29. Una habitación está a 20 °C y la humedad relativa es del 50 por 100. Al sacar una botella de agua fría de la nevera, se empaña. ¿A qué temperatura estará el agua cuando la botella deje de estar empañada, sabiendo las siguientes presiones de saturación?

t °C	p_s (mm de Hg)	t °C	p_s (mm de Hg)
0	4,58	12	10,5
2	5,29	14	12,0
4	6,10	16	13,6
6	7,01	18	15,5
8	8,05	20	17,5
10	9,21		

Resultado: 9,2 °C.

30. Hace cuatro mil millones de años la temperatura de la superficie del Sol era de unos 5 000 K, en lugar de los 6 000 K actuales. ¿En qué proporción estaba la potencia recibida por la Tierra respecto de la potencia que actualmente recibe del Sol?

Resultado: $(5/6)^4 = 0,48$.

31. En una macromolécula en equilibrio térmico, cada átomo tiene una energía del orden de kT , con k la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. Supongamos que una enzima puede suministrar, como máximo, una energía del orden del diez por ciento de su energía térmica: *a)* ¿Cuántos átomos debe tener, según esto, un enzima capaz de abrir simultáneamente veinte pares de bases del DNA si la energía media de los en-

laces de los pares AT y GC es de 25 KJ/mol? *b)* Si esta enzima está formado por aminoácidos que, en promedio tienen 60 átomos, ¿de cuántos aminoácidos deberá estar compuesto el enzima?

Resultado: *a)* 20 000 átomos; *b)* 333 aminoácidos.

32. Los pares adenina-timina en el DNA están unidos por un puente de hidrógeno O...H-N (8 kJ mol⁻¹) y un puente de hidrógeno N-H...N (13 kJ mol⁻¹). El incremento de entropía al abrirse el par vale aproximadamente 7,4 J/mol⁻¹ K⁻¹. Hallar a qué temperatura los pares A-T se abren espontáneamente.

Resultado: Unos 67 °C.

33. El grosor de la capa de ozono de la estratosfera es una variable de gran interés por sus implicaciones en la protección de los seres vivos en la superficie de la Tierra. El número de moléculas de ozono por cada centímetro cuadrado de superficie se acostumbra a expresar en unidades Dobson, que se refieren al espesor que tendría la capa de ozono con dicha densidad de moléculas, expresada en centésimas de milímetro si se transportara a la superficie de la Tierra en condiciones de 1 atmósfera de presión y 273 K de temperatura. *a)* El número habitual de moléculas de ozono por cada centímetro cuadrado es de $8,07 \times 10^{18}$ moléculas cm⁻², es decir 0,134 moles por metro cuadrado. Expresar este valor en unidades Dobson. *b)* En el verano Antártico, el espesor de la capa decae a 100 unidades Dobson. ¿Cuántas moléculas de ozono por centímetro cuadrado corresponden a este valor.

Resultado: *a)* 300; *b)* $2,69 \times 10^{18}$ moléculas cm⁻².

CAPÍTULO

Oscilaciones, ondas y acústica: vibraciones, oleajes, sonidos

5

Las ondas se hallan presentes o son la base de muchos fenómenos físicos, pues su principal propiedad es el transporte de energía sin transporte neto de masa. En este capítulo se comienza por repasar la cinemática de las oscilaciones, con los importantes fenómenos de la amortiguación y de la resonancia, para pasar después a las características generales de las ondas y su descripción. Se deduce la velocidad de propagación de las ondas y se estudia las ondas estacionarias en una cuerda. Se extiende el estudio al sonido —ondas de presión— y sus principales características, como son la velocidad de propagación, la intensidad —en la escala decibélica—, el tono y el timbre. Dedicamos una sección a la discusión de la física del habla y de la audición, especialmente útil para alumnos de ciencias de la vida y de la salud. Por su importancia en las aplicaciones médicas y en los estudios de ciertos animales se dedica cierta atención a los ultrasonidos y al efecto Doppler. Al llegar a la óptica física se aplicarán a las ondas electromagnéticas, es decir, a la luz, algunas de las cuestiones abordadas en el presente capítulo.

5.1. Movimiento oscilatorio

El movimiento oscilatorio se presenta al perturbar un sistema que se halla en equilibrio estable. Así, por ejemplo, una masa sujeta a un muelle, la masa de un péndulo o un objeto flotando sobre el agua, al ser separados de la posición de reposo, comienzan a oscilar.

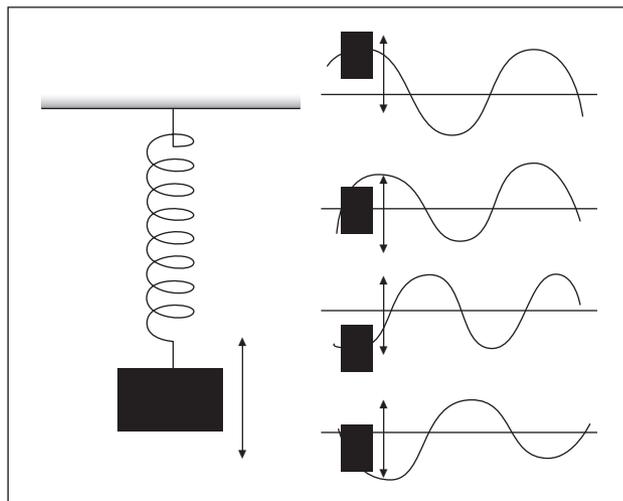


Figura 5.1. Oscilación de una masa colgada de un muelle.
Oscilación de un corcho flotando en el mar.

Tomemos el ejemplo de la figura 5.1, en el cual al separar una masa m una distancia x de su posición de equilibrio se ve sometida a una fuerza elástica de Hooke de la forma

$$F = -kx \quad [1]$$

donde k es la constante elástica del muelle. La segunda ley de Newton nos permite escribir $ma = -kx$ o bien, en forma de ecuación diferencial

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad [2]$$

La solución de esta ecuación es de la forma

$$x = x_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_0); \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [3]$$

donde x_0 es la amplitud de la oscilación, ϕ_0 la fase —estos dos parámetros se determinan a partir de las condiciones iniciales— y ω_0 la *frecuencia angular natural* del oscilador. Cuando una variable como x presenta una variación de tipo sinusoidal —o cosinusoidal— se dice que realiza un *movimiento oscilatorio armónico* (véase Figura 5.2). Para obtener la ecuación correspondiente a las pequeñas oscilaciones del péndulo simple, basta sustituir x por el ángulo y usar la relación $\omega_0^2 = (g/l)$, siendo g la aceleración de la gravedad y l la longitud del péndulo, deducida en el capítulo de Mecánica.

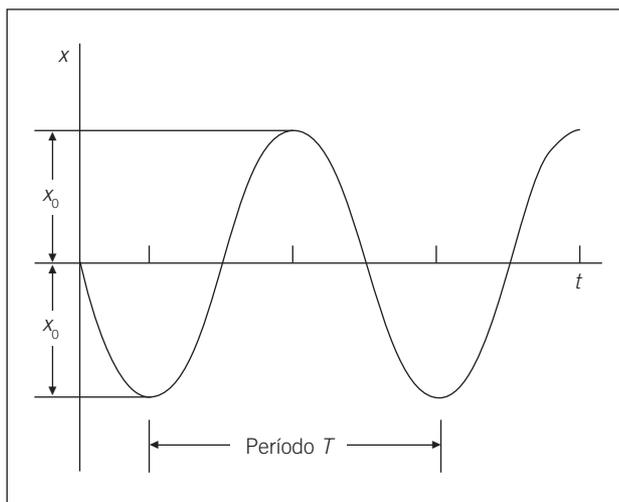


Figura 5.2. Movimiento sinusoidal con período $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y fase $\phi_0 = \pi$.

Ejemplo 5.1.

Mediante unos órganos sensibles en las extremidades de sus patas, las arañas pueden detectar las vibraciones de los animales que quedan atrapados en su tela. Supongamos que un insecto con masa $m = 1$ g atrapado en la tela de una araña produce una vibración en la misma de 15 Hz. a) ¿Cuál es la constante

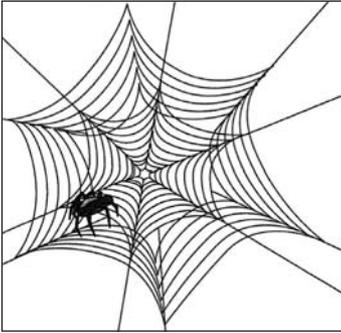


Figura 5.3. Insecto en una tela de araña.

elástica promedio de la tela? b) ¿Cuál sería la vibración que produciría un insecto de 4 g?

a) La fuerza elástica viene dada por la expresión $F = -kx$, donde k es la constante elástica y x la distancia a la posición de equilibrio. Por tanto, el movimiento del insecto en la tela vendrá dado por la expresión [3], donde tenemos en cuenta que $\omega_0 = 2\pi f_0$, es decir,

$$x = x_0 \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \phi_0) \quad \text{con} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

donde f_0 es la frecuencia natural del sistema elástico. Sabiendo, pues, que esa frecuencia es de 15 Hz, podemos inferir el valor de k

$$k = m(2\pi f_0)^2 = 10^{-3} \text{ kg} \times (2\pi \times 15 \text{ s}^{-1})^2 = 8,88 \text{ N m}^{-1}$$

b) Y para un insecto de 4 g tenemos

$$f'_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{8,88 \text{ N m}^{-1}}{4 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 7,5 \text{ Hz}$$

Ejemplo 5.2.

El péndulo de un reloj consiste en una barra delgada de acero con una masa colgada en su extremo inferior. A 20 °C el reloj va en hora. a) ¿Cuál será el período del péndulo a 40 °C? b) ¿Cuántos segundos atrasará por día?

La longitud de un péndulo simple está relacionada con el período a través de la relación

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

por tanto, la longitud debe ser

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{1 \text{ s}^2 \times 9,810 \text{ m s}^{-2}}{4\pi^2} = 0,2485 \text{ m}$$

y la elongación debida a la dilatación resulta ser (indicamos aquí la diferencia de temperaturas mediante $\Delta\theta$, para no confundirla con los períodos T)

$$\Delta l = \alpha l \Delta\theta = 1,27 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \times 0,2485 \text{ m} \times (40 - 20) \text{ }^\circ\text{C} = 6,31 \times 10^{-5} \text{ m}$$

(Nótese que como las elongaciones serán muy pequeñas, se debe tomar la aceleración de la gravedad con más cifras significativas.)

Como se puede ver, la elongación de la barra es muy pequeña, pero suficiente para producir una variación sensible al cabo de muchas oscilaciones. En efecto, si llamamos T' al período del péndulo a 40 °C, su relación con el período de referencia T a 20 °C es simplemente

$$\frac{T'}{T} = \frac{\sqrt{l'/g}}{\sqrt{l/g}} = \sqrt{\frac{l'}{l}} = \sqrt{\frac{0,2485 \text{ m} + 6,31 \times 10^{-5} \text{ m}}{0,2485 \text{ m}}} = 1,000127$$

Al ser el período T' levemente más largo que el T , el péndulo realiza menos oscilaciones en un día. En concreto, en un día efectuará un número de oscilaciones n dado por

$$n = \frac{24 \times 3600}{1,000127} = 86.389 \text{ oscilaciones}$$

en lugar de las 86 400 que da un péndulo perfectamente ajustado. Se puede concluir entonces que el péndulo a 40° retrasa 11 segundos diarios.

5.2. Oscilaciones amortiguadas

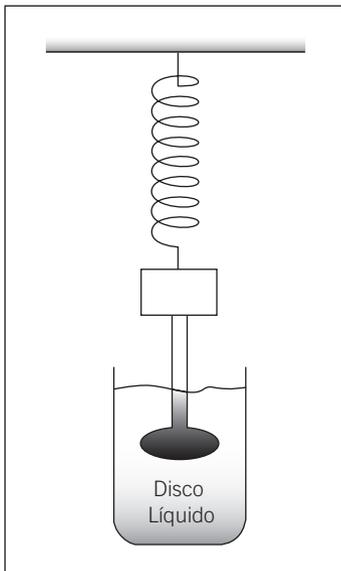


Figura 5.4. El movimiento del muelle con la masa queda amortiguado por la fricción del disco con el líquido.

Cualquier oscilador se ve sometido a efectos de frenado debido a la resistencia del aire y a la fricción de las piezas mecánicas. Como descripción de estos efectos se puede tomar una fuerza proporcional a la velocidad (como la fuerza de Stokes que vimos al estudiar la resistencia de los sólidos en fluidos)

$$F = -\left(kx + \gamma \frac{dx}{dt}\right) \quad [4]$$

donde γ es el coeficiente de fricción. Esta situación queda esquematizada en la Figura 5.4, en la que la oscilación del muelle se ve amortiguada por un fluido.

La ecuación del movimiento viene dada por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad [5]$$

donde el término $\gamma \frac{dx}{dt}$ aparece debido a la resistencia del aire y el término kx es la fuerza recuperadora elástica. La solución de esa ecuación diferencial es de la forma

$$x = x_0 e^{-t/\tau} \text{ sen } (\omega_a t + \phi_0) \quad [6]$$

donde los coeficientes son la amplitud inicial x_0 , el tiempo de relajación τ , y la frecuencia angular ω_a modificada respecto a su valor para el oscilador simple por los efectos de amortiguamiento. Estos dos últimos coeficientes vienen dados por la expresión

$$\tau = 2 \frac{m}{\gamma} \quad \text{y} \quad \omega_a^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{4} \frac{\gamma^2}{m^2} \quad [7]$$

En las Figuras 5.5 y 5.6 se representa la solución [6] en dos casos típicos: a) para amortiguamiento débil y b) para amortiguamiento fuerte,

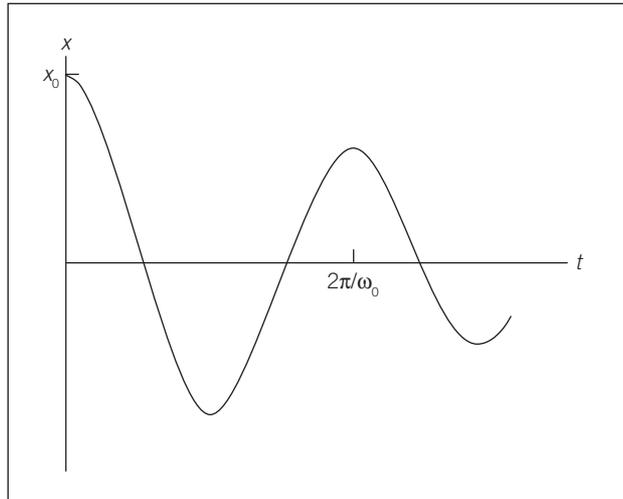


Figura 5.5. Oscilación débilmente amortiguada.

donde τ es el tiempo característico –que depende de la disipación y de la masa del oscilador–, transcurrido el cual la amplitud de la oscilación ha decrecido en un factor $1/e$ respecto al valor inicial. La Figura 5.5 representa el caso de una fricción pequeña en comparación con la frecuencia angular $\gamma \ll k$. Para $\gamma \ll k$, los efectos de amortiguamiento son del mismo orden que los de la oscilación, como se representa en la Figura 5.6.

Finalmente, se puede dar también el caso $\gamma > k$, denominado sobreamortiguado, para el cual el amortiguamiento es más rápido que la oscilación y la evolución del sistema es tal como se representa en la Figura 5.6. (Esta

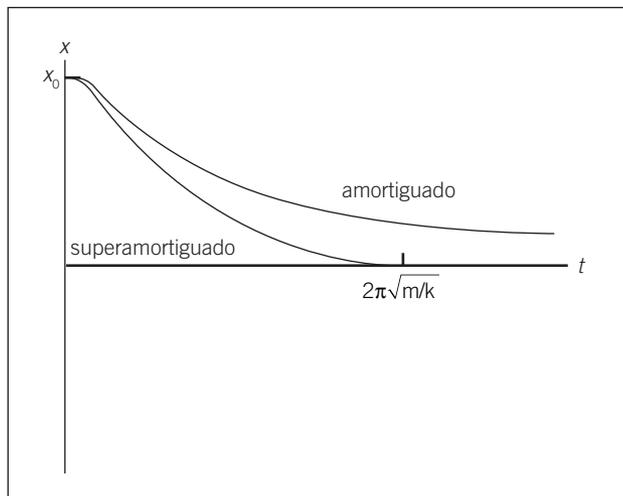


Figura 5.6. Movimiento fuertemente amortiguado y superamortiguado.

situación tiene interés para amortiguar golpes sin que produzca una oscilación, tal como se pretende con los amortiguadores de un coche o los materiales que absorben las vibraciones de una máquina.)

Presentamos ahora un ejemplo sobre un oscilador amortiguado de aplicación biológica.

Ejemplo 5.3.

Algunos insectos, especialmente dípteros e himenópteros, presentan del orden de 150 movimientos —o más— de las alas por segundo. (Esto supone un ritmo superior al cambio de potencial debido a impulsos nerviosos.) Para explicar de modo simplificado este movimiento rápido se supone que las alas actúan como un oscilador débilmente amortiguado, dado por una ecuación del tipo

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0$$

donde θ es el ángulo que forma el ala con la horizontal, m la masa del ala que es del orden de $m = 10^{-2}$ g, γ el coeficiente de fricción $\gamma = 0,4$ g s⁻¹ y k la constante elástica $k = 1600 \pi^2$ g s⁻². a) Dibújese esquemáticamente la solución de esa ecuación. Si suponemos que cuando la amplitud de oscilación decrece hasta un valor $1/e$, se dispara un impulso nervioso que devuelve la amplitud de la oscilación a su valor inicial, b) ¿cuántos impulsos nerviosos se disparan por minuto, según los datos del problema?

a) La solución de esa ecuación es del tipo de la expresada en la ecuación [6]

$$\theta = \theta_0 e^{-t/\tau} \text{sen}(\omega t + \phi_0)$$

(tomamos $\phi_0 = 0$ para simplificar) que tiene la forma que aparece en la Figura 5.5, donde la variable θ reemplaza a x en ordenadas. Las constantes del

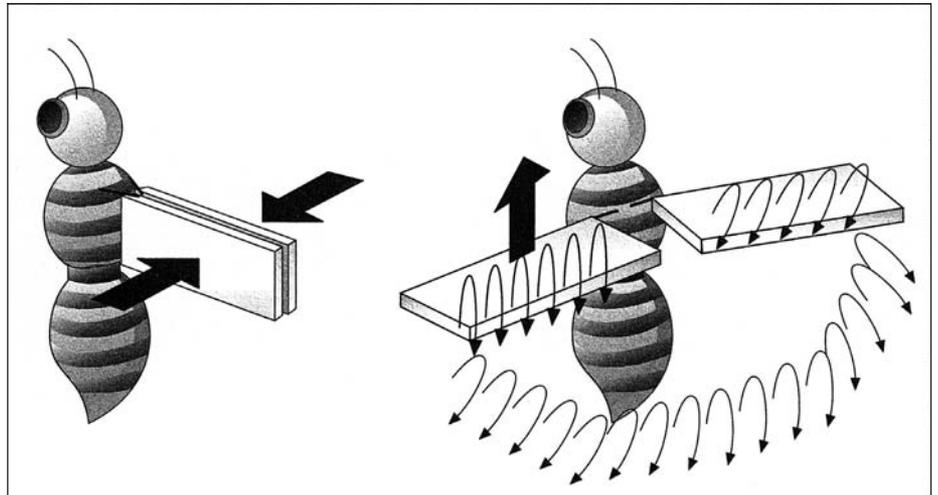


Figura 5.7. Oscilación de las alas de un insecto.

problema vienen dadas por las expresiones [7]. La primera permite hallar la frecuencia de oscilación

$$f_a = \frac{1}{2\pi} \omega_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{4} \frac{\gamma^2}{m^2}}$$

y como $\gamma \ll k$, se trata de un movimiento débilmente amortiguado. Esa misma condición nos permite despreciar el segundo término en la raíz de la expresión anterior y tomar como frecuencia de oscilación la del oscilador armónico simple

$$f_a \approx f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1600 \pi^2 \text{ g s}^{-2}}{10^{-2} \text{ g}}} = 200 \text{ Hz}$$

b) Por definición, el tiempo que tarda la amplitud de la oscilación en disminuir en un factor $1/e$ es el tiempo de relajación o de amortiguamiento τ

$$\tau = 2 \frac{m}{\gamma} = 2 \frac{10^{-2} \text{ g}}{0,4 \text{ g s}^{-1}} = \frac{1}{20} \text{ s}$$

lo que nos indica que se produce un impulso nervioso cada veintavo de segundo. Vemos entonces que la combinación de efectos elásticos acoplados a impulsos nerviosos nos permite explicar en este simple modelo cómo con sólo 20 impulsos por segundo se pueden conseguir frecuencias del movimiento de las alas del orden de los 200 Hz aprovechando las propiedades elásticas del conjunto de macromoléculas que sostienen las alas.

Aunque la siguiente sección incluye el importante concepto de resonancia, puede ser omitida por el lector, sin que esto afecte a la comprensión del resto del capítulo. El concepto de resonancia tiene interés, por ejemplo, para el estudio de la resonancia magnética nuclear en el capítulo 6.

5.3. Movimiento oscilatorio forzado. Resonancia

En el ejemplo anterior, en realidad, el impulso nervioso actuaba como una fuerza externa oscilante que se acopla al movimiento oscilatorio. Esta situación se puede estudiar mediante el ejemplo que se ilustra en la Figura 5.8.

Estudiamos con algún detalle este caso más complicado, pues está en la base de un importante fenómeno que interviene en distintos ámbitos de la Física: la *resonancia*. (Este fenómeno está también en la base de numerosas técnicas terapéuticas y de diagnóstico, como son la aplicación de ultrasonidos y la resonancia magnética nuclear que comentaremos en los apartados correspondientes.) Se supone, pues, que sobre el sistema, además de la recuperación elástica y el amortiguamiento, actúa una fuerza externa oscilante. La fuerza total sobre el oscilador vendrá dada por la expresión

$$F = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega' t \quad [8]$$

siendo F_0 la amplitud y ω' la frecuencia de la fuerza externa.

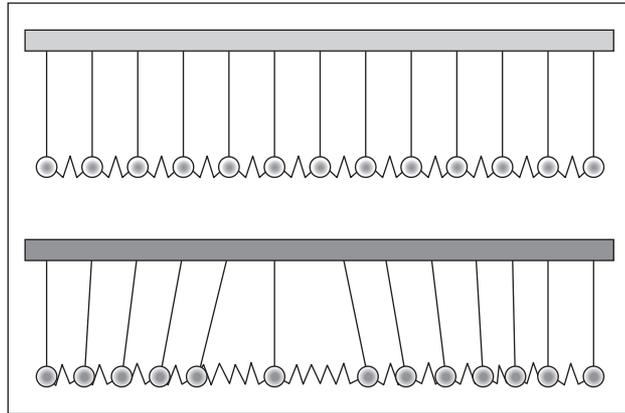


Figura 5.8. Péndulos acoplados oscilando.

Se llega así a la ecuación del movimiento

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega't \quad [9]$$

cuyas soluciones son del tipo

$$x = A \cos (\omega't + \phi) \quad [10]$$

donde la amplitud A y la fase ϕ son funciones de la frecuencia externa ω' , dadas por

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega'^2}}; \text{tg } \phi = \frac{\gamma\omega'}{m(\omega'^2 - \omega_0^2)} \quad [11]$$

Representamos la amplitud A como función de la frecuencia externa ω' en la Figura 5.9.

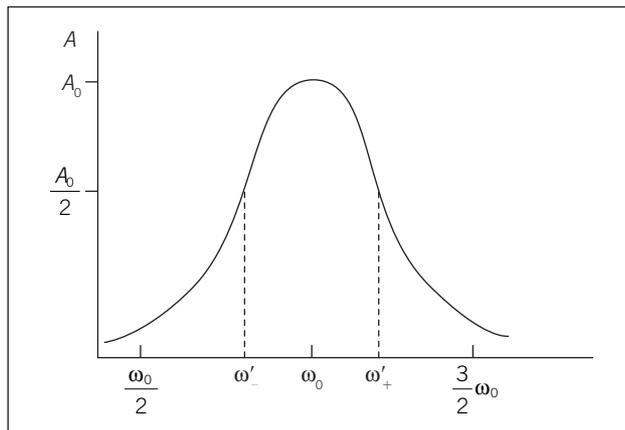


Figura 5.9. Amplitud de la resonancia.

Es interesante comentar las características de esta figura. Se puede ver que la amplitud alcanza un máximo para un valor de la frecuencia externa que se denomina *frecuencia de resonancia* ω_r , que, para amortiguamiento débil, se encuentra muy próxima a la frecuencia natural ω_0 del oscilador

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{m} \right)^2} \quad [12]$$

y el máximo en la amplitud, conocido como amplitud de resonancia, vale

$$A_r = \frac{F_0}{\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{m} \right)^2}} = \frac{F_0}{\gamma \omega_a} \quad [13]$$

Cuando la fuerza externa oscila a la frecuencia ω_r , transmite de manera óptima energía al oscilador. Esa misma fuerza no consigue aportar energía ni a frecuencias demasiado bajas ni demasiado altas, puesto que el amortiguamiento se encarga de que gran parte de aquélla se disipe. El máximo en la amplitud crece tanto más cuanto más pequeña es la disipación. Cuando la eficiencia en la transmisión de energía desde el oscilador externo hasta el interno es máxima, se dice que ambos osciladores entran en *resonancia*. (Este es el efecto que se produce cuando se empuja a un niño en un columpio para que se eleve, o en el proceso de sintonización de un aparato de radio. También se halla en la base de fenómenos como el eco o la amplificación del sonido en un habitáculo, cuando aquél tiene la frecuencia de resonancia correspondiente. A veces, esas resonancias pueden ser molestas, como sucede en el caso de máquinas vibratorias insuficientemente aisladas, que transmiten esa vibración a la estructura del edificio.)

Aplicamos ahora estas ideas a un modelo para un sistema biológico, que, sin embargo, es de cálculo engorroso, aunque conceptualmente simple.

Ejemplo 5.4.

Algunos animales están dotados de otolitos, órganos auditivos que les permiten captar las ondas sonoras. Estos órganos se pueden considerar como osciladores estimulados exteriormente por ondas acústicas y débilmente amortiguados, pues se hallan inmersos en un líquido. Pueden considerarse, de modo muy simplificado, como un ejemplo de oscilador amortiguado y forzado. Como ejemplo, supongamos que el otolito de un pez tiene una masa $m = 3 \text{ g}$, una constante elástica efectiva $k = 3 \text{ N m}^{-1}$ y un coeficiente de fricción $\gamma = 1,5 \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-1}$. a) ¿Cuánto valen las frecuencias natural y característica de ese otolito? b) El efecto de resonancia en ese otolito, ¿es muy pronunciado?

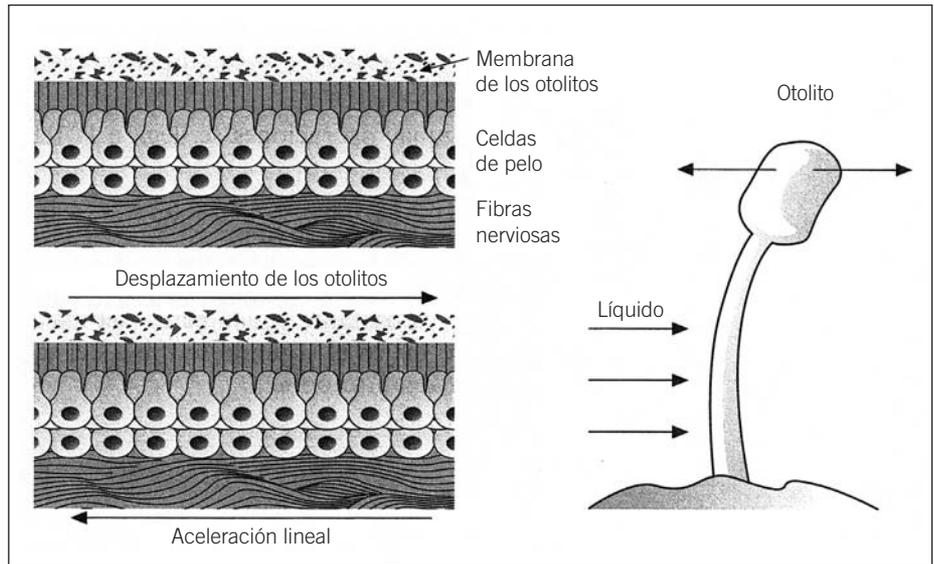


Figura 5.10. Otolito.

a) La primera pregunta se puede responder de modo sencillo, pues hace referencia a las propiedades del otolito sin forzar. La frecuencia natural es simplemente (véase Ejemplo 5.1):

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \text{ N m}^{-1}}{3 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{1000} = 5,03 \text{ Hz}$$

La frecuencia característica que incluye los efectos de amortiguación ha de ser muy similar, pues al ser el coeficiente de fricción muy pequeño, estamos ante un caso de amortiguamiento débil:

$$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \text{ N m}^{-1}}{3 \times 10^{-3} \text{ kg}} - \frac{(1,5 \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-1})^2}{4 \times (3 \times 10^{-3} \text{ kg})^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{1000 - 0,0625} = 5,03 \text{ Hz}$$

En efecto, esas dos frecuencias difieren en muy poco.

b) Para hacernos una idea de cuán agudo es el pico de resonancia en este caso (véase Figura 5.9) partimos de la expresión de la amplitud máxima que alcanza la oscilación de la ecuación [13]

$$A_r = \frac{F_0}{\gamma \omega_a} \approx \frac{F_0}{\gamma \omega_0}$$

Para medir la agudeza de ese máximo basta calcular en qué banda de frecuencias la amplitud decrece hasta la mitad del valor máximo, y cuyos valores extremos vienen dados por

$$\omega'^2 = \omega_0^2 \pm \sqrt{3} \omega_0 \frac{\gamma}{m} = \frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{3k}{m}} \frac{\gamma}{m}$$

Tras hacer algunas operaciones y sustituir valores se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \omega'^2 &= \frac{3 \text{ N m}^{-1}}{3 \times 10^{-3} \text{ kg}} \pm \sqrt{\frac{3 \times 3 \text{ N m}^{-1}}{3 \times 10^{-3} \text{ kg}}} \frac{1,5 \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-1}}{3 \times 10^{-3} \text{ kg}} = \\ &= 1000 \pm \sqrt{3000} \times 0,5 = 1000 \pm 27,386 \text{ (rad s}^{-1}\text{)}^2 \\ \omega_+ &= \sqrt{1000 + 27,386} = 32,05 \text{ rad s}^{-1} \\ \omega_- &= \sqrt{1000 - 27,386} = 31,18 \text{ rad s}^{-1} \end{aligned}$$

de modo que la banda de frecuencias angulares es $\Delta\omega = 32,05 - 31,18 = 0,86 \text{ rad s}^{-1}$.

5.4. Oscilaciones periódicas. Teorema de Fourier. Análisis espectral

Hasta ahora hemos estudiado oscilaciones que podían ser descritas mediante simples funciones sinusoidales (*funciones armónicas*). Ese análisis puede ser extendido a ondas más complicadas. Veamos, en primer lugar, cómo la composición de ondas sinusoidales con distintas frecuencias, múltiplos unas de otras, y con diferente amplitud, dan lugar a una función más complicada pero también periódica.

Ejemplo 5.5.

Representar gráficamente la función

$$f(x) = 2 \cos 2\pi t + \cos 4\pi t$$

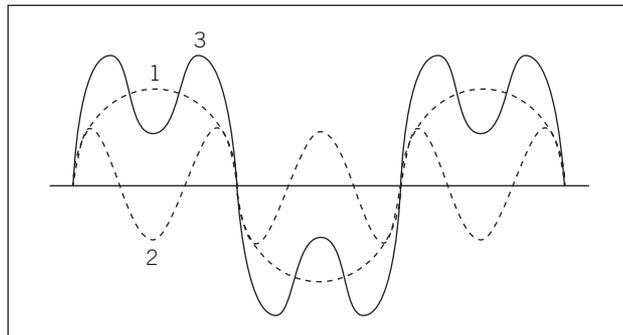


Figura 5.11. Suma de dos funciones sinusoidales.

En la Figura 5.11 vemos la representación gráfica de $f(x)$. Es de notar que la función compuesta tiene como frecuencia de base de su periodicidad la frecuencia más baja de las oscilaciones que la componen.

El resultado es general, ya que si se suman componentes con múltiplos mayores de la frecuencia de base se consigue una función periódica.

Nos preguntamos ahora si la inversa es cierta. Dada una función periódica, ¿puede descomponerse en suma de funciones elementales? La respuesta la proporciona un importante teorema debido a Fourier, que en una de sus formas más elementales puede ser enunciado del modo siguiente:

Teorema de Fourier: Toda función periódica no sinusoidal puede suponerse formada por una senoide con el período de la función —frecuencia fundamental—, a la que hay que sumar otras sinusoides cuyas frecuencias son múltiplos —armónicos— de la fundamental.

A esto hay que añadir que, en algunas ocasiones, la función oscilante puede no tener promedio cero, es decir, no oscila en torno al valor nulo de la amplitud. Por tanto, en el caso general aquella función se puede escribir de la forma

$$g(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad [14]$$

donde A_0 es la amplitud alrededor de la cual oscila la función $g(x)$, A_n las amplitudes de cada uno de los sumandos, llamados modos, ω es la frecuencia fundamental, es decir, la de la función $g(x)$ y ϕ_n son las correspondientes fases. Este análisis puede ser generalizado aún más, de modo que se incluyan funciones de cualquier tipo. No vamos a tratar el caso más general, pero sí que hemos de hacer notar que el teorema de Fourier da lugar a lo que se denomina *análisis armónico* de funciones. En particular, está en la base del análisis digital de señales, en sus múltiples facetas. Esto se consigue, ya que la forma de la función que acabamos de ver queda unívocamente expresada dando el conjunto de amplitudes, para el modo fundamental y los distintos armónicos, y las fases correspondientes. Si por simplicidad suponemos que todas las fases son nulas, ese conjunto de amplitudes y frecuencias puede ser representado mediante lo que se denomina *espectro de frecuencias*, que es, simplemente, una representación de la función en un espacio de amplitudes-frecuencias, tal como se explicita en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.6.

Dibújese en un diagrama de amplitudes y frecuencias la onda periódica siguiente:

$$g(x) = 2 \cos 25t + 4 \cos 75t + 2 \cos 125t + \cos 175t + 3 \cos 200t$$

Como la frecuencia más baja es $f = 25$ Hz, ésta es la fundamental. Están presentes los armónicos 3, 5, 7 y 8.

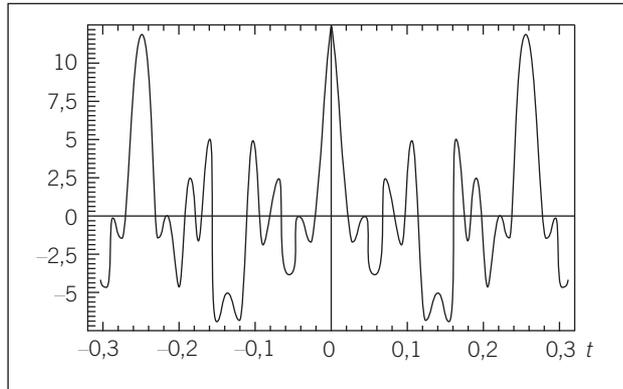


Figura 5.12. Suma de Fourier.

Tabla 5.1. Tabla amplitud-frecuencia para la función del enunciado

A_n	$2\pi f$
$n = 1$ 2	25
$n = 2$ 0	50
$n = 3$ 4	75
$n = 4$ 0	100
$n = 5$ 2	125
$n = 6$ 0	150
$n = 7$ 1	175
$n = 8$ 3	200

Siguiendo los pasos que acabamos de indicar, la representación espectral de esta oscilación toma la forma que vemos en la Figura 5.13.

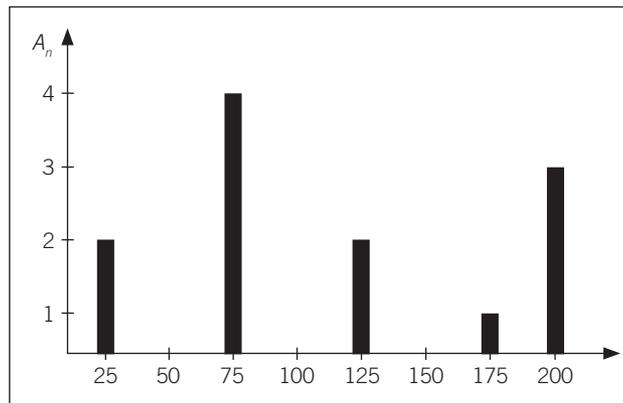


Figura 5.13. Representación espectral.

5.5. Ondas. Propagación de ondas

Hasta aquí se han descrito distintos fenómenos de oscilación, que están relacionados con la acción de cierto tipo de fuerzas. En el capítulo de Mecánica vimos que los efectos elásticos tienen asociada una energía potencial elástica, que permite explicar el comportamiento oscilatorio. Ahora vamos a ver cómo esa energía puede transportarse, sin transporte de masa. Los intercambios energéticos vistos hasta ahora se producían con transporte de masa –caso de la convección, o de un proyectil– o por contacto –caso de la conducción térmica o de un choque–. Sin embargo, las ondas constituyen una forma de transportar energía, sin que haya transporte de masa.

Hemos de aclarar, en primer lugar, la diferencia esencial entre una oscilación y una onda. Una onda es una perturbación –una variación de energía– que se propaga. Como ejemplo se suele citar el golpe de látigo sobre una cuerda que se halla atada a un extremo; éste se propaga a lo largo de la cuerda, pero sin que la cuerda se «propague».

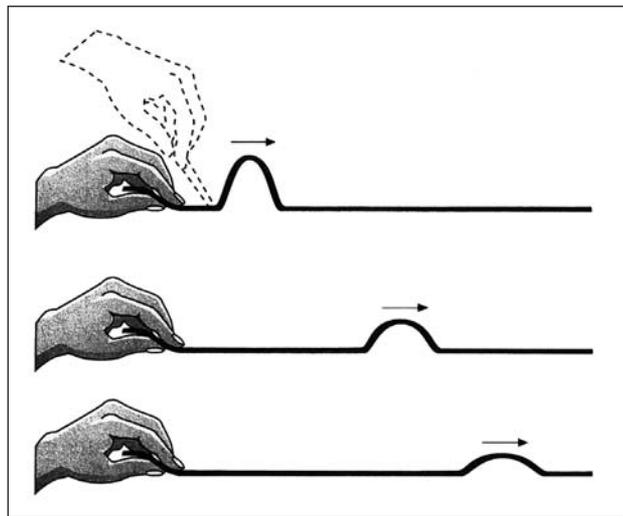


Figura 5.14. Propagación del golpe de látigo.

Otro ejemplo familiar son las olas en la superficie de un estanque, que son debidas a un tipo muy especial de onda.



Figura 5.15. Onda en la superficie del agua.

Pero el teorema de Fourier nos sugiere que para describir movimientos oscilatorios lo más sencillo es considerar una función sinusoidal (función armónica), como a continuación hacemos. En la Figura 5.16 se representa un movimiento sinusoidal de una cuerda en el plano vertical (x, y) en dos instantes distintos.

En ella se puede apreciar que la forma de la oscilación no se mantiene en la misma posición, sino que va variando: se desplaza en la dirección del eje x . Sin embargo, un elemento de la cuerda —señalado como Δl — se desplaza en la vertical oscilando alrededor de su posición de equilibrio en el eje x ($y = 0$). Hasta ahora, como sólo se trataron oscilaciones temporales, únicamente nos interesamos por el *período* (o la *frecuencia*) de una onda, que es el tiempo que tarda una oscilación en repetirse (el número de oscilaciones por segundo, respectivamente). Pero en la Figura 5.16 la onda sinusoidal se repite también en el espacio. Se llama *longitud de onda* λ a la distancia mínima a la cual la onda se repite. Consideremos en esa figura el instante inicial ($t = 0$), para el cual la onda queda descrita por una función de la forma

$$y(x, t = 0) = y_0 \cos kx \quad [15]$$

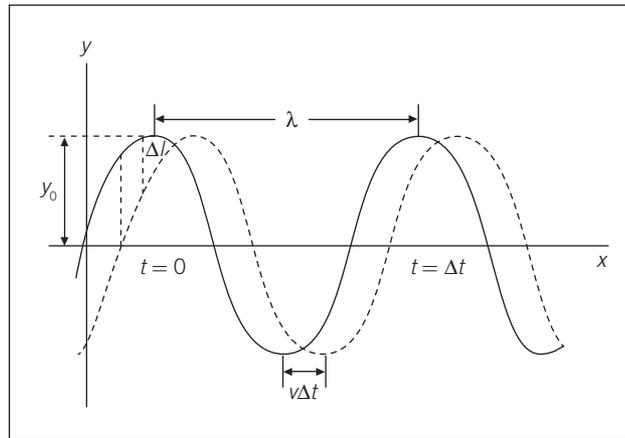


Figura 5.16. Cuerda en dos instantes sucesivos.

donde y_0 es la amplitud de la oscilación y k un parámetro, determinado teniendo en cuenta que, por definición, la onda presenta un primer máximo en el origen y el siguiente en $x = \lambda$. Como la función coseno es periódica, con período 2π , se debe cumplir

$$k\lambda = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [16]$$

El parámetro k , definido mediante esa relación, es lo que se conoce como *número de onda*.

Una pregunta que surge de inmediato es, ¿cuál es la relación de esas magnitudes λ y k — con la frecuencia de la onda? Para establecerla se ha de introducir otra característica de las ondas: la *velocidad de propagación* v , que se define como la velocidad a la cual viaja la perturbación. Supongamos

el caso sencillo de velocidad de propagación constante. En un sistema de coordenadas que se mueva a esa velocidad la onda permanecerá estática en el tiempo (véase Figura 5.17).

De esa figura se infiere que el trozo de cuerda Δl volverá a la posición en la que estaba inicialmente transcurrido un tiempo T , igual al período de la oscilación. En ese tiempo la onda ha realizado una oscilación completa, y por tanto el espacio recorrido es exactamente λ . Por tanto, al ser la velocidad de propagación de la onda constante, tenemos

$$\text{velocidad} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \tag{17}$$

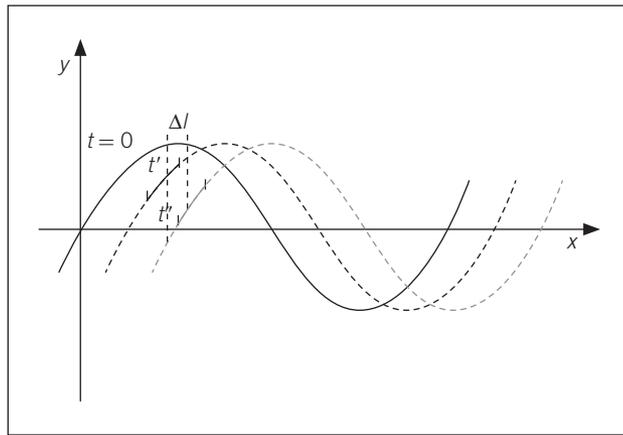


Figura 5.17. Un elemento de la cuerda se mueve arriba y abajo cuando se propaga una onda sinusoidal.

o lo que es lo mismo

$$v = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k} \tag{18}$$

relaciones que son fundamentales para estudiar la propagación de ondas.

Hemos de describir ahora la forma de una onda propagándose en la cuerda. Para ello podemos usar la Figura 5.17. Inicialmente ($t = 0$) la onda quedaba descrita por la ecuación [15] con la relación [17]. En el sistema de referencia móvil, cuyas variables serán designadas con $'$, la onda no se propaga y por tanto mantiene la forma [15]

$$y'(x', t) = y_0 \cos kx' \tag{19}$$

El cambio de sistema de referencia se lleva a cabo sustituyendo $y = y'$, $t = t'$, y $x' = x + vt$, con lo que la ecuación anterior resulta

$$y(x, t) = y_0 \cos k(x - vt) = y_0 \cos (kx - \omega t) \tag{20}$$

tras haber usado la relación [18]. Tal como parece en el dibujo, se trata de una onda sinusoidal viajando hacia la derecha. En caso de que se propagase

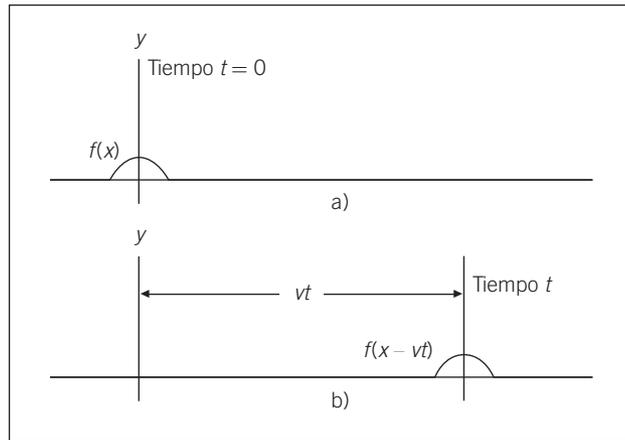


Figura 5.18. La forma de la onda se conserva en un sistema de referencia que viaja con la velocidad v de la onda.

hacia la izquierda, aparecería un signo positivo entre los dos términos del coseno. Así

$$y(x, t) = y_0 \cos(kx \mp \omega t) \quad [21]$$

indica ondas viajeras hacia la derecha (-) y hacia la izquierda (+), respectivamente.

Ejemplo 5.7.

Las ondas sonoras resultan audibles por el oído humano para frecuencias entre los 20 y los 20.000 Hz. Sabiendo que la velocidad de propagación del sonido en el aire es de 340 m s^{-1} , hállese el intervalo de longitud de onda y de números de onda de esos sonidos. Compárese la longitud de onda más pequeña con el diámetro del canal auditivo, que es 0,7 cm.

Las longitudes de onda se calculan fácilmente a partir de la ecuación [17]:

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad ; \quad \lambda_{\text{máx}} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{20 \text{ s}^{-1}} = 17 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{2 \times 10^4 \text{ s}^{-1}} = 1,7 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,7 \text{ cm}$$

El diámetro del canal auditivo es de unos 0,7 cm, del mismo orden que longitud de onda (1,7 cm) audible más pequeña. Los correspondientes números de onda serán

$$k = \frac{\omega}{v} \quad ; \quad k_{\text{máx}} = \frac{2\pi \times 2 \times 10^4 \text{ s}^{-1}}{340 \text{ m s}^{-1}} = 369,4 \text{ m}^{-1}$$

$$k_{\text{mín}} = \frac{2\pi \times 20 \text{ s}^{-1}}{340 \text{ m s}^{-1}} = 0,369 \text{ m}^{-1}$$

5.6. Ondas transversales y longitudinales. Ondas en una cuerda

Hasta ahora hemos visto algunos ejemplos de ondas en los cuales la onda produce en las partículas del medio en el que se propaga una oscilación perpendicular a la dirección de propagación. Así, en el ejemplo de la cuerda se vio que, mientras la onda va de izquierda a derecha, el elemento Δl se mueve arriba y abajo.

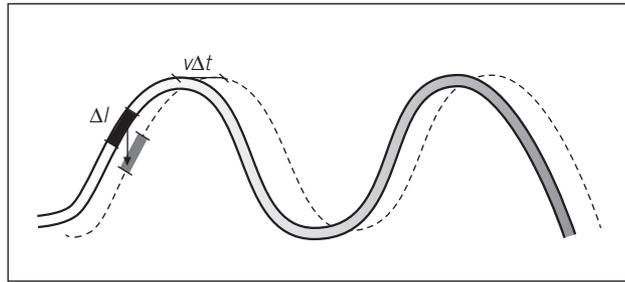


Figura 5.19. Onda transversal en una cuerda.

A las ondas que poseen esta propiedad se les denomina *ondas transversales*. Otros ejemplos de estas ondas son las ondas electromagnéticas, que veremos en el capítulo de Óptica.

Pero la oscilación del medio puede darse en la misma dirección de propagación. El ejemplo más gráfico lo constituyen las ondas sobre un muelle, que se encuentra sujeto por los dos extremos. Al comprimir un trozo cercano a un extremo, esa perturbación se transmite en la dirección del muelle, tal como se indica en la Figura 5.20.

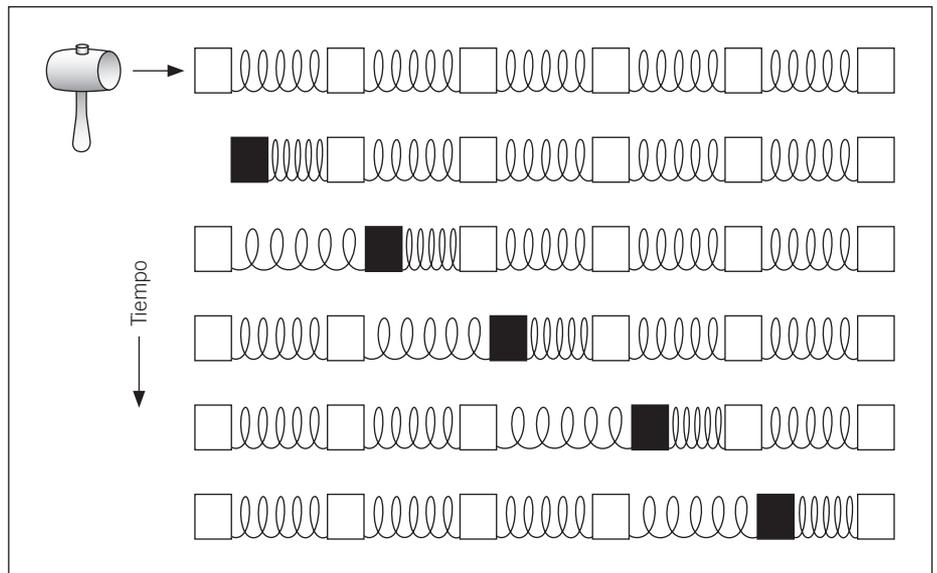


Figura 5.20. El sistema de masas y muelles que se comprime en un extremo da lugar a ondas longitudinales.

En este caso se habla de *ondas longitudinales*. Entre los ejemplos más destacables se hallan las ondas sonoras, que estudiamos con detalle en este mismo capítulo. (El movimiento de las olas en el mar no es ni puramente longitudinal ni puramente transversal.)

Detengámonos ahora a describir las ondas transversales en una cuerda. Dos de las propiedades que se pueden controlar en una cuerda son la tensión F_t a la que se halla sometida y la masa m de la misma, o mejor dicho, la densidad lineal de masa μ , definida como la masa por unidad de longitud. El análisis dimensional nos permite, en este caso, hallar a partir de esas dos características la velocidad con que las ondas se propagan sobre la cuerda. En efecto, como hicimos en el capítulo de Mecánica, se puede suponer

$$v = f(F_t, \mu) \sim F_t^a \mu^b \quad [22]$$

que indica que la velocidad es función de las constantes de la cuerda, cuya dependencia queda especificada invocando la homogeneidad de dimensiones en los miembros de la ecuación anterior

$$[v] = LT^{-1}, \quad [F_t] = MLT^{-2}, \quad [\mu] = ML^{-3} \quad [23]$$

de lo que se deduce que

$$LT^{-1} = (MLT^{-2})^a \times (ML^{-3})^b \quad [24]$$

y como los dos miembros han de tener la misma dependencia en las magnitudes fundamentales resulta que $a = -b$, para que desaparezca la masa en el segundo miembro (no está en el primero); de la homogeneidad temporal se deduce que $-1 = -2a$, es decir, que $a = -1/2$, y de la relación anterior se deduce que $b = -1/2$; la homogeneidad en la longitud exige que $1 = a - 3b$, igualdad que se verifica con los valores deducidos. De este modo, y por argumentos generales y relativamente simples, se llega a la conclusión de que

$v = \alpha \sqrt{F_t/\mu}$, donde α es una constante sin dimensiones, que no puede hallarse más que en un análisis detallado y que resulta valer $\alpha = 1$. Además, este resultado está de acuerdo con los resultados experimentales. Así pues, la velocidad de propagación de las ondas transversales sobre una cuerda viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \quad [25]$$

Esta relación explica por qué en un instrumento como la guitarra al tensar más las cuerdas (que tienen la longitud, y, como veremos, la longitud de onda fijada) se produce un aumento de la frecuencia. Al pulsar cuerdas de mayor a menor grosor (del bordón a la prima, en la guitarra) se aprecia también un aumento en la frecuencia.

Ejemplo 5.8.

Una cuerda de una guitarra tiene una masa de 10 g por cada metro, y está sometida a una tensión de 9 N. Hállese la velocidad de propagación de las ondas transversales en dicha cuerda.

De acuerdo con la ecuación [25], la velocidad es simplemente

$$v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} = \sqrt{\frac{9 \text{ N}}{10 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}}} = 30 \text{ m s}^{-1}$$

La próxima sección se dedica a la determinación de la potencia que transporta una onda –una de sus características esenciales y una de las bases de sus aplicaciones prácticas. El lector que halle dificultades puede omitir los detalles, fijándose únicamente en los razonamientos generales y en el resultado final.

5.7. Potencia transportada por una onda

Las ondas transportan energía. Para evaluarla, nos fijamos nuevamente en un pequeño elemento de la cuerda de masa dm . La onda, al pasar por éste, induce una perturbación que se traduce en energía cinética y en energía elástica. La primera está relacionada con el movimiento de ese elemento en la dirección vertical. Su expresión, por unidad de longitud, tiene la forma

$$\frac{\Delta E_{\text{cin}}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2 \tag{26}$$

a partir de la cual, sustituyendo los incrementos por derivadas y teniendo en cuenta la expresión de la onda armónica viajera, se obtiene

$$\frac{\Delta E_{\text{cin}}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \cos^2(kx - \omega t) \tag{27}$$

La energía elástica resulta más delicada de calcular, puesto que el paso de la onda cambia la forma de la cuerda (véase Figura 5.21). La longitud Δl se puede escribir como

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{28}$$

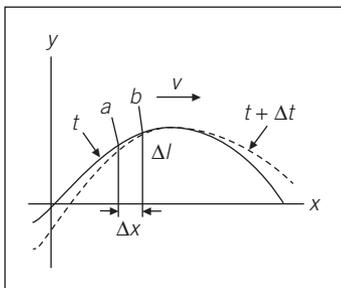


Figura 5.21. Forma de una cuerda en la que se propaga una onda en dos instantes sucesivos.

expresión que se puede aproximar desarrollando en serie de Taylor respecto al cociente $\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$ que se puede considerar muy pequeño

$$\Delta l = \Delta x \sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} \approx \Delta x \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \right] \quad [29]$$

y la variación de longitud δl debida al paso de la perturbación es simplemente $\delta l = \Delta l - \Delta x$, es decir,

$$\delta l = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \Delta x \quad [30]$$

con lo cual la energía potencial elástica por elemento de longitud se podrá expresar como

$$\frac{\Delta U_{\text{elas}}}{\Delta x} = F_t \frac{\delta l}{\Delta x} = F_t \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 = \frac{1}{2} F_t k^2 A^2 \cos^2 (kx - \omega t) \quad [31]$$

Esta última expresión se puede escribir de manera análoga a [27] usando el hecho de que $v^2 = F_t/\mu = \omega^2/k^2$, es decir, $F_t k^2 = \mu \omega^2$. Y así, [31] se puede escribir en la forma

$$\frac{\Delta U_{\text{elas}}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cos^2 (kx - \omega t) \quad [32]$$

que es igual a la que se obtuvo para la energía cinética. La energía total por unidad de longitud que transmite una onda armónica a un elemento de la cuerda es, pues,

$$\frac{\Delta E_{\text{total}}}{\Delta x} = \frac{\Delta E_{\text{cin}}}{\Delta x} + \frac{\Delta U_{\text{elas}}}{\Delta x} = \mu \omega^2 A^2 \cos^2 (kx - \omega t) \quad [33]$$

De esta expresión resulta fácil deducir la potencia P que transporta una onda armónica, sin más que tener en cuenta que

$$P = \frac{\Delta E_t}{\Delta t} = \frac{\Delta E_t}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta t} = v \mu \omega^2 A^2 \cos^2 (kx - \omega t) \quad [34]$$

Al ser ésta una magnitud que varía con el tiempo, conviene promediar sobre uno o varios períodos. Como lo único que es variable es el argumento de la función coseno al cuadrado, basta realizar el promedio de esta última, que es 1/2, de modo que se llega a la siguiente expresión para la potencia promedio que transporta una onda armónica:

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 v A^2} \quad [35]$$

Hemos hallado la *potencia*, característica esencial de una onda armónica propagativa, que depende del cuadrado de la amplitud y de la frecuencia. Ilustramos ahora estos resultados mediante un ejemplo basado en el Ejemplo 5.8.

Ejemplo 5.9.

¿Qué potencia transporta una cuerda de guitarra de 10 g por cada metro y que está sometida a una tensión de 9 N al propagarse en ella una onda de 5 mm de amplitud y 50 Hz de frecuencia?

Como se dedujo en el Ejemplo 5.8, la velocidad de propagación de las ondas sobre esa cuerda es $v = 30 \text{ m s}^{-1}$. Convirtamos la frecuencia en velocidad angular

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314,16 \text{ rad s}^{-1}$$

Tras introducir los demás datos en la expresión de la potencia se llega a

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 v A^2 = \frac{1}{2} 10^{-2} \text{ kg m}^{-1} \times (314,16 \text{ s}^{-1})^2 \times \\ &\times 30 \text{ m s}^{-1} \times (5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 3,7 \times 10^{-2} \text{ W} \end{aligned}$$

5.8. Superposición de ondas. Ondas estacionarias en una cuerda

Hemos deducido algunas propiedades de la propagación de ondas armónicas sobre una cuerda elástica. Nos interesamos ahora por los efectos de la *superposición* de más de una onda propagativa actuando sobre el mismo sistema. La forma de dichas ondas es (ecuación [21])

$$y_1 = A \cos(kx - \omega t + \phi_1) ; y_2 = A \cos(kx - \omega t + \phi_2) \quad [36]$$

En esta última expresión se ha escrito la forma de dos ondas con la misma amplitud, frecuencia y número de onda, pero con fase $\phi_{1,2}$ distintas. Esto nos permitirá hallar con mayor facilidad la superposición de ambas. Para ello recordemos el resultado de la adición de dos funciones armónicas

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] \quad [37]$$

Sustituyendo los ángulos α y β por las expresiones entre paréntesis en las funciones coseno, tras definir $\Delta\phi = (\phi_1 + \phi_2)/2$, $\delta\phi = (\phi_1 - \phi_2)/2$, la suma de las dos funciones queda

$$y = y_1 + y_2 = [2A \cos(\delta\phi)] \cos(kx - \omega t + \Delta\phi) \quad [38]$$

El resultado es una función armónica, en la cual la fase se ve modificada, y cuya amplitud es función de la diferencia de fases entre las ondas. Esto es lo que se conoce con el nombre genérico de *superposición*, y es un fenómeno muy general de las ondas. Se presentan dos casos extremos especialmente relevantes:

- a) Cuando ambas ondas están *en fase* ($\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \delta\phi = 0$), la amplitud resultante es la suma de las dos ondas. Esto se conoce como *superposición constructiva*.

- b) Cuando la fase de ambas ondas difiere en π rad, se dice que están en *contrafase*, y la amplitud resultante es nula, ya que en el primer paréntesis de [30] se tiene $2A \cos(\delta\phi) = 2A \cos(\pi/2) = 0$. En este caso se produce *superposición destructiva*.

Entre estos dos casos la amplitud de la onda resultante toma valores entre esos dos extremos.

Usando las ideas que acabamos de desarrollar se estudia lo que sucede cuando dos ondas, esta vez en fase, pero con direcciones de propagación opuestas (una hacia la derecha y otra hacia la izquierda), se superponen sobre la misma cuerda. Esas dos ondas se representan como

$$y_1 = A \cos(kx - \omega t) \quad ; \quad y_2 = A \cos(kx + \omega t) \quad [39]$$

y aplicando el resultado [38], la superposición queda en este caso simplemente

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos(\omega t) \cos(kx) \quad [40]$$

[hemos usado que $\cos(-\omega) = \cos \omega$].

Se puede comprobar que esta resultante produce un movimiento oscilatorio, ¡pero no se propaga! La razón es que las componentes espacial y temporal están desacopladas, como se comprueba en la última ecuación. Se obtiene un movimiento armónico simple con una amplitud que cambia en cada punto, sin propagarse, como se dibuja en la Figura 5.22.

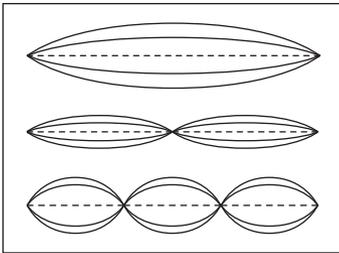


Figura 5.22. Ondas estacionarias sobre una cuerda.

Es lo que se conoce como *onda estacionaria*. En los puntos para los cuales $kx = 0$ (o múltiplos de π) la oscilación es máxima, y aquellos en los que se cumple que $kx = \pi/2$ (o múltiplos impares de $\pi/2$) la cuerda nunca oscilará. Al primer tipo de puntos se les denomina *vientres* y al segundo *nodos*, y una onda estacionaria presenta vientres y nodos fijos en posiciones determinadas, y no transmite energía, pues no hay propagación.

Este tipo de ondas, lejos de ser una curiosidad, se presenta con cierta frecuencia. Nos hemos referido siempre a ondas que se propagan en un medio –una cuerda– infinito: no hemos tenido en cuenta los extremos. Una onda armónica propagativa en una cuerda llega al extremo fijo y se refleja. La onda reflejada está en fase con la incidente y tiene una dirección de propagación opuesta, pudiendo dar lugar a una onda estacionaria. La condición que se debe satisfacer para que aparezca una onda estacionaria depende de los dos extremos de la cuerda, pues éstos pueden ser fijos (la cuerda está atada) o libres (la cuerda puede moverse libremente en la vertical). Analizamos a continuación los dos casos más interesantes que se pueden dar:

- a) Las cuerdas de un instrumento musical presentan nodos en los extremos, pues están fijados. La onda estacionaria más sencilla en este caso tendrá un solo vientre en el centro y esos dos nodos en los extremos, pero también son posibles otras con más vientres y nodos entre los extremos, tal como se indica en la Figura 5.23.

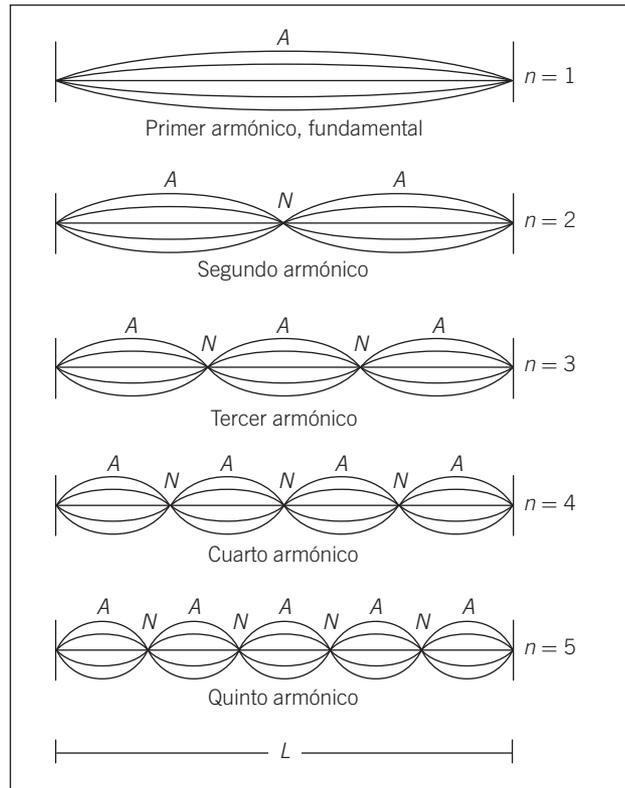


Figura 5.23. Ondas estacionarias en una cuerda con dos extremos fijos.

La longitud de la onda estacionaria más simple está relacionada con la longitud de la cuerda L por la relación $\lambda_1 = 2L$. En el caso siguiente se cumple que $\lambda_2 = L$, $3\lambda_3 = 2L$, etc. Éstas se pueden generalizar mediante la fórmula siguiente:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (\text{dos extremos fijos}) \quad [41]$$

b) Un extremo fijo y otro libre. Sobre el extremo libre se ha de tener un vientre y sobre el fijo un nodo. Las ondas estacionarias más sencillas se presentan en la Figura 5.24, de la que se deduce que en el primer caso $\lambda_1 = 4L$, en el segundo $3\lambda_2 = 4L$, el tercero $5\lambda_3 = 4L$, etc. La fórmula general para este caso es

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n - 1} \quad (\text{extremos libre y fijo}) \quad [42]$$

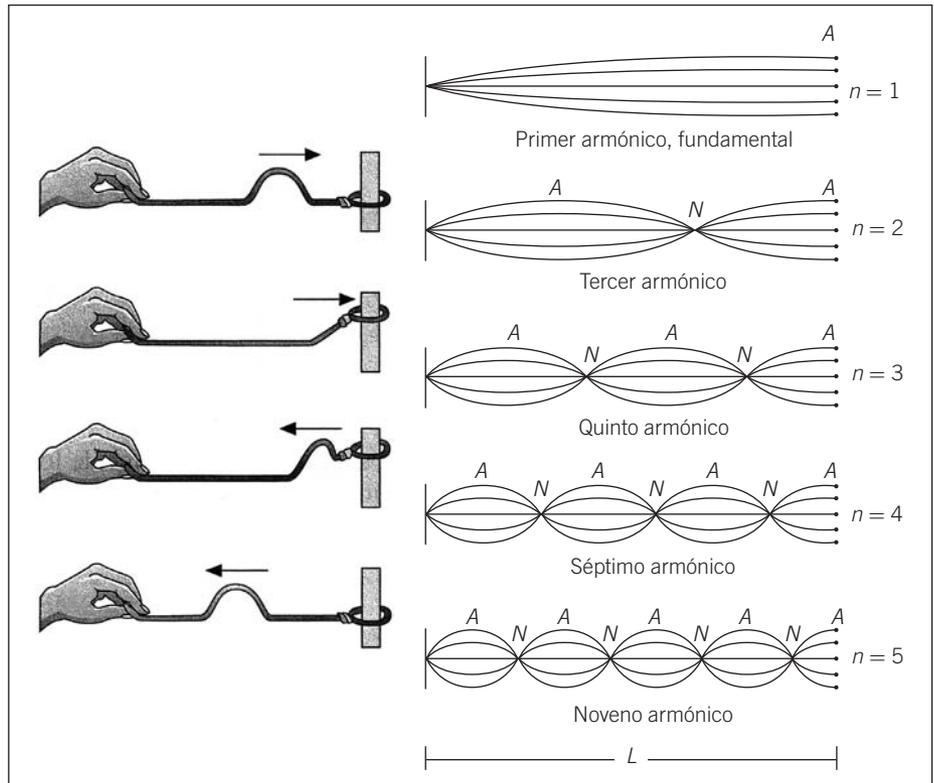


Figura 5.24. Ondas estacionarias en una cuerda con un extremo libre y el otro fijo.

(Se podría pensar un tercer caso con dos extremos libres, pero no tiene interés físico.) Presentamos ahora algunos ejemplos ilustrativos de las relaciones que se han deducido en esta sección.

Ejemplo 5.10.

Tómense los datos de la cuerda de guitarra del Ejemplo 5.8. Supóngase que ésta tiene una longitud de 1 m y que está sujeta por los dos extremos. Hállense: a) las longitudes de las dos ondas estacionarias de orden más bajo; b) las frecuencias correspondientes a dichas ondas (frecuencia fundamental y segundo armónico).

a) Para hallar esas longitudes de onda basta aplicar la relación [41], de modo que

$$\lambda_1 = 2L = 2 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = 1 \text{ m}$$

b) En el Ejemplo 5.8 la velocidad de propagación de las ondas era $v = 30 \text{ m s}^{-1}$. A partir de los valores de las longitudes de onda y de la velocidad de propagación no resulta laborioso hallar las frecuencias correspondientes, que se pueden escribir, en forma general,

$$f_n = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} \quad (\text{extremos fijos})$$

y sustituyendo valores se obtiene

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{30 \text{ m s}^{-1}}{2 \times 1 \text{ m}} = 15 \text{ Hz} \quad (\text{fundamental})$$

$$f_2 = \frac{2v}{2L} = \frac{2 \times 30 \text{ m s}^{-1}}{2 \times 1 \text{ m}} = 30 \text{ Hz} \quad (\text{segundo armónico})$$

Consideramos ahora dos variantes de los ejemplos anteriores en los que se recopilan varios conceptos estudiados anteriormente.

Ejemplo 5.11.

La nota más baja de un piano tiene una frecuencia de 27,5 Hz. a) La cuerda que la produce ¿es más larga o más corta que sus vecinas? b) Si esa cuerda tiene una longitud de 2 m y está sometida a una tensión de 3000 N, ¿cuál es la masa total de esa cuerda? c) Hállese la velocidad de las ondas en esa cuerda.

a) De la fórmula usada en el ejemplo anterior

$$f_n = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} \quad (\text{extremos fijos})$$

Si se consideran cuerdas con la misma densidad lineal de masa y sometidas a igual tensión, la velocidad de las ondas en ellas es la misma. En esas condiciones, puesto que las frecuencias de las ondas estacionarias son inversamente proporcionales a la longitud, a mayor longitud, menor frecuencia. Es decir, en nuestro caso las cuerdas que dan sonidos graves en el piano son más largas que las que dan sonidos agudos.

b) Usando que la velocidad de las ondas en una cuerda es [25]

$$v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \Rightarrow \mu = \frac{F_t}{v^2}$$

acudamos de nuevo a la ecuación del apartado a) para despejar la velocidad de las ondas

$$v = 2Lf_1$$

Si se introduce esta expresión en la anterior, se obtiene

$$\mu = \frac{F_t}{v^2} = \frac{F_t}{4L^2 f_1^2} = \frac{3000 \text{ N}}{4 \times 4 \text{ m}^2 \times (27,5 \text{ s}^{-1})^2} = 0,248 \text{ kg m}^{-1} = 248 \text{ g m}^{-1}$$

y, por tanto, la masa total de la cuerda será

$$M = \mu L = 248 \text{ g m}^{-1} \times 2 \text{ m} = 496 \text{ g}$$

c) Nótese que no hemos tenido necesidad de calcular la velocidad v de las ondas en la cuerda, porque se despeja fácilmente, y su valor es simplemente

$$v = 2L f_1 = 2 \times 2 \text{ m} \times 27,5 \text{ s}^{-1} = 110 \text{ m s}^{-1}$$

Ejemplo 5.12.

Un guitarrista pulsa una cuerda y después la vuelve a pulsar mientras presiona con el dedo sobre un traste situado a una longitud que es 2/3 de la inicial. a) ¿Cuál de las dos notas será más aguda? ¿Cuál es la relación de frecuencias entre las dos notas? b) Si aprieta el resorte de esa cuerda hasta que su tensión es el doble que la inicial, ¿será más aguda o más grave la nota ahora respecto a la que emitía con la tensión anterior? ¿Cuál es la relación entre ambas frecuencias?

a) Para extremos fijos se tiene

$$f_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L} \quad (\text{frecuencia fundamental para extremos fijos})$$

y al reducir la longitud, la frecuencia aumenta, y por tanto la nota que emite la cuerda es más aguda. La relación de frecuencias es simplemente

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{v/2L'}{v/2L} = \frac{L}{L'} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} = 1,5$$

b) Si se aumenta la tensión en la cuerda, aumenta la velocidad de las ondas en ella, puesto que

$$v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}}$$

y como la longitud permanece constante, $\lambda = 2L$ (dos extremos fijos), eso dará lugar a un aumento de la frecuencia

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{(2L)^{-1} \sqrt{F'_t/\mu}}{(2L)^{-1} \sqrt{F_t/\mu}} = \sqrt{\frac{F'_t}{F_t}} = \sqrt{\frac{2F_t}{F_t}} = \sqrt{2} = 1,41$$

en un factor 1,41.

Los artistas producen con la misma nota vibraciones diferentes sobre la cuerda según cómo y dónde pulsan las cuerdas, de modo que excitan diferentes armónicos. (Como veremos en el apartado correspondiente, eso da lugar a sonidos con timbre distinto.) Proponemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.13.

El guitarrista del ejemplo anterior pulsa una cuerda y produce en ella una onda estacionaria que tiene el modo fundamental y varios armónicos, de modo que la forma de la onda es

$$y = 2 \cos (2\pi f_1 t) + 1,5 \cos (4\pi f_1 t) + 2,5 \cos (6\pi f_1 t)$$

con $f_1 = 15 \text{ Hz}$ (Problema 5.10). Representétese la onda y el espectro de Fourier correspondiente.

La representación de la onda viene dada simplemente por la superposición del fundamental y los armónicos 2 y 3 con sus correspondientes amplitudes, y el espectro de Fourier consiste en expresar la amplitud de cada armónico en el valor correspondiente de la frecuencia, como se muestra en la Figura 5.26.

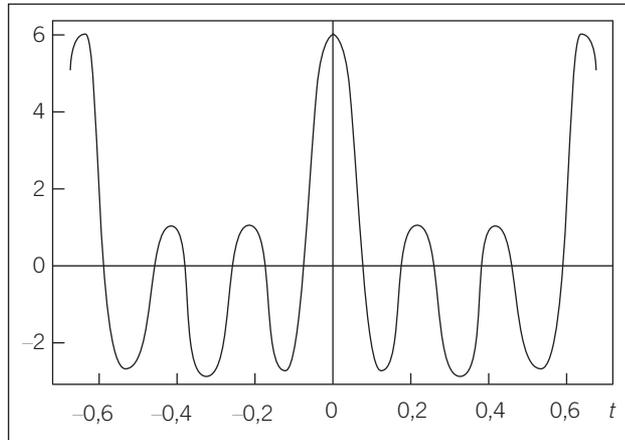


Figura 5.25. Representación de la onda.

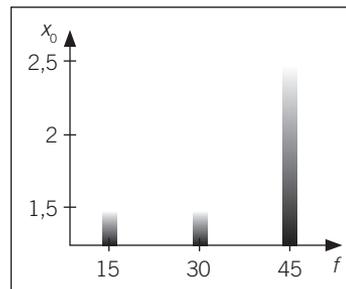


Figura 5.26. Espectro de la onda.

5.9. Ondas sonoras. Velocidad del sonido

Pasamos ahora a estudiar un tipo de ondas mecánicas que nos resulta familiar: el sonido. Se trata de ondas de presión que se propagan en un *medio elástico*, como el aire, el agua, los metales, etc. Conocemos los sonidos que producen los instrumentos musicales, distinguimos el tañido de una campana y el trueno. Todos ellos llegan hasta nosotros en forma de ondas sonoras. Hemos de comenzar por cómo se forman esos sonidos, para pasar después a las interesantes características de nuestro oído, que nos permite captarlos.

El sonido es una onda longitudinal que se produce a consecuencia de pequeñas *perturbaciones de presión* (lo que es equivalente a perturbaciones de densidad). En los fluidos —líquidos o gases—, las únicas perturbaciones que se pueden propagar son las longitudinales, pues no pueden soportar los esfuerzos transversales (cortantes), tal como se comentó en el capítulo dedicado a los fluidos. (En los sólidos, el sonido presenta propiedades más complejas.) En la Figura 5.27 se representa el movimiento de las moléculas de un gas al paso de una onda sonora.

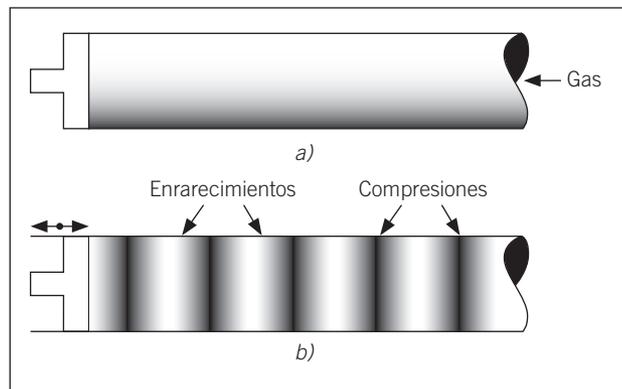


Figura 5.27. a) Gas en reposo; b) onda de sonido propagándose.

Las perturbaciones de densidad —enrarecimientos y compresiones alternativos— hacen que las distintas porciones de fluido se muevan adelante y atrás, alrededor de su posición de equilibrio al paso de la onda.

Para estudiar la velocidad de propagación de una onda sonora nos serviremos de un razonamiento clásico en los libros elementales, que consiste en aplicar las leyes de Newton al sistema formado por un pistón que presiona sobre un gas encerrado en un tubo, tal como se presenta en la Figura 5.28.

Supongamos que la compresión producida por el pistón viaja con velocidad constante, que es la magnitud que hemos de determinar. El pistón, durante el tiempo Δt que dura su compresión sobre el gas, se desplaza con una velocidad u , para producir sobre éste un aumento de presión Δp . En esa situación el pistón realiza un impulso sobre el gas, que da lugar a una variación del ímpetu de éste, que se calcula fácilmente recordando las expresiones correspondientes estudiadas en el capítulo de Mecánica

$$\text{Impulso} = F\Delta t = A\Delta p\Delta t \quad [43]$$

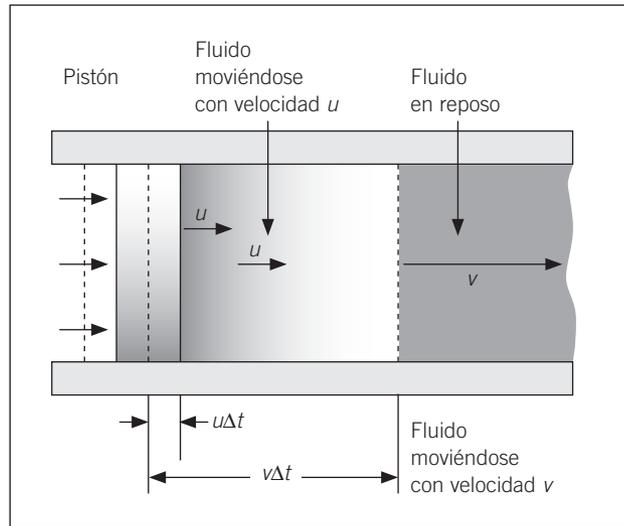


Figura 5.28. Cálculo de la velocidad del sonido.

donde A es el área del pistón. Aplicando el balance del ímpetu, es decir, que la variación del ímpetu se debe al impulso aplicado a la masa correspondiente ΔM ,

$$\text{Variación del ímpetu} = M_{\text{inc}} u = \rho V_{\text{inc}} u = (\rho A v \Delta t) u \quad [44]$$

donde ρ es la densidad del gas. Por tanto, deducimos la igualdad

$$A \Delta p \Delta t = \rho A v u \Delta t \Rightarrow \Delta p = \rho v u \quad [45]$$

La variación de volumen sufrida por el fluido, inicialmente situado a una distancia $v\Delta t$, es $\Delta V = V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}} = A (v - u) \Delta t - v\Delta t = -A u \Delta t$. Resulta útil aquí introducir el parámetro termodinámico que relaciona las variaciones de la presión con las de volumen, el *módulo de compresibilidad*, definido como

$$B = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad [46]$$

(Nótese que el signo negativo se introduce para que B sea positivo, pues un aumento de presión conlleva una compresión, es decir, una disminución del volumen. También hay que resaltar que el módulo de compresibilidad es la inversa del coeficiente de compresibilidad κ usado en Termodinámica.) Teniendo en cuenta esa definición y las fórmulas anteriores podemos escribir

$$V \Delta p = (-\Delta V) B \Rightarrow A v \Delta t \rho v u = A u B \Delta t \Rightarrow v^2 = \frac{B}{\rho} \quad [47]$$

de modo que la expresión general para la *velocidad del sonido* queda

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad [48]$$

Siguiendo un razonamiento algo más complicado se puede deducir la velocidad del sonido en un sólido. Sin embargo, la deducimos en el siguiente ejercicio, usando el análisis dimensional.

Ejemplo 5.14.

El sonido está relacionado con las propiedades elásticas del medio en que se propaga. En una barra de un sólido éstas se caracterizan con dos constantes, la densidad ρ y el módulo de Young E . Usando el análisis dimensional hállese la expresión, análoga a la [48], que relaciona esos parámetros con la velocidad de propagación del sonido en un sólido.

Como en todos los ejercicios de análisis dimensional establecemos una dependencia entre las constantes del sistema y la que se trata de determinar

$$v = f(\rho, E) \sim \rho^a E^b$$

Esas magnitudes tienen las siguientes dimensiones:

$$[v] = LT^{-1}, \quad [\rho] = [M/V] = ML^{-3}, \quad [E] = [F/A] = ML^{-1}T^{-2}$$

Para que las dos últimas ecuaciones sean compatibles se debe cumplir que

$$LT^{-1} = (ML^{-3})^a \times (ML^{-1}T^{-2})^b$$

condición que se satisface si $b = 1/2$ (para tener la relación temporal adecuada), y en consecuencia $a = -1/2$, con lo que se deduce que

$$v \sim \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Como hemos visto en otros ejemplos, el análisis dimensional no permite determinar la constante de proporcionalidad sin dimensiones, que en este caso resulta ser la unidad, de modo que para los sólidos se tiene

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad [49]$$

Para analizar cuánto vale la velocidad de propagación del sonido según el medio en que se propague resulta conveniente tomar en consideración los ejemplos siguientes:

Ejemplo 5.15.

¿Cuál es la velocidad de propagación de una onda sonora en una barra de aluminio, cuyo módulo de Young vale $E = 7 \times 10^{10}$ Pa y su densidad $\rho = 2,7 \times 10^3$ kg m⁻³?

Basta aplicar la última de las fórmulas que hemos visto para obtener el resultado deseado

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{7 \times 10^{10} \text{ Pa}}{2,7 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}}} = \sqrt{\frac{70}{2,7}} \times 10^3 = 5,1 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

Lo más interesante de este ejemplo es retener que la velocidad del sonido en los sólidos es del orden de miles de metros por segundo.

El siguiente ejemplo nos servirá para comparar la diferencia de propagación en dos medios.

Ejemplo 5.16.

Una persona coloca uno de sus oídos sobre la vía de un tren y el otro lo tiene al aire. A 500 m hay otra persona que golpea con un martillo la vía. Hállase la diferencia de tiempo entre el sonido que llega a través de la vía y a través del aire a la persona que escucha (velocidad del sonido en el acero, $v_{\text{acero}} = 5100 \text{ m s}^{-1}$; velocidad del sonido en aire, $v_{\text{aire}} = 344 \text{ m s}^{-1}$).

Este ejemplo complementa el anterior, pues permite comparar la diferencia de transmisión según el medio. Los tiempos que tardan las ondas sonoras en viajar los 500 m a través de los dos medios es muy fácil de calcular:

$$t_{\text{acero}} = \frac{d}{v_{\text{acero}}} = \frac{500 \text{ m}}{5100 \text{ m s}^{-1}} = 0,1 \text{ s} \quad t_{\text{aire}} = \frac{d}{v_{\text{aire}}} = \frac{500 \text{ m}}{344 \text{ m s}^{-1}} = 1,45 \text{ s}$$

De ahí es muy fácil de deducir que la diferencia de tiempo entre que la persona percibe el sonido a través de la vía y por el aire es

$$\Delta t = t_{\text{aire}} - t_{\text{acero}} = 1,45 - 0,1 = 1,44 \text{ s}$$

Antes de pasar a estudiar con más detalle los gases y, en particular, el caso del aire, veamos cuál es la velocidad típica en los líquidos. En el capítulo dedicado a los fluidos hicimos hincapié en que los líquidos son prácticamente incompresibles. Si bien esto se puede suponer en la mayor parte de aplicaciones, deja de ser válido al tratar con el sonido. En efecto, el módulo de compresibilidad, es muy grande —tan sólo un orden de magnitud menor que el módulo de Young en los sólidos—, lo cual induce una velocidad grande de transmisión del sonido. Ilustramos este hecho en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5.17.

El módulo de compresibilidad del agua es $2,18 \times 10^9 \text{ Pa}$ y su densidad $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Calcúlese la velocidad de propagación del sonido en ese medio.

Acudiendo a la ecuación [48] se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,18 \times 10^9 \text{ Pa}}{10^3 \text{ kg m}^{-3}}} = \sqrt{2,18} \times 10^3 = 1,48 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

por lo que la velocidad típica de propagación del sonido en el agua es del orden de 1500 m s^{-1} , dato importante a retener para ulteriores aplicaciones.

El caso de los gases debe tratarse con algo más de cuidado por el hecho de que el sonido, consecuencia de una perturbación de presión, induce cambios de temperatura. Así, una región dada de un gas experimenta al paso de la onda un leve aumento de temperatura con la débil compresión y una disminución al enrarecerse, razón por la cual el sonido no puede ser considerado como un fenómeno isoterma. Como la conductividad de los gases es muy baja, el gas no tiene tiempo de equilibrar esos pequeños cambios de temperatura, de modo que el sonido se puede considerar como un *proceso adiabático*. Teniendo en cuenta este hecho y la expresión encontrada para los procesos adiabáticos cuasiestáticos en un gas ideal en Termodinámica

$$pV^\gamma = \text{cte} \Rightarrow V^\gamma dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0 \quad [50]$$

(recordemos que γ es la constante adiabática, que depende del número de átomos que componen la molécula del gas correspondiente) que puede ser usada en la definición del módulo de compresibilidad, con lo que se obtiene

$$B_{ad} = -V \frac{dp}{dV} = V \frac{\gamma p V^{\gamma-1}}{V^\gamma} = \gamma p \quad [51]$$

De modo que la velocidad de propagación del sonido en un gas ideal se escribe

$$v = \sqrt{\frac{B_{ad}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_m}} \quad [52]$$

donde R es la constante de los gases y M_m la masa molecular del gas correspondiente. Para deducir esta fórmula hemos usado que $p/\rho = pV/M = nRT$ y que $M = nM_m$, de las que se obtiene $p/\rho = RT/M_m$.

Al ser mucho más compresibles, los gases presentan velocidades del sonido más bajas que los medios que lo son menos, mostrando, además, una fuerte dependencia de la temperatura, para un gas dado, y diferencias notables entre distintos gases. Calculemos ahora esa velocidad en algunos gases representativos.

Ejemplo 5.18.

Calcúlese la velocidad de propagación del sonido a 20°C . a) en el aire; b) en helio y en xenón, respectivamente; c) compárense estos valores y analícese el comportamiento de estas velocidades con la temperatura.

a) Antes de iniciar los cálculos, determinemos cuál es la masa molecular media M_m del aire, compuesto principalmente de dos gases diatómicos ($\gamma = 7/5 = 1,40$): 21 por 100 de oxígeno ($M_m = 32 \text{ g mol}^{-1}$) y 79 por 100 de nitrógeno ($M_m = 28 \text{ g mol}^{-1}$)

$$M_m(\text{aire}) = (0,21 \times 32 + 0,79 \times 28) \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} = 28,8 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$$

de modo que la velocidad a 20°C resulta

$$v_{\text{aire}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_m}} = \sqrt{\frac{(1,40) \times 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 293 \text{ K}}{28,8 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}} = 344 \text{ m s}^{-1}$$

Esta es la razón por la cual oímos el relámpago defasado respecto al rayo en una tormenta. Con este valor de la velocidad del sonido y determinando el tiempo entre el fogonazo del relámpago y la llegada del trueno es fácil calcular la distancia a la que ha caído el rayo.

b) En los otros dos casos se trata de gases nobles monoatómicos ($\gamma = 5/3$), cuyas masas atómicas son $M_{\text{He}} = 4 \text{ g mol}^{-1}$, $M_{\text{Xe}} = 131,3 \text{ g mol}^{-1}$.

$$v_{\text{He}} = \sqrt{\frac{(5/3) \times 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 293 \text{ K}}{4 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}} = 1007 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_{\text{Xe}} = \sqrt{\frac{(1,40) \times 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 293 \text{ K}}{131,3 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}} = 161,16 \text{ m s}^{-1}$$

c) Como vemos, las velocidades difieren en un factor de casi tres entre el helio y el aire, y un factor seis entre el helio y el xenón. Esto se manifestaría, por ejemplo, haciendo aspirar a una persona una pequeña cantidad de esos gases: quedaría llena de estupor, pues durante unos segundos notaría que su voz se hace más aguda (con helio) o mucho más grave (con xenón) que en condiciones normales (con aire).

Para ver la variación con la temperatura, fijémosnos únicamente en el caso del aire en dos condiciones extremas: un día a 0°C y otro tórrido a 40°C . La razón entre los valores correspondientes vale

$$\frac{v_{\text{aire}}(40^\circ)}{v_{\text{aire}}(0^\circ)} = \sqrt{\frac{273 + 40}{273}} = 1,07$$

es decir, entre esas dos temperaturas extremas hay sólo un cambio de un 7 por 100 en la velocidad de propagación del sonido.

5.10. Ondas sonoras estacionarias

En el caso de ondas sonoras se da un fenómeno semejante al que estudiamos en una cuerda sujeta por uno de los extremos. En un tubo estrecho, una onda incidente se refleja en un extremo cerrado y la superposición de

la onda original con la reflejada da lugar a una *onda estacionaria*. Este fenómeno está en la base de los sonidos de los instrumentos musicales que se conocen como de «madera» —clarinete, fagote, oboe— y el metal —trompeta, trompa, tuba—, así como en los tubos de un órgano. Está relacionado también con los sonidos que emitimos, gracias a las cuerdas vocales y a la cavidad bucal, que amplifica las ondas producidas por aquéllas.

Para determinar las longitudes de onda de las ondas estacionarias, consideremos el caso más simple: el que se produce al soplar en tubos estrechos, como el dibujado en la Figura 5.29.

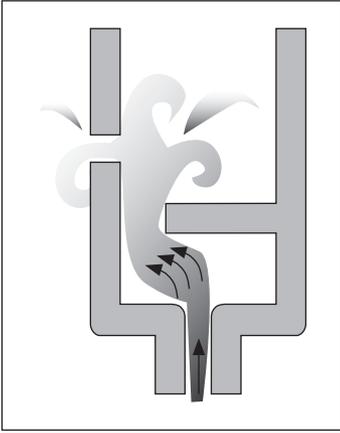


Figura 5.29. Esquema del flujo del aire en un tubo de órgano.

Resulta claro que en *extremos cerrados* no se dan las variaciones típicas de una onda sonora —compresiones y enrarecimiento del aire—, pues las «partículas» de aire se hallan fijas sobre la superficie de aquel extremo, de modo que en él tiene que haber un «nodo» de la onda estacionaria. Por tanto, el extremo cerrado actúa en las ondas longitudinales como el fijo en las ondas en una cuerda. El otro caso es el de un *extremo abierto*, en el cual las partículas de aire pueden oscilar sin impedimento y se comportan como un extremo libre para las ondas sonoras, como lo hacía el extremo libre de una cuerda. En él se encontrará un «vientre» de la onda estacionaria. Pero insistimos que estos dos tipos de onda tienen naturaleza bien distinta, pues en la cuerda se propagan ondas transversales, mientras que las ondas sonoras son longitudinales. A pesar de eso, y como las transversales son más fáciles de visualizar, usaremos esa analogía, dibujando ondas de este tipo en el interior de los tubos.

Hemos de seguir pasos parecidos a los seguidos para hallar las ondas estacionarias en las cuerdas, salvo que aquí comenzamos por el caso de un tubo con los dos extremos abiertos. (El caso de la cuerda libre por los dos extremos no resultaba demasiado natural, mientras que para el sonido lo que no tiene interés es un tubo cerrado por los dos extremos, pues ahí el sonido no entra.) Las ondas estacionarias más simples que poseen dos vientres en los extremos son las que aparecen señaladas en los dibujos de la Figura 5.30. Del esquema del primer tubo se deduce que la longitud de onda de orden más bajo cumple que $\lambda_1 = 2L$, la siguiente $\lambda_2 = 2L/2$, $\lambda_3 = 2L/3$, siendo L la longitud del tubo de lo que se infiere la relación general

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (\text{dos extremos abiertos}) \quad [53]$$

Consideremos ahora el caso de un extremo abierto y el otro cerrado, es decir, con un «vientre» en un extremo y un «nodo» en el otro. Las ondas estacionarias de orden más bajo aparecen representadas en la Figura 5.31.

Como ya vimos al tratar las ondas estacionarias en una cuerda, la relación entre la longitud del tubo L y la de las ondas de distinto orden son, en este caso, $\lambda_1 = 4L$, $\lambda_2 = 4L/3$, $\lambda_3 = 4L/5$, secuencia que queda recogida en la fórmula general

$$\lambda_n = \frac{4L}{2N - 1} \quad (\text{un extremo abierto y el otro cerrado}) \quad [54]$$

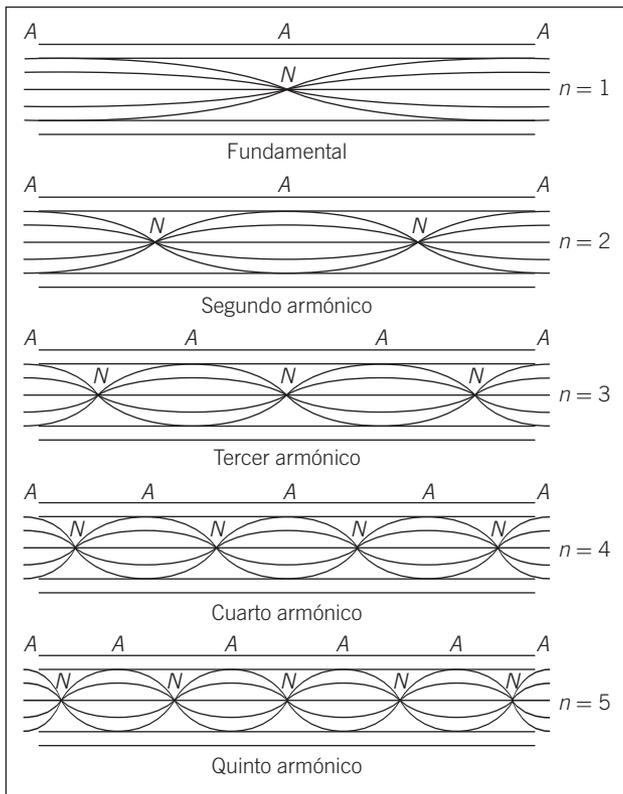


Figura 5.30. Ondas estacionarias en tubos abiertos.

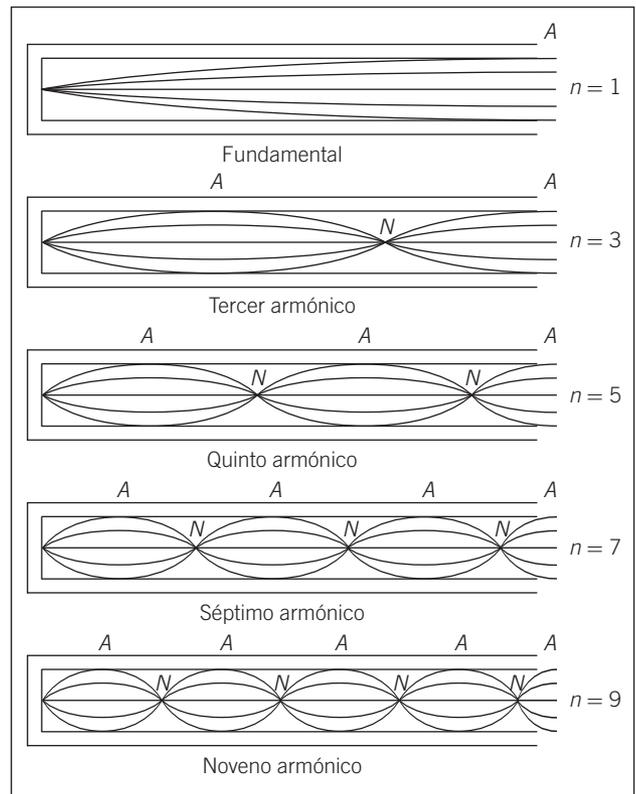


Figura 5.31. Ondas estacionarias en un tubo con un extremo abierto y el otro cerrado.

En el siguiente ejemplo se plantea cómo se determinan las frecuencias fundamentales y los respectivos armónicos de las ondas estacionarias que se pueden producir en los casos que acabamos de tratar.

Ejemplo 5.19.

Determinése la forma general de la frecuencia fundamental y de los armónicos de las ondas estacionarias en tubos: a) con los dos extremos abiertos, b) con un extremo abierto y el otro cerrado.

Determinada la velocidad del sonido en aire, v ($v = 344 \text{ m s}^{-1}$), aplicando la relación general entre la frecuencia y la longitud de onda

$$\lambda f = v$$

y las fórmulas halladas anteriormente se obtiene fácilmente

$$a) f_n = \frac{nv}{2L} \qquad b) f_n = \frac{(2n - 1)v}{4L}$$

Ejemplo 5.20.

En los instrumentos musicales de «viento» se denomina «soprano» a aquel que tiene la frecuencia fundamental más alta, y «bajo» al que la tiene más baja. a) ¿Cuál de los dos es más largo? Por ejemplo, el clarinete soprano tiene una frecuencia fundamental $f_1 = 146$ Hz, mientras que la del clarinete bajo es $f'_1 = 78$ Hz. b) Encuéntrase la longitud aproximada de estos instrumentos.

Normalmente, los instrumentos de viento se consideran con un extremo abierto, mientras que la boquilla se considera cerrado, aunque no lo sea estrictamente –¡por él sopla el músico!

a) En cualquier caso, a partir de las fórmulas halladas en el ejemplo precedente, tenemos

$$\frac{f_1}{f'_1} = \frac{v/4L}{v/4L'} = \frac{L'}{L}$$

relación de la que se deduce que a una mayor frecuencia fundamental corresponde una menor longitud.

b) Para hallar la longitud aproximada usamos la relación a) del ejemplo anterior

$$L = \frac{v}{4f_1} = \frac{344 \text{ m s}^{-1}}{4 \times 146 \text{ s}^{-1}} = 0,6 \text{ m} , \quad L' = \frac{v}{4f'_1} = \frac{344 \text{ m s}^{-1}}{4 \times 78 \text{ s}^{-1}} = 1,10 \text{ m}$$

Se trata sólo de longitudes aproximadas, pues varía también el grosor de las paredes y el diámetro interior es distinto en esos dos instrumentos. (El clarinete soprano, por ejemplo, tiene unos 67 cm.)

Dentro de una misma especie, por ejemplo en los perros, el ladrido cambia de frecuencia según el tamaño. Los perros más grandes, como el mastín o el San Bernardo, tienen una cavidad bucal mucho mayor que la del caniche o el chihuahua, y por eso el ladrido de aquéllos tiene un tono más grave que el de éstos.

Veamos ahora un ejemplo que relaciona las ondas estacionarias con los armónicos de un instrumento.

Ejemplo 5.21.

Los tubos de un órgano producen notas musicales por resonancia de la columna de aire en su interior y tienen un extremo abierto, por donde les entra el aire. a) Para un tubo con un extremo cerrado el tercer armónico corresponde a $f = 660$ Hz. Hállese la longitud aproximada del tubo. b) Otro tubo con los dos extremos abiertos da la misma nota cuando resuena su segundo armónico. ¿Cuál es la longitud de este tubo?

a) El dato del enunciado significa que $f_3 = 660$ Hz, lo cual, si se tiene en cuenta que se trata de una onda estacionaria en un tubo con un extremo abierto y otro cerrado, permite deducir

$$f_3 = \frac{(2 \times 3 + 1)v}{4L} \Rightarrow L = \frac{7 \times v}{4 \times f_3} = \frac{7 \times 344 \text{ m s}^{-1}}{4 \times 660 \text{ s}^{-1}} = 0,91 \text{ m}$$

b) El enunciado significa que en este tubo $f_2' = 660$ Hz, y al tratarse de un tubo abierto por los dos extremos se deduce

$$f_2 = \frac{2v}{2L'} \Rightarrow L' = \frac{v}{f_2} = \frac{344 \text{ m s}^{-1}}{660 \text{ s}^{-1}} = 0,52 \text{ m}$$

5.11. Intensidad de las ondas sonoras. Escala decibélica. Tono y timbre

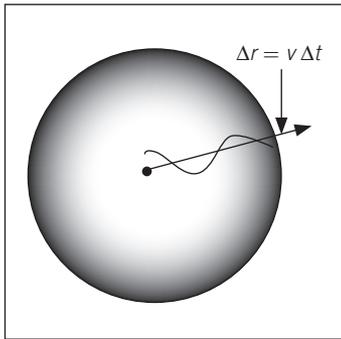


Figura 5.32. Sonido propagándose en las tres dimensiones.

Las ondas sobre una cuerda son bidimensionales y se propagan en una dirección del espacio; las sonoras, sin embargo, son tridimensionales. Un foco sonoro emite ondas esféricas que se propagan radialmente en el espacio, tal como se representa en la Figura 5.32. Esto tiene una consecuencia inmediata sobre la intensidad. La intensidad I es la potencia P transportada, por unidad de superficie S . Si el medio no atenúa la energía de la onda, la intensidad de ésta debe variar con la distancia r al foco sonoro, pues por definición

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} \tag{55}$$

de modo que la intensidad decrece con la inversa del cuadrado de la distancia.

Fijémonos que, muy lejos de la fuente, las ondas esféricas pueden considerarse como ondas planas armónicas, que se describen mediante la fórmula

$$s(x, t) = s_0 \text{ sen}(kx - \omega t) \tag{56}$$

donde s designa el desplazamiento de las moléculas alrededor de su posición de equilibrio. (Volvamos a representarlas en un tubo, pues resulta más claro para fijar los conceptos.)

Pero hemos insistido en que el sonido es esencialmente una onda de presión que se transmite en un medio elástico. Hemos de establecer, por tanto, una relación entre ese desplazamiento y la fluctuación de presiones que conlleva, para lo cual partimos de la expresión de la velocidad de propagación del sonido [48] que nos permite escribir

$$p = -B \frac{\Delta V}{V} = -\rho v^2 \frac{\Delta V}{V} \tag{57}$$

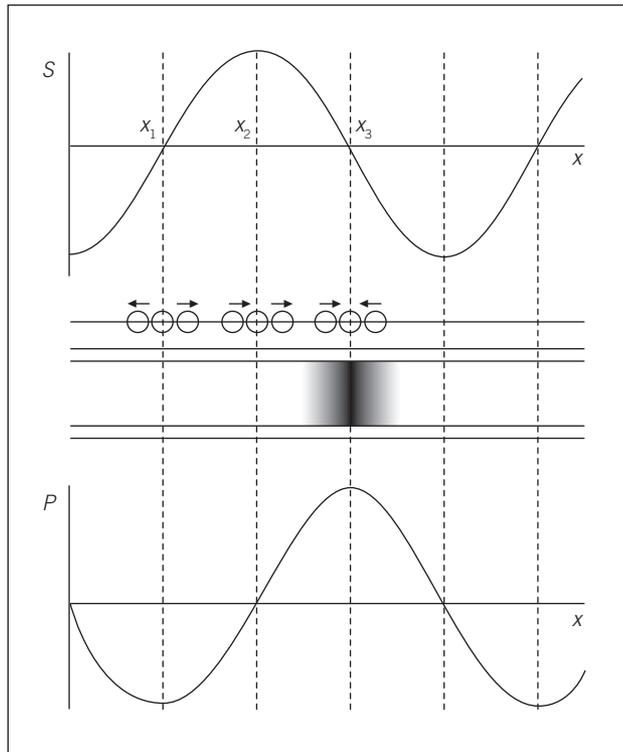


Figura 5.33. Esquema de las variaciones de presión en un gas, provocadas por una onda sonora.

Ello conduce, tras varios cálculos, a

$$p = -\rho v^2 \frac{\Delta s}{\Delta x} = -\rho v^2 k s_0 \cos(kx - \omega t) \quad [58]$$

Si se identifica la amplitud de las variaciones de presión $p_0 = \rho v^2 k s_0$, y se sustituye la relación $k\omega = v$, la amplitud se expresa también como $p_0 = \rho \omega v s_0$ de modo que la presión también es una función armónica. Recordemos ahora la expresión que dedujimos para la potencia media para la onda en una cuerda (ecuación [35])

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 v A^2 \quad [59]$$

Análogamente, para una onda sonora armónica basta sustituir en esa expresión la densidad por unidad de longitud μ por el producto de la densidad por la superficie ρS y la amplitud A por s_0 , que resultará

$$\bar{P} = \frac{1}{2} S \rho \omega^2 v s_0^2 = \frac{1}{2} \frac{S p_0^2}{\rho v} \quad [60]$$

de modo que la intensidad I para una onda armónica sonora resulta ser

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho v} \quad [61]$$

La gama de intensidades sonoras audibles por los seres humanos va de 10^{-12} W m^{-2} a 1 W m^{-2} . El mínimo de intensidad audible se da para frecuencias de unos 3000 Hz, y para intensidades superiores a 1 W m^{-2} el oído empieza a tener una sensación dolorosa. Vemos en el ejemplo siguiente que las correspondientes amplitudes de variación de la presión son realmente muy pequeñas, razón por la cual el sonido no lo notamos a través del tacto.

Ejemplo 5.22.

La intensidad sonora audible para una persona está comprendida entre los $10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ y 1 W m^{-2} . Si la densidad del aire es $\rho_{\text{aire}} = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$ y la velocidad de propagación del sonido es $v = 344 \text{ m s}^{-1}$, calcúlese la gama de variación de las amplitudes de oscilación de presión que producen las ondas sonoras audibles.

De la última fórmula deducimos que las amplitudes de variación de presión se relacionan con la intensidad a través de la relación

$$p_0 = \sqrt{2\rho v I}$$

y sustituyendo los valores máximo y mínimo de la intensidad obtenemos que las variaciones máxima y mínima de la presión que producen las ondas sonoras audibles son

$$\begin{aligned} (p_0)_{\min} &= \sqrt{2\rho v I_{\min}} = \\ &= \sqrt{2 \times 1,3 \text{ kg m}^{-3} \times 344 \text{ m s}^{-1} \times 10^{-12} \text{ W m}^{-2}} = \\ &= 3 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-2} \approx 3 \times 10^{-10} \text{ atm} \\ (p_0)_{\max} &= \sqrt{2\rho v I_{\max}} = \sqrt{2 \times 1,3 \text{ kg m}^{-3} \times 344 \text{ m s}^{-1} \times 1 \text{ W m}^{-2}} = \\ &= 3 \text{ N m}^{-2} \approx 3 \times 10^{-4} \text{ atm} \end{aligned}$$

Así pues, la presión que daña nuestros oídos es tan pequeña –¡tan sólo una variación de 0,03 por 100 sobre la presión atmosférica normal!– que no es percibida por el tacto.

Como el oído cubre una banda de frecuencias muy amplia, la intensidad se suele dar en escala logarítmica: la *escala decibelica*. (Este nombre es en honor de R. G. Bell, inventor del teléfono.) Como referencia se toma la mí-

nima intensidad audible, $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$, y la intensidad queda dada en esa escala como

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad [62]$$

(el logaritmo es en base 10) de modo que la escala decibélica está comprendida entre los valores 0 y 120 dB.

El oído humano no es igualmente sensible ni tiene el mismo umbral de intensidad para todas las frecuencias. En las Tablas 5.1 y 5.2 y en la Figura 5.34 se recogen las características de la gama de sonidos audibles, en la escala decibélica.

Tabla 5.1. Niveles de ruido de diferentes fuentes sonoras y situaciones

Fuente o descripción del ruido	Nivel de ruido (dB)
Umbral de dolor	130
Martillazos sobre una plancha metálica (a 60 cm)	114
Remachadora (a 10 m)	97
Fábrica y talleres	50-75
Tráfico de una calle concurrida	68
Conversación normal (a 1 m)	65
Estación de ferrocarril	55-65
Estadio	55
Oficinas	60-65
Gran almacén comercial	50-60
Restaurante y comedores	45-55
Automóvil a 80 km/h	45-50
Tienda pequeña	45-55
Hotel	42
Casa en una gran ciudad	40
Casa en el campo	30
Cine, vacío	25-35
Sala de conciertos, vacía	} si están llenos añadir de 5 a 15 dB
Iglesia, vacía	
Estudio de radio, sin público	20-25
Estudio de televisión, sin público	25-35
Estudio de televisión, con público	30-40
Estudio de grabación	20-30
Murmullo medio	15-20

Tabla 5.2. Potencias máximas de diferentes instrumentos y su nivel sonoro a una distancia de 3 metros, al aire libre

Instrumentos	Potencia máxima (vatios)	Decibelios por encima del nivel de referencia
Clarinete	0,05	86
Violoncelo	0,16	92
Piano	0,27	94
Trompeta	0,31	94
Trombón	6	107
Bombo	25	113

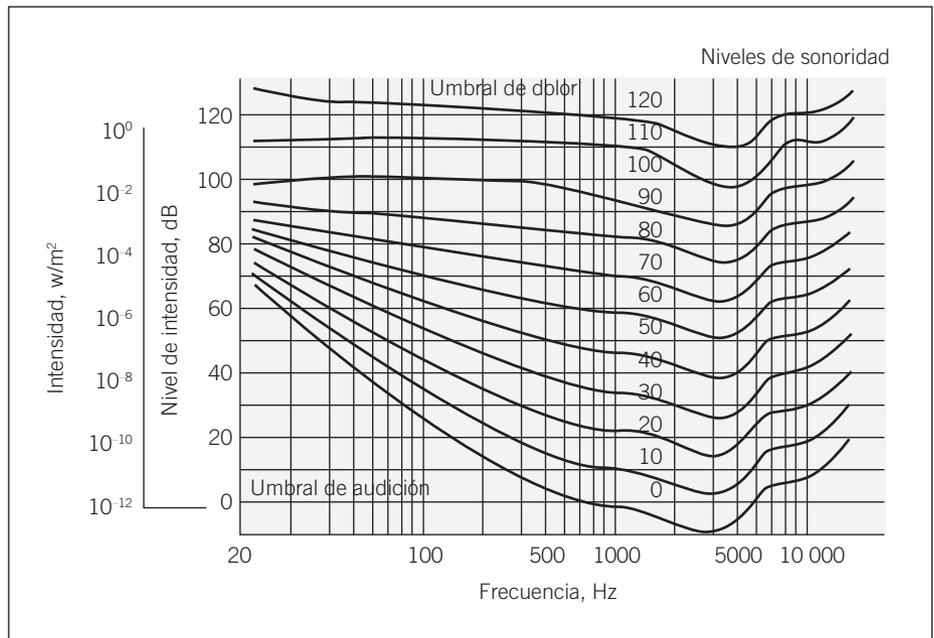


Figura 5.34. Cada curva muestra las intensidades a distintas frecuencias percibidas con el mismo nivel de sonoridad por el oyente promedio.

La Figura 5.34 muestra un promedio de las valoraciones subjetivas de oyentes para el nivel de sonoridad de las ondas armónicas de distinta frecuencia. Cada curva representa sonidos de distintas frecuencias que, al percibirse, producen el mismo nivel de sonoridad en fonios. El nivel de sonoridad (en fonios) a 1 kHz se ha tomado igual al nivel de intensidad de sonido en dB. A otras frecuencias, la relación entre el nivel de sonoridad y el nivel de intensidad de sonido no es sencilla.

Se trabaja en una escala tan poco natural porque la respuesta psicofisiológica del oído humano al sonido sigue aproximadamente una escala logarítmica. Esto es lo que se conoce como ley de Weber-Fechner de la sonoridad.

Presentamos ahora algunos ejemplos que ilustran cómo usar esta escala.

Ejemplo 5.23.

Un sonido es mil veces más intenso que otro. a) ¿Cuál es la relación entre las respectivas amplitudes de presión que los provocan? b) ¿Cuál es la relación entre sus respectivos valores en la escala decibélica?

a) Como la intensidad es proporcional al cuadrado de las variaciones de presión $I \propto p_0^2$ (véase la ecuación [61]), se deduce fácilmente

$$\frac{(p'_0)^2}{(p_0)^2} = \frac{I'}{I} = 1000 \Rightarrow \frac{p'_0}{p_0} = \sqrt{1000} = 31,6$$

de modo que el sonido más intenso tiene unas variaciones de la presión 31,6 veces mayores que el sonido de menor intensidad.

b) Para calcular la diferencia en la escala decibélica usamos la relación

$$1000 = \frac{I'}{I} = \frac{I'/I_0}{I/I_0} \Rightarrow \log\left(\frac{I'}{I}\right) = \log\left(\frac{I'}{I_0}\right) - \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \log 1000 = 3$$

y tras multiplicar por diez esa expresión se deduce fácilmente la diferencia en la escala decibélica

$$\beta' - \beta = 10 \times \log\left(\frac{I'}{I_0}\right) - 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 30 \text{ dB}$$

En el siguiente ejemplo se combina la escala decibélica con la dependencia de la intensidad con la distancia a la fuente acústica.

Ejemplo 5.24.

Un sistema acústico público está ajustado a un nivel de 70 dB para ser escuchado a 10 m. ¿Qué nivel de intensidad –expresado en decibelios– se percibe a 50 m?

Los oyentes a 10 m perciben una intensidad de 70 dB, lo que se traduce en una intensidad

$$\begin{aligned} \beta &= 10 \log \frac{I}{I_0} = 70 \text{ dB} \Rightarrow I = I_0 \times 10^7 = \\ &= 10^{-12} \text{ W m}^{-2} \times 10^7 = 10^{-5} \text{ W m}^{-2} \end{aligned}$$

Como se explicó al comienzo de este apartado, la intensidad de las ondas que no se atenúan –la potencia P que transportan se mantiene constante– tiene una dependencia con la distancia que viene dada por la relación

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}, \quad I' = \frac{P}{4\pi r'^2}$$

Tras una sencilla operación se deduce

$$\frac{I'}{I} = \frac{r^2}{r'^2} \Rightarrow \log\left(\frac{I'}{I}\right) = \log\frac{I'/I_0}{I/I_0} = \log\frac{I'}{I_0} - \log\frac{I}{I_0} = 2 \log\frac{r}{r'}$$

de modo que, aplicando la definición de la escala decibélica, los dos últimos términos del segundo miembro de esta última ecuación nos permite escribir

$$\beta' - \beta = 10\left(\log\frac{I'}{I_0} - \log\frac{I}{I_0}\right) = 20 \log\frac{r}{r'} \Rightarrow \beta' = \beta + 20 \log\frac{r}{r'}$$

que para los datos del enunciado da como resultado

$$\beta(50) = \beta(10) + 20 \log\frac{10}{50} = 70 - 14 = 56 \text{ dB}$$

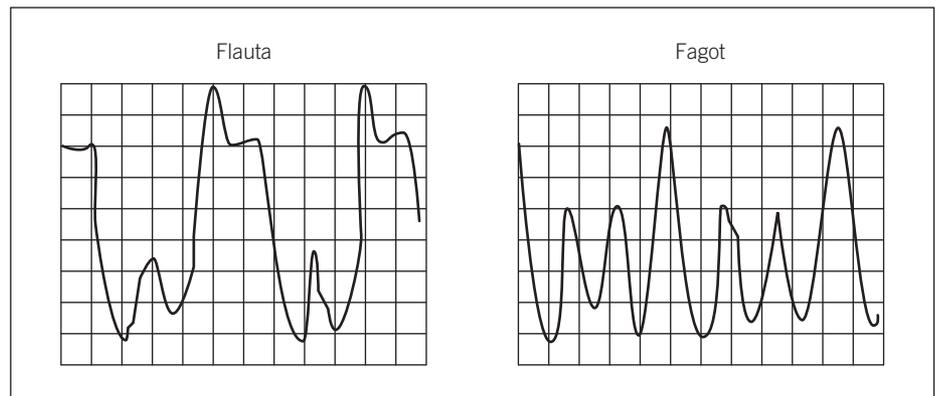


Figura 5.35. Forma de la onda emitida por dos instrumentos que dan la misma nota ($\text{La} = 440 \text{ Hz}$).

Se denomina tono a la cualidad del sonido por la cual lo percibimos como más grave o más agudo, y queda básicamente determinado por la frecuencia. Pero dos instrumentos musicales emitiendo la misma nota, es decir, la misma frecuencia fundamental, no «suenan» igual. Las notas difieren en la *cualidad del sonido o timbre*. Esta característica está muy relacionada con la mezcla de armónicos que emite cada instrumento, de modo que si captamos el sonido de la nota La (frecuencia $f = 440 \text{ Hz}$) de distintos instrumentos, podemos registrar variaciones de presión de forma muy distinta en los distintos instrumentos, tal como se representa en la Figura 5.35.

El timbre se pone de manifiesto mediante el análisis de Fourier de las ondas correspondientes, que comentamos en el Apartado 5.4. Para la nota La de los instrumentos citados el espectro de la señal temporal es el que muestra la Figura 5.36.

Existen aparatos que realizan directamente ese análisis, y se conocen como analizadores de Fourier. Veremos más adelante que la razón por la cual distinguimos el sonido de los distintos instrumentos es porque nuestro

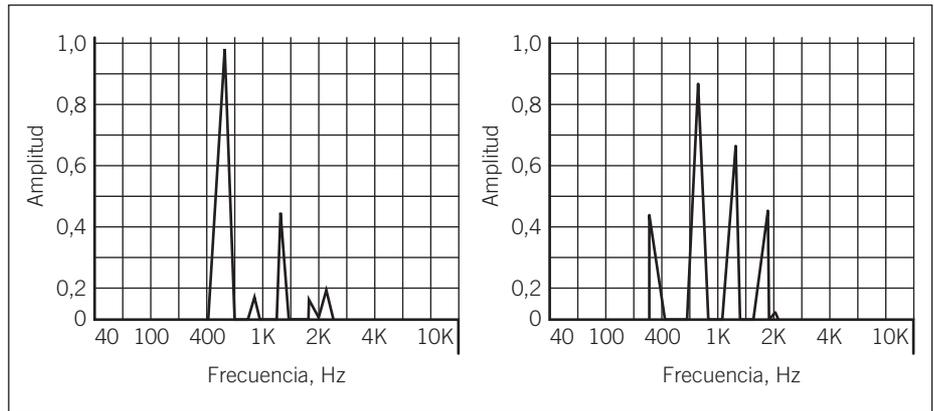


Figura 5.36. Espectro de la onda emitida por los instrumentos de la Figura 5.35.

oído actúa como un analizador de Fourier. Por ejemplo, las perturbaciones de presión producidas por la nota La de frecuencia fundamental $f_1 = 440$ Hz son representadas en la Figura 5.37.

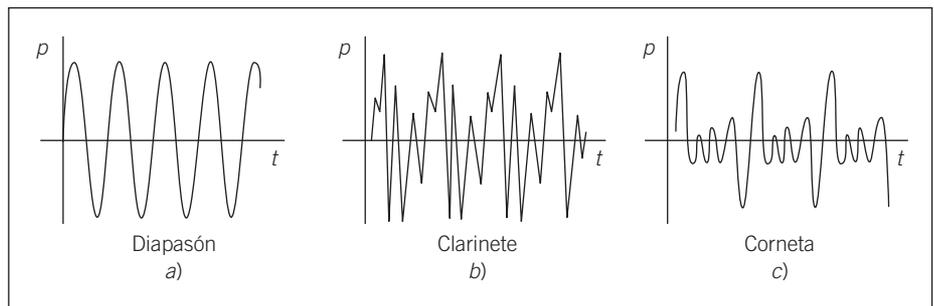


Figura 5.37. Una misma nota musical en instrumentos diferentes.

El espectro de Fourier, es decir, las amplitudes versus armónicos de esas ondas se representa en la Figura 5.38.

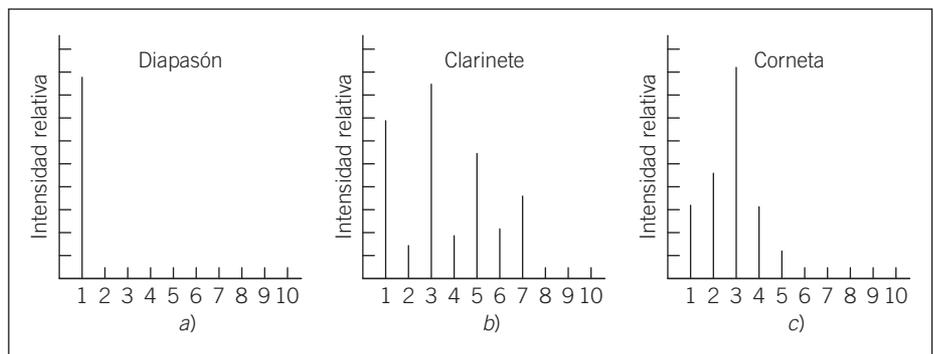


Figura 5.38. Espectro de las ondas de la Figura 5.37.

5.12. Física del habla y del oído medio

El habla está producida por el paso del aire procedente de los pulmones a través de las cuerdas bucales que hace vibrar el aire. La garganta y las cavidades nasal y bucal hacen de cavidad resonante de esas vibraciones, de modo que las cuerdas bucales actúan a la manera de las de un instrumento y las cavidades mencionadas a modo de caja de resonancia. Pero una de las diferencias es la gran variedad de sonidos que puede emitir la voz humana, lo cual se debe a la versatilidad de las cuerdas bucales y a la capacidad de variar la forma de las cavidades «resonantes».

Esa versatilidad da lugar a una gran cantidad de sonidos y contribuye de manera esencial a la forma tan rica de comunicación entre las personas. Además, cada persona tiene una entonación y un timbre característico. Intervienen en estas diferencias factores anatómicos, culturales –la fonética, el acento o la entonación propia de una lengua–, etc. Nuestro oído es capaz de distinguir la voz de una persona conocida, de otras parecidas –o de las imitaciones–, porque las diferencias a las que hemos aludido corresponden principalmente a una diferencia en el *timbre de voz*, es decir, en los armónicos que componen el sonido de la persona al hablar. Así, cuando dos personas «cantan» al mismo tono –básicamente con la misma frecuencia– podemos distinguirlos, debido a que nuestro oído «analiza» no sólo la frecuencia fun-

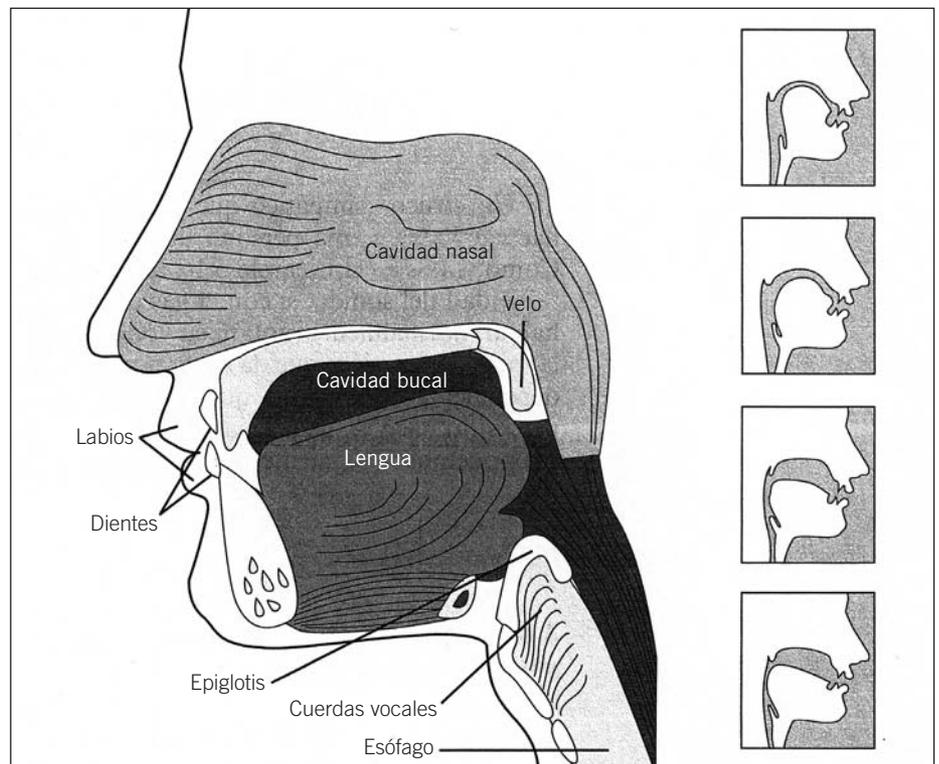


Figura 5.39. a) Las cavidades bucal y nasal actúan de caja de resonancia de las cuerdas bucales. b) Mediante la deformación de la cavidad bucal se consiguen sonidos diferentes.

damental, sino también el timbre, es decir, la composición de armónicos. Es posible distinguir esas diferencias mediante el espectro de Fourier que se obtiene de un analizador como se representa en la Figura 5.40.

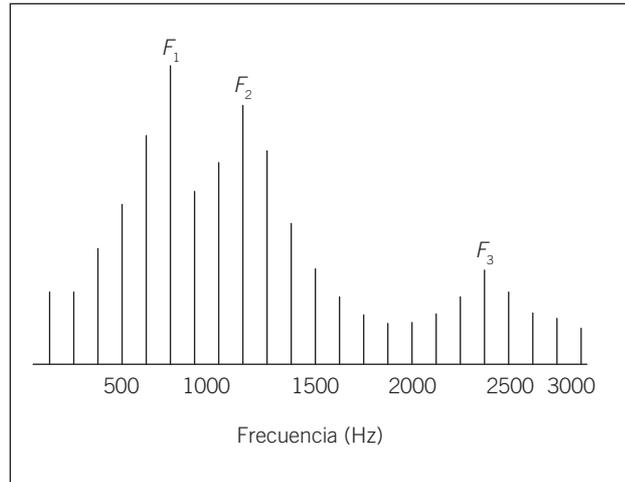


Figura 5.40. Análisis de Fourier cuando una persona pronuncia la vocal «a».

Un efecto simpático que produce variaciones en el habla se obtiene al hacer inhalar a una persona un gas más ligero o más pesado que el aire. Como vimos en el Ejemplo 5.14, la diferencia en la masa molecular afecta a la velocidad del sonido; si con el gas en la cavidad bucal el individuo se pone a hablar, normalmente ¡notará su voz cambiada! Las cuerdas bucales producen la misma vibración, que da lugar a una onda estacionaria en la cavidad bucal, dependiente de la forma que ésta adopta. La longitud de onda no cambia, pero sí lo hace la frecuencia, pues la velocidad de propagación ha cambiado. Proponemos el siguiente ejemplo para ilustrar esta «broma».

Ejemplo 5.25.

A una persona se le hace inhalar primero helio y pasado un rato xenón. Con el gas en la boca se le pide que hable con normalidad, pero nota un cambio notable en su voz en ambos casos. ¿Cómo suena la voz de esa persona al hablar después de haber inhalado cada uno de esos gases?

En el Ejemplo 5.18 obtuvimos que la velocidad del sonido en aire, helio y xenón es, respectivamente, $v_{\text{aire}} = 344 \text{ m s}^{-1}$, $v_{\text{He}} = 1007 \text{ m s}^{-1}$, $v_{\text{Xe}} = 161 \text{ m s}^{-1}$. Como acabamos de decir, cuando una persona trate de emitir la misma palabra, no se oirá la misma frecuencia, a pesar de que la longitud de onda no habrá variado, pues ésta sólo depende de la forma de la cavidad bucal y de las cuerdas bucales. Las relaciones de frecuencias serán

$$\frac{f_{\text{He}}}{f_{\text{aire}}} = \frac{v_{\text{He}}/\lambda}{v_{\text{aire}}/\lambda} = \frac{v_{\text{He}}}{v_{\text{aire}}} = \frac{1007 \text{ m s}^{-1}}{344 \text{ m s}^{-1}} = 2,93$$

de lo que se deduce que la voz de la persona se habrá hecho ¡casi tres veces más aguda! Por el contrario, en el caso del xenón

$$\frac{f_{Xe}}{f_{aire}} = \frac{v_{Xe}/\lambda}{v_{aire}/\lambda} = \frac{v_{Xe}}{v_{aire}} = \frac{161 \text{ m s}^{-1}}{344 \text{ m s}^{-1}} = 0,47$$

la voz se hará más grave y los tonos bajarán a la ¡mitad de frecuencia!

Otro pequeño apartado digno de mención es el estudio del oído medio. El sonido llega a través del oído externo al tímpano. Éste actúa como una membrana de un tambor y transmite la vibración a una cadena de huesecillos —martillo, yunque y estribo— que se encargan de amplificarla unas quince veces antes de hacerlas llegar a la ventana oval, en contacto con la cóclea o caracol, que se halla llena de un líquido denominado perilinf.

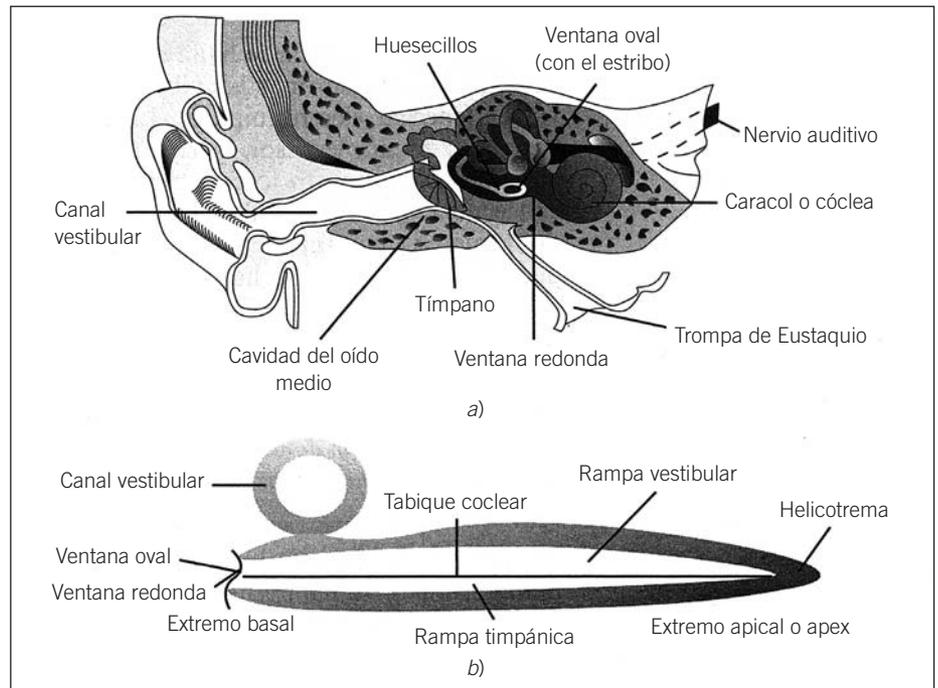


Figura 5.41. a) El oído medio. b) Detalle del caracol, desplegado.

Las vibraciones, al llegar al caracol, se propagan a través de la membrana basilar y de la perilinf, y son captadas por las múltiples terminaciones nerviosas que se encargan de enviar la información al cerebro a través del nervio auditivo. En la Figura 5.41 se muestra un corte transversal del caracol.

Sobre la membrana se halla el órgano de Corti, cuyas células ciliadas transforman las vibraciones de la membrana en impulsos nerviosos (energía electroquímica). La membrana tiene un espesor y tensión variables: menor espesor, pero mayor anchura y tensión en el extremo llamado basal; y justo lo contrario en el extremo opuesto, el apical. Como consecuencia, la velo-

cidad de propagación es variable (disminuye) a lo largo de la membrana. Teniendo en cuenta estos datos, la última afirmación se puede demostrar, como hacemos a continuación.

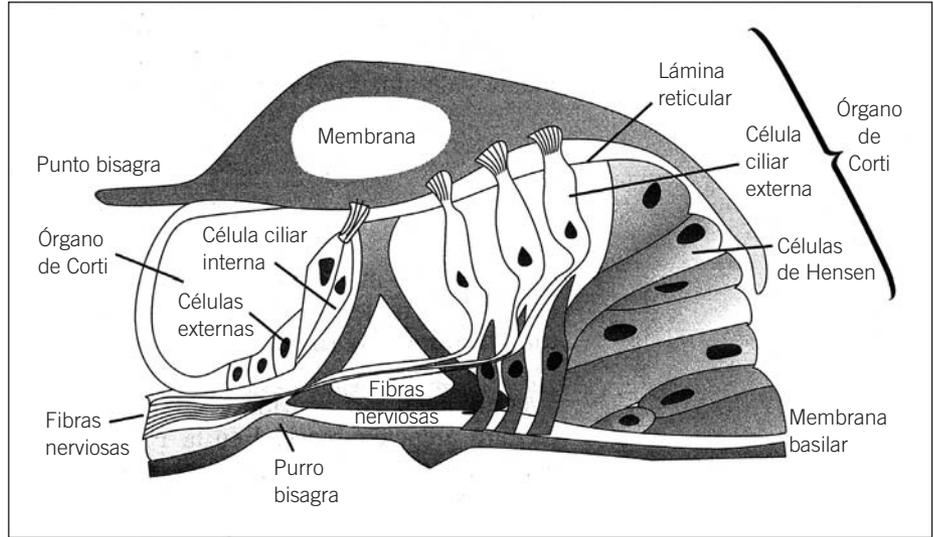


Figura 5.42. Corte transversal de la cóclea.

Ejemplo 5.26.

El espesor de la membrana basilar aumenta y la tensión disminuye desde el extremo basal (por donde llegan las ondas) hasta el apical. Demuéstrese que la velocidad de las ondas transversales en dicha membrana disminuye de un extremo al otro.

Como simplificación, aunque la membrana puede ser considerada como bidimensional, tomamos la expresión de la velocidad de propagación de ondas transversales en una cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

La densidad por unidad de longitud aumenta con el espesor, pues la membrana tiene grosor variable. Usando esa forma general, y puesto que la tensión disminuye y la densidad por unidad de longitud aumenta, la velocidad también debe disminuir:

$$T_{\text{basal}} > T_{\text{apical}} \quad , \quad \mu_{\text{basal}} < \mu_{\text{apical}} \Rightarrow \frac{T_b}{\mu_b} > \frac{T_a}{\mu_a} \Rightarrow v_{\text{basal}} > v_{\text{apical}}$$

Este hecho importante queda reflejado en la Figura 5.43.

De este modo, la interacción entre la perilinfia y la membrana basilar actúa como un diminuto y preciso *analizador de Fourier* (véase la Sección 5.4),

es decir, permite a las terminaciones nerviosas del órgano de Corti captar las amplitudes y frecuencias que componen un sonido.

El mecanismo exacto es desconocido. La primera explicación, plausible aunque inexacta, la dio en 1863 von Helmholtz, quien propuso que la membrana basilar se comporta como un conjunto de cuerdas tensas —como las de un arpa— dispuestas paralelamente en disposición transversal. La onda sonora incidente sobre la ventana oval haría entrar en resonancia distintas partes —distintas «cuerdas»—, de la membrana basilar, según su frecuencia. Las terminaciones nerviosas estimuladas en esas zonas transmitirían al nervio auditivo el sonido descompuesto en sus diferentes frecuencias —tal como hace un aparato digital—, que volvería a ser «sintetizado» al llegar al cerebro.

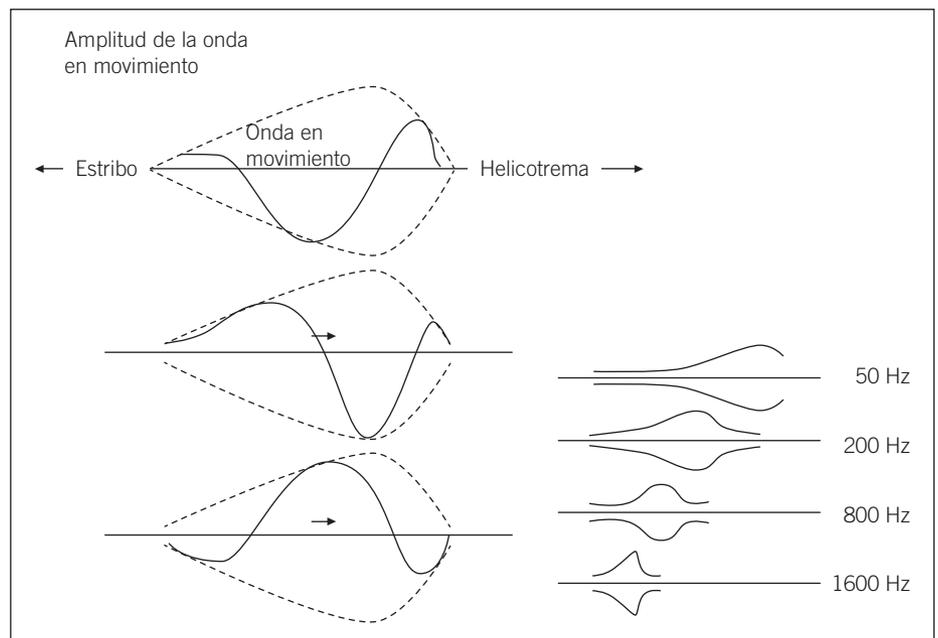


Figura 5.43. La velocidad de propagación de las ondas varía a lo largo de la membrana basilar y es distinta para frecuencias diferentes.

Pero en realidad las ondas sobre la membrana son más complicadas, tal como ha sugerido von Bekesy (quien recibió el premio Nobel de Medicina en 1960 por sus estudios sobre el oído medio). Uno de sus descubrimientos fue el hecho de que la membrana basilar no da muestras de estar sometida a una tensión transversal como había propuesto von Helmholtz. Aunque aún no se conoce con exactitud todos los mecanismos psicofísicos que dan lugar a la audición, se da como explicación más plausible que las ondas al llegar a la ventana oval se propagan a diversas velocidades, en la membrana basilar y en la perilinfa, dadas las diferentes características elásticas y morfológicas de ambos elementos. Las ondas de presión (forzosamente longitudinales) en el líquido (perilinfa) que inducen propagación de cierto pandeo sobre

la membrana basilar —parecido al que se observa sobre la membrana de un timbal— distinto cuando la onda se propaga en el canal superior o en el inferior de la cóclea. Esto da lugar a un esfuerzo tangencial sobre la membrana que es captado por las células sensoriales. Se ha descubierto también la presencia de un potencial eléctrico intracoclear que actuaría a modo de «micrófono coclear», pero las investigaciones para dilucidar los complejos mecanismos de la audición siguen en marcha.

5.13. Reflexión, refracción y difracción de ondas sonoras. Ultrasonidos. Ecolocalización

Como en el caso de cuerdas o de tubos estrechos, las ondas al llegar a una superficie lisa se *reflejan*, y la reflejada se superpone a la incidente, dando lugar a una onda estacionaria. En el caso del sonido chocando contra una pared en un espacio abierto, la reflexión produce los efectos de *eco* y de *reverberación*. Éstos deben ser estudiados detalladamente en construcciones como los auditorios de música, en las que es muy importante que la superposición no sea destructiva, sino que el sonido quede amplificado —por resonancia—, la intensidad resulte incrementada y los sonidos mezclados de manera conveniente. Las leyes más útiles sobre la reflexión se estudiarán en el caso de la luz, que es una onda electromagnética, pero apuntamos aquí algunas características importantes en relación con la *ecolocalización*, útil en algunos animales para localizar obstáculos por el eco, y en la técnica denominada *ecografía*. Como ejemplo de utilidad del eco en algunos animales presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.27.

Cierto tipo de murciélago emite pulsos de ultrasonidos en una gama entre 40 y 80 kHz y con una duración de alrededor de 2 ms. a) ¿Cuál es la gama de longitudes de onda que emite ese animal? b) ¿Cuánto tiempo tarda el murciélago en «oír» una señal que le llega reflejada desde una pared situada a 2,5 m? c) Se ha determinado experimentalmente que ese tipo de murciélago es capaz de discriminar separaciones de tan sólo 1,2 cm. Repítase el cálculo del apartado anterior y compárese el tiempo hallado con el característico de una señal nerviosa (velocidad del sonido en aire, $v = 344 \text{ m s}^{-1}$).

a) Para resolver este apartado basta con aplicar la relación $\lambda f = v$ para los valores del enunciado

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{v}{f_{\text{mín}}} = \frac{344 \text{ m s}^{-1}}{40\,000 \text{ m s}^{-1}} = 8,6 \times 10^{-3} \text{ m} = 8,6 \text{ mm}$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{v}{f_{\text{máx}}} = \frac{344 \text{ m s}^{-1}}{80\,000 \text{ m s}^{-1}} = 4,3 \text{ mm}$$

b) Se trata de hallar el tiempo que tarda la onda en viajar del animal al obstáculo y volver reflejada al animal

$$t = \frac{2d}{v} = \frac{2 \times 2,5 \text{ m}}{344 \text{ m s}^{-1}} = 1,45 \times 10^{-2} \text{ s}$$

que es un tiempo superior al de emisión, que dura del orden de 2 ms.

c) Este apartado se resuelve usando un cálculo análogo al del anterior:

$$t = \frac{2d}{v} = \frac{2 \times 1,2 \times 10^{-2} \text{ m}}{344 \text{ m s}^{-1}} = 7 \times 10^{-5} \text{ s} = 70 \mu\text{s}$$

un tiempo mucho menor a 1 ms que es el característico de la señal nerviosa, lo cual significa que el murciélago capta la señal sin ayuda de su sistema nervioso central.

Al llegar el sonido a la interfaz entre dos medios, se refleja en parte y en parte se transmite.

Hay que hacer notar que, dependiendo de la relación entre las densidades lineales de masa μ , en el caso de dos trozos de cuerda con distinto μ , acoplados, la onda reflejada invierte o conserva la amplitud, tal como se muestra en la Figura 5.44.

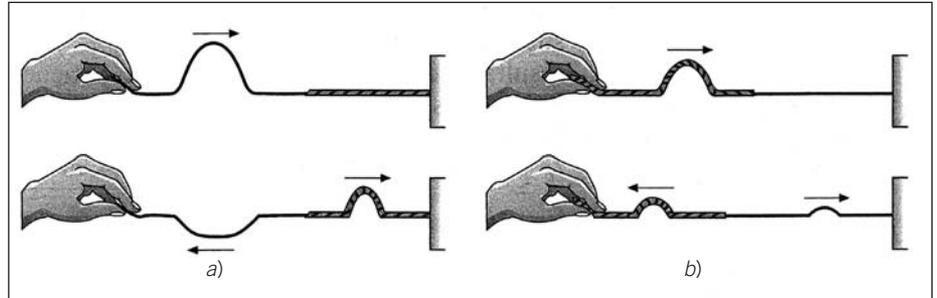


Figura 5.44. Onda que se refleja y se transmite.

Si se denomina A_i a la amplitud incidente y A_r a la reflejada, éstas se hallan relacionadas mediante la expresión

$$A_r = \frac{(\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1)}{(\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1)} A_i \quad [63]$$

donde el subíndice 2 indica el medio en el que la onda se transmite y el 1 el medio del cual procede. (La inversión de amplitud que se muestra en la Figura 5.44 queda reflejada en los signos de esta fórmula.) Nótese que, al ser la intensidad I del sonido proporcional a la amplitud al cuadrado, la relación entre las intensidades incidente y reflejada tendrá la forma de la relación anterior pero al cuadrado, como recogemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.28.

Calcúlese qué porcentaje de la intensidad de una onda incidente desde el aire se transmite a través de la superficie del agua (densidad del aire, $\rho_1 = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$; velocidad del sonido en aire, $v_1 = 344 \text{ m s}^{-1}$; densidad del agua, $\rho_2 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; velocidad del sonido en agua: $v_2 = 1\,500 \text{ m s}^{-1}$).

La relación entre las amplitudes incidente y reflejada en la interfaz aire-agua viene dada por la última ecuación, y, por tanto, la relación entre las intensidades incidente y reflejada vendrá dada por una relación del tipo

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{(\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1)^2}{(\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1)^2}$$

y, puesto que la energía de la onda se conserva en el paso de un medio al otro, la proporción que se transmitirá de un medio al otro vendrá dada por la expresión

$$\frac{I_t}{I_i} = 1 - \frac{I_r}{I_i} = 1 - \frac{(\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1)^2}{(\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1)^2} = \frac{4\rho_2 v_2 \rho_1 v_1}{(\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1)^2}$$

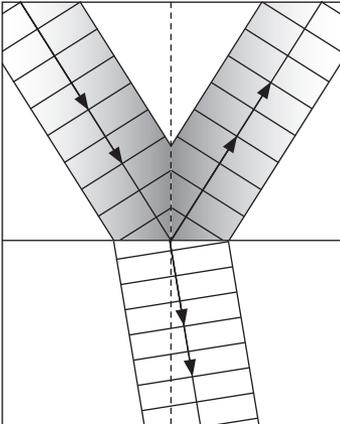


Figura 5.45. Las ondas de sonido, al pasar de un medio a otro, se refractan en parte y en parte se reflejan.

En el caso que consideramos, al ser tan dispares las densidades, podemos suponer en el denominador $(\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1)^2 \approx (\rho_2 v_2)^2$, por lo cual el resultado que interesa encontrar se obtiene aplicando esa aproximación y los valores del enunciado

$$\frac{I_t}{I_i} \approx \frac{4\rho_1 v_1}{\rho_2 v_2} = \frac{4 \times 1,3 \text{ kg m}^{-3} \times 344 \text{ m s}^{-1}}{10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 1500 \text{ m s}^{-1}} = 1,2 \times 10^{-3} = 0,1 \text{ por } 100$$

Sonómetros

El ruido es un conjunto de sonidos cuya combinación causa una sensación de molestia a las personas. Es una percepción subjetiva, ya que un sonido puede considerarse agradable o ruido en función de las características del receptor o del instante en que se emite. Para evaluar el impacto del ruido en el medioambiente se definen los conceptos siguientes:

- **Amplitud:** es la magnitud que cuantifica el nivel de presión sonora que ejerce la energía acústica en el oído, y que es proporcional al logaritmo de la intensidad sonora respecto de una intensidad de referencia. Su unidad es el decibelio (dB).
- **Frecuencia:** la banda de frecuencias audibles por una persona que, como se ha dicho antes, está comprendida entre 20 y 20.000 Hz.
- **Intensidad:** es un valor subjetivo basado en la sensibilidad del oído humano hacia sonidos en escala de frecuencias medias y altas. Su unidad es el dB(A).
- **Nivel sonoro estacionario equivalente (L_{eq}):** es el nivel que tendría un ruido constante para liberar la misma cantidad de energía en un periodo de tiempo idéntico y originando una parecida lesión auditiva que un ruido variable. Su unidad es el dB(A).

Las medidas del ruido comportan considerar y evaluar principalmente las variables intensidad, duración y frecuencia del ruido. El ruido por impul-

Los ruidos de corta duración pero muy intensos son también un factor contaminante muy importante que incluye ruidos de corta duración pero muy intensos. También se pueden considerar más molestos los ruidos que tienen una frecuencia alta y tonos puros, que los de baja frecuencia.

El ruido es una de las variables que se tienen más en cuenta al valorar la calidad de vida en una ciudad. La contaminación acústica, además de ser una molestia, provoca cansancio, estrés y otras alteraciones que perturban la salud. Los habitantes de una ciudad están expuestos a diversas fuentes sonoras, tales como el transporte, las actividades laborales, las actividades de ocio, etc. pero, la principal fuente emisora de ruido son los vehículos. El motor y el rozamiento de las ruedas con el pavimento provocan niveles de ruido que a menudo superan los límites máximos recomendados e incluso permitidos.

Las legislaciones ambientales de los países regulan los niveles de ruido aceptables para preservar la salud de las personas en centros de trabajo, en las ciudades y en entornos próximos a instalaciones industriales, aeropuertos, carreteras, etc. y los gestores ambientales establecen mapas sónicos que caracterizan el entorno sonoro de un determinado lugar. Para calcular el nivel de ruido se puede seguir dos procedimientos:

- Métodos directos: medida *in situ* del ruido mediante instrumentos acústicos (sonómetros).
- Métodos de previsión: permiten calcular los niveles de ruido a través de simulación de situaciones, es decir, de modelos.

El sonómetro es el aparato para medir el nivel de ruido ambiental y poder verificar si se cumplen las normativas. Los elementos principales de un sonómetro son: el micrófono, el preamplificador, el amplificador y un dispositivo de lectura analógica o digital. El sonómetro procesa los niveles de ruido a medida que los recibe y los muestra sucesivamente o a intervalos de tiempo determinados. Algunos sonómetros son estadísticos, puesto que facilitan también datos de niveles de ruido que se han rebasado durante un porcentaje determinado del tiempo de medición.

Habitualmente los sonómetros se clasifican, en función de su precisión decreciente en decibelios (dB), en tres clases. Los sonómetros de clase 0 se usan estrictamente en laboratorios, los de clase 1 en entornos urbanos y los de clase 2 en entornos laborales. Las medidas del nivel de intensidad pueden ser instantáneas o bien integradas. Las medidas integradas suponen la medida del nivel de intensidad acústica medio durante un intervalo de tiempo o de frecuencias, que es el nivel acústico ponderado equivalente.

Del ejemplo 5.28 se deduce que el sonido penetra en una cantidad ínfima al pasar de un medio como el aire a otro como el agua. Esta es la razón por la cual los aparatos de sonido (o ultrasonidos) se aplican directamente sobre las estructuras a estudiar, evitando el contacto con el aire. (En las aplicaciones médicas de ultrasonidos se introduce al paciente en agua, cuya densidad y velocidad del sonido es parecida a la de los tejidos blandos.) Pero, además, la intensidad de las ondas normalmente se amortigua exponencialmente en medios relativamente densos.

El sonido presenta también el fenómeno de la *refracción*, que se estudia habitualmente en óptica. El fenómeno consiste en que una onda, al llegar a la superficie de separación entre dos medios con distinta velocidad de propagación, puede penetrar en el nuevo medio, pero cambiando la dirección en que se propaga. En realidad, la onda en parte se refleja y en parte se refracta, tal como se esquematiza en la Figura 5.45. (Citamos aquí este fenómeno de pasada, pues se verá en detalle en la óptica geométrica.)

Las ondas planas al pasar por un obstáculo suficientemente pequeño sufren el fenómeno de la *difracción*, que es el más importante que hemos de comentar en este apartado, y que se representa en forma esquemática en la Figura 5.46.

Las ondas planas pueden pasar por un orificio sin apenas difractarse, si éste es suficientemente grande, y la difracción es importante si es pequeño. El límite entre grande y pequeño se sitúa en la longitud de onda del sonido: cuando la longitud de onda es del orden de la anchura del orificio, se produce difracción importante, y nos basta recordar que el sonido audible presenta una gama comprendida entre los valores

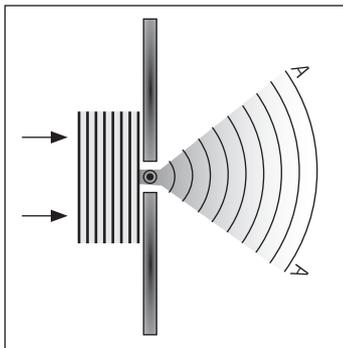


Figura 5.46. Una cubeta de ondas en agua en la que se puede apreciar el fenómeno de la difracción

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{v}{f_{\text{mín}}} = \frac{344 \text{ m s}^{-1}}{20 \text{ s}^{-1}} = 17,2 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{v}{f_{\text{máx}}} = \frac{344 \text{ m s}^{-1}}{20000 \text{ s}^{-1}} = 1,72 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,72 \text{ cm}$$
[64]

puesto que las frecuencias varían entre 20 y 20000 Hz. Esto significa que la mayor parte de los sonidos audibles sufren difracción al pasar por agujeros con anchura del orden del metro. Lo que comentamos para agujeros sirve también para obstáculos. La «sombra» sonora de dicho obstáculo es del orden de su anchura, de modo que si ésta es del orden de la longitud de onda del sonido, los efectos de difracción actúan y la «sombra» queda eliminada.

El hecho de que las longitudes típicas de los obstáculos sea del orden de un metro para el sonido explica por qué éste «dobla las esquinas», es decir, oímos a alguien que viene por un pasillo hablando, aunque no lo veamos. (La diferencia esencial entre las ondas sonoras y la luz radica en sus longitudes de onda como comentaremos en óptica.)

Hemos visto, además, que la máxima longitud que el sonido audible puede captar es de 1,72 cm. Para discernir obstáculos más pequeños se puede acudir a los *ultrasonidos*, ondas sonoras cuya frecuencia es superior a la máxima audible por el hombre ($f > 20000 \text{ Hz}$), que pueden ser captados mediante instrumentos adecuados. Los ultrasonidos tienen aplicaciones en la industria de forja de piezas especiales, donde se usan para determinar la calidad de dichas piezas, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.29.

Es muy importante en piezas metálicas que van a sufrir grandes esfuerzos asegurarse que en su interior no existen defectos (microfracturas) de un tamaño superior al milímetro. Determínese la frecuencia de los ultrasonidos que

hay que emplear para poder detectar ese tipo de defecto (velocidad del sonido en el metal, $v = 5000 \text{ m s}^{-1}$).

Si se sitúa un emisor de ultrasonidos sobre la pieza y un receptor al otro lado, el sonido captado cambia de características al atravesar un defecto, pues ahí se dan fenómenos de difracción y reflexión. Para que la microgrieta produzca efectos de difracción, su anchura d debe ser del orden de la longitud de onda λ de los ultrasonidos, es decir,

$$\lambda \approx d \quad (\text{difracción})$$

y, por tanto, la frecuencia correspondiente es

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{d} = \frac{5000 \text{ m s}^{-1}}{10^{-3} \text{ m}} = 5 \times 10^6 \text{ Hz} = 5 \text{ MHz}$$

que es una frecuencia bastante alta, aunque en medicina se usan hasta 10 MHz.

En medicina los ultrasonidos se usan tanto para técnicas diagnósticas como terapéuticas. Entre las primeras destaca la *ecografía*, que presenta la ventaja sobre los rayos X de no ser ionizante. Al igual que lo que señalamos para el control de calidad de las piezas metálicas, los aparatos de ecografía emiten pulsos cortos y reciben las señales reflejadas, consecuencia de la estructura interna de la zona de exploración. Estas señales (ecos) tienen distintas intensidades y un retardo diferente según su situación y el material que compone dicha zona. Sintetizando esas señales en un ordenador se obtienen las imágenes ecográficas, entre las que destacan las de los fetos —no se debe usar rayos X en mujeres embarazadas— y del movimiento del corazón (técnica de ecografía Doppler). Las intensidades y la gama de frecuencias de los ultrasonidos están limitadas, por un lado, por la frecuencia del piezoeléctrico que los produce, y por otro por los efectos mecánicos que tienen sobre los tejidos. A baja intensidad y frecuencia son usados con fines terapéuticos, pues la energía mecánica es absorbida y disipada por las moléculas de agua, lo que da lugar a un efecto térmico. Pero si la intensidad es demasiado elevada, se puede producir un efecto de evaporación (cavitación) u otros efectos nocivos para el organismo.

Determinamos ahora el límite teórico de resolución de las técnicas ecográficas.

Ejemplo 5.30.

En ecografía se llegan a usar ultrasonidos de hasta 3 MHz. ¿Cuál es el límite teórico de resolución de esa técnica? (velocidad de propagación del sonido en agua, $v = 1500 \text{ m s}^{-1}$).

La resolución viene limitada por los efectos de difracción, que enmascaran la «sombra» de las estructuras presentes en la zona de exploración. Por

eso, la distancia mínima que podrá discernir y, por tanto, la resolución en dicha técnica, será del orden de la longitud de onda del ultrasonido.

$$\text{Límite de resolución} = d \approx \lambda$$

y ahora calculamos esa longitud de onda

$$LR \approx \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500 \text{ m s}^{-1}}{3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}} = 5 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,5 \text{ mm}$$

Como se advierte en el enunciado, se trata de un límite teórico.

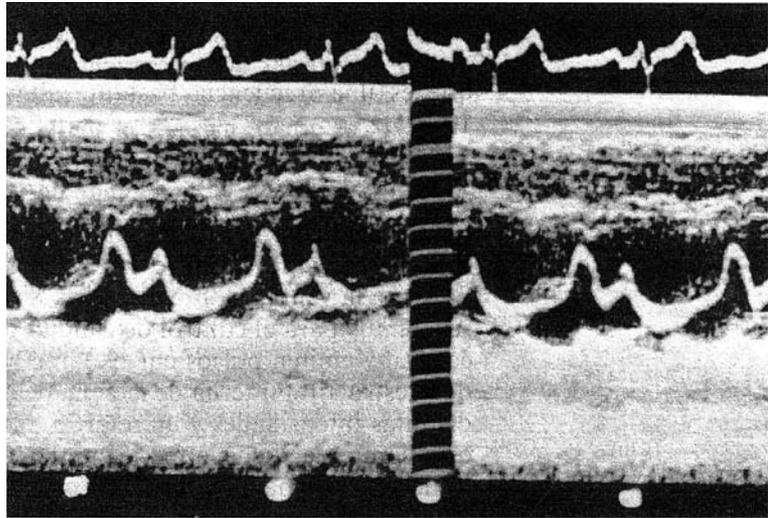


Figura 5.47. Imagen de una ecografía.

5.14. El efecto Doppler. Ondas de choque: litotricia

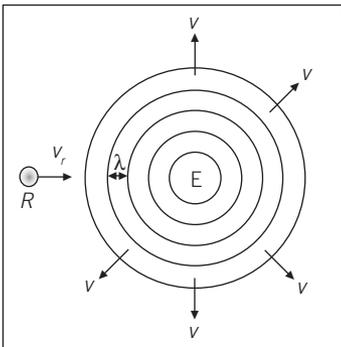


Figura 5.48. Receptor R moviéndose hacia una fuente o emisor E fijo.

Las ondas sufren alteraciones en sus propiedades, bien en el modo en que son percibidas por un escucha, bien cuando el emisor se está moviendo. Se puede apreciar que suena distinto un silbato de un tren cuando éste se acerca a nosotros y cuando se aleja. En el primer caso se percibe un sonido más agudo, que más grave cuando se aleja. Esto es lo que se conoce como *efecto Doppler*. La frecuencia que se recibe sufre una variación debido al movimiento del *emisor o del receptor* de las ondas. Esta sección está dedicada a este fenómeno y a sus aplicaciones más destacables.

Estudieemos a continuación las dos situaciones más comunes en las que se estudia el efecto Doppler. Consideremos, en primer lugar, que el receptor se mueve hacia un emisor que está en reposo.

Receptor móvil. En esa situación, las ondas que salen del emisor con la velocidad de propagación propia del medio v , pero el receptor las ve acercarse con una velocidad $v' = v + v_r$, pero sin notar variada la longitud de

onda. Como consecuencia, sí percibirá un cambio en la frecuencia, que vendrá dado por la expresión

$$f_r = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_r}{\lambda} \quad [65]$$

Como la longitud de onda no cambia y está relacionada con la frecuencia de la fuente mediante la relación $\lambda = v/f_e$, siendo f_e la frecuencia emitida por la fuente o emisor, podemos reescribir [65] como

$$f_r = \frac{v + v_r}{v} f_e \quad (\text{receptor moviéndose hacia una fuente}) \quad [66]$$

Así, cuando viajamos en coche por una autopista notamos cómo, si se emite algún ruido desde la cuneta, suena más agudo al acercarnos y más grave al alejarnos.

En la deducción hemos supuesto que el receptor se acerca, pero el argumento es análogo cuando se aleja, pues basta cambiar el signo en la velocidad, de modo que $f_r > f_e$ cuando el receptor se acerca —capta un sonido más agudo—. Al alejarse se invierte el signo de v_r y se obtiene $f_r < f_e$ —se oye un sonido más grave—. Se puede escribir entonces, de modo general,

$$f_r = \frac{v \pm v_r}{v} f_e \quad (\text{receptor: + se acerca; - se aleja}) \quad [67]$$

Aplicamos esta relación a algunos casos concretos.

Ejemplo 5.31.

Un objeto se desplaza a una velocidad de 10 m s^{-1} hacia una alarma que emite un sonido con una frecuencia de 5000 Hz . a) ¿Qué frecuencia escucha cuando se acerca?; b) ¿y cuando se aleja? (velocidad del sonido en aire, $v = 344 \text{ m s}^{-1}$).

a) Cuando se acerca, la frecuencia que percibe el oyente que se mueve es

$$f_r = \frac{v + v_r}{v} f_e = \frac{344 \text{ m s}^{-1} + 10 \text{ m s}^{-1}}{344 \text{ m s}^{-1}} 5000 \text{ Hz} = 5145 \text{ Hz}$$

es decir, aprecia un aumento en la frecuencia de 145 Hz .

b) Al alejarse, la frecuencia escuchada será menor, y su valor es

$$f_r = \frac{v - v_r}{v} f_e = \frac{344 \text{ m s}^{-1} - 10 \text{ m s}^{-1}}{344 \text{ m s}^{-1}} 5000 \text{ Hz} = 4855 \text{ Hz}$$

y ahora la frecuencia es inferior (sonido más grave) que la de la fuente en 145 Hz .

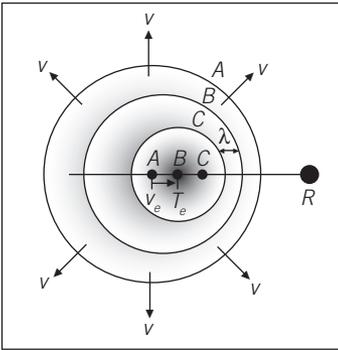


Figura 5.49. Efecto Doppler producido por un emisor que se mueve y un receptor quieto.

Emisor móvil. Se considera ahora la situación de un receptor en reposo y un emisor que se mueve hacia aquél. La situación es la que nota un peatón quieto en el arcén de la autopista cuando un coche en movimiento hace sonar el claxon. En la Figura 5.49 se representa la situación que genera el movimiento de la fuente.

Por el hecho de moverse, la longitud de las ondas emitidas varía según la dirección que consideremos. Se ve claramente en la figura cómo entre la primera y la segunda onda ha transcurrido un lapso de tiempo durante el cual el emisor se ha desplazado y, como consecuencia, la segunda onda es emitida desde una posición distinta. Del esquema anterior se deduce también que las ondas tienen una longitud de onda menor en la dirección de movimiento del emisor, y mayor en la dirección opuesta. (En una dirección estrictamente perpendicular al movimiento no hay cambio alguno.) De modo que para el emisor acercándose hacia el receptor quieto se tiene

$$\lambda_r = \lambda_e - v_e T_e \quad [68]$$

siendo T_e el período de las ondas, que está relacionado con la frecuencia del emisor por la relación $T_e = 1/f_e$, con lo cual se puede escribir

$$\lambda_r = \lambda_e - \frac{v_e}{f_e} \Rightarrow \frac{v}{f_r} = \frac{v}{f_e} - \frac{v_e}{f_e} = \frac{1}{f_e}(v - v_e) \quad [69]$$

donde se ha utilizado la relación fundamental de las ondas tanto al emisor como al receptor. Inviertiendo esa relación se obtiene

$$f_r = \frac{v}{v - v_e} f_e \quad (\text{emisor acercándose al receptor}) \quad [70]$$

en la que de nuevo hay que considerar la dirección del movimiento del emisor: hay que tomar el signo negativo cuando el emisor se acerca al receptor y positivo cuando se aleja. En general, se puede escribir

$$f_r = \frac{v}{v \pm v_e} f_e \quad (\text{emisor: } - \text{ acercándose; } + \text{ alejándose}) \quad [71]$$

de modo que cuando se acerca el emisor, $f_r > f_e$, el receptor percibe un sonido más agudo; por el contrario, cuando se aleja se tiene $f_r < f_e$, le llega al receptor un sonido más grave.

Presentamos unos ejemplos de aplicación de este caso.

Ejemplo 5.32.

Un barco de estudios oceanográficos sitúa un receptor de sonido dentro del agua, para captar el sonido de los delfines. Éstos emiten frecuencias de 10000 Hz y se mueven a una velocidad de 10 m s⁻¹, paralelamente al barco. Hállese la variación de frecuencia: a) cuando se acercan hacia el barco; b) cuando se alejan (velocidad del sonido en agua, v = 1500 m s⁻¹).

a) Cuando se acerca, estamos ante el caso de un emisor que se mueve hacia un receptor que está en reposo y, por tanto, el receptor del barco captará una frecuencia

$$f_b = \frac{v}{v - v_d} f_d = \frac{1500 \text{ m s}^{-1}}{1500 \text{ m s}^{-1} - 10 \text{ m s}^{-1}} 10000 \text{ Hz} = 10.067 \text{ Hz}$$

67 Hz más aguda que el sonido emitido por el delfín. Comparando con el Ejemplo 5.31 deducimos que, por tratarse de una propagación en agua, la variación relativa de frecuencias es mucho menor en el caso considerado aquí:

$$\frac{\Delta f}{f_d} = \frac{f_b - f_d}{f_d} = \frac{67 \text{ Hz}}{10000 \text{ Hz}} = 6,7 \times 10^{-3} = 0,67 \text{ por 100}$$

b) En cuanto empieza a alejarse hay que aplicar la relación con el signo positivo en el denominador

$$f_b = \frac{v}{v + v_d} f_d = \frac{1500 \text{ m s}^{-1}}{1500 \text{ m s}^{-1} + 10 \text{ m s}^{-1}} 10000 \text{ Hz} = 9933 \text{ Hz}$$

donde ahora el receptor del barco captará una leve disminución en la frecuencia.

En ambos casos hay que hacer notar que los aparatos para medir velocidades a partir del efecto Doppler en medio líquido o en aplicaciones al cuerpo humano deben tener gran precisión, como se desprende de la variación relativa que se acaba de calcular (0,67 por 100).

Consideremos ahora un ejemplo complementario al 5.31.

Ejemplo 5.33.

Una persona se halla al pie del andén cuando pasa, haciendo sonar su silbato, un tren circulando a 120 km h^{-1} . ¿Cuál será la variación relativa de frecuencia cuando se acerca, respecto a cuando se aleja? (velocidad del sonido en aire, $v = 344 \text{ m s}^{-1}$).

Comenzamos cambiando las unidades de la velocidad del tren:

$$v_t = 120 \text{ km h}^{-1} = 33,3 \text{ m s}^{-1}$$

Si llamamos f'_p a la frecuencia que oye la persona quieta en el andén cuando el tren se acerca a la estación y f''_p cuando se aleja, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{f'_p - f''_p}{f_t} &= \frac{v}{v - v_t} - \frac{v}{v + v_t} = \frac{2vv_t}{(v^2 - v_t^2)} = \\ &= \frac{2 \times 344 \text{ m s}^{-1} \times 33,3 \text{ m s}^{-1}}{344^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} - 33,3^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = 0,195 = 19,5 \text{ por 100} \end{aligned}$$

Si queremos tener en cuenta todos los casos combinados —fuente y emisor, acercándose o alejándose—, podemos acudir a la relación general

$$f_r = \frac{v \pm v_r}{v \mp v_e} f_e$$

donde los signos en el numerador significan que el emisor se acerca (+) o se aleja (-) del receptor, y los del denominador que el receptor se acerca (-) o se aleja (+) al emisor.

Pero hemos de estudiar un caso más general en el que interviene también la reflexión de las ondas. En efecto, los murciélagos o los aparatos de ecografía Doppler de los hospitales emplean esta técnica enviando ondas desde un emisor en reposo o móvil, y éstas llegan a un cuerpo –polilla, glóbulos rojos– que las refleja, transformándose de receptores en emisores, tal como se representa en la Figura 5.50. En este caso hay que aplicar dos veces la expresión del efecto Doppler, debido a la reflexión. Veamos este caso más complicado mediante algunos ejemplos.

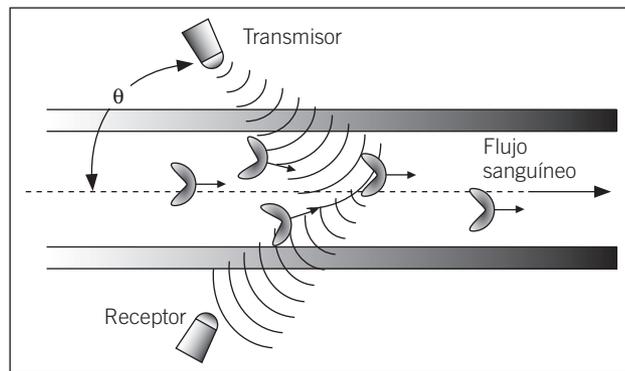


Figura 5.50. Esquema de una ecografía.

Ejemplo 5.34.

Un murciélago vuela a una velocidad de 10 m s^{-1} en dirección a una pared que refleja el sonido perfectamente, emitiendo ondas de frecuencia $f = 42 \times 10^3 \text{ Hz}$. ¿Cuánto vale la frecuencia que captan sus oídos del ultrasonido reflejado por la pared? (velocidad del sonido en aire, 344 m s^{-1}).

La frecuencia que «recibe» la pared f_p proveniente del murciélago (emisor) f_m es la que corresponde a un receptor quieto y un emisor móvil acercándose al receptor

$$f_p = \frac{v}{v - v_m} f_m$$

Pero la onda se refleja sobre la pared, que pasa a ser un emisor fijo, y el murciélago se convierte en un receptor móvil que capta una frecuencia f'_m , por lo que se cumple

$$f'_m = \frac{v + v_m}{v} f_p$$

y, combinando las dos relaciones, tenemos la frecuencia que le llega f'_m , tras ser emitida por él mismo y reflejada por la pared

$$f'_m = \frac{v + v_m}{v} f_p = \frac{v + v_m}{v} \frac{v}{v - v_m} f_m = \frac{v + v_m}{v - v_m} f_m$$

Sustituyendo los valores del enunciado, deducimos la diferencia entre la frecuencia que emite y la que recibe

$$\frac{f'_m - f_m}{f_m} = \frac{v + v_m}{v - v_m} - 1 = 2 \frac{v_m}{v - v_m} = 2 \frac{10 \text{ m s}^{-1}}{344 \text{ m s}^{-1} - 10 \text{ m s}^{-1}} = 0,06$$

lo que indica que la variación es tan sólo del 6 por 100.

Por motivos técnicos, la Policía de Tráfico usa aparatos de radar (ondas electromagnéticas) para captar las infracciones de velocidad, pero para ese caso no sirven las ecuaciones del efecto Doppler que hemos deducido, sino otras distintas aplicables para las ondas electromagnéticas. Sin embargo, planteamos ahora un ejercicio como si el sistema usado fuese de ultrasonidos, para ilustrar el efecto que usa la Policía para multar a los que circulan con exceso de velocidad.

Ejemplo 5.35.

La Policía de Tráfico pone en funcionamiento un aparato emisor-receptor de ultrasonidos (en lugar del habitual de radar) de 70 kHz parado al borde de la autopista. Los ultrasonidos se emiten cuando un coche pasa (se aleja). a) Determínese qué umbral de frecuencias reflejadas por los coches y recibidas por el aparato corresponde a velocidades «legales» ($v_{\text{coche}} = v_c < 120 \text{ km h}^{-1}$). b) Un potente Ferrari Testarossa va a gran velocidad ($v_F = 230 \text{ km h}^{-1}$) y es detectado por el equipo de la Policía. ¿Qué variación relativa de la frecuencia capta el equipo de radar? ¿Podría un equipo con una resolución razonable captar las variaciones de frecuencia de los coches circulando a esas velocidades? (velocidad del sonido en aire, 344 m s^{-1}).

a) Comencemos calculando el valor de la velocidad del vehículo en ms^{-1} :

$$120 \text{ km h}^{-1} = 33,3 \text{ m s}^{-1}$$

El equipo de ultrasonidos (que suponemos está quieto) de la Policía emite y recibe la onda reflejada por un coche en movimiento. Se trata, pues, de un caso parecido al que vimos anteriormente. En primer lugar, la frecuencia que «llega» al coche f_c en movimiento valdrá

$$f_c = \frac{v - v_c}{v} f_p$$

puesto que el coche (receptor) se aleja del emisor de la Policía que le está enviando ultrasonidos con frecuencia f_p . Pero esas ondas son reflejadas por

el coche —que se convierte en reemisor móvil— y llegan al receptor del equipo de la Policía con una frecuencia

$$f_p' = \frac{v}{v + v_c} f_c$$

puesto que el coche se aleja del de la Policía. Combinando ambas expresiones se obtiene la relación entre la frecuencia emitida inicialmente y la recibida por el aparato de «poner multas»:

$$f_p' = \frac{v}{v + v_c} f_c = \frac{v}{v + v_c} \frac{v - v_c}{v} f_p = \frac{v - v_c}{v + v_c} f_p$$

y, aplicando los datos del enunciado, tenemos

$$f_p' = \frac{v - v_c}{v + v_c} f_p = \frac{344 \text{ m s}^{-1} - 33,3 \text{ m s}^{-1}}{344 \text{ m s}^{-1} + 33,3 \text{ m s}^{-1}} 70.000 \text{ Hz} = 57.644 \text{ Hz}$$

Para la situación que estamos estudiando, los cambios de frecuencia son del orden de $\Delta f = f_p' - f_p = 12.356 \text{ Hz}$, y la variación relativa es

$$\frac{|f_p' - f_p|}{f_p} = \frac{|57.644 - 70.000|}{70.000} = \frac{12.356}{70.000} = 0,18 = 18 \text{ por } 100$$

b) El Ferrari va a una velocidad $v_F = 230 \text{ km h}^{-1} = 63,9 \text{ m s}^{-1}$, así que el efecto Doppler se dejará sentir mucho más, dada la gran velocidad que lleva el coche. Podemos aplicar la expresión para la frecuencia recibida que hemos usado ya para coches que van a la máxima velocidad permitida

$$f_p' = \frac{v - v_F}{v + v_F} f_p = \frac{344 - 63,9}{344 + 63,9} 70.000 \text{ Hz} = 48.068 \text{ Hz}$$

y la variación relativa quedará

$$\frac{|f_p' - f_p|}{f_p} = \frac{|48.068 - 70.000|}{70.000} = \frac{21.932}{70.000} = 0,31 = 31 \text{ por } 100$$

que podría ser detectada con facilidad.

Veamos ahora un ejemplo que tiene cada vez una mayor aplicación en medicina. Para medir el flujo arterial se usa un transductor que emite y puede recibir ultrasonidos que son reflejados por los eritrocitos en el torrente sanguíneo. Para usar una técnica de barrido y hacerse una idea del movimiento del vaso y del movimiento en su interior, el transductor se coloca formando un pequeño ángulo ϕ —lo más pequeño posible— con la dirección del flujo, tal como se indica en la Figura 5.51.

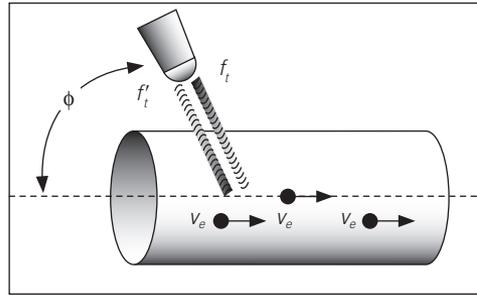


Figura 5.51. Esquema de los aparatos basados en el efecto Doppler usados en medicina.

Como el transductor está en reposo, la ecuación para el doble efecto Doppler –el de ida más el de vuelta– queda de forma parecida a la que hemos visto en el problema del murciélago:

$$f'_t = \frac{v + v_e \cos \phi}{v} = \frac{v}{v - v_e \cos \phi} f_t = \frac{v + v_e \cos \phi}{v - v_e \cos \phi} f_t \quad [72]$$

donde hay que tener en cuenta únicamente la componente del movimiento en la dirección del transductor: ésta es la razón por la que aparecen los términos con $\cos \phi$ y que el flujo se aleja del transductor. La frecuencia f_t es la nominal del transductor, es decir, la que tienen las ondas que llegan a los eritrocitos móviles –se mueven con velocidad v_e –, mientras que f'_t es la que le llega, tras la reflexión.

Si tenemos en cuenta que la velocidad de los eritrocitos es mucho menor que la del sonido ($v_e \ll v$), la relación anterior se puede simplificar y se deduce una fórmula para la diferencia entre la frecuencia emitida y la recibida tras reflejarse las ondas sobre los eritrocitos, que resulta muy útil para deducir velocidades de flujo a partir del efecto Doppler:

$$f'_t = \left(1 + \frac{2v_e \cos \phi}{v} \right) f_t = f_t + f_t \frac{2v_e \cos \phi}{v} \quad [73]$$

es decir, la variación relativa de frecuencias que capta el transductor, que es a la vez emisor y receptor, queda simplemente

$$\frac{\Delta f}{f_t} = \frac{f'_t - f_t}{f_t} = \frac{2v_e \cos \phi}{v} \quad [74]$$

Apliquemos esta fórmula a la determinación del flujo sanguíneo en un ejemplo.

Ejemplo 5.36.

Un transductor que se usa para medir el flujo sanguíneo mediante el efecto Doppler emite ultrasonidos con $f = 0,75$ MHz. a) Determínese la frecuencia

que llega al receptor: b) ¿Qué precisión ha de tener la parte receptora del transductor para poder medir con precisión la velocidad típica $v = 10 \text{ cm s}^{-1}$ de los eritrocitos en una arteria superficial? (Supóngase que el transductor se enfoca prácticamente paralelo a la arteria; velocidad del sonido en sangre, $v = 1.500 \text{ m s}^{-1}$.)

a) Con la expresión aproximada [73] obtenemos

$$f'_i = \left(1 + \frac{2v_e \cos \phi}{v}\right) f_i = \left(1 + \frac{2 \times 0,1 \text{ m s}^{-1}}{1500 \text{ m s}^{-1}}\right) \times 0,75 \times 10^6 \text{ Hz} = 750895 \text{ Hz}$$

b) La expresión [74] deducida anteriormente nos permite hallar directamente la precisión necesaria, pues ésta es simplemente la variación relativa de la frecuencia:

$$\frac{f'_i - f_i}{f_i} = \frac{2v_e \cos \phi}{v} = \frac{2 \times 0,1}{1500} = 1,33 \times 10^{-4} = 0,013 \text{ por } 100$$

es decir, esos aparatos han de poder discriminar variaciones en la frecuencia de uno sobre 10^4 .

Mediante la combinación de la ecografía con el efecto Doppler se ha desarrollado una técnica médica llamada ecografía Doppler, que se emplea especialmente en cardiología. El fundamento de esta técnica es el mismo que el de la ecografía, pero ahora la señal es reflejada por los distintos tejidos u órganos que están en movimiento. Como consecuencia, el eco correspondiente estará sometido al efecto Doppler. Sintetizando, mediante un equipo electrónico adecuado, los desplazamientos de frecuencia que se producen en los distintos puntos de la superficie en la que se reflejan los ultrasonidos se consigue una imagen a tiempo real del movimiento de una zona del corazón o de vasos sanguíneos relativamente pequeños. De este modo se pueden realizar intervenciones, sin necesidad de estar irradiando con rayos X la parte del organismo que se ha de intervenir.

Analícemos ahora la situación en que las velocidades del emisor o del receptor superan la del sonido. Si el receptor se acerca hacia un emisor fijo, la fórmula que dedujimos anteriormente sigue siendo válida; si se aleja, nunca le alcanzará la onda. Pero cuando el emisor se mueve superando la velocidad del sonido, las ondas se apilontonan detrás del emisor, tal como se representa en la Figura 5.52. Si se emite una onda esférica en el punto A transcurrido un lapso de tiempo Δt , su frente habrá recorrido una distancia $v\Delta t$; en el mismo tiempo el emisor habrá avanzado desde A hasta B una distancia $v_e\Delta t$. Como $v_e > v$, las ondas quedan encerradas en un cono cuya anchura está determinada por el ángulo α . Este ángulo viene dado por la expresión

$$\text{sen } \alpha = \frac{v\Delta t}{v_e\Delta t} = \frac{v}{v_e} = M^{-1} \quad [75]$$

donde M es el llamado *número de Mach*, definido como $M = v_e/v$. Nótese que cuanto mayor sea la velocidad del emisor, más agudo será el cono de sonido. Ese cono es un frente de onda que lleva una gran energía. Es la llamada *onda de choque*, que se produce, por ejemplo, cuando un avión vuela a una velocidad superior a la del sonido («rompe la barrera del sonido»), lo cual se deja oír en forma de un enorme estruendo que produce a veces rotura de cristales en las viviendas.

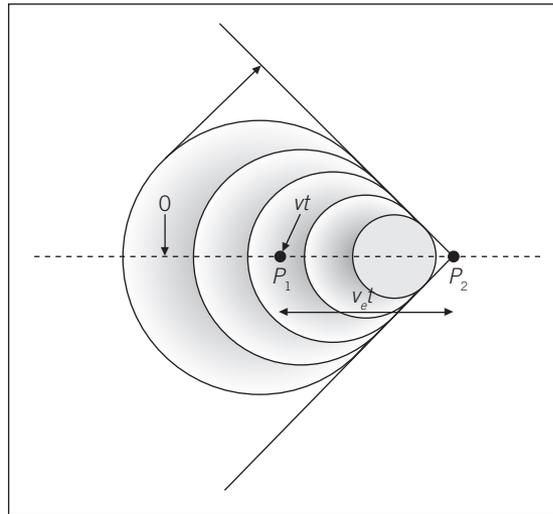


Figura 5.52. Esquema de las ondas de choque.

Las ondas de choque se pueden producir también con ultrasonidos, mediante un mosaico de elementos piezoeléctricos, dispuestos de tal modo que envían ondas de choque focalizadas hacia cálculos renales o biliares. Esta técnica se conoce como *litotricia* y el sistema recibe el nombre de *litotritor*. Unos pulsos eléctricos de alto voltaje y corta duración producen ondas de

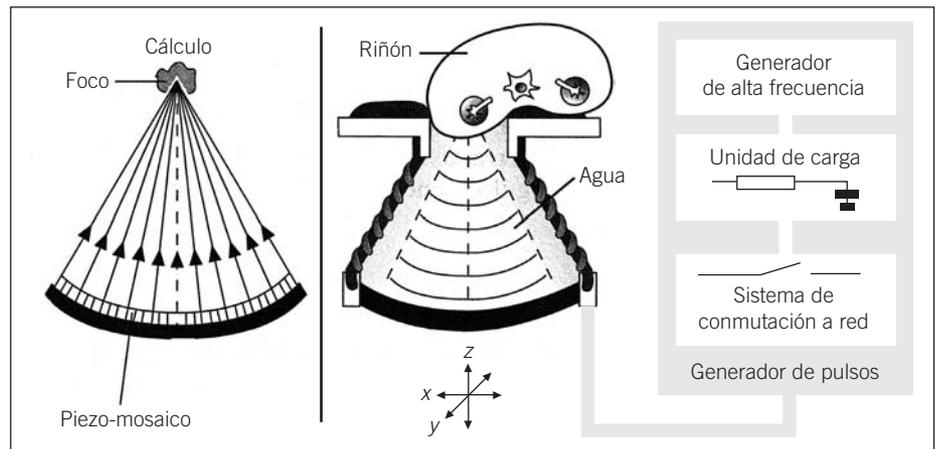


Figura 5.53. Esquema de un litotritor utilizado para eliminar cálculos renales.

choque que se transmiten a través de un baño de agua en contacto con el paciente. Los tejidos blandos se deforman fácilmente al paso de la onda, pero las frecuencias empleadas y la alta energía que transmiten hace posible desmenuzar los cálculos. Este proceso puede ser seguido simultáneamente por ecografía mediante un transductor acoplado al sistema.

Problemas propuestos

1. El asiento de un tractor está montado sobre unos muelles. Cuando sobre él se sienta un hombre de 70 kg, la frecuencia característica de vibración es de 7 Hz. ¿Cuál es la frecuencia característica cuando se sienta sobre él un niño de 25 kg?

Resultado: $f = 11,71$ Hz.

2. La energía elástica de un muelle se expresa como $U = 1/2 kx^2$, donde k es su constante elástica y x el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio. Los músculos de las alas de un insecto tienen una constante elástica del orden de $k = 6 \times 10^4$ N m⁻¹. La amplitud del movimiento de las alas es 10⁻² m y la constante de rozamiento de las alas con el aire vale 10⁻² s g. La masa del ala es 10⁻² g. Calcular: a) la frecuencia del movimiento de las alas; b) la potencia necesaria para volar, suponiendo que el movimiento es oscilatorio armónico amortiguado.

Resultados: a) $f = 1,23$ Hz; b) $Pot = 3,69 \times 10^{-8}$ W.

3. Una antena de radar emite radiación electromagnética ($c = 3 \times 10^8$ m s⁻¹) de 0,03 m de longitud de onda durante 0,5 s. a) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas emitidas? b) ¿Cuántas ondas completas se emiten durante este intervalo de tiempo? c) ¿Cuál es la longitud del tren de ondas emitido durante este intervalo?

Resultados: a) 10¹⁰ Hz; b) 5 × 10⁹ s; c) 1,5 × 10⁸ ondas.

4. Las olas de gran amplitud en la superficie de un fluido son debidas a la gravedad y su velocidad de propagación depende de la longitud de onda λ según la expresión

$$c = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \sqrt{\lambda g}$$

Un barco en movimiento genera olas de diversas longitudes. Justificar que las que llegan primero a la costa son las más largas.

5. Un alambre metálico es estirado por una fuerza de 135 N entre dos soportes rígidos separados 50 cm. El diámetro del alambre es de 0,35 mm y la densidad del metal 8,8 g cm⁻³. a) ¿Cuál es la velocidad del sonido en dicho alambre? b) ¿Cuánto vale la frecuencia fundamental de la nota que emite cuando se le hace vibrar transversalmente?

Resultados: a) 399,3 m s⁻¹; b) 399,3 Hz.

6. En la interpretación de un aria operística, una cuerda vocal de la soprano emite frecuencias comprendidas entre los 5000 y 500 Hz. Dicha cuerda vocal tiene una longitud de 1 cm y pesa 0,5 g. ¿Cuáles son las tensiones máxima y mínima de dicha cuerda?

Resultados: $T_{\text{máx}} = 500$ N, $T_{\text{mín}} = 5$ N.

7. Una cuerda de violín de 0,33 m de longitud se afina a una frecuencia fundamental de 440 Hz. Una cuerda de violoncelo de 0,69 m se afina a una frecuencia fundamental de 220 Hz. Si ambas cuerdas están sometidas a la misma tensión, ¿cuál es la relación entre las respectivas masas por unidad de longitud?

Resultado: 0,91.

8. Un alambre metálico tiene las siguientes características: longitud, $l_0 = 1$ m; coeficiente de dilatación lineal, $\alpha = 1,5 \times 10^{-5}$ K⁻¹; módulo de Young, $E = 2,0 \times 10^{11}$ N m⁻²; densidad, $\rho = 9 \times 10^3$ kg m⁻³. Si el alambre está sujeto a dos extremos rígidos y la tensión es nula a 20 °C: a) ¿cuánto vale la velocidad transversal del sonido a 8 °C?; b) ¿cuánto vale la frecuencia fundamental?

Resultados: a) $v = 63,2$ m s⁻¹; b) $f_0 = 31,6$ Hz.

9. A 20 °C el coeficiente de compresibilidad del aire es 150000 N m⁻² y la densidad del aire es 1,3 kg m⁻³. Calcular la velocidad de propagación del sonido en esas condiciones. Suponiendo que el coeficiente adiabático del aire es 1,4, calcular su masa molar media.

Resultados: $v = 339,6$ m s⁻¹; $M_m = 29,6$ g mol⁻¹.

10. Frecuentemente se utiliza una lámina de cristal de cuarzo para controlar la frecuencia de un circuito eléctrico oscilante. Se originan ondas longitudinales en la lámina con producción de vientres en las caras opuestas. La frecuencia fundamental de vibración viene dada por la expresión

$$f = 2,87 \times 10^5 d^{-1} \text{ Hz}$$

donde f es la frecuencia y d el grosor de la lámina expresado en centímetros. Determinar: a) el módulo de Young de la placa de cuarzo; b) el grosor de la lámina necesario para una frecuencia de 1 200 kHz (densidad del cuarzo, $2,66 \text{ g cm}^{-3}$).

Resultados: a) $8,77 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$; b) 0,23 cm.

11. Un vaso de cristal de roca tiene paredes de 4 mm de grosor. Hallar qué frecuencia emitirá al ser golpeado suavemente. Módulo de Young, $E = 5 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$; densidad, $2,7 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Resultado: $5,4 \times 10^5 \text{ Hz}$.

12. Un tubo de órgano mide 17 cm de longitud y está abierto por uno de sus extremos. Emite sonidos de 1,5 kHz de frecuencia. Determinar la frecuencia fundamental y el armónico de este sonido (velocidad del sonido, $c = 340 \text{ m s}^{-1}$).

Resultados: a) 500 Hz; b) el sonido de 1.500 Hz es el primer armónico.

13. Se hace sonar un diapasón en el extremo abierto de un tubo vertical, cuyo extremo inferior se halla sumergido en agua. A 27°C se obtiene resonancia cuando la superficie del agua está 16,4 cm por debajo del extremo superior abierto del tubo. Si la velocidad del sonido a esta temperatura es de 347 m s^{-1} : a) ¿cuál es la frecuencia del diapasón?; b) ¿a qué altura se encontrará la siguiente resonancia si se disminuye el nivel del agua?

Resultados: a) $f_d = 529 \text{ Hz}$; b) $L' = 49,2 \text{ cm}$.

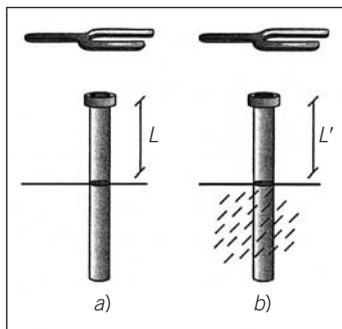


Figura 5.54.

14. El módulo de Young de la membrana basilar de una persona es el doble del normal. En qué sonidos tendrá dificultades de audición: ¿los agudos o los graves? ¿Por qué?

15. La intensidad de una onda sonora se relaciona con la amplitud Δp de las perturbaciones de presión mediante la relación

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p)^2}{\rho v}$$

donde ρ es la densidad del medio y v la velocidad del sonido en el mismo. Hallar las amplitudes de presión correspondientes a ondas de 10 y 150 dB en aire ($\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$, $v = 340 \text{ m s}^{-1}$).

Resultados: a) $8,25 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-2}$; b) $8,25 \times 10^2 \text{ N m}^{-2}$.

16. ¿En qué factor se debe modificar la amplitud de presión de una onda sonora que pasa del aire al agua para mantener su intensidad? [aire: $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$; $v = 340 \text{ m s}^{-1}$; agua: $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; $v = 1500 \text{ m s}^{-1}$]. (Esta operación es llevada a cabo, en parte, por la cadena de huesecitos que unen el tímpano con el oído interno.)

Resultado: Se debe aumentar en un factor 66,42.

17. Sabiendo que el conducto auditivo, desde el tímpano hasta el oído externo, tiene una longitud aproximada de 2,4 cm, justificar por qué el menor umbral de audición, es decir, la máxima sensibilidad auditiva, está entre los 3 y 4 kHz de frecuencia ($c = 340 \text{ m s}^{-1}$). (Indicación: considérense las ondas sonoras estacionarias en un tubo abierto por un extremo y cerrado por otro.)

18. Para poder detectar objetos mediante ondas, la longitud de onda ha de ser, como máximo, del orden de la dimensión del objeto. A partir de este criterio: a) calcular cuál ha de ser la frecuencia de los ultrasonidos de un murciélago que se alimenta de insectos cuyas dimensiones son del orden de 10^{-3} m (velocidad del sonido en el aire, $c = 340 \text{ m s}^{-1}$); b) si los delfines emiten ondas ultrasónicas con una frecuencia de $2,5 \times 10^5 \text{ Hz}$, ¿qué grosor pueden tener, como máximo, las cuerdas de una red de pescar delfines (velocidad del sonido en el agua, $c = 1500 \text{ m s}^{-1}$)?

Resultados: a) $f = 3,4 \times 10^5 \text{ Hz}$; b) $d = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$.

19. Para conseguir microemulsiones de aceite en agua se utilizan ultrasonidos. ¿Cuál deberá ser la frecuencia de éstos si se pretende conseguir gotas del orden de $1 \mu\text{g}$ (10^{-6} g) de aceite de densidad $0,995 \text{ g cm}^{-3}$? (velo-

cidad del sonido en agua y aceite, $1\,500\text{ m s}^{-1}$). (*Indicación:* el radio de las gotas será del orden de la longitud de onda del ultrasonido.)

Resultado: $2,41 \times 10^7\text{ Hz}$.

20. En microscopía acústica se utilizan ondas de hasta 8 GHz ($1\text{ GHz} = 10^9\text{ Hz}$) en agua (velocidad del sonido, $1\,500\text{ m s}^{-1}$). ¿Cuál será el poder de resolución de este microscopio? ¿Cuánto valdría si se usa helio líquido ($c = 600\text{ m s}^{-1}$) en vez de agua?

Resultados: a) $187,5\text{ nm}$; b) 75 nm .

21. Un eritrocito típico tiene un radio de unos $5 \times 10^{-6}\text{ m}$. Los instrumentos basados en el efecto Doppler dependen de la reflexión de los ultrasonidos sobre los eritrocitos y utilizan frecuencias ultrasónicas. a) Si la frecuencia de la fuente es de 10^7 Hz , ¿cuántos eritrocitos pueden entrar en una longitud de onda del sonido? b) ¿Por qué se utilizan frecuencias elevadas? (velocidad del sonido en la sangre, $1\,570\text{ m s}^{-1}$).

Resultado: 16 eritrocitos aproximadamente.

22. Si una mosca produce un sonido del nivel acústico de 1 dB , ¿cuál será el nivel acústico correspondiente a 10 moscas? Si el nivel acústico de un spray matamoscas es de 2 dB , ¿cuál será el nivel acústico de 10 moscas más el spray?

Resultados: a) 11 dB ; b) $11,5\text{ dB}$.

23. El sistema auditivo humano puede distinguir una diferencia de intensidades de $0,6\text{ dB}$ a una determinada frecuencia. ¿En qué porcentaje se debe aumentar la potencia para producir en el sonido un aumento de $0,6\text{ dB}$?

Resultado: 15 por 100.

24. La intensidad de una onda a 5 m de la fuente sonora corresponde a 10 dB . ¿A qué distancia de la fuente la intensidad corresponderá a 5 dB ?

Resultado: $8,89\text{ m}$.

25. Un sistema acústico público está ajustado a un nivel de 70 dB para ser escuchado a 10 m de distancia. ¿Qué nivel, expresado en la escala decibélica, se percibe a 50 m ?

Resultado: $\beta' = 56\text{ dB}$.

26. El máximo de sensibilidad de las «orejas» (membranas en un marco cuticular) de las polillas está a

60 kHz (adaptada a la frecuencia de los gritos ultrasónicos de los murciélagos). El mecanismo de huida de la polilla se dispara cuando el nivel de intensidad de los ultrasonidos supera los 40 dB . a) ¿Cuál es la longitud de onda correspondiente a los ultrasonidos de 60 kHz ? ($c = 340\text{ m s}^{-1}$). b) Si el nivel de intensidad de los ultrasonidos emitidos por el murciélago es de 80 dB a 10 cm de su cabeza, ¿a qué distancia del murciélago reaccionará la polilla?

Resultados: a) $\lambda = 5,7 \times 10^{-3}\text{ m}$; b) $r = 10\text{ m}$.

27. Un murciélago emite pulsos breves con una frecuencia de 80.000 Hz . Si el murciélago vuela hacia un obstáculo con una velocidad de 20 m s^{-1} , ¿cuál es la frecuencia de la onda reflejada que detecta el animal?

Resultado: $f = 90.332,6\text{ Hz}$.

28. Un murciélago vuela en círculo con un radio aproximado de 8 m , con una velocidad angular de $4\pi\text{ rad min}^{-1}$, emitiendo pulsos ultrasónicos de 50 kHz . ¿Cuánto valen las frecuencias máxima y mínima que capta un zoólogo que escucha al murciélago con un detector especial a gran distancia del mismo? (velocidad del sonido, 330 m s^{-1}).

Resultados: a) $f_{\text{máx}} = 50.255,16\text{ Hz}$; b) $49.747,42\text{ Hz}$.

29. Una fuente emite con una frecuencia de 1.000 Hz y se mueve hacia la derecha con velocidad de 30 m s^{-1} . A la derecha de la fuente hay una gran pared lisa reflectante que se desplaza hacia la izquierda con velocidad de 120 m s^{-1} . a) ¿Cuánto ha avanzado una onda emitida al cabo de $0,01\text{ s}$? b) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas emitidas por la fuente hacia adelante? c) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas reflejadas en la pared? d) Un oyente situado sobre la fuente, ¿con qué frecuencia percibe las ondas reflejadas en la pared? (velocidad del sonido, 330 m s^{-1}).

Resultados: a) $3,3\text{ m}$; b) $0,3\text{ m}$; c) $0,14\text{ m}$; d) $2\,571,4\text{ Hz}$.

30. Un murciélago es capaz de distinguir entre una presa en reposo y una presa cuyas alas estén en movimiento a partir de la modulación de frecuencia del eco producido por el sonido reflejado en las alas. Supongamos que un insecto cuyas alas tienen una longitud de 3 mm las bate con frecuencia de 200 Hz y se mueve longitudinalmente con velocidad pequeña. Dicho murciélago emite ondas de 83 kHz . ¿Cuál será el máximo corrimiento Doppler que detectará el murciélago?

Resultado: 1.918 Hz .

31. Un barco de pesca faena en aguas jurisdiccionales extranjeras. Usa un «sonar» que emite ondas sonoras de 500 Hz de frecuencia. Se mueve a una velocidad de 15 km h⁻¹. Un guardacostas extranjero, que está en reposo, capta las ondas de sonar emitidas por el barco de pesca que se aleja. ¿Cuánto vale la longitud de onda que capta el guardacostas? Si en su huida el barco detecta un banco de peces que se mueven en la misma dirección, a una velocidad de 36 km h⁻¹, ¿cuál será la frecuencia de la onda de «sonar» reflejada en los peces, detectada por el barco de pesca? (velocidad del sonido en el agua, $c = 1.500 \text{ m s}^{-1}$. (Indicación: hay un doble efecto Doppler.)

Resultados: $\lambda = 3,01 \text{ m}$; $fr = 502,12 \text{ Hz}$.

32. Una de las técnicas para determinar el flujo sanguíneo en un vaso sanguíneo superficial consiste en medir el corrimiento Doppler de los ultrasonidos. En una de esas determinaciones se detecta un corrimiento Doppler de 100 Hz en un instrumento que tiene una fuente de frecuencia de $5 \times 10^6 \text{ Hz}$. ¿Cuánto vale la velocidad media de la sangre que circula por el vaso? (velocidad del sonido en la sangre, $c = 1.570 \text{ m s}^{-1}$.)

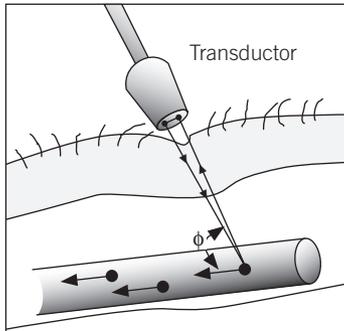


Figura 5.55.

Resultado: $v_c = 1,57 \text{ cm s}^{-1}$.

33. La velocidad media del flujo de sangre en la aorta durante la sístole es de $1,5 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$. a) ¿Cuál es el corrimiento Doppler en un instrumento con una señal de frecuencia 10^5 Hz ? (velocidad del sonido en la sangre, 1.570 m s^{-1}). b) ¿Qué método sugeriría para detectarlo?

Resultados: a) 1,91 Hz; b) pulsaciones.

CAPÍTULO

6

Electricidad y magnetismo:
potencial de membrana, corriente
nerviosa, resonancia magnética

La interacción electromagnética determina las propiedades de la materia a nivel atómico y molecular. Por ello, el estudio de la biología fundamental exige un conocimiento claro de algunos conceptos eléctricos. Trataremos de poner de manifiesto que con unos pocos conceptos básicos se puede llegar a una visión considerablemente afinada y concreta de muchos fenómenos biológicos.

No se puede tener una idea completa de la biología celular, por ejemplo, si se ignora que el interior de las células se halla a un potencial eléctrico diferente del exterior, y que esta diferencia de potencial tiene repercusiones bioenergéticas notables. De hecho, aunque dicha diferencia de potencial sea apenas de una décima de voltio, el campo eléctrico en el interior de la membrana celular es intensísimo, debido al pequeño grosor de ésta. Este intenso campo determina la estructura de muchos de los canales que atraviesan la membrana y juega un papel fundamental en el transporte de materia a través de la misma y, especialmente, en la transmisión del impulso nervioso. También en el interior de las mitocondrias aparecen diferencias de potencial que resulta imprescindible tener en cuenta en el estudio de fenómenos como la fosforilación oxidativa. Estos y otros ejemplos son las motivaciones principales de este capítulo.

Si bien el magnetismo no juega un papel tan directamente destacado en la biología celular, tiene importancia en algunos fenómenos concretos. Por otro lado, creemos imprescindibles algunos conceptos básicos referentes al comportamiento de las cargas en el seno de campos magnéticos, que constituyen la base de técnicas espectroscópicas para la medida de masas de iones o de técnicas tan poderosas como la resonancia magnética nuclear.

6.1. Interacción entre cargas. Ley de Coulomb. Potencial eléctrico

En 1785 Coulomb consiguió establecer una ecuación de la fuerza eléctrica \vec{F} que actúa entre dos cargas, q_1 y q_2 , separadas una distancia r . Esta fuerza viene dada por la *ley de Coulomb* y es repulsiva si las cargas son del mismo tipo y atractiva si son de signo contrario. El módulo de la fuerza viene dado por

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad [1]$$

La constante K en el vacío o en el aire vale $K = 8,99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$, siendo C el culombio, o unidad de carga. Es frecuente expresar K como $K = (4\pi\epsilon)^{-1}$, con ϵ la permitividad eléctrica del vacío. En el agua, en las membranas biológicas, en los diversos materiales que estén separando las cargas, dicho valor de K debe dividirse por un factor que se denomina constante dieléctrica del material, ϵ' .

Es interesante conocer el papel biológico que juega la constante dieléctrica relativa. Para el agua, $\epsilon' = 80$; ello significa que al introducir dos iones en el agua, la fuerza electrostática entre ambos disminuye en un factor 80: por este motivo, la sal común y otros compuestos iónicos se disuelven en el agua. Para transferir un ion de carga y radio dados de

un medio con una constante dieléctrica a otro medio con una constante dieléctrica menor, se requiere trabajo. Así, por ejemplo, la constante dieléctrica de las proteínas es del orden de 10, mientras que la de los lípidos es del orden de 2,5: debido a esto, transferir un ion desde el agua hasta el interior de la bicapa lipídica que compone buena parte de la membrana celular es mucho más costoso que transferirlo desde el agua hasta el interior de una proteína. No es de extrañar, pues, que los canales iónicos sean proteínas y no lípidos.

Hacia 1860, y para evitar el concepto de interacción a distancia sin ningún intermediario, Faraday y Maxwell introdujeron el importante concepto de *campo eléctrico*. Desde el punto de vista puramente cuantitativo, el campo eléctrico \vec{E} en un punto del espacio no es más que la fuerza por unidad de carga eléctrica positiva situada en aquel punto, es decir,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad [2]$$

Conceptualmente, el campo eléctrico actuaría como transmisor de la fuerza eléctrica desde una carga a otra. La carga a la que se debe el campo produciría así una alteración en los diversos puntos del espacio, de modo que al colocar una segunda carga en algún punto, ésta se vería afectada por una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$. El papel del campo eléctrico adquirió toda su importancia práctica y conceptual cuando Maxwell unificó, en 1864, las fuerzas eléctricas y magnéticas y demostró que las perturbaciones de los campos eléctricos y magnéticos se propagan con la velocidad de la luz, de modo que ésta se trata, de hecho, de una onda electromagnética.

Otro concepto muy importante en electricidad es el de *potencial eléctrico*. Para tratar de él hemos de introducir en primer lugar la *energía potencial electrostática*.

El trabajo necesario para llevar una carga q desde un punto 1 a un punto 2 en presencia de un campo eléctrico \vec{E} es la suma de la fuerza ($q\vec{E}$) a lo largo del camino, es decir,

$$W_{12} = \int_1^2 -(q\vec{E}) \cdot d\vec{l} \quad [3]$$

Hemos introducido el signo menos porque W indica el trabajo realizado por el observador sobre la carga: la fuerza realizada por el observador debe ser igual y de signo opuesto a la fuerza realizada por el campo eléctrico, para poder trasladar la carga de un punto a otro sin variar su energía cinética. Puede demostrarse fácilmente que para la fuerza electrostática el cálculo que aparece en [3] es independiente del camino concreto entre 1 y 2, es decir, que la fuerza electrostática es conservativa. Por ello, es posible definir la energía potencial electrostática en un punto 2 arbitrario como

$$U(2) = U(1) + W_{12} = U(1) + \int_1^2 -(q\vec{E}) \cdot d\vec{l} \quad [4]$$

Aquí el punto 1 es un punto cualquiera, que se utilizará como referencia para definir la energía potencial de los restantes puntos del espacio. Es habitual definir el *potencial eléctrico* como la energía potencial electrostática

por unidad de carga, $V(2) = U(2)/q$. La unidad SI de potencial eléctrico es el *voltio* (V). Según [4], el campo eléctrico se relaciona con el potencial como

$$\vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{r}} \quad [5]$$

donde $d/d\vec{r}$ representa el gradiente de $V(\vec{r})$, y el vector \vec{r} indica la posición. Si el campo es uniforme, podremos escribir $\vec{E} = \Delta V/\Delta\vec{r}$. En el caso concreto de una membrana biológica típica, la diferencia de potencial entre el exterior y el interior es del orden de 80 mV, y el grosor de la membrana es de unos 40 nm. El campo eléctrico en el seno de la membrana vendrá dado en módulo por $E = (80 \times 10^{-3} \text{ V})/(40 \times 10^{-9} \text{ m}) = 2 \times 10^6 \text{ V/m}$. ¡Este campo es enorme! El campo eléctrico de la atmósfera en contacto con la superficie terrestre es del orden de 200 V/m. Si una atmósfera está polucionada, la conductividad eléctrica del aire disminuye y el campo eléctrico aumenta. Por este motivo se pueden utilizar las medidas del campo eléctrico como indicadores del grado de polución de la atmósfera superficial.

El concepto de potencial eléctrico tiene aplicación inmediata en Biología. Hemos comentado, en efecto, que existe una diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la célula. En concreto, el interior se halla, en la célula en reposo, a aproximadamente -80 mV cuando se toma el exterior como potencial nulo de referencia. El trabajo eléctrico que hay que realizar para expulsar un ion positivo de carga q desde el interior hasta el exterior de la célula es pues $W = q\Delta V$, con ΔV la diferencia de potencial entre el exterior y el interior. Este trabajo es suministrado por las bombas moleculares que se hallan en la membrana celular, que obtienen su energía por hidrólisis del ATP. Asimismo, en algunas células el paso de protones H^+ desde el exterior hasta el interior suministra energía que es utilizada por la célula para mover el flagelo o para fosforilar ADP produciendo ATP, molécula que almacena la energía suministrada por este procedimiento.

El campo eléctrico total producido por varias cargas es la suma de los campos eléctricos producidos por cada una de ellas. La misma aditividad se cumple para el potencial eléctrico. Presentamos a continuación dos ejemplos que ilustran el cálculo del campo y del potencial en situaciones concretas.

Ejemplo 6.1

Comparar la fuerza electrostática y la fuerza gravitatoria entre dos protones ($m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$; constante de Coulomb $9 \times 10^9 \text{ N} \times \text{m}^2/\text{C}^2$; constante de la gravitación $6,7 \times 10^{-11} \text{ N} \times \text{m}^2/\text{kg}^2$; carga del protón $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$).

La fuerza electrostática es repulsiva y vale

$$F_{\text{electr}} = K \frac{e^2}{r^2}$$

La fuerza gravitatoria es atractiva y vale

$$F_{\text{grav}} = G \frac{m_p^2}{r^2}$$

El cociente entre ambas fuerzas es independiente de la distancia y vale

$$\frac{F_{electr}}{F_{grav}} = \frac{Ke^2}{Gm_p^2} = \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{6,7 \cdot 10^{-11} (1,7 \cdot 10^{-27})^2} = 1,19 \cdot 10^{36}$$

Observamos que la fuerza electrostática es enormemente superior a la gravitatoria. En el cosmos predomina la fuerza gravitatoria porque la masa es siempre positiva, en tanto que las cargas pueden ser positivas o negativas y ambas se compensan. De esta gran disparidad de fuerzas se deduce también que la atracción gravitatoria no puede explicar la cohesión de los núcleos atómicos, es decir, no justifica por qué los protones, que se repelen con una fuerza muy intensa, no salen despedidos hacia el exterior. Veremos que para mantener esta cohesión se necesita la interacción nuclear fuerte. Finalmente, es curioso saber que los cálculos detallados indican que si la razón de ambas fuerzas, en lugar de valer 10^{36} , fuera inferior a 10^{34} o superior a 10^{38} nosotros no podríamos existir, ya que el universo sería completamente diferente de como lo conocemos. En el primer caso la gravitación sería más intensa y el universo se habría colapsado antes de que se pudieran formar estrellas, y ahora sería un inmenso agujero negro. En el segundo caso, la expansión del universo habría sido tan rápida que los gases que lo componen habrían quedado demasiado diluidos para poder formar estrellas, y el universo sería un espacio lleno de un polvo muy tenue de hidrógeno y de helio sin ninguna estrella. Las condiciones que deben satisfacer las constantes físicas universales (como K , G , e o m_p) para que pueda existir vida son muy restrictivas.

Ejemplo 6.2.

Dos cargas puntuales de 10 y 4 g de masa, y cargas $q_1 = 5 \mu\text{C}$ y $q_2 = 3 \mu\text{C}$ del mismo signo, se mueven una hacia la otra. Cuando la distancia entre ellas es de 1 m, sus velocidades respectivas son $v_1 = 10^5 \text{ m s}^{-1}$ y $v_2 = 2 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$. ¿Hasta qué distancia mínima se aproximarán las cargas?

Para resolver este ejemplo aplicamos el principio de conservación de la energía. Como en el presente caso no hay disipación, la suma de la energía cinética y la potencial eléctrica debe conservarse. La energía cinética tiene la conocida expresión $\frac{1}{2}mv^2$, y la energía potencial electrostática entre dos cargas se puede escribir:

$$U = K \frac{q_1 q_2}{r}$$

donde K es la constante de la ley de Coulomb. Como esas cargas son de igual signo, se repelerán con mayor intensidad a medida que se acerquen entre sí, sufriendo ambas una deceleración que hace disminuir sus velocidades. Hay un punto en que ambas velocidades se anulan, y las partículas llegan a la separación mínima, para alejarse inmediatamente, en sentidos opuestos.

El punto en que están más próximas es aquel para el que toda la energía cinética que llevaban inicialmente las cargas se transforma íntegramente en energía potencial. Por tanto, dado que la energía total se conserva, podemos escribir:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + K \frac{q_1q_2}{r} = K \frac{q_1q_2}{r'}$$

donde $r = 1$ m y r' es la distancia a la cual se anulan las velocidades. Sustituyendo los valores del ejemplo tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}10 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} + \frac{1}{2}4 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 4 \times 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \\ & + 9 \times 10^9 \text{ N} \times \text{m}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{5 \times 10^{-6} \text{ C} \times 3 \times 10^{-6} \text{ C}}{1 \text{ m}} = \\ & = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \frac{5 \times 10^{-6} \text{ C} \times 3 \times 10^{-6} \text{ C}}{r'} \end{aligned}$$

La solución para r' es

$$r' = 1,03 \times 10^{-9} \text{ m}$$

6.2. Dipolos eléctricos

Muy a menudo, las cargas no se presentan en solitario, sino agrupadas en pares, una positiva $+q$ y otra negativa $-q$, ligeramente desplazada la una respecto a la otra, a una distancia l . Tal configuración se denomina dipolo eléctrico, y se llama momento dipolar al producto ql . Las propiedades de los dipolos eléctricos son de gran importancia en Biología, ya que muchas moléculas —algunos aminoácidos, canales proteínicos a través de las membranas, enzimas, etc.— tienen este tipo de estructura eléctrica.

Es fácil comprender que los dipolos eléctricos tenderán a alinearse con el campo eléctrico. Para ello basta ver la Figura 6.1, en la que se presentan las fuerzas que actúan sobre un dipolo en presencia de un campo eléctrico \vec{E} .

El estudio de las fuerzas nos indica cuál será la orientación final del dipolo. Resulta también útil llevar a cabo un estudio en términos de la energía potencial electrostática del dipolo en presencia del campo. La energía potencial de la carga $+q$ será $U(+q) = (+q)V(x_+)$ y la de la carga $-q$ será $U(-q) = (-q)V(x_-)$, donde x_+ y x_- son las componentes de las posiciones respectivas de las cargas en la dirección del campo eléctrico. Según la Figura 6.1, puede escribirse $x_+ = x_0 + (l/2) \cos \theta$, $x_- = x_0 - (l/2) \cos \theta$, por lo cual tendremos

$$\begin{aligned} U_{\text{dipolo}} &= U(+q) + U(-q) = (+q)[V(x_0) + (dV/dx)(l/2) \cos \theta] + \\ &+ (-q)[V(x_0) - (dV/dx)(l/2) \cos \theta] = ql (dV/dx) \cos \theta \end{aligned} \quad [6]$$

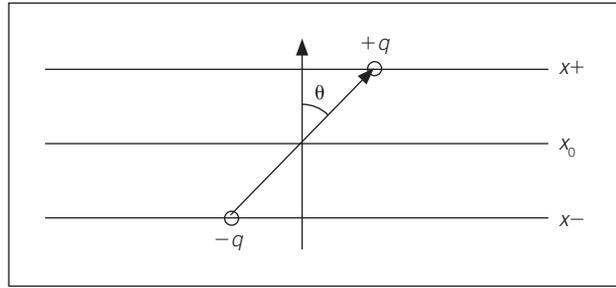


Figura 6.1. Dipolo en un campo eléctrico.

donde hemos llevado a cabo un desarrollo de $V(x_+)$ y $V(x_-)$ en serie de Taylor hasta el primer orden. Se acostumbra a definir el *momento dipolar eléctrico* con carácter vectorial, asignándole la dirección que une las dos cargas y, como sentido, el que va de la carga negativa a la positiva (ya hemos dicho que su módulo es ql). La energía potencial del dipolo será, si tenemos en cuenta que $E = -(dV/dx)$,

$$U_{\text{dipolo}} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad [7]$$

Así pues, la configuración de mínima energía será aquella en la que el momento dipolar \vec{p} sea paralelo al campo eléctrico \vec{E} . A continuación presentamos algunos ejemplos referentes a dipolos eléctricos.

Ejemplo 6.3.

Si un átomo está en el seno de un campo eléctrico \vec{E} , su distribución de carga varía y se produce un momento dipolar eléctrico $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, donde α es la polarizabilidad del átomo. a) Un átomo de polarizabilidad α está a una distancia r de un ion de carga $+e$, donde r es grande comparada con el tamaño del átomo, ¿cuál es el momento dipolar eléctrico inducido? b) ¿Cuál es la energía potencial del sistema formado por el átomo y el ion?

El campo eléctrico producido por el ion a una distancia r del mismo vale

$$|\vec{E}| = K \frac{e}{r^2}$$

por tanto, el momento dipolar eléctrico en el átomo vale en módulo

$$|\vec{p}| = \alpha |\vec{E}| = K\alpha \frac{e}{r^2}$$

La energía potencial de un dipolo \vec{p} en el seno de un campo eléctrico \vec{E} viene dada, según [7], por

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

En esta definición, el origen de la energía potencial corresponde a la situación en que el ángulo entre el momento dipolar eléctrico y el campo eléc-

trico es 90° . Por la misma razón, cuando el dipolo esté orientado paralelamente al campo, su energía potencial será negativa y la mínima posible, mientras que cuando el dipolo esté orientado en la dirección opuesta a la del campo, la energía potencial será máxima y positiva.

En este ejercicio, la dirección de p y de E coinciden y, por tanto, la energía potencial es

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE = -K \frac{e}{r^2} \left(K\alpha \frac{e}{r^2} \right) = -K^2 \alpha \frac{e^2}{r^4}$$

Ejemplo 6.4.

Calcular el potencial eléctrico producido por un dipolo eléctrico en función de la distancia y del ángulo.

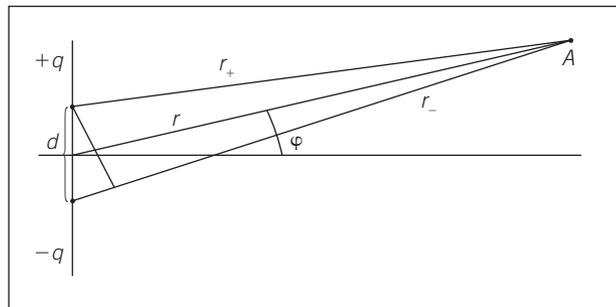


Figura 6.2. Campo producido por un dipolo.

Supongamos que se coloca un dipolo como se muestra en la Figura 6.2 y que se quiere calcular el potencial en un punto A situado a r_+ y r_- de las cargas positiva y negativa, respectivamente, cumpliéndose

$$r_+ \gg d \quad ; \quad r_- \gg d$$

El potencial producido por una carga puntual es $V = Kq/r$. En este caso

$$V_+ = K \frac{q}{r_+} \quad ; \quad V_- = -K \frac{q}{r_-}$$

El potencial total será

$$V_T = V_+ + V_- = Kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

Por otra parte, podemos escribir

$$r_+ \approx r - \frac{d}{2} \operatorname{sen} \varphi \quad ; \quad r_- \approx r + \frac{d}{2} \operatorname{sen} \varphi$$

donde r es la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto A . El potencial total quedará

$$V_T = Kq \frac{Kq}{r - \frac{d}{2} \operatorname{sen} \varphi} - \frac{Kq}{r + \frac{d}{2} \operatorname{sen} \varphi} = \frac{Kqd \operatorname{sen} \varphi}{r^2 - \frac{d^2}{4} \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

dato que igualmente $r \gg d$, se cumple $r^2 \gg d^2/4 \operatorname{sen}^2 \varphi$, con lo que podemos despreciar $d^2/4 \operatorname{sen}^2 \varphi$ frente a r^2 . En esas condiciones

$$V_T = \frac{Kqd}{r^2} \operatorname{sen} \varphi$$

Lo importante de esta expresión consiste en que, dependiendo del valor de φ , para un mismo r el potencial varía. Así, para $\varphi = 0$, $V_T = 0$; para $\varphi = 90^\circ$, $V_T = Kqd/r^2$ es máximo.

Gracias a este resultado, se puede comprender el fundamento sobre el que se basa la electrocardiografía. Mediante esta técnica se mide el potencial en una serie de electrodos colocados a lo largo del cuerpo. ¿Cómo están estos potenciales relacionados con el funcionamiento del corazón?

Las células nerviosas y musculares se comportan de una forma muy parecida desde el punto de vista eléctrico. En una célula muscular, antes de una contracción se produce una despolarización de su membrana; en una célula nerviosa, cuando un nervio transmite una señal, ocurre un proceso parecido.

En el corazón, una contracción viene precedida por una despolarización espontánea de unas fibras nerviosas localizadas en la aurícula derecha denominadas nódulo sino-auricular. Posteriormente, este proceso de despolarización se extiende por las aurículas. Los músculos de las aurículas están separados de los músculos ventriculares por tejidos conectivos que no transmiten los impulsos electroquímicos. La única conexión entre ambos se realiza a través de un tejido nervioso denominado nódulo aurículo-ventricular. Cuando la onda de despolarización llega a dicho nódulo, se extiende a lo largo de los ventrículos, produciendo su ulterior contracción. Independientemente de los detalles de este proceso, el modelo más sencillo consiste en suponer que esta despolarización hace que cada instante el corazón forme un dipolo eléctrico.

En la hipótesis más sencilla, se asimila el tronco humano a un triángulo equilátero con el dipolo cardiaco en su centro. La magnitud y dirección del mismo caracteriza la fase de contracción del músculo. Ambos parámetros se miden determinando el potencial eléctrico como mínimo en tres puntos mediante unos electrodos. Parametrizando el comportamiento normal, se puede también detectar, mediante estas simples medidas, anomalías en el funcionamiento del músculo cardiaco. Los modelos más elaborados suponen que el dipolo que constituye el corazón es un vector en el espacio que describe complejos movimientos. La determinación de este vector y de sus movimientos comporta la medición del potencial en muchos puntos y por tanto un mayor número de electrodos, y su cálculo exige la utilización de complejas ayudas informáticas.

6.3. Condensadores

Se denomina condensador a un conjunto de dos placas paralelas, o de dos cilindros coaxiales, o de dos esferas concéntricas, una de las cuales tiene una carga $+Q$ y la otra una carga $-Q$. El condensador viene a generalizar, pues, la idea de dipolo eléctrico, en que también teníamos dos cargas iguales y de signo opuesto, pero de naturaleza puntual. Aquí nos limitaremos al condensador de placas planas y paralelas. La membrana celular es uno de los ejemplos más característicos y abundantes de condensador, aunque no acostumbra a ser mencionada en los libros habituales de física, que prefieren ejemplos de carácter más tecnológico. La membrana celular, en efecto, almacena sobre sus superficies interna y externa cargas eléctricas de signo opuesto, que producen una diferencia de potencial entre ambas caras de la membrana. Como el grosor de la membrana es mucho menor que su extensión o que su radio de curvatura, sus efectos eléctricos como condensador son suficientemente bien descritos por el condensador plano.

Para estudiar los condensadores debemos obtener, en primer lugar, la fuerza producida por una placa plana cargada infinita sobre una carga de prueba q situada a una distancia x de la placa. Supondremos que la placa está situada en el plano yz , y que tiene una densidad superficial de carga (carga por unidad de área) σ .

Para ello, consideraremos el plano infinito como formado por una serie de anillos concéntricos, de radio a y anchura da , centrados en la intersección del plano con la perpendicular al mismo que pasa por la carga de prueba. El campo debido a cada uno de estos anillos puede obtenerse directamente de la ley de Coulomb.

Es fácil ver, por simetría, que las componentes y y z de la fuerza se cancelarán entre sí, ya que los elementos diametralmente opuestos en el anillo ejercerán fuerzas cuyas componentes y y z serán opuestas. La componente dE_x del campo en la dirección x ejercida por un elemento dq de carga del anillo es

$$dE_x = \frac{K}{r^2} dq \cos \theta = \frac{Kdq}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{Kdqx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad [8]$$

donde hemos tenido en cuenta que $r^2 = x^2 + a^2$, por el teorema de Pitágoras, donde x es la distancia de la carga al plano y a el radio del anillo, y que $\cos \theta = x/r$. La fuerza debida al anillo cargado completo se obtiene por integración de [8] sobre toda la carga del anillo. Como tanto x como a permanecen constantes durante la integración, se obtiene directamente

$$E_x = \frac{KQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad [9]$$

A continuación, debemos integrar sobre todos los anillos concéntricos en que hemos dividido el plano. Para ello tendremos en cuenta que la carga eléctrica de cada anillo de radio a y grosor da y densidad superficial de carga

σ es $dQ = \sigma ds = \sigma 2\pi a da$, donde $2\pi a da$ es el área, dA , de cada anillo o corona circular. Así pues, deberemos integrar

$$dE_x = \frac{Kx2\pi\sigma a da}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \tag{10}$$

desde $a = 0$ hasta $a = \infty$. El resultado de esta integración es simplemente

$$E_x = 2\pi K\sigma \tag{11}$$

que, como vemos, es independiente de la distancia. La fuerza que una placa de densidad de carga σ_1 ejerce sobre otra de densidad de carga σ_2 y área A es, según la definición de campo,

$$F = Eq = (2\pi K\sigma_1)(\sigma_2 A) \tag{12}$$

Aplicaremos el resultado [11] a continuación, para hallar el campo eléctrico entre dos placas.

Supongamos dos placas planas paralelas, una de ellas con carga $+Q$ y la otra con carga $-Q$, a una distancia d la una de la otra. La diferencia de potencial entre ambas será el producto del campo eléctrico (perpendicular a ambas e independiente de la posición) por la separación. Así,

$$\Delta V = Ed = 4\pi K(Q/A)d \tag{13}$$

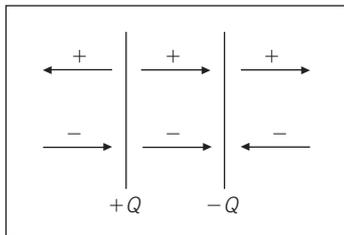


Figura 6.3. Las flechas con un signo + indican el campo eléctrico producido por la placa con carga $+Q$, y las de signo - el campo producido por la placa con carga $-Q$. En el espacio entre las dos placas los dos campos tienen el mismo sentido, y fuera de las placas tienen sentidos opuestos y se cancelan entre sí.

Obsérvese que hemos multiplicado por 2 la ecuación [11] para el campo eléctrico. Ello se debe a que hemos sumado el campo repulsivo de la placa positiva (sobre una carga unidad positiva) con el campo atractivo de la placa negativa, ya que ambos tienen la misma dirección.

En el exterior del condensador, en cambio, los campos producidos por ambas placas se restan y dan una contribución nula, como se expresa en la Figura 6.3.

Se denomina *capacidad C del condensador* el cociente de la carga almacenada dividida por la diferencia de potencial aplicada, es decir,

$$C \equiv Q/\Delta V \tag{14}$$

Su unidad es el faradio (F). A partir de [13] y de [14] tenemos para la capacidad del condensador plano $C = A/(4\pi Kd)$. En general, la capacidad C depende de la geometría del condensador y de la constante dieléctrica (incluida en K) del medio entre las placas.

La energía necesaria para cargar un condensador de capacidad C con una carga Q es, según la definición de potencial eléctrico y de capacidad eléctrica,

$$U = \int_0^Q \Delta V dq = \int_0^Q (q/C) dq = \frac{1}{2} Q^2/C \tag{15}$$

Esta expresión puede escribirse también, habida cuenta de [14], como $U = (1/2) C(\Delta V)^2 = (1/2) Q (\Delta V)$.

Aplicaremos estos conceptos al estudio de problemas de interés biológico en las Secciones 6.5 y 6.6. Antes de ello, y dado que en la mayoría de situaciones de interés intervienen cargas en movimiento, introduciremos los

conceptos básicos de la conducción eléctrica, no sin haber presentado antes un ejemplo de cómo se calculan algunas magnitudes de interés en los condensadores.

Ejemplo 6.5.

La separación entre las placas de un condensador plano se reduce a un tercio de su valor original, sin que haya contacto eléctrico entre ellas. a) Indicar qué les sucede a la capacidad, diferencia de potencial, carga y energía almacenada. b) Si se repite la operación anterior, pero con las placas conectadas a una batería, responder a las mismas cuestiones planteadas en el apartado anterior.

a) La capacidad del condensador plano se puede expresar como

$$C = \frac{\epsilon' A}{4\pi K d} \quad [16]$$

donde ϵ' es la constante dieléctrica relativa del medio situado entre las placas, A el área de las placas y d la distancia entre ellas. Al reducirse ésta a la tercera parte, $d' = d/3$, la capacidad se triplicará, ya que

$$C' = \frac{\epsilon' A}{4\pi K d'} = \frac{\epsilon' A}{4\pi K d/3} = 3 \frac{\epsilon' A}{4\pi K d} = 3C$$

Si no hay contacto entre las placas, la carga no varía, pero sí la diferencia de potencial, y puesto que

$$\Delta V' = \frac{Q}{C'} = \frac{Q}{3C} = \frac{1}{3} \Delta V$$

ésta disminuye hasta la tercera parte de su valor inicial, al igual que la energía almacenada, puesto que

$$U' = \frac{1}{2} Q \Delta V' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} Q \Delta V \right) = \frac{1}{3} U$$

La capacidad del condensador, en la situación ideal que estamos considerando, sólo depende de factores geométricos y de la naturaleza del medio entre las placas. Así, aunque las placas estén conectadas a una batería, la capacidad se triplica al disminuir la separación entre las placas hasta un tercio.

b) La diferencia de potencial está fijada ahora por la de la batería, y coincide con ella. De ello se sigue que la carga ahora es

$$Q' = C' \Delta V = 3C \Delta V = 3Q$$

por lo cual triplica su valor. Lo mismo le sucede a la energía almacenada, ya que

$$U' = \frac{1}{2} Q' \Delta V = 3 \frac{1}{2} Q \Delta V = 3U$$

6.4. Circuitos eléctricos. Ley de Ohm

Supongamos un filamento de un material conductor. Al aplicar entre sus extremos una diferencia de potencial ΔV circula por él una corriente eléctrica de *intensidad* I (carga que atraviesa el filamento por unidad de tiempo). Cuando dicho material es un metal, y en otros muchos casos, se observa que la diferencia de potencial ΔV que se debe aplicar para que circule una intensidad I es proporcional a dicha intensidad; es decir,

$$\Delta V = RI \quad [17]$$

La constante de proporcionalidad R se denomina *resistencia*, y depende del material y de la forma del conductor pero no de la intensidad. Esta ley es la famosa *ley de Ohm*, básica en el análisis de circuitos. Se ha de tener presente que dicha ley no tiene una validez universal, ya que no vale, por ejemplo, para semiconductores, ni para los canales de sodio o de potasio en las membranas celulares. En estos últimos casos, la resistencia depende de la diferencia de potencial.

En un hilo metálico de área transversal A y longitud l , la resistencia viene dada por la expresión

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad [18]$$

donde ρ es la resistividad (característica del material y de la temperatura). En el estudio de las disoluciones electrolíticas es más usual la conductividad k , que es la inversa de la resistividad, y que depende de la viscosidad del disolvente, de la temperatura y del tipo de iones del electrólito. Así, tendremos

$$R = \frac{1}{k} \frac{l}{A}$$

Se acostumbra a utilizar también, en lugar de la resistencia, su inversa, que recibe el nombre de conductancia.

Ejemplo 6.6.

Cuando se introducen en una disolución de KCl dos láminas de 5 cm^2 de área, separadas $2,5 \text{ cm}$, y se establece entre ellas una diferencia de potencial de 50 V , circula una corriente de $1,2 \text{ mA}$. Calcular la conductividad del electrolito.

En el caso que consideramos, la ley de Ohm permite calcular R

$$R = \frac{V}{I}$$

que, usando su relación con la conductividad, se podrá escribir:

$$k = \frac{I}{V} \frac{l}{A}$$

En nuestro caso

$$k = \frac{1,2 \times 10^{-3} \text{ A}}{50 \text{ V}} \times \frac{2,5 \times 10^{-2} \text{ m}}{5 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 1,2 \times 10^{-3} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

(La medida de la conductividad, de gran interés experimental, se ve frecuentemente complicada por efectos eléctricos o químicos en las placas.)

El problema básico en un circuito o en una red de distribución de energía eléctrica estriba en hallar las intensidades que circulan por cada uno de sus puntos, dada una distribución de resistencias y de baterías o pilas (creadoras de diferencia de potencial o, para ser más precisos, de *fuerza electromotriz*, que es la que impulsa los electrones por el circuito). Es fácil demostrar que cuando dos resistencias se hallan en serie (una a continuación de otra) la resistencia total equivalente es la suma de sus resistencias, mientras si se hallan en paralelo, la inversa de la resistencia equivalente es la suma de las inversas de sus resistencias (Figura 6.4).

$$R_{\text{tot}} = R_1 + R_2, \quad R_{\text{tot}}^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$$

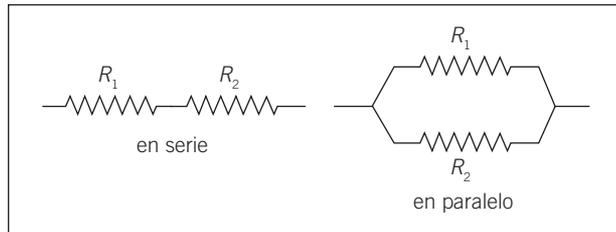


Figura 6.4. Resistencias en serie y en paralelo.

En la Sección 6.6 trataremos circuitos complicados, en que intervengan diversas fuerzas electromotrices en diversas mallas.

Otro parámetro relevante en un circuito eléctrico es la *potencia* consumida en el mismo para mantener la corriente. Sabemos que el trabajo realizado para desplazar una carga q a través de una diferencia de potencial ΔV es $W = q\Delta V$. Como la potencia es trabajo por unidad de tiempo, tendremos

$$\text{Potencia} = I\Delta V \quad [20]$$

ya que I , la intensidad eléctrica, es la carga que fluye por unidad de tiempo. Como la diferencia de potencial ΔV necesaria para mantener una intensidad I a través de una resistencia R vale $\Delta V = IR$ según la ley de Ohm, la potencia disipada en una resistencia R será $\text{Potencia} = IR^2$. En los dos ejemplos que siguen interviene la potencia del circuito.

Ejemplo 6.7.

Una pila de mercurio tiene una fem de 1,35 V y una resistencia interna de 0,03 Ω , mientras que una pila seca del mismo tipo tiene una fem de 1,5 V y

una resistencia interna de $0,5 \Omega$. Un audífono a pilas funciona a 4 V y consume una potencia de 4 W . Demostrar que pueden utilizarse tres pilas de mercurio, pero no tres pilas secas.

Para conseguir una fem de 4 V hemos de conectar las pilas en serie, ya que entonces las fem se suman. Sabemos, además, que cuando se conecten las pilas al circuito, la diferencia de potencial entre los terminales no será la suma de las fem, sino que habremos de sustraer la caída de potencial debida a la resistencia interna. Tenemos, por tanto,

$$\Delta V_{\text{total}} = 3 (\text{fem} - Ir_i)$$

Conocemos la resistencia interna (r_i), pero no la intensidad. Podemos hallar ésta a partir de la potencia consumida, que debe ser

$$P = (\Delta V_t)I$$

En nuestro caso esto nos da

$$I = \frac{P}{\Delta V_t} = \frac{2 \text{ W}}{4 \text{ V}} = 0,5 \text{ A}$$

Para las tres pilas secas tenemos

$$\Delta V_t = 3 \times 1,5 \text{ V} - 0,5 \text{ A} (3 \times 0,5 \Omega) = 3,75 \text{ V} < 4,0 \text{ V}$$

mientras que para las de mercurio

$$\Delta V_t = 3 \times 1,35 \text{ V} - 0,5 \text{ A} (3 \times 0,03 \Omega) = 4,01 \text{ V} > 4,0 \text{ V}$$

La conclusión que puede extraerse del problema es que, debido a su gran resistencia interna, las pilas secas no permiten mantener la diferencia de potencial requerida, a pesar de que su diferencia de potencial nominal es más alta que la de las pilas de mercurio.

Ejemplo 6.8.

Una pequeña fábrica utiliza 100 kW de potencia que se le suministran a través de conductores de 5Ω de resistencia. ¿Qué proporción de la potencia se podría ahorrar si la corriente se suministrara a 50000 V en lugar de a 10000 V ?

La potencia disipada, es decir, la pérdida en forma de calor en un conductor de resistencia R , vale

$$P_d = RI^2$$

Para que estas pérdidas sean lo más pequeñas posible, se intenta que la intensidad de la corriente sea la menor posible. Por otro lado, la potencia total suministrada viene dada por

$$P_t = VI$$

siendo V la fem que produce esa corriente. A la salida de la central se coloca un transformador para aumentar el voltaje de la corriente. Si en él no tienen un pérdidas de potencia, se ha de cumplir que

$$V_{\text{central}} I_{\text{central}} = V_{\text{transp}} I_{\text{transp}}$$

Cuanto más grande sea el voltaje V_{transp} al cual se someten los hilos conductores de la corriente, más pequeña será la intensidad I_{transp} que circula por ellos. Tendremos entonces

$$\frac{I_t}{I_c} = \frac{V_c}{V_t}$$

En nuestro caso, la relación de intensidades nos dará

$$\frac{I_t}{I_c} = \frac{10.000 \text{ V}}{50.000 \text{ V}} = \frac{1}{5}$$

y, por tanto, la relación entre las potencias disipadas a 10000 y 50000 V será

$$\frac{P_d(50000 \text{ V})}{P_d(10000 \text{ V})} = \frac{I_t^2 R}{I_c^2 R} = \left(\frac{I_t}{I_c} \right)^2 = \frac{1}{25}$$

La disipación de potencia se reducirá veinticinco veces, es decir, al 4 por 100 de la disipación inicial.

Este problema pone de manifiesto la conveniencia de utilizar líneas de alto voltaje para transportar la corriente eléctrica desde las centrales hasta los lugares de consumo, pues de esa manera se reduce la potencia disipada en el transporte. Al llegar a las zonas de consumo, esa diferencia de potencial se ha de reducir, pues presenta peligros de descarga.

6.5. Descarga de un condensador

Imaginemos un condensador de capacidad C con una cierta carga Q . De repente se conectan sus dos placas mediante un conductor de resistencia R . Los electrones tenderán a fluir hacia la placa positiva, por lo cual disminuirá tanto la carga negativa de la placa donde se hallaban como la carga positiva de la placa a la cual se dirigen. ¿Cuánto tiempo tardará el condensador en descargarse completamente? Como veremos, éste es un problema de interés en Biología, ya que, como se ha dicho, las membranas se comportan como condensadores, los cuales se van cargando y descargando en multitud de procesos (músculos, pulsos nerviosos, células marcapasos, etc.).

Para describir este fenómeno de descarga, igualamos el potencial del condensador, $V = Q/C$, con la caída de potencial entre los extremos de la resistencia, $V = IR$ (Fig. 6.5). Así,

$$Q/C = RI = -R(dQ/dt)$$

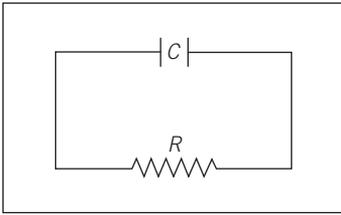


Figura 6.5. Circuito formado por un conductor y una resistencia.

donde hemos tenido en cuenta que la intensidad es carga por unidad de tiempo. El signo menos indica que la carga del condensador disminuye con el tiempo. Podemos escribir esta ecuación en la forma

$$dQ/Q = -\left(\frac{1}{CR}\right)dt$$

cuya integración es inmediata y lleva a

$$Q(t) = Q(0)e^{-t/RC} \quad [21]$$

Según esta expresión, la carga irá disminuyendo con el tiempo. Aunque en rigor tardará un tiempo infinito en quedar totalmente descargada, puede tomarse como *tiempo característico de descarga*,

$$\tau = RC \quad [22]$$

Éste es el tiempo que la carga inicial $Q(0)$ tarda en reducirse en un factor e (el número e vale aproximadamente 2,71). Transcurrido un tiempo igual a dos o tres veces τ , el condensador se halla, a todos los efectos prácticos, totalmente descargado. El resultado [22] pone de manifiesto que a mayor resistencia mayor es el tiempo de descarga, como era lógico esperar. Asimismo, el tiempo de descarga se alarga también al aumentar la capacidad del condensador.

Ejemplo 6.9.

Un dispositivo de desfibrilación proporciona un choque eléctrico en la zona del corazón descargando un condensador cargado inicialmente a 5000 V. La resistencia eléctrica del cuerpo entre los electrodos es de 500 Ω . ¿Cuál es la intensidad cuando el condensador empieza a descargarse? Después de 6 ms, el voltaje en el condensador es de 250 V. ¿Cuál es la capacidad del dispositivo? ¿Cuánta energía se ha cedido al cuerpo durante la descarga?

En el instante inicial la diferencia de potencial entre los extremos de los electrodos es de 5000 V. Por tanto, si la resistencia del cuerpo vale 500 Ω , la intensidad inicial según la ley de Ohm vale

$$i_0 = \frac{\Delta V_0}{R} = \frac{5000 \text{ V}}{500} = 10 \text{ A}$$

En los instantes posteriores, el condensador va perdiendo carga y, por tanto, la diferencia de potencial entre sus placas disminuye y en consecuencia la intensidad también. Dado que el proceso de descarga de un condensador a través de una resistencia está descrito por una exponencial

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC}$$

donde q_0 es la carga inicial, la intensidad seguirá también una ley de este tipo

$$i(t) = i_0 e^{-t/RC}$$

En este ejemplo sabemos que cuando $t = 6 \times 10^3 \text{ s}$, $\Delta V = 250 \text{ V}$, por lo que

$$i(6 \text{ ms}) = \frac{\Delta V (6 \text{ ms})}{R} = \frac{250 \text{ V}}{500 \Omega} = 0,5 \text{ A}$$

y, por tanto, se cumple

$$0,5 \text{ A} = 10 e \frac{6 \times 10^{-3} \text{ s}}{500 \Omega \times C}$$

De la ecuación anterior se despeja C y resulta finalmente

$$C = 4 \times 10^{-6} \text{ F}$$

Para conocer la energía liberada por el choque eléctrico, bien al corazón o bien al medio en forma de calor, calcularemos la energía inicial del condensador U_0 y la energía a los 6 ms de haber conectado el dispositivo, U :

$$U_0 = \frac{1}{2} C(\Delta V_0)^2 = \frac{1}{2} 4 \times 10^{-6} \text{ F} (5000 \text{ V})^2 = 50 \text{ J}$$

$$U = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2} 4 \times 10^{-6} \text{ F} (250 \text{ V})^2 = 0,125 \text{ J}$$

Por tanto, la energía cedida por el condensador es

$$U_c = U_0 - U = 50 - 0,125 = 49,875 \text{ J}$$

6.6. Circuitos complicados. Ejemplos de interés en Biología

En el apartado correspondiente a la ley de Ohm hemos presentado el caso en que una sola fuerza electromotriz actuaba sobre una o varias resistencias eléctricas. En muchas ocasiones, los circuitos eléctricos tienen diversas ramificaciones, que agrupan diferentes resistencias y en las cuales actúan diferentes fuerzas electromotrices. Un ejemplo de tales circuitos se presenta en la Figura 6.6.

Para circuitos complicados se aplican las leyes de Kirchhoff, que esencialmente equivalen a la ley de la conservación de la carga y a la ley de Ohm. Para aplicar las leyes de Kirchhoff se divide el circuito en diversas mallas o bucles elementales. Se asigna a cada una de ellas una intensidad en un determinado sentido. Para cada circuito se iguala la suma de sus fuerzas electromotrices (positivas si ayudan al paso de la corriente en el sentido fijado, y negativas si se oponen a él) a la caída de potencial en las resistencias. Se debe tener en cuenta que la intensidad total que circula por cada resistencia es la suma algebraica —es decir, tomando en consideración el signo, determinado por el sentido de circulación— de las intensidades que circulan por ella, según las mallas a que pertenezca. La Figura 6.6 muestra la aplicación de estas normas.

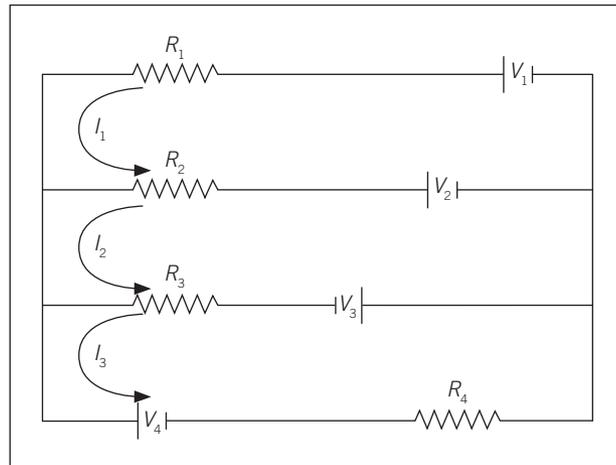


Figura 6.6. Circuito general.

Supongamos I_1 , I_2 e I_3 en los sentidos indicados. Las ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} -V_2 + V_1 &= I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2 \\ V_2 + V_3 &= (I_2 - I_1) R_2 + (I_2 - I_3) R_3 \\ -V_4 - V_3 &= (I_3 - I_2) R_3 + I_3 R_4 \end{aligned}$$

Obsérvese que en la malla 1 restamos V_2 de V_1 . Ello se debe a que consideramos que cuando la corriente sale por la parte larga de la pila (el polo positivo) y entra por la pequeña (polo negativo), la pila impulsa la corriente y se opone a ella si ésta entra por el polo positivo y sale por el negativo. Así, la pila V_2 dificulta al paso de I_1 en el sentido indicado, mientras que V_1 ayuda su paso en este sentido y debe tomarse, por tanto, positiva. Observemos además que así como por R_1 sólo circula I_1 , por R_2 circula no tan sólo I_1 en el sentido descrito en el circuito, sino también I_2 , en sentido opuesto al de I_1 . Por ello en la malla 1 se multiplica R_2 por $I_1 - I_2$. En cambio, en la malla 2 es I_2 quien determina los signos. Así, la pila V_2 no dificulta ahora al paso de I_2 y tampoco lo dificulta V_3 , por lo cual ambas se consideran positivas. Ahora R_2 queda multiplicado por $I_2 - I_1$, ya que ambas corrientes circulan por R_2 con sentidos opuestos. El rozamiento es análogo para las otras mallas.

En varios problemas fisiológicos se acostumbra a proponer analogías con circuitos eléctricos, que permiten estudiar con cierto detalle el funcionamiento del sistema que se considera.

Para analizar con detalle diversas situaciones biológicas es frecuente acudir a modelos o metáforas de tipo eléctrico, que ayudan considerablemente a estudiar con mayor precisión cuantitativa diversos procesos fisiológicos. En los ejemplos que presentamos a continuación se modelizan la fosforilación oxidativa y el comportamiento muscular.

Ejemplo 6.10.

Calcular las intensidades que circulan a través de las resistencias del circuito de la Figura 6.7.

Supondremos, de manera arbitraria, que las intensidades en todas las mallas circulan en sentido contrario a las agujas del reloj.

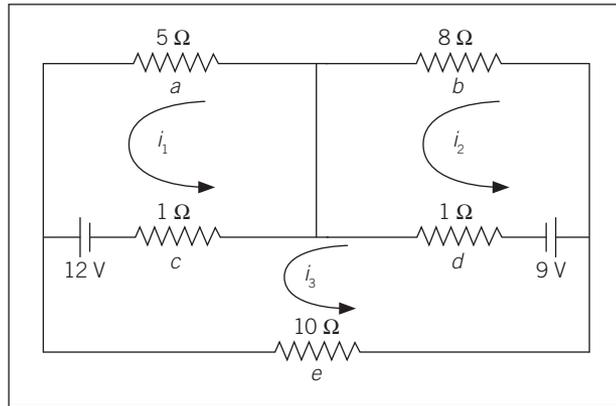


Figura 6.7.

En la primera malla la pila tiene una polaridad contraria al sentido de la corriente i_1 ; por la resistencia de $1\ \Omega$ circulan dos intensidades de signo opuesto i_1 e i_3 . Como la fem total en la malla ha de ser igual a la caída de potencial total, obtenemos la ecuación siguiente:

$$-12\text{ V} = (i_1 - i_3) \times 1\ \Omega + i_1 \times 5\ \Omega$$

En la segunda malla la pila tiene la polaridad en el mismo sentido asignado a la intensidad; por la resistencia de $1\ \Omega$ circulan, en sentido contrario, i_1 e i_3 . Por tanto, para esta malla tendremos

$$9\text{ V} = i_2 \times 8\ \Omega + (i_2 - i_3) \times 1\ \Omega$$

Procediendo de manera análoga en la tercera malla se obtiene

$$(12 - 9)\text{ V} = (i_3 - i_1) \times 1\ \Omega + (i_3 - i_2) \times 1\ \Omega + i_3 \times 10\ \Omega$$

Esto nos proporciona un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que se puede expresar

$$\begin{cases} -12 = 6i_1 & -i_3 \\ 9 = & 9i_2 - i_3 \\ 3 = -i_1 - i_2 + 12i_3 \end{cases}$$

donde las intensidades vienen dadas en amperios. Al solucionar el sistema mediante determinantes tenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 633$$

y las soluciones, tras aplicar la regla de Cramer, serán:

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} -12 & 0 & -1 \\ 9 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 12 \end{vmatrix}}{633} = -1,97 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -12 & -1 \\ 0 & 9 & -1 \\ -1 & 3 & 12 \end{vmatrix}}{633} = 1,02 \text{ A}$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 & -12 \\ 0 & 9 & 9 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{633} = 0,17 \text{ A}$$

El signo negativo de la i_1 nos indica que en esa malla el sentido de la corriente es el de la marcha de las agujas del reloj.

En las diversas resistencias circulan unas intensidades totales cuyos valores son

$$\begin{cases} I_a = -i_1 = 1,97 \text{ A} \\ I_b = i_2 = 1,02 \text{ A} \\ I_c = i_3 - i_1 = 0,17 + 1,97 = 2,14 \text{ A (en el sentido de } i_3) \\ I_d = i_2 - i_3 = 1,02 - 0,17 = 0,85 \text{ A (en el sentido de } i_2) \\ I_e = i_3 = 0,17 \text{ A} \end{cases}$$

Ejemplo 6.11.

Modelo eléctrico de la fosforilación oxidativa: Supongamos el modelo quimiosmótico de la fosforilación oxidativa, según el cual el acoplamiento entre la oxidación y la fosforilación se produce gracias a un flujo de protones a través de la membrana mitocondrial interna. La reacción de oxidación bombea protones hacia el exterior de la membrana, los cuales pueden regresar de nuevo al interior por dos caminos: la ATPasa, que aprovecha la energía para formar ATP a partir de ADP y del fósforo inorgánico, y algunas pérdidas pasivas a través de la membrana. En el circuito de la Figura 6.8, cuyos datos, cercanos a los valores experimentales, hay que tomar simplemente como indicativos, calcular el rendimiento del circuito, es decir, la relación entre la intensidad de la corriente de protones que atraviesa la ATPasa (por cada tres protones se produce un ATP) y la intensidad que se pierde a través de la

membrana. Algunos desacoplantes inhiben la fosforilación, disminuyendo la resistencia pasiva de la membrana R_m . Así, el número de protones que la atraviesan sin realizar trabajo químico es mayor que en circunstancias normales. Si una concentración de desacoplante dada reduce R_m a la mitad, ¿cómo varía el rendimiento del circuito y el potencial de membrana? Los inhibidores de la ATPasa, como la oligomicina, actúan aumentando la resistencia R_p . Supongamos que una determinada concentración de oligomicina hace que $R_p = 1250 \Omega$, ¿cómo varía el rendimiento y el potencial de la membrana?

Suponiendo las intensidades i_0 e i_p como se muestran en la Figura 6.8, y aplicando las reglas de Kirchhoff, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_0 &= i_0(R_0 + R_m) - i_p R_m \\ -V_p &= -i_0 R_m + i_p(R_p + R_m) \end{aligned} \quad [23]$$

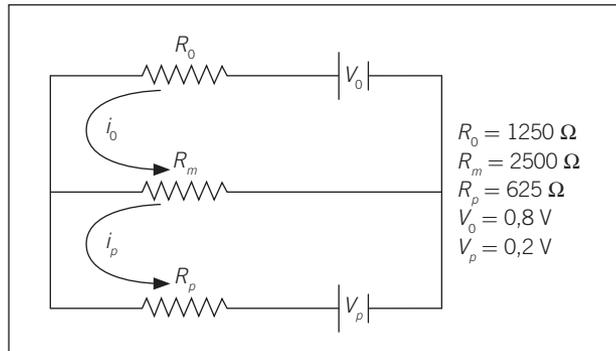


Figura 6.8. Circuito de la fosforilación oxidativa.

El primer objetivo es calcular i_p/i_0 e $i_0 - i_p$, ya que esta última relación es la intensidad a través de la membrana. Si sustituimos en [23] los valores de las resistencias y de los potenciales que aparecen en la Figura 6.8, el sistema de ecuaciones queda como

$$\begin{aligned} 0,8 &= i_0 3750 - i_p 2500 \\ -0,2 &= -i_0 2500 + i_p 3125 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema se obtiene

$$i_0 = 0,36 \text{ mA} \quad ; \quad i_p = 0,23 \text{ mA}$$

y, por tanto,

$$i_p/i_0 = 0,64 \quad ; \quad i_0 - i_p = 0,13 \text{ mA}$$

Si en [23] igualamos $R_m = 1250 \Omega$, el nuevo sistema queda

$$\begin{aligned} 0,8 &= i_0 2500 - i_p 1250 \\ -0,2 &= -i_0 1250 + i_p 1875 \end{aligned}$$

de donde $i_0 = 0,38 \text{ mA}$, $i_p = 0,15 \text{ mA}$ y el cociente $i_p/i_0 = 0,39$ disminuye con respecto al caso anterior. Este tipo de desacoplantes intensifican la oxidación (i_0 aumenta) y disminuyen la fosforilación (i_p disminuye), lo cual reduce el rendimiento. El valor de $i_0 - i_p$ es $0,23 \text{ mA}$ y la diferencia de potencial V_m entre los extremos de R_m es según la ley de Ohm

$$V_m = R_m(i_0 - i_p) = 1250 \Omega \times 0,23 \times 10^{-3} \text{ A} = 0,28 \text{ V}$$

En el tercer caso, R_p es 1250Ω , de modo que el sistema de ecuaciones quedará

$$0,8 = i_0 \cdot 3750 - i_p \cdot 2500$$

$$-0,2 = -i_0 \cdot 2500 + i_p \cdot 3750$$

y los valores de i_0 , i_p , $i_0 - i_p$ y el potencial serán

$$i_0 = 0,32 \text{ mA} \quad ; \quad i_p = 0,16 \text{ mA}$$

$$i_p/i_0 = 0,50 \quad ; \quad i_0 - i_p = 0,16 \text{ mA}$$

$$V_m = (i_0 - i_p)R_m = 0,4 \text{ V}$$

En este caso, tanto la i_0 como la i_p se han reducido con respecto a la situación inicial.

Ejemplo 6.12.

Se puede elaborar un modelo eléctrico del funcionamiento de un músculo. Una pila de 1 V de fuerza electromotriz se conecta mediante una señal nerviosa a un condensador de $C = 10^{-12} \text{ F}$. a) Calcular la fuerza que se ejercen mutuamente las dos placas del condensador, de área 10^{-12} m^2 . b) Lentamente, el condensador se descarga a través de una resistencia (en el sistema biológico esta descarga se debe a pérdidas de carga a través de los poros de la membrana celular). Si la resistencia vale $R = 10^8 \Omega$, ¿cuánto tiempo invertirá en descargarse? c) ¿Qué energía se convertirá en calor en este proceso? (Fig. 6.9).

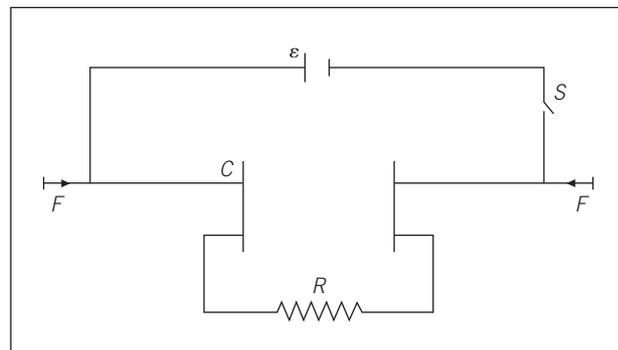


Figura 6.9.

a) La fuerza sobre una de las placas de un condensador cargado viene dada por el producto del campo eléctrico por la carga. El campo eléctrico creado por una placa del condensador, suponiendo que ésta es plana, viene dado por

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

donde $\varepsilon_0 = 1/4\pi K$ es la permitividad del vacío y σ la densidad superficial de carga en cada una de las placas. Por tanto, la fuerza sobre ambas placas es

$$F = E\sigma A = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} A$$

Como σA es la carga de cada placa, y teniendo en cuenta que $\varepsilon_0 = 1/4\pi K$, donde K en el vacío vale $9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$, se cumple

$$F = 2\pi K \frac{Q^2}{A}$$

La carga Q del condensador se puede calcular a partir de la relación $C = Q/V$. En efecto,

$$Q = CV = 10^{-12} \text{ F} \times 1 \text{ V} = 10^{-12} \text{ C}$$

y, por tanto,

$$F = 2\pi \times 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \frac{(10^{-12} \text{ C})^2}{10^{-12} \text{ m}^2} = 0,057 \text{ N}$$

Mediante este mecanismo se pueden alcanzar valores de la fuerza considerables si se unen muchos condensadores en paralelo, sumándose entonces la fuerza al igual que lo hace la capacidad.

b) El tiempo característico que describe la descarga de un condensador viene dado por el producto RC . En este caso

$$\tau = RC = 10^8 \Omega \times 10^{-12} \text{ F} = 10^{-4} \text{ s}$$

c) La energía que se convierte en calor, en principio, es toda la energía necesaria para cargar el condensador hasta que se alcance la diferencia de potencial señalada en este ejemplo. La energía de un condensador viene dada por la expresión

$$U = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$$

donde sustituyendo valores se obtiene

$$U = \frac{1}{2} 10^{-12} \text{ F} (1 \text{ V})^2 = 0,5 \times 10^{-12} \text{ J}$$

Ejemplo 6.13.

Al temblar se produce un proceso muy importante en la regulación de la temperatura del cuerpo que comporta la disminución de la resistencia R_m de la membrana, aumentando por tanto su permeabilidad. Si inicialmente R_m es $10^8 \Omega$ y al temblar se reduce la resistencia a la mitad, utilizando los datos del ejemplo anterior, calcular cuál sería la frecuencia del temblor y en cuánto aumentaría la cantidad de calor producida por el músculo por unidad de tiempo.

Si la resistencia se reduce a la mitad, el tiempo de descarga, que viene dado por la expresión

$$\tau' = R_m C_m$$

se reduce también a la mitad, dado que C_m no varía. Según esto, dado que C_m según el ejemplo anterior vale 10^{-12} F ,

$$\tau' = \frac{1}{2} \times 10^8 \Omega \times 10^{-12} \text{ F} = 0,5 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Como la frecuencia es la inversa de τ' , el temblor tiene una frecuencia

$$f = \frac{1}{\tau'} = \frac{1}{0,5 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^4 \text{ Hz}$$

En cuanto al calor producido por el músculo por unidad de tiempo, dividiremos la energía producida, que coincide con la energía necesaria para cargar el condensador, por el tiempo de descarga. Antes de temblar, la potencia, es decir, la energía producida por unidad de tiempo, vale

$$\frac{E}{\tau} = \frac{\frac{1}{2} C (\Delta V)^2}{\tau} = \frac{0,5 \times 10^{-12} \text{ J}}{10^{-4} \text{ s}} = 0,5 \times 10^{-8} \text{ W}$$

En este caso, donde $\tau' = 1/2 \tau$, la energía producida cada segundo se doblará. En efecto,

$$\frac{E}{\tau'} = \frac{0,5 \times 10^{-12} \text{ J}}{0,5 \times 10^{-4} \text{ s}} = 10^{-8} \text{ W}$$

6.7. Circuitos eléctricos equivalentes de las membranas

En base a las propiedades anteriores se pueden construir circuitos equivalentes para las membranas, que modelan sus propiedades a partir de dos elementos fundamentales: las resistencias eléctricas y los condensadores. (También cabría añadir la utilización de las inducciones, pero a este nivel no lo haremos.)

La *resistencia eléctrica* de un conductor de longitud l y de sección transversal A se puede escribir como

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad [24]$$

donde ρ es la resistividad, una propiedad que depende del material considerado. El factor l/A tiene en cuenta las dimensiones físicas del sistema concreto que se estudia. Para hacernos una idea, los buenos conductores, por ejemplo la plata, tienen resistividades del orden de $\rho \approx 10^{-6} \Omega \text{ cm}$. Por el contrario, los elementos poco conductores tienen resistividades del orden de $\rho \approx 10^{14} \Omega \text{ cm}$. Una disolución 1 M de NaCl tiene una resistividad que viene a ser de $10 \Omega \text{ cm}$. En una membrana, l corresponde al grosor y A al área de la misma. La resistividad de una membrana es del orden de $10^9 \Omega \text{ cm}$. Comparada con la resistividad de las disoluciones fisiológicas es relativamente alta. En membranas homogéneas, ρ representa una resistividad compuesta. Por ejemplo, si consideramos una membrana adiposa compuesta de materia grasa atravesada por pequeños poros conductores, para el material graso $\rho \gg 10^9 \Omega \text{ cm}$ y para los poros $\rho \ll 10^9 \Omega \text{ cm}$, resultando globalmente en una resistividad de $10^9 \Omega \text{ cm}$ que naturalmente depende del número de poros y de su tamaño. En 1975, Neher y Sackmann desarrollaron un método con micropipetas que permite medir las corrientes iónicas que atraviesan un solo canal de la membrana. Ello supuso un progreso muy importante en el estudio de los diversos canales especializados, y sus autores recibieron el premio Nobel de Fisiología y Medicina de 1991.

Generalmente, la resistividad y el término l/A son constantes, con lo que la resistencia también lo es. Sin embargo, en algunos sistemas pueden depender de la corriente a través de la membrana o del voltaje a ambos lados de la misma. En este caso, si el cambio de R no es instantáneo, significa que la membrana se comporta como un condensador o una autoinducción.

La capacidad de dos superficies conductoras de área A , separadas una distancia l , es según el modelo del condensador plano

$$C = \epsilon \frac{A}{l} \quad [25]$$

donde $\epsilon = \epsilon'(4\pi K)^{-1}$ con ϵ' la constante dieléctrica relativa del medio. Un valor común para la ϵ de un material de membrana es $\epsilon = 10^{-12} \text{ F cm}^{-1}$, lo cual hace a la membrana comportarse como un buen dieléctrico. En una membrana heterogénea compuesta de materia adiposa y poros, la capacidad se debe al área de la materia adiposa excluyendo los poros. Así, una membrana heterogénea se puede representar como un circuito compuesto como el de la Figura 6.10, donde R_p es la resistencia de los poros, R_m la de las sustancias que componen la membrana y C_m la capacidad de estas mismas sustancias. Consideremos ahora una célula cilíndrica tal como la de la Figura 6.11. Podemos distinguir tres regiones: la interior, la exterior y la membrana. Las tres se resisten al flujo de la corriente eléctrica y por tanto presentan tres resistencias distintas. Igualmente, la membrana tiene una capacidad eléctrica. Estimamos ahora, a continuación, sus valores.

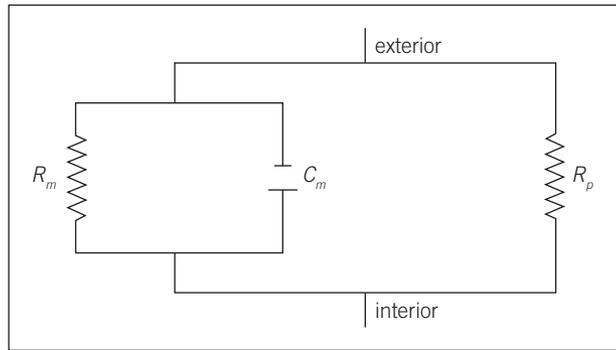


Figura 6.10. Circuito eléctrico para una porción de membrana.

En primer lugar estudiamos la resistencia de la membrana. Sabemos que

$$R_m = \rho_m \frac{1}{A_m}$$

Si l es 100 \AA y $\rho_m = 10^9 \text{ \Omega cm}$ (valores más frecuentes de estas magnitudes), el valor de R_m es

$$R_m = \frac{1000 \text{ \Omega cm}^2}{2\pi ax}$$

ya que A_m es el área lateral del cilindro de radio a y de longitud x . Para $a = 0,1 \text{ mm}$ y $x = 1 \text{ mm}$, $R_m = 0,16 \times 10^6 \text{ \Omega}$. Dado que la resistencia a lo largo de la membrana se distribuye en paralelo, si se quiere calcular la resistencia por unidad de longitud de la membrana, dado que

$$\frac{1}{R_m} = \frac{x}{r_m}$$

se cumple $r_m = R_m x$. Tomando valores, se halla $r_m = 0,016 \times 10^6 \text{ \Omega cm}$. La resistencia al flujo de corriente eléctrica en el interior de la célula es

$$R_{\text{int}} = \rho_{\text{int}} \frac{x}{A_{\text{int}}} = \rho_{\text{int}} \frac{x}{\pi a^2}$$

ρ_{int} es una propiedad del citoplasma que acostumbra a valer 150 \Omega cm (correspondiendo a una disolución 50 mM de KCl). En este caso, la resistencia por unidad de longitud se calcula como $r_{\text{int}} = R_{\text{int}}/x$, ya que ahora la resistencia se puede suponer que está en serie. Según los valores considerados anteriormente, se obtiene $r_{\text{int}} = 477 \times 10^3 \text{ \Omega cm}^{-1}$. Observemos que r_{int} es considerablemente superior a r_m . Para calcular la resistencia exterior R_{ext} es evidente que el área A_{ext} depende de factores externos, tales como la proximidad entre las diversas células, etc. Normalmente, ρ_{int} y ρ_{ext} son del mismo orden de magnitud. Igualmente se puede calcular C_m , la capacidad de la membrana, según

$$C_m = \epsilon \frac{A}{l} = \epsilon \frac{2\pi ax}{l}$$

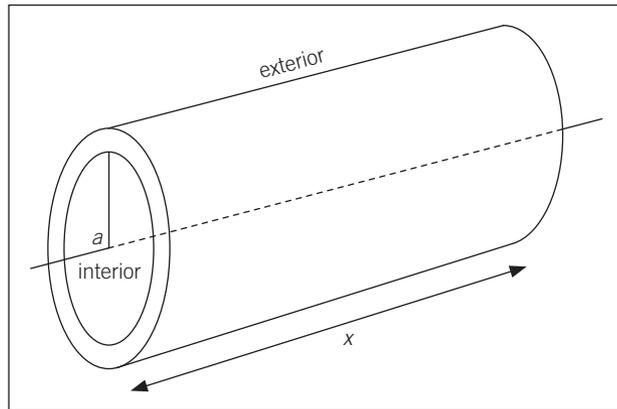


Figura 6.11. Representación esquemática de una célula de forma cilíndrica.

Si $x = 1 \text{ mm}$, $a = 0,1 \text{ mm}$, $\varepsilon = 10^{-12} \text{ F cm}^{-1}$ y $l = 100 \text{ \AA}$, resulta que $C_m = 6,28 \times 10^{-9} \text{ F}$. La capacidad de la membrana, al igual que la resistencia, se supone asociada en paralelo; por tanto, como las capacidades en paralelo se suman, la capacidad c_m por unidad de longitud se calcula

$$c_m = \frac{C_m}{x} = 62,8 \times 10^{-9} \text{ F cm}^{-1}$$

A continuación presentamos algunos ejemplos en que los parámetros eléctricos de la membrana juegan un papel principal.

Ejemplo 6.14.

Una membrana celular tiene un grosor de 100 \AA y una permitividad eléctrica $\varepsilon' (4\pi\text{K})^{-1} = 5 \times 10^{-11} \text{ F m}^{-1}$. La diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la célula es de 70 mV . a) ¿Cuál es la densidad de carga por unidad de superficie en la membrana? b) ¿Cuál es el campo eléctrico en el interior de la membrana?

a) Como el radio de la célula es mucho mayor que el espesor de su membrana, podemos suponer, con buena aproximación, que ésta actúa como un condensador plano. Su capacidad, por tanto, se puede escribir:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

En el caso estudiado tenemos

$$\frac{C}{A} = \frac{\varepsilon}{d} = \frac{5 \times 10^{-11} \text{ F m}^{-1}}{10^{-8} \text{ m}} = 5 \times 10^{-3} \text{ F m}^{-2}$$

Como la carga está relacionada con la capacidad y la diferencia de potencial entre las placas ΔV , mediante la relación

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

obtenemos para la carga almacenada por unidad de superficie

$$\frac{Q}{A} = \frac{C}{A} \Delta V = 5 \times 10^{-3} \text{ F m}^{-2} \times 70 \times 10^{-3} \text{ V} = 3,5 \times 10^{-4} \text{ C m}^{-2}$$

b) Si seguimos considerando la membrana como un condensador plano, el campo eléctrico en su interior se expresa como

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

cuyo valor, en nuestro caso, será

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{70 \times 10^{-3} \text{ V}}{10^{-8} \text{ m}} = 7 \times 10^6 \text{ V m}^{-1}$$

Ejemplo 6.15.

Un metro cuadrado de axón tiene una resistencia de $0,2 \Omega$. La membrana tiene un grosor de $7,5 \times 10^{-9} \text{ m}$. a) ¿Cuál es la resistividad de la membrana? Se supone que la resistencia de la membrana está producida por el fluido iónico de los poros que atraviesan la membrana. Los poros tienen un radio de $3,5 \times 10^{-10} \text{ m}$ y una longitud igual al grosor de la membrana. El fluido en los poros tiene una resistividad de $0,15 \Omega \text{ m}$ y el resto de la membrana se puede suponer que es completamente aislante. b) ¿Cuántos poros debe haber por metro cuadrado, para explicar la resistencia observada?

Para cualquier conductor cilíndrico de sección A y longitud l , hemos visto que la resistencia eléctrica viene dada por la expresión

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

donde ρ es la resistividad del material que lo compone. En este ejemplo se sabe la resistencia de un metro cuadrado de membrana, así como l , que coincide con el grosor, lo que nos permite obtener

$$\rho = \frac{R \times A}{l} = \frac{0,2 \Omega \text{ m}^2}{7,5 \times 10^{-9} \text{ m}} = 2,7 \times 10^7 \Omega \text{ m}$$

Una membrana con N poros por unidad de área, todos ellos del mismo tamaño e igual resistencia R_p , ofrece una resistencia total R que se puede hallar, puesto que los poros de la membrana se pueden considerar como una red de resistencias iguales conectadas en paralelo (Fig. 6.12). En estas

condiciones

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad , \quad R = \frac{R_p}{N}$$

siendo R_p la resistencia de un poro.

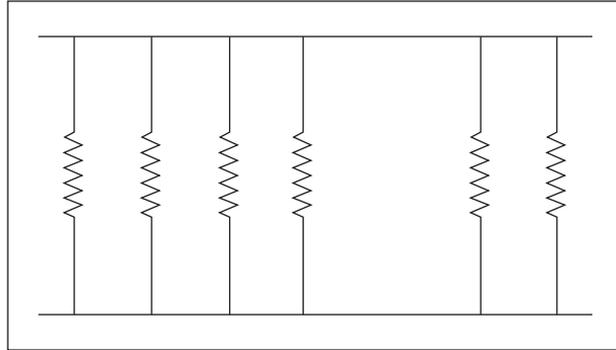


Figura 6.12. Poros en paralelo.

Para hallar el número de poros por unidad de superficie N , nos basta calcular

$$R_p = \rho_p \frac{l}{A} = 0,15 \, \Omega \, \text{m} \frac{7,5 \times 10^{-9} \, \text{m}}{\pi(3,5 \times 10^{-10} \, \text{m})^2} = 2,9 \times 10^9 \, \Omega$$

con lo cual obtenemos para la densidad superficial de poros

$$N = \frac{R_p}{R} = \frac{2,9 \times 10^9 \, \Omega}{0,2 \, \Omega \, \text{m}^2} = 1,46 \times 10^{10} \, \text{poros} \, \text{m}^{-2}$$

Ejemplo 6.16.

En la aurícula derecha hay unas células musculares especializadas que constituyen el llamado nodo auricular. Se caracterizan por tener un bajo potencial de membrana y una pérdida constante de iones. Esto provoca una autoexcitación periódica de las paredes del corazón, en forma de onda de despolarización. El tiempo característico de descarga de la membrana (tiempo de relajación) celular se puede evaluar, suponiendo que la membrana actúa como un condensador de capacidad $3 \times 10^{-5} \, \text{F} \, \text{cm}^{-2}$ por unidad de área, y que los poros de la membrana son las resistencias a través de las cuales se descarga la membrana. Según este modelo: a) ¿cuál debería ser la resistencia de la membrana, por unidad de área, para que su tiempo de descarga coincida con el intervalo de tiempo entre dos latidos consecutivos del corazón (unos 60 por minuto)? b) Si cada poro tiene una resistencia de $0,5 \times 10^{12} \, \Omega$, ¿cuántos po-

ros por unidad de área deberá tener la membrana para alcanzar la resistencia del apartado anterior?

Según el modelo propuesto en el presente ejemplo, el tiempo de descarga de un circuito con una resistencia y un condensador es $\tau = RC$. Por el enunciado sabemos que ese tiempo debe ser el mismo que el que separa dos latidos consecutivos del corazón. Como el corazón late sesenta veces en un minuto, ese tiempo será $\tau = 1$ s.

Con ese dato es fácil obtener que la resistencia multiplicada por el área vale

$$R \times A = \frac{\tau}{C/A} = \frac{1 \text{ s}}{3 \times 10^{-5} \text{ F cm}^{-2}} = 0,33 \times 10^5 \text{ } \Omega \text{ cm}^2$$

La membrana, tal como ya hemos indicado en otros ejemplos, puede considerarse como un conjunto de resistencias (poros) conectados en paralelo entre sí. Por tanto, si n es el número de poros por unidad de área y R la resistencia total, podremos escribir:

$$\frac{1}{R \times A} = \frac{n}{R_p}$$

siendo R_p la resistencia de un poro. Así llegamos a obtener

$$n = \frac{R_p}{R} = \frac{0,5 \times 10^{12} \text{ } \Omega}{0,33 \times 10^5 \text{ } \Omega \text{ cm}^2} = 1,5 \times 10^7 \text{ poros cm}^{-2}$$

para el número de poros por unidad de área.

6.8. Transporte de iones a través de la membrana

El fluido del interior de la célula se diferencia del fluido exterior por su composición y por su potencial eléctrico. Estos dos factores influyen en el transporte de iones a través de la membrana, ya que en el caso de los iones tanto la diferencia de concentración como la diferencia de potencial puede dar lugar a flujos. He aquí algunos valores característicos de la composición de los fluidos interiores y exteriores de la célula.

<i>Interior</i>	<i>Exterior</i>
[Na ⁺] = 15	[Na ⁺] = 145
[K ⁺] = 150	[K ⁺] = 5
[Cl ⁻] = 9	[otros iones ⁺] = 5
[otros iones ⁻] = 4	[Cl ⁻] = 125
$V_{\text{int}} = -70 \text{ mV}$	[otros iones ⁻] = 30
	$V_{\text{ext}} = 0 \text{ mV}$

Nota: Concentraciones expresadas en milimoles por litro.

En algunas ocasiones, tanto la diferencia de concentración como la diferencia de potencial impulsan a ciertos iones a fluir en un mismo sentido (desde el interior hasta el exterior de la célula o viceversa); en otras ocasiones, la diferencia de concentración tiende a hacerlos fluir en sentido opuesto; en este último caso se da una competición entre la diferencia de concentración y la diferencia de potencial, y es imprescindible un análisis cuantitativo detallado para poder predecir en qué sentido irá el flujo iónico resultante.

Llevaremos a cabo este análisis, escribiendo el flujo J como suma de dos contribuciones, la debida al gradiente de concentración y la debida al gradiente de potencial eléctrico. Las constantes de proporcionalidad respectivas serán la constante de difusión D , que según la relación de Einstein puede escribirse en la forma $D = \mu kT$, con μ la movilidad de los iones, para el término en el gradiente de concentración, y $zeC\mu$, donde z es la valencia de los iones, e la carga del electrón (en valor absoluto) y C la concentración para el término en el gradiente de potencial V . Así, tendremos

$$J = -\mu kT \frac{dC}{dx} - zeC\mu \frac{dV}{dx} \quad [26]$$

Un gradiente de densidad o de potencial eléctrico en una disolución afecta de distinta forma su movimiento y en la interdependencia de estas fuerzas está la base de las teorías elementales de la bioelectricidad. Consideremos ahora dos disoluciones de concentraciones distintas separadas por una membrana. Supongamos que la membrana es perfecta y que sólo deja pasar un tipo de iones (de color negro, subíndice 1 y de carga positiva) y es impermeable al otro (de color blanco, subíndice 2 y de carga negativa) (Fig. 6.13).

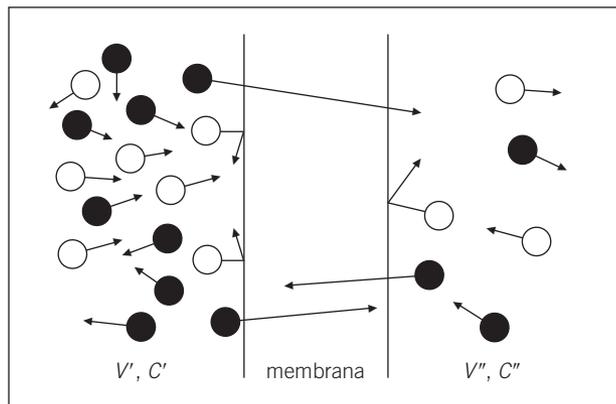


Figura 6.13. Membrana semipermeable.

En el caso de que no haya corriente neta, se cumple

$$z_1 J_1 + z_2 J_2 = 0$$

Como la membrana impide el paso de los iones 2, $J_2 = 0$ y por la condición anterior $J_1 = 0$. Pero J_1 se debe por una parte al flujo de difusión y por otra parte al flujo eléctrico; por tanto,

$$J_1 = -\mu_1 kT \frac{dC_1}{dx} - eC_1 \mu_1 \frac{dV}{dx} = 0$$

si $z_1 = +1$. La ecuación anterior, si consideramos $C_1 \equiv C$, queda

$$\frac{-kT}{eC} \frac{dC}{dx} = \frac{dV}{dx}$$

o bien

$$dV = -\frac{kT}{e} \frac{dC}{C}$$

Integrando entre C' y C'' y los correspondientes voltajes V' y V'' se llega a la ecuación

$$V'' - V' = -\frac{kT}{e} \ln \frac{C''}{C'} \quad [27]$$

La expresión anterior es la denominada *ecuación de Nernst*. A la diferencia $V'' - V'$ se le denomina potencial de Nernst para el ion 1. En definitiva, lo que nos da la relación de Nernst es la diferencia de potencial que se ha de establecer para contrarrestar el flujo difusivo de un ion.

Para determinar en qué sentido fluyen los iones, comparamos el valor del potencial dado por la ecuación de Nernst con el potencial de la situación a analizar. Un potencial mayor (en valor absoluto) que el potencial de Nernst (en valor absoluto) hará que la diferencia de potencial tienda a producir un flujo mayor que el estrictamente necesario para contrarrestar exactamente el flujo debido a la diferencia de concentraciones. Por tanto, predominará el sentido del flujo inducido por la diferencia de potencial sobre el sentido del flujo inducido por la diferencia de concentraciones. Para establecer el sentido del flujo eléctrico, debemos tener en cuenta tan sólo que los iones positivos tienden a dirigirse a la zona de menor potencial eléctrico, en tanto que los iones negativos se dirigen a la zona de potencial mayor. Es recomendable, al estudiar una situación concreta, no lanzarse únicamente al cálculo del potencial de Nernst: conviene primero estudiar el sentido en que fluiría el flujo de difusión y el sentido en que fluiría el flujo producido por la diferencia de potencial. Si ambos sentidos coinciden, no es necesario acudir a la ecuación de Nernst para saber en qué sentido irá el flujo total, ya que éste resulta evidente. Sólo será necesario acudir a la ecuación de Nernst para dilucidar aquellas situaciones en que el sentido de los flujos debidos a la diferencia de concentraciones y a la diferencia de potenciales sean opuestos.

En el ejemplo que sigue se pone de manifiesto la utilidad de la ecuación de Nernst para llegar a conocer en qué sentido fluirán los iones en una situación no trivial.

Ejemplo 6.17.

Determinar en qué dirección irá el flujo de iones potasio en la configuración siguiente (temperatura 310 K):

<i>Exterior</i> $V = 0 \text{ mV}$ $C_K^e = 3 \text{ mol m}^{-3}$	<i>Interior</i> $V = -30 \text{ mV}$ $C_K^e = 12 \text{ mol m}^{-3}$
-------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------

En la situación expuesta en el enunciado se dan dos causas antagónicas. De un lado el potasio, un ion positivo, tiende a entrar debido a que el interior está cargado negativamente, pero por otro este flujo haría aumentar aún más la diferencia de concentraciones entre ambos lados.

La ecuación de Nernst relaciona el potencial de equilibrio que debe existir entre las dos regiones separadas por la membrana, de modo que no haya flujo neto de un determinado ion que la atraviese. Por lo tanto,

$$V_i - V_e = \frac{kT}{q} \ln \frac{C_e}{C_i}$$

y con los datos del enunciado deducimos que el potencial para que hubiera equilibrio debería ser

$$\begin{aligned} V_i - V_e &= \frac{1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \times 310 \text{ K}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} \ln \frac{3}{12} = \\ &= -3,7 \times 10^{-2} \text{ V} = -37 \text{ mV} \end{aligned}$$

Este potencial es superior, en valor absoluto, al que se da en el enunciado, $V_i - V_e = -30 \text{ mV}$, lo cual indica que el flujo hacia afuera debido a los efectos de difusión, es decir, de la diferencia de concentraciones, supera al flujo hacia adentro debido a un potencial negativo. Como consecuencia, el potasio tenderá a moverse de forma neta hacia el exterior de la membrana.

Sabemos que el potasio tiende a salir de la célula, en tanto que el sodio tiende a entrar en la misma. La bomba de sodio-potasio actúa devolviendo al exterior los iones de sodio que van entrando y devolviendo al interior los iones de potasio que van saliendo. Para llevar a cabo este cometido, debe consumir energía, que se obtiene de la hidrólisis del ATP. Ello nos hace ver que una célula no es una estructura de equilibrio, sino un estado estacionario de no equilibrio. Podríamos permitirnos un símil náutico: un sistema de equilibrio sería semejante a una barca en la que no entra agua: cuando está sobre el agua flota sobre ella sin necesidad de más cuidado. El estado estacionario de no equilibrio, en cambio, es semejante a una barca con una vía de agua: ésta sólo se mantendrá a flote si posee una bomba que vaya expulsando el agua que va entrando, para lo cual debe consumir energía; cuando se agota la energía disponible, la barca se hunde y la célula muere.

Una situación más complicada se presenta en el caso que pueden fluir iones de diversos tipos, de modo que se establezca entre ellos una correla-

ción debida a sus interacciones electrostáticas. Exponemos un ejemplo de esta situación.

Ejemplo 6.18.

Consideremos dos disoluciones de KCl de distinta concentración n_i y n_e separadas por una membrana permeable a los iones K y Cl. Determinar la expresión que relaciona la diferencia de potencial que equilibraría el flujo de iones por difusión a través de la membrana.

En equilibrio se debe cumplir que la corriente neta sea cero; por tanto,

$$z_{Cl}J_{Cl} + z_KJ_K = 0 \quad [28]$$

donde z_{Cl} y z_K son las valencias de los iones Cl y K y J_{Cl} y J_K los flujos respectivos. Tanto J_{Cl} como J_K se deben al flujo de difusión y al flujo eléctrico. Entonces escribiremos

$$J_{Cl} = u_{Cl}kT \frac{dn_{Cl}}{dx} + z_{Cl}en_{Cl}u_{Cl} \frac{dV}{dx}$$

y

$$J_K = u_KkT \frac{dn_K}{dx} + z_Ken_Ku_K \frac{dV}{dx}$$

Las ecuaciones anteriores y [28] conducen a

$$z_{Cl} \left(u_{Cl}kT \frac{dn_{Cl}}{dx} + z_{Cl}en_{Cl}u_{Cl} \frac{dV}{dx} \right) + z_K \left(u_KkT \frac{dn_K}{dx} + z_Ken_Ku_K \frac{dV}{dx} \right) = 0$$

Despejando dV/dx de la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{kT}{e} \frac{z_{Cl}u_{Cl} \frac{dn_{Cl}}{dx} + z_Ku_K \frac{dn_K}{dx}}{z_{Cl}^2n_{Cl}u_{Cl} + z_K^2n_Ku_K}$$

Si consideramos que en cada dx debe cumplirse la condición de electroneutralidad, es decir, $n_{Cl} = n_K = n$, la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{kT}{e} \frac{z_{Cl}u_{Cl} + z_Ku_K}{z_{Cl}^2u_{Cl} + z_K^2u_K} \frac{dn}{n}$$

que integrada queda

$$V_e - V_i = -\frac{kT}{e} \frac{z_{Cl}u_{Cl} + z_Ku_K}{z_{Cl}^2u_{Cl} + z_K^2u_K} \ln \frac{n_e}{n_i}$$

donde V_i y V_e son los potenciales a ambos lados de la membrana. Sustituyendo los valores de z_{Cl} y z_K se obtiene

$$V_e - V_i = -\frac{kT}{e} \frac{u_K - u_{KCl}}{u_K + u_{KCl}} \ln \frac{n_{eKCl}}{n_{iKCl}} \quad [29]$$

$V_i - V_e$ se denomina potencial de difusión. Obsérvese que si las movilidades de los dos iones son las mismas, $V_i = V_e$, y que si la movilidad de uno de los iones es cero, la ecuación anterior se reduce a la ecuación de Nernst. La diferencia fundamental entre la ecuación de Nernst y la ecuación de difusión [29] es que mientras la primera representa una condición de equilibrio que no disipa energía, la ecuación [29] da un potencial en el estado estacionario, que para mantenerse necesita energía que se disipa continuamente por el movimiento de los iones.

6.9. Transmisión de los impulsos nerviosos

La situación analizada es muy general, y se da en la mayoría de células. Un cierto tipo de células, las neuronas, que componen el sistema nervioso, tienen un comportamiento especial en cuanto a su respuesta a las perturbaciones que pueda experimentar el estado de reposo. Dichas células tienen un largo tubo o axón, que conduce las señales nerviosas. Analizaremos ahora la naturaleza de estas señales. El axón se encuentra en una situación semejante a la que hemos descrito en los ejemplos anteriores. Si alguna perturbación modifica la diferencia de potencial entre el exterior y el interior, haciéndola disminuir, pueden darse dos situaciones muy diferentes: si la perturbación es pequeña, de modo que la diferencia de potencial entre dentro y fuera se mantiene (en valor absoluto) por encima de un cierto valor crítico, el axón recupera rápidamente su potencial de reposo; en cambio, si la perturbación es lo suficientemente grande como para que la diferencia de potencial caiga por debajo del valor crítico antes mencionado, se producen grandes cambios en la permeabilidad y el potencial celular. Estos cambios constituyen lo que se conoce como *potencial de acción*, que constituye la base de la señal nerviosa, y que tiene la forma indicada en la Figura 6.14.

Como puede verse en la Figura 6.14, el potencial de acción comienza con una gran subida del potencial interno del axón, que pasa de unos -90 mV a unos $+40$ mV. Este rápido incremento se debe a que por encima de una cierta diferencia de potencial, los canales que permiten el paso del sodio, la mayoría de los cuales están cerrados en el estado de reposo, se abren bruscamente. Consecuencia de ello es que el sodio penetra bruscamente en el axón, y aumenta el potencial interno (ya que el ion sodio es positivo). Una vez el potencial interno es suficientemente positivo (suponemos que el externo vale siempre cero, ya que es nuestra referencia), se abren los canales que dejan fluir el potasio y se cierran los que dejan fluir el sodio. Como ahora el potencial interior es positivo, el potasio tiende a salir tumultuosamente del axón y por tanto el potencial interior disminuye rápidamente. Finalmente, se cierran los canales del potasio y las bombas de sodio y de potasio restablecen la situación inicial en breve tiempo. En conjunto, el potencial de acción viene a durar unos pocos milisegundos (sin embargo, este tiempo de respuesta es mucho más largo que los tiempos de respuesta de los dispositivos microelectrónicos, lo que hace que éstos pueden ser tan rápidos en comparación con el cerebro en ciertas tareas). La forma del potencial

de acción y los detalles de su propagación a lo largo del axón fueron estudiados matemáticamente por *Hodgkin y Huxley*, en un memorable trabajo de investigación, realizado a partir de numerosos experimentos con axón gigante de calamar, y que les valió el premio Nobel de Medicina y Fisiología de 1963.

Los conceptos físicos elementales que hemos introducido en este capítulo nos permiten profundizar un poco en los procesos del potencial de acción en los siguientes ejemplos.

En la Figura 6.14 se representa la variación del potencial interno del axón en función del tiempo. La gran subida de potencial se debe básicamente a una entrada brusca de iones sodio, después de que una perturbación suficientemente intensa haya abierto los canales de sodio. La bajada de potencial se debe a una salida brusca de iones potasio, también regulados por el potencial eléctrico. Finalmente, cerrados ya todos los canales, las bombas de sodio y potasio permiten recuperar la situación inicial.

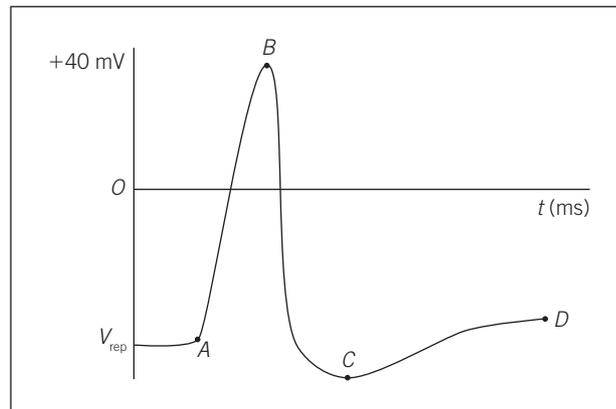


Figura 6.14.

Ejemplo 6.19.

Un axón mielinizado tiene un radio de 10^{-5} m. Un segmento de 1 cm de su membrana tiene una capacidad de 6×10^{-9} F y su potencial de reposo (diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la membrana, en la situación de reposo) es de 90 mV. El potencial de reposo se debe a un exceso de iones positivos sobre la superficie externa de la membrana y a un exceso igual y de carga opuesta en el interior. a) ¿Qué exceso de carga hay a cada lado de la membrana? b) Si ese exceso se debe a iones con una sola carga, ¿qué exceso de iones hay a cada lado? c) Encontrar el cociente entre el número de iones negativos sobre la superficie interior de la membrana y el número total de iones negativos en el interior del axón. d) Si el potencial axoplasmático cambia de -90 mV a $+40$ mV (paso de un potencial de acción), ¿cuál es el flujo de carga que pasa a través de la membrana? Tomamos como referencia las concentraciones iónicas en el interior y en el exterior en un axón típico de mamífero, en estado de reposo.

Potencial	<i>Fluido exterior</i> $V_e = 0 \text{ mV}$ (referencia)	<i>Fluido interior</i> $V_i = -90 \text{ mV}$
Concentraciones en mol m^{-3}		
Na ⁺	145	12
K ⁺	4	155
Cl ⁻	120	4
(otros) ⁻	29	163

Al suponer que la membrana actúa como un condensador, el exceso de carga sobre su superficie se puede escribir como

$$Q = C\Delta V$$

que, con los datos del ejemplo, resulta ser

$$Q = 6 \times 10^{-9} \text{ F} (-90 \times 10^{-3} \text{ V}) = -5,4 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Si cada ion tiene una sola carga q , es decir, $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ (carga del electrón), el número de iones sobre la superficie se calcula dividiendo la carga total por la carga de un ion:

$$n = \frac{Q}{q} = \frac{-5,4 \times 10^{-10} \text{ C}}{-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 3,4 \times 10^9 \text{ iones}$$

Para responder a la tercera pregunta tenemos que calcular, en primer lugar, cuánto vale el volumen del segmento de axón considerado. Por tratarse de un elemento cilíndrico vale

$$V = \pi r^2 l = \pi \times (10^{-5} \text{ m})^2 \times 10^{-2} \text{ m} = \pi \times 10^{-12} \text{ m}^3$$

A partir de los datos del enunciado vemos que la concentración de iones negativos en el interior del axón es de 167 mol m^{-3} . Multiplicando esta cantidad por el volumen anteriormente hallado y por el número de Avogadro N_a (número de átomos que tiene un mol) obtenemos el número total de iones negativos

$$N^- = 167 \text{ mol} \times \pi \times 10^{-12} \text{ m}^3 \times 6 \times 10^{23} \text{ iones mol}^{-1} = 3,2 \times 10^{13} \text{ iones}$$

La relación pedida vale entonces

$$\frac{n}{N^-} = \frac{3,4 \times 10^9}{3,2 \times 10^{13}} = 1,08 \times 10^{-4}$$

El valor relativamente pequeño de la carga del condensador indica que las posibles variaciones de potencial en la superficie no modifican sustancialmente las concentraciones dadas en el enunciado.

El cambio en la diferencia de potencial, que pasa de -90 mV a $+40 \text{ mV}$, se debe a un flujo de carga a través de la membrana. Como vimos en el primer apartado, la carga sobre la superficie interior de la membrana vale

$$Q_i(-90 \text{ mV}) = -5,4 \times 10^{-10} \text{ C}$$

Cuando el potencial pasa a +40 mV la carga correspondiente es

$$Q_i(+40 \text{ mV}) = C\Delta V = 6 \times 10^{-9} \text{ F} \times 40 \times 10^{-3} \text{ V} = 2,4 \times 10^{-10} \text{ C}$$

por tanto, han fluido $7,8 \times 10^{-12} \text{ C}$ de iones positivos hacia el interior del axón.

Ejemplo 6.20.

La ecuación de Goldman

$$V_{\text{int}} - V_{\text{ext}} = \frac{kT}{q} \ln \left[\frac{(C_{\text{Na}})_{\text{ext}} + (C_{\text{K}})_{\text{ext}} \frac{P_{\text{K}}}{P_{\text{Na}}}}{(C_{\text{Na}})_{\text{int}} + (C_{\text{K}})_{\text{int}} \frac{P_{\text{K}}}{P_{\text{Na}}}} \right]$$

permite hallar la diferencia de potencial de equilibrio en un axón no mielinizado. El cociente $P_{\text{K}}/P_{\text{Na}}$ de las permeabilidades al sodio y al potasio de la membrana, la carga del electrón, simbolizada por q , las concentraciones, que se designan con la letra C , la constante de Boltzmann k y la temperatura en la escala absoluta T , intervienen en dicha ecuación. La temperatura que se suele considerar es la del cuerpo humano, unos 310 K. a) Si el potencial de reposo vale -90 mV , ¿cuál es el cociente de las permeabilidades? b) Un estímulo altera las permeabilidades de manera que el potencial aumenta hasta $+40 \text{ mV}$. ¿Cuál es el cociente de permeabilidad en esa situación? c) Explicar hasta qué punto es correcto emplear las mismas concentraciones en los apartados a) y b). (Utilizar las concentraciones del Ejemplo 6.19.)

a) Para resolver el primer apartado introducimos en la ecuación de Goldman los valores de las concentraciones que aparecen en el Ejemplo 6.19, y los valores numéricos de q y k :

$$-90 \times 10^{-3} \text{ V} = \frac{1,4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \times 310 \text{ K}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} \ln \left(\frac{145 + 4x}{12 + 155x} \right)$$

donde indicamos con x el cociente $P_{\text{K}}/P_{\text{Na}}$. Simplificando los valores numéricos obtenemos la relación

$$-\frac{9}{2,67} = \ln \frac{145 + 4x}{12 + 155x}$$

cuya solución es

$$x = 108,75$$

que nos indica que la membrana es mucho más permeable al potasio que al sodio.

b) Procediendo de manera análoga al caso anterior, y teniendo en cuenta que ahora el potencial vale +40 mV, se obtiene

$$40 \times 10^{-3} \text{ V} = 2,67 \times 10^{-2} \text{ V} \ln \frac{145 + 4x}{12 + 155x}$$

relación de la cual resulta

$$x = 7,54$$

En esta situación la permeabilidad del sodio respecto a la de potasio ha aumentado enormemente, como corresponde al paso de un potencial de acción.

c) Como vimos en el Ejemplo 6.19, el número de iones que provocan la diferencia de potencial entre uno y otro lado de la membrana es muy pequeño en comparación con el número total contenido en el volumen. Por tanto, aun tratándose en a) y b) con dos situaciones de membrana muy diferentes, podremos utilizar las mismas concentraciones en volumen.

Habitualmente, los extremos de las ramificaciones del axón están separados de la neurona contigua correspondiente por un pequeño espacio llamado sinapsis o intervalo sináptico. Al llegar a la sinapsis, el potencial de acción provoca la apertura de unos canales de calcio, Ca^{++} , que penetra tumultuosamente en el extremo del axón. Una vez dentro, este calcio hace que unas vesículas cargadas de neurotransmisores se aproximen a la membrana celular y viertan su contenido al espacio sináptico. Los neurotransmisores se difunden entonces hasta la membrana de la neurona postsináptica, donde se combinan con unos neuroreceptores y provocan que se abran canales iónicos en dicha membrana. Si por estos canales iónicos entran iones positivos (en general Na^+) la sinapsis correspondiente es activadora; si entran iones negativos (en general Cl^-) la sinapsis es inhibitoria. En efecto, sabemos que para provocar el inicio de un potencial de acción el potencial interno de la neurona debe tener un cierto aumento con respecto al potencial negativo de reposo. La entrada de iones positivos provoca un ascenso del potencial, y contribuye a que su valor se aproxime al necesario para que la neurona se excite, disparando un potencial de acción. En cambio, la entrada de iones negativos hace disminuir el potencial y lo aleja del potencial necesario para la excitación.

Ejemplo 6.21.

Un cierto neurotransmisor tiene un coeficiente de difusión $D = 2 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$ en el fluido de la sinapsis. Si el grosor del intervalo sináptico es de 80 nm, ¿cuánto tardan en llegar las moléculas del neurotransmisor a la neurona postsináptica? ¿Cómo variaría este tiempo si el grosor fuera el doble?

Recordemos, del tema anterior, que el tiempo característico para recorrer por difusión una distancia x es

$$t = x^2/2D = (80 \times 10^{-9} \text{ m})^2/(2 \times 2 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}) = 1,6 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Como el tiempo es proporcional al cuadrado de la distancia recorrida, al duplicar ésta el tiempo se multiplica por cuatro.

En una red neuronal, cada neurona recibe en su cuerpo principal, o soma, un gran número de terminales sinápticas. Para aumentar el área de contacto, la superficie de la neurona acostumbra a tener muchas ramificaciones, llamadas dendritas. Estas sinapsis serán activadoras las unas e inhibitoras las otras, y se dispararán según las neuronas presinápticas correspondientes estén o no estén excitadas. La neurona postsináptica suma todos los impulsos y, si la subida de potencial es suficiente, dispara un potencial de acción a lo largo de su axón; de lo contrario, permanece como estaba. Existe más de medio centenar de neurotransmisores diferentes, y cada sinapsis utiliza un determinado tipo de neurotransmisor. Algunos de los más conocidos son el GABA (ácido gamma amino-butírico), la dopamina, la serotonina, la oxitocina, la adrenalina ... Defectos o excesos en la fabricación y liberación de los neurotransmisores pueden producir enfermedades mentales, motrices o sensoriales. Por ejemplo, bajas concentraciones de serotonina están relacionadas con depresiones, y baja liberación de dopamina está relacionada con la enfermedad de Parkinson.

Ejemplo 6.22.

El potencial de reposo de una neurona es -70 mV y para que se abran los canales de sodio y se inicie un potencial de acción se necesita que el potencial interior llegue a -50 mV. Supóngase que se excitan cien sinapsis activadoras, por cincuenta de las cuales entran 10^7 iones por cada una, y por las cincuenta restantes entran 10^8 iones por cada una; y veinte sinapsis inhibitoras, por cada una de las cuales entran 10^7 iones negativos. Si la capacidad de la membrana del soma de la neurona vale 8×10^{-9} F, ¿se disparará un potencial de acción?

Para que se dispare el potencial de acción el potencial debe pasar de -70 mV a -50 mV, es decir, debe aumentar en 20 mV. Considerada la membrana como un condensador, ello significa que debe entrar una carga positiva neta de

$$Q = C(\Delta V) = 8 \times 10^{-9}(20 \times 10^{-3}) = 16 \times 10^{-11} \text{ C}$$

Cada ion univalente tiene una carga de $1,6 \times 10^{-19}$ C; por lo tanto, el número neto de iones positivos que deben entrar vale

$$N(\text{iones positivos}) = (16 \times 10^{-11} \text{ C}) / (1,6 \times 10^{-19}) = 10^9 \text{ iones}$$

En la situación considerada, la carga neta de iones vale

$$\begin{aligned} N(\text{iones positivos}) &= 50 \times 10^7 + 50 \times 10^8 - 20 \times 10^7 = \\ &= 5,3 \times 10^9 \text{ iones positivos netos} \end{aligned}$$

Como este número es mayor que el necesario para producir la apertura de los canales de sodio, la neurona se disparará.

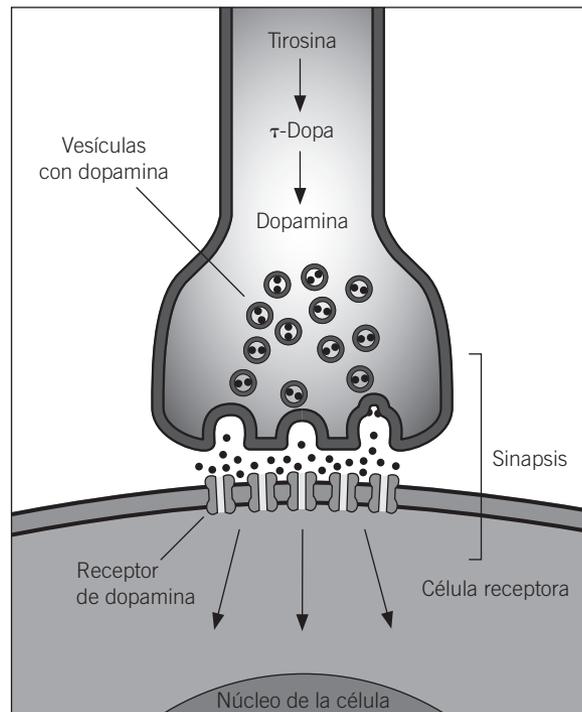


Figura 6.15. Sinapsis.

Uno de los campos en que más activamente se trabaja en neurobiología es en el estudio del almacenamiento de la memoria y aprendizaje en redes neuronales. Los diversos recuerdos, expresados como estados de excitación o no excitación de las diversas neuronas de la red, son almacenados en el conjunto de las sinapsis, según la intensidad de éstas. Así, cuando la red recibe un estímulo más o menos relacionado con aquel recuerdo, la dinámica de excitaciones la conduce a un estado final correspondiente al recuerdo evocado. El proceso de registrar un nuevo recuerdo —aprendizaje— se lleva a cabo modificando la intensidad de las sinapsis, es decir, aumentando o reduciendo el número de neuroreceptores de la célula postsináptica, o de neurotransmisores emitidos en cada impulso por la terminal del axón presináptico. Este proceso tiene lugar cuando llega un impulso nervioso a una neurona ya previamente excitada, cosa que fortalece los vínculos entre las dos neuronas, presináptica y postsináptica, correspondientes que se excitan simultáneamente. Otro campo de trabajo es la observación y registro de la actividad de algunas neuronas concretas mediante la inserción en ellas de microelectrodos.

6.10. Magnetismo. Fuerza magnética sobre una partícula

La fuerza magnética, conocida desde la antigüedad, no se llegó a asociar en una misma teoría con la fuerza eléctrica hasta mitad del siglo XIX. Esta im-

portante unificación de dos interacciones aparentemente diversas fue uno de los más decisivos progresos teóricos de dicho siglo, e inculcó el objetivo de unificar todas las interacciones en una sola, empeño al que se han dedicado ingentes esfuerzos. Los pasos hacia esta unificación fueron la observación de que una carga en movimiento produce un campo magnético, y que la variación de un campo magnético produce un campo eléctrico. Estudiaremos aquí ambas cuestiones, ambas de gran importancia.

En el caso eléctrico, la fuerza sobre una carga q es simplemente el producto de q (escalar) por el vector \vec{E} campo eléctrico. En el caso magnético, la situación es más complicada. Se observa, en efecto, que la fuerza depende no sólo de la carga, sino también de la velocidad, y que es perpendicular a ésta y proporcional a su módulo. En analogía con el campo eléctrico \vec{E} se introduce el concepto de campo magnético \vec{B} , de tal modo que la fuerza magnética sobre una carga q con velocidad \vec{v} es (*fuerza de Lorentz*)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad [30]$$

La unidad de campo magnético es el *tesla*, igual a $1 \text{ N} \times 1 \text{ A}^{-1} \times 1 \text{ m}^{-1}$. Dicha fuerza es perpendicular tanto a la velocidad como al campo. Al ser perpendicular a la velocidad, la fuerza magnética hace que una partícula que penetre en una zona donde hay un campo magnético constante describa una trayectoria circular (o helicoidal), cuyo radio viene determinado por la masa y la carga de la partícula, su velocidad y el valor del campo. En efecto, utilizando la ley de Newton $F = ma$, teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta debida al campo magnético vale, en módulo, $qv_{\perp}B$ (con v_{\perp} la componente de v perpendicular a B), y que la aceleración centrípeta vale v^2/r , con r el radio de la trayectoria, tenemos

$$m \frac{v_{\perp}^2}{r} = qv_{\perp}B$$

por lo cual

$$r = mv_{\perp}/qB \quad [31]$$

Este fenómeno tiene muchas aplicaciones tanto en espectrografía y espectrometría de masas como en aceleradores de partículas o en reactores de fusión nuclear.

En efecto, la idea básica del espectrógrafo de masas consiste en relacionar el radio de giro en un campo magnético conocido con la masa de la partícula. Exploramos las posibilidades de este método en los dos ejemplos que siguen.

Ejemplo 6.23.

Iones de litio con una sola carga de $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ y masas de $10,05 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y $11,72 \times 10^{-27} \text{ kg}$ son acelerados mediante una diferencia de potencial de 5000 V . Una vez acelerados penetran en un espectrógrafo de masa, en el cual hay un campo magnético perpendicular a la dirección de la velocidad, de

0,05 T. a) Calcular la velocidad de entrada de los iones en el campo magnético. b) Dentro del campo magnético, los iones describen una semicircunferencia, antes de impresionar una placa fotográfica. Encontrar la separación entre las marcas producidas por los dos isótopos.

a) Una carga, al atravesar una diferencia de potencial ΔV , adquiere una energía $q\Delta V$. Si toda esta energía potencial eléctrica se transforma en energía cinética, se ha de cumplir

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2$$

y, por tanto, la velocidad que la carga adquiere es

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

Para el presente caso, tendremos para la velocidad de los isótopos correspondientes

$$v_1 = \left(\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 5000 \text{ V}}{10,05 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right)^{1/2} = 3,99 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_2 = \left(\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 5000 \text{ V}}{11,72 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right)^{1/2} = 3,69 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

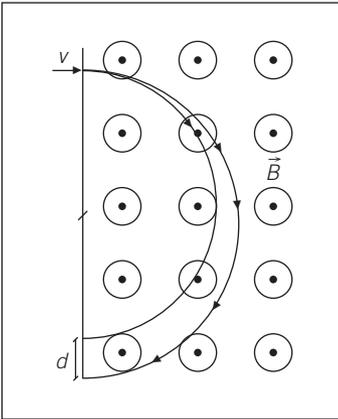


Figura 6.16. Separación de partículas según su masa en un espectrógrafo.

b) Al entrar en el campo magnético los iones experimentan una fuerza perpendicular, a la vez, a la velocidad de los iones y al campo. Esa fuerza actúa como una fuerza centrípeta que obliga a los iones a describir una trayectoria circular, de radio R dado por

$$R = mv/qB$$

Como se indica en la Figura 6.16, la separación d entre las marcas dejadas sobre la placa fotográfica ha de ser

$$d = 2R_2 - 2R_1 = 2(m_2v_2 - m_1v_1)/qB$$

Si sustituimos los valores que nos dan en el enunciado, obtenemos $d = 8,1 \text{ cm}$.

En el ejemplo anterior, los iones no entran en la zona de campo magnético con la misma velocidad, sino que el ion más pesado tiene menor velocidad. En muchas ocasiones resulta más conveniente que todos los iones entren con la misma velocidad, para lo cual se utiliza un dispositivo un selector de velocidades cuyo funcionamiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.24.

Un espectrógrafo de masas tiene un selector de velocidades, consistente en un electroimán, que crea un campo magnético constante, y un condensador,

cuyo campo eléctrico constante es perpendicular al campo magnético del electroimán, tal como se esquematiza en la Figura 6.17. a) ¿Con qué velocidad salen las partículas de ese selector? ¿Depende ésta de la carga o de la masa de las partículas? Una vez superado el colimador C, el haz de partículas se ve sometido a un campo magnético constante, que le hace describir una trayectoria circular, siendo detectado más tarde sobre una placa fotográfica, tal como se indica en la Figura 6.17. Supongamos que el haz que entra en el selector de velocidades es una mezcla de iones de carbono (12 u.m.a.), oxígeno (16 u.m.a.) y de un elemento cuya masa se desea determinar, todos ellos ionizados una sola vez ($q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$). La placa fotográfica muestra que las manchas debidas al oxígeno y al carbono están separadas 2,250 cm. Los iones del elemento desconocido producen una mancha entre aquellas dos, y situada a 1,160 cm de la mancha debida al carbono. b) ¿De qué elemento se trata?

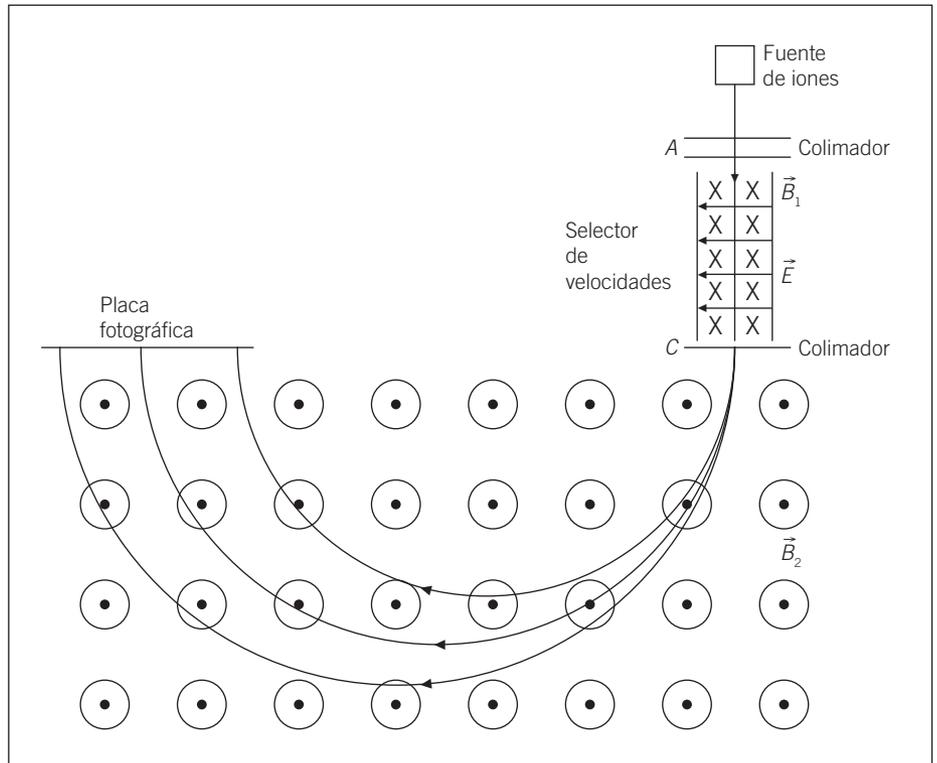


Figura 6.17. Selector de velocidades.

a) El colimador C sólo podrá ser atravesado por aquellas partículas cargadas que lleven una velocidad perpendicular, a la vez, a los campos eléctrico y magnético. Las fuerzas electrostáticas y de Lorentz, dadas, respectivamente, por

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}_1$$

tienen sentido opuesto en la configuración del selector, por lo cual tienden a desviar a las partículas en direcciones opuestas. Así pues, sólo podrán describir una trayectoria rectilínea aquellas partículas cuya velocidad sea tal que ambas fuerzas se anulen entre sí, es decir,

$$qE = qvB_1$$

Por tanto,

$$v = \frac{E}{B_1}$$

Esta velocidad es independiente de la carga y de la masa de las partículas en el haz, y sólo depende de la relación de los campos en el selector.

b) Todas las partículas, sea cual sea su masa, entrarán en el campo magnético B_2 con la misma velocidad, pero no seguirán la misma trayectoria circular, ya que

$$m_i \frac{v^2}{r_i} = q_i v B_2$$

El radio de curvatura r_i de los diversos iones depende de la masa y de la carga de los mismos como

$$r_i = \frac{m_i v}{q_i B_2}$$

e incidirán sobre la placa fotográfica a una distancia d del colimador C , dada por

$$d_i = 2r_i$$

Así, las partículas más pesadas estarán más alejadas del colimador y las más ligeras más cerca. Como en el caso del enunciado se trata de partículas con igual carga, tendremos

$$d_i - d_j = \frac{2v}{qB_2} (m_i - m_j)$$

Si llamamos d_c , d_0 y d_x a las distancias de los iones carbono, oxígeno y del enunciado desconocido, respectivamente, se obtienen las relaciones siguientes:

$$2,250 \text{ cm} = d_0 - d_c = \frac{2v}{qB_2} (16 - 12) \text{ u.m.a.}$$

$$1,160 \text{ cm} = d_x - d_c = \frac{2v}{qB_2} (x - 12) \text{ u.m.a.}$$

Dividiendo estas dos expresiones entre sí, se llega a la expresión para la masa x del elemento desconocido

$$\frac{1,160}{2,250} = \frac{x - 12}{16 - 12}$$

y, por tanto,

$$x = \left(4 \times \frac{1,160}{2,250} + 12 \right) \text{ u.m.a.} = 14,06 \text{ u.m.a.}$$

Tras consultar la tabla periódica, vemos que el elemento desconocido es el nitrógeno.

En la ecuación [30] nos hemos referido a la fuerza magnética sobre una carga en movimiento. En muchas ocasiones, las cargas no se mueven individualmente en el vacío, sino que se desplazan a lo largo de hilos conductores formando una corriente. En el caso de una corriente de intensidad I , la fuerza por unidad de longitud del conductor vale, como puede obtenerse a partir de [24],

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad [32]$$

donde $d\vec{l}$ es un vector tangente al conductor en el punto considerado, en el sentido de la corriente, y que tiene por módulo el diferencial de longitud. Para pasar de [30] a [32] hemos escrito ($dq\vec{v} = (dq) (d\vec{l}/dt) = (dq/dt)d\vec{l} = Id\vec{l}$) con $I = (dq/dt)$ la intensidad de la corriente.

6.11. Resonancia magnética nuclear

Las técnicas de resonancia magnética nuclear (RMN) para análisis químico y, especialmente, para la obtención de imágenes, se han convertido en uno de los instrumentos más útiles de exploración no invasiva en medicina. A diferencia de los rayos X, que son una radiación ionizante, es decir, con energía suficiente para destruir moléculas de interés biológico y afectar algunas células, la resonancia magnética nuclear carece de estos efectos perjudiciales.

En medicina, esta técnica tiene otras diversas ventajas con respecto a las basadas en rayos X: proporciona imágenes con mucho más contraste que las de rayos X, y constituye una técnica más versátil, que permite concentrar la atención sobre algunos tipos concretos de moléculas que tengan un interés especial en la situación médica o biológica considerada. Habitualmente se estudia la resonancia de los protones, pero podría ser útil para estudiar otro tipo de núcleos, como los de sodio, fósforo o azufre, por ejemplo. En cambio, los rayos X sólo son sensibles a la densidad electrónica de las muestras, y por ello destacan especialmente las zonas densas (los huesos, en especial) pero tienen poco contraste en otras zonas —contraste que debe ser aumentado con la inyección o la ingestión de sustancias especiales de alta densidad electrónica que hagan visibles los vasos sanguíneos o el estómago o los intestinos. Ello no es necesario en la resonancia magnética nuclear, cosa que permite aplicarla, por ejemplo, a observaciones tan delicadas y detalladas como el estudio en tiempo real de la activación de las diferentes zonas cerebrales en función de la actividad desarrollada por individuo, posibilidad que ha dado un gran impulso al conocimiento del cerebro. Tan notable ha sido el impacto de las técnicas de resonancia magnética nuclear, que algunos de

los investigadores que desarrollaron esta técnica recibieron en 2003 el premio Nobel de Medicina y Fisiología.

Esta técnica se basa en la resonancia magnética de dipolos magnéticos en un campo magnético externo. En el capítulo 5, dedicado a oscilaciones y ondas, hemos descrito brevemente el concepto de resonancia (sección 5.3): se trata de la respuesta especialmente intensa de un sistema cuando es perturbado por un estímulo externo cuya frecuencia coincide con una de las frecuencias propias del sistema. En cambio, cuando la frecuencia exterior difiere de la interior, la respuesta es mucho menos acusada. Esta respuesta puede consistir, por ejemplo, en una absorción especialmente elevada de energía cuando ésta es suministrada mediante una perturbación de frecuencia adecuada, lo cual conlleva una amplitud especialmente elevada de las oscilaciones del sistema inducidas por el estímulo exterior.

Para comprender la resonancia magnética debemos introducir ahora el concepto de dipolo magnético y su interacción con un campo magnético exterior. Un dipolo magnético puede ser considerado como un imán diminuto, la intensidad de cuyo campo puede ser descrita mediante un vector llamado momento dipolar magnético μ . Un ejemplo de dipolo magnético puede ser una pequeña espira de área S por la que circula una corriente de intensidad I . En este caso, el valor del momento dipolar magnético μ vale, por definición, $\mu = IS$. Un ejemplo de esta situación es una carga eléctrica q que describe un giro de radio r con velocidad v , en cuyo caso el momento dipolar magnético es

$$\mu = IS = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{qvr}{2}$$

donde I (la intensidad, o carga por unidad de tiempo) es la carga q dividida por el tiempo que tarda ésta en dar una vuelta al círculo ($v/2\pi r$), y πr^2 es el área del círculo. Éste sería el caso, por ejemplo, de un electrón girando alrededor de un núcleo atómico, lo que se conoce como resonancia magnética electrónica.

La posibilidad que más nos interesa aquí es una partícula cargada y con espín, como por ejemplo un protón (núcleo de hidrógeno) o un núcleo atómico cualquiera. En este caso, μ vale

$$\mu = \gamma \frac{q}{m} m_z \frac{h}{2\pi}$$

donde m_z es la componente del espín a lo largo del campo magnético (para el protón, m_z puede valer $+1/2$ o $-1/2$, ya que tiene espín $1/2$), h es la constante de Planck (véase la sección 8.1), que tiene dimensiones de masa \times velocidad \times distancia, y γ es una constante numérica llamada razón giromagnética, que para el protón vale 2,79. Para un núcleo de ^{23}Na , en cambio, m_z puede valer $3/2$, $1/2$, $-1/2$, o $-3/2$, ya que tiene espín $3/2$, y $\gamma = 0,71$.

Un dipolo magnético μ sometido a un campo magnético B tiende a orientarse paralelamente a B , y su energía es el producto escalar de μ por B , es decir $\mu \times B$. En una versión clásica, el momento magnético tiende a efectuar un movimiento de precesión alrededor de B con una frecuencia de precesión determinada. En la versión cuántica, el cambio de orientación μ

desde la dirección de B (energía $E = -\mu B$) a la dirección opuesta a B (energía $E = +$) supone una energía

$$\Delta E = 2\mu B$$

Esta diferencia energética define una frecuencia f , según la relación

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2\mu}{h} B$$

que se sigue de la relación de Planck entre energía y frecuencia estudiada en el capítulo 8 (ecuación 8.1), a saber $\Delta E = hf$.

Según ello, si sometemos un dipolo magnético μ a un campo magnético fijo B que lo polarice a lo largo de una dirección, y le superponemos un campo magnético oscilante, absorberá energía a dicha frecuencia (ver la Figura 6.18). Supongamos que dicha muestra consistiera en protones libres en el vacío; entonces, la frecuencia de resonancia valdría

$$f = \frac{2\mu B}{h} = \frac{2,79}{2\pi} \frac{e}{m_p} B = 0,44 \frac{e}{m_p} B$$

donde m_p es la masa del protón y e su carga.

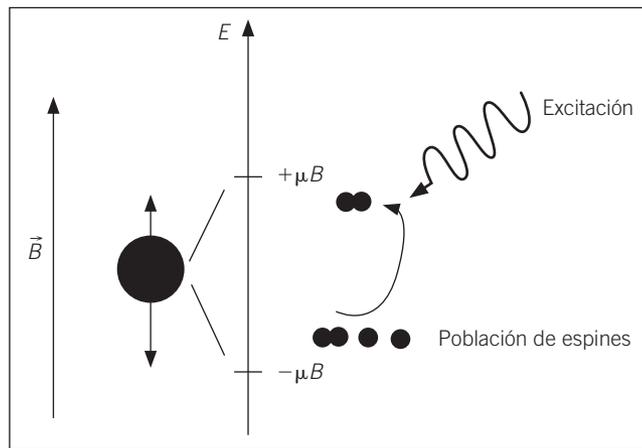


Figura 6.18. Resonancia de absorción.

Ejemplo 6.25.

Calcular la frecuencia de resonancia magnética de un protón en el vacío sometido a un campo magnético de 1 Tesla.

Podemos aplicar directamente la fórmula anterior, teniendo en cuenta los valores de la carga y masa del protón. Tenemos así

$$f = 0,44 \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}}{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}} 1\text{T} = 4,21 \times 10^7 \text{ Hz}$$

Esta frecuencia se conoce como frecuencia de Larmor del protón.

En lo que respecta a la producción de imágenes, el tema que aquí nos interesa, esta técnica permite obtener imágenes de la distribución espacial de un determinado tipo de núcleo (habitualmente protones) dentro de un sistema y, en particular, dentro de un tejido o un órgano. Ello resulta de gran interés en medicina, ya que permite explorar el interior de un cuerpo con mucho mayor detalle que los rayos X. La idea básica consiste en enviar a la muestra, sometida a un campo magnético aplicado exterior relativamente intenso, una perturbación magnética pequeña pero de frecuencia dada; esta perturbación avanza hasta que halla los núcleos que están en resonancia con dicha frecuencia. Dichos núcleos absorben entonces la energía magnética de la perturbación, con lo cual pasan de estar alineados paralelamente al campo exterior a estar antiparalelos al mismo. Poco después, los protones regresan a su estado de menor energía, es decir, vuelven a situarse paralelamente al campo magnético externo, con lo cual reemiten la energía antes absorbida. Este proceso permite observar las posiciones de los núcleos de interés, mediante un análisis numérico adecuado del tiempo transcurrido entre el envío de la señal y la recepción de la señal reemitida y podemos obtener una imagen interna del sistema.

La RMN permite obtener imágenes de secciones bien definidas del paciente, si se hace que el campo magnético aplicado no sea homogéneo, sino que varíe linealmente de forma acusada con el espacio, de manera que sólo puedan entrar en resonancia las moléculas de una franja muy fina del cuerpo. Las zonas con mayor densidad de protones absorberán y emitirán más energía, con lo cual darán más contraste, especialmente en los tejidos blandos en que el agua sea abundante. Para localizar lateralmente las posiciones de emisión, se superpone un gradiente rotatorio del campo magnético. Además, si se envía una señal pulsante, se puede observar el movimiento de los dipolos, cosa que pone de manifiesto el movimiento de la sangre dentro del cuerpo.

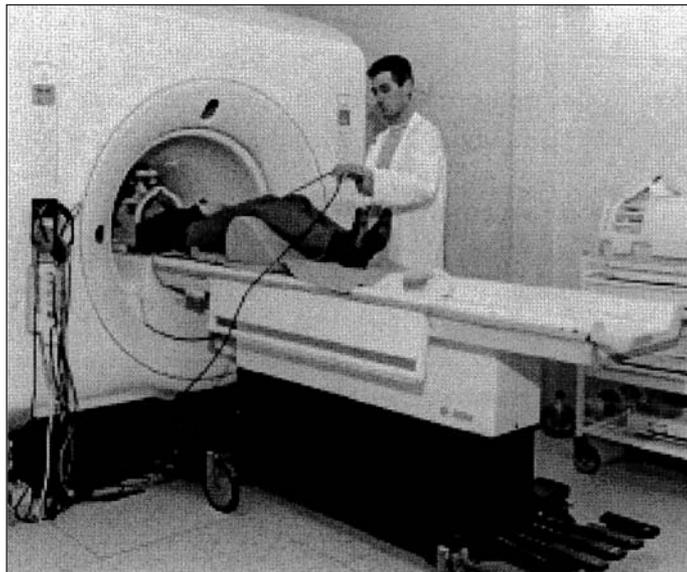


Figura 6.19. Aparato de resonancia magnética nuclear.

Así, cuando un paciente tendido es introducido en el túnel de un aparato de RMN actúa sobre él un campo magnético vertical intenso, que polariza parcialmente los dipolos magnéticos de su interior; este campo no es homogéneo, sino que es más intenso a la salida que a la entrada, por ejemplo, lo cual permite fijar la atención en una franja concreta del cuerpo. A este campo intenso fijo se superpone un campo longitudinal, horizontal, fluctuante, en el espectro de las radiofrecuencias, que es absorbido y posteriormente liberado por los protones. A estos campos se superpone un gradiente de campo magnético giratorio, para situar las diversas zonas de la franja del cuerpo considerada. A todo ello hay que añadirle un tratamiento matemático complicado —esencialmente un análisis de Fourier— de la señal.

Si el protón no se halla en el vacío, sino que forma parte de una molécula, experimentará un campo magnético total igual al campo exterior aplicado más el campo magnético interno producido por los átomos que lo rodean en la molécula. Como este campo interno es característico del entorno molecular, permite caracterizar las diferentes moléculas —más aún, incluso los diferentes protones de una misma molécula—. Además, el tiempo característico de relajación, es decir, el tiempo promedio que tarda un dipolo excitado en desexcitarse, es decir, en regresar a su estado fundamental paralelo al campo magnético, también depende del entorno, a través de las fricciones moleculares, y es otro elemento de posible interés en la identificación molecular. Así, la medida de la frecuencia de máxima absorción permitirá conocer el campo magnético total que actúa sobre los diversos protones de la molécula y, con ello, permitirá incluso identificar la molécula, ya que las frecuencias de absorción magnética en función de la frecuencia del campo exterior magnético oscilante están tabuladas para una gran diversidad de moléculas.

La RMN puede aplicarse también para localizar determinados tipos de entornos moleculares en macromoléculas, como por ejemplo proteínas, cuyo plegamiento tiene tanta importancia biológica. La información conseguida por este método complementa la obtenida por otras técnicas, como la radiación sincrotrón, que son más sensibles a la distribución electrónica que a los dipolos magnéticos.

6.12. Campo producido por una corriente

El campo magnético \vec{B} es asimismo producido por cargas en movimiento o corrientes eléctricas. En algunos casos, \vec{B} es un dato del problema. En otros, es precisamente \vec{B} lo que se debe calcular. La *ley de Ampère*, una de las leyes básicas del magnetismo, establece que la integral del campo magnético a lo largo de una línea cerrada es proporcional a la intensidad eléctrica total que atraviesa la superficie limitada por dicha línea. Ello puede expresarse como

$$\oint \vec{B} \times d\vec{l} = 2\pi K' I_{\text{tot}} \quad [33]$$

donde $K' = 2 \times 10^{-7} \text{ N s}^2 \text{ C}^{-2}$. De esta expresión abstracta se siguen muchos resultados, de entre los cuales consideraremos tan sólo el campo producido por una corriente que circula por un conductor rectilíneo infinito. En este caso, el campo magnético sólo depende, por simetría, de la distancia r al hilo, es perpendicular a la corriente y su sentido es determinado por el producto vectorial del vector tangente al conductor en el sentido de circulación de la corriente, multiplicado por el vector que va desde la zona del conductor considerada hasta la posición en que se calcula el campo. En el caso del hilo rectilíneo infinito (Fig. 6.20), B es, por simetría, constante sobre la circunferencia de radio r (la distancia a la cual queremos calcular B), por lo cual

$$B2\pi r = 2\pi K' I$$

ya que $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia considerada. Tenemos entonces

$$B = K'(I/r) \quad [34]$$

que es una forma útil de la *ley de Biot y Savart*.

En otras situaciones físicas, el cálculo de B es más difícil, pero no nos hace falta al nivel que estamos estudiando.

Según [34] y [32], la fuerza entre dos conductores rectilíneos paralelos infinitos, separados una distancia r , vale, por unidad de longitud,

$$F = K' \frac{I_1 I_2}{r} \quad [35]$$

Esta relación juega un papel análogo al de la ley de Coulomb en electrostática. Si I_1 e I_2 van en el mismo sentido, la fuerza es positiva (ambos hilos se atraen) y es negativa (repulsiva) si las corrientes circulan en sentidos opuestos. Precisamente la ecuación [35] se utiliza para definir el *amperio*, unidad de corriente en el sistema SI, como la intensidad que debe fluir por cada uno de dos hilos rectilíneos paralelos, separados un metro, para que la fuerza entre ellos valga $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ por cada metro de longitud.

Un ejemplo en que interviene tanto la expresión del campo magnético producido por una corriente como la fuerza del campo sobre la corriente es el siguiente.

Ejemplo 6.26.

Para almacenar energía que se pueda utilizar en momentos de gran demanda se ha propuesto construir enormes espiras de hilo superconductor. En uno de los diseños, las espiras, de 100 m de radio, transportan una corriente de $15 \times 10^4 \text{ A}$. El campo magnético medio debido a esa corriente es de 5 T. El imán está colocado en un túnel en el interior de una montaña a fin de tener un soporte estructural suficientemente fuerte, puesto que los filamentos están sometidos a enormes fuerzas magnéticas. a) Si el campo magnético promedio es perpendicular al plano de las espiras, ¿qué fuerza actúa sobre 1 m de hilo? b) Demostrar que la fuerza es radial y hacia afuera de las espiras. Estas espiras forman un solenoide en forma espiral. Si hay diez vueltas por cada metro

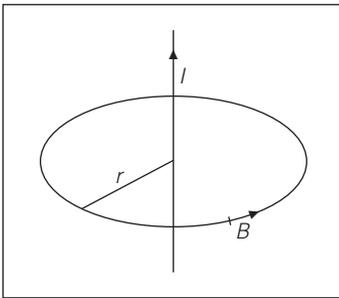


Figura 6.20. Campo magnético a una distancia r de un hilo rectilíneo.

de altura de la espiral, ¿cuál es la presión media aproximada que se ejerce contra la roca?

Los superconductores se caracterizan por poder conducir la electricidad sin resistencia aparente. La ventaja, por tanto, es que no disipan energía al conducir la corriente eléctrica. Esa propiedad la logran algunos metales y aleaciones a muy baja temperatura o algunos materiales cerámicos a temperatura no tan bajas.

a) La fuerza sobre un hilo conductor por el que circula una corriente i , en el seno de un campo magnético B , viene dada por la expresión

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$$

El campo magnético creado por una espira en el círculo que encierra es perpendicular a ella, su sentido viene indicado por la regla de la mano derecha: el pulgar indica el sentido de \vec{B} si los otros dedos de la mano derecha se mueven en el sentido de la corriente en la espira (Fig. 6.21). Por tanto, la fuerza que se ejerce sobre un elemento de 1 m de hilo superconductor va dirigida hacia afuera y en el plano de la espira. Su módulo vale

$$F = 15 \times 10^4 \text{ A} \times 1 \text{ m} \times 5 \text{ T} = 7,5 \times 10^5 \text{ N}$$

b) Para hallar la presión hacia afuera que ejercen las espiras hemos de calcular en primer lugar la superficie cilíndrica correspondiente

$$A = 2\pi \times 100 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 200 \pi \text{ m}^2$$

Por otro lado, la longitud total de hilo en diez espiras es

$$L = 10 \times 2\pi \times 100 \text{ m} = 2000 \pi \text{ m}$$

Como por cada metro de longitud se ejerce una fuerza de $7,5 \times 10^5 \text{ N}$, la fuerza total sobre las espiras será

$$F_t = 7,5 \times 10^5 \text{ N m}^{-1} \times 2000 \pi \text{ m} = 15 \times \pi \times 10^8 \text{ N}$$

y la presión la obtenemos dividiendo esta fuerza por el área de la superficie A

$$p = \frac{F_t}{A} = \frac{15 \times \pi \times 10^8 \text{ N}}{200 \pi \text{ m}^2} = 7,5 \times 10^6 \text{ N m}^{-2} \approx 75 \text{ atm}$$

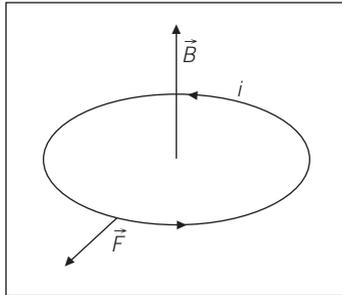


Figura 6.21. Campo magnético que actúa sobre una espira.

6.13. Inducción magnética. Ley de Faraday

Un hito decisivo en la unificación de fuerzas magnéticas y eléctricas fue la observación de que la variación del flujo magnético en el interior de un circuito da lugar a una corriente eléctrica, es decir, genera una fuerza electromotriz. El valor de dicha fuerza electromotriz viene dado, en valor absoluto, por la ley de Faraday

$$Fem \text{ inducida} = d\phi/dt$$

[36]

donde ϕ , el flujo magnético, queda definido por $\phi \equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$, es decir, como la integral del campo magnético sobre la superficie considerada. Como en el producto escalar interviene el coseno del ángulo formado por ambos vectores ($d\vec{s}$ es perpendicular a la superficie), se sigue que una de las maneras de modificar el flujo ϕ es haciendo girar el circuito en el seno de un campo magnético. Este es el fundamento de muchos generadores eléctricos, de enorme importancia industrial. Otras maneras de modificar el flujo son, evidentemente, variar \vec{B} o bien cambiar el área del circuito. Señalemos, finalmente, que el sentido de la fem es tal que la corriente que produce tiende a contrarrestar los cambios debidos a la variación de los fenómenos externos: es decir, si el flujo disminuye, la corriente inducida tiene un sentido tal que su campo magnético se opone a esta disminución. Esta regla se denomina *ley de Lenz*.

Ejemplo 6.27.

La longitud AD del conductor de la Figura 6.22 es de 20 cm, su velocidad 1 m s^{-1} y la resistencia eléctrica de la espira ACD 2Ω . El campo magnético es perpendicular al plano de papel y vale $0,5 \text{ T}$. ¿Qué fuerza hay que aplicar al conductor AB para que se mueva con esa velocidad?

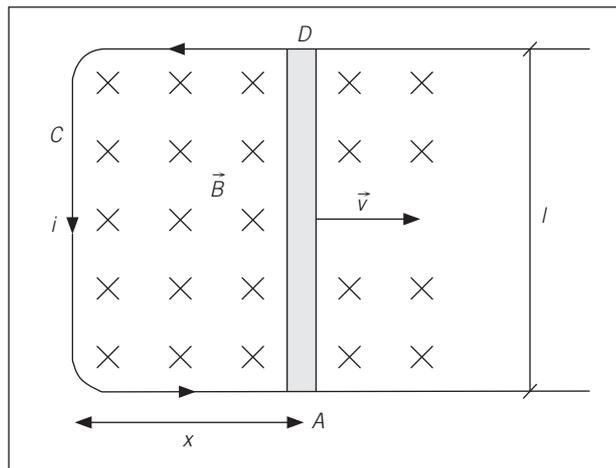


Figura 6.22. Fuerza contraelectromotriz inducida.

Al moverse el conductor AD , la espira ACD aumenta su área y por tanto también el flujo magnético que la atraviesa. Según la ley de Faraday, la fuerza contraelectromotriz inducida ε cumple

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

donde ϕ es el flujo magnético del campo B . Esa fuerza electromotriz se opone a los cambios de flujo magnético (por eso se denomina contraelectromotriz). El flujo magnético vale

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bs = Blx$$

puesto que B es constante y paralelo a ds . Por tanto,

$$\frac{d\phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv = -\varepsilon$$

y la fuerza electromotriz vale

$$|\varepsilon| = 0,5 \text{ T} \times 0,2 \text{ m} \times 1 \text{ m s}^{-1} = 0,1 \text{ V}$$

Como la resistencia del circuito vale 2Ω , la corriente inducida vale (ley de Ohm)

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0,1 \text{ V}}{2 \Omega} = 0,05 \text{ A}$$

El campo magnético ejerce sobre el conductor una fuerza que tiende a frenarlo en su movimiento, cuyo valor es

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$$

Como en el presente caso l y B son perpendiculares,

$$F = ilB = 0,05 \text{ A} \times 0,2 \text{ m} \times 0,5 \text{ T} = 5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Para mantener el conductor en movimiento deberíamos ejercer una fuerza de igual valor en el sentido de la velocidad del conductor.

La expresión $\varepsilon = Blv$ tiene cierto interés biológico, ya que algunos animales, al desplazarse a través de las líneas del campo magnético terrestre, pueden detectar voltajes del orden de Blv que se producen entre dos puntos de una neurona separados una distancia l , siendo B la componente vertical del campo magnético y v la velocidad del animal. Ello permite utilizar el campo magnético como elemento de orientación.

6.14. Corriente alterna

Finalmente, consideremos circuitos eléctricos en el caso que la corriente no sea continua, sino alterna, es decir, cuando la intensidad viene dada por

$$i = i_0 \text{ sen } \omega t$$

siendo i_0 la intensidad máxima y $\omega = 2\pi f$ con f , la frecuencia de la corriente (50 Hz en Europa y 60 Hz en Norteamérica). Nos preguntamos qué efectos produce el paso de corriente en una resistencia eléctrica, en un condensador

y en una autoinducción. En el caso de la resistencia eléctrica, la caída de potencial entre sus extremos debido al paso de la corriente es

$$v_R = iR = i_0 R \operatorname{sen} \omega t \quad [37]$$

En el caso de un condensador, recordemos que $V_c = Q/C$ y Q es la integral de la intensidad con respecto al tiempo. Así pues,

$$v_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{i_0}{\omega C} \cos \omega t \quad [38]$$

En una autoinducción (solenoides o espira sin resistencia eléctrica), la dificultad al paso de la corriente se debe a la fuerza electromotriz adversa inducida por la variación del campo magnético asociado a la variación de la intensidad. Así pues, la caída de potencial ha de ser proporcional, según la ley de Faraday, a la derivada de i con respecto a t , siendo la constante de proporcionalidad L , el coeficiente de autoinducción, un parámetro característico del tipo de dispositivo (número de espiras, longitud, etc.). En este caso, pues,

$$v_L = L \frac{di}{dt} = i_0 L \omega \cos \omega t \quad [39]$$

Se denominan *reactancias* las cantidades por las cuales se debe multiplicar la amplitud de la intensidad para tener la amplitud de la diferencia de potencial. Así pues, tendremos:

$$X_R \text{ (reactancia resistiva)} = R; X_C \text{ (reactancia capacitativa)} = 1/\omega C; \\ X_L \text{ (reactancia inductiva)} = \omega L$$

En el caso de un circuito *RLC*, es decir, una resistencia eléctrica, una autoinducción y un condensador en serie, tal como se representa en la Figura 6.23, la diferencia de potencial total se puede expresar como

$$v_T = i_0 R \operatorname{sen} \omega t + i_0 \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right) \cos \omega t$$

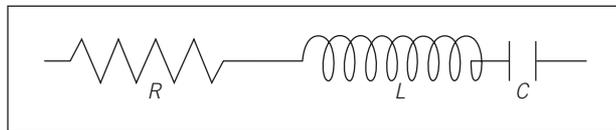


Figura 6.23. Circuito RLC.

Dado que v_T depende del tiempo, es interesante evaluar su valor medio. Para ello se eleva al cuadrado esta cantidad y se promedia en el tiempo, según la definición de promedio de una función $f(t)$ en un intervalo T ,

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

obteniendo

$$\overline{v^2} = \frac{i_0^2}{2} \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right] \quad [40]$$

donde se ha tenido en cuenta que el promedio en el tiempo de las funciones sen^2 y cos^2 vale

$$\overline{\text{sen}^2 \omega t} = \overline{\text{cos}^2 \omega t} = \frac{1}{2}$$

y que $\overline{\text{sen} \omega t \text{ cos} \omega t} = 0$. Si definimos intensidad eficaz i_{ef} y voltaje eficaz v_{ef} como

$$i_{\text{ef}}^2 \equiv \overline{i(t)^2} \quad ; \quad v_{\text{ef}}^2 \equiv \overline{v(t)^2}$$

es decir, la raíz cuadrada del promedio del cuadrado de $i(t)$ y de $v(t)$ sobre un ciclo, tenemos, según [40],

$$v_{\text{ef}}^2 = i_{\text{ef}}^2 Z^2 \quad [41]$$

Aquí Z es la *impedancia* que se calcula, según [40], por

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad [42]$$

Así, la diferencia de potencial eficaz se relaciona con la intensidad eficaz de forma análoga a la ley de Ohm $v_{\text{ef}} = Zi_{\text{ef}}$, donde Z juega ahora el papel de resistencia. Observemos que Z se reduce a las reactancias correspondientes en el caso de tener tan sólo una resistencia, un condensador o una autoinducción. Finalmente, es digno de mención que como Z depende de ω , para un voltaje v_{ef} dado, pero de frecuencia variable, se conseguirá un máximo de intensidad eficaz cuando $Z(\omega)$ sea mínimo, situación que se conoce como resonancia.

Ejemplo 6.28.

En los circuitos RLC la ecuación resultante se asemeja a la de un oscilador amortiguado y forzado. Aquí el fenómeno de la resonancia se manifiesta en que, cuando la frecuencia de la onda externa coincide con la frecuencia natural del circuito, la intensidad que circula es máxima. En el caso concreto de los receptores de radio, ésta es la base de la sintonización. Supongamos un receptor de radio que posee una resistencia de 5Ω , una autoinducción de $0,01 \text{ H}$ y un condensador de 10^{-4} F (Fig. 6.24), conectados en serie a una corriente alterna de frecuencia variable. a) ¿Para qué valor de la frecuencia angular la corriente que circula por el circuito es máxima? b) ¿Cuánto vale la frecuencia correspondiente? c) ¿Cuánto vale la impedancia total del circuito, para ese valor de ω ? d) ¿Qué potencia se disipa si la fem efectiva es de 10 V ?

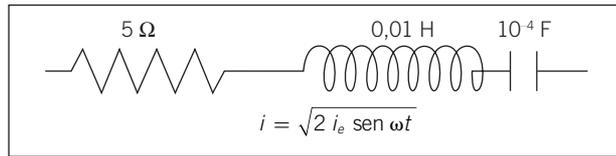


Figura 6.24. Circuito resonante.

En un circuito de corriente alterna, la intensidad y la diferencia de potencial efectivas obedecen la relación

$$i_e = \frac{1}{Z} v_e$$

que tiene una forma semejante a la ley de Ohm, pero con una constante de proporcionalidad que ahora es la impedancia Z , definida como

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad [43]$$

para cada frecuencia angular ω de variación de fem.

Cuanto menor sea Z mayor será la intensidad efectiva i_e que circula por el circuito. El valor mínimo de Z se alcanza cuando

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad [44]$$

y, por tanto, para una frecuencia angular

$$\omega_0 = (LC)^{-1/2}$$

a) Con los datos del enunciado hallamos que

$$\omega_0 = (10^{-2} \text{ H} \times 10^{-4} \text{ F})^{-1/2} = 10^3 \text{ rad s}^{-1}$$

b) La frecuencia correspondiente será

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10^3}{2\pi} = 159,15 \text{ Hz}$$

c) De las relaciones [43] y [44] se deduce que

$$Z_{\min} = \sqrt{R^2} = R = 5 \Omega$$

d) La potencia disipada en un circuito de corriente alterna se puede escribir en la forma

$$P = i_e \times v_e \frac{R}{Z} = \frac{v_e^2}{Z^2} R$$

que para nuestro caso vale

$$P = \frac{100 \text{ V}^2}{5 \Omega} = 20 \text{ W}$$

6.15. Aerogeneradores

Todas las fuentes de energía provienen en último término del Sol. Éste irradia hacia la Tierra del orden de $1,74 \times 10^{17}$ W, un 30 por 100 de los cuales se reflejan al espacio exterior directamente por las nubes, el agua de los océanos y las partículas presentes en la atmósfera. Alrededor de un 2 por 100 de esta energía se convierte en energía eólica. Un aerogenerador obtiene su energía cuando convierte la fuerza del viento en momento de rotación de las palas del rotor. La cantidad de energía que el movimiento del aire transfiere al rotor depende de la densidad del aire, del área de barrido del rotor y de la velocidad del viento.

Efectivamente, la energía cinética de un fluido por unidad de volumen es proporcional a su densidad: cuanto más denso sea el aire más energía recibirá la turbina. La densidad del aire es máxima cerca de la superficie y disminuye con la humedad. Un aerogenerador típico que tenga una potencia de 1000 kw tiene un rotor que cubre un área de 2300 m². El área del rotor determina cuánta energía del viento es capaz de capturar una turbina eólica.

Obviamente, el rotor de un aerogenerador frena el movimiento del aire cuando captura su energía cinética y la convierte en energía de rotación. Esto implica que la velocidad del aire es más lenta a sotavento que a barlovento, por lo que el aire que abandona el aerogenerador ocupa una mayor sección transversal detrás del plano del rotor.

La potencia que puede transferir el viento sobre el aerogenerador, a tenor de lo que hemos visto en el Capítulo 3, es proporcional a la potencia que lleva el viento

$$P = Fv = \alpha(1/2)CA_x v^3$$

donde α es el factor de proporcionalidad.

A una gran altura (más allá de un kilómetro) la superficie terrestre apenas ejerce influencia alguna sobre el viento. Sin embargo, en las capas más próximas a la superficie, la velocidad del viento se ve afectada por el rozamiento con la superficie terrestre. La influencia de las características de la superficie sobre la velocidad del viento, relacionada con la orografía, se caracteriza mediante un parámetro que se denomina rugosidad del terreno. De ahí la importancia de la elección del emplazamiento de un parque eólico, para la cual se hacen estudios sobre la velocidad del viento pero también de su constancia y regularidad. En general, cuanto más pronunciada sea la rugosidad de un terreno mayor será la ralentización que experimente el viento. Obviamente, los bosques y las grandes ciudades lo ralentizan mucho, mientras que las pistas de hormigón de los aeropuertos sólo lo ralentizan ligeramente. Las superficies de agua son incluso más lisas que las pistas de hormigón, si no hay mucho oleaje, y tendrán por tanto menos influencia sobre el viento, mientras que la hierba alta y los arbustos ralentizan el viento de forma considerable.

El hecho de que el perfil de la velocidad del viento se caracterice por velocidades más bajas cerca del suelo suele llamarse cizallamiento. El cizallamiento del viento también puede ser importante en el diseño de aerogeneradores. Considerando un aerogenerador de 45 metros de altura y con un diámetro del rotor de 40 metros a causa de la rugosidad del terreno, el

viento sopla a 9,3 m/s cuando el extremo de la pala se encuentra en su posición más elevada, y sólo a 7,7 m/s cuando dicho extremo se encuentra en la posición inferior. Esto significa que las fuerzas que actúan sobre la pala del rotor cuando está en su posición más alta son mucho mayores que cuando está en la más baja y los ingenieros que diseñan la sujeción al suelo han de tener en cuenta este hecho, de tal forma que los cimientos soporten el momento generado.

Una forma habitual de situar los parques eólicos es en colinas o estribaciones del terreno con una cierta altura ya que en estos entornos la velocidad del viento suele ser superior a las de las áreas circundantes. El aire, a barlovento, es comprimido por la parte de la colina que da al viento que, al alcanzar la cima y pasar el aerogenerador se expande y origina turbulencias que hay que tener en cuenta porque pueden llegar a anular la ventaja que supone disponer en la cima de mayores velocidades del viento.

De hecho las estelas turbulentas que se originan tras un aerogenerador hacen que estos deban estar separados una distancia mínima equivalente a tres diámetros del rotor en la dirección perpendicular al viento dominante y unos diez diámetros del rotor en la dirección del viento dominante.

Los aerogeneradores convierten la energía mecánica en energía eléctrica gracias a la inducción magnética. Son dispositivos un poco singulares si nos fijamos en las máquinas de la red eléctrica que generan electricidad ya que han de trabajar con una fuente de potencia mecánica muy variable. En los grandes aerogeneradores (1500 kW) la turbina genera un voltaje de 650 V de corriente alterna que se transforma, para su transporte, hasta un voltaje de 10000 a 30000 V, dependiendo de la red eléctrica local. Los generadores necesitan refrigeración durante su funcionamiento ya que se calientan debido a las corrientes de Foucault, que se generan debido a la inducción magnética y que calientan el dispositivo. Por ello disponen de dispositivos de seguridad que los frenan (los rotores cambian su orientación con respecto del viento) cuando alcanzan una velocidad a la cual generan un calor que los sistemas de refrigeración no son capaces de disipar.

Problemas propuestos

1. Comparar la fuerza de repulsión entre dos protones separados 50 mm: *a)* en el vacío; *b)* en el agua ($\epsilon' = 80$); *c)* en una membrana lipídica ($\epsilon' = 2,5$).

Resultados: *a)* $9,2 \times 10^{-14}$ N; *b)* $0,1 \times 10^{-14}$ N; *c)* $4,1 \times 10^{-14}$ N.

2. Un virus del mosaico del tabaco tiene una longitud de 3000 Å y cargas $+e$ y $-e$ en sus extremos. Calcúlese su momento dipolar eléctrico.

Resultado: $4,8 \times 10^{-26}$ C m.

3. Un axón se puede simular como un conductor cilíndrico de 10^{-5} m de diámetro y 2Ω m de resistividad. ¿Cuál es la resistencia de un axón de estas características y de 0,3 m de longitud? ¿Qué longitud debería

tener un cable de cobre del mismo diámetro para tener la misma resistencia? (resistividad del cobre, $1,72 \times 10^{-8} \Omega$ m).

Resultados: *a)* $(24/\pi) \times 10^{-9} \Omega$; *b)* $3,48 \times 10^7$ m.

4. Unas zapatillas de goma tienen un área conjunta de 250 cm² y un grosor de 1 cm. La resistividad eléctrica de la goma es aproximadamente $10^5 \Omega$ m. *a)* Hallar su resistencia eléctrica. *b)* Comparar la intensidad de la corriente eléctrica que pasa por el cuerpo de una persona ($R = 2000 \Omega$) si toca un cable a 250 V descalza o calzada con dichas zapatillas. (Nota: Una intensidad superior a 10 mA resulta peligrosa.)

Resultados: *a)* $R = 4 \times 10^4 \Omega$; *b)* descalza $I = 125$ mA; calzada $I = 5,9$ mA.

5. Cuando los terminales de una pila seca están conectados a un hilo metálico, la intensidad de la corriente es 2,2 A y el voltaje entre los terminales es 1,4 V. Cuando el circuito está abierto, el voltaje entre los terminales es 1,52 V. Calcular la resistencia interna y la fem de la pila. (Despréciense los errores debidos a los instrumentos de medida.)

Resultados: $fem = 1,52 \text{ V}$; $r_{int} = 5,4 \times 10^{-2} \Omega$.

6. Calcular las intensidades que circulan por las diversas resistencias del circuito de la Figura 6.25.

Resultados: a) $I(r = 1 \Omega) = 0,64 \text{ A}$; b) $I(r = 2 \Omega) = 0,18 \text{ A}$; c) $I(r = 3 \Omega) = 0,46 \text{ A}$.

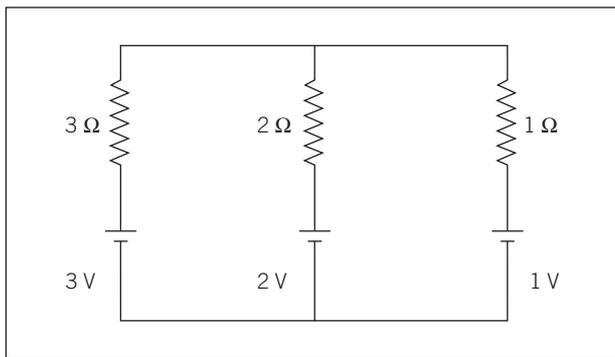


Figura 6.25.

7. En el circuito de la Figura 6.26, calcular cuál es la fracción de potencia liberada por la pila de 2 V que es almacenada en la pila de 0,5 V. (Recuérdese que la potencia eléctrica es el producto de la intensidad por la diferencia de potencial y obsérvese que una de las pilas está orientada de modo que ayuda al paso de corriente, es decir, suministra energía a los electrones, en tanto que la otra se opone al paso de los mismos, es decir, les resta energía.)

Resultados: $Pot(2 \text{ V}) = (10/11) \text{ W}$; $Pot(0,5 \text{ V}) = -(3/44) \text{ W}$, rendimiento = 7,5 por 100.

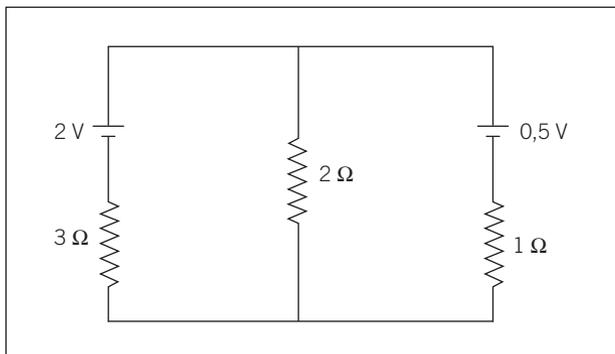


Figura 6.26.

8. En un cierto axón de 10^{-4} m de diámetro y 10 mm de longitud, el potencial interior es 90 mV inferior al exterior. Las bombas de sodio transportan 3×10^{-11} moles de sodio hacia el exterior de la membrana, por segundo y por cm^2 . Hallar: a) ¿Qué carga se expulsa del axón cada hora? b) ¿Qué consumo energético requiere esta operación?

Resultados: a) $1,04 \times 10^{-2} \text{ C hora}^{-1}$; b) $9,37 \times 10^{-4} \text{ J hora}^{-1}$.

9. La resistencia normal de una persona de mano a mano a través del cuerpo es de 2000Ω . Si una persona toca accidentalmente con las manos dos conductores entre los que hay una diferencia de potencial de 100 V, ¿qué intensidad de corriente circulará por la misma? Si uno de los conductores está conectado a tierra y desde el otro hay una trayectoria a tierra de 10Ω de resistencia, ¿qué intensidad circulará ahora por la persona, suponiendo que la máxima intensidad que se puede obtener del generador es 1 A?

Resultados: a) 50 mA; b) 4,9 mA.

10. Supongamos que la máxima intensidad de corriente que puede pasar por una mano sin que impida funcionar los músculos es de 14 mA. ¿Cuál debe ser la resistencia desde la mano hasta el suelo para que al tocar accidentalmente un hilo conductor a 120 V se pueda soltar?

Resultado: $R = 8571,4 \Omega$.

11. La Figura 6.27 muestra un puente de Wheatstone, instrumento utilizado a menudo en los laboratorios para medir resistencias. R_1 y R_2 valen 10Ω y se ajusta R_3 hasta que la intensidad de corriente por el galvanómetro, I_g , es nula. Si R_3 vale $98,2 \Omega$ en estas circunstancias, ¿cuánto vale la resistencia incógnita R_x ?

Resultado: 98,2 Ω .

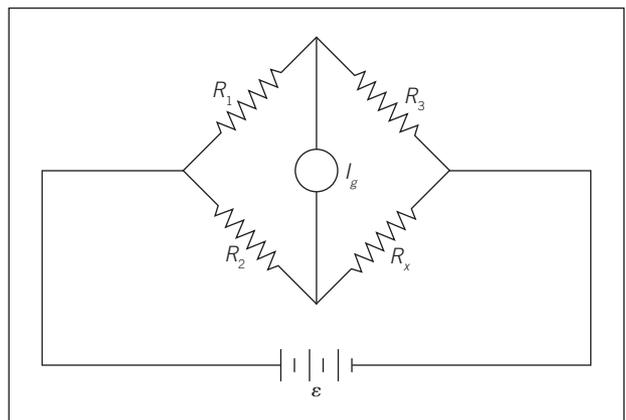


Figura 6.27.

12. Una partícula esférica de radio efectivo r y carga q se mueve en un líquido de viscosidad μ y bajo la acción de un campo eléctrico E . a) Hallar una expresión para la velocidad terminal en función de E . b) Si la intensidad de la corriente viene dada por $I = nqv$, con n la concentración de partículas cargadas por unidad de volumen y v la velocidad terminal, hallar I en función de E . c) A partir de la expresión anterior, hallar la resistividad de este electrólito en función de n , q , r y μ .

Resultados: a) $v = (q/6\pi\mu r)E$; b) $I = (nq^2/6\pi\mu r)E$; c) $\rho = 6\pi\mu r q^{-2} n^{-1}$.

13. Se define la movilidad eléctrica de un ion en un fluido como el cociente entre la velocidad terminal y el campo eléctrico aplicado. Las movilidades eléctricas en agua (viscosidad = 1 cp) de algunos cationes a 25 °C valen

ión	movilidad	($\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$)
H^+	$36,3 \times 10^4$	
Na^+	$5,2 \times 10^4$	
K^+	$7,6 \times 10^4$	

A partir de estos datos, evaluar el radio efectivo o radio de Stokes de dichos iones. (Nota: Téngase en cuenta los resultados del problema anterior.)

Resultados: $r(\text{H}^+) = 0,23 \text{ \AA}$; $r(\text{Na}^+) = 1,65 \text{ \AA}$; $r(\text{K}^+) = 1,11 \text{ \AA}$.

14. La velocidad de propagación de una señal nerviosa a lo largo de un axón es inversamente proporcional a la capacidad por unidad de superficie de la membrana. Hallar el cociente de la velocidad en dos axones, uno de los cuales tiene una membrana de 10 nm de grosor y el otro de 40 nm. Considérese la membrana como un condensador localmente plano.

Resultado: $v(40 \text{ nm})/v(10 \text{ nm}) = 4$.

15. A partir de la analogía eléctrica de un músculo, expuesta en los Ejemplos 6.12 y 6.13, demuéstrese que la potencia consumida por un músculo es proporcional a la fuerza que éste efectúa.

Resultado: $P = (A\varepsilon/RC^2)F$.

16. Como analogía eléctrica sencilla del músculo consideramos el circuito de la Figura 6.28, formado por una batería de fem ε , un condensador entre cuyas placas se ejerce la fuerza correspondiente a la fuerza muscular, y una resistencia de descarga R . La señal nerviosa que provoca la contracción (las placas del condensador son más o menos móviles) cierra el interruptor S y carga el condensador, el cual se descarga lentamente a través de R . Hallar: a) La fuerza electromotriz necesaria para

que la fuerza entre las placas del condensador, de capacidad $C = 1 \mu\text{F}$ y área de cada placa $A = 10^{-4} \text{ m}^2$, valga 10 N. b) ¿Cuántas señales nerviosas se necesitarían por minuto para que la fuerza no decaiga como máximo más que un 15 por 100 de su valor máximo? (Nota: $R = 10^3 \Omega$.)

Resultados: a) $\varepsilon = 135 \text{ mV}$; b) tiempo entre señales, $8,13 \times 10^{-5} \text{ s}$.

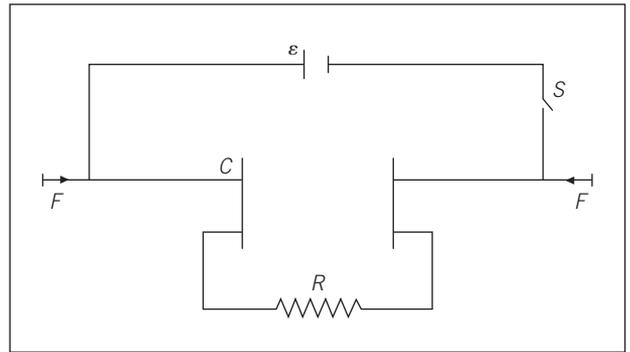


Figura 6.28.

17. En la analogía del problema anterior, considérese que $\varepsilon = 100 \text{ mV}$, que $C = 1 \mu\text{F}$ y que el valor de R está controlado por una hormona. Como reacción a una situación de baja temperatura, la hormona hace disminuir el valor de R , lo cual provoca el temblor muscular. Si en la situación de frío $R = 10^2 \Omega$, hallar la potencia calorífica liberada por el temblor muscular. (Nota: Supóngase que toda la energía almacenada en el condensador se transforma en calor a través de R .)

Resultado: $P = 0,5 \times 10^{-4} \text{ W}$.

18. Un ciclotrón acelera protones de masa $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ a una velocidad de $3 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$. El campo magnético vale 1,5 T. Hallar el radio máximo orbital y la frecuencia orbital.

Resultados: $r = 21 \text{ cm}$; $f = 2,3 \times 10^6 \text{ Hz}$.

19. La Figura 6.29 muestra una espira de 2 cm de radio concéntrica con una de 7 cm. Supóngase que la intensidad de la corriente en la espira mayor es de 5 A. Calcú-

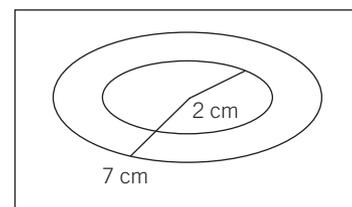


Figura 6.29.

lense las intensidades que deben circular por la menor para que el campo magnético en el centro de ambas valga: a) 9×10^{-5} T; b) 2×10^{-6} T; c) 0 T. Determínese en cada caso si el sentido de la corriente en la espira menor es el mismo o el opuesto que en la mayor.

Resultados: a) 1,43 A; b) -1,36 A; e) -1,43 A.

20. Un líquido conductor que circula por un tubo de 3 cm de radio se halla sometido a un campo magnético de 5×10^{-3} T perpendicular a la dirección de su movimiento. La fem máxima inducida a través del diámetro del tubo vale 1,5 mV. ¿Cuál es la velocidad del fluido?

Resultado: $v = 1 \text{ m s}^{-1}$.

21. En un experimento sobre los efectos del campo magnético terrestre en la orientación de las aves se colocan a ambos lados de la cabeza de una paloma 10 espiras de 1 cm de radio. Se quiere conseguir con ellas un campo magnético comparable al terrestre, de unas 10^{-4} T. La resistencia del conjunto de todas las espiras es de 100 Ω . ¿Cuántas pilas de 1,5 V, en serie, serán necesarias para este experimento?

Resultado: 5 pilas.

22. El campo magnético a 1,2 mm de distancia de un axón durante el paso de una señal nerviosa alcanza $1,1 \times 10^{-10}$ T. Calcular el valor máximo aproximado de las corrientes correspondientes.

Resultado: 0,66 μA .

23. Para contener un plasma —gas ionizado— a altas temperaturas se utilizan campos magnéticos, ya que cualquier pared material se volatilizaría. Calcular la intensidad del campo magnético necesario para formar una pared de 5 cm de grosor capaz de contener razonablemente un plasma de protones de 5000 K de temperatura. (Nota: Recuérdese que la velocidad cuadrática media es $v = \sqrt{3 \text{ kT/m}}$.)

Resultado: $0,23 \times 10^{-2}$ T.

24. ¿Cuál debe ser el valor del campo magnético en el selector de velocidad de un espectrógrafo de masas si su campo eléctrico vale $1,5 \times 10^5 \text{ N C}^{-1}$ y la velocidad de salida de los iones debe valer $3 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$. ¿Cuál es el radio de la órbita de un ion He^+ de carga e y masa $6,68 \times 10^{-27} \text{ kg}$ si el campo magnético interno del espectrógrafo vale 1,2 T?

Resultados: a) 0,5 T; b) 10,4 mm.

25. Una espira cuadrada de 2 m de lado está situada en un campo magnético $B = 1 \text{ T}$. Hallar el valor máxi-

mo del par de fuerzas que actúa sobre la espira cuando circula por ella una corriente de 1 A.

Resultado: 4 Nm.

26. Calcular la impedancia de un circuito formado por una resistencia R y un condensador C en paralelo. Dicho modelo es útil para el cálculo de la impedancia de membranas celulares.

Resultado: $1/Z(\omega) = (R^{-2} + \omega^2 C^2)^{1/2}$.

27. Un condensador está en serie con una resistencia no inductiva y una red de corriente alterna a 130 V y 350 rad s^{-1} . A través del condensador y de la resistencia se producen diferencias de potencial de 120 y 50 V, respectivamente, cuando la intensidad eficaz vale 1,5 A. ¿Cuánto valen R y C ?

Resultados: $R = 33,3 \Omega$; $C = 3,57 \times 10^{-5} \text{ F}$.

28. Un circuito de sintonización de un aparato de radio consiste en una bobina de inductancia $L = 10^{-5} \text{ H}$ y un condensador variable. ¿Cuál debe ser la capacidad de éste para sintonizar con una frecuencia de $1,4 \times 10^6 \text{ Hz}$?

Resultado: $C = 1,29 \times 10^{-9} \text{ F}$.

29. Un circuito de control de sonido debe tener doble impedancia a 200 Hz que a 500 Hz. Si está compuesto por una resistencia de 200 Ω en serie con un condensador, ¿cuál debe ser la capacidad C de éste?

Resultado: $C = 1,38 \times 10^{-6} \text{ F}$.

30. En la situación de la tabla, indíquese en qué sentido irán los flujos totales de sodio y de potasio. ¿Cuánto valen los potenciales de equilibrio?

$V = 0 \text{ mV}$	$V = -50 \text{ mV}$
$[\text{Na}^+] = 130 \text{ mol m}^{-3}$	$[\text{Na}^+] = 10 \text{ mol m}^{-3}$
$[\text{K}^+] = 15 \text{ mol m}^{-3}$	$[\text{K}^+] = 135 \text{ mol m}^{-3}$

Resultados: a) $V = 68,7 \text{ mV}$; b) $V = -58,9 \text{ mV}$.

31. En la ATPasa mitocondrial que interviene en la fosforilación oxidativa se produce una molécula de ATP por cada dos protones que atraviesan la ATPasa. Hallar el rendimiento energético de dicha bomba sabiendo que el paso de ADP a ATP requiere una energía de unas 7 kcal mol^{-1} , y que la diferencia de potencial a ambos lados de la membrana vale unos 160 mV.

Resultado: 95 por 100.

32. Una bomba de sodio consume una molécula de ATP para impulsar dos iones de sodio a contracorriente por una diferencia de potencial de 120 mV. Hallar el rendimiento

energético de dicha bomba sabiendo que la energía liberada por la hidrólisis de un mol de ATP vale 7 kcal.

Resultado: 79 por 100.

33. La energía necesaria para el paso de un ion de carga q y radio r desde un medio de constante dieléctrica relativa ϵ_1 a uno de constante ϵ_2 viene dada por

$$E = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right]$$

donde $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ es la constante dieléctrica del vacío. Hallar qué energía se debería comunicar a un ion Na^+ ($r = 0,095 \text{ nm}$) o a un ion K^+ ($r = 0,13 \text{ nm}$) para pasarlos de agua ($\epsilon_1' = 80$) a una membrana lipídica ($\epsilon_2' = 2,5$). El resultado explica por qué una membrana lipídica constituye una barrera efectiva para impedir el paso de iones.

Resultados: $E(\text{Na}) = 3,0 \text{ eV}$; $E(\text{K}) = 2,2 \text{ eV}$.

34. A partir de la fórmula y los datos del problema anterior, calcúlese la energía necesaria para pasar dichos iones desde agua ($\epsilon_1' = 80$) hasta una proteína ($\epsilon_2' = 10$). El resultado evidencia uno de los factores por los cuales las proteínas pueden constituir canales privilegiados para el paso de iones a través de membranas.

Resultados: $E(\text{Na}) = 0,68 \text{ eV}$; $E(\text{K}) = 0,49 \text{ eV}$.

35. La energía potencial electrostática de un dipolo \vec{p} en un campo eléctrico \vec{E} viene dada por $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ (\vec{p} es el vector momento dipolar, cuyo módulo es igual al producto de la carga por la separación entre cargas, dirigido desde la carga negativa hasta la positiva). Una determinada proteína puede hallarse en dos estados en el seno de una membrana: cuando su momento dipolar es paralelo a la membrana, actúa como canal; cuando su momento dipolar es perpendicular a la membrana, no actúa como canal (Fig. 6.30). Si el momento dipolar de la proteína vale $2 \times 10^{-26} \text{ C m}$, hallar qué energía se requerirá para abrir el canal: a) cuando $E = 100 \text{ kV cm}^{-1}$; b) cuando $E = 20 \text{ kV cm}^{-1}$.

Resultados: a) $2 \times 10^{-19} \text{ J}$; b) $4 \times 10^{-20} \text{ J}$.

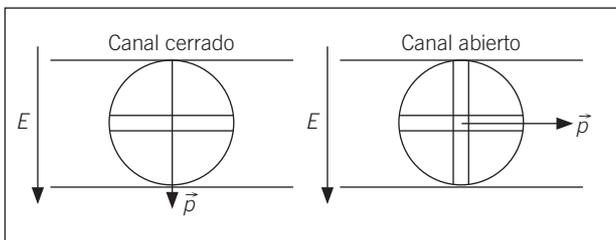


Figura 6.30.

36. Una membrana celular actúa a la vez como una resistencia eléctrica (a través de los poros) R y como un condensador C , en paralelo ambos. Calcular la impedancia por unidad de área de la membrana si $\omega = 2\pi 50 \text{ rad s}^{-1}$.

	R_m	C_m
Nervio calamar (reposo)	$10^3 \Omega \text{ cm}^2$	$1,1 \mu\text{F cm}^{-2}$
(excitado)	$25 \Omega \text{ cm}^2$	$1,1 \mu\text{F cm}^{-2}$

Resultados: a) $Z = 9,5 \times 10^2 \Omega \text{ cm}^2$; b) $Z = 25 \Omega \text{ cm}^2$.

37. Calcular la impedancia de una membrana de *Nite-lla Flexilis* (por unidad de área) correspondiente a corriente continua ($\omega = 0$) y a corriente alterna doméstica de $\omega = 2\pi 50 \text{ rad s}^{-1}$ ($R_m = 2,5 \times 10^5 \Omega \text{ cm}^2$, $C_m = 1 \mu\text{F cm}^{-2}$).

Resultados: a) $Z = 2,5 \times 10^5 \Omega$; b) $Z = 3,18 \Omega$.

38. Un circuito que representa un modelo de membrana es el que se muestra en la Figura 6.31. Si se produce un impulso que sigue una ecuación

$$V(t) = V(0)(1 - e^{-t/\tau})$$

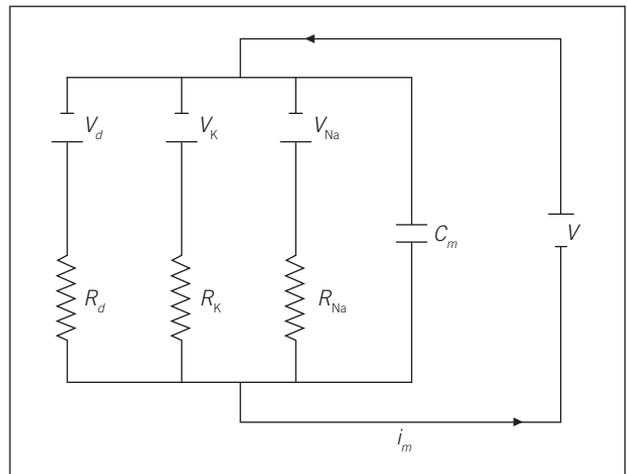


Figura 6.31.

donde $V(0) = 25 \text{ mV}$ y $\tau = 5 \text{ ms}$, calcular la intensidad de corriente i_m en función del tiempo, sabiendo que V_K , V_{Na} y V_d son, respectivamente, los potenciales en reposo del potasio, del sodio y otros iones, respectivamente, y que $R_d = 3330 \Omega \text{ cm}^2$, $R_K = 30 \Omega \text{ cm}^2$ y $R_{Na} = 10 \Omega \text{ cm}^2$, siendo $C_m = 5 \times 10^{-7} \text{ F cm}^{-2}$. Se considera que las concentraciones de K, Na y otros iones son

$$\begin{aligned} \text{Interior } [\text{Na}^+] &= 15 \quad [\text{K}^+] = 150 \\ \text{Exterior } [\text{Na}^+] &= 145 \quad [\text{K}^+] = 5 \\ [\text{otros}] &= 165 \text{ (mol m}^{-3}\text{)} \\ [\text{otros}] &= 155 \text{ (mol m}^{-3}\text{)} \end{aligned}$$

Supóngase que la temperatura vale 310 K.

Resultado: $(1,38 - 3,3 e^{-45 \times 10^{-3}}) \text{ mA cm}^{-2}$.

39. Un fragmento de membrana celular adquiere una diferencia de potencial de 90 mV cuando su carga de polarización es de $2,7 \times 10^{-10} \text{ C m}^{-2}$ por unidad de área. Si la membrana se despolariza en 10^{-3} s : a) ¿Cuánto vale su resistencia al paso de los iones? b) Si la resistividad del fluido en los poros es de $0,15 \Omega \text{ m}$, los poros tienen un radio de 3 \AA y una longitud de 80 \AA , ¿cuántos poros debe haber por metro cuadrado de membrana para explicar esta resistencia?

Resultados: a) $3,3 \times 10^5 \Omega \text{ m}^2$; b) $1,29 \times 10^4$ poros m^{-2} .

40. El flagelo helicoidal de algunas bacterias es impulsado por la diferencia de potencial entre el exterior y el interior de la membrana. La potencia necesaria para contrarrestar las fuerzas viscosas y mantener el flagelo girando con velocidad angular ω sobre su eje es $P = \alpha \omega^2$, con α un parámetro que depende de la viscosidad del líquido y de la longitud y el radio del flagelo. Supóngase que por cada vuelta del flagelo entran seis protones al interior de la célula, a través del motor flagelar. Hallar una expresión para ω en función de la diferencia de potencial ΔV entre el exterior y el interior de la célula. Si $\alpha = 4 \times 10^{-24} \text{ W s}^2$, ¿cuánto valdrá ω para $\Delta V = 10 \text{ mV}$, $\Delta V = 50 \text{ mV}$ y $\Delta V = 100 \text{ mV}$?

Resultados: $381,97 \text{ rad s}^{-1}$; $1909,86 \text{ rad s}^{-1}$; $3819,72 \text{ rad s}^{-1}$.

41. Según el modelo de Bohr, en el átomo de hidrógeno el electrón gira alrededor del protón en una circunferencia de radio $5,1 \times 10^{-11} \text{ m}$ y con una frecuencia de $6,8 \times 10^{15} \text{ Hz}$. a) ¿Cuál es la corriente debida al movimiento orbital del electrón? b) ¿Cuánto vale el campo magnético que crea esa corriente?

Resultados: a) $1,09 \times 10^{-3} \text{ C}$; b) $13,43 \text{ T}$.

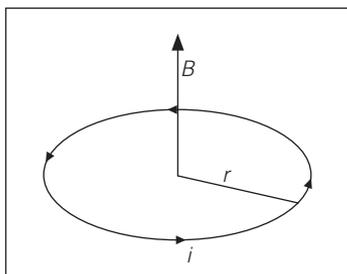


Figura 6.32.

42. Un ion de deuterio, isótopo del hidrógeno de 2 u.m.a., recorre una trayectoria de 40 cm de radio en un campo magnético perpendicular a su velocidad, de 1,5 T de intensidad. a) Encontrar el valor del módulo de la velocidad de esos iones. b) ¿A qué diferencia de potencial habría que someterlos para conseguirla? (Carga del ion, $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$; 1 u.m.a., $1,6 \times 10^{-27} \text{ kg}$.)

Resultados: a) $0,3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$; b) $9 \times 10^6 \text{ V}$.

43. Una espira rectangular por la que circula una intensidad de 5 A está en el seno de un campo magnético de 0,5 T (Fig. 6.33). a) ¿Cuál es la fuerza magnética en cada lado de la espira? b) ¿Cuánto vale el momento de la fuerza magnética respecto al eje AC?

Resultados: a) 2,5 N; b) 5 Nm.

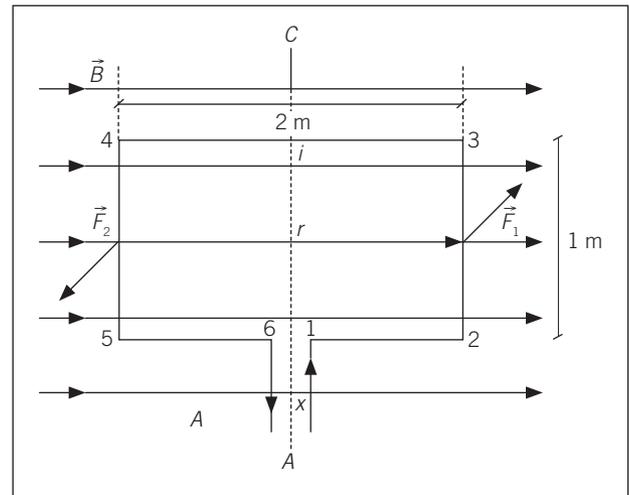


Figura 6.33.

44. Las bacterias son impulsadas por un motor flagelar que funciona con la energía de los protones que pasan del exterior (0 mV) al interior (-80 mV) de la célula. a) ¿Qué energía suministra cada protón que entra? b) Una bacteria de $1 \mu\text{m}$ de diámetro avanza por una disolución acuosa de pH 7 y viscosidad $10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$. ¿Con qué velocidad avanzará, si entran por ella 10^5 protones por segundo? c) En un medio de pH = 6, entran 10 veces más protones por unidad de tiempo. ¿Cómo se modificará la velocidad de la bacteria?

Resultados: a) $1,28 \times 10^{-20} \text{ J}$;
 b) $1,3 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$;
 c) se multiplicará por 10.

45. Supongamos que el potencial de reposo de un axón vale -80 mV, y que los valores máximo y mínimo del potencial de acción son, respectivamente, los valores de los potenciales de Nernst del Na^+ (que supondremos $+70$ mV) y del K^+ (que supondremos de -90 mV). *a)* Si la capacidad de la membrana del axón es 5×10^{-9} F, ¿cuántos iones deben entrar para pasar del potencial de reposo al potencial máximo? ¿Cuántos iones deben salir para pasar del potencial máximo al potencial mínimo? *b)* Si el proceso de subida dura 1 ms y el de bajada dura 2 ms, ¿cuánto vale la resistencia de la membrana al paso de los iones Na y K, respectivamente? *c)* ¿Cómo variarían estos valores si una mutación hiciera que el número de canales de sodio de la membrana se duplicara? ¿Y cómo variarían si una mutación conservara el número de canales de sodio, pero hiciera que la resistencia de cada canal se duplicara respecto de la situación inicial?

Resultados: *a)* Deben entrar $4,68 \times 10^9$ iones Na^+ ; deben salir $5,0 \times 10^9$ iones K^+ ; *b)* $R_{\text{Na}} = 2 \times 10^5 \Omega$, $R_{\text{K}} = 4 \times 10^5 \Omega$; *c)* R_{Na} se reducirá a la mitad; R_{K} se duplicaría.

46. Cuando un potencial de acción llega al final del axón, a una sinapsis, se abren unos canales de calcio y estos iones entran rápidamente a la célula y provocan la liberación de neurotransmisores a la sinapsis. *a)* Si las concentraciones exterior e interior de Ca^{++} son de 120 mol/ m^3 y de 50 mol/ m^3 , ¿cuánto vale el potencial final interior del calcio en la situación de equilibrio? *b)* Si el

potencial inicial es -70 mV, ¿cuántos iones de Ca^{++} deben entrar para alcanzar el potencial de equilibrio, si la capacidad de la parte correspondiente de la membrana vale 10^{-6} F? *c)* ¿Cuánto debe valer la resistencia de la membrana al Ca^{++} para que la entrada de Ca^{++} dure 2×10^{-3} s? (considerar $T = 310$ K).

Resultados: *a)* 11,7 mV; *b)* $5,1 \times 10^{11}$ iones; *c)* $2 \times 10^3 \Omega$.

47. Los valores máximo y mínimo del potencial de membrana en un potencial de acción corresponden, aproximadamente, a los potenciales de Nernst del Na^+ y del K^+ (por esto la amplitud del potencial no depende de la intensidad del estímulo). Un investigador estudia los potenciales de acción en calamares y en perros. *a)* Las concentraciones de K^+ y de Na^+ en el axón de calamar son $[\text{K}^+]_{\text{int}} = 400$, $[\text{K}^+]_{\text{ext}} = 20$, $[\text{Na}^+]_{\text{int}} = 50$, $[\text{Na}^+]_{\text{ext}} = 400$, todas ellas en mol/ m^3 . Calcular los potenciales de Nernst (considerar $T = 310$ K). *b)* En mamíferos estas concentraciones valen $[\text{K}^+]_{\text{int}} = 150$, $[\text{K}^+]_{\text{ext}} = 5$, $[\text{Na}^+]_{\text{int}} = 15$, $[\text{Na}^+]_{\text{ext}} = 145$. Calcular los potenciales de Nernst. *c)* Supongamos dos fragmentos de axón, uno de cada especie, que tienen la misma capacidad, 5×10^{-9} F. Comparar el número de iones que tienen que salir para pasar desde el máximo al mínimo del potencial de acción en cada una de las dos especies.

Resultados: *a)* $\Delta V_{\text{K}} = -80,30$ mV; $\Delta V_{\text{Na}} = 55,34$ mV; *b)* $\Delta V_{\text{K}} = -91,12$ mV; $\Delta V_{\text{Na}} = 60,84$ mV; *c)* calamar n.º iones = $4,23 \times 10^9$; perro n.º iones = $4,74 \times 10^9$ iones.

CAPÍTULO

Óptica:
visión, lentes, estructuras moleculares

7

La Óptica es el área de la Física que se ocupa de la luz o, para hablar con mayor amplitud, de los fenómenos relacionados con la radiación electromagnética. Se halla presente en muchos fenómenos y en numerosas aplicaciones, de los cuales veremos en este capítulo los más básicos y cercanos a las ciencias de la vida. Tras explicar la naturaleza de la luz y el espectro visible, estudiamos las características de la interferencia y la difracción. Más adelante, nos detenemos en la reflexión y la refracción y sus consecuencias en la dispersión de la luz y en películas delgadas. Comentaremos en detalle una de las propiedades que no apareció en el sonido, pero que puede tener lugar en cualquier tipo de ondas transversales: la polarización y el empleo que de ella hacen algunas especies animales. Prestaremos también atención a la óptica de las lentes, indispensables para entender cómo funcionan los principales instrumentos ópticos, con especial atención a la óptica del ojo humano, sus características y sus defectos. Finalmente, dedicamos una sección a los tipos más importantes de microscopios.

7.1. Naturaleza de la luz. Índice de refracción. Principio de Huygens

Hasta el siglo xx han subsistido dos puntos de vista acerca de la naturaleza de la luz: uno, debido a Huygens, suponía que la luz era de origen ondulatorio, y otro, defendido por Newton, propugnaba que la luz está compuesta por partículas. De hecho, durante dos siglos ambos explicaban aspectos complementarios: mediante el primero lo que se denomina Óptica física; mediante el segundo, lo que se conoce como Óptica geométrica. Uno de los mayores logros de la Física en el siglo xix fue la unificación de las fuerzas eléctricas y magnéticas, junto al descubrimiento de las ondas electromagnéticas (véase el Capítulo 6), cuya velocidad resultó ser precisamente la de la luz. Este importantísimo descubrimiento teórico de Maxwell fue comprobado experimentalmente al cabo de poco tiempo por Hertz, dando así un espaldarazo definitivo a la naturaleza ondulatoria de la luz. Ese descubrimiento de Hertz permitió explotar las ondas electromagnéticas, dando lugar a los pocos años a la telegrafía sin hilos y, más tarde, a la radio, la televisión y las comunicaciones inalámbricas entre las cuales, los teléfonos móviles. El dilema de los dos puntos de vista quedó zanjado con el principio de la dualidad corpúsculo-onda de de Broglie. Por razones de claridad seguiremos la división clásica en Óptica física y Óptica geométrica, sabiendo ahora que son aspectos —la onda y el fotón que lleva asociada— de una misma realidad. Como vimos en el Capítulo 5, dedicado a las ondas, éstas se caracterizan por la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación. En la Figura 7.1 se representa el espectro de las ondas electromagnéticas y los distintos nombres que reciben según las bandas de frecuencias, o de modo equivalente, de longitudes de onda.

Es de notar que la zona visible, que corresponde a longitudes de onda entre los 400 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$; $400 \text{ nm} = 4 \times 10^{-7} \text{ m}$) del violeta a los 700 nm del rojo, es muy pequeña comparada con las múltiples y variadas manifestaciones que tienen esas ondas. Así, las ondas de radio tienen una longitud de onda que va de los 10^4 a 1 m. Las de televisión, entre 5 y 3 cm (VHF), y 3 y 1 cm (UHF); las ondas infrarrojas, entre 1 cm y 700 nm, etc.

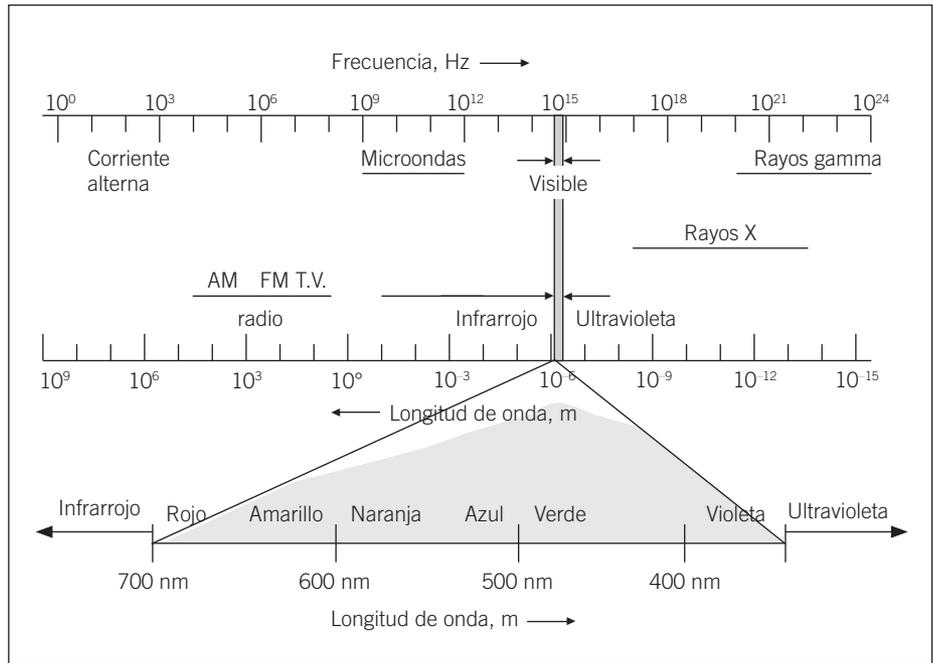


Figura 7.1. Espectro de las ondas electromagnéticas

Tabla 7.1. Índice de refracción n de diferentes materiales transparentes.

Compuestos	n^*
Gases (a 0° C)	1.000293
Aire	1.000293
Amoniaco	1.000376
Dióxido de carbono	1.00045
Cloro	1.000773
Hidrógeno	1.000132
Metano	1.000444
Dióxido de azufre	1.000686
Líquidos	
Benceno	1.501
Sulfuro de carbono	1.625
Etanol	1.362
Metanol	1.329
Ioduro de metileno	1.726
Agua	1.333
Sólidos	
Zafiro, rubí (Al ₂ O ₃)	1.767
Diamante	2.417
Vidrios:	
Cuarzo fundido	1.458
Cal de sosa	1.512
Pyrex	1.474
Flint denso	1.655
Hielo (0 °C)	1.310
Lúcita plástica	1.491
Rutilo, E (470 ml)	3.095
Sal (NaCl)	1.544

La velocidad de propagación de la luz es aproximadamente $c = 300\,000 \text{ km s}^{-1}$ en el vacío, valor que puede ser empleado también para el aire. Sin embargo, la velocidad de la luz en otros medios –agua, vidrio, etc.– es menor, y por eso se introduce el *índice de refracción* n_m de un medio, definido como

$$n_m = \frac{c}{c_m} \tag{1}$$

siendo c_m la velocidad de la luz en dicho medio. Por definición se cumple que $n > 1$ para cualquier medio. En la Tabla 7.1 se recogen los valores del índice de refracción de algunos materiales transparentes.

La frecuencia de la luz sólo depende de la fuente que la emite y no cambia al pasar de un medio a otro, de modo que conserva el mismo color en ese paso. Puesto que la velocidad de la luz varía con el medio, pero la frecuencia se mantiene constante, la longitud de onda correspondiente se adapta al nuevo medio. La expresión general de ese cambio se obtiene usando la definición del índice de refracción y la relación fundamental de las ondas, que se ha de cumplir en ambos medios (el subíndice m se refiere a los correspondientes valores en el medio), y se tiene

$$n_m = \frac{c}{c_m} \Rightarrow c_m = \frac{c}{n_m} ; \lambda f = c ; \lambda_m f = c_m = \frac{c}{n_m} \tag{2}$$

De las dos últimas expresiones se deduce fácilmente

$$\lambda_m f = \frac{c}{n_m} = \frac{\lambda f}{n_m} \Rightarrow \lambda_m = \frac{\lambda}{n_m} \quad [3]$$

es decir, la longitud de onda se reduce en un factor que es el índice de refracción.

Presentamos a continuación dos ejercicios que ilustran los cambios en la longitud de onda.

Ejemplo 7.1.

Las longitudes de onda de la luz visible están comprendidas entre los 400 y los 700 nm. a) Hállense las frecuencias de esas ondas en aire. Sabiendo que el índice de refracción del agua es $n_a = 4/3$, b) calcúlese la gama de longitudes de onda visible en agua (velocidad de la luz en el aire, $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$).

a) Usando la relación general de las ondas que se propagan a velocidad constante, $\lambda f = c$, se obtienen fácilmente las frecuencias máxima y mínima –que corresponden a la mínima y máxima longitud de onda, respectivamente:

$$f_{\text{máx}} = \frac{c}{\lambda_{\text{mín}}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{4 \times 10^{-7} \text{ m}} = 7,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$f_{\text{mín}} = \frac{c}{\lambda_{\text{máx}}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{7 \times 10^{-7} \text{ m}} = 4,3 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Así pues, la gama de frecuencias de la luz visible en el aire se encuentra entre los $4,3 \times 10^{14}$ y los $7,5 \times 10^{14}$ Hz.

b) Si acudimos a la relación [3] (indicamos con un subíndice a los valores de las magnitudes en el agua) obtenemos para el agua

$$\lambda_a = \frac{\lambda}{n_a} \Rightarrow (\lambda_a)_{\text{máx}} = \frac{7 \times 10^{-7} \text{ m}}{4/3} = 5,25 \times 10^{-7} \text{ m} = 525 \text{ nm}$$

$$(\lambda_a)_{\text{mín}} = \frac{4 \times 10^{-7} \text{ m}}{4/3} = 3 \times 10^{-7} \text{ m} = 300 \text{ nm}$$

Ejemplo 7.2.

Una lámina de vidrio de índice de refracción $n_v = 1,5$ tiene un espesor de 5 mm. a) ¿Cuánto tarda la luz en atravesarla? Si esa luz tiene una longitud de onda $\lambda = 600 \text{ nm}$ en el vacío; b) ¿cuántas ondas contiene la lámina, es decir, cuántas longitudes de onda están contenidas en el espesor de la lámina?

a) El tiempo que tarda en pasar la onda a través del vidrio viene dado simplemente por la relación $t = d/c_v$, donde c_v indica la velocidad de la luz en el vidrio. Teniendo en cuenta el valor del índice de refracción obtenemos

$$t = \frac{d}{c_v} = \frac{d}{c/n_v} = \frac{dn_v}{c} = \frac{5 \times 10^{-3} \text{ m} \times 1,5}{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 2,5 \times 10^{-11} \text{ s}$$

para lo cual no hemos tenido necesidad de calcular explícitamente c_v . Por completitud, calculemos el valor de esta velocidad:

$$c_v = \frac{c}{n_v} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1,5} = 2 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 200\,000 \text{ km s}^{-1}$$

b) Para responder esta pregunta hemos de calcular la longitud de onda de la luz en el interior del vidrio, que viene dada por la relación [3]

$$\lambda_v = \frac{\lambda}{n_v} = \frac{6 \times 10^{-7} \text{ m}}{1,5} = 4 \times 10^{-7} \text{ m} = 400 \text{ nm}$$

y, dividiendo el espesor d de la lámina por esa longitud, se obtiene el número de ondas N contenidas en el interior del vidrio

$$N = \frac{d}{\lambda_v} = \frac{5 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-7}} = 1,25 \times 10^4$$

Al emitirse ondas en el espacio existe un conjunto de puntos que tienen la misma amplitud y fase: esto es lo que se conoce como *frente de onda*. Normalmente éste se dibuja, por ejemplo, para los puntos que tienen amplitud máxima, tal como ya hicimos en el capítulo de Ondas. Resulta útil representar una onda mediante los frentes que se propagan, como aparece en la Figura 7.2.

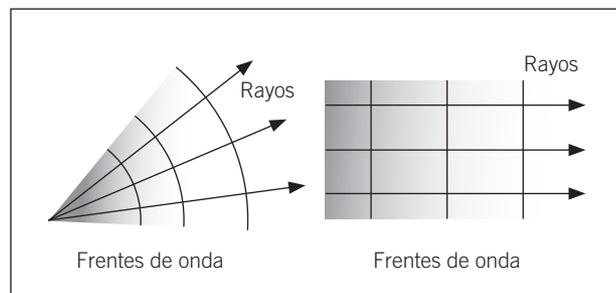


Figura 7.2. Frente de ondas esféricas y planas, con los rayos correspondientes.

Los frentes de la izquierda provienen de una fuente puntual: son lo que se conoce como ondas esféricas. Muy lejos de la fuente, esas ondas adoptan la forma que aparece a la derecha de la figura, conocidas como ondas planas. Una recta perpendicular al frente de onda se conoce con el nombre de rayo. Éste indica la dirección de propagación de la onda. En la Figura 7.2 se

han representado también los rayos. Se puede ver que en las ondas esféricas los rayos van, como es lógico, en dirección radial, mientras que en una onda plana todos los rayos son paralelos. Cuando la radiación del Sol llega a la Tierra, las ondas pueden considerarse como planas. Efectivamente, aunque su origen es el Sol, la fuente se halla a tanta distancia de la Tierra, que los rayos son prácticamente paralelos.

Christian Huygens, basándose en su esquema ondulatorio de la luz, propuso el siguiente enunciado, que se ha dado en llamar *Principio de Huygens*: «Todo punto de un frente de onda se puede considerar como un emisor de ondas esféricas secundarias.»

Si aplicamos este principio al caso de una onda plana, la superposición de las ondas que «emite» cada punto de frente de onda plano da lugar, al cabo de un lapso de tiempo dt , a otro frente plano que se ha propagado a la velocidad de la onda correspondiente. (Este principio se aplica a cualquier tipo de onda en el espacio y no es exclusivo de la luz.) Usaremos este principio para explicar diferentes fenómenos de la Óptica.

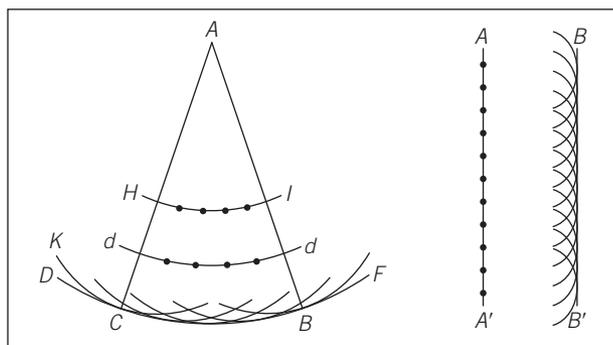


Figura 7.3. Frentes de ondas planas y esféricas, mostrando la construcción de Huygens.

7.2. Interferencia. Experimento de Young

Al aludir a la superposición de ondas vimos que cuando dos de ellas coinciden en un punto del espacio se produce una superposición, que puede ser constructiva o destructiva, y da lugar a ondas estacionarias y a pulsaciones. Las interferencias constructivas juegan un papel importante en los *láseres*. En estos dispositivos, desarrollados a partir de 1960, se mantienen átomos excitados en el interior de una cavidad limitada por espejos que dejan salir sólo una parte de la radiación. Cuando un átomo se desexcita emite un fotón (véase el Capítulo 8). Cuando el fotón llega cerca de un nuevo átomo excitado hace que éste se desexcite y emita un nuevo fotón, que se suma constructivamente al fotón inicial. Así, la luz que sale del láser puede conseguir una gran intensidad, ya que todas las ondas emitidas se suman constructivamente, a diferencia de lo que ocurre con las lámparas normales, donde buena parte de las radiaciones emitidas interfieren destructivamente.

Así pues, este fenómeno de *interferencia* es típico de las ondas. La primera demostración de interferencia luminosa fue llevada a cabo por Young

en 1801. En síntesis, el experimento de Young consiste en situar una lámpara de luz monocromática —que emite con un solo color, es decir, una sola frecuencia, y no una mezcla como la que forma la luz blanca— cerca de una pantalla en la que hay dos rendijas muy estrechas separadas menos de 1 mm. Se necesita, además, que la luz que incide sobre las dos rendijas sea coherente, es decir, que las ondas que llegan a ambas rendijas provengan de un mismo frente de onda (están en fase).

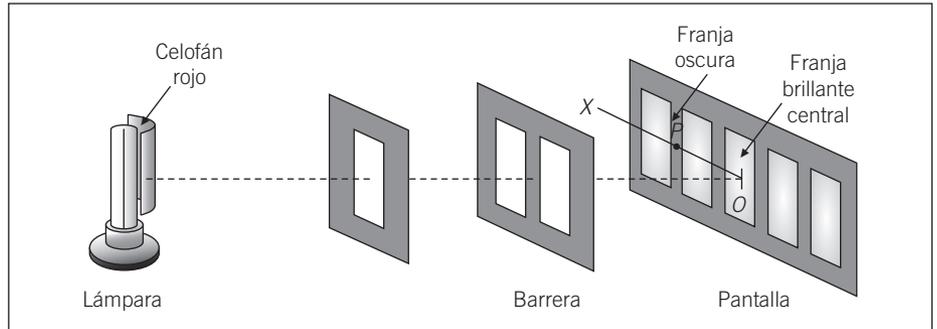


Figura 7.4. Experimento de Young de la doble rendija.

Al incidir la luz de esas rendijas sobre una pantalla distante se obtiene, en lugar de dos manchas nítidas, una serie de franjas como las que aparecen en la Figura 7.5, en las que se puede observar alternativamente unos máximos y mínimos dispuestos de manera regular. Esto es lo que se conoce como diagrama de interferencia. Procuremos dar una explicación de cómo este diagrama tiene su origen en la naturaleza ondulatoria de la luz. Al tratarse de luz coherente, las ondas que llegan a las dos rendijas están en fase. Por el principio de Huygens, cada una de ellas se convertirá en una fuente puntual de ondas que saldrán de ellas con la misma fase; pero los rayos provenientes de cada rendija no siguen el mismo camino hasta llegar a la pantalla, tal como se puede ver en la Figura 7.6. La diferencia de caminos ópticos es la distancia x en ese diagrama, que viene dada cuando la distancia D de las rendijas a la pantalla es muy superior a la separación d entre las rendijas,

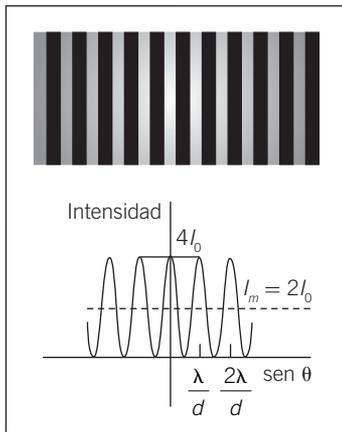


Figura 7.5. Figura de interferencia.

$$x \approx d \text{ sen } \phi \tag{6}$$

siendo d la distancia entre rendijas. Como vimos al estudiar la superposición de ondas, se produce superposición destructiva cuando dos ondas inciden en un punto desfasadas en un múltiplo impar de semilongitudes de onda $(2n + 1) \lambda/2$. Esto se traduce en nuestro caso en que cuando la diferencia de camino x es un múltiplo impar de una semilongitud de onda $\lambda/2$ se produce una región oscura. Por tanto, la condición de amplitud nula sobre la pantalla se da para aquellos ángulos que cumplen la relación

$$\text{Amplitud nula: } d \text{ sen } \phi_n = \pm(2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{7}$$

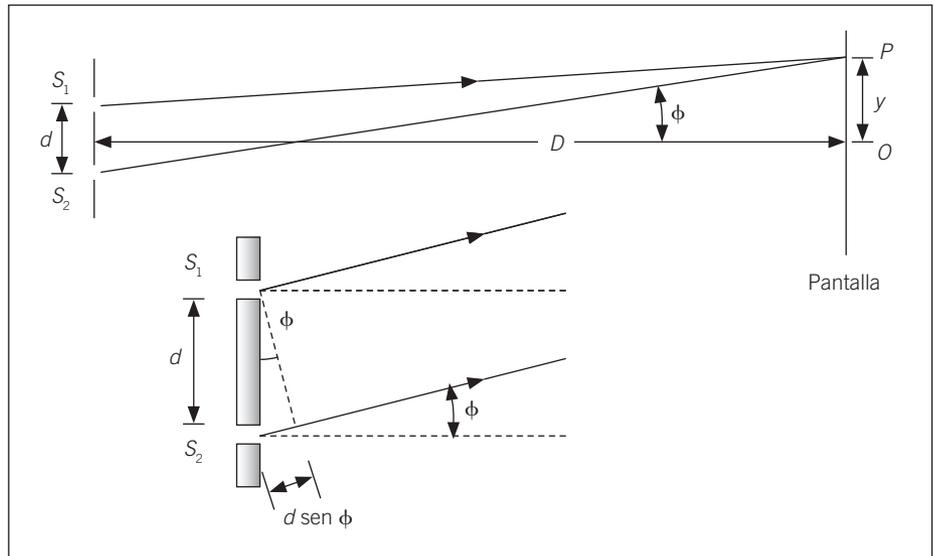


Figura 7.6. Diferencia de caminos ópticos en el experimento de las dos rendijas.

Los máximos se producirán en aquellos puntos sobre los que inciden las dos ondas en fase, es decir, cuando la diferencia de camino óptico sea nula o un múltiplo de la longitud de onda

$$\text{Amplitud máxima} \quad d \text{ sen } \phi'_n = \pm n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad [8]$$

y ahí se producirán franjas brillantes.

En los ejemplos siguientes se ilustra el método para hallar las características más sobresalientes de la interferencia.

Ejemplo 7.3.

Un haz coherente de luz monocromática incidente sobre un par de rendijas muy estrechas, separadas 0,15 mm entre ellas, forma una imagen de difracción sobre una pantalla situada a 2,5 m de dichas rendijas. Sobre esa imagen se mide la distancia entre el máximo central y el primer mínimo, que resulta ser 0,38 cm. a) Determínese la longitud de onda del haz incidente. Si en lugar de ese haz se enviase luz roja con una longitud de onda de 700 nm; b) ¿cuánto valdría entonces la separación entre el máximo y el primer mínimo?

a) La condición para el primer mínimo en el diagrama de interferencia se deduce fácilmente de la ecuación [7]:

$$d \text{ sen } \phi_1 = \pm \frac{\lambda}{2}$$

De la representación geométrica de la Figura 7.7 resulta claro que el ángulo correspondiente ϕ_1 está relacionado con la distancia l_1 entre el máxi-

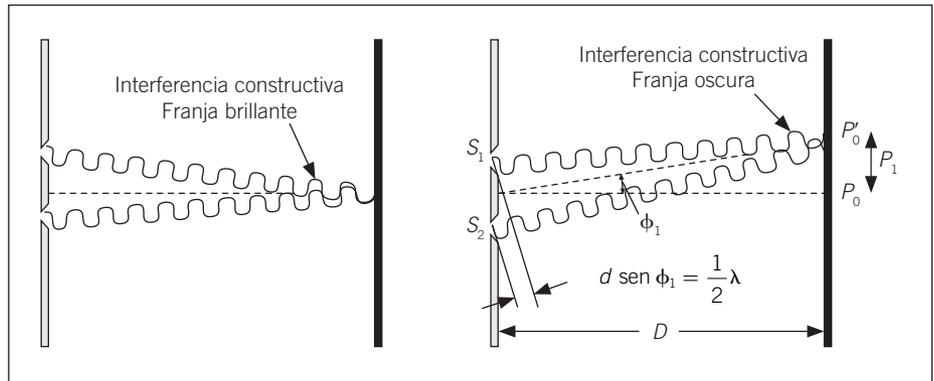


Figura 7.7. Interferencia con dos rendijas.

mo central y el primer mínimo en la parte superior (ángulo positivo) en la forma simple

$$\text{tg } \phi_1 = \frac{l_1}{D}$$

siendo D la distancia de las rendijas a la pantalla. Como $l \ll D$, se deduce que el ángulo ϕ_1 (en rad) es muy pequeño, de modo que la tangente y el seno coinciden a efectos prácticos, lo que permite escribir

$$\frac{\lambda}{2d} = \text{sen } \phi_1 \approx \text{tg } \phi_1 = \frac{l_1}{D}$$

Puesto que conocemos los valores de d , l_1 y D , podemos obtener fácilmente la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2dl_1}{D} = \frac{2 \times 0,15 \times 10^{-3} \text{ m} \times 0,38 \times 10^{-2} \text{ m}}{2,5 \text{ m}} = 4,56 \times 10^{-7} \text{ m} = 456 \text{ nm}$$

que corresponde a una luz de color violáceo-azulado.

b) Conocemos ahora λ y podemos determinar la nueva distancia l'_1 , entre el máximo central y el primer mínimo para ese color de luz usando la ecuación deducida en la pregunta anterior.

$$l'_1 = \frac{D\lambda}{2d} = \frac{2,5 \text{ m} \times 4,56 \times 10^{-7} \text{ m}}{2 \times 0,15 \times 10^{-3} \text{ m}} = 0,76 \times 10^{-2} \text{ m} = 7,6 \text{ mm}$$

En el ejemplo que acabamos de hacer hemos visto una de las aplicaciones del experimento de Young: la determinación de longitudes de onda de la luz. Para realizar esta operación, se mide la distancia entre máximos contiguos, pues son más nítidos y permiten realizar la medida con algo más de precisión. Planteamos seguidamente un ejemplo en el que se analiza esta posibilidad.

Ejemplo 7.4.

En un experimento se hace incidir luz cuya longitud de onda es 632,8 nm (láser de He-Ne) sobre dos rendijas y se obtiene un diagrama de interferencia en una pantalla que dista 3 m de aquéllas. En este diagrama los máximos distan entre sí 1,20 mm. Calcúlese la separación entre las dos rendijas.

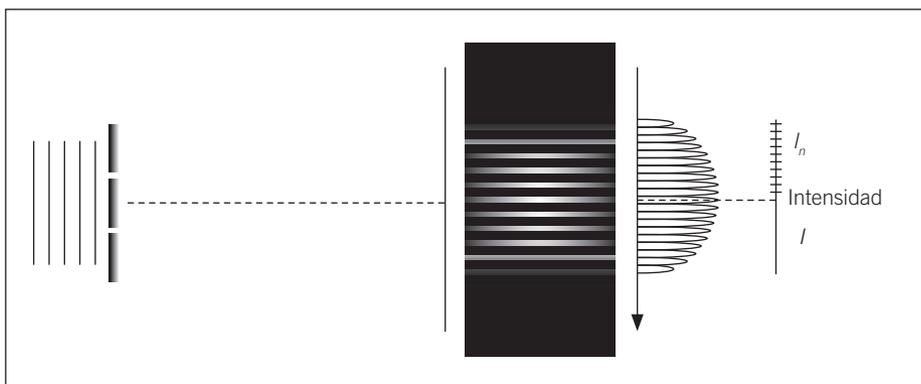


Figura 7.8. Interferencias con dos rendijas.

Si denotamos con y_m la distancia entre dos máximos cualesquiera del diagrama de interferencia, resulta inmediato que la distancia entre el máximo central y otro cualquiera de orden n será $l_n = ny_m$. La condición que permite calcular el ángulo correspondiente al máximo de orden n fue recogida en la ecuación [8].

$$d \operatorname{sen} \phi'_n = \pm n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Para una pantalla muy distante ($d \ll D$) se cumple muy aproximadamente que

$$\operatorname{tg} \phi'_n = \frac{\pm l_n}{D} = \frac{\pm ny_m}{D}$$

Si tomamos los máximos sobre los valores positivos del ángulo ϕ'_n , y como en el ejemplo anterior tenemos en cuenta que los valores del ángulo ($l_n \ll D$) son muy pequeños, las expresiones de la tangente y del seno del ángulo (en rad) son casi iguales, por lo que se puede escribir

$$\frac{ny_m}{D} = \operatorname{tg} \phi'_n \approx \operatorname{sen} \phi'_n = \frac{n\lambda}{d} \Rightarrow \frac{y_m}{D} = \frac{\lambda}{d}$$

Se despeja fácilmente la distancia entre rendijas d para obtener su valor

$$d = \frac{\lambda D}{y_m} = \frac{6,832 \times 10^{-7} \text{ m} \times 3 \text{ m}}{1,2 \times 10^{-3} \text{ m}} = 1,7 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,7 \text{ mm}$$

En las aplicaciones corrientes de la interferencia para aumentar la resolución, resulta útil usar más de dos rendijas. Veamos a continuación, por

ejemplo, el diagrama que se obtiene con seis rendijas, todas ellas con la misma anchura y con la misma distancia entre rendijas consecutivas.

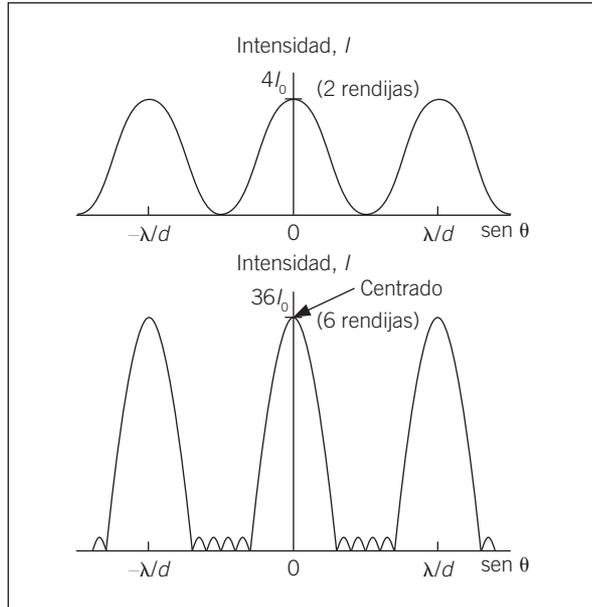


Figura 7.9. Diagrama de interferencia con seis rendijas.

Ahora se observan cuatro máximos secundarios relativamente pequeños entre dos máximos primarios muy intensos que ocupan la misma posición que para el caso de dos rendijas. [De manera general, si se tienen N rendijas, se obtienen $(N - 2)$ pequeños máximos entre dos máximos muy brillantes.] La razón es que para que se produzca un máximo intenso tienen que llegar en fase las seis ondas provenientes de las rendijas.

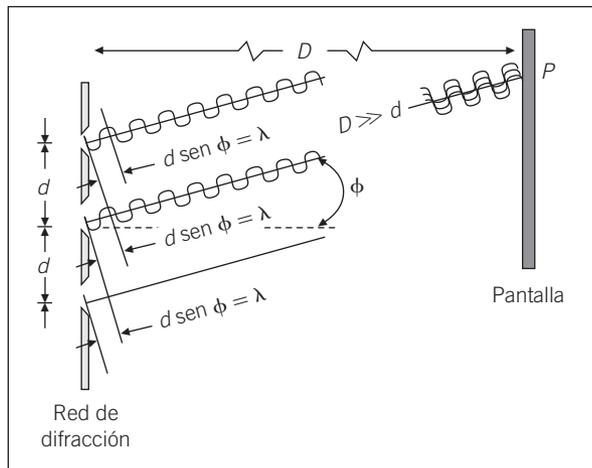


Figura 7.10. Diagrama de ondas con una red de difracción.

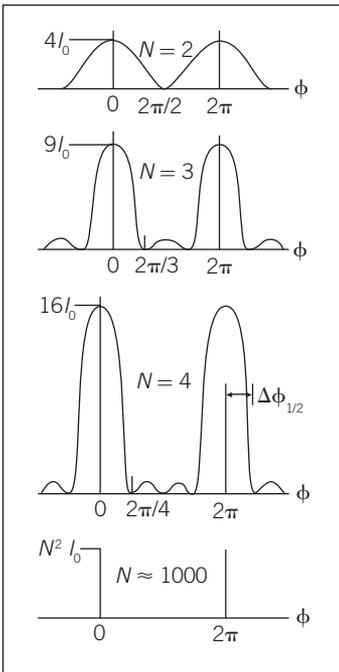


Figura 7.11. Intensidad en función del ángulo.

En los puntos de máxima intensidad llega ahora una amplitud que es la contribución de cada una de las seis rendijas y, por tanto, $E_m = 6E_0$, por lo que la intensidad se hace $I_m = 6^2 I_0 = 36I_0$. En la Figura 7.11 se representa la intensidad de la luz que llega a la pantalla en varios casos. De la observación de la figura se deduce que la distribución de intensidad cerca de los máximos se hace más aguda al aumentar N . El empleo de dispositivos (redes de difracción) que contienen muchas rendijas paralelas con pequeña separación entre ellas es fundamental en una técnica conocida como espectroscopia, que se usa para medir longitudes de onda de la luz. Planteamos ahora un ejemplo, complemento de los dos anteriores, con ese tipo de dispositivo.

Ejemplo 7.5.

Se usa un dispositivo (red de difracción) con muchas rendijas separadas uniformemente, sobre el que se hace incidir un haz de luz monocromática de $632,8 \text{ nm}$ (luz roja de un láser de He-Ne). Sobre una pantalla situada a 3 m del dispositivo el diagrama de difracción consiste en nítidas manchas rojas separadas entre sí 1 m . Determínese cuántas rendijas por centímetro ha de tener dicho dispositivo.

La condición para que se dé un máximo es

$$d \text{ sen } \phi'_n = \pm n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

que corresponde a los máximos primarios, que se hacen más intensos al usar rendijas múltiples. Entonces, ¿cuál es la influencia de tener muchas rendijas? Precisamente al disminuir la distancia entre ellas aumenta la intensidad y nitidez de los máximos. Añadamos a esa ecuación la condición geométrica que permite situar los máximos (véase Figura 7.7):

$$\text{tg } \phi'_n = \frac{\pm l_n}{D} = \frac{\pm ny_m}{D}$$

donde y_m es la distancia entre dos máximos consecutivos. Como supusimos en el Ejemplo 7.4, el ángulo ϕ'_n es muy pequeño ya que $l_n \ll D$, de modo que se pueden igualar seno y tangente, llegándose a

$$\frac{\pm n}{d} = \text{sen } \phi'_n \approx \text{tg } \phi'_n = \frac{\pm ny_m}{D}$$

de la que se deduce que

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{y_m}{D} \Rightarrow d = \frac{\lambda D}{y_m} = \frac{6,832 \times 10^{-7} \text{ m} \times 3 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 2 \times 10^{-6} \text{ m} = 2 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

de modo que el número de rendijas por centímetro es, sencillamente,

$$N = \frac{1}{d} = \frac{1}{2 \times 10^{-4} \text{ cm}} = 5000 \text{ rendijas cm}^{-1}$$

Hemos comentado que los máximos se hacen más intensos y más nítidos cuando se usan múltiples rendijas. En la siguiente sección (7.3) se estudia una aplicación muy relevante.

7.3. Difracción de rayos X y de radiación sincrotón. Estructura de proteínas

Tabla 7.2. Aminoácidos que constituyen las proteínas, con su respectiva masa molecular (u.m.a.)

Glicina	75
Alamina	89
Serina	105
Prolina	115
Valina	117
Treonina	119
Leucina	131
Isoleucina	131
Asparagina	132
Glutamina	146
Lisina	146
Ácido glutámico	147
Metionina	149
Histidina	155
Fenilalanina	165
Arginina	174
Ácido aspártico	174
Tirosina	181
Triptófano	204

Tabla 7.3. Bases nitrogenadas del DNA

Purinas	
Adenina (A)	$C_5H_5N_5$
Guanina (G)	$C_5H_5N_3O$
Pirimidinas	
Timina (T)	$C_5H_6N_2O_2$
Citosina (C)	$C_4H_5N_3O$
Uracil (U)	$C_4H_4N_2O_2$

Los fenómenos de interferencia descritos en el apartado anterior nos permiten referirnos a uno de los problemas más importantes de la biofísica, la determinación de la estructura de proteínas mediante difracción de rayos X o de radiación sincrotrón. Estos métodos fueron los que condujeron a la determinación de la estructura de doble hélice del DNA por Watson y Crick, a partir de datos de difracción de rayos X de R. Franklin, en 1953, y han permitido la resolución estructural de un número considerable de proteínas. Aun así, queda por averiguar la estructura de muchas proteínas de gran relevancia biológica y médica. Una vez secuenciado el DNA de muchas especies —la secuenciación del genoma de nuestra especie fue presentada en el año 2000—, algunas de las grandes incógnitas biológicas se refieren a la estructura y la dinámica de las proteínas, la interacción entre éstas y el DNA, la regulación de la lectura genómica, y la relación entre estructura y función en las proteínas.

Las proteínas son sucesiones de aminoácidos engarzados por enlaces peptídicos. Los aminoácidos diferentes que forman parte de las proteínas son veinte (ver Tabla 7.2) —aunque es posible producir artificialmente un número más elevado de ellos—. Las proteínas acostumbran a estar formadas por dos o tres centenares de aminoácidos en cadena. Se denomina estructura primaria la secuencia de los aminoácidos que forman una proteína. Esta información está contenida en el DNA (ver Tabla 7.4).

La cadena de aminoácidos no es rectilínea. Localmente, puede tener tres estructuras principales: hélice alfa, lámina beta e hilo aleatorio. Estas formas constituyen la llamada estructura secundaria. El hilo aleatorio es una zona sinuosa sin características especiales. La hélice alfa es debida a puentes de hidrógeno entre el oxígeno del grupo carboxilo de un enlace peptídico y el hidrógeno del grupo amino del tercer aminoácido que lo sigue en la cadena. En la lámina beta, los puentes de hidrógeno actúan entre dos cadenas paralelas o antiparalelas y las mantienen unidas. Algunas secuencias parciales son propensas a formar hélices y otras, láminas. La hemoglobina está formada por hélices alfa; las proteínas de la seda, por láminas beta; la mayoría de las proteínas tienen zonas de ambos tipos.

La estructura terciaria se refiere a la disposición espacial de las diferentes estructuras secundarias. Esta disposición desempeña un papel decisivo en la función de la proteína —que puede ser estructural, catalizadora o reguladora, pero que en cada caso es muy específica—. Las fuerzas que determinan la estructura terciaria son, básicamente, las interacciones hidrofóbicas o hidrofílicas de los diferentes aminoácidos, de forma que la proteína tenderá a situar en las zonas más interiores las partes hidrofóbicas, que así evitarán estar en contacto con el agua circundante, y en el exterior las partes más hidrofílicas. También tienden a estar próximas entre sí las zonas de cargas

Tabla 7.4. Codones del ADN correspondientes a los diversos aminoácidos

Glicina
GGU, GGG, GGA, GGG
Alamina
GCU, GCC, GCA, GCG
Serina
UCU, UCC, UCA, UCG
Prolina
CCU, CCC, CCA, CCG
Valina
GUU, GUC, GUA, ACG
Treonina
ACU, ACC, ACA, ACG
Cisteína
UGU, UGC
Leucina
UUA, UUG, CUU, CUC,
CUA, CUG
Isoleucina
AUU, AUC, AUA
Asparagina
AAU, AAC
Glutamina
CAA, CAG
Lisina
AAA, AAG
Ácido glutámico
GAA, GAG
Metionina
AUG
Histidina
CAU, CAC
Fenilalamina
UUU, UUC
Arginina
CGU, CGC, CGA, CGG
Ácido aspártico
GAU, GAC
Tirosina
UAU, UAC
Triptófano
UGG

eléctricas opuestas o las que contengan átomos de azufre, que establecen entre sí enlaces disulfuro. En las proteínas compuestas por más de una cadena se habla de estructura cuaternaria para referirse a la disposición relativa de las diversas cadenas.

El problema del plegamiento de las proteínas consiste en saber cómo la proteína llega a la forma final en que resulta plenamente activa. En principio, desde el punto de vista físico, la idea parece sencilla: se trata de ir probando configuraciones diferentes hasta que se llega a la de menor energía libre. El problema estriba en el número ingente de configuraciones posibles; si la proteína las fuera ensayando aleatoriamente y pasara un milisegundo en cada una de ellas, tardaría casi la edad del universo en encontrar la configuración de mínima energía. ¿Cómo consigue la proteína llegar a la estructura final correcta en unos pocos segundos? En los últimos años se ha dedicado mucha atención a este tema, desde el punto de vista teórico y práctico, ya que si las proteínas se pliegan mal no funcionan. Además, en algunos casos un defecto en el plegamiento hace que las proteínas se agreguen y formen conglomerados nocivos en el interior de la célula, como ocurre en la enfermedad de Alzheimer. Por ello es muy importante comprender la estructura de las proteínas, sus modificaciones durante su actuación normal –por ejemplo, en máquinas moleculares– y el proceso de plegamiento. Lo ideal sería poder predecir a partir de la estructura primaria, o secuencia de aminoácidos, la estructura terciaria, pero estamos muy lejos de ello, ya que cambiar unos pocos aminoácidos conllevan, en general, cambios radicales en la estructura terciaria. Al estudiar este problema se ha aprendido, por ejemplo, que sucesiones de aminoácidos al azar tardan mucho tiempo en plegarse, a diferencia de las que encontramos en biología. Por lo tanto, una buena parte de las sucesiones de aminoácidos en principio concebibles no tienen interés biológico porque tardan demasiado en plegarse.

Constatado el interés del tema, pasamos a dar una idea de cómo se halla la estructura, lo cual resulta demasiado complejo para un libro de nivel introductorio como éste, y que constituye una especialidad dentro de la biofísica actual. La idea consiste en tomar una proteína –en disolución, o cristalizada– e iluminarla con un haz de rayos X o de radiación sincrotrón de longitud de onda del orden de los nanómetros o décimas de nanómetro –que es el orden de magnitud de la separación entre átomos en la proteína–. La proteína actúa entonces como una red de difracción tridimensional que produce en una pantalla fluorescente un conjunto de máximos de interferencia, de forma muy complicada. A partir de las posiciones relativas y las intensidades de estos máximos es posible, mediante algoritmos sofisticados, llegar a obtener las distancias y los ángulos entre los diversos átomos, y toda la estructura tridimensional de la proteína. En la década de los 1920, Max von Laue y William Henry Bragg y William Laurence Bragg empezaron a estudiar las figuras de difracción de rayos X en cristales simples, para averiguar su estructura. En la década de los 1940, Perutz y otros investigadores comenzaron a aplicar esta técnica a moléculas biológicas.

Hasta la década de 1970 este proceso se realizaba básicamente con rayos X, la radiación electromagnética emitida durante el frenado de electrones lanzados a gran velocidad contra un bloque de plomo o de otros materiales pesados. Ahora bien, de la energía total suministrada a los electrones sólo

una pequeña parte se emplea en producir rayos de la longitud de onda requerida, ya que se producen, al frenar, longitudes de onda muy diversas. Por otro lado, la intensidad y la coherencia de los rayos X son limitados, ya que un gran flujo de electrones fundiría el bloque de material con el que chocan. Ahora se utiliza la radiación sincrotrón, que es la radiación electromagnética emitida por partículas que describen una trayectoria curvada —es decir, cuando tienen una aceleración centrífuga—. Para ello, se aceleran electrones en tubos circulares de unos centenares de metros de diámetro. Dentro de ellos hay unas pequeñas zonas, llamadas osciladores o *wiglers*, en que mediante la introducción de un campo magnético se hace que las partículas describan una trayectoria sinuosa de radio de curvatura determinado. Regulando dicho radio se puede regular la longitud de onda emitida. Además, hay una interferencia constructiva entre las ondas emitidas en cada sinuosidad, con lo cual se logran haces de elevada potencia y de longitud de onda bien definida. La radiación sincrotrón permite obtener muchas imágenes, con lo cual es posible no tan sólo conocer la estructura estática de la proteína, sino sus cambios de configuración cíclicos mientras lleva a cabo su acción y regresa al estado original.

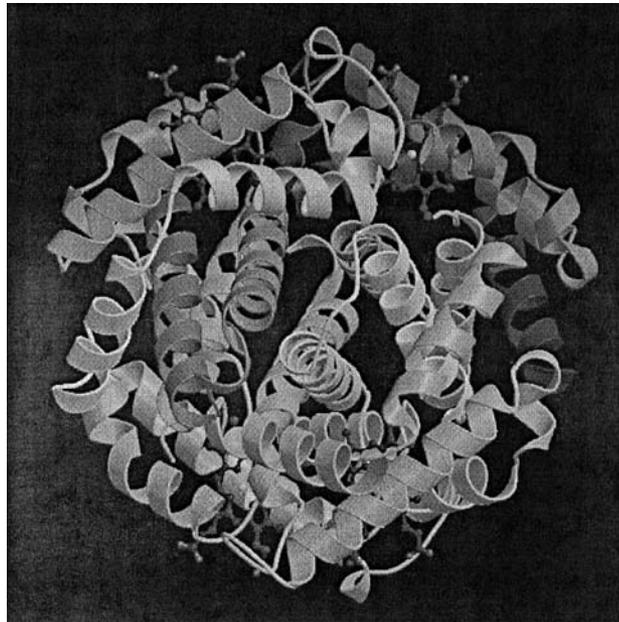


Figura 7.12. Estructura terciaria de una proteína.

7.4. Difracción

Normalmente observamos que la luz viaja en línea recta. Sin embargo, tratándose de una onda, no siempre deberá ser así, sobre todo en el caso especial en que la luz sortea un obstáculo o pasa a través de una rendija, como ya se advirtió en las secciones dedicadas al sonido en el Capítulo 5. Allí comentamos que la onda al sortear un obstáculo deja una «sombra» que no coin-

cide con las dimensiones del objeto. Esto es lo que se conoce con el nombre de *difracción*, fenómeno de gran importancia en óptica y que comentamos ampliamente en esta sección.

Comenzamos estudiando lo que sucede a las ondas planas monocromáticas –una buena aproximación es la de una fuente distante cuya luz ha pasado un filtro de color– al pasar a través de una rendija de anchura a , que es del mismo orden que la longitud de onda de la luz correspondiente y que produce la distribución de intensidad sobre una pantalla situada lejos de la rendija, que se recoge en el diagrama de la Figura 7.13, conocido como diagrama de difracción. En este diagrama se distingue un máximo central bastante nítido, que va a cero y está rodeado de otros máximos secundarios mucho menos intensos. Para determinar las condiciones de máximo y mínimo en ese diagrama nos servimos de argumentos similares a los usados para la interferencia. En primer lugar, analicemos los caminos ópticos que recorren los distintos rayos que emergen desde la rendija.

Si consideramos el par de rayos que salen de dos puntos como A y B separados una distancia $a/2$, se produce superposición negativa entre ellos si llegan a la pantalla en oposición de fase, lo que es equivalente a suponer que si la diferencia de camino óptico $x = (a/2) \sin \phi$ es un número entero de semilongitudes de onda se producirá superposición negativa. Esa condición es equivalente a un cero de amplitud –y, por tanto, de intensidad–, es decir, superposición negativa si se cumple

$$\text{(superposición negativa)} \quad a \sin \phi_n = \pm n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad [9]$$

mientras que los máximos relativos están situados aproximadamente a medio camino entre dos mínimos, lo que equivale a

$$\text{(superposición aditiva)} \quad a \sin \phi'_n = \frac{\pm(2n + 1)}{2} \lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad [10]$$

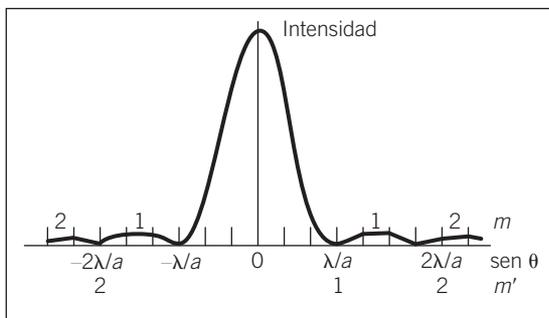


Figura 7.13. Distribución de intensidad en la difracción.

Pero más que las franjas de difracción, el efecto principal es que la imagen sobre la pantalla tendrá una anchura mayor que la anchura de la rendija. En efecto, si nos fijamos en la Figura 7.13 y puesto que la distancia y del punto de máxima intensidad, 0, al primer mínimo, 1, es muy pequeña

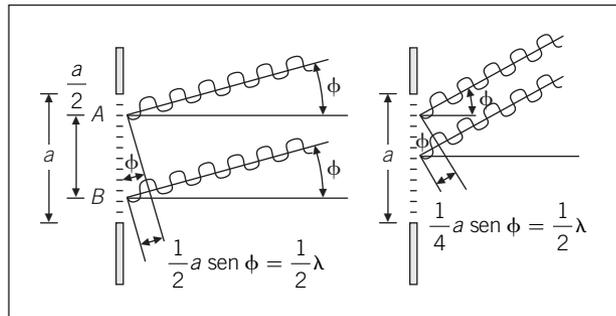


Figura 7.14. Caminos ópticos de las ondas provenientes de una rendija.

comparada con la distancia de la rendija a la pantalla D ($y \ll D$), el ángulo ϕ_1 (en rad) resultará muy pequeño:

$$\text{tg } \phi_1 = \frac{y}{D} \quad [11]$$

Al ángulo formado por el rayo que determina el máximo central y el que produce el primer mínimo se le denomina *ángulo de difracción* $\phi_d = \phi_1$. Al igual que hicimos para interferencia, al ser ϕ_d muy pequeño, el seno y la tangente de ese ángulo serán prácticamente iguales

$$(\phi_1 = \phi_d): \quad \frac{y}{D} = \text{tg } \phi_d \approx \text{sen } \phi_d = \frac{\lambda}{a} \quad [12]$$

de lo cual resulta que

$$y = \frac{\lambda}{a} D \quad [13]$$

lo que indica que la franja de difracción, cuya anchura es simplemente $a = 2y$, se hace más ancha cuanto más pequeña es la anchura de la rendija, o cuanto más aumenta λ .

Veamos estas ideas con algún detalle en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.6.

Un haz de luz de color rojo ($\lambda = 700 \text{ nm}$) se hace incidir sobre una rendija con una anchura $a = 0,1 \text{ mm}$ y se proyecta la imagen de difracción sobre una pantalla situada a 3 m . a) Calcúlese el ángulo de difracción. b) ¿Cuánto valdrá la anchura de la franja brillante sobre la pantalla? (Fig. 7.15).

a) Se calcula el ángulo de difracción mediante la ecuación [12]

$$\phi_d \text{ (rad)} \approx \text{sen } \phi_d = \frac{\lambda}{a} = \frac{7 \times 10^{-7} \text{ m}}{10^{-4} \text{ m}} = 7 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

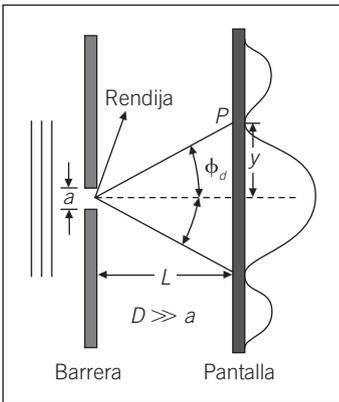


Figura 7.15.

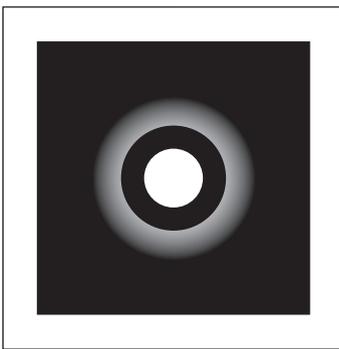


Figura 7.16. Mancha circular de difracción.

que aunque pequeño produce efectos apreciables, como veremos en el apartado siguiente.

b) La anchura de la franja brillante a_d viene dada por la distancia entre los mínimos de orden ± 1 , y usando la relación [13] se obtiene fácilmente

$$a = 2y = 2 \frac{\lambda}{a} D = \frac{2 \times 7 \times 10^{-7} \text{ m} \times 3 \text{ m}}{10^{-4} \text{ m}} = 4,2 \times 10^{-2} \text{ m} = 4,2 \text{ cm}$$

es decir, que la franja de difracción es 420 veces más ancha que la rendija. Vemos, pues, que los efectos de la difracción pueden ser muy importantes.

Cuando en lugar de pasar por una rendija longitudinal, un haz de ondas planas monocromáticas luminosas atraviesa un orificio circular, el diagrama de difracción está compuesto por una mancha circular intensa circundada por otros máximos (halos) de menor intensidad (Fig. 7.16). En este caso el ángulo de difracción viene dado por la relación

$$\text{sen } \phi_d = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad [14]$$

siendo d el diámetro del orificio. (El factor numérico 1,22 proviene del cálculo de la superposición de las ondas con esa geometría.) Este caso es aplicable a la pupila del ojo humano –que comentaremos con más detalle en otra sección– para el cual calculamos los efectos de difracción en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.7.

La pupila del ojo humano tiene unos 5 mm de diámetro. a) Determínese aproximadamente cuál será el máximo y el mínimo ángulo de difracción producido por la luz visible. b) La distancia de la pupila a la retina (donde se captan las imágenes) es $D = 2,5 \text{ cm}$. Dése una estimación del diámetro de la mancha de difracción que se produce.

a) Recordemos que la luz visible se sitúa entre los 700 y los 400 nm. Aplicando la última fórmula hallada a estos dos casos extremos se tiene

$$\phi_d)_{\text{máx}} \text{ (rad)} \approx \text{sen } \phi_d = 1,22 \frac{\lambda_{\text{máx}}}{d} = \frac{1,22 \times 7 \times 10^{-7} \text{ m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 1,7 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\phi_d)_{\text{máx}} \text{ (rad)} \approx 1,22 \frac{\lambda_{\text{mín}}}{d} = \frac{1,22 \times 4 \times 10^{-7} \text{ m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 10^{-4} \text{ rad}$$

El ángulo de difracción está en torno a los 10^{-4} rad . (Sin embargo, debemos hacer notar que no hemos tenido en cuenta que en el interior del ojo hay un líquido –el humor acuoso– con un índice de refracción $n > 1$, lo que origina una ulterior corrección que, por tratarse de un cálculo muy aproximado, no tenemos en cuenta aquí.)

b) Si tomamos la situación en que los efectos de difracción son máximos y aplicamos la ecuación [14], que tiene en cuenta que los orificios son circulares, tendremos

$$d_m = 2 \times 1,22 \frac{\lambda}{d} D = \frac{2 \times 1,22 \times 7 \times 10^{-7} \text{ m} \times 2,5 \times 10^{-2} \text{ m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} =$$

$$= 8,5 \times 10^{-6} \text{ m} = 8,5 \text{ } \mu\text{m}$$

que es del orden de la distancia que están separadas las células fotosensibles (conos y bastones) en la retina.

Consideramos ahora el caso complementario a las ranuras y orificios. Comenzábamos esta sección comentando que la luz se desvía al sortear un obstáculo a consecuencia de su naturaleza ondulatoria. En efecto, como sucede en el caso del sonido, la luz proyectada sobre un obstáculo produce una sombra cuyas dimensiones son inferiores a las de éste, a consecuencia de la difracción. El sonido «dobla fácilmente las esquinas»; no así la luz. La diferencia estriba en la enorme diferencia en las longitudes de onda del sonido ($\lambda \sim 1 \text{ m}$) y de la luz visible ($\lambda \sim 10^{-7} \text{ m}$). Sin embargo, como estamos viendo en esta sección, los efectos de difracción pueden llegar a ser importantes si las dimensiones del objeto son del orden de la longitud de onda de la luz incidente. Así, por ejemplo, las microondas, cuya gama de longitudes de onda se sitúa entre los centímetros, presentarán importantes efectos de difracción sobre obstáculos de esa dimensión, mientras que la luz visible «se verá» por detrás de un objeto con dimensiones del orden de la micra ($1 \text{ } \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$). Veremos más adelante que la difracción es responsable del límite de resolución de los detectores que utilizan luz visible.

7.5. Reflexión y refracción. Ley de Snell. Reflexión total. Difracción de la luz

Como las demás ondas, la luz al llegar a una superficie que separa dos medios en parte se refleja y en parte se transmite al segundo medio. Comencemos estudiando las características de la onda reflejada. Consideramos un rayo incidente sobre una superficie especular —que actúa como espejo, es decir, que es completamente reflectante— tal como se representa en la Figura 7.17, en la que aparece también dibujada la sencilla ley que relaciona la dirección de los rayos incidente y reflejado. Como vemos en la figura, el ángulo de incidencia ϕ_i , que es el que forma el rayo con la normal a la superficie, es igual al reflejado ϕ_r ,

$$\phi_i = \phi_r \quad [15]$$

Esta propiedad se conoce como la ley de la reflexión. Como ya vimos al tratar las ondas en una cuerda, la reflexión produce un cambio de sentido en la amplitud en la onda reflejada, lo que también es cierto para la luz —la am-

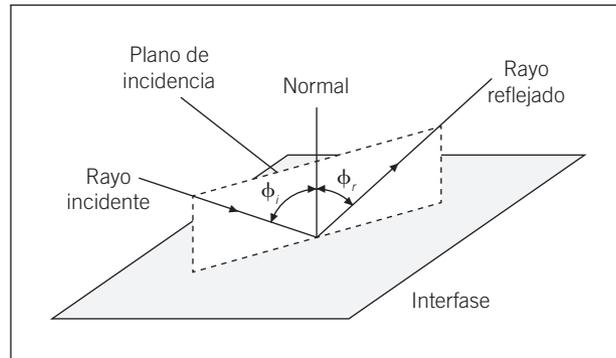


Figura 7.17. Ángulos incidente y reflejado.

plitud de los campos eléctrico y magnético que oscilan se invierte tras dejar la pared en la que se han reflejado.

La ley de la reflexión se puede demostrar acudiendo al principio de Huygens. Si consideramos que los rayos en la última figura representan la dirección de ondas planas, como al llegar éstas a una superficie especular su amplitud se invierte, un punto del frente de onda que llega a la pared reflectante se transforma en un emisor de ondas esféricas, tal como se representa en la Figura 7.18. El ángulo ϕ_i que forman los rayos perpendiculares a esos frentes con la vertical es el ángulo de incidencia. Veamos que el que forman los rayos reflejados ϕ_r es igual a aquél. Para ello, analicemos con más detalle lo que sucede cerca de las paredes (Fig. 7.19). El punto P del frente AA' tarda un tiempo t en llegar hasta la superficie de reflexión. En el mismo tiempo, la onda procedente del punto A habrá alcanzado el punto B' . El frente reflejado BB' forma un ángulo α_r con la horizontal, que coincide con el de reflexión ϕ_r . Los triángulos ABA' y BAB' tienen en común la hipotenusa y uno de los catetos iguales $AB' = BA' = ct$. Estos triángulos son, pues, semejantes, lo que implica que los ángulos que forman con la horizontal son iguales, $\alpha_i = \alpha_r$, y, por tanto, se cumple la igualdad entre los ángulos de incidencia y de reflexión $\phi_i = \phi_r$, quedando así demostrada la ley de la reflexión.

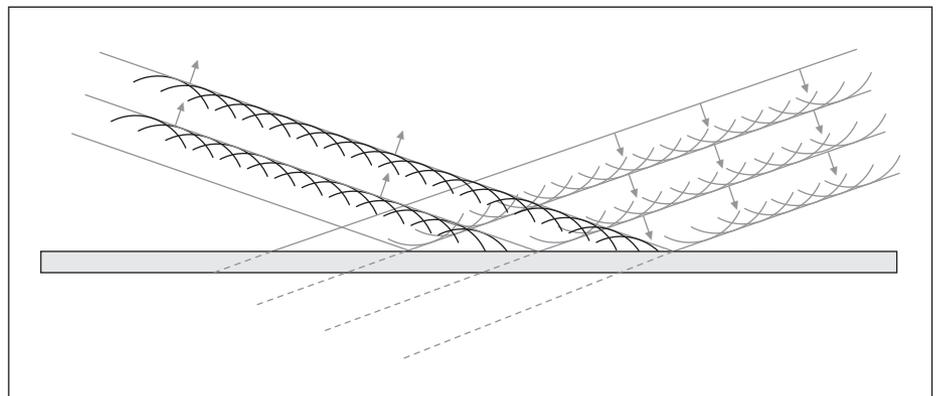


Figura 7.18. Frentes de ondas planas reflejándose.

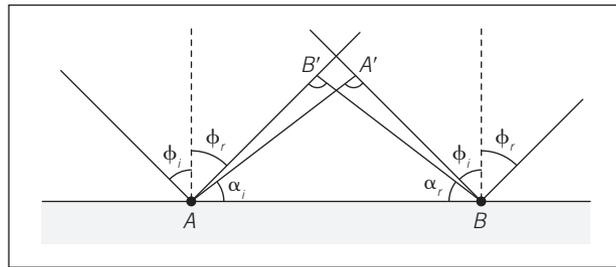


Figura 7.19. Esquema de la reflexión.

Nos ocupamos ahora de la onda que se transmite de un medio de índice de refracción n_1 a otro con n_2 . Se representa a continuación la situación para $n_1 < n_2$ (Fig. 7.20), donde se ve que un rayo proveniente del primer medio se acerca a la vertical al pasar al segundo, lo cual se conoce con el nombre de *refracción*. A los ángulos que forman los rayos incidente y refractado con la vertical se les conoce con el nombre de ángulo de incidencia ϕ_i y de refracción ϕ_r , respectivamente. Este fenómeno, y la ley que de él se deduce, se puede obtener con un razonamiento similar pero algo más complicado que el que vimos para la reflexión.

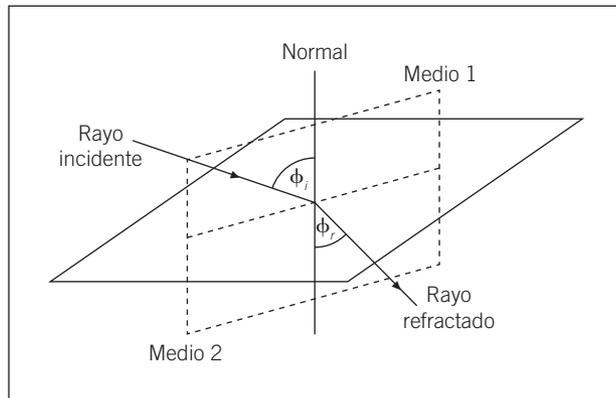


Figura 7.20. Ángulos de incidencia y de refracción.

Consideremos en la Figura 7.21 el frente AA' y apliquemos el principio de Huygens a los puntos de ese frente. El punto A' en ese frente tarda un tiempo t hasta situarse en B , a una distancia $c_1 t$ en la interfaz entre los dos medios; en ese mismo tiempo, la onda emitida por A alcanza un punto B' a una distancia $c_2 t$. De nuevo, por construcción, los ángulos que forman los frentes con la horizontal y los que forman los rayos con la vertical coinciden ($\alpha_i = \phi_i$, $\alpha_r = \phi_r$). Los triángulos ABA' y $AB'B$ comparten hipotenusa AB de modo que

$$\text{sen } \alpha_i = \text{sen } \phi_i = \frac{c_1 t}{AB} \quad \text{sen } \alpha_r = \text{sen } \phi_r = \frac{c_2 t}{AB} \quad [16]$$

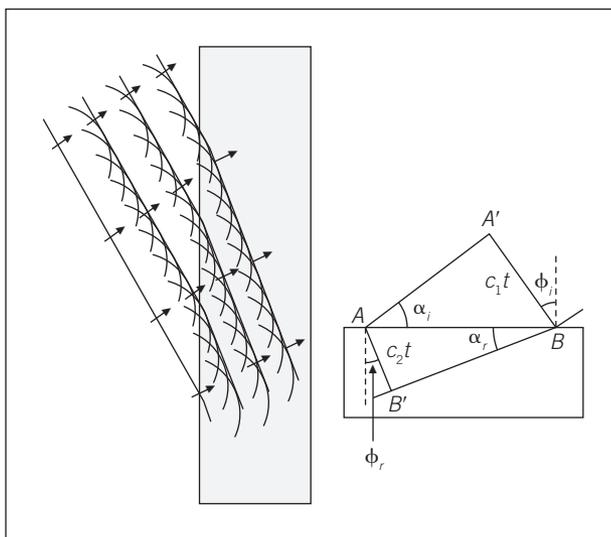


Figura 7.21. Frentes de onda refractados.

y dividiendo estas expresiones y usando la definición de índice de refracción n obtenemos

$$\frac{\text{sen } \phi_i}{\text{sen } \phi_r} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1/c}{c_2/c} = \frac{1/n_1}{1/n_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad [17]$$

o, en forma más compacta:

$$n_1 \text{ sen } \phi_i = n_2 \text{ sen } \phi_r \quad [18]$$

que se conoce como *ley de Snell* de la refracción. De ella se deduce que si $n_1 < n_2$, se tiene $\phi_i > \phi_r$, es decir, el rayo se acerca a la vertical al pasar de un medio a otro; por el contrario, cuando pasa de un medio con mayor índice de refracción a otro con menor índice, se separa de la vertical.

Antes de ver las múltiples aplicaciones de esta ley, haremos algunos ejemplos.

Ejemplo 7.8.

Sobre la superficie de un vaso con agua (índice de refracción, $n_a = 1,33$) se hace incidir un haz muy fino de luz a 45° . Calcúlese con qué ángulo respecto a la vertical se observa el rayo en el interior del líquido.

Se trata simplemente de encontrar el ángulo de refracción aplicando la ley de Snell

$$\text{sen } \phi_r = \frac{n}{n_a} \text{ sen } \phi_i = \frac{1}{1,33} \text{ sen } 45 = \frac{\sqrt{2}/2}{1,33} = 0,53 \Rightarrow \phi_r = 32,1^\circ$$

es decir, el haz se «dobla» de 45° a $32,1^\circ$.

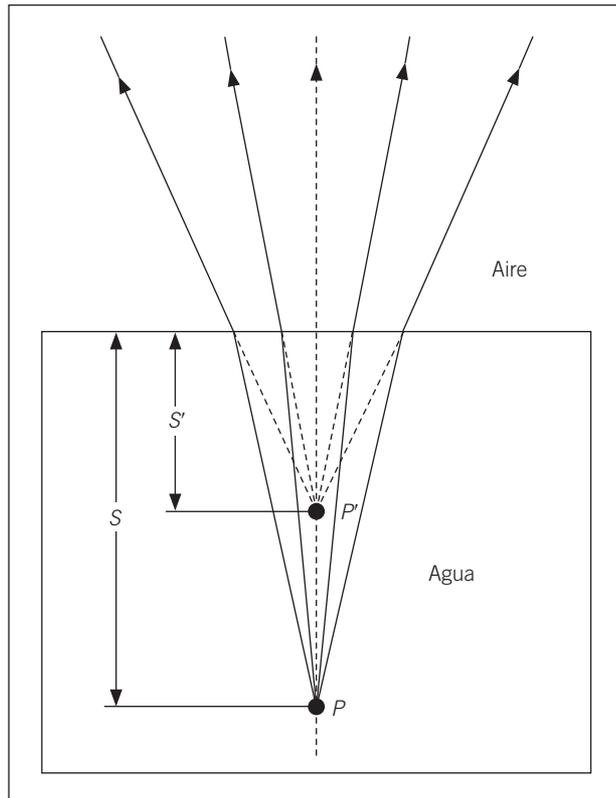


Figura 7.22. Efecto óptico causado por la refracción.

Si miramos un objeto inmerso en un líquido por encima de la superficie de éste se observa una imagen «aparente» en la que la verdadera orientación y profundidad aparece cambiada, tal como se representa en la Figura 7.22. Podemos hacer la prueba con la pajita que se usa para aspirar refrescos. Si la observamos desde arriba, nos da la impresión de que se «dobla» al entrar en el líquido. Sin embargo, si la observamos lateralmente, veremos que hay otro tipo de distorsión, debido al vidrio y la superficie del líquido, pero la pajita presenta el mismo ángulo dentro y fuera del líquido.

Veamos ahora un par de ejemplos que ilustran este fenómeno.

Ejemplo 7.9.

Al situar una pajita en el interior de un vaso con un líquido transparente observamos por encima de la superficie que la pajita se «dobla». Explíquese este efecto.

La pajita forma el mismo ángulo respecto a la vertical, tanto en el aire como en el líquido. Sin embargo, desde fuera del líquido apreciamos una «imagen aparente», que es la que resulta de prolongar los rayos que llegan

refractados al aire procedentes del objeto inmerso en el líquido, como si no sufriesen refracción al entrar o salir del líquido. De este modo, puesto que la refracción desde el líquido al aire aleja los rayos de la vertical, la imagen en el líquido presenta un ángulo respecto a la vertical que es mayor al que en realidad existe. En concreto, la relación entre el ángulo «virtual», el ángulo de incidencia, y el real de la pajita de este problema viene dado por la ley de Snell

$$\text{sen } \phi_{\text{virtual}} = \frac{n_{\text{líquido}}}{n_{\text{aire}}} \text{sen } \phi_{\text{real}}$$

y, puesto que $n_{\text{líquido}} > n_{\text{aire}}$, se aprecia $\phi_{\text{virtual}} > \phi_{\text{real}}$.

Ejemplo 7.10.

¿A qué profundidad y con qué ángulo se «percibirá» al pez que se representa en la Figura 7.23 si nada a 1 m de profundidad?

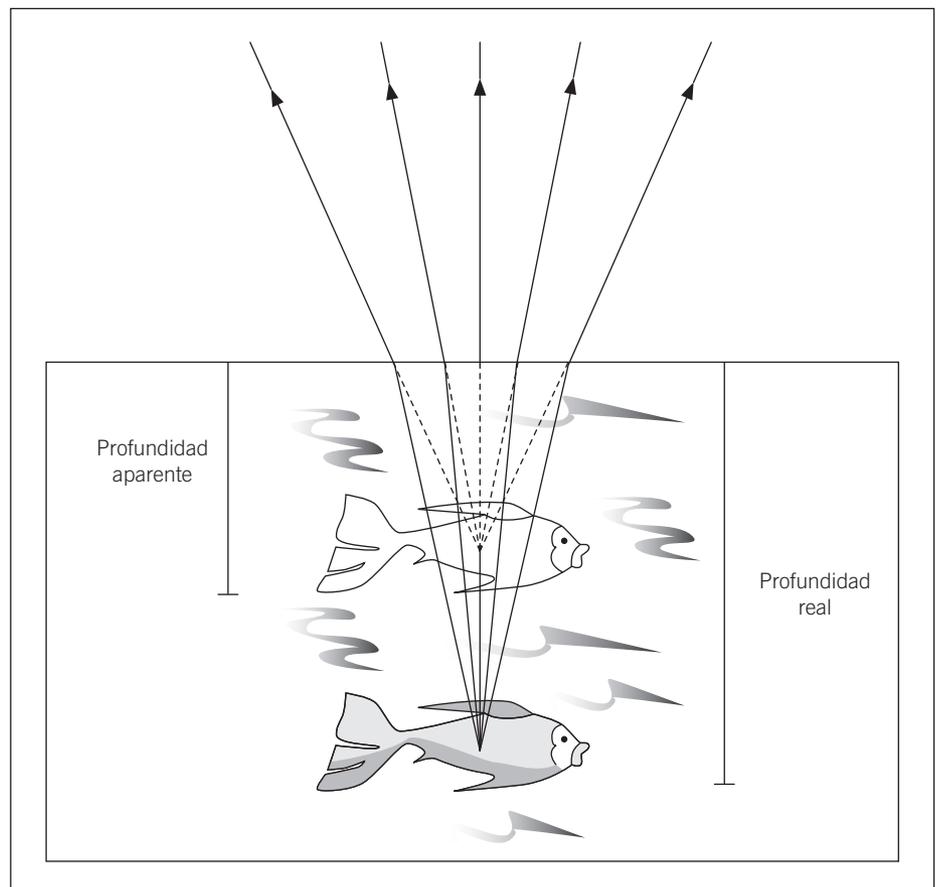


Figura 7.23.

Desde fuera del agua se percibe la imagen virtual, que es la que correspondería a prolongar los rayos que le llegan desde el aire al medio con mayor índice de refracción, tal como se puede ver en el diagrama precedente. Aplicando la ley de Snell, resulta simplemente

$$\begin{aligned} \text{sen } \phi_{\text{vir}} = \text{sen } \phi_1 &= \frac{n_2}{n_1} \text{sen } \phi_1 = \frac{1,33}{1} \text{sen } 30^\circ = 1,33 \times \frac{1}{2} = 0,66 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi_{\text{vir}} = 41,68^\circ \end{aligned}$$

De este modo la altura a la que la gaviota «percibe» al pez a una profundidad h_{vir} es

$$h_{\text{vir}} = h \text{sen } \phi_{\text{vir}} = h \frac{n_2}{n_1} \text{sen } \phi_2 = 1 \text{ m} \times 1,33 \times \frac{1}{2} = 0,67 \text{ m}$$

Hasta aquí hemos considerado casos en los que la luz pasa de un medio con menor a otro con mayor índice de refracción. Pero la situación contraria también es posible, y la refracción, en este caso, hace que el rayo de luz se aleje de la vertical.

Pero en esta nueva situación se da un fenómeno muy interesante y de importantes aplicaciones: *la reflexión total*. En efecto, como representamos en la Figura 7.24, los rayos refractados se van acercando hacia la horizontal, y hay un ángulo de incidencia a partir del cual no se produce refracción, sino que el rayo es completamente reflejado. Al ángulo a partir del cual se da la reflexión total se denomina *ángulo límite*. Este ángulo se calcula fácilmente a partir de la ley de Snell

$$n_1 \text{sen } \phi_i = n_2 \text{sen } \phi_r \tag{19}$$

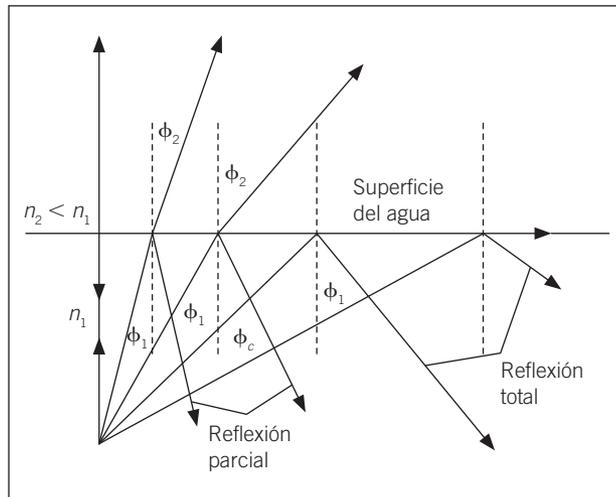


Figura 7.24.

donde ahora $n_1 > n_2$, y como el seno de un ángulo no puede ser superior a 1 el límite para la refracción, es decir, el ángulo límite, queda determinado por la relación

$$\text{sen } \phi_l = \frac{n_2}{n_1} \quad (n_1 > n_2) \quad [20]$$

que aplicamos al ejemplo siguiente.

Ejemplo 7.11.

Hállense los ángulos límite de la interfaz del aire: a) con agua ($n_a = 1,33$), b) con el diamante ($n_d = 2,4$). c) ¿Cómo cambia el ángulo límite al introducir el diamante en agua?

a) Aplicando la última ecuación [20] se obtiene

$$\text{sen } \phi_l (\text{aire} - \text{agua}) = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{1}{1,33} = 0,75 \Rightarrow \phi_l (\text{agua}) = 48,75^\circ$$

b) De manera totalmente similar se tiene para el diamante

$$\text{sen } \phi_l (\text{aire} - \text{diam}) = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{diam}}} = \frac{1}{2,4} = 0,42 \Rightarrow \phi_l (\text{diam}) = 24,6^\circ$$

De los resultados se desprende que el ángulo límite es bastante pequeño para el diamante –la mitad que el del agua–, lo cual es responsable de los destellos que se pueden observar en diamantes tallados de manera conveniente.

c) Este caso se resuelve de nuevo aplicando la relación general para el ángulo límite

$$\text{sen } \phi_l (\text{agua-diam}) = \frac{n_a}{n_d} = \frac{1,33}{2,4} = 0,554 \Rightarrow \phi_l (\text{agua-diam}) = 33,6^\circ$$

Ejemplo 7.12.

Se sitúa un objeto luminoso en el centro y en el fondo de una alberca de 1 m de profundidad. A consecuencia de la reflexión total habrá zonas de la alberca a las que no llegará la luz del fondo. Hállense el radio del círculo de la superficie que queda iluminado por el objeto del fondo.

En la Figura 7.25 se puede comprobar que el ángulo límite ϕ_l coincide con el que forma el límite de la zona iluminada α . El radio R de la zona iluminada viene dado por la relación

$$R = h \text{ tg } \alpha = h \text{ tg } \phi_l$$

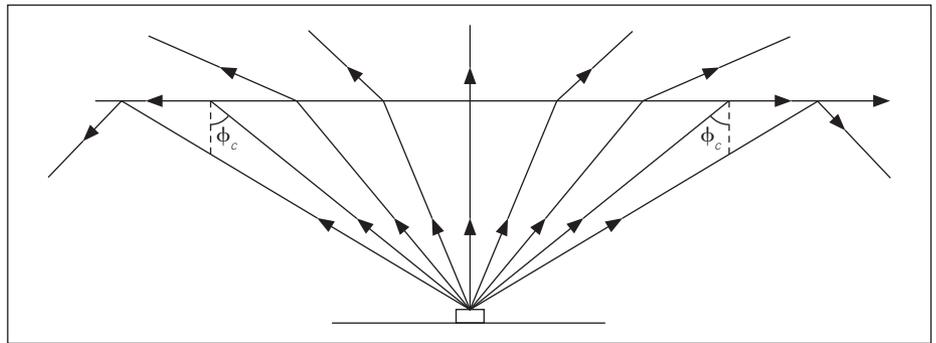


Figura 7.25.

y el ángulo límite ϕ_l lo hemos calculado y usado ya en ejemplos precedentes, $\phi_l = 48,75^\circ$ de modo que

$$R = h \operatorname{tg} \phi_l = 1 \text{ m} \times \operatorname{tg} 48,75^\circ = 1,14 \text{ m}$$

Así pues, se verá la luz saliendo del fondo de la piscina en un radio $R = 1,14 \text{ m}$.

Los efectos de reflexión total, donde no se da pérdida de intensidad, se usan también en prismas de vidrio para conseguir imágenes derechas en prismáticos y tener una imagen reducida del campo de la lente de una cámara fotográfica reflex, como se verá en la sección dedicada a los instrumentos ópticos. Veamos en la Figura 7.26 el uso de los prismas para conseguir los efectos de reflexión.

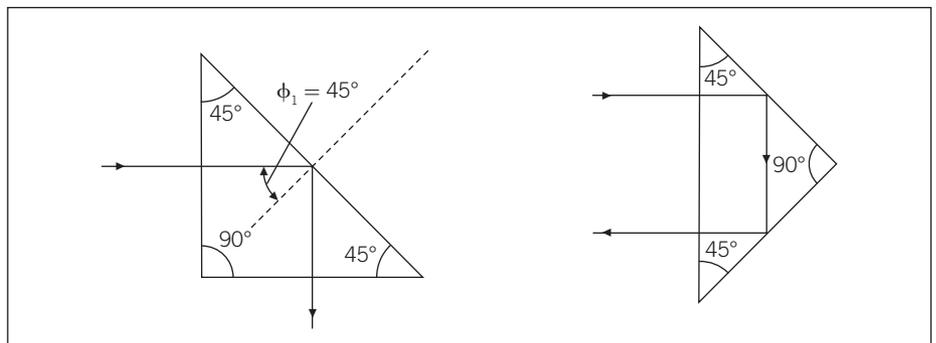


Figura 7.26. En un prisma se puede producir reflexión total.

La reflexión total es también el fundamento del uso de las fibras ópticas, compuestas de un material plástico, flexible y de alto índice de refracción, de modo que la luz que entra por uno de sus extremos se refleja sobre las paredes de la fibra y sale por el otro extremo, a pesar de que la fibra no siga una línea recta. Actualmente las fibras ópticas se usan en sistemas de comunicación, donde las señales eléctricas se transforman en señales ópticas (láser) que viajan a la velocidad de la luz, sin gran atenuación. Al llegar al otro extremo de la línea, la señal luminosa vuelve a ser transformada en señal eléctrica que llega

al receptor. Este sistema se usa ya en telefonía y en las redes de comunicación para ordenadores, pues los plásticos de las fibras son más resistentes a la corrosión que los metales, las señales viajan a mayor velocidad y los dispositivos optoelectrónicos –combinan la óptica y la electrónica– que producen y captan las señales transmitidas pueden trabajar en una amplia gama de frecuencias, y con muchas señales viajando por la misma línea (véase Fig. 7.27).

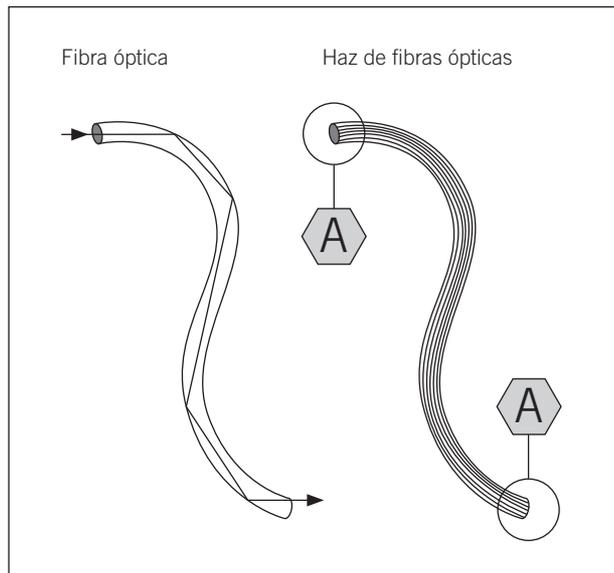


Figura 7.27. Imágenes transmitidas a través de fibra óptica.

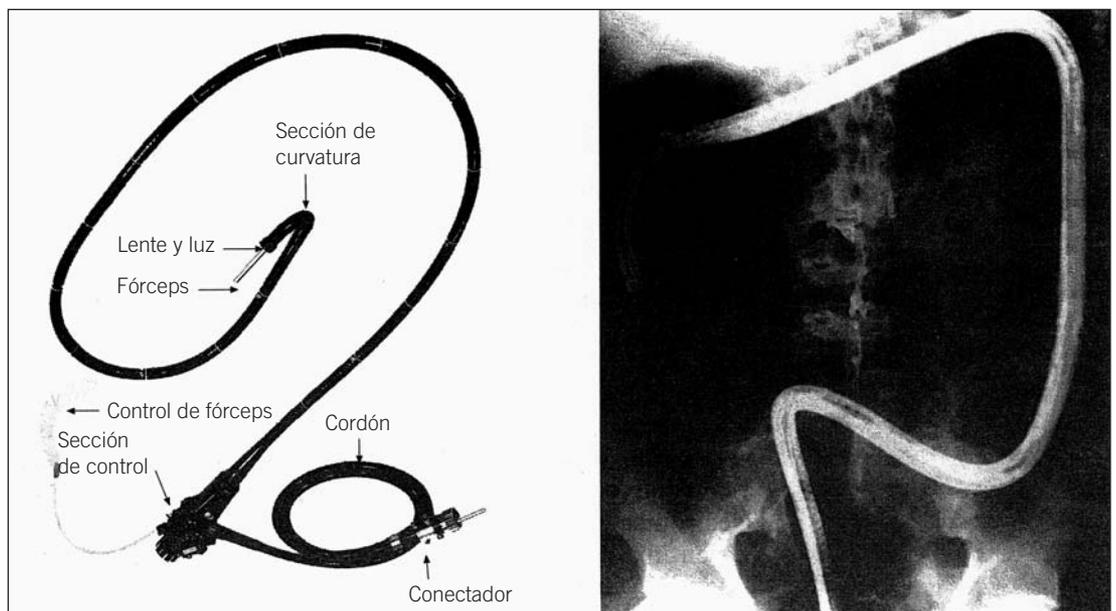


Figura 7.28. Endoscopia con fibra óptica.

Las aplicaciones médicas de las fibras ópticas van en aumento, sobre todo en los aparatos de endoscopia, que sirven para hacer exploraciones con un cable que lleva incorporadas algunas fibras para iluminar la zona a examinar, y otras que recogen la imagen. Hay fibras ópticas que pueden transmitir señales de potencia, haciendo posible aplicar haces láser directamente en zonas donde no se puede acceder sin intervención quirúrgica, lo cual ha permitido el desarrollo de una cirugía no invasiva que ha reducido espectacularmente el grado de dificultad de muchas intervenciones y el tiempo de recuperación tras las mismas.

Ejemplo 7.13.

Una fibra óptica, como la representada en la Figura 7.29, se halla recubierta por un material muy flexible con índice de refracción $n_i = 1,5$ y se halla rodeada de agua ($n_a = 1,33$). Calcúlese cuál es el máximo ángulo de los rayos que, tras incidir sobre la cara A, puede ser transmitido por reflexión total a través de la fibra.

Lo primero que hemos de hacer es calcular el ángulo límite ϕ_l de la interfaz fibra-agua

$$\text{sen } \phi_l = \frac{n_a}{n_f} = \frac{1,33}{1,5} = 0,89 \Rightarrow \alpha_l = 62,45^\circ$$

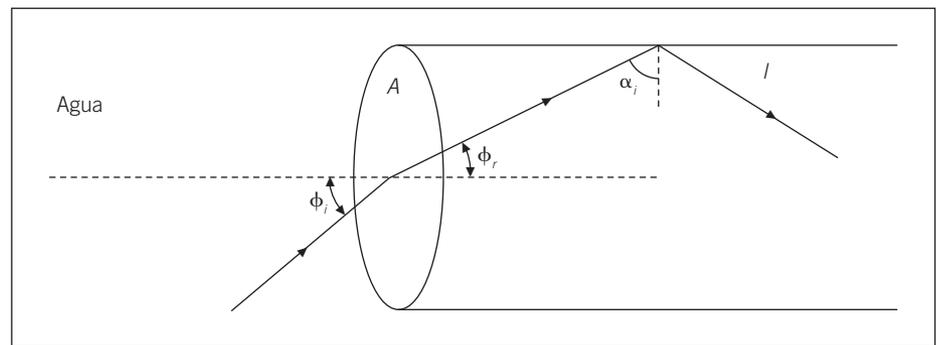


Figura 7.29. Reflexión total en fibra óptica.

Observemos que el ángulo de refracción ϕ_r desde la cara A y el de incidencia α_i sobre la cara interna I son complementarios

$$\phi_r = \frac{\pi}{2} - \alpha_i$$

y como α_i no debe ser menor que el ángulo límite, esto se traduce en que el ángulo refractado sólo queda atrapado en la fibra si cumple $\phi_r \leq 90 - 62,45 = 27,55^\circ$. Esa condición se cumple para ángulos de incidencia sobre la cara que cumplan

$$\text{sen } \phi_i = \frac{n_f}{n_a} \text{sen } \phi_r \leq \frac{1,5}{1,33} \text{sen } 27,55^\circ = 0,43 \Rightarrow \phi_i = 31,44^\circ$$

es decir, sólo permanecerán en la fibra los rayos procedentes de un cono de luz formando un ángulo con la vertical de $31,44^\circ$.

7.6. Dispersión de la luz. Interferencias en películas delgadas

Hasta ahora hemos supuesto siempre que el índice de refracción es una constante del medio. Sin embargo, en la mayoría de los medios, éste depende de la longitud de onda, tal como se recoge en la gráfica siguiente correspondiente a algunos vidrios especiales.

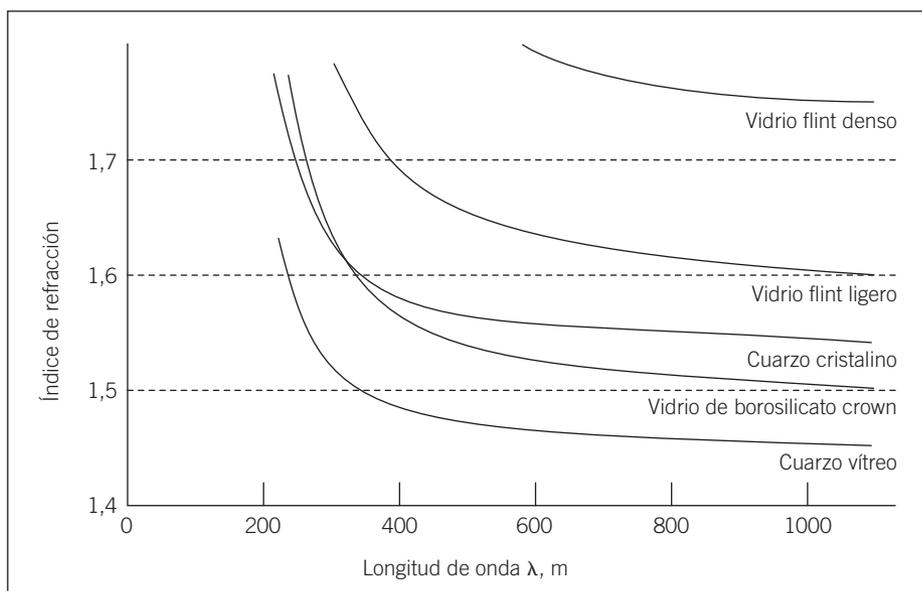


Figura 7.30. Variación de los índices de refracción con la longitud de onda en algunos vidrios.

Este hecho trae como consecuencia, teniendo en cuenta la ley de Snell, que los haces con distinto color no tendrán el mismo ángulo de refracción,

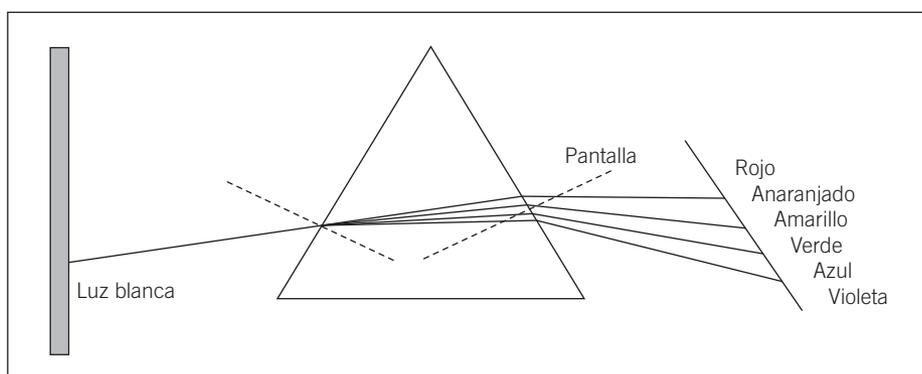


Figura 7.31. Dispersión de la luz por un prisma.

aunque incidan con el mismo ángulo. Este hecho es el que se emplea para obtener la *dispersión de la luz* compuesta por distintos colores —como en el caso de la luz blanca— que se representa en la Figura 7.31. Nótese que la dispersión mediante un prisma se verifica en las dos caras sobre las que incide la luz, lo que da lugar a una amplificación del fenómeno, que se puede ver fácilmente en el laboratorio.

Ilustremos el fenómeno de la dispersión con un ejemplo.

Ejemplo 7.14.

El índice de refracción de cierto tipo de vidrio especial varía para la luz visible entre $n_v(400\text{ nm}) = 1,66$ y $n_v(700\text{ nm}) = 1,62$. Se envía un haz de luz blanca con un ángulo de 20° respecto a la vertical. Calcúlese entre qué ángulos se hallarán los distintos colores en que la luz blanca se habrá dispersado.

Hemos de aplicar la ley de Snell, teniendo en cuenta los distintos valores del índice de refracción según los colores

$$\text{sen } \phi_r(\lambda) = \frac{n_1}{n_2(\lambda)} \text{sen } \phi_i$$

y aplicando los datos del enunciado

$$(\text{luz violeta}) \text{ sen } \phi_r(400\text{ nm}) = \frac{1}{1,66} \text{sen } 20^\circ = 0,20 \Rightarrow \phi_r)_{\text{mín}} = 11,9^\circ$$

$$(\text{luz roja}) \text{ sen } \phi_r(700\text{ nm}) = \frac{1}{1,62} \text{sen } 20^\circ = 0,21 \Rightarrow \phi_r)_{\text{máx}} = 12,2^\circ$$

La luz roja se acerca menos que la violeta a la horizontal. La diferencia es de tan sólo $0,3^\circ = 20'$, pero se puede detectar.

Otro fenómeno interesante relacionado con la variación del índice de refracción con la densidad del medio son las distorsiones que se pueden apreciar en los días muy cálidos en una gran superficie lisa —una carretera o una llanura, por ejemplo—. En efecto, como el índice de refracción depende de la densidad del aire y ésta cambia con la temperatura, en días cálidos los rayos procedentes de un objeto se curvan, tal como muestra la Figura 7.32, que explica los efectos de reflexión que se observan en extensiones abiertas en días muy cálidos. (También en parte explica los espejismos que se pueden ver en el desierto por el reflejo del cielo azul.)

Relacionado con la interferencia y la dispersión se encuentra el fenómeno de la *interferencia en láminas delgadas* (llamamos aquí delgadas a aquellas láminas que tienen un espesor menor que la longitud de onda de la luz). A todos resultan familiares los colores iridiscentes que se observan en una pompa de jabón, o en manchas de aceite o petróleo flotando en agua. También aparecen en el plumaje de ciertas aves, en las escamas de los peces, etc.

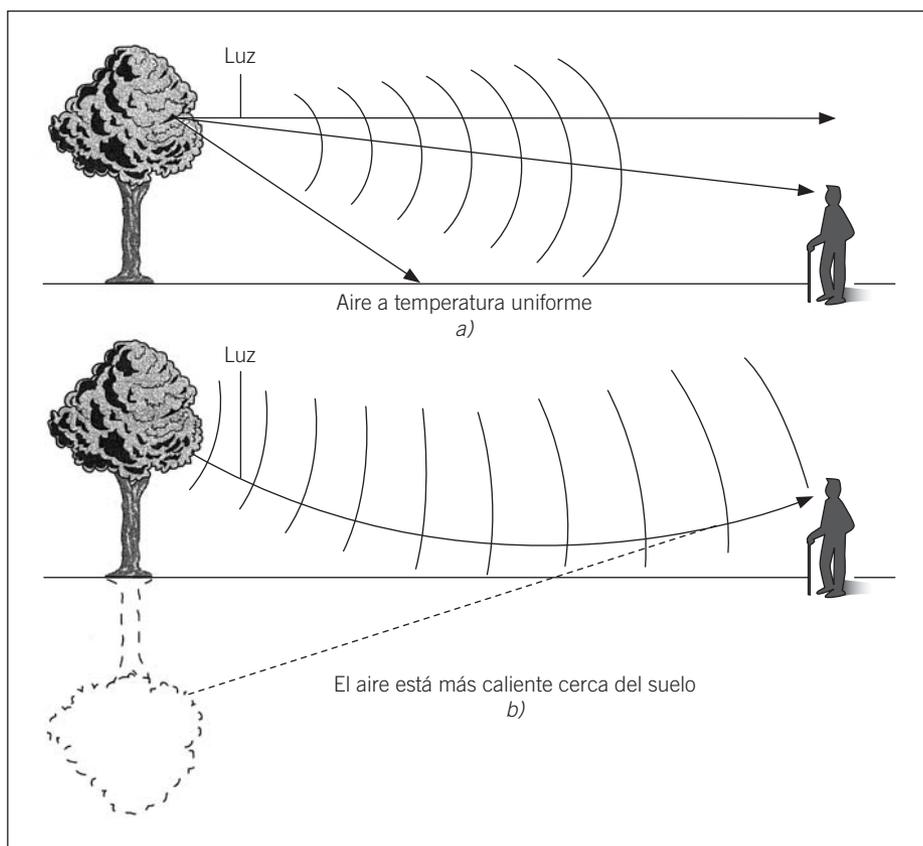


Figura 7.32. Efectos de espejismo al variar el índice de refracción del aire caliente.

Para explicar ese fenómeno y sus importantes aplicaciones prácticas se han de comentar algunos efectos de la reflexión con más detalle. La reflexión depende de la diferencia entre los índices de refracción de los medios en cuya interfaz se produce. Lo primero que debemos recoger es que la amplitud de una onda que incide perpendicularmente a una superficie de separación entre dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 , respectivamente, se ve reflejada en la siguiente proporción:

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

siendo E_r la amplitud reflejada y E_0 la incidente. Así, si la luz llega desde un medio con menor índice a otro con mayor índice de refracción —por ejemplo, del aire al agua— ($n_1 < n_2$), la onda reflejada sufre un cambio de fase de π rad (cambia de signo). Por el contrario, cuando la reflexión tiene lugar sobre la interfaz del medio con mayor índice de refracción —por ejemplo, en el caso del prisma dibujado en la Figura 7.31—, la onda reflejada no sufre cambio de fase. Este mismo fenómeno tiene lugar cuando se estudian las ondas sobre una cuerda, cuando ésta está compuesta por dos trozos, uno con menor y otro con mayor densidad lineal de masa. Las ondas, al llegar a

la separación entre los trozos con densidad distinta, en parte se reflejan y en parte se transmiten. Pues bien, la onda reflejada, cuando la onda incidente va desde el trozo menos denso hasta el más denso, vuelve en oposición de fase (cambio en π rad); por el contrario, cuando una onda incide desde el trozo más denso hasta el menos denso, la reflejada vuelve sobre el trozo más denso sin cambio de fase.

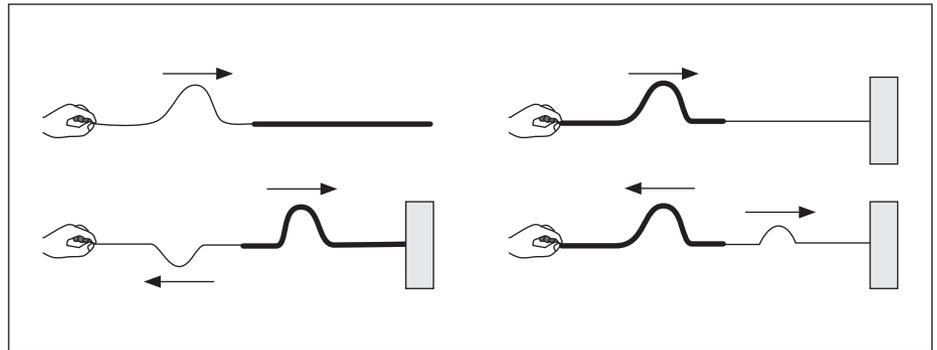


Figura 7.33. Onda reflejada en dos trozos de cuerda con densidad de masa distinta.

Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, podemos deducir cuál será la proporción de luz que, incidiendo perpendicularmente a una superficie, es reflejada

$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \quad [22]$$

donde I_0 es la intensidad de la onda incidente e I_r es la reflejada. Nótese que, a diferencia de la amplitud, la intensidad reflejada en esas condiciones no presenta diferencia si la luz incide del medio 1 al 2, o viceversa. (Como la mayor parte de detectores de luz –entre ellos nuestro ojo– captan intensidades y no amplitudes, la diferencia de fases no se advierte más que con dispositivos especiales.)

Ejemplo 7.15.

Hállese la proporción de intensidad que se refleja al incidir perpendicularmente luz proveniente del aire sobre a) agua ($n_a = 1,33$) y b) vidrio ($n_v = 1,5$).

a) Este ejercicio se resuelve simplemente aplicando [22]

$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{(1 - 1,33)^2}{(1 + 1,33)^2} = \frac{(-0,33)^2}{2,33^2} = 0,02 = 2 \text{ por } 100$$

b) Análogamente, para el vidrio

$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{(1 - 1,5)^2}{(1 + 1,5)^2} = \frac{(-0,5)^2}{2,5^2} = 0,04 = 4 \text{ por } 100$$

Los valores típicos de la proporción de luz reflejada para materiales transparentes está entre el 1 y el 5 por 100.

Estudiemos, pues, qué sucede en el caso de la luz que atraviesa una película jabonosa, tal como se muestra en la Figura 7.34. Si el espesor de la película d es mucho menor que la longitud de onda de la luz incidente ($d \ll \lambda$), los rayos reflejados en la primera interfaz, y el que, tras ser refractado, es reflejado por la segunda prácticamente han recorrido el mismo espacio, pero se hallan desfasados en π rad, interfiriendo destructivamente. A consecuencia de esto, las películas muy delgadas en aire aparecen completamente oscuras. Sin embargo, en las zonas en que la película tiene un mayor grosor —por defecto de la gravedad, por ejemplo— no siempre la interferencia será destructiva. Supongamos que la película tiene un espesor que es exactamente $d = \lambda/4$. Para ángulos grandes, la luz tiene que hacer un recorrido de $2d = \lambda/2$ en el interior de la película. Esto supone que el rayo que surge de la segunda reflexión está desfasado en $\lambda/2$ —lo que equivale a π rad—, debido a la diferencia de camino óptico; pero el rayo que es reflejado por la primera cara también está desfasado en π rad, por la diferente naturaleza de la interfaz de reflexión, de manera que, para ese espesor, ambos rayos están en fase y, por tanto, producen interferencia constructiva.

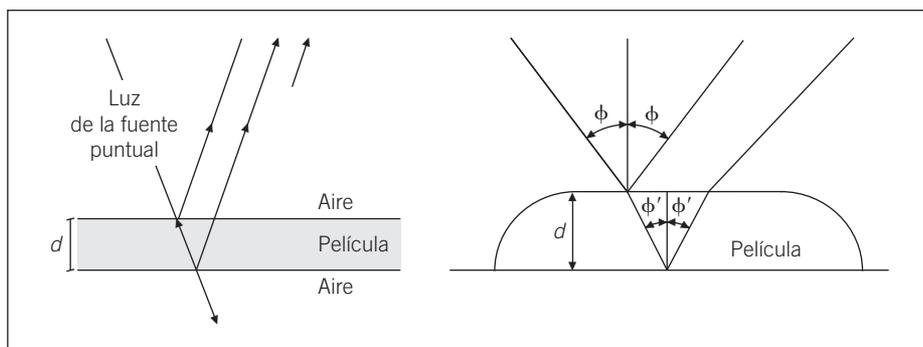


Figura 7.34. Reflexión de una película jabonosa y de un líquido sobre un sustrato.

Pero, como se ha comentado en este mismo apartado, el índice de refracción cambia con la longitud de onda en muchos medios, de manera que la interferencia constructiva o destructiva dará lugar a una gama de colores en una película con un espesor variable, lo cual explica la gama de colores que se aprecia en las pompas jabonosas. Precisamente por la presencia de un medio con índice de refracción, la condición de interferencia constructiva será $d = \lambda/4n$, como comentamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.16.

Se hace incidir un haz de un láser con $\lambda = 683$ nm perpendicularmente a la superficie de una película de agua jabonosa ($n = 1,33$) y se obtiene reflexión

máxima (interferencia constructiva). a) Calcúlese el espesor de la película jabonosa. b) Si en lugar del haz láser se usa luz blanca, ¿de qué color será la luz que resulte de la reflexión máxima?

a) Se dará una interferencia constructiva si la diferencia de camino óptico es $\lambda'/2$, pues en ese caso los rayos reflejados en ambas caras de la película estarán en fase. Con λ' indicamos la longitud de onda de la luz en la película, que habrá disminuido respecto a la λ incidente en un factor $1/n$. Como la diferencia de camino óptico corresponde a dos veces el espesor, se ha de cumplir

$$\frac{\lambda}{2n_2} = 2d \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{6,83 \times 10^{-7} \text{ m}}{4 \times 1,33} = 1,3 \times 10^{-7} \text{ m} = 130 \text{ nm}$$

b) Por las condiciones del primer apartado resulta inmediato asegurar que esa película presentará interferencia constructiva en los colores cercanos al rojo. Por contra, será destructiva para $\lambda = 2d = 260 \text{ nm}$ (no visible), es decir, los colores violetas aparecerán poco intensos. Conviene comentar, sin embargo, que en condiciones normales la luz blanca incide en todas las direcciones y esto provoca un efecto de dispersión suplementario que da lugar a distintos colores en las distintas zonas de la película.

El fenómeno tiene características similares, pero no se obtienen los mismos resultados si la película en lugar de estar al aire por las dos caras se halla en contacto con un tercer medio —vidrio, por ejemplo— con mayor índice de refracción que los otros dos. En este caso, ambas reflexiones producen cambio de fase de π rad y el desfase entre ellas sólo es debido a la diferencia de camino óptico, de manera que cuando éste es un múltiplo impar de $\lambda/2$ se produce interferencia destructiva, mientras que si es un múltiplo de λ se da interferencia constructiva. Este hecho se usa para evitar los molestos reflejos —la intensidad reflejada con incidencia normal sobre vidrio es de alrededor de un 4 por 100— en lentes y objetivos de instrumentos ópticos, mediante *recubrimientos* de espesor calibrado de sustancias que tengan un índice de refracción inferior al del vidrio que recubren. Esto se consigue haciendo evaporar o depositando uniformemente la sustancia conveniente sobre vidrios de espesor perfectamente calibrado. (Por tratarse de películas finísimas, los recubrimientos de los objetivos de las cámaras fotográficas o de los microscopios no deben tocarse nunca directamente con los dedos, pues basta la más mínima cantidad de grasa para producir una mancha sobre el recubrimiento.) Veremos que es éste también el fundamento de un tipo de microscopio.

Ejemplo 7.17.

Para minimizar la reflexión sobre la superficie del objetivo de una cámara (hecho con un vidrio con $n_v = 1,50$), se recubre éste con una película de F_2Mg ($n_r = 1,38$). Determínese el espesor mínimo de recubrimiento que anulará

la reflexión a incidencia normal de luz situada en el centro del espectro visible $\lambda = 550 \text{ nm}$.

Se dan, en efecto, las condiciones que acabamos de comentar más arriba ($n_1 < n_2 < n_3$), de modo que los rayos reflejados por la primera y la segunda interfaz interferirán destructivamente si están desfasados por una semilongitud de onda, es decir, si su diferencia de camino óptico, que es dos veces el espesor, es $\lambda/2$, de lo que se deduce

$$d = \frac{\lambda}{4n_r} = \frac{5,5 \times 10^{-7} \text{ m}}{4 \times 1,38} = 1,00 \times 10^{-7} \text{ m} = 100 \text{ nm}$$

Algunos organismos de animales presentan sistemas de múltiples capas de pequeño espesor para aumentar la reflexión. Son de destacar el tapetum, una extraordinaria disposición de capas múltiples en el fondo del ojo de los gatos o de los ciervos, que sirve para amplificar, mediante reflexiones múltiples, el efecto de la débil luz nocturna a través de las células fotosensibles de la retina. Otros animales usan ese tipo de dispositivo como camuflaje, o como distintivo de la especie en el caso de ciertos pigmentos de las plumas de los pájaros o de las escamas de los peces. Recogemos en la Tabla 7.5 algunos de los más distinguidos ejemplos biológicos de sistemas reflectantes de múltiples capas.

Tabla 7.5. Funciones biológicas de reflectores multicapa

Uso general	Función específica	Animales
Visión (tapeta)	Duplicado del camino de la luz. Formación de imágenes.	Muchos vertebrados; arañas. Almejas; algunos crustáceos.
Camuflaje	Superficie reflectante. Imitación de granos de arena o del fondo blanco mediante pigmentos de la piel.	Ciertos peces y moluscos cefalópodos. Muchos peces y anfibios.
Imagen externa	Pluma de los pájaros. Colores superficiales. Fotóforos.	Patos. Peces tropicales. Ciertos peces y moluscos.
Filtros ópticos		Mariposas.

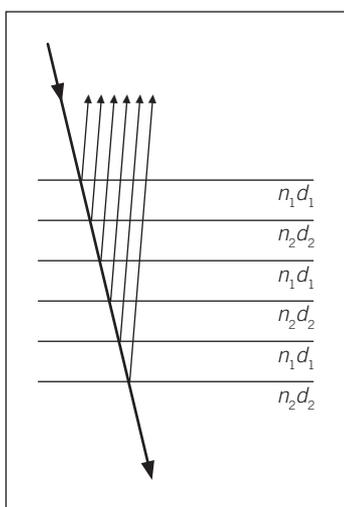


Figura 7.35. Esquema de la reflexión en múltiples capas.

La superficie de separación entre dos medios refleja entre un 1 y un 5 por 100 para incidencia perpendicular (véase la ecuación [22]). Sin embargo, si se dispone una pila de capas alternadas de dos materiales con distinto índice de refracción $n_{1,2}$ con espesores $d_{1,2}$ en la proporción adecuada (véase Figura 7.35)

$$n_1 d_1 = n_2 d_2 = \frac{\lambda}{4} \tag{23}$$

Se puede conseguir casi un 100 por 100 de reflexión (con incidencia perpendicular) con diez capas. Se encuentra esta disposición, cumpliendo aproximadamente esa proporción en las escamas y en los *tapeta* de los peces y en las escamas de las alas de las mariposas. La superficie de las escamas de un pez está compuesta por varias capas de cristales de guanina de unos $d_g = 100$ nm de espesor con índice de refracción $n_g = 1,83$, que se alternan con capas de unos $d_t = 135$ nm de un tejido con $n_t = 1,33$, por lo que vemos que prácticamente se cumple la relación recogida anteriormente

$$\begin{aligned} n_g d_g &= 1,83 \times 100 \text{ nm} = 183 \text{ nm} \\ n_t d_t &= 1,33 \times 135 \text{ nm} = 180 \text{ nm} \end{aligned} \quad [24]$$

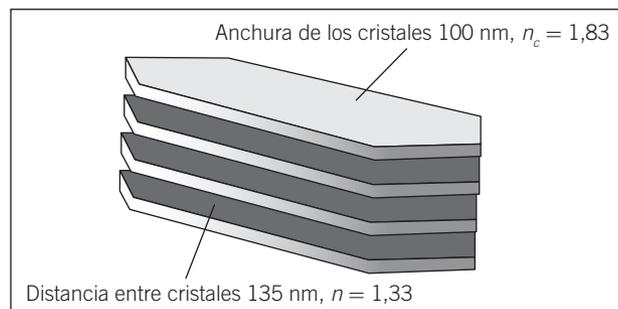


Figura 7.36. Estructura de los tapeta.

Por supuesto, estamos tratando sólo casos muy idealizados, pero que nos dan idea de ciertos mecanismos amplificadores y de camuflaje. Fijémonos también que, como la mayor parte de la luz no incide perpendicularmente a las superficies, los dispositivos multicapa darán lugar a importantes efectos de interferencia, que producirán la dispersión de la luz, con las correspondientes iridiscencias.

7.7. Polarización de la luz

En el caso de las ondas transversales en el espacio, el plano de vibración determina una dirección privilegiada, de modo que si la onda debe atravesar un obstáculo como el que aparece en la Figura 7.37, para el caso de una onda sobre una cuerda, sólo parte de la amplitud puede pasar el obstáculo. Ese obstáculo fuerza una dirección de vibración: se dice que la onda queda *polarizada* en esa dirección. La luz es una onda electromagnética, que se propaga en la dirección perpendicular a la de oscilación de los campos eléctrico y magnético —perpendiculares entre sí— que producen la perturbación. Se trata, pues, de una onda transversal para la que los efectos de polarización tienen gran importancia. En la Figura 7.38 se representa una onda plana en la cual el campo eléctrico E vibra en la dirección vertical. Por convenio se toma como dirección de polarización la que corresponde a la del campo E , de modo que la onda representada está *totalmente polarizada*

en la dirección vertical. Se toma como plano de polarización al que forma la dirección de propagación y la de vibración de E , que en el caso representado anteriormente resulta ser el plano xy .

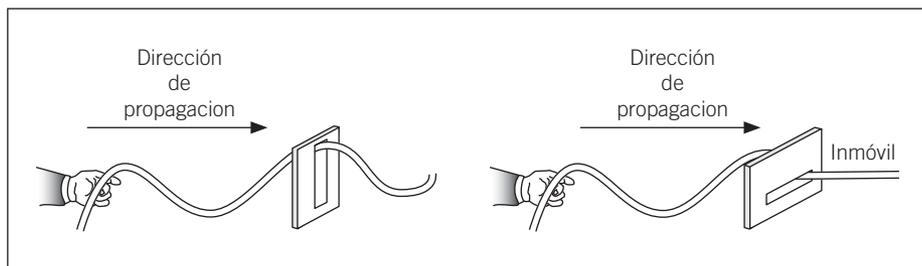


Figura 7.37. Cuerda pasando un obstáculo vertical: la oscilación queda polarizada.

Las ondas pueden estar *circularmente polarizadas*, si E mantiene su módulo, pero va cambiando su dirección de vibración circularmente con una frecuencia determinada. (Este caso nos lo podemos imaginar volviendo al símil de las ondas en una cuerda. Una onda circular en ella sería la debida a una perturbación producida en un extremo por un movimiento circular que daría lugar a un movimiento helicoidal de la perturbación.) Si en el cambio de dirección el módulo de E no se mantiene constante y además gira a frecuencia constante, se dice que la onda está *polarizada elípticamente*. La mayor parte de fuentes de luz emiten paquetes de onda que han sido emitidos por átomos o moléculas que actúan independientemente, de modo que la onda resultante no está polarizada. El filamento de una bombilla, por ejemplo, emite luz *no polarizada*.

Los dispositivos que consiguen imponer una dirección a la luz sin polarizar o parcialmente polarizada se denominan *polarizadores*. La acción polarizadora de algunos cristales, como el espato de Islandia, el cuarzo o la

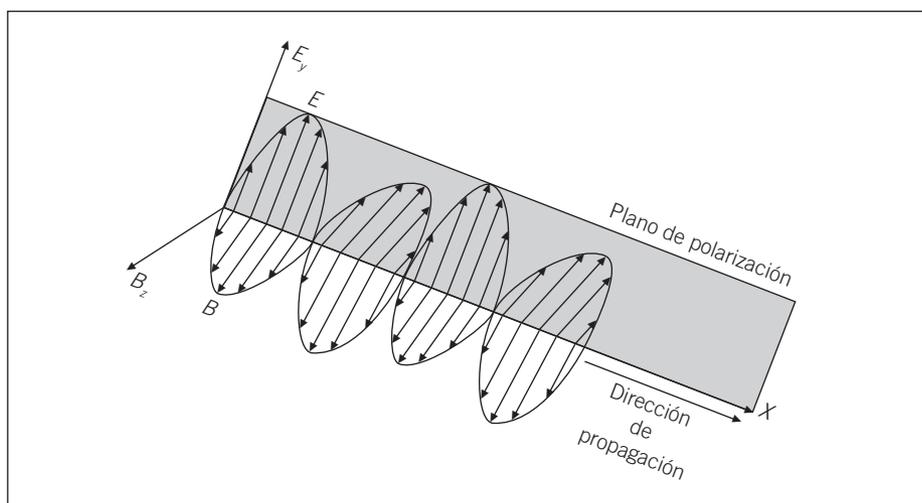


Figura 7.38. Oscilaciones del campo eléctrico y magnético en una onda electromagnética

turmalina, es conocida desde antiguo, pero más recientemente se han descubierto procedimientos para producir industrialmente filtros polarizadores, que se usan profusamente en distintos contextos. La mayor parte de éstos se consiguen a partir de hidrocarburos de cadena larga que se orientan durante el proceso de fabricación, de manera que dejan pasar el campo eléctrico en una dirección, pero conducen cuando éste llega en la dirección de orientación preferente de las moléculas (filtros Polaroid). De este modo se dispone de polarizadores que polarizan en una dirección bien calibrada, que corresponde al *eje de transmisión* y que sirven tanto para polarizar la luz como para medir la polarización de ésta. A continuación mostramos el esquema de un dispositivo polarizador indicando cómo el eje de transmisión del polarizador impone a la luz que lo atraviesa esa dirección de polarización.

Si se dispone entre una fuente luminosa de luz no polarizada y un detector, dos polarizadores, uno en posición fija —con el eje óptico en la vertical, por ejemplo— y el segundo con el eje formando un ángulo β respecto al primero, la amplitud que llegará al detector será

$$E_d = E_0 \cos \beta \tag{25}$$

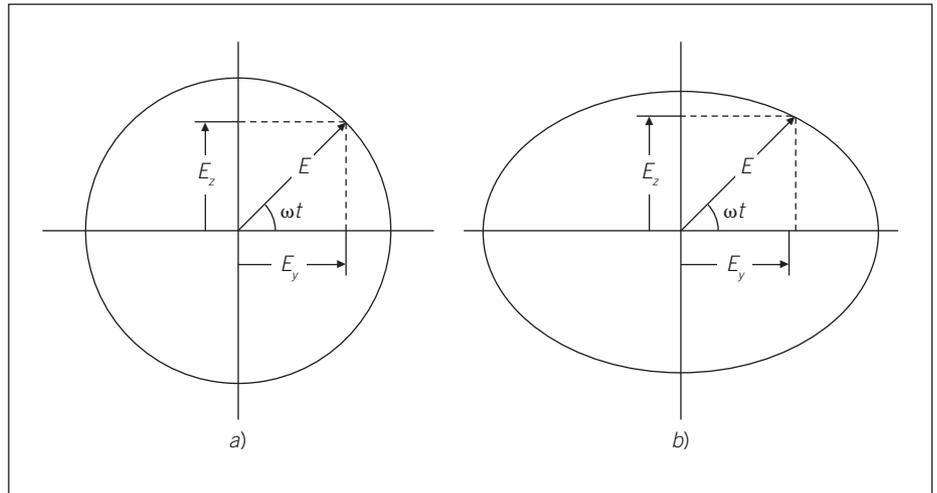


Figura 7.39. Polarización circular y elíptica.

pero la mayor parte de los detectores aprecian intensidades que son proporcionales al cuadrado de la amplitud. Se llega así a la *ley de Malus* para la intensidad de la luz entre dos polarizadores

$$I_d = I_0 \cos^2 \beta \tag{26}$$

Es fácil ver que cuando $\beta = \pi/2$, es decir, cuando los dos polarizadores se sitúan perpendicular uno al otro, no pasa luz.

Polarización por reflexión. Aparte de las sustancias Polaroid, existen otros métodos de producir polarización. La polarización se presenta en otros contextos y es captada por los sentidos de algunos animales, como co-

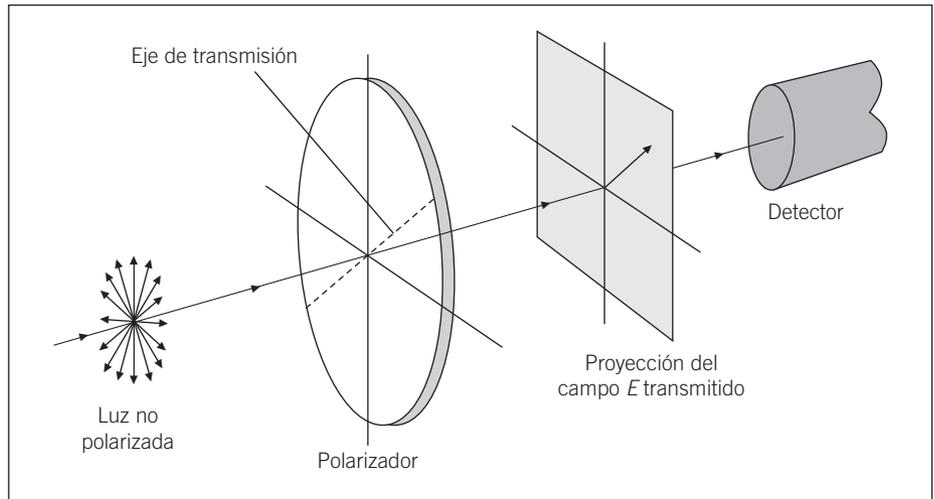


Figura 7.40. Dispositivo polarizador de la luz.

mentaremos más adelante. Se puede obtener polarización espontánea de la luz por reflexión, puesto que al llegar la luz no polarizada a una superficie reflectante, el haz que se refleja está preferentemente polarizado en la dirección de la superficie, mientras que el rayo refractado está parcialmente polarizado con preferencia en la dirección perpendicular a la superficie, tal como se representa en la Figura 7.41.

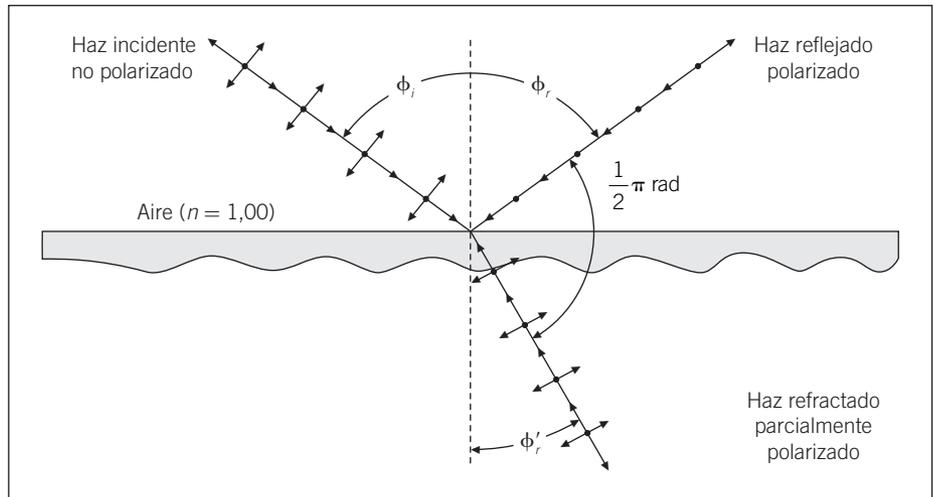


Figura 7.41. Polarización por reflexión

En 1812, D. Brewster observó que para un ángulo de incidencia tal que el reflejado y el refractado son perpendiculares, la luz reflejada está completamente polarizada en la dirección paralela al plano de reflexión, tal como

se representa en la Figura 7.41. Ese ángulo, llamado ángulo de Brewster, debe cumplir

$$\text{sen } \phi_r = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \phi_B \right) = \cos \phi_B \quad [27]$$

y como debe obedecer también a la ley de Snell

$$\text{sen } \phi_B = \frac{n_2}{n_1} \text{sen } \phi_r = \frac{n_2}{n_1} \cos \phi_B \Rightarrow \text{tg } \phi_B = \frac{n_2}{n_1} \quad [28]$$

Para ese ángulo particular la luz reflejada está completamente polarizada. Calculémoslo para el caso de la interfaz aire-agua y aire-vidrio.

Ejemplo 7.18.

Calcúlese el ángulo de Brewster para conseguir luz completamente polarizada por reflexión sobre una interfaz: a) aire-agua ($n_a = 1,33$), b) aire-vidrio ($n_v = 1,5$).

a) Ese ángulo se calcula fácilmente usando la última relación hallada

$$\text{tg } \phi_B = \frac{n_{\text{agua}}}{n_{\text{aire}}} = \frac{1,33}{1} = 1,33 \Rightarrow \phi_B \text{ (aire-agua)} = 53^\circ$$

b) Y de manera similar para el aire-vidrio

$$\text{tg } \phi_B = \frac{n_{\text{vidrio}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{1,5}{1} = 1,5 \Rightarrow \phi_B \text{ (aire-vidrio)} = 56,3^\circ$$

Es fácil darse cuenta de que el ángulo de Brewster y el ángulo límite para las interfaces de distintos medios están relacionados de manera muy simple, como se comprueba en el ejemplo propuesto a continuación.

Ejemplo 7.19.

El ángulo límite de la luz de una lámpara de sodio incidiendo sobre un cristal en contacto con un líquido es 20° . ¿Con qué ángulo hay que hacer incidir ese haz sobre la interfaz de ese cristal inmerso en ese líquido para conseguir luz completamente polarizada perpendicularmente al plano de incidencia?

El ángulo límite viene dado por la relación

$$\text{sen } \phi_l = \frac{n_1}{n_2}$$

para el cual se produce la reflexión total de la luz que incide sobre la interfaz del cristal en agua. Este fenómeno no tiene nada que ver conceptualmente con la polarización por reflexión que da lugar a la ley de Brewster y que nos sirve para contestar la pregunta del enunciado. Sin embargo

$$\operatorname{tg} \phi_B = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\operatorname{sen} \phi_i}$$

de manera que usando los datos del enunciado se obtiene

$$\operatorname{tg} \phi_B = \frac{1}{\operatorname{sen} \phi_i} = \frac{1}{2,92} \Rightarrow \phi_B = 71^\circ$$

Con lo que hemos visto en los últimos párrafos podemos explicar la utilidad de los dispositivos Polaroid en cámaras y gafas para eliminar en gran medida los molestos reflejos provenientes de zonas acristaladas, de la nieve, de la superficie mojada de una carretera, de la superficie de una piscina, etc. Como la luz reflejada por esas superficies está polarizada preferentemente en la dirección horizontal, basta colocar un filtro Polaroid con el eje vertical para eliminar la mayor parte de la luz reflejada.

Polarización por difusión. Si se hace incidir luz no polarizada sobre una suspensión de finas partículas —que actúan difundiendo la luz—, la luz difusa que sale en las distintas caras del recipiente presenta polarización distinta. Se puede ver este efecto (efecto Tyndall) enviando un haz láser sobre una suspensión formada por agua con un poco de leche. Con un filtro Polaroid es fácil apreciar que la luz observada a través de las diferentes paredes presenta distinta polarización.

La luz que nos llega del Sol, al pasar por la atmósfera, es difundida por las partículas en suspensión. De otro modo, incluso de día veríamos el cielo negro: tan sólo el disco solar aparecería brillante. (Basta recordar cómo observan el cielo los astronautas desde una nave, aunque les dé directamente el Sol.) El color azul del cielo se debe a los efectos de dispersión de las partículas en la atmósfera (difusión de Rayleigh). Éstas actúan como pequeñas antenas que vibran con los campos electromagnéticos de la luz solar, reemitiendo con una intensidad que es proporcional a la inversa de la cuarta potencia de la longitud de onda incidente. Esto hace que cuando el ángulo de incidencia es relativamente pequeño —lo cual sucede cuando el Sol está alto— se ve una mayor intensidad de la luz con menor λ , es decir, con la frecuencia mayor: esto hace que veamos el cielo azul al mediodía. Por la tarde la luz solar tiene que recorrer un trecho mayor antes de alcanzar la superficie terrestre. Durante ese recorrido una parte importante de las componentes azuladas son dispersadas y, como consecuencia, nos llega una luz amarillenta-rojiza, característica de las puestas de sol. (Este efecto es más acusado cuando ha habido una erupción volcánica en cualquier lugar del globo, pues esto aumenta más de lo normal el número de partículas difusoras en la atmósfera.)

Del comentario acerca de la luz solar que acabamos de hacer se desprende que la luz solar nos llega parcialmente polarizada y que el grado de

polarización varía en el transcurso del día. (También se puede apreciar este hecho mirando al cielo a través de una placa Polaroid y haciéndola girar.) Hay algunos animales que poseen órganos de visión capaces de detectar la polarización de la luz solar. Entre ellos, el más llamativo es el que poseen las abejas, y que fue estudiado con mucho detalle por el naturalista C. von Frisch.

7.8. Imágenes formadas por refracción. Lentes delgadas. Sistemas de lentes

Al estudiar la refracción, todas las situaciones examinadas correspondían a superficies planas. Antes de estudiar las lentes, veamos brevemente qué tipo de imagen se forma tras la refracción entre dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 , respectivamente, separados por una superficie esférica como la que aparece en la Figura 7.42 ($n_1 < n_2$). La superficie esférica está caracterizada por un *centro* C que corresponde al de la esfera a la cual pertenece esa superficie. El *radio de curvatura* de R es el radio de la esfera. Llamamos polo P al punto central del sector esférico que constituye la superficie. El *eje* es la recta que une el centro con el polo.

Un objeto situado en un punto A sobre el eje forma una imagen en el interior de la esfera. Para determinar dicha imagen basta analizar la marcha de dos rayos: uno con incidencia normal, que pasa por el polo y no se desvía, y otro que forma un ángulo cualquiera α con la horizontal. Este segundo al llegar a la interfaz esférica sufre un acercamiento a la normal, que en este caso es —por construcción— un diámetro, yendo a cortar el eje en un punto A' , donde se forma la imagen. Debemos encontrar una relación entre las características de los dos medios, el lugar donde se halla el objeto y la distancia a la que se forma la imagen. Para que el cálculo resulte asequible, supondremos que los ángulos de incidencia son muy pequeños —rayos cercanos al eje—, de tal manera que el arco l entre el eje y el rayo que llega a B es pequeño comparado con el radio de curvatura R .

Para ángulos pequeños se puede aproximar el seno por el ángulo (en rad), de tal manera que la ley de Snell se puede escribir en la forma

$$n_1\phi_1 \approx n_2\phi_2 \quad [29]$$

Analizamos ahora los ángulos en los dos triángulos BCA' y ABC . Comencemos por el primero, BCA' , en el cual se cumple la relación entre los ángulos

$$\beta = \phi_2 + \gamma = \frac{n_1}{n_2}\phi_1 + \gamma \quad [30]$$

para la cual hemos usado que el ángulo exterior a un triángulo $-\beta$ en este caso— es la suma de los dos ángulos opuestos $-\phi_2$ y γ —, así como la ley de la refracción en la forma simplificada de la fórmula [29]. Para el triángulo ABC , por la misma razón, tendremos

$$\phi_1 = \alpha + \beta \quad [31]$$

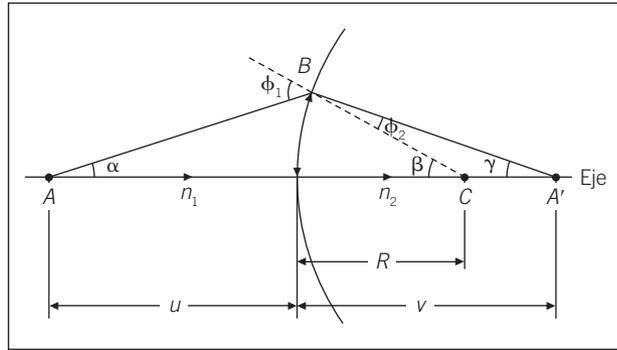


Figura 7.42. Refracción sobre una superficie esférica.

A partir de las dos últimas ecuaciones se obtiene

$$\beta = \frac{n_1}{n_2} \phi_1 + \gamma \Rightarrow n_2 \beta = n_1 \phi_1 + n_2 \gamma = n_1 \alpha + n_1 \beta + n_2 \gamma \quad [32]$$

o, en forma más compacta:

$$(n_2 - n_1) \beta = n_1 \alpha + n_2 \gamma \quad [33]$$

Con el mismo grado de aproximación con el que hemos aplicado la aproximación [29] y siguiendo con dicha aproximación (ángulos pequeños) podemos suponer $\alpha \approx l/u$, $\beta \approx l/R$ y $\gamma \approx l/v$, por lo que la última ecuación, tras dividir por la distancia l , resulta

$$\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{(n_2 - n_1)}{R} \quad [34]$$

Con un criterio de signos adecuados esta ecuación se puede aplicar tanto a superficies convexas como cóncavas.

Pasamos a continuación al caso general de las lentes, que supondremos están limitadas por dos casquetes esféricos que, en general, tienen radio de curvatura distinto R_a y R_b , y centros distintos C_a y C_b . La situación se recoge para el caso de una lente con las dos caras convexas (lente biconvexa) de manera exagerada en la Figura 7.43.

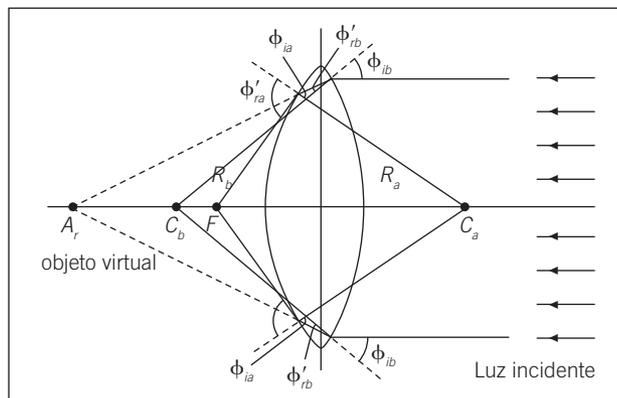


Figura 7.43. Lente con dos radios de curvatura.

Estudiamos lo que sucede a los rayos provenientes de un punto del eje de la lente al llegar a la primera interfaz, donde se ha de cumplir la ecuación [34]. Los rayos refractados por la primera interfaz actúan como si proviniesen de un objeto «virtual» que estaría situado en A_v , en la posición a la que convergen las prolongaciones de los rayos que, tras ser refractados por la primera superficie, llegan hasta la segunda. Hemos de tener en cuenta que la distancia «objeto» para la segunda superficie es virtual y, por convenio, ese tipo de distancias se toma negativo, de modo que $u_b = (-v_a) + d$, siendo d el espesor de la lente, pero que en la aproximación de las *lentes delgadas*, que supondremos en lo que sigue, $d \ll u$, y se podrá despreciar ese espesor frente a las distancias típicas, de modo que se puede suponer que $u_b = -v_a$. Si introducimos estos resultados en la ecuación de la refracción para las superficies curvas, obtenemos

$$\text{(superficie a)} \quad \frac{n_1}{u_a} + \frac{n_2}{v_a} = \frac{n_2 - n_1}{R_a} \quad [35]$$

$$\text{(superficie b)} \quad \frac{n_2}{u_b} + \frac{n_2}{v_b} = \frac{n_2}{-v_a} + \frac{n_1}{v_b} = \frac{n_1 - n_2}{R_b} = -\frac{n_2 - n_1}{R_b} \quad [36]$$

Combinando ambas ecuaciones se obtiene

$$\frac{n_1}{u_a} + \frac{n_1}{v_b} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) \quad [37]$$

Supóngase que se hace incidir rayos paralelos al eje procedentes del infinito –*rayos paraxiales*– sobre la cara a . Éstos convergen sobre un único punto al que se denomina *foco* F . A la distancia entre el foco y la lente se le denomina *distancia focal* f .

A partir de la última ecuación es fácil deducir la distancia focal de una lente, simplemente teniendo en cuenta que f es la distancia ($f = v_b$) imagen de un objeto que está situado a distancia infinita ($u_a = \infty$), lo que conduce a la llamada *ecuación del constructor de lentes*.

$$\frac{n_1}{f} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) \quad [38]$$

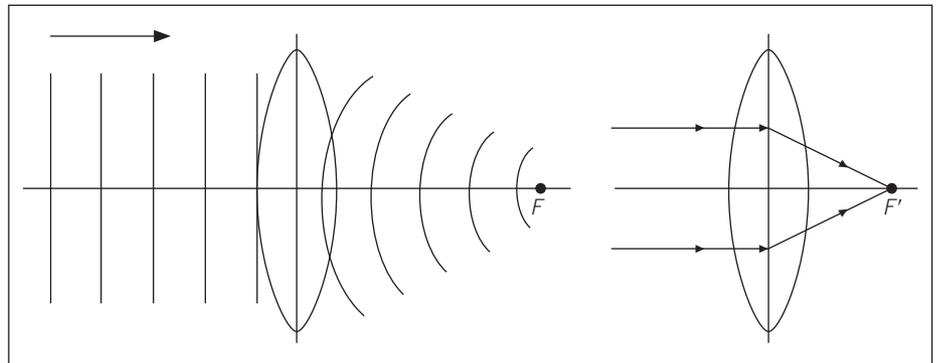


Figura 7.44. Rayos paraxiales que pasan por el foco.

Para aplicar correctamente esta fórmula hay que tener en cuenta el signo que la curvatura presenta a los rayos. Así, la primera superficie en los dibujos anteriores aparecía convexa a los rayos incidentes, y el radio correspondiente se toma positivo, mientras que la segunda superficie *b* se presenta cóncava a los rayos incidentes y, por tanto, con una curvatura con signo contrario a la de la superficie *a*. En cualquier caso, se puede ver que la distancia focal es la misma por ambas caras, como demostramos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7.20.

A partir de la fórmula del constructor de lentes demuéstrese que la distancia focal es igual a uno y otro lado de una lente biconvexa con radios de curvatura R_a y R_b distintos.

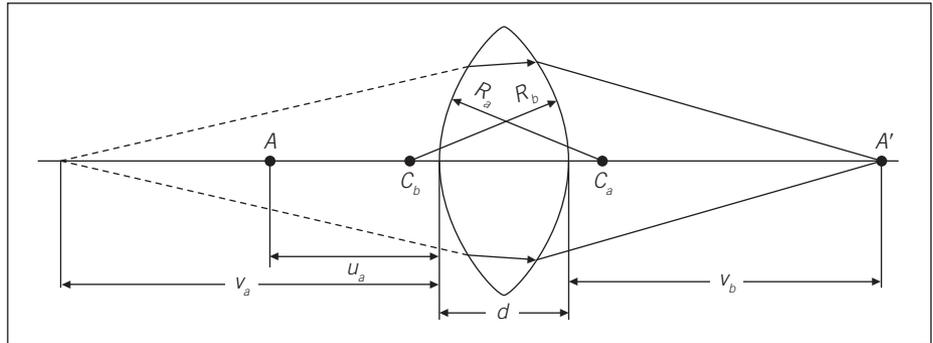


Figura 7.45. Lente biconvexa.

Si los rayos inciden por la izquierda, éstos llegan a la superficie *a* y después a la *b*, y se cumple

$$\frac{1}{f} = \frac{(n_2 - n_1)}{n_1} \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{|R_b|} \right)$$

Si aquéllos inciden desde la derecha, se invierten los papeles de las dos superficies y se tendrá, por tanto,

$$\frac{1}{f'} = \frac{(n_2 - n_1)}{n_1} \left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a} \right) = \frac{(n_2 - n_1)}{n_1} \left(\frac{1}{R_b} + \frac{1}{|R_a|} \right) = \frac{1}{f}$$

de lo que se deduce que $f = f'$, es decir, que la distancia focal a uno y otro lado de la lente son iguales en esta aproximación.

Aunque dedicaremos un apartado especial al ojo humano, presentamos ahora un ejemplo con datos tomados del cristalino.

Ejemplo 7.21.

El cristalino es una lente activa cuya curvatura varía por la acción de los músculos ciliares. Tiene un índice de refracción medio de $n_c = 1,40$ y está rodeada de líquido con $n_l = 1,34$. Si en ese proceso (acomodación) la distancia focal de la lente puede cambiar entre 3 y 6 cm, calcúlese el radio de curvatura de la lente entre esas dos posiciones. (Para simplificar, supóngase que el cristalino es una lente biconvexa con igual radio de curvatura por los dos lados.)

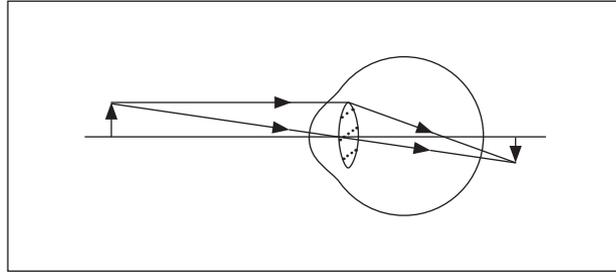


Figura 7.46. Esquema de los rayos en el ojo.

Aplicando la fórmula del constructor de lentes al caso de una lente biconvexa simétrica ($R_a = R_b$)

$$\frac{1}{f} = \frac{(n_c - n_l) 2}{n_l R} \Rightarrow R = \frac{(n_c - n_l)}{n_l} 2f$$

y para los valores del enunciado obtenemos

$$R_1 = \frac{(n_c - n_l)}{n_l} 2f_1 = \frac{(1,40 - 1,33)}{1,33} 2 \times 0,03 \text{ m} = 3,2 \times 10^{-3} \text{ m} = 3,2 \text{ mm}$$

$$R_2 = \frac{(n_c - n_l)}{n_l} 2f_2 = \frac{(1,40 - 1,33)}{1,33} 2 \times 0,06 \text{ m} = 6,3 \times 10^{-3} \text{ m} = 6,3 \text{ mm}$$

Viendo los resultados, resulta claro que no se puede aplicar la aproximación de lente delgada a una que tiene una curvatura tan grande. Sin embargo, estos valores nos sirven para ilustrar que el radio de curvatura del cristalino es unas diez veces menor que la distancia focal de la lente, que es, a su vez, del orden del diámetro del ojo.

Sustituyendo la ecuación del constructor de lentes en la que relaciona las distancias objeto e imagen se obtiene la *fórmula general de las lentes delgadas*

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad [39]$$

Esta ecuación puede ser también deducida estudiando cómo se forma la imagen de un objeto situado sobre el eje óptico, como se muestra en la Fi-

gura 7.47. Un rayo paraxial que sale del extremo A del objeto debe pasar por el foco, mientras que un rayo que sale del mismo punto y pasa por el centro no se desvía (aproximación de lente delgada). La intersección de los dos rayos refractados nos da la situación del extremo de la imagen A' . El extremo inferior de la imagen estará sobre el eje B' , como lo está la del objeto B . Resulta una imagen *real* —se puede recoger en una pantalla, a diferencia de una virtual— e *invertida*. Si tenemos en cuenta que los triángulos ABC y $CA'B'$ son semejantes, se deduce que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{v}{u} \tag{40}$$

También son semejantes CPF y $A'B'F$, y puesto que $CP = AB$, se puede escribir

$$\frac{A'B'}{CP} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{FB'}{FC} = \frac{v-f}{f} \tag{41}$$

Igualando ambas expresiones y dividiéndolas por v se llega a

$$\frac{1}{u} = \frac{v-f}{vf} = \frac{1}{f} - \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \tag{42}$$

Del diagrama anterior se deduce que la razón entre la longitud de la imagen y la del objeto, a la que se denomina *aumento lateral* m , resulta ser

$$m = -\frac{A'B'}{AB} = -\frac{v}{u} \tag{43}$$

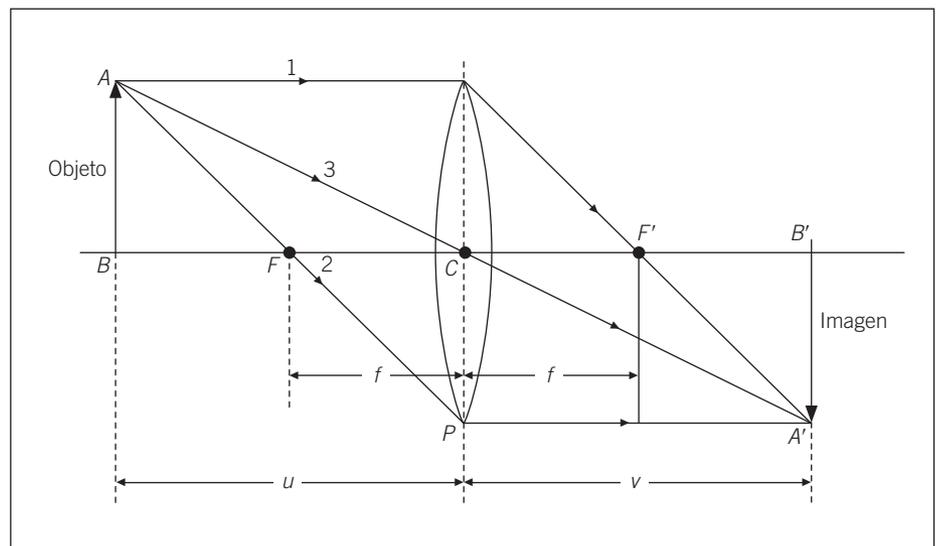


Figura 7.47. Imagen formada por una lente convergente.

donde el signo negativo indica que la imagen está invertida respecto al objeto.

Ilustramos estos conceptos mediante algunos ejemplos que incluyen algunos instrumentos ópticos de uso corriente.

Ejemplo 7.22.

Se proyectan diapositivas de 35 mm usando un proyector cuya lente tiene una distancia focal $f = 21$ cm. Se puede variar la posición de la lente a la diapositiva entre 22 y 30 cm. a) ¿Entre qué distancias máxima y mínima puede proyectar ese proyector? b) ¿Qué altura tiene la imagen que se forma en cada caso?

a) A partir de la fórmula general de las lentes delgadas podemos deducir una expresión general para v en función de u y f

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{f} - \frac{1}{u} = \frac{u - f}{uf} \Rightarrow v = \frac{uf}{u - f}$$

de modo que se obtiene la distancia mayor v cuanto más cerca esté la diapositiva de la lente

$$v_{\text{máx}} = \frac{u_{\text{mín}} f}{u_{\text{mín}} - f} = \frac{0,22 \text{ m} \times 0,21 \text{ m}}{0,22 \text{ m} - 0,21 \text{ m}} = 4,62 \text{ m}$$

y la menor

$$v_{\text{mín}} = \frac{u_{\text{máx}} f}{u_{\text{máx}} - f} = \frac{0,30 \text{ m} \times 0,21 \text{ m}}{0,30 \text{ m} - 0,21 \text{ m}} = 0,7 \text{ m} = 70 \text{ cm}$$

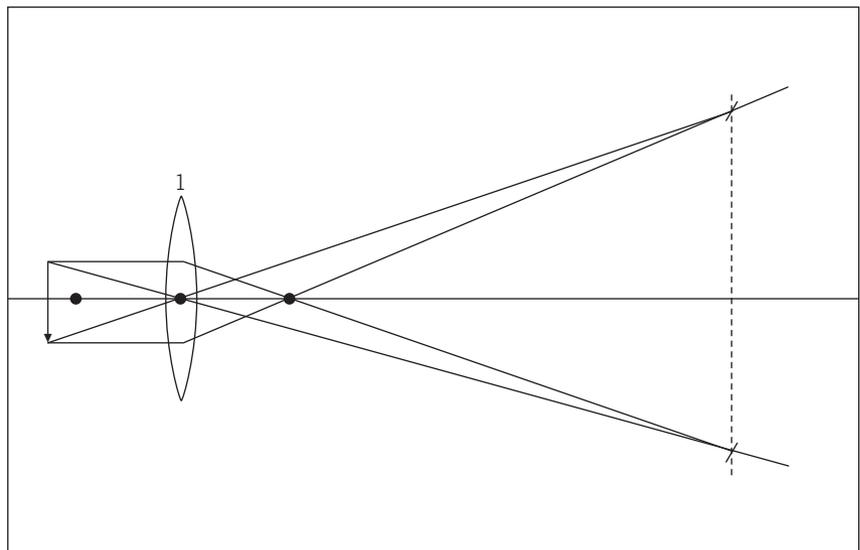


Figura 7.48. Diapositiva, lente y pantalla.

Ese proyector de diapositivas podrá enfocar imágenes entre 0,7 y 4,6 m del proyector.

b) De la relación general obtenida para la distancia objeto resulta fácil deducir el valor del aumento lateral en cada caso

$$m = -\frac{v}{u} = -\frac{f}{u-f}$$

de modo que el máximo y el mínimo serán

$$m_{\text{máx}} = \frac{0,21 \text{ m}}{0,22 \text{ m} - 0,21 \text{ m}} = -21$$

$$m_{\text{mín}} = \frac{0,21 \text{ m}}{0,30 \text{ m} - 0,21 \text{ m}} = -2,3$$

y la diapositiva será ampliada hasta adquirir un tamaño máximo $D = 35 \text{ mm} \times 21 = 73,5 \text{ cm}$ o como mínimo $d = 35 \text{ mm} \times 2,3 = 8 \text{ cm}$.

Ejemplo 7.23.

Una cámara fotográfica está provista de un objetivo con una distancia focal $f = 50 \text{ mm}$, que se mueve entre 5 y 7 cm de la película fotosensible. Calcúlese entre qué distancias podrá enfocar objetos sobre dicha película (véase Fig. 7.49).

En este caso lo que interesa es que los objetos lejanos formen imágenes a distancias pequeñas. A partir de la fórmula general para las lentes delga-

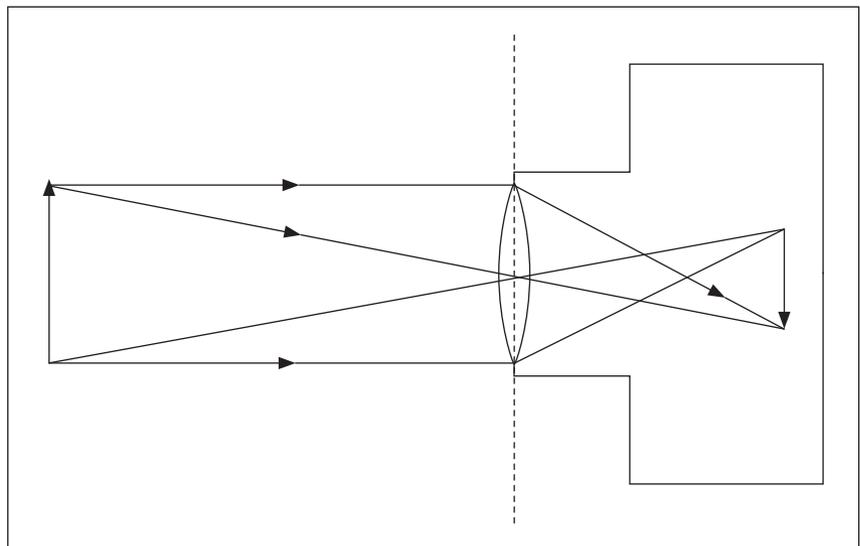


Figura 7.49. Enfoque de una cámara fotográfica.

das, y teniendo en cuenta que ahora hemos de determinar distancias a los objetos, escribimos

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{f} - \frac{1}{v} = \frac{v - f}{vf} \Rightarrow u = \frac{vf}{v - f}$$

Cuando v es exactamente $v = f$, el denominador de la última expresión se anula, lo que indica que se enfocan objetos que están en el infinito ($u = \infty$), tal como se indica en el propio objetivo de la cámara. Para la máxima distancia imagen $v_{\text{máx}} = 7 \text{ cm}$ obtenemos

$$u_{\text{mín}} = \frac{v_{\text{máx}} f}{v_{\text{máx}} - f} = \frac{0,07 \text{ m} \times 0,05 \text{ m}}{0,07 \text{ m} - 0,05 \text{ m}} = 0,175 \text{ m} = 17,5 \text{ cm}$$

Con ese objetivo la cámara podrá captar objetos desde 17,5 cm hasta una distancia prácticamente infinita.

En los ejemplos que siguen planteamos algunas cuestiones más teóricas.

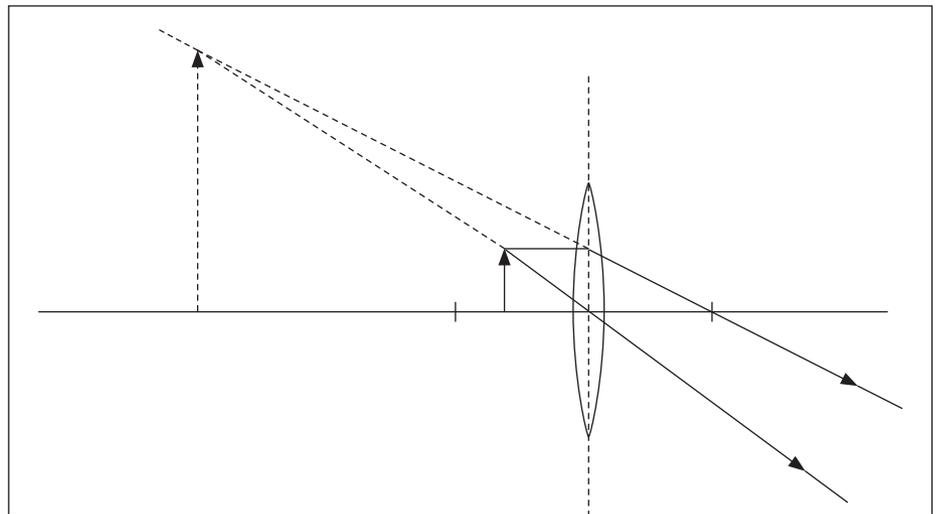


Figura 7.50. Imagen virtual de una lupa.

Cuando se sitúa el objeto entre el foco y la lente, los rayos no convergen, pero sí lo hacen sus proyecciones. Esto da lugar a una *imagen virtual*, mayor y derecha. Este hecho se utiliza, por ejemplo, en las lupas, como ilustramos en el próximo ejemplo y, esquemáticamente, en la Figura 7.50.

Ejemplo 7.24.

Se dispone de una lupa de distancia focal $f = 5 \text{ cm}$. ¿A qué distancia hay que situar el objeto si se quiere conseguir ver una imagen virtual: a) diez veces mayor, b) veinte veces mayor que el objeto?

La situación es la representada en la Figura 7.50, es decir, se quiere obtener una imagen virtual, por lo cual u debe ser $u < f$. Aplicando las expresiones que hemos deducido anteriormente

$$\frac{1}{|v|} = \frac{1}{u} - \frac{1}{f} = \frac{f - u}{uf} \Rightarrow |v| = \frac{uf}{f - u}$$

que puede ser sustituida en la fórmula para el aumento lateral m

$$m = \frac{|v|}{u} = \frac{uf}{u(f - u)} = \frac{f}{f - u}$$

de la que se deduce

$$m(f - u) = f \Rightarrow u = \frac{m - 1}{m} f$$

Introduciendo ahora los datos del enunciado:

$$a) \quad u = \frac{10 - 1}{10} 0,05 \text{ m} = 0,045 \text{ m} = 4,5 \text{ cm}$$

$$b) \quad u = \frac{20 - 1}{20} 0,05 \text{ m} = 0,0475 \text{ m} = 4,75 \text{ cm}$$

De lo que se deduce que la imagen aumenta cuanto más se acerca el objeto al foco de la lente.

Recapitulando los resultados para una lente biconvexa, la imagen virtual se hace tanto más grande cuanto más cerca se halla el objeto del foco de la lente. A medida que el objeto se aleja, la imagen aumenta. Cuando el objeto pasa por el foco, no se forma imagen (véase Figura 7.44, para los rayos paraxiales y la fórmula general de las lentes delgadas). Más allá del foco la lente produce imágenes reales que se van haciendo más pequeñas a medida que se aleja el objeto.

Tanto las lentes biconvexas como las plano-convexas son convergentes, como se deduce de la fórmula del constructor de lentes. Pero se usan también lentes divergentes. El caso prototipo es el de las lentes bicóncavas, para las cuales esa fórmula nos dice que la distancia focal debe ser tomada negativa, puesto que tienen las curvaturas cambiadas respecto a las biconvexas (Fig. 7.51). Son divergentes porque los rayos paraxiales que llegan a ellas divergen entre sí. Sólo sus proyecciones se cortan en un punto, que representa un foco «virtual», lo que coincide con el convenio de signos para la distancia focal en ese tipo de lentes. Presentamos a continuación la formación de una imagen con ese tipo de lentes (Fig. 7.52).

La imagen que forma ese tipo de lentes es siempre virtual, derecha y más pequeña

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{|f|} \Rightarrow \frac{1}{v} = -\frac{1}{|f|} - \frac{1}{u} \quad [44]$$

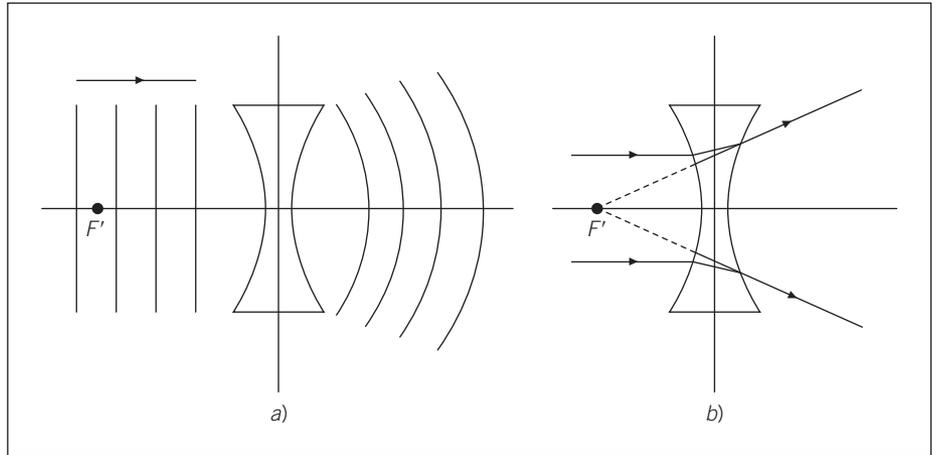


Figura 7.51. Rayos paraxiales en una lente divergente.

de lo que se deduce que v es siempre negativa ($v < 0$). Al ser la imagen virtual y la distancia focal negativa, la ecuación general para las lentes delgadas nos dice

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -\frac{1}{|f|} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{|f|} + \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{1}{|v|} > \frac{1}{u} \Rightarrow |v| < u \quad [45]$$

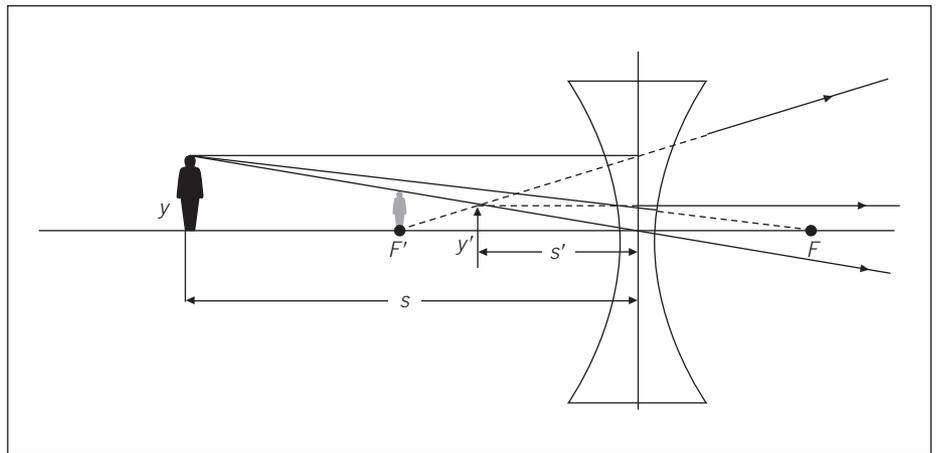


Figura 7.52. Imagen virtual de una lente divergente.

lo que se traduce en que el aumento lateral es siempre «reducción» ($m < 1$)

$$m = \frac{|v|}{u} < 1 \quad [46]$$

Las lentes divergentes producen siempre imágenes virtuales, derechas y menores que los objetos.

Se puede conseguir tipos combinados de lentes: plano-cóncavas, cóncavo-convexas, etc. El resultado será una lente convergente o divergente si,

tras aplicar la fórmula del constructor de lentes, la distancia focal resulta positiva o negativa. En cualquiera de estos casos se utiliza el concepto de *potencia de una lente* P , que es la inversa de la distancia focal. Cuando ésta se expresa en metros, la potencia se mide en *dioptrías*.

$$P \text{ (dioptrías)} = \frac{1}{f(m)} \quad (1 \text{ dioptría} = 1 \text{ m}^{-1}) \quad [47]$$

Las lentes convergentes tienen potencia positiva y las divergentes negativa.

Ejemplo 7.25.

Una lupa de 15 dioptrías forma una imagen virtual a 25 cm. a) Determínese dónde hay que situar el objeto. b) Hállese el aumento de la lupa en esa situación.

Este ejemplo nos sirve para trabajar con la potencia, en lugar de hacerlo con la distancia focal. Para ello partimos de la situación que se plantea en una lupa y que vimos en la Figura 7.50.

a) La imagen que se forma es virtual y mayor; por tanto, usaremos la forma de la ecuación de las lentes delgadas teniendo en cuenta estos factores

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{|v|} = \frac{1}{f} = P$$

y como se nos da $v = 25 \text{ cm}$ y $P = 15 \text{ dioptrías}$ en el enunciado, tratamos de encontrar la expresión general para u , después de lo cual sustituimos esos valores

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} &= P + \frac{1}{|v|} = \frac{P|v| + 1}{|v|} \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= \frac{|v|}{P|v| + 1} = \frac{0,25 \text{ m}}{15 \text{ m}^{-1} \times 0,25 \text{ m} + 1} = 0,526 \text{ m} = 5,26 \text{ cm} \end{aligned}$$

Por completitud añadimos que la distancia focal de esa lente es $f(m) = 1/P = 1/15 \text{ m}^{-1} = 0,066 \text{ m} = 6,66 \text{ cm}$; evidentemente el objeto se halla a una distancia $u < f$ ($5,26 \text{ cm} < 6,66 \text{ cm}$).

b) El aumento lateral se puede hallar también de forma general en función de la potencia, a partir de las dos últimas fórmulas halladas

$$m = \frac{|v|}{u} = P|v| + 1 = 15 \text{ m}^{-1} \times 0,25 \text{ m} + 1 = 4,75$$

Con esa lupa a esas distancias se obtienen 4,75 aumentos.

Las lentes reales presentan habitualmente *aberraciones*, es decir, distorsiones en las imágenes, que pueden ser principalmente de dos tipos: esféricas y cromáticas. Las *aberraciones esféricas* son el resultado de que los objetos relativamente extensos no producen imágenes nítidas en toda su extensión. Esto puede ser debido a un defecto en la curvatura de la lente; pero aun en una lente perfecta los rayos más lejanos al eje no enfocan en el mismo punto que los que se hallan cerca, tal como se ve en la Figura 7.53. (Recordemos que en todo lo que hemos comentado se ha supuesto que las lentes eran delgadas: hemos usado la aproximación de ángulos pequeños.) El único modo de evitarlas consiste, por un lado, en modificar la forma de las superficies de la lente y, por otro, en reducir el campo de la lente, lo que lleva a una disminución tanto en el campo como en la intensidad que recoge la lente. (Este punto será comentado más adelante.)

La *aberración cromática* es consecuencia natural del uso de luz blanca en un medio —como el vidrio— cuyo índice de refracción depende de la longitud de onda. Esto produce, con mayor o menor intensidad, dispersión de la luz, de modo que la lente —que actúa de manera similar a un prisma a estos efectos— «dispersa» los distintos colores, los cuales no quedan enfocados en el mismo punto: cerca del foco se puede apreciar los distintos colores que componen la luz blanca.

Los efectos de aberración se limitan bastante usando sistemas de lentes y diafragmas como los que usa el objetivo de una cámara fotográfica.

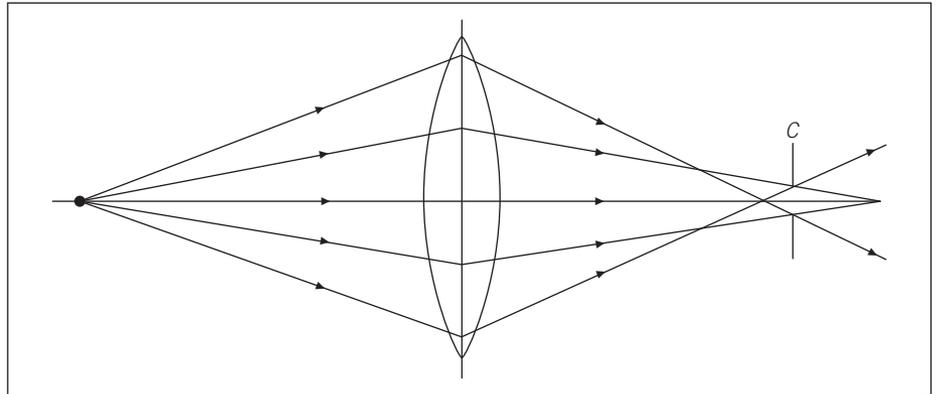


Figura 7.53. Aberración esférica.

Comentamos a continuación algunos aspectos relacionados con las limitaciones de intensidad que hay que introducir en distintos instrumentos ópticos. En particular, en una cámara fotográfica hay que regular la intensidad —algo parecido a lo que veremos hace el iris en el ojo— mediante el *diafragma*. Éste consiste en un orificio circular —o casi— que limita la intensidad de la luz que llega hasta el material fotosensible para formar la imagen. La *apertura*, y por tanto la intensidad, queda determinada por el número F , que se define del modo siguiente:

$$F = \frac{f}{D} \quad [48]$$

siendo D el diámetro de la abertura en el diafragma. Puesto que la intensidad que llega es proporcional al área iluminada, y por tanto al cuadrado del diámetro ($I \sim D^2$). Este comentario nos permite entender la secuencia de números que tienen grabados los objetivos de las cámaras o que aparecen en el visor cuando en el modo Av se selecciona la abertura del diafragma: estos números que aparecen son una serie geométrica con un factor $\sqrt{2}$, lo que equivale a una variación en un factor 2 en la intensidad. El número F resulta así en una serie

$$22/ 16/ 11/ 8/ 5,6/ 4/ 2,8/ 2,0/ 1,4/ 1,0$$

que corresponden a diámetros crecientes. Cuando el objetivo de 50 mm está con un número $F = 5,6$, por ejemplo, el diámetro correspondiente es

$$D = \frac{f}{F} = \frac{5 \times 10^{-2} \text{ m}}{5,6} = 8,93 \times 10^{-3} \text{ m} = 9 \text{ mm} \quad [49]$$

Esta regulación de intensidad resulta muy conveniente en muchos casos, pero conlleva también efectos de difracción. En efecto, como vimos en el apartado dedicado a este fenómeno, las aberturas circulares producen unos inevitables efectos de difracción que, en el caso de las cámaras, se traduce en un límite de resolución en las imágenes; en concreto, en las cámaras la mínima distancia que se puede llegar a medir en una película depende del número F usado, tal como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.26.

En un día de luz intensa se usa una cámara con un objetivo de 50 mm, con una abertura numérica $F = 11$. Hállese el radio de la mancha que forma un punto luminoso sobre el elemento sensible a consecuencia de la difracción. (Se puede tomar como aproximación que la distancia del diafragma al elemento sensible es la misma que la distancia focal $f = 50$ mm. Supóngase que la luz incidente tiene una longitud de onda media $\lambda = 550$ nm.)

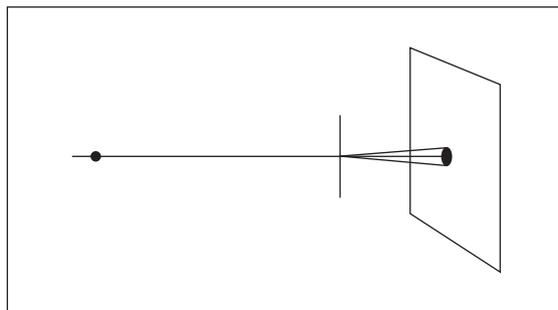


Figura 7.54. Difracción en una cámara.

Como vimos en el apartado correspondiente, un orificio circular con diámetro D produce un ángulo de difracción ϕ_d que viene dado por la relación

$$\text{sen } \phi_d = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

como $\lambda \ll D$, el ángulo es muy pequeño y, por tanto, $\text{sen } \phi_d \approx \phi_d$ (rad). Teniendo en cuenta esta aproximación, y viendo la representación geométrica del esquema inicial, se puede escribir que el radio r de la mancha vale

$$r = l \text{ tg } \phi_d \approx l \phi_d = l \times 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

y aplicando la definición del número F ($D = f/F$) y sustituyendo valores se obtiene que es un radio muy pequeño, pero crece al ampliarse la película. Esto impone, pues, un límite al tamaño de las posibles ampliaciones.

$$\begin{aligned} (f \approx l) \quad r &\approx l \times 1,22 \frac{\lambda}{D} = l \times 1,22 \frac{\lambda F}{f} = 1,22 \lambda F = \\ &= 1,22 \times 5,50 \times 10^{-7} \text{ m} \times 11 = 7,38 \times 10^{-6} \text{ m} = 7,8 \mu\text{m} \end{aligned}$$

7.9. El ojo y los defectos visuales

Desde el punto de vista físico el ojo humano presenta un portento de propiedades. Con un alcance que va prácticamente desde el infinito hasta los 25 cm, puede captar intensidades en una gama que comprende nueve órdenes de magnitud, con un campo de casi 180° y con un límite de resolución próximo al que impone la refracción.

Con un mínimo de nociones de la anatomía del ojo humano trataremos de comprender las características de su funcionamiento desde el punto de vista físico. El ojo tiene una forma casi esférica, de unos 2,5 cm de diámetro. En su parte frontal aparece una membrana dura y transparente llamada *córnea* que aparece como una protuberancia sobre el globo ocular; en el interior se encuentra un líquido llamado *humor acuoso*, con un índice de refracción muy próximo al del agua. Más allá aparece el *iris*, un anillo coloreado que actúa como el diafragma de una cámara, regulando la intensidad de luz que pasa a través de la pupila. Detrás aparece el *crystalino*, formado por un material fibroso y gelatinoso, duro en el centro y se va haciendo más blando hacia el exterior. En promedio tiene un índice de refracción de 1,437, no mucho mayor que el del agua. El *crystalino* está sujeto a los músculos ciliares por unos ligamentos. Tras el *crystalino*, en el interior del globo ocular, hay una gelatina ligera que recibe el nombre de *humor vítreo*, también con un índice de refracción parecido al del agua. El globo ocular está recubierto en su interior por tres capas: una cubierta externa, casi opaca, llamada *esclerótica*; una membrana oscura, denominada *coroides*, y una fina y delicada membrana, muy irrigada, con muchas terminaciones nerviosas, que se conoce como *retina*. En la retina se hallan los conos y los bastones, células fotosensibles que junto con ciertos pigmentos se encargan de transmitir a través de las terminaciones nerviosas las imágenes visuales. En la retina hay una pequeña depresión, conocida como *mancha amarilla* o *mácula*, en cuyo centro se halla la *fóvea*, una diminuta región en la que la visión es mucho más aguda. Los músculos que controlan el ojo tienden a enfocar las imágenes sobre la fóvea.

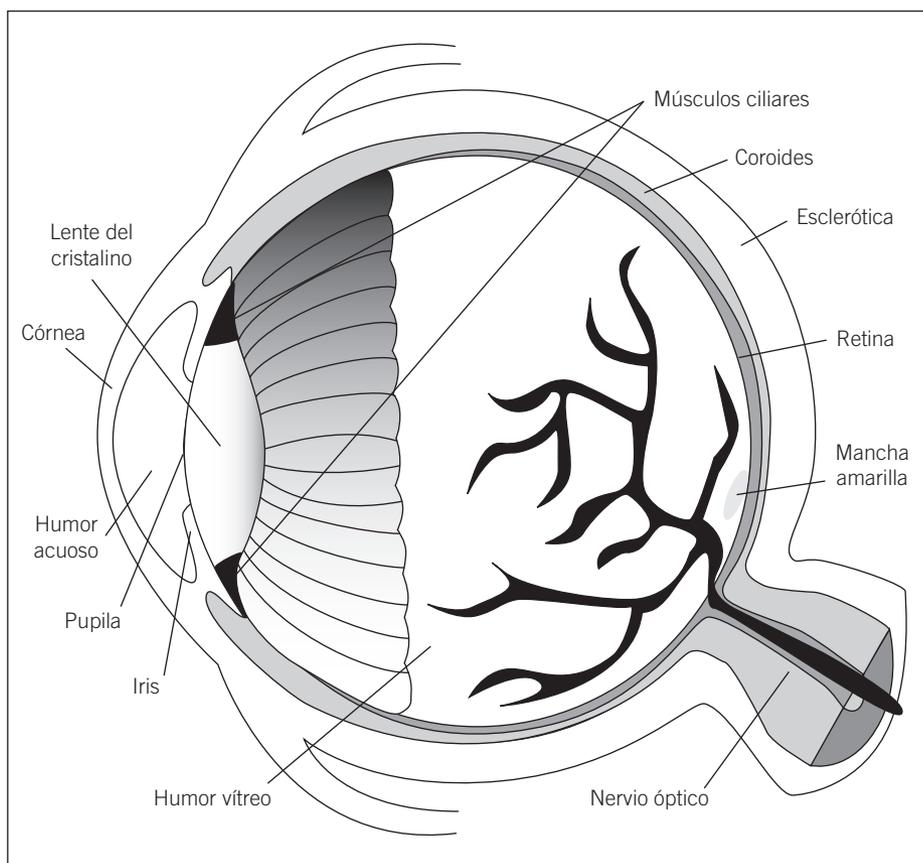


Figura 7.55. Esquema del ojo humano y sus distintas partes.

El iris se encarga de regular el diámetro de la pupila, haciéndolo disminuir cuanto mayor sea la intensidad. A este proceso se le denomina *adaptación*. Otro de los mecanismos activos del ojo los proporcionan los músculos ciliares, que al variar su tensión consiguen distintas curvaturas y, por tanto, potencias del cristalino. Mayor curvatura cuando se enfocan objetos cercanos y menor con los lejanos. Esto es lo que se conoce como *acomodación*. También la curvatura de la córnea contribuye al enfoque de la imagen, aunque por su rigidez no es capaz de acomodarse a las diversas distancias. Cuando abrimos los ojos bajo el agua, la córnea no contribuye a enfocar, ya que el índice de refracción del agua es prácticamente igual al del humor acuoso, y vemos los objetos desenfocados, a pesar de los esfuerzos del cristalino. En el ojo se distingue el *punto próximo*, que es la distancia mínima a la que puede enfocar objetos. Esa distancia varía con la edad, pero en un adulto es de unos $d = 25$ cm, distancia que tomaremos siempre como referencia en lo que sigue, por ser aquella para la que se da la mejor visión. La máxima distancia a la que puede enfocar el ojo se le denomina *punto remoto*; para adultos normales ésta es prácticamente infinita. Veremos que los defectos de visión más normales están relacionados con alteraciones de esos puntos.

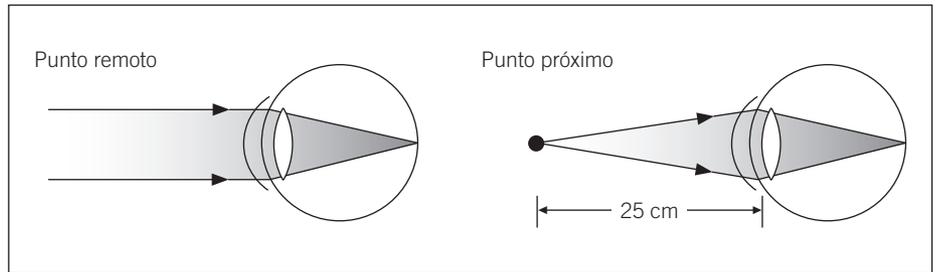


Figura 7.56. Imagen formada en la retina.

El sistema óptico ocular es convergente y forma imágenes reales e invertidas sobre la retina, a pesar de lo cual las señales que llegan al cerebro son convertidas, de modo que percibimos las imágenes «al derecho». En el siguiente ejemplo se determina la gama de potencias que corresponde a la acomodación del cristalino.

Ejemplo 7.27.

La distancia del cristalino a la retina es, aproximadamente, 2,5 cm. Hállese entre qué valores está la potencia del sistema córnea-cristalino en una persona normal.

El ojo normal enfoca sobre la retina objetos que están en el punto próximo, es decir, $u_p = 25$ cm, y forman la imagen sobre la retina $v_p = 2,5$ cm. En esta situación la potencia P_p , cuando el ojo enfoca al punto próximo, valdrá

$$\begin{aligned} P_p \text{ (dioptrías)} &= \frac{1}{f_p(m)} = \frac{1}{u_p} + \frac{1}{v_p} = \frac{v_p + u_p}{u_p v_p} \\ &= \frac{2,5 \times 10^{-2} \text{ m} + 0,25 \text{ m}}{0,25 \times 2,5 \times 10^{-2} \text{ m}^2} = 44 \text{ dioptrías} \end{aligned}$$

El ojo normal puede enfocar objetos que se hallen en $u_l = \infty$ (punto remoto) sobre la retina $v_l = 2,5$ cm; la potencia P_l en este caso valdrá

$$P_l \text{ (dioptrías)} = \frac{1}{f_l(m)} = \frac{1}{u_l} + \frac{1}{v_l} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2,5 \times 10^{-2} \text{ m}} = \frac{10^2}{2,5} = 40 \text{ dioptrías}$$

Así pues, en el proceso de acomodación la potencia del ojo varía en tan sólo cuatro dioptrías.

Veamos ahora cómo intervienen los efectos de la difracción en lo que se conoce como *agudeza visual*. Se denomina agudeza visual al mínimo ángulo entre dos objetos que pueden ser distinguidos como distintos por el ojo humano. A simple vista, es decir, sin usar una lupa, y a 25 cm del ojo —distancia a la que la visión es óptima—, no se suele distinguir dos pequeñas

ranuras separadas menos de 0,1 mm. Esto permite hallar el ángulo mínimo para resolver dos imágenes (poder de resolución) del ojo

$$A.V. = \alpha (\approx \operatorname{tg} \alpha) \approx \frac{1 \times 10^{-4} \text{ m}}{0,25 \text{ m}} = 10^{-4} \text{ rad} \quad [50]$$

aunque, en la práctica, se observa que $A.V. = 2 \times 10^{-4} \text{ rad}$ para casi todas las personas. ¿Cuál es el origen de este límite, las características anatómicas o las físicas? Demostraremos que las primeras están adaptadas a las segundas. Para ello necesitamos mencionar el *criterio de Rayleigh*, que hace referencia al *poder de resolución* de los instrumentos ópticos. Muchos instrumentos ópticos regulan la intensidad de luz incidente mediante diafragmas –como el iris del ojo–, lo cual produce efectos de difracción. Por otro lado, objetos suficientemente pequeños (con un tamaño comparable al de la longitud de onda incidente) dejan de percibirse nítidamente debido a ese mismo fenómeno. Lord Rayleigh estableció un criterio arbitrario, pero razonable –esto quiere decir que da simplemente una estimación–, por el que dos imágenes pueden ser distinguidas:

Criterio de Rayleigh: dos imágenes son distinguibles si la distancia entre sus dos máximos centrales de difracción es mayor que la distancia entre el máximo de una y el primer mínimo de la otra. Se representa esta situación en la Figura 7.57.

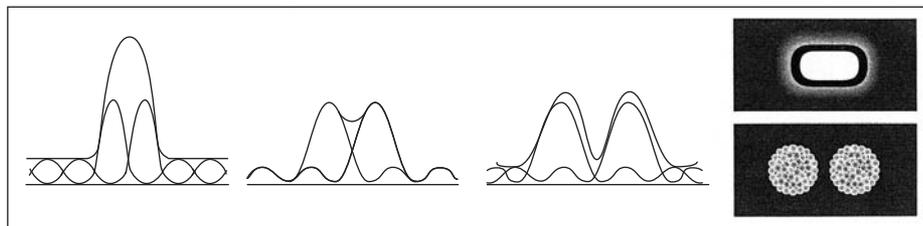


Figura 7.57. Ilustración del criterio de Rayleigh.

Veamos ahora gráficamente esta situación. Cada fuente produce una mancha de difracción sobre la retina con un radio finito (Fig. 7.58).

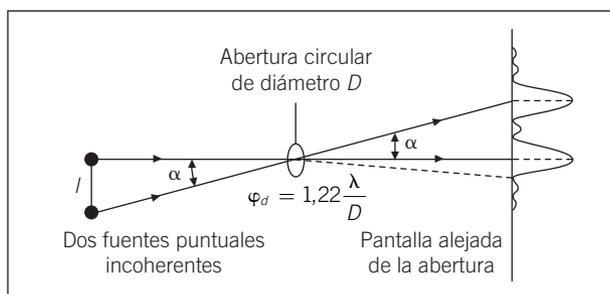


Figura 7.58.

Cuando las fuentes estén muy alejadas, las manchas de difracción que producen sobre la retina están prácticamente superpuestas, como se representa en la Figura 7.59.

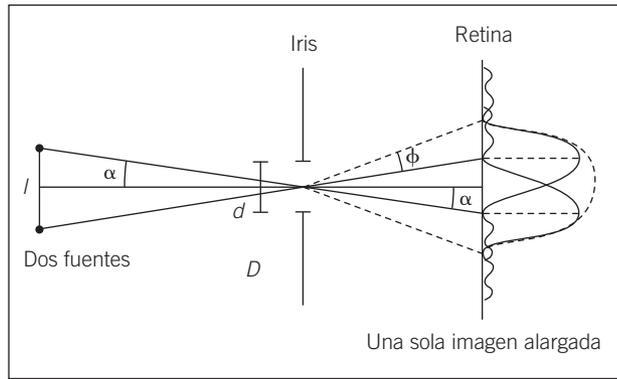


Figura 7.59. Agudeza visual I.

Hay un momento en el que el ángulo entre los rayos procedentes de las dos fuentes α y el de difracción ϕ_d se hacen iguales. Según el criterio de Rayleigh, a partir de esa distancia comenzarán a distinguirse las dos fuentes, pues en esa situación la distancia entre los máximos centrales de las dos manchas será igual a la distancia entre un máximo central y el primer mínimo de la otra mancha.

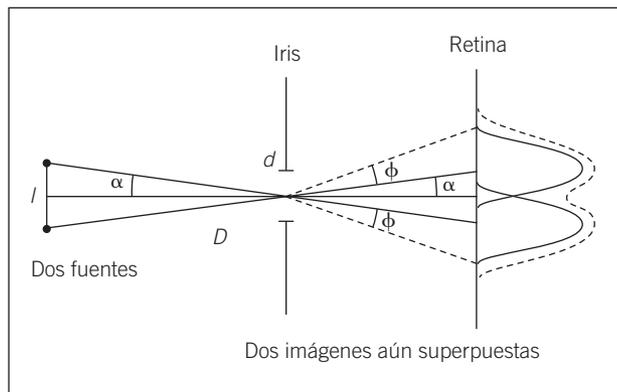


Figura 7.60. Agudeza visual II.

A medida que las fuentes se acercan más al observador, las dos manchas de difracción estarán más separadas y no habrá problemas para distinguir las.

Así pues, el criterio de Rayleigh establece que dos objetos serán distinguibles si el ángulo con el que llegan sus rayos al iris es superior o igual al ángulo de difracción formado por uno de ellos. Planteamos unos cuantos ejemplos para ilustrar este criterio.

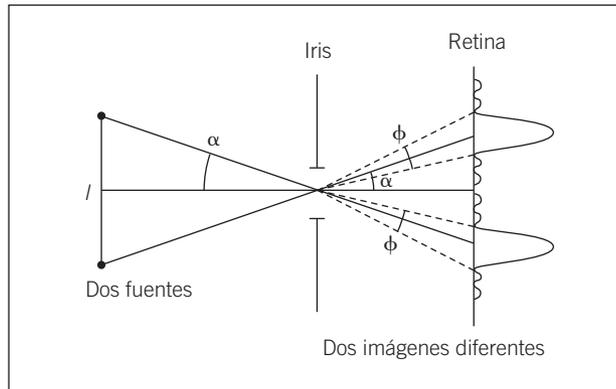


Figura 7.61. Agudeza visual III.

Ejemplo 7.28.

La luz de una fuente distante tiene una longitud de onda $\lambda = 550 \text{ nm}$ y llega al ojo, cuya pupila tiene en ese momento un diámetro de 5 mm . Hállese el ángulo de difracción de la mancha que se forma en la retina.

Hemos de tener en cuenta que la imagen se forma en un medio con índice de refracción $n = 1,33$, en el que la longitud de onda incidente se verá modificada en un factor n , $\lambda' = \lambda/n$. Así, el ángulo de difracción quedará en este caso de la forma

$$\phi_d \text{ (rad)} \approx \sin \phi_d = 1,22 \frac{\lambda'}{d} = 1,22 \frac{\lambda}{nd} = \frac{1,22}{1,33} \frac{5,5 \times 10^{-7} \text{ m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 10^{-4} \text{ rad}$$

siendo d el diámetro de la pupila. Según el criterio de Rayleigh, este ángulo debería coincidir con la agudeza visual.

El valor que hemos obtenido en este ejemplo coincide con el calculado anteriormente. En realidad, se observa que la agudeza visual para una persona normal está en $2 \times 10^{-4} \text{ rad}$.

Ejemplo 7.29.

Tomando como diámetro del globo ocular $D = 2,5 \text{ cm}$ y el de la pupila $d = 5 \text{ mm}$ y considerando la luz procedente de una fuente puntual lejana y con $\lambda = 550 \text{ nm}$, ¿qué radio tendrá la mancha de difracción que se formará sobre la retina?

Los datos para la difracción son los mismos que en el problema anterior, por lo que podemos usar el resultado allí obtenido, $\phi_d = 10^{-4} \text{ rad}$.

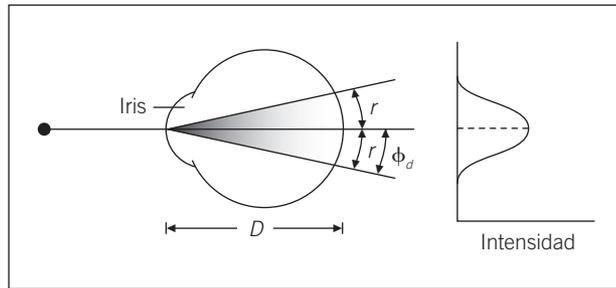


Figura 7.62.

Del esquema anterior resulta claro que se cumple el criterio de Rayleigh cuando $\alpha = \phi_d$, y como estos ángulos son muy pequeños, $\text{tg } \alpha \approx \alpha$, de lo que resulta

$$\begin{aligned} \phi_d = \alpha &\approx \text{tg } \alpha = \frac{r_d}{D} \Rightarrow r_d = D\phi_d \text{ (rad)} = 2,5 \times 10^{-2} \text{ m} \times 10^{-4} = \\ &= 2,5 \times 10^{-6} \text{ m} = 2,5 \text{ } \mu\text{m} \end{aligned}$$

siendo D el diámetro del globo ocular. Veremos seguidamente que esta distancia, aunque sea aproximada, está relacionada con la separación entre los conos y los bastones en la retina.

Según el criterio de Rayleigh, dos fuentes puntuales serán distinguibles si su distancia es $l \geq r_d$, cuyo valor aproximado hemos deducido en el problema anterior. El hecho es que en la fóvea hay una mayor densidad de conos, de modo que la separación es de $1 \text{ } \mu\text{m}$, mientras que en otras regiones de la retina están separados entre 3 y $5 \text{ } \mu\text{m}$, lo cual está de acuerdo con el valor hallado. Fijémonos en que resulta natural que los conos en la región más sensible estén separados esa distancia, pues aumentar mucho más la densidad no aumentaría el poder de resolución, ya que la difracción impone un límite que es de ese orden de magnitud.

Planteamos dos ejemplos de aplicación del criterio de Rayleigh.

Ejemplo 7.30.

Un coche tiene los faros de luz amarilla ($\lambda = 550 \text{ nm}$) separados 1 m y circula por una carretera recta en una noche oscura. Un observador mira hacia el coche y tiene la pupila dilatada a un diámetro $d = 3 \text{ mm}$. Hállese a qué distancia el observador empezará a distinguir la luz del coche como proveniente de dos faros distintos.

Por el criterio de Rayleigh la luz de los dos faros comenzará a distinguirse como dos puntos distintos cuando

$$\text{(criterio de Rayleigh)} \quad \alpha = \phi_d, \quad \text{tg } \alpha = \text{tg } \phi_d$$

Como los dos ángulos son muy pequeños —del orden de 10^{-4} rad—, podemos suponer que $\text{tg } \phi_d \approx \text{sen } \phi_d$, y teniendo en cuenta que la imagen se forma en un medio —el humor vítreo— con $n = 1,33$, obtenemos

$$\text{tg } \alpha = \frac{l}{D} = \text{tg } \phi_d \approx \text{sen } \phi_d = 1,22 \frac{\lambda}{nd}$$

siendo l la distancia entre los faros, D la distancia del automóvil al observador y d el diámetro de la pupila. Sustituyendo los valores del enunciado se obtiene

$$D = \frac{nd}{1,22 \lambda} l = \frac{1,33 \times 3 \times 10^{-3} \text{ m}}{1,22 \times 5,5 \times 10^{-7} \text{ m}} 1 \text{ m} = 5946 \text{ m} \approx 6 \text{ km}$$

Así, cuando el coche se halle a más de 6 km del observador, éste distinguirá una sola luz en la lejanía; a menos de los 6 km podrá discernir si se trata de un coche —dos faros— o de una motocicleta —un faro.

Ejemplo 7.31.

El espaciado entre dos letras en un papel es de 1 mm. Supongamos que el escrito está iluminado con luz amarilla ($\lambda = 550 \text{ m}$) y que la pupila del observador tiene un diámetro $d = 5 \text{ mm}$. A medida que el escrito se va separando del observador, las letras comienzan a distinguirse peor. Calcúlese a partir de qué distancia ya no se distinguirán las dos letras.

Este ejemplo es complementario al anterior. En esta situación, al ir aumentando la distancia D entre el escrito y el observador, disminuye el ángulo α . Cuando $\alpha = \phi_d$, se cumple el criterio de Rayleigh, y siguiendo el mismo esquema que en el ejemplo anterior, obtenemos

$$D = \frac{nd}{1,22 \lambda} \frac{l}{2} = \frac{1,33 \times 5 \times 10^{-3} \text{ m}}{1,22 \times 5,5 \times 10^{-7} \text{ m}} \frac{10^{-3} \text{ m}}{2} = 4,9 \text{ m} \approx 5 \text{ m}$$

A distancias inferiores a los 5 m distinguirá la separación entre las dos letras, aunque no vea bien qué letras son; a partir de 5 m no las distinguirá.

Los defectos visuales son relativamente frecuentes y se corrigen con lentes o lentillas adecuadas. Antes de entrar en detalle en el apartado a co-

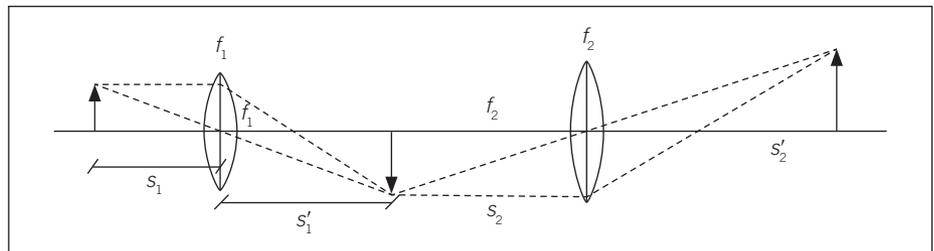


Figura 7.63. Esquema de un sistema de dos lentes.

mentar los defectos más frecuentes, conviene determinar la potencia de un sistema de dos lentes, en función de la de cada una de ellas. Lo planteamos para el caso de dos lentes delgadas convergentes, pero se puede extender a otros sistemas —convergente-divergente, divergente-divergente— con simples cambios de signo.

Para cada una de ellas se cumple la ley general de las lentes delgadas

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} &= \frac{1}{f_1} \\ \frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} &= \frac{1}{f_2} \end{aligned} \quad [51]$$

Al poner una lente a continuación de la otra, la imagen de la primera se convierte en el objeto virtual de la otra, por lo cual $u_2 = -v_1$, totalmente equivalente a $1/u_2 = -1/v_1$, lo cual nos conduce a la igualdad

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{u_2} = -\frac{1}{v_1} \right) - \frac{1}{v_1} &= -\frac{1}{f_1} + \frac{1}{u_1} \Rightarrow \frac{1}{u_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{v_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \end{aligned} \quad [52]$$

y por definición la distancia focal f_c del sistema formado por las dos lentes es la distancia imagen de los rayos paraxiales provenientes del infinito ($u_1 = \infty \Rightarrow v_2 = f_c$), lo cual nos permite hallar

$$P_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = P_1 + P_2 \quad [53]$$

Hemos deducido que la potencia de un sistema formado por dos lentes es la suma de las potencias de las lentes.

Con un razonamiento simple se puede deducir el aumento lateral total que resulta de ese sistema de lentes, tal como proponemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.32.

En un sistema formado por dos lentes convergentes delgadas, hállese la relación entre el aumento lateral del sistema y el de cada una de las lentes.

Teniendo en cuenta que la distancia imagen de una de las lentes se convierte en la de un objeto virtual de la segunda lente obtuvimos

$$\left(\frac{1}{u_2} = -\frac{1}{v_1} ; \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_c} \right) \quad \frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_c}$$

que es la ley general de las lentes, pero para una lente compuesta. Se deduce que u_1 es la distancia objeto y v_1 la distancia imagen para el sistema com-

puesto, por lo que el aumento lateral debe ser definido como

$$m_c = -\frac{v_2}{u_1} = -\frac{v_2}{(-v_1)} \frac{(-v_1)}{u_1} = -\frac{v_2}{u_2} \frac{(-v_1)}{u_1} = m_1 m_2$$

Se concluye que el aumento lateral de un sistema de lentes delgadas es el producto de aumentos de las componentes.

Estamos en disposición de estudiar los *defectos ópticos* más habituales en el ojo humano. Comenzamos por la *hipermetropía*, que se caracteriza por la dificultad para ver con nitidez los objetos próximos. El cristalino no es capaz de adoptar la suficiente curvatura. Esto hace que las imágenes de los objetos próximos se formen por detrás de la retina. Lo más característico de las personas hipermétropes es que, cuando no disponen de lentes correctoras, tienen que separar los escritos a una distancia superior a los 25 cm para poder leer. Como hemos visto, esto quiere decir que su punto próximo se ha desplazado más allá de los 25 cm. Todas las personas tienden a la hipermetropía con la edad porque los músculos ciliares pierden fuerza. Veamos a continuación algunos ejemplos donde se ilustra la hipermetropía y las lentes que hay que emplear para corregirla.

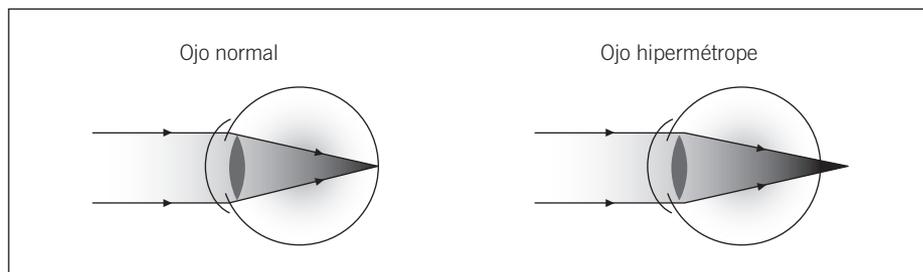


Figura 7.64. En un ojo hipermetrope la imagen se forma detrás de la retina.

Ejemplo 7.33.

Una persona hipermetrope tiene el punto próximo a 50 cm en lugar de los 25 cm normales. a) ¿Qué tipo de lentes habrá que usar para corregir este defecto? b) ¿Serán útiles esas lentes para ver «de lejos»? b) Calcúlese qué distancia focal y qué potencia (expresada en dioptrías) tendrá la lente correctora.

a) El ojo defectuoso enfoca sobre la retina aquellos objetos que se hallan, como mínimo, a 50 cm. Por tanto, habrá que colocarle unas lentes de modo que los objetos situados a 25 cm formen una imagen virtual a 50 cm. Esto quiere decir que hay que usar una lente convergente (de aumento) con una distancia focal superior a los 25 cm, de modo que los objetos situados a 25 cm formen una imagen virtual respecto al ojo, situada al menos a 50 cm.

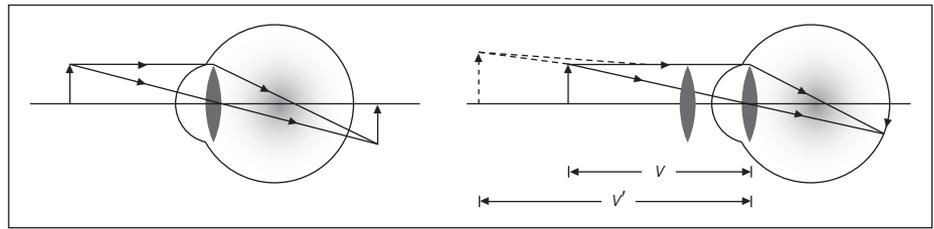


Figura 7.65. Corrección de la hipermetropía.

b) Por lo que acabamos de decir, las lentes para ver «de cerca» no deben ser usadas para mirar «de lejos», pues no formarán una imagen correcta. De hecho, las gafas «de leer» de las personas mayores no se usan para ver a distancia (salvo las bifocales, si tienen también dificultades con el punto lejano).

c) Calculemos ahora la distancia focal de la lente para esa situación. Por lo que hemos dicho en el apartado a), resulta que interesa que los objetos a $u_c = 25 \text{ cm}$ formen una imagen, gracias a las lentes correctoras, virtual —la distancia llevará signo negativo— a $v_c = -50 \text{ cm}$. De la ley general de las lentes se deduce fácilmente

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u_c} - \frac{1}{|v_c|} = \frac{|v_c| - u_c}{u_c |v_c|} \Rightarrow f = \frac{u_c |v_c|}{|v_c| - u_c} = \frac{0,25 \text{ m} \times 0,50 \text{ m}}{0,50 \text{ m} - 0,25 \text{ m}} = 0,5 \text{ m}$$

y la potencia necesaria resulta

$$P = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ m}^{-1} = 2 \text{ dioptrías}$$

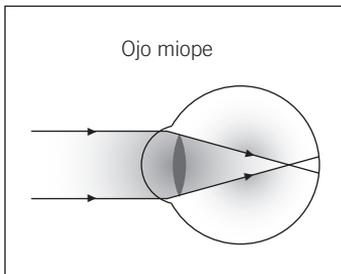


Figura 7.66. Imagen que se forma en un ojo miope.

Lo característico de la *miopía* es la dificultad en la visión de lejos, a la vez que habitualmente se consigue ver con claridad a distancias menores de 25 cm. Así pues, el miope tiene el punto lejano a una distancia finita y el próximo a menos de 25 cm. Debido a una excesiva curvatura del cristalino, o a un diámetro ocular superior al normal, las imágenes provenientes de puntos muy lejanos se forman antes de la retina, es decir, no quedan enfocadas. La miopía se puede corregir con lentes divergentes (potencia negativa) o bien operando la córnea, aumentando su radio de curvatura —es decir, aplanándola ligeramente— mediante un bisturí de rayos láser. Planteamos unos ejemplos en que se analizan estas situaciones.

Ejemplo 7.34.

Un ojo miope tiene el punto remoto situado a 5 m, es decir, no ve con nitidez más allá de esa distancia. a) ¿Qué tipo de lente debe usarse para corregir este defecto? b) Calcúlese la distancia focal y la potencia (en dioptrías) de esa lente. c) ¿Afectará esa lente en la vista «de cerca»?

a) Delante de un ojo con ese defecto hay que colocar una lente que forme imágenes virtuales de objetos lejanos, a una distancia igual o menor de

5 m. Como vimos en el apartado dedicado a las lentes, este efecto lo consiguen las lentes divergentes, que siempre producen imágenes virtuales, derechas y más cercanas a la lente.

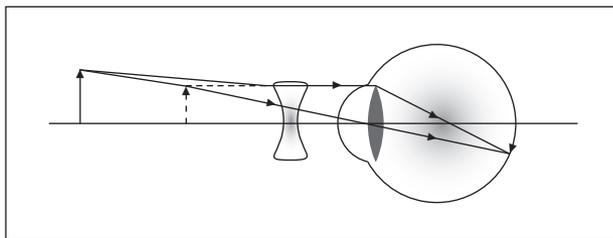


Figura 7.67. Corrección de la miopía.

b) En una lente divergente tanto la distancia focal como la distancia a la imagen virtual son negativas. Como interesa que los objetos lejanos ($u_l = \infty$) (punto remoto) formen imágenes a 5 m, usando la ley general de las lentes delgadas

$$\frac{1}{u_l} + \frac{1}{v_l} = \frac{1}{f_l} \quad (u_l = \infty), \quad \frac{1}{v_l} = \frac{1}{f_l} \Rightarrow f_l = v_l = -5 \text{ m}$$

y la potencia (que es negativa para una lente divergente) es

$$P = \frac{1}{f} = \frac{1}{v} = \frac{1}{(-5)} = -0,2 \text{ dioptrías}$$

c) Una lente con esas características modificará también la visión cercana, puesto que los objetos situados a 25 cm formarán imágenes virtuales a distancias menores

$$\frac{1}{u_c} - \frac{1}{|v_c|} = -\frac{1}{|f_l|} \Rightarrow \frac{1}{|v_c|} = \frac{1}{|f_l|} + \frac{1}{u_c} = \frac{u_c + |f_l|}{|f_l|u_c} \Rightarrow v_c = \frac{|f_l|u_c}{u_c + |f_l|}$$

y sustituyendo los valores del apartado anterior llegamos a

$$v_c = \frac{|f_l|u_c}{u_c + |f_l|} = \frac{5 \text{ m} \times 0,25 \text{ m}}{0,25 \text{ m} + 5 \text{ m}} = 0,238 \text{ m} = 23,8 \text{ cm}$$

de tal manera que la corrección «de lejos» afecta muy poco a la vista «de cerca» (cambio de 25 cm a 24 cm).

Ejemplo 7.35.

El globo ocular de una persona normal tiene 2,5 cm. Supongamos que un individuo tiene un globo ocular deforme, de manera que la córnea y el cristalino son normales, pero la distancia de este último a la retina es 2,7 cm. a) ¿Qué tipo de defecto visual resulta? b) ¿En cuánto habrá variado la gama de

potencias respecto a una persona normal? (véanse los resultados del Ejemplo 7.27). c) ¿Qué potencia han de tener las lentes correctoras?

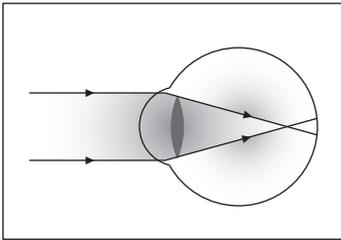


Figura 7.68.

a) La situación resultante se dibuja en la Figura 7.68, del que se deduce que este ojo será miope.

b) Siguiendo un esquema similar al empleado en el Ejemplo 7.27, calculamos la gama de potencias para los puntos próximo y remoto resultantes. Hay que conseguir que este ojo enfoque sobre la retina objetos que están en el punto próximo, es decir, $u_p = 25$ cm, y forman la imagen sobre la retina $v'_p = 2,7$ cm. En esta situación la potencia P'_p , cuando el ojo enfoque al punto próximo, vale

$$P'_p = \frac{1}{f'_p} = \frac{1}{u_p} + \frac{1}{v'_p} = \frac{v'_p + u_p}{u_p v'_p} = \frac{2,7 \times 10^{-2} + 0,25}{0,25 \times 2,7 \times 10^{-2}} = 41 \text{ dioptrías}$$

Ese ojo de cerca necesita sólo 41 dioptrías, en lugar de las 44 de un ojo normal. (Esto indica que puede enfocar a distancias inferiores a 25 cm, es decir, que tiene el punto próximo más cercano al ojo que una persona normal.)

Enfocando de lejos $u_l = \infty$ sobre la retina $v'_l = 2,7$ cm, la potencia P'_l en este caso vale

$$P'_l = \frac{1}{f'_l} = \frac{1}{u_l} + \frac{1}{v'_l} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2,7 \times 10^{-2}} = \frac{10^2}{2,7} = 37 \text{ dioptrías}$$

Así pues, de lejos este ojo necesita sólo 37 dioptrías, tres menos que un ojo normal. (Esto significa que no tiene suficiente potencia, es más pequeña que la de un ojo normal, razón por la cual tiene problemas para enfocar objetos distantes.)

c) Como vimos en la expresión [53], la potencia resultante de un sistema de dos lentes es la suma de las potencias de cada una de ellas

$$P' (\text{ojo}) = P (\text{normal}) + P (\text{lente})$$

de modo que se puede corregir ese defecto colocando unas lentes divergentes con una potencia

$$\begin{aligned} P (\text{lente}) &= P' (\text{ojo}) - P (\text{normal}) = 41 - 44 (\text{cerca}) = \\ &= 37 - 40 (\text{lejos}) = -3 \text{ dioptrías} \end{aligned}$$

Se consigue el efecto deseado con una lente divergente de -3 dioptrías.

Otro defecto, que normalmente surge con la edad, es la *presbicia* o vista cansada, provocada por una pérdida de elasticidad en el cristalino y en los músculos ciliares, lo que da lugar a un acortamiento del punto remoto y, a la vez, un alejamiento del punto próximo. Este defecto se corrige con lentes bifocales: la lente tiene una parte superior divergente que acomoda la visión remota y una inferior «para leer» convergente, que permite enfocar de cerca. (Actualmente se usan lentes con una curvatura variable, las llamadas lentes «multifocales», cuya potencia es variable y la persona que las usa ha de buscar el punto que mejor enfoca los objetos para las diversas distancias.)

Ejemplo 7.36.

Una persona que padece presbicia tiene el punto próximo situado a 0,75 m del ojo y el remoto a 5 m. ¿Entre qué valores extremos debe variar la potencia de unas gafas multifocales para que le permitan ver bien de cerca y de lejos?

De los ejemplos anteriores se deduce que la potencia para corregir el punto próximo ha de ser positiva y la del punto remoto negativa. Comencemos por la primera. Como normalmente al mirar algo de cerca giramos los ojos hacia abajo, en la parte inferior de la gafa multifocal debe haber una zona con la potencia mayor. Ésta se calcula

$$P_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{u_c} - \frac{1}{|v_c|} = \frac{|v_c| - u_c}{u_c |v_c|} = \frac{0,75 \text{ m} - 0,25 \text{ m}}{0,25 \text{ m} \times 0,75 \text{ m}} = 2,67 \text{ dioptrías}$$

La potencia para ver de cerca, en la parte inferior de las gafas, ha de ser 2,67 dioptrías.

Habitualmente enfocamos los ojos hacia los objetos lejanos mirando al frente, de modo que en la parte central de las gafas hay que poner una potencia que corrija el defecto del punto remoto:

$$P_l = \frac{1}{f_l} = \frac{1}{u_l} - \frac{1}{|v_l|} = -\frac{1}{|v_l|} = -\frac{1}{5} \text{ m}^{-1} = -0,2 \text{ dioptrías}$$

La potencia para ver de lejos P_l resulta $-0,2$ dioptrías. De modo que las multifocales deben ir variando la potencia desde 2,67 dioptrías en la parte inferior hasta $-0,2$ en la parte central y superior, aunque no se utilizan lentes correctoras para menos de 0,5 dioptrías.

El *astigmatismo*, en cambio, es un defecto en la esfericidad del sistema ocular, de manera que el ojo no proporciona la misma potencia en todas las direcciones. Los ojos con este defecto ven distorsionados los dibujos con simetría circular (Fig. 7.69). Este defecto se corrige con lentes con una curvatura variable en las distintas direcciones que corrige la falta de esfericidad del ojo.

Otro tema interesante es la visión de los colores. La retina está formada por dos tipos de células fotosensibles: bastones y conos. Los primeros, mucho más numerosos, distinguen la intensidad, pero no el color. Los colores son percibidos por tres tipos de pigmentos que se hallan en los conos y cuyos máximos de sensibilidad se sitúan en 450 nm, 525 nm y 555 nm, respectivamente. No todos los animales tienen los mismos pigmentos. Muchos mamíferos sólo tienen dos tipos de pigmentos, y no distinguen el rojo. Las abejas no perciben el rojo, pero sí el ultravioleta. Las serpientes, en cambio, perciben los infrarrojos, algo muy útil para la visión nocturna. La evolución del ojo y de la visión es un tema muy atractivo y lleno de sorpresas. Los máximos de sensibilidad están relacionados con la temperatura del sol, ya que ésta depende el tipo de radiación más abundante, según vimos en la ley de Wien de la radiación en el Capítulo 4. Si dicha temperatura bajara, por ejemplo, a 4000 K, no veríamos ningún color.

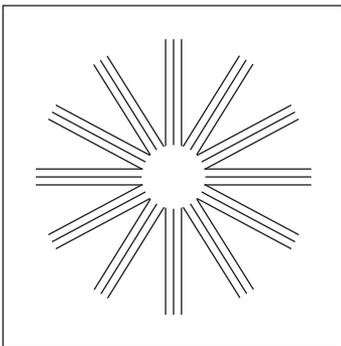


Figura 7.69. Un astigmático ve esta figura circular distorsionada.

7.10. Microscopios

Por su importancia en las ciencias de la vida vamos a ver con detalle los fundamentos del microscopio, sus limitaciones y las variantes más importantes. De este modo, esta sección se convierte en un compendio de casi todos los conceptos que hemos manejado en este capítulo, pues intervienen aquí los problemas de refracción y reflexión, los de interferencia y difracción, las lentes, la visión, etc.

El microscopio más sencillo consiste en un sistema de dos lentes convergentes, separadas entre sí una cierta distancia, con las que se pretende conseguir el máximo aumento posible. Vimos en la sección anterior que cuando dos lentes están en contacto la potencia de la resultante es la suma de potencias. Pero se puede conseguir situaciones más favorables variando la posición de una u otra de las imágenes. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.37.

Dos lentes, la primera con una distancia focal $f_1 = 2 \text{ cm}$ y la segunda con $f_2 = 5 \text{ cm}$, respectivamente, están separadas 13 cm . Se coloca un objeto a $2,5 \text{ cm}$ de la primera lente. Determínese la posición de la imagen que se forma y el aumento lateral que se consigue con esta disposición.

Aplicando la ecuación general a la primera lente podemos calcular a qué distancia v_1 se forma la imagen

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow v_1 = \frac{f_1 u_1}{u_1 - f_1} = \frac{0,02 \times 0,027 \text{ m}}{0,027 \text{ m} - 0,02 \text{ m}} = 0,077 \text{ m} = 7,7 \text{ cm}$$

Como las lentes están separadas una distancia $d = 13 \text{ cm}$ y ésta es, por construcción, la suma de la distancia imagen de la primera lente más la distancia objeto de la segunda

$$d = v_1 + u_2$$

deducimos que la distancia objeto de la segunda lente u_2 es

$$u_2 = d - v_1 = 0,130 \text{ m} - 0,077 \text{ m} = 0,053 \text{ m} = 5,3 \text{ cm}$$

Era conveniente hacer este cálculo para comprobar que

$$u_2 > f_2 \quad (5,3 \text{ cm} > 5 \text{ cm})$$

por lo que la imagen resultante será real y estará situada una distancia v_2 de la segunda lente, que vale

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow v_2 = \frac{u_2 f_2}{u_2 - f_2} = \frac{0,053 \text{ m} \times 0,05 \text{ m}}{0,053 \text{ m} - 0,05 \text{ m}} = 0,883 \text{ m} = 88,3 \text{ cm}$$

El aumento lateral del sistema compuesto es simplemente el producto de los aumentos de las lentes

$$\begin{aligned}
 m_c &= m_1 \times m_2 = \frac{-v_1}{u_1} \frac{-v_2}{u_2} = \frac{v_1}{u_1} \frac{v_2}{d - v_1} = \\
 &= \frac{7,7 \text{ cm}}{2,7 \text{ cm}} \times \frac{88,3 \text{ cm}}{13 \text{ cm} - 7,7 \text{ cm}} = 47,5 \text{ aumentos}
 \end{aligned}$$

La imagen resulta con la misma orientación que el objeto. Con este dispositivo de lentes se logra aumentar 47,5 veces los objetos.

Pero en el *microscopio* se utilizan dos lentes, una llamada *objetivo*, más cercana al portaobjetos, y otra *ocular*, a través de la cual se observa. La preparación microscópica sobre el portaobjetos se sitúa muy cerca, pero más allá de la distancia focal del objetivo. Éste se halla a una distancia regulable respecto al ocular, de modo que su imagen se forme entre el foco —y muy cerca de éste— y la segunda lente. De este modo, el ocular produce una imagen virtual, invertida y mucho mayor, tal como se indica en la Figura 7.70.

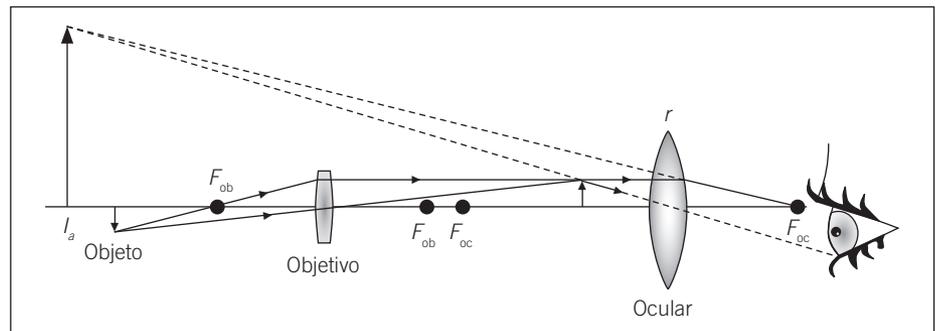


Figura 7.70. Esquema de funcionamiento de un microscopio.

Resumamos esas características generales en el esquema siguiente (el subíndice 1 hace referencia al objetivo; el 2, al ocular):

1. La distancia objeto-objetivo, ligeramente mayor que la distancia focal del objetivo ($u_1 > \approx f_1$).
2. La distancia d objetivo-ocular, elegida de tal modo que la imagen formada por el objetivo esté ligeramente más allá de la distancia focal del ocular ($u_2 < \approx f_2$).
3. El ocular forma una imagen final, virtual e invertida y situada a 25 cm de éste, donde la visión es mejor ($v_2 = -25 \text{ cm}$).

El aumento del microscopio viene dado por el producto de los aumentos que consiguen cada una de las lentes y tiene signo negativo, pues la imagen final resulta invertida respecto al objeto.

Ejemplo 7.38

Un microscopio tiene un objetivo con distancia focal $f_1 = 4 \text{ mm}$ y un ocular con $f_2 = 2,5 \text{ cm}$. a) ¿A qué distancia del ocular ha de estar la imagen formada por el objetivo para que la imagen resultante se forme a la distancia de máxima visión? b) Si la separación entre el objetivo y el ocular es de 18 cm, ¿a qué distancia está el objeto del objetivo? c) ¿Qué aumento total resulta en un microscopio con estas características?

a) Para resolver la primera pregunta basta aplicar la ecuación de las lentes delgadas, en el caso de una imagen virtual, que –como se nos dice en el enunciado– se ha de formar a $v_2 = -25 \text{ cm}$ (hay que tomar el signo – por tratarse de una imagen virtual)

$$\frac{1}{u_2} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{|v_2|} = \frac{f_2 + |v_2|}{f_2 |v_2|}$$

e invirtiendo y sustituyendo valores se obtiene

$$u_2 = \frac{f_2 |v_2|}{f_2 + |v_2|} = \frac{2,5 \times 10^{-2} \text{ m} \times 0,25 \text{ m}}{2,5 \times 10^{-2} \text{ m} + 0,25 \text{ m}} = 2,27 \times 10^{-2} \text{ m} = 2,27 \text{ cm}$$

En efecto, la distancia de la imagen del objetivo al ocular u_2 es ligeramente más pequeña que la distancia focal f_2 del ocular (2,27 cm frente a 2,5 cm).

b) La distancia objetivo-ocular d es simplemente la suma de la distancia imagen del objetivo más la de esta imagen al ocular

$$d = v_1 + u_2$$

de modo que $v_1 = d - u_2 = 18 \text{ cm} - 2,27 \text{ cm} = 15,73 \text{ cm}$. Aplicando ahora la ley de las lentes delgadas al objetivo se obtiene

$$\frac{1}{u_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{v_1} = \frac{v_1 - f_1}{f_1 v_1}$$

Invirtiendo esta expresión y usando los valores obtenidos se llega a

$$u_1 = \frac{v_1 f_1}{v_1 - f_1} = \frac{0,1573 \text{ m} \times 0,004 \text{ m}}{0,1573 \text{ m} - 0,004 \text{ m}} = 4,10 \times 10^{-3} \text{ m} = 4,10 \text{ mm}$$

de modo que el objeto se halla a 4,1 milímetros del objetivo.

c) El aumento total viene dado por el producto de los aumentos laterales de cada una de las lentes

$$m_t = m_1 \times m_2 = \frac{-v_1}{u_1} \times \frac{-v_2}{u_2} = \frac{-15,73 \text{ cm}}{0,410 \text{ cm}} \times \frac{25 \text{ cm}}{2,27 \text{ cm}} = -422 \text{ aumentos}$$

(Nótese que como m es una cantidad sin dimensiones, basta que se tomen las mismas unidades en el numerador y denominador, centímetros en este caso.)

Hay una manera aproximada, pero bastante buena, de calcular el número de aumentos teniendo en cuenta los tres factores que hemos escrito anteriormente ($u_1 \approx f_1$, $u_2 \approx f_2$, $v_1 \approx d - f_2$, $v_2 = 25 \text{ cm}$)

$$\begin{aligned}
 m_t &= m_1 \times m_2 \approx -\frac{(d - f_2)}{f_1} \frac{25 \text{ cm}}{f_2} = \\
 &= \frac{-(20 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm})}{0,4 \text{ cm}} \frac{25 \text{ cm}}{2,5 \text{ cm}} = -437 \text{ aumentos}
 \end{aligned}$$

El error que introducimos con esta aproximación es de tan sólo $15/422 = 3,5$ por 100. (Esta aproximación es tanto más buena cuanto más pequeña es la distancia focal del ocular.)

En principio se podría pensar que con una disposición conveniente se puede llegar a conseguir muchos aumentos con un microscopio compuesto, pero en realidad la difracción limita mucho esta posibilidad. En efecto, se comentó en la sección anterior que el ojo no puede resolver al natural más allá de $0,1 \text{ mm}$, lo cual llevaba a la conclusión de que la agudeza visual —consecuencia de los efectos de difracción— está en torno a $\phi \approx 2 \times 10^{-4}$ rad. Esa situación se mejora usando lupas, que pueden conseguir bastantes aumentos, aunque está limitada también por las aberraciones. En su lugar, para ver objetos muy pequeños —bacterias, células, etc.— se usa el microscopio compuesto. Pero ese aumento tampoco puede superar las barreras que impone la difracción, es decir, no permite ver con nitidez, por más aumentos que se apliquen, objetos de un tamaño muy inferior al de la λ de la luz incidente. En concreto, veamos a continuación que la resolución máxima (tamaño del objeto más pequeño que se puede observar) está en torno a la mitad de la longitud de onda de la luz que se emplea para iluminar.

Abbe propuso un criterio acerca del poder de resolución de un microscopio aceptado ampliamente. El *criterio de Abbe* supone que con el fin de poder aumentar fielmente un objeto, el objetivo ha de tener un radio (apertura) suficiente para que pueda pasar al menos el máximo central y el primer máximo de la figura de difracción (sombra) del objeto a observar, al ser iluminado. (De hecho, cuanto mejor se recoge la imagen de difracción del objeto, tanto mejor es la visión que de él se obtiene con el microscopio.)

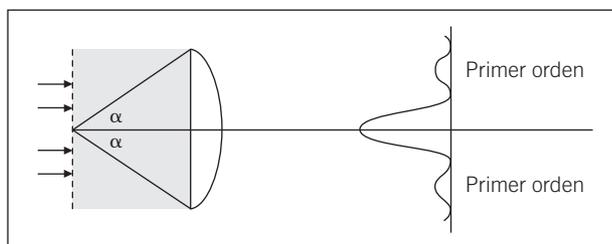


Figura 7.71. Imagen de difracción de un objeto sobre el ocular de un microscopio, que ilustra el criterio de Abbe.

Supóngase que entre el objeto y el ocular hay un medio con índice de refracción n y que el objeto tiene una longitud d . Entonces el criterio de Abbe nos dice que el ocular recogerá hasta el primer máximo de interferencia si

$$d \operatorname{sen} \alpha = \lambda' \quad [54]$$

siendo λ' la longitud de onda de la luz en el medio situado entre el ocular y la muestra observada. Como la longitud de onda de la luz en aire λ está relacionada con λ' como $\lambda = n\lambda'$, la expresión anterior resulta

$$d \operatorname{sen} \alpha = \frac{\lambda}{n} \quad [55]$$

o, escrito de otra forma,

$$d = \frac{\lambda}{n \operatorname{sen} \alpha} \quad [56]$$

de modo que la distancia se hará tanto menor, es decir, el *poder de resolución* del microscopio será mayor cuanto mayor sea el ángulo α . (Nótese que un microscopio tiene un poder de resolución mayor cuando es capaz de distinguir objetos más pequeños.) El término en el denominador es lo que se conoce como *apertura numérica*, magnitud que figura junto a la magnificación en muchos microscopios. De hecho, usando una lente condensadora de la luz antes de pasar por la muestra se puede conseguir mejor resolución, que queda finalmente:

$$d = \frac{\lambda}{2n \operatorname{sen} \alpha} \quad [57]$$

Los constructores de lentes del siglo XIX se dieron cuenta empíricamente de que al aumentar el cono de luz que llegaba del objeto hacia el ocular, tanto mayor era la nitidez con que se apreciaba. Sin embargo, como siempre ha de quedar una distancia entre el objetivo y la muestra, el ángulo α no llega a alcanzar el valor límite $\alpha = 90^\circ$.

Hay dos maneras de mejorar el poder de resolución: reducir la longitud de onda o poner un líquido transparente con un índice de refracción alto entre el objeto y el objetivo. Lo primero se consigue usando luz ultravioleta, con longitudes de ondas menores que las del visible. Este es el fundamento del *microscopio ultravioleta*, en el que se obtiene además mayor contraste, pues algunas sustancias de interés biológico absorben ese tipo de radiación; tiene, sin embargo, el inconveniente de que hay que usar lentes especiales y película fotográfica sensible a dicha radiación. El segundo procedimiento se consigue mediante los objetivos de inmersión, colocando una gota de un aceite con n próximo al del vidrio (diversos tipos de aceites transparentes). Con todo, la máxima apertura numérica que se obtiene en la práctica está en torno a 1,4.

Ejemplo 7.39.

Usando el criterio de Abbe, determínese: a) el tamaño del menor objeto que se puede apreciar mediante un microscopio con apertura numérica 1,4, iluminado con luz verde ($\lambda = 500 \text{ nm}$), b) el máximo aumento que sirve para

observar al microscopio a simple vista. (Recuérdese que la distancia más pequeña que aprecia una persona normal es $d' = 0,1 \text{ mm}$.)

a) Para responder esta pregunta basta aplicar la relación vista anteriormente

$$d = \frac{\lambda}{2n \operatorname{sen} \alpha} = \frac{500 \text{ nm}}{2 \times 1,4} = 178 \text{ nm}$$

b) Puesto que el máximo poder de resolución del ojo sin ayuda es $d' = 0,1 \text{ mm}$ –valor limitado por la difracción–, el máximo aumento que se puede obtener de un objeto es aquel que nos permita, desde el poder de resolución del microscopio, llegar a esa cifra, lo que es equivalente a escribir

$$\text{P.R. (ojo)} = d' = \text{P.R. (microscopio)} \times M_m = d \times M_m$$

donde M_m es el aumento máximo. De esta relación se calcula fácilmente

$$M_m = \frac{10^{-4} \text{ m}}{1,78 \times 10^{-7} \text{ m}} = 562 \text{ aumentos}$$

Mediante dispositivos adicionales —películas sensibles, por ejemplo— se puede obtener hasta 1 000 y 1 500 aumentos. Pero, además del aumento de la imagen, interesa también obtener el máximo contraste. Para ello se recurre a preparaciones teñidas o al uso de algunas propiedades de la luz que permiten poner de relieve los detalles interesantes. Hay microscopios que usan *luz polarizada*, especialmente si las preparaciones a estudiar contienen moléculas que cambian la dirección de polarización (birrefringentes), como sucede con algunas sustancias biológicas. Basta entonces situar un analizador con un eje de polarización a 90° respecto al de la luz incidente para eliminar la mayor parte de la luz (véase la Sección 7.6), quedando únicamente la luz procedente de aquellas moléculas.

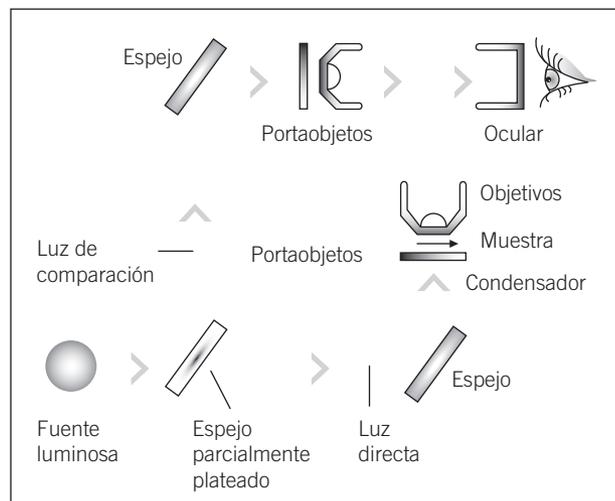


Figura 7.72. Esquema de un microscopio de interferencia.

Otra clase importante es la de los microscopios de *interferencia* y los de *contraste de fases*. Ambos tipos se basan en que la luz, al atravesar un medio con índice de refracción distinto al del aire, queda desfasada respecto a la que no lo atraviesa. Ese cambio de fase no es perceptible por el ojo humano, pero hay dos dispositivos capaces de transformarla en diferencia de amplitud. El primero consiste en dividir inicialmente un haz de luz: uno de los haces atraviesa la muestra, que presenta un índice de refracción dependiente del espacio, es decir, de la situación de los objetos en la muestra, y el segundo se hace pasar a través de un medio transparente calibrado. Se vuelve a superponer los haces, produciéndose un efecto de variación de intensidad (interferencia) en las zonas en las que hay una diferencia de índice de refracción entre la muestra y el medio calibrado, de modo que esos detalles de la muestra aparecen menos intensos.

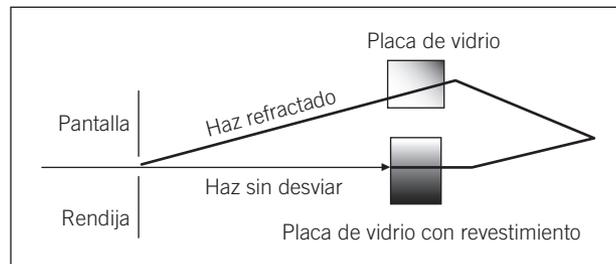


Figura 7.73. Diagrama de interferencia entre los dos haces de difracción, al atravesar el haz central un medio absorbente y el del primer máximo un espesor de vidrio que lo desfasa en $1/4 \lambda$.

Damos una somera idea del segundo tipo: el microscopio de contraste de fase. Éste se basa en un ingenioso método, ideado por Zernike en 1932 y que le valió el premio Nobel en 1953. En este microscopio se explota el hecho de que entre el máximo central y el primer máximo de difracción hay un desfase de un cuarto de longitud de onda. Como el máximo central es mucho más intenso que el primero lateral, se le hace pasar a través de vidrio con un absorbente, de modo que las intensidades entre los dos haces que se estudian llegan a ser iguales. Simultáneamente, el haz correspondiente al primer máximo de difracción atraviesa un vidrio de un espesor tal que lo desfasa en un cuarto de onda adicional. De este modo, los dos haces al incidir en un punto dan lugar a una interferencia destructiva, pues tienen igual amplitud y están desfasados en una semilongitud de onda. Por tanto, mediante un solo haz, y colocando una placa de vidrio con una parte absorbente y otra retardadora de la luz en $1/4 \lambda$, se consigue una mancha uniforme en todo el campo de observación, salvo aquellos detalles de la muestra que dan lugar a difracción. El esquema del microscopio se recoge en la Figura 7.74. Se sitúa entre la fuente luminosa y la muestra primero un diafragma anular, que hace que la luz al pasar a través de una lente condensadora, cuya misión es focalizar la luz sobre la muestra, la luz que emerge de ésta pasa a través del objetivo y después atraviesa una *placa de fase* que contiene una ranura con un material absorbente de la luz y el resto produce un desfase en la luz

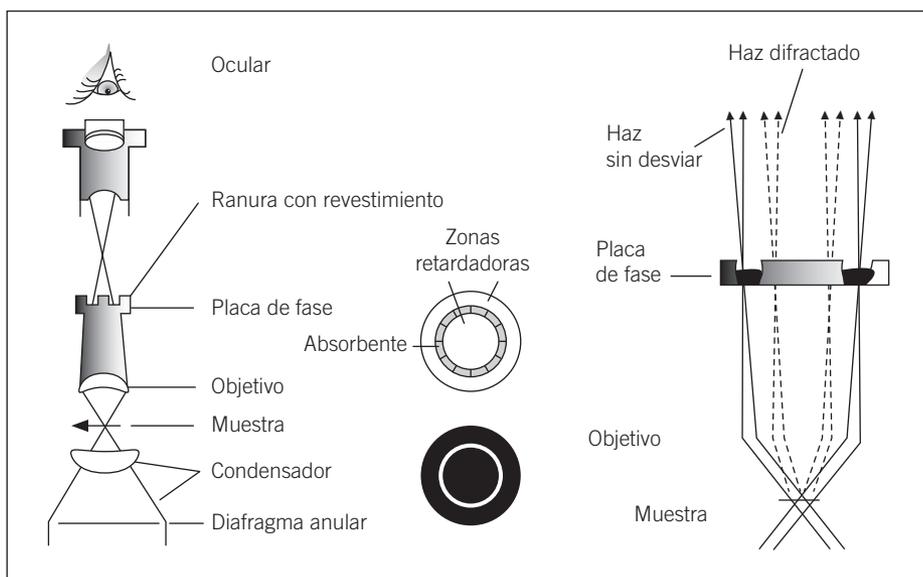


Figura 7.74. Marcha de los rayos en un microscopio de contraste de fases.

que lo atraviesa de $1/4 \lambda$. Si no hay muestra o ésta es uniforme, no se producen efectos de difracción y lo que se observa en el ocular es una mancha circular uniforme. Pero si la muestra transparente contiene objetos que producen difracción, éstos producirán manchas oscuras, pues se produce interferencia destructiva entre el haz proveniente del diafragma y el del primer máximo de difracción, pues ambos tendrán –gracias a la constitución de la placa de fase– igual amplitud y estarán en oposición de fase (desfasados en $1/2 \lambda$).

Problemas propuestos

1. Las ondas de radio de onda media y de frecuencia modulada tienen frecuencias del orden de los 1000 kHz y de los 100 MHz, respectivamente. Hallar sus correspondientes longitudes de onda en el vacío.

Resultados: a) 300 m; b) 3 m.

2. Hallar las frecuencias correspondientes a la luz roja de 680 nm y a la luz azul de 450 nm de longitud de onda en el vacío. ¿Cuál sería su respectiva longitud de onda en agua ($n = 1,34$) o en vidrio ($n = 1,50$)? ¿Y su frecuencia?

Resultados: a) 507,46 nm, 335,82 nm (en agua); b) 453,33 nm, 300 nm (en vidrio); c) $f = 4,41 \times 10^{14}$ Hz (roja), $f = 6,67 \times 10^{14}$ Hz (azul).

3. El diamante tiene un índice de refracción muy elevado, aproximadamente de 2,5. Hallar la velocidad de propagación de la luz en el interior del diamante.

Resultado: $1,2 \times 10^8$ m/s.

4. Dos rayos idénticos de longitud de onda de 550 nm atraviesan una disolución. Uno de ellos atraviesa una célula de 0,1 mm de espesor y de índice de refracción 1,332, mientras que el otro atraviesa una distancia igual de índice 1,330. Determinar la diferencia de fases introducida entre los dos rayos.

Resultado: 2,26 rad.

5. Luz amarilla de 589 nm de longitud de onda incide sobre un par de rendijas produciendo un diagrama de interferencia en el cual dos franjas brillantes consecutivas están separadas 0,53 cm. Con una segunda fuente luminosa dichas franjas se encuentran separadas 0,63 cm. ¿Cuál es su longitud de onda?

Resultado: 700,13 nm.

6. Dos rendijas paralelas separadas 2×10^{-4} m se iluminan con luz roja de longitud de onda de 680 nm. Hallar en qué ángulos se producen los cinco máximos centrales de la figura de interferencia.

Resultados: 0 rad, $\pm 3,40 \times 10^{-3}$ rad y $\pm 6,80 \times 10^{-3}$ rad.

7. En las dos aberturas de un experimento de Young iluminado con luz blanca se interpone primero un filtro verde y luego un filtro rojo. ¿Cuántas veces aumentará la distancia entre dos máximos consecutivos? (λ verde = 500 nm, λ rojo = 650 nm).

Resultado: 1,3.

8. Una red de difracción de 5000 líneas por centímetro se ilumina con luz blanca. Calcular la posición angular de los primeros máximos correspondientes a la luz amarilla de 590 nm, la roja de 680 nm y la azul de 450 nm. Este fenómeno se puede observar fácilmente al mirar un disco microsurco iluminado al sesgo.

Resultados: amarilla, $2,95 \times 10^{-3}$ rad; roja, $3,40 \times 10^{-3}$ rad; azul, $2,25 \times 10^{-3}$ rad.

9. Luz de color verde ($\lambda = 540$ nm) que incide normalmente se difracta en una red que contiene 2000 líneas/cm. Calcular: a) La desviación angular del máximo de tercer orden. b) ¿Puede recogerse el máximo de orden 10?

Resultados: a) 8° , b) no.

10. Una red de difracción tiene 1000 rayas/cm. Se ilumina perpendicularmente con una luz de 450 nm. Hallar: a) el máximo orden de difracción posible, b) el máximo de difracción de cuarto orden.

Resultados: a) 22, b) $10^\circ 22'$.

11. Una macromolécula rectilínea, al ser iluminada con rayos X de 2 \AA de longitud de onda, produce sobre una pantalla fosforescente máximos con una separación angular de 0,2 rad. Evaluar la separación interatómica en la molécula ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$).

Resultado: $d = 10 \text{ \AA}$.

12. Comparar el ángulo de difracción de la luz de 550 nm en el ojo de un gato (o de una serpiente) y en el de

un hombre, cuando la anchura o el diámetro de la pupila respectiva vale 1 mm. Comentar la diferencia.

Resultados: gato (pupila rectilínea), $5,50 \times 10^{-4}$ rad; hombre (pupila circular), $6,71 \times 10^{-4}$ rad.

13. Una fibra de vidrio de índice de refracción 1,6 es recubierta de vidrio menos denso, de índice 1,5. ¿Cuál es el ángulo límite para la luz que llega a la intercámara desde la fibra?

Resultado: $69^\circ 38'$.

14. Calcular el índice de refracción de una sustancia con relación al aire sabiendo que su ángulo límite es de 30° .

Resultado: 2.

15. En el centro del fondo de un recipiente cilíndrico de 18 cm de radio hay una moneda de diámetro pequeño. El recipiente contiene agua hasta una altura x , y quedan sin llenar 1,5 cm. Mirando desde el borde del recipiente, el primer rayo luminoso que se observa forma con la pared vertical un ángulo cuya tangente vale 4. Calcular el volumen del recipiente.

Resultado: $12981,5 \text{ cm}^3$.

16. Sea una fibra óptica de índice de refracción n_1 rodeada de una capa de índice n_2 . Le entran los rayos por la cara A de un medio con índice n_0 . Calcular la relación entre estos índices para que todos los rayos que pasen dentro de un cono con ángulo «a» queden atrapados en su interior.

Resultado: $(n_2^1 - n_2^2)/n_0^2 = \text{sen}^2 a$.

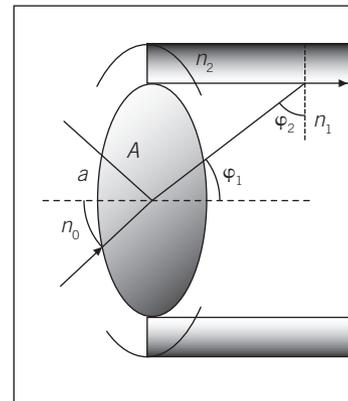


Figura 7.74.

17. Un muchacho de 1,6 m de altura ve su imagen en un espejo plano vertical situado a una distancia de él igual a 3 m. Los ojos del muchacho se encuentran a 1,5 m del suelo. Determinar la altura y la situación del espejo.

Resultado: altura del espejo = 0,8 m, situado a 0,75 m del suelo.

18. Cuando una determinada muestra biológica es atravesada por la luz de longitud de onda de 426 nm en el vacío, esta luz se divide en dos haces polarizados perpendicularmente entre sí, siendo sus respectivos índices de refracción 1,316 y 1,332. *a)* ¿Cuáles son las velocidades y las longitudes de onda de estos haces en el interior de la muestra? *b)* Si la muestra tiene un espesor de 0,001 mm, ¿cuál es la diferencia de fase introducida entre los dos haces al atravesarla?

Resultados: *a)* $c'_1 = 2,28 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, $c'_2 = 2,25 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$; *b)* $\Delta\phi = 0,2362 \text{ rad}$.

19. La distancia focal de una lente de material de índice de refracción n , rodeada por un medio de índice de refracción n' , limitada por superficies curvas de radio de curvatura R_1 y R_2 , viene dada por

$$\text{Potencia} = \frac{1}{f} = \frac{(n - n')}{n'} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

(véase la ecuación [38])

Los valores de los radios se consideran positivos para superficies convexas y negativos para las cóncavas. Sabiendo que la potencia del cristalino del ojo humano puede variar desde 15 hasta 30 dioptrías en los procesos de adaptación a visión remota o próxima, hallar el radio de curvatura de las superficies del cristalino en ambas situaciones. Índice de refracción (promedio) del cristalino, 1,40; índice de refracción de los humores acuosos y vítreo, 1,34.

Resultados: *a)* $R_1 = 6 \text{ mm}$, *b)* $R_2 = 3 \text{ mm}$.

20. Hallar la distancia focal de una lente de vidrio ($n = 1,5$) en aire ($n' = 1$) formada por: *a)* dos superficies convexas de radios de curvatura 0,1 y 0,2 m; *b)* una superficie plana y una convexa de radio de curvatura 0,2 m; *c)* dos superficies cóncavas de radios 0,4 y 0,5 m; *d)* ¿cuáles serían las respectivas distancias focales si se sumergieran dichas lentes en agua? ($n' = 1,33$).

Resultados: *a)* 13,33 cm; *b)* 40 cm; *c)* 44,4 cm; *d)* 52,16 cm; 156,47 cm; 173,68 cm.

21. Un objeto está a 21 cm de una lente de 14 cm de distancia focal. *a)* Determinar la distancia de la imagen a la lente. *b)* ¿Cuál es el aumento lateral de la imagen?

Resultados: *a)* $v = 42 \text{ cm}$; *b)* $m = 2$.

22. La distancia focal entre la lente de un proyector y la diapositiva se puede variar de 22 a 30 cm; la distancia focal de la lente es 21 cm (Fig. 7.48). ¿Cuál es la menor distancia entre la lente y la pantalla a la que se puede enfocar una imagen? ¿A qué distancia hemos de fijar la pantalla de 2 m de anchura para que una diapositiva de 35 mm pueda llenarla completamente?

Resultados: $v_{\text{menor}} = 70 \text{ cm}$; $v_{\text{pantalla}} = 11,8 \text{ m}$.

23. Un proyector de diapositivas está a 12 m de una pantalla de 1,5 m de anchura. ¿Qué distancia focal debe tener la lente para que la imagen de una diapositiva de 35 mm llene la pantalla?

Resultado: 0,27 m.

24. ¿Cuál es el aumento de una lupa de 15 dioptrías suponiendo que forma la imagen virtual a 25 cm?

Resultado: 4,75.

25. Una máquina fotográfica con un objetivo de 50 mm de distancia focal está enfocada en un grupo de personas situado a 3 m de la lente, de distancia focal de 50 mm. ¿Cuál es la distancia de la lente a la película? ¿Cuánto vale el aumento de la lente? Si la anchura de la película es 24 mm, ¿cuál es la máxima altura de una persona cuya imagen llena toda la película?

Resultados: $s' = 50,85 \text{ mm}$; $m = 0,017$; $h = 1,41 \text{ m}$.

26. Una cámara fotográfica con un teleobjetivo de 100 mm, ¿cuántas dioptrías tiene? La distancia de la lente a la película puede variarse desde 100 hasta 125 mm. ¿Cuáles son las distancias mínima y máxima a las que un objeto produce una imagen nítida sobre la película?

Resultados: $P = 10 \text{ dioptrías}$; $v_{\text{máx}} = \infty$, $v_{\text{mín}} = 0,5 \text{ m}$.

27. Un objetivo de 50 mm de distancia focal puede separarse de la película 75 mm como máximo. *a)* ¿Cuál es la mínima distancia a la cual se puede fotografiar? Intercalamos un anillo de aproximación de 1,5 cm de grosor entre el objetivo y la película. *b)* ¿A qué distancia mínima podemos ahora aproximar el objeto? *c)* ¿Cuáles son las magnificaciones respectivas si se amplía diez veces la imagen de la película?

Resultados: *a)* $u = 15 \text{ cm}$; *b)* $u = 11,25 \text{ cm}$; *c)* $m = 5$; $m' = 8$.

28. En la máquina fotográfica del problema anterior, ¿cuál es la distancia mínima a la que se puede fotografiar un objeto si se añade al objetivo de 50 mm una lente convergente, en contacto con el mismo, de $f = 15$ mm? ¿Cuál es la magnificación, en este caso, si ampliamos diez veces la imagen de la película?

Resultados: a) 13,64 mm; b) 5,5.

29. Una cámara fotográfica provista de un teleobjetivo de 450 mm de distancia focal obtiene una fotografía de un objeto que se encuentra a 60 m de distancia. ¿A qué distancia del objeto debería estar una cámara con un objetivo de 50 mm?

Resultado: $u = 6,65$ m.

30. Una máquina fotográfica tiene un objetivo de 35 mm. Hacemos una fotografía con el diafragma de 22. ¿Cuál será la dimensión de la mancha producida por un objeto luminoso puntiforme situado en el infinito? (Suponemos que se trata de una luz amarilla de longitud de onda de 550 nm.) Ampliamos el cliché diez veces, ¿se advertirá la mancha a simple vista? (El cliché lo miramos desde 25 centímetros de distancia; el poder de resolución del ojo es 2×10^{-4} rad.)

Resultados: $R = 1,47 \times 10^{-5}$ m; ($\varphi' = 5,9 \times 10^{-4} > 2 \times 10^{-4}$ rad, se verá una mancha).

31. El índice de refracción de un determinado vidrio vale 1,517 para luz roja de 660 nm y 1,527 para luz azul de 486 nm. ¿Cuáles son las distancias focales correspondientes para una lente de dicho vidrio limitada por dos superficies convexas de 0,1 y 0,2 m, respectivamente, de radios de curvatura? El diferente poder focalizador de una lente para los diversos colores hace que se produzcan diversas imágenes de un mismo objeto, según los diferentes colores. Este fenómeno se conoce como aberración cromática.

Resultados: a) 12,89 cm (luz roja); b) 12,65 cm (luz azul).

32. La potencia del cristalino en el ojo relajado vale 15 dioptrías. ¿Cuál sería la potencia del cristalino si en vez de hallarse entre los humores del ojo ($n' = 1,34$) se hallara en el aire ($n' = 1$)? El índice de refracción del cristalino es, en promedio, 1,40.

Resultado: $P \approx 134$ dioptrías.

33. El radio de curvatura de la córnea es de unos 7,7 mm, y su índice de refracción es 1,38. ¿Cuál sería la potencia de una lente de dicho material limitada por la córnea y por una superficie plana? Dicho cálculo muestra cómo una buena parte del poder de enfoque del ojo proviene de la córnea. ¿Cuál sería la potencia de dicha lente si en vez de estar en contacto con el aire lo estuviera con el

agua? El resultado explica por qué no podemos ver con nitidez bajo el agua a no ser que llevemos gafas especiales para buceo ($n'_{\text{agua}} = 1,34$).

Resultados: a) 49,35 dioptrías; b) 3,88 dioptrías.

34. Calcular el ángulo de difracción de la luz ($\lambda = 550$ nm) al pasar por la pupila (5 mm de diámetro). ¿Desde qué distancia podemos comenzar a distinguir como manchas separadas las letras de un escrito, si la separación entre ellas es de 1 mm?

Resultado: 7,6 m.

35. a) ¿Cuánto vale el radio de la mancha de difracción producida en la retina de un ave nocturna si su pupila (circular) tiene 5 mm de diámetro y el globo ocular tiene 15 mm de diámetro? b) ¿Distinguirá dos luciérnagas separadas entre sí 1 m a 4 km de distancia? (Longitud de onda de la luz emitida por las luciérnagas, 500 nm.)

Resultados: a) 1800 nm, b) sí.

36. La lente de un ojo relajado tiene una distancia focal efectiva de 17 mm. El diámetro de la pupila varía entre 1,5 y 8 mm según la intensidad de la luz. ¿Cuáles serían los números de diafragma del ojo, según el convenio de las máquinas fotográficas?

Resultados: $F_1 = 11,3$; $F_2 = 2,12$.

37. Una persona hipermetrope tiene el punto próximo a 150 cm en vez de tenerlo a los 25 cm normales. ¿Cuántas dioptrías han de tener las gafas para corregir esta deficiencia?

Resultado: $P = 3,3$ dioptrías.

38. La distancia focal de una persona corta de vista es de 1,90 cm en lugar de los 20 mm de distancia entre la retina y el cristalino en una persona normal. ¿Cuál es la máxima distancia a la que esta persona podrá ver bien? ¿Qué potencia, en dioptrías, han de tener las lentes para corregir su visión?

Resultados: $u_{\text{máx}} = 38$ cm; $P = -2,63$ dioptrías.

39. a) ¿Qué gafas deben prescribirse para un ojo miope cuyo punto próximo está a 10 cm del ojo? b) Un ojo miope no ve más allá de 80 cm, ¿cuál es la potencia en dioptrías de la lente que le permite ver claramente los objetos distantes? c) Un hipermetrope no puede ver claramente objetos que están más cerca de 75 cm. Determinar la potencia de la lente que le permita leer un libro a 25 cm.

Resultados: a) -6 dioptrías; b) $-1,25$ dioptrías; c) 2,67 dioptrías.

40. Si la distancia focal de la córnea es de unos 30 mm, ¿cuál habría de ser la distancia focal del cristalino para enfocar sobre la retina la imagen de un objeto distante? La distancia cristalino-retina es de unos 20 mm. Despréciese la distancia córnea-cristalino.

Resultado: 60 mm.

41. Por un defecto de los músculos ciliares, el cristalino de una determinada persona tiene, en reposo, un radio de curvatura de 8 mm en vez de los 6 mm que corresponderían a la visión normal. Dicha persona, ¿será miope o hipermetrope? Justificar la respuesta.

Resultado: hipermetrope.

42. Un microscopio de disección está diseñado para que exista una gran distancia entre el objeto y el objetivo. Supongamos que en uno de estos microscopios la distancia focal del objetivo es de 5 cm y la del ocular de 4 cm y que ambas lentes están separadas 17 cm. *a)* ¿Cuál es la distancia entre el objeto y el objetivo? *b)* ¿Cuál es la magnificación del microscopio?

Resultados: *a)* 7,92 cm; *b)* -12,40 aumentos.

43. Comparar las magnificaciones de los dos microscopios siguientes: *a)* $f(\text{obj}) = 0,4$ cm, $f(\text{ocul}) = 3$ cm, $d = 16$ cm; *b)* $f(\text{obj}) = 1$ cm, $f(\text{ocul}) = 2$ cm, $d = 12$ cm.

Resultados: *a)* 301,54; *b)* 123,5 aumentos.

44. Un microscopio tiene un objetivo de 0,3 cm de distancia focal y 0,8 cm de diámetro. Encontrar el límite de resolución del microscopio cuando se observan objetos en el aire, suponiendo que la longitud de onda sea 560 nm.

Resultado: 251 nm.

45. Una persona hipermetrope que tiene el punto próximo a 75 cm observa objetos al microscopio con un objetivo de 0,5 cm de distancia focal y un ocular de 5 cm. *a)* Calcular cuál es la mínima distancia objetivo-ocular para enfocar un objeto situado a 0,52 cm del objetivo. *b)* ¿Cuál será el aumento máximo que obtendrá esa persona con este microscopio. *c)* ¿Cuál sería el aumento que obtendría una persona normal? *d)* ¿Cuál es la relación de aumentos que consigue la persona hipermetrope y la normal? Razonarlo.

Resultados: *a)* 17,68 m, *b)* -400, *c)* -133, *d)* 3.

46. Una onda luminosa incide perpendicularmente sobre una superficie transparente. Parte de dicha onda se refleja y parte se refracta. La fracción de intensidad reflejada al pasar de un medio de índice n_1 a un medio de índice n_2 viene dada por $I_r/I_0 = (n_1 - n_2)^2 / (n_1 + n_2)^2$. Hallar la fracción de intensidad luminosa que llega al ojo después de haber atravesado el objetivo y el ocular de un microscopio simple (es decir, cuatro interfaces entre medios de índice de refracción 1 y 1,5).

Resultado: 85 por 100.

47. Tanto los experimentos de interferometría como el microscopio de contraste de fase tienen un fundamento parecido. Para comprender el fenómeno proponemos el siguiente ejemplo cuantitativo. Dos ondas de la misma frecuencia y amplitud inciden en un mismo punto. La amplitud resultante es 1,85 veces la amplitud de las ondas incidentes. ¿Cuál es la diferencia de fases entre las ondas incidentes? (Hállese la suma de dos funciones sinusoidales.)

Resultado: $\Delta\varphi = 44,26^\circ$.

48. Un ojo humano adaptado a la oscuridad puede empezar a percibir una sensación luminosa cuando recibe 500 fotones incidentes por segundo sobre los $2,5 \times 10^{-9}$ m² de la pupila del ojo. ¿Cuál es el valor de dicha potencia umbral, en W m⁻², para luz de 500 nm de longitud de onda? ¿A qué distancia máxima podrá percibirse una bombilla de 60 W que emita uniformemente radiación en todos los sentidos?

Resultados: *a)* $7,96 \times 10^{-8}$ W m⁻²; *b)* $7,75 \times 10^3$ m.

49. Los ojos de algunos peces tienen un sistema de acomodación completamente diferente del de los mamíferos. En lugar de tener un cristalino flexible de potencia variable y distancia constante a la retina, tienen un cristalino rígido que se puede acercar o alejar de la retina, como en las máquinas fotográficas. El cristalino de un cierto pez tiene una distancia focal de 2,5 cm y enfoca la luz de un objeto remoto sobre la retina. ¿Cuánto se debe desplazar el cristalino, y en qué dirección, para enfocar nítidamente un objeto situado a 25 cm?

Resultado: 0,2 cm.

CAPÍTULO

8

Radiactividad:
núcleos, desintegraciones, efectos
biológicos

El propósito de este capítulo es la presentación de algunos conceptos y definiciones con una finalidad eminentemente práctica en lo que concierne a la comprensión de los efectos biológicos de las radiaciones ionizantes y a su papel en medicina (radioterapia) y en ciencias ambientales, en lo que pueda afectar, por ejemplo, a problemas como el almacenamiento de residuos radiactivos de centrales nucleares o a las consecuencias de algunos accidentes. Por otro lado, el uso de moléculas radiactivas como trazadores en numerosos procesos biológicos requiere también la comprensión de aspectos físicos básicos como los presentados en este capítulo. Por ello, presentamos de forma muy breve algunos fundamentos físicos y a continuación procederemos al enunciado y razonamiento de los temas de mayor interés, referidos especialmente a la radiactividad y a sus efectos biológicos.

8.1. Las relaciones de Einstein-Planck y de De Broglie

Es importante tener claras las analogías y diferencias entre física atómica y física nuclear. En ambos casos el objeto de estudio es microscópico, en contraste con el análisis macroscópico que caracteriza la mayor parte de este texto, y para su análisis se precisa la mecánica cuántica. Como diferencia fundamental, la interacción predominante en física atómica es la electromagnética entre los electrones, negativos, y los núcleos, positivos, mientras que en física nuclear juegan un papel primordial dos tipos de interacción, la *fuerte* y la *débil*, de muy corto alcance, imperceptibles a escala atómica. Esto último es debido a la gran diferencia entre las dimensiones del mundo atómico (del orden de 10^{-10} m) y el mundo nuclear (10^{-15} m).

Por tratarse en ambos casos de sistemas ligados (electrones ligados al núcleo por la atracción electromagnética en el átomo; nucleones, es decir, protones y neutrones, ligados entre sí por las interacciones fuertes en el núcleo), su energía sólo puede tener determinados valores, correspondientes a ciertos estados o niveles cuantificados. Cuando el sistema pasa de un estado a otro, por intercambio de un electrón o de un nucleón entre sus niveles, cede o absorbe energía en forma de radiación electromagnética. La frecuencia f de ésta viene determinada por la diferencia entre las energías de los estados respectivos según la relación de Einstein:

$$E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = hf \quad [1]$$

donde h es la constante de Planck. Precisamente, la idea de Planck de que el intercambio de energía en la radiación electromagnética no es continuo, sino que se lleva a cabo de forma discreta, en múltiplos enteros de un cuanto elemental de energía hf , siendo f la frecuencia de la radiación y h una constante dada por $6,63 \times 10^{-34}$ J s, sirvió para explicar el espectro de la radiación del cuerpo negro e inició la teoría cuántica, en 1900.

Estos conceptos: cuantificación de valores energéticos, asociados a determinados estados estacionarios, y absorción o emisión de energía al pasar de un estado a otro, son comunes a física atómica y nuclear. Hay, sin embargo, dos diferencias importantes: en el caso atómico resulta fácil recurrir

a la imagen de un modelo planetario para imaginar estas órbitas –insistimos en que esta imagen no corresponde a la correcta, pero menos intuitiva, de nubes de probabilidad–. En el caso nuclear, ni siquiera aquel modelo sirve de base a la imaginación: los estados son fuertemente colectivos, algo así como vibraciones de una gota de agua, por citar alguna imagen más o menos sensible. La segunda diferencia proviene de los valores de las diferencias de energía. Como veremos en el Ejemplo 8.1, cuanto menor es el sistema, mayor es la separación entre sus niveles energéticos. Por ello, en el núcleo las diferencias entre niveles energéticos son mucho mayores que en el átomo. Por consiguiente, si las frecuencias de las radiaciones absorbidas o emitidas por el átomo se sitúan en las zonas visible, infrarroja y ultravioleta, la frecuencia de los fotones emitidos por el núcleo debe ser mucho mayor. Es este el origen de la radiación gamma (γ), análoga a la radiación electromagnética emitida o absorbida por los electrones al saltar entre niveles en el átomo, pero emitida o absorbida por el salto de nucleones entre niveles nucleares, y mucho más energética.

Por otra parte, cuando se trata de interpretar algunos experimentos que se dan a escala atómica y nuclear se hace también imprescindible entender la naturaleza de la luz o, más en general, de las ondas electromagnéticas.

La imagen tradicional imperante al final del siglo XIX de la luz como una onda fue cuestionada por Planck y Einstein, que, al interpretar ciertos experimentos, como la radiación del cuerpo negro y el efecto fotoeléctrico, utilizan la idea de la luz como un flujo de partículas, llamadas fotones. De este modo coexisten dos interpretaciones y otros tantos grupos de experimentos que atribuyen a la luz naturaleza ondulatoria y naturaleza corpuscular. Esta aparente situación contradictoria empezó a aclararse cuando el físico francés Louis de Broglie sugirió que toda la materia, incluso aquellos objetos de los cuales tenemos una imagen corpuscular más evidente, muestra también un comportamiento ondulatorio.

Esta sugerencia, confirmada experimentalmente a los pocos años de ser formulada, configura la imagen que de la física de lo más pequeño tenemos hoy. Sin embargo, si toda la materia tiene asociado un comportamiento ondulatorio, ¿por qué es tan difícil detectarlo? ¿Qué ocurre cuando no se ve, «a simple vista», el comportamiento ondulatorio de una bala, de una bola de billar o de un bólide de Fórmula 1? La respuesta de De Broglie se basa en el pequeño valor de la constante de Planck.

En efecto, De Broglie sugirió que una partícula moviéndose con un momento p tiene asociada una onda de longitud de onda λ dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad [2]$$

De acuerdo con esta ecuación, la longitud de onda asociada al movimiento de una bola de billar o de un bólide de Fórmula 1 es ínfima. Así, dado el valor muy pequeño de la constante de Planck, para observar una onda con una λ apreciable p debe tener valores suficientemente pequeños, imposibles de alcanzar por los objetos macroscópicos.

En los ejemplos que siguen, ilustramos algunos aspectos relacionados con estas dos relaciones.

Ejemplo 8.1.

En una de las contribuciones decisivas a la física cuántica, De Broglie estableció que una partícula con momento lineal p tiene asociada una onda cuya longitud de onda es $\lambda = h/p$. Hallar los niveles de energía permitidos para una partícula encerrada en una caja unidimensional de longitud L .

Los estados posibles de la partícula corresponden a las ondas estacionarias que se anulan en las paredes de la caja. Como vimos en el Capítulo 4, en el estudio de las ondas estacionarias en una cuerda de longitud L fijada por los extremos, las longitudes de onda posibles vienen dadas por $\lambda_n = 2L/n$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. Si introducimos esta expresión para λ_n en la relación de De Broglie [2] obtenemos para los momentos posibles

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L}$$

Como la energía cinética viene dada por $E = mv^2/2 = p^2/2m$ ya que $p = mv$, y como la energía potencial de la partícula es nula, los valores posibles de la energía de la partícula serán

$$E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{nh}{2L} \right)^2 = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

Se observa que cuanto menor es el tamaño L de la zona en que se halla confinada la partícula mayor es la separación entre niveles energéticos para dos números cuánticos, n , dados. Como el átomo es unas 10^4 veces mayor que el núcleo, las energías características del núcleo serán del orden de 10^8 veces mayores. Por ello, si la energía característica de los fotones procedentes de los átomos son del orden de 1 eV, las energías de los fotones procedentes de saltos entre niveles nucleares serán del orden de las centenas de MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-13} \text{ J}$) aproximadamente. Por este motivo los rayos γ son tan energéticos.

Ejemplo 8.2.

En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, hallar los niveles de energía del átomo suponiendo que sólo son posibles aquellas órbitas electrónicas que contengan un número entero de veces la longitud de onda asociada con el movimiento del electrón.

Como la longitud de onda viene dada, según la relación [2] por $\lambda = h/p = h/mv$ y la longitud de la órbita de radio r es $2\pi r$, la condición del enunciado conduce a $2\pi r/\lambda = n$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. Ello puede escribirse como

$$2\pi r m v = n h$$

que es la condición de cuantificación de Bohr, que constituyó la base del célebre modelo del átomo capaz de explicar el espectro de líneas de absorción o emisión y que tanto impulso dio a la mecánica cuántica desde 1913.

Por otro lado, la ecuación del movimiento del electrón alrededor del núcleo se obtiene igualando la fuerza de atracción electrostática con la fuerza centrípeta, es decir,

$$m \frac{v^2}{r} = K \frac{Ze^2}{r^2}$$

siendo Ze la carga del núcleo con Z el número átomo, e la carga del electrón (en valor absoluto) y K la constante de la ley de Coulomb. Por otro lado, la energía total (cinética más potencial electrostática) del electrón en la órbita de radio r es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - K \frac{Ze^2}{r}$$

Al combinar las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$$E = -\frac{1}{2}K \frac{Ze^2}{r}$$

Por otro lado, la ecuación del movimiento conduce a $v^2 = KZe^2/mr$. Ello nos permite escribir v en función de r y escribir la condición de Bohr como

$$r_n = n^2 \frac{h^2}{4\pi m K Z e^2} = n^2 \frac{a_0}{Z}$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$, etc, y $a_0 = h^2 (4\pi m K e^2)^{-1} = 5,2 \times 10^{-11}$ m el llamado radio de Bohr, que es el radio de la órbita correspondiente a $n = 1$, el estado fundamental. Las energías posibles serán pues

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{KZe^2}{r_n} = -\frac{2K^2e^4m\pi^2}{h^2} \frac{Z^2}{n^2} = -Z^2 \frac{E_0}{n^2}$$

con $E_0 = \frac{2\pi^2K^2e^4m}{h^2} \approx 13,6$ eV. Este conjunto de valores es observado

mediante espectroscopia, ya que las frecuencias observadas corresponden a saltos entre niveles cuyas energías están dadas por la ecuación anterior. Las expresiones matemáticas que sistematizaban las frecuencias o las longitudes de onda observadas en las medidas espectroscópicas eran conocidas desde finales del siglo XIX, pero su explicación constituyó un enigma hasta que Bohr propuso su modelo.

8.2. Energía de enlace: defecto de masa

Las interacciones gravitatoria y electromagnética son incapaces de explicar la existencia del núcleo, ya que en éste se acumulan cargas positivas (protones) en un espacio muy reducido, de modo que la repulsión electrostática entre ellos es enorme, muy superior a la atracción gravitatoria que los podría mantener unidos. La presencia de neutrones en el interior del núcleo

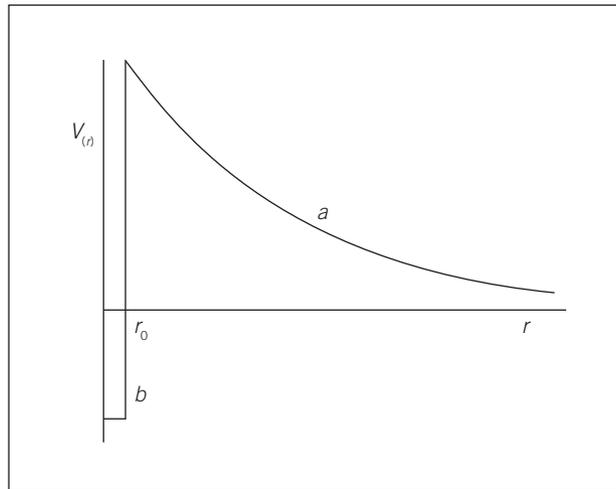


Figura 8.1. Potencial de interacción entre dos protones. A distancias mayores que r_0 ($\approx 10^{-15}$ m) sólo hay entre ellos la repulsión electrostática (curva *a*) que dificulta su aproximación. A distancias menores que r_0 , la repulsión electrostática es superada por la interacción nuclear fuerte atractiva (curva *b*), que produce un pozo de potencial de gran profundidad.

no mitiga el problema. Es imprescindible, pues, postular la existencia de una nueva interacción, muy fuerte y de muy corto alcance. Ésta mantiene unidos los nucleones en ciertas configuraciones nucleares, para deshacer las cuales se ha de suministrar cierta energía al sistema. El valor de la energía que se debe suministrar a un núcleo para descomponerlo en todos sus nucleones por separado se denomina *energía de enlace*. Éste es, igualmente, el valor de la energía que cederían los nucleones al pasar desde un estado en que todos ellos estuvieran separados, a gran distancia el uno del otro, hasta hallarse todos juntos formando el núcleo que se considera. El valor de esta energía se manifiesta en la pérdida de masa, con la cual se relaciona mediante la famosa *fórmula de Einstein*:

$$\Delta E = (\Delta m)c^2 \quad [3]$$

donde ΔE es la energía de enlace, c la velocidad de la luz y Δm el defecto de masa, definida como

$$\Delta m = \text{suma de las masas de los nucleones por separado} - \text{masa real del núcleo}$$

La suma de las masas de los nucleones viene dada por el número de protones, o *número atómico* Z , multiplicado por la masa de un protón ($m_p = 1,00728$ u.m.a., donde 1 u.m.a., unidad de masa atómica, vale $1,66 \times 10^{-27}$ kg), más el número de neutrones, $A - Z$, multiplicado por la masa del neutrón ($m_n = 1,00866$ u.m.a.). Aquí, A es el *número másico* del núcleo, es decir, la suma del número de protones más el de neutrones que lo componen. La masa real del núcleo es menor que la suma de las masas de los nucleones que lo componen. Esta pérdida de masa equivale, según la relación de Einstein, a la energía cedida en el proceso de formación del núcleo. Los datos experimentales confirman plenamente la relación [3].

Se acostumbra a designar los núcleos como A_ZX , con X el símbolo químico del elemento de número atómico Z . Cada elemento químico puede tener diversos isótopos, núcleos con el mismo número de protones Z , pero distinto número de neutrones, es decir, distinto valor de A .

Ejemplo 8.3.

El radio de un núcleo de número másico A viene dado por la expresión $r = 1,3 \times 10^{-15} A^{1/3}$ m. a) ¿Cuál es la densidad del núcleo? (1 u.m.a. = $1,6 \times 10^{-27}$ kg). b) En una estrella de neutrones toda la materia está condensada a la densidad del núcleo. ¿Cuál sería el radio de una estrella de neutrones que tuviera la masa del Sol? (masa del Sol, 2×10^{30} kg, aproximadamente).

a) El número másico es la suma del número de protones más el de neutrones, los cuales pesan, aproximadamente, 1 u.m.a. (en realidad, la masa de un protón vale 1,00728 u.m.a., mientras que la del neutrón es 1,00866 u.m.a.). Así pues, la masa de un núcleo de número másico A es $1,6 \times 10^{-27} A$ kg y su volumen es $(4/3)\pi(1,3)^3 10^{-45} A$ m³. Su densidad es pues

$$\begin{aligned} \text{densidad} &= \text{masa/volumen} = (1,6 \times 10^{-27} A \text{ kg}) / (9,24 \times 10^{-45} A \text{ m}^3) = \\ &= 1,73 \times 10^{17} \text{ Kg m}^{-3} \end{aligned}$$

b) El volumen de una estrella de neutrones cuya masa fuera la del Sol sería

$$\begin{aligned} \text{volumen} &= \text{masa/densidad} = (2 \times 10^{30} \text{ kg}) / (1,73 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}) = \\ &= 1,15 \times 10^{13} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

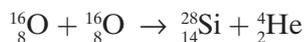
Como volumen = $(4/3)\pi r^3$, su radio valdría

$$r = (3 \times 2 \times 10^{30} / \pi \times 1,73 \times 10^{17})^{1/3} \text{ m} = 1,40 \times 10^4 \text{ m}$$

Este valor es mucho menor que el radio de la Tierra ($6,38 \times 10^6$ m): tan sólo 14 km. Ello nos da un buen ejemplo de la gran fracción de volumen vacía en la materia habitual, y de la gran densidad que se alcanza, tanto en los núcleos como en las estrellas de neutrones.

Ejemplo 8.4.

Calcular la energía liberada en la reacción



La masa del ${}^{28}_{14}\text{Si}$ es 27,97693 u.m.a., la del ${}^{16}_8\text{O}$ es 15,99491 u.m.a., la del ${}^4_2\text{He}$ 4,00260 u.m.a. (1 u.m.a. = $1,66 \times 10^{-27}$ kg).

La energía liberada en una reacción nuclear viene dada por la relación [3].

Según esta relación, por cada u.m.a. (unidad de masa atómica) de pérdida de masa se liberan 931,48 MeV.

En la reacción del enunciado, la masa inicial es

$$2m_{16\text{O}} = 2(15,99491 \text{ u.m.a.}) = 31,98982 \text{ u.m.a.}$$

y la masa final vale

$$m_{28\text{Si}} + m_{4\text{He}} = 27,97693 + 4,000260 = 31,97953 \text{ u.m.a.}$$

La pérdida o defecto de masa en la reacción es

$$\Delta m = m_{\text{inicial}} - m_{\text{final}} = 31,98982 - 31,97953 = 0,01029 \text{ u.m.a.}$$

Como por cada u.m.a. se desprenden 931,48 MeV, la energía liberada en dicha reacción es

$$\Delta E = 0,01029 \text{ u.m.a.} (931,48 \text{ MeV/u.m.a.}) = 9,58 \text{ MeV}$$

por cada núcleo de ^{28}Si producido. La energía por mol de ^{28}Si es, pues, una cantidad enorme de energía. De esta reacción, que tiene lugar en estrellas cuatro o más veces más masivas que el Sol, ha surgido todo el silicio de nuestro planeta.

8.3. Fisión y fusión

En la Figura 8.2 se muestra el valor de la energía de enlace por nucleón (es decir, $\Delta E/A$) en función del número másico o número de nucleones A . Puede observarse que dicha función pasa por un máximo, que se da para núcleos de tamaño intermedio, del orden de $A \approx 56$, correspondiente al hierro. Por ello, al pasar de núcleos muy grandes o muy pequeños a núcleos intermedios, de mayor energía de enlace, se desprende energía. El paso de un núcleo grande con poca energía de enlace por nucleón a dos núcleos menores, de mayor energía de enlace, se denomina *fisión nuclear*. Este proceso es la base de la bomba atómica y de los reactores nucleares convencionales, que constituyen la base de muchas centrales de generación de energía eléctrica en el mundo. La diferencia entre ambos mecanismos estriba en una cuestión de control: el proceso es muy rápido, explosivo, en el caso de la bomba, y lento en el caso del reactor.

El paso de dos núcleos de baja energía de enlace a uno de mayor energía de enlace constituye la *fusión nuclear*, fundamento de la bomba de hidrógeno, de los reactores de fusión y del calentamiento de las estrellas. La ventaja de este último tipo de reactores con respecto a los de fisión sería una mayor abundancia de combustible (hidrógeno o deuterio en la fusión, uranio en la fisión), un mayor rendimiento energético por gramo de combustible y, finalmente, desechos menos peligrosos. Estas tres grandes ventajas hacen que la energía de fusión sea uno de los objetivos prioritarios de investigación en los países desarrollados, aunque se ha revelado mucho más difícil de lo que pareció en un principio, hacia 1945, a causa de numerosas inestabilidades.

Actualmente hay un proyecto propiciado por las más grandes potencias económicas del mundo para desarrollar en Cadarache (Francia), un prototipo de reactor de fusión para generar energía eléctrica.

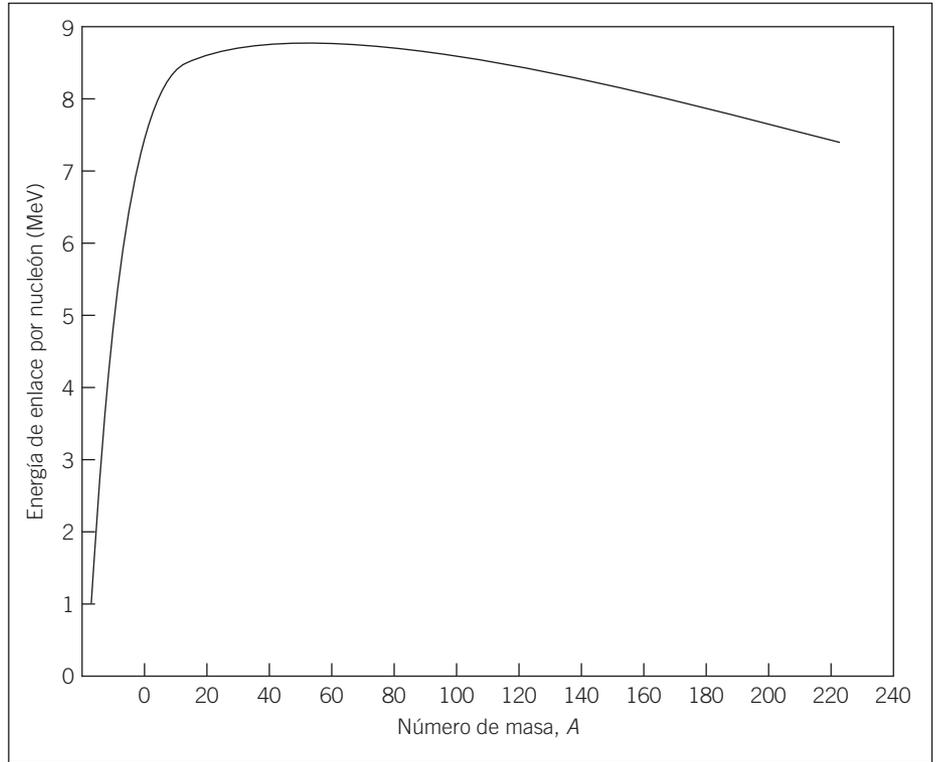


Figura 8.2. Energía de enlace por nucleón en función del número másico.

Para hacer una estimación del rendimiento energético de las reacciones de fisión y de fusión evaluaremos la energía liberada en dos reacciones características.

Ejemplo 8.5.

Evaluar la energía desprendida en la reacción de fisión del uranio



La energía de enlace por nucleón en el ${}^{235}\text{U}$ vale 7,6 MeV, mientras que en los núcleos ${}^{95}\text{Sr}$ y ${}^{139}\text{Xe}$ vale unos 8,5 MeV.

Tenemos en conjunto 235 partículas que pasan desde una energía de enlace de 7,6 MeV a una energía de enlace de 8,5 MeV (la situación sería análoga a la caída de una bola desde un pozo de 7,6 m de profundidad a uno de

8,5 m de profundidad: el paso de una energía de enlace menor a una energía de enlace mayor hace que se libere energía). La energía liberada es pues

$$E = 235 \times (8,5 - 7,6) = 235 \times 0,9 = 211,5 \text{ MeV}$$

Así, la energía liberada en la fusión de 1 gramo de ^{235}U es:

$$\begin{aligned} \frac{E}{1 \text{ gramo}} &= \frac{1 \text{ g}}{235 \text{ (g/mol)}} \times 6 \times 10^{23} \frac{\text{núcleos}}{\text{mol}} \times 211,5 \text{ MeV} = \\ &= 5,4 \times 10^{23} \frac{\text{MeV}}{\text{g}} \end{aligned}$$

La reacción del Ejemplo 8.5 tiene lugar en los reactores nucleares convencionales de muchas centrales nucleares. El estroncio y el xenón que quedan como residuos son radiactivos, y su almacenamiento y acumulación pueden suponer problemas ambientales.

El uranio susceptible de fisión y reacción en cadena es el isótopo ^{235}U , pero el 99 por 100 del uranio que se encuentra en la naturaleza es otro isótopo, el ^{238}U . Para conseguir combustible nuclear de fisión se debe llevar a cabo un enriquecimiento del uranio en su contenido de ^{235}U , lo que se consigue mediante métodos de difusión diferencial, o con ultracentrifugadoras, o con ionización selectiva y es, en todo caso, un proceso costoso. Una posibilidad de incrementar el combustible disponible es utilizar reactores auto-generadores, en que se frena suficientemente a los neutrones de manera que al chocar con el ^{238}U sean absorbidos y den ^{239}Pu , un isótopo del uranio que es tan fisible como el ^{235}U (de hecho, la primera bomba nuclear fue de plutonio). Los posibles usos militares del ^{239}Pu fabricado en este tipo de reactores suponen problemas políticos considerables. Dos accidentes de reactores nucleares han caracterizado la evolución de esta forma de generar energía durante el final del siglo xx y el comienzo del siglo xxi: Three Mile Island en los Estados Unidos el año 1979 y Chernobyl en Ucrania el año 1986. En el accidente de Three Mile Island el núcleo del reactor, es decir el lugar donde tienen lugar las reacciones de fisión, experimentó uno de los supuestos más peligrosos: la fusión. Medio reactor se fundió debido al fallo de los sistemas de refrigeración de la central. No hubo evacuaciones de personas aunque se vertieron al medio ambiente en forma de gases nobles radioactivos unos 480×10^{15} bequerels. En el accidente de la central de Chernobyl el núcleo del reactor se fusionó y explotó. Con la explosión, el núcleo del reactor se incendió y se emitieron a la atmósfera todos los gases nobles que había en el reactor, el 55% de yodo radiactivo con el vapor de agua y partículas al igual que el cesio y el teluro.

Desde entonces en pocos países se ha acometido la construcción de nuevas centrales nucleares de producción de energía eléctrica. Sin embargo, la creciente demanda de energía eléctrica y el carácter limitado de las fuentes tradicionales de energía, basadas en combustibles fósiles, hacen volver a plantearse el uso de la energía de fisión del átomo. Además, el hecho de que la producción de energía de las centrales nucleares esté exenta de emisiones de dióxido de carbono hace esta tecnología especialmente atractiva para colmar las necesidades energéticas del futuro a medio plazo.

Pero las aplicaciones nucleares generan residuos, algunos muy peligrosos dada su actividad radiactiva. Aunque físicamente los volúmenes son muy pequeños comparados con otras aplicaciones, como la industria petroquímica, los residuos son peligrosos, como las barras de combustible usadas, en las que las reacciones nucleares generan isótopos que permanecen radiactivos a lo largo de miles de años como el curio, el neptunio o el americio. También se generan otros residuos de alta actividad que deben ser vigilados, pero que tienen vidas medias cortas, es decir, duran pocos años y pueden ser controlados. El problema de la gestión segura de los residuos es lo que frena una mayor proliferación de la tecnología nuclear para la generación de energía eléctrica.

Existen, sin embargo, estrategias para tratar algunos de los residuos de forma más eficiente, que se planifican para el uso de centrales nucleares de nueva generación (reactores III-IV) que usan *torio* como combustible adicional que degradan los desechos nucleares en un nuevo ciclo de *fisión asistida*. La fisión asistida es un proceso por el cual las sustancias radiactivas completan su ciclo de desintegración ayudados por el bombardeo externo de partículas procedentes de un acelerador. En dicho proceso se libera energía en forma de calor que puede ser reaprovechado para suministrar energía al acelerador y conseguir que el conjunto sea automantenido. Al final del proceso, las sustancias radiactivas se habrán fisionado a un ritmo mucho mayor que el natural y habrán completado o estarán cerca de completar su ciclo de desintegración siendo por tanto sustancias inocuas desde el punto de vista radiactivo o, al menos, fácilmente manejables. También existen métodos de aprovechamiento de algunos de los residuos peligrosos mediante el reciclado, separando los isótopos que pueden aprovecharse en aplicaciones médicas o industriales. Tradicionalmente, sin embargo, el reciclado del combustible nuclear ha tenido aplicaciones militares con la separación de uranio y plutonio, especialmente este último.

El destino final de los combustibles de fisión, en cualquier caso, pasa por el almacenamiento de los residuos que no se pueden eliminar en cuevas o depósitos geológicos profundos, para que queden enterrados durante varios miles de años. Las reservas que hay en esta estrategia es la estabilidad geológica a largo plazo. Otro problema asociado a los reactores de fisión y que dificulta que los países adopten de forma generalizada su desplazamiento es la susceptibilidad de ser objetivos de terroristas.

Actualmente, las centrales nucleares en funcionamiento se refrigeran mediante vapor de agua a presión y alcanzan una temperatura máxima de unos 350 °C. El hecho de que la temperatura inferior sea la de ebullición del agua, es decir 100 °C, confiere un entorno con unos rendimientos bastante bajos. Los diseños de centrales nucleares de nueva generación (cuarta generación) contemplan el uso de refrigerante de helio, plomo, bismuto, sodio y también agua. Estos diseños todavía presentan problemas científicos y tecnológicos por resolver, como el desarrollo de materiales que soporten temperaturas más altas que los actuales, el intenso bombardeo de neutrones de la reacción en cadena y los agentes corrosivos, en los reactores que utilicen sales disueltas como refrigerantes. Estos diseños también comportan que los reactores funcionen a temperatura más alta que en algunos llega a alcanzar los 1000 °C, aunque en media se sitúa entre los 700 °C y 800 °C. El uso de

temperaturas tan altas hace que el rendimiento de los reactores sea superior y que la producción de residuos sea inferior, asociado también a soluciones tecnológicas de reciclaje. Al trabajar con temperaturas tan altas también algunos de estos reactores se diseñan de modo que generen hidrógeno y electricidad previendo que el hidrógeno se use para las células de combustible para la automoción.

Por lo tanto, el progreso científico y tecnológico será clave para el futuro desarrollo de la tecnología nuclear y todos los condicionantes y retos que aún se plantean hacen que la disponibilidad de estas tecnologías se sitúe a partir del segundo cuarto del siglo XXI.

Ejemplo 8.6.

Hallar la energía liberada en la fusión de cuatro núcleos de hidrógeno para formar un núcleo de ${}^4_2\text{He}$. La masa de este último es 4,0026 u.m.a.

La reacción (que, de hecho, tiene lugar a través de varios pasos que constituyen un ciclo complicado) puede representarse, en síntesis, por



La disminución de masa en la reacción es

$$\Delta m = 4 \times 1,007825 - 4,0026 = 0,0287 \text{ u.m.a.}$$

La energía liberada por cada reacción es pues

$$\Delta E = 0,0287 \text{ u.m.a} (931,48 \text{ MeV/u.m.a.}) = 26,7 \text{ MeV}$$

y la energía liberada en la fusión de 1 gramo de hidrógeno es

$$E/\text{gramo} = \frac{1}{4} 26,7 \text{ MeV} \times 6 \times 10^{23} = 40,05 \times 10^{23} \frac{\text{MeV}}{\text{g}}$$

Como vemos al comparar con el resultado del ejemplo anterior, el rendimiento energético de la fusión es muy superior al de la fisión.

Esta reacción es la que comunica energía a las estrellas. La energía solar es una consecuencia de esta reacción.

Los distintos núcleos pesados, entre ellos el carbono, nitrógeno, oxígeno, azufre, hierro y otros que componen nuestro cuerpo, han sido formados por reacciones sucesivas de fusión en las estrellas. Al principio, el hidrógeno da helio; al acabar el hidrógeno, la estrella se compacta y va aumentando lentamente su temperatura hasta que alcanza la temperatura necesaria para que el helio reaccione dando carbono (tres núcleos de helio dan uno de carbono) y oxígeno (un núcleo de carbono puede fusionarse con uno de helio para dar oxígeno). Cuando se inicie la fusión nuclear del helio, el Sol se expandirá considerablemente y engullirá Mercurio y Venus, y desprenderá tanto calor que todas las rocas de la superficie terrestre se fundirán y la vida terminará. Una vez consumido el helio, el Sol no podrá calentarse

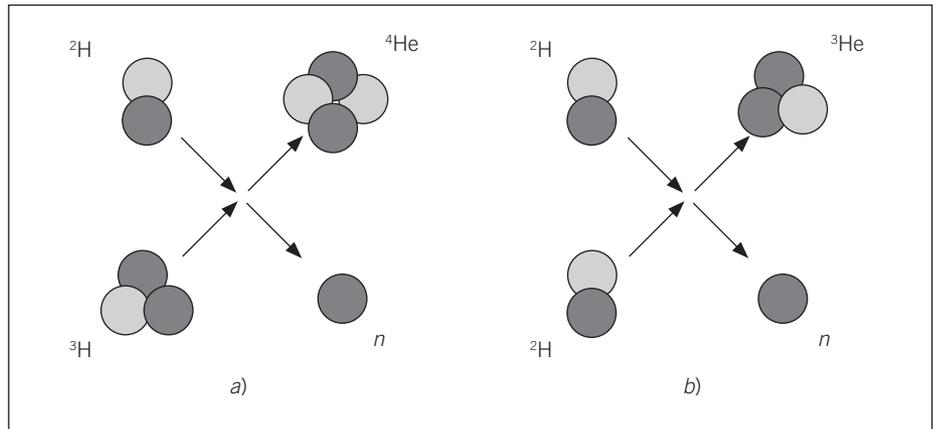


Figura 8.3. Reacciones de fusión nuclear: *a*) un núcleo de deuterio (${}^2\text{H}$) y un núcleo de tritio (${}^3\text{H}$) dan lugar a un núcleo de helio (${}^4\text{He}$) y un neutrón. Esta reacción desprende mucha energía y tiene lugar a temperaturas más bajas que la reacción *b*) en la cual dos núcleos de deuterio (${}^2\text{H}$) se fusionan para dar un núcleo de helio 3 (${}^3\text{He}$) y un neutrón. Por ello, la reacción *a*) será la más utilizada en los futuros reactores de fusión nuclear.

suficientemente para la fusión nuclear del carbono. Sin embargo, esto si se da en estrellas de masas mayores que la del Sol, y así se pueden ir formando núcleos cada vez más pesados hasta el ${}^{56}\text{Fe}$. A partir de éste, los núcleos se han formado en condiciones muy alejadas del equilibrio, durante las violentas explosiones de las supernovas, que pueden liberar en pocos minutos una energía comparable a la que el Sol ha emitido en toda su historia. Estas explosiones esparcen los núcleos pesados por la galaxia, y éstos permitirán posteriormente la formación de planetas sólidos.

8.4. Radiactividad α , β y γ

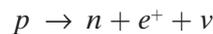
Existen tres tipos principales de radiactividad, es decir, de radiaciones o partículas procedentes del interior de núcleos atómicos y capaces de ionizar átomos y moléculas, denominadas α , β y γ . Hemos comentado ya el origen de la radiación γ , radiación electromagnética de gran frecuencia y energía. Las radiaciones α y β no son propiamente radiaciones, sino partículas: núcleos de helio (es decir, dos protones más dos neutrones) en el caso α , y un electrón o un positrón (o antielectrón) en los casos β^- y β^+ , respectivamente. ¿Cuál es el origen de estas radiaciones?

Éste se debe a la tendencia de los núcleos (los cuales pueden ser representados mediante los dos parámetros ya citados, Z o número de protones, y $N = A - Z$ o número de neutrones) a tener, en lo posible, el mismo número de neutrones que de protones, ya que así, según el principio de exclusión de Pauli, se minimiza la energía. Por otro lado, la repulsión electrostática entre protones favorece que el número de éstos tienda a ser algo menor que el de neutrones, tendencia tanto más acusada cuanto mayor es el núcleo.

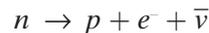
De estas dos tendencias se deduce unos ciertos valores de Z y N preferentes para los núcleos, los cuales tienden a dichas configuraciones. Por ello, al tener un núcleo de composición Z y N no preferente, éste tiende, en algunas ocasiones, a expulsar neutrones y protones (caso α) o a convertir protones en neutrones, con emisión de un positrón y de un neutrino (radiación β^+) o a convertir neutrones en protones, emitiendo en este caso un electrón y un antineutrino (radiación β^-). Estos dos últimos procesos de la radiación β se deben a la interacción nuclear débil. En la actualidad se ha conseguido la unificación de las interacciones electromagnéticas, débiles, y fuertes en un esquema unificado. Sólo la interacción gravitatoria queda por ahora lejos del ideal de la unificación de todas las interacciones conocidas en una sola interacción.

Para comprender mejor la desintegración β^- y β^+ acudiremos a un ejemplo sencillo. Consideremos, por ejemplo, un núcleo con siete protones y cinco neutrones. Según el principio de exclusión de Pauli, que rige no sólo para los electrones de los átomos, sino también para protones y neutrones, ya que también tienen espín $1/2$, sólo puede haber dos protones o dos neutrones (uno con espín hacia arriba y otro con espín hacia abajo) en cada nivel de energía. Así, el estado del núcleo podría ser representado, muy simplificado, en la configuración 1.

Ninguno de los protones ni neutrones puede bajar a un nivel energético menor, ya que éstos se hallan ocupados. Sin embargo, si un protón pudiera convertirse en neutrón, podría ocupar un nivel inferior de energía, ya que el tercer nivel energético de los neutrones está desocupado. Ello, efectivamente, es posible, gracias a la reacción



con e^+ el positrón, o antielectrón (β^+) y $\bar{\nu}$ el neutrino. Análogamente, el neutrón puede convertirse en protón en la reacción



donde e^- es el electrón y $\bar{\nu}$ el antineutrino. Ambas reacciones son debidas a las interacciones nucleares débiles. De este modo, será energéticamente favorable pasar de protón a neutrón (véase Figura 8.4), ya que ello permitirá

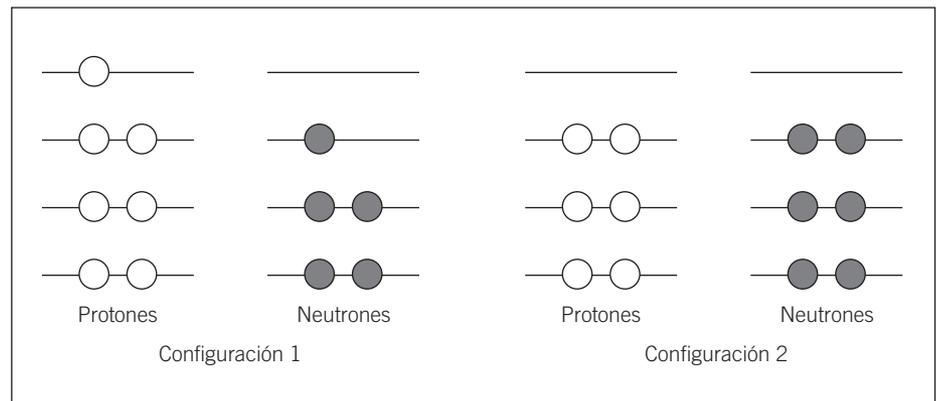


Figura 8.4. Fundamento de la desintegración β^+ .

pasar a la configuración 2, que tiene menor energía que la configuración 1. Así, el núcleo con siete protones y cinco neutrones tiene tendencia a producir una desintegración β^+ . Por su lado, el núcleo con siete neutrones y cinco protones tiende a producir desintegración β^- , por motivos análogos.

Por otro lado, la emisión de una partícula α acostumbra a reducir la proporción relativa de protones a neutrones, Z/N , lo cual ayuda a reducir el papel relativo de las repulsiones electrostáticas en el interior del núcleo. Así, por ejemplo, cuando el ${}_{94}^{242}\text{Pu}$ emite una partícula α , el número de protones se reduce en 2/94, mientras que el número de neutrones se reduce en 2/148, donde 148 es el número de neutrones en el ${}_{94}^{242}\text{Pu}$. La disminución relativa de protones es, por tanto, mayor que la de neutrones.

Para nuestros propósitos basta conocer la clasificación de los distintos tipos de radiactividad y conocer, aunque sólo sea superficialmente, sus diversos orígenes. Para las ciencias de la vida son de mayor interés su descripción práctica y sus efectos sobre los tejidos biológicos.

Ejemplo 8.7.

a) *¿Qué núcleo sufre una desintegración alfa para dar ${}_{92}^{238}\text{U}$? b) ¿Qué núcleo se produce cuando el ${}_{54}^{135}\text{Xe}$ experimenta una desintegración β^- ?*

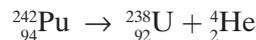
a) Una partícula alfa es un núcleo de helio, de número másico 4 y número atómico 2, ${}^4_2\text{He}$. Así pues, los números atómico Z y másico A inicial y final en una desintegración alfa se relacionan mediante

$$\begin{aligned} Z_{\text{inicial}} &= Z_{\text{final}} + 2 \\ A_{\text{inicial}} &= A_{\text{final}} + 4 \end{aligned}$$

En nuestro caso, el núcleo final es ${}_{92}^{238}\text{U}$, es decir, $Z_{\text{final}} = 92$, $A_{\text{final}} = 238$, y los correspondientes valores iniciales serán:

$$\begin{aligned} Z_{\text{inicial}} &= 92 + 2 = 94 \\ A_{\text{inicial}} &= 238 + 4 = 242 \end{aligned}$$

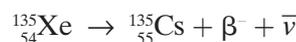
El núcleo inicial es ${}_{94}^{242}\text{X}$. Al consultar la tabla periódica comprobamos que el elemento de número atómico 94 es el plutonio, Pu, por lo cual la reacción ha sido



b) Una partícula β^- es un electrón, de carga -1 y una masa muy pequeña. La conservación de la carga y de la masa (aproximada, esta última) imponen en este caso que:

$$\begin{aligned} Z_{\text{inicial}} &= Z_{\text{final}} - 1 \\ A_{\text{inicial}} &= A_{\text{final}} \end{aligned}$$

Como el núcleo inicial se caracteriza por $Z_{\text{in}} = 54$ y $A_{\text{in}} = 135$, el núcleo final corresponderá a $Z_{\text{final}} = 54 + 1 = 55$, $A_{\text{final}} = A_{\text{inicial}} = 135$. El núcleo correspondiente a $Z = 55$ es el Cs (cesio). La reacción ha sido



donde $\bar{\nu}$ es el antineutrino electrónico, partícula de masa ínfima y sin carga, que se desplaza a la velocidad de la luz y que transporta parte de la energía final de la desintegración. Los neutrinos son partículas neutras muy ligeras, insensibles a las interacciones nucleares fuertes, y atraviesan con facilidad toda la Tierra a un ritmo de unos diez mil por segundo y metro cuadrado.

Las reglas dadas en este problema se generalizan fácilmente al caso de la desintegración β^+ , en la cual $Z_{\text{inicial}} = Z_{\text{final}} + 1$.

8.5. Semivida de desintegración

Según la física cuántica, es imposible predecir cuánto va a tardar un núcleo determinado en emitir una cierta radiación o en desintegrarse. En cambio, es posible describir en promedio el número total de núcleos que se han desintegrado, o que quedan por desintegrarse, de una cierta población y en un instante dado. Así se observa que el número de desintegraciones, $-dN$, es proporcional al número de núcleos sin desintegrar, $N(t)$, y al intervalo de tiempo dt , si éste es breve. Así pues, se tiene

$$dN = -\lambda N dt \quad [4]$$

Tras una integración elemental, el número de núcleos $N(t)$ viene dado por

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad [5]$$

donde $N(0)$ es el número inicial de núcleos sin desintegrar. La constante λ que caracteriza este decaimiento exponencial se relaciona con la llamada *semivida* $T_{1/2}$, que es el tiempo que un número de núcleos N tarda en reducirse a la mitad. La relación es

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{T_{1/2}} \quad [6]$$

Dicha semivida es una propiedad característica del núcleo y del tipo de radiación o desintegración, y puede variar desde los millones de años hasta milmillonésimas de segundo. En la Tabla 8.1 se da algunas semividas características.

Tabla 8.1. Semividas de algunos núcleos radiactivos

Núcleo	Semivida
^{40}K	$1,3 \times 10^9$ años
^{14}C	5740 años
^3H	12,5 años
^{32}P	14,2 días
^{43}Ca	180 días
^{60}Co	5,27 años

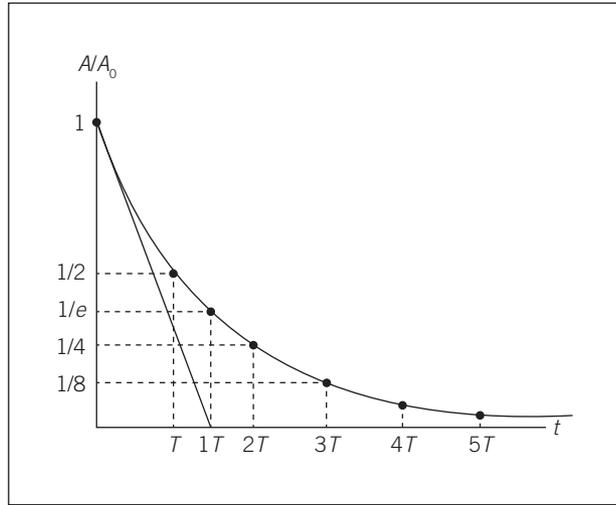


Figura 8.5. Decrecimiento exponencial de la actividad radiactiva de una sustancia pura en función del tiempo.

A partir de [4] y de [6] se halla el número de desintegraciones por unidad de tiempo, o *actividad*

$$\dot{N} \equiv -\frac{dN}{dt} = \frac{0,693}{T_{1/2}} N(t) \quad [7]$$

Observemos que la *actividad* o ritmo de desintegración depende del número de núcleos presentes en la muestra y de su semivida. Se define un *curio* (en honor de madame Curie) como la masa de material que emite $3,7 \times 10^{10}$ desintegraciones por segundo (actividad que corresponde a un gramo de radio puro). Dicha masa depende de la semivida del material y de su masa atómica (Fig. 8.5). Una desintegración por segundo se denominaría un becquerel (Bq).

Las ecuaciones [5], [6] y [7] son las más utilizadas en cuestiones de radiactividad al nivel relativamente elemental que aquí nos interesa. En los ejemplos veremos con detalle algunas aplicaciones.

Ejemplo 8.8.

- a) ¿Cuántas desintegraciones por segundo se producen en un mol de ^{32}P ?
 b) ¿Cuántos curios hay en un gramo de ^{32}P ? Semivida del $^{32}\text{P} = 14,6$ días.

El número de desintegraciones por unidad de tiempo, \dot{N} , se relaciona con el número de núcleos radiactivos, N , y con la semivida, $T_{1/2}$, según la fórmula [7]

$$\dot{N} = (0,693/T_{1/2})N$$

- a) Como en un mol $N = 6 \times 10^{23}$ núcleos y $T_{1/2} = 1,261 \times 10^6$ segundos, queda

$$\dot{N} = 0,693 (1,21 \times 10^6 \text{ s})^{-1} (6 \times 10^{23}) = 3,31 \times 10^{17} \text{ des s}^{-1}$$

b) Un átomo de ^{32}P pesa 32 g. Para encontrar la actividad de un solo gramo deberemos dividir el resultado del apartado anterior por 32. Así pues,

$$\begin{aligned}\dot{N}(\text{des s}^{-1} \text{g}^{-1}) &= (3,11 \times 10^{17} \text{ des s}^{-1} \text{mol}^{-1}) / (32 \text{ mol}^{-1}) = \\ &= 1,03 \times 10^6 \text{ des s}^{-1} \text{g}^{-1} = 1,03 \times 10^6 \text{ Bq g}^{-1}\end{aligned}$$

Expresado en función del curio, Ci, un gramo de ^{32}P equivale a

$$\begin{aligned}\dot{N}(\text{curios}) &= (1,03 \times 10^6 \text{ des s}^{-1} \text{g}^{-1}) / (3,7 \times 10^{10} \text{ des s}^{-1} \text{Ci}^{-1}) = \\ &= 2,7 \times 10^5 \text{ Ci g}^{-1}\end{aligned}$$

Observamos que la masa correspondiente a un curio depende de la semivida del material de que se trate. Como en radiactividad lo que más interesa son las desintegraciones por segundo, es más usual referirse a curios (unidades de actividad) que a unidades de masa.

Ejemplo 8.9.

Un fragmento de madera de un utensilio hallado en unas excavaciones presenta 11,6 desintegraciones por minuto por cada gramo de carbono. Si la semivida del ^{14}C es de 5730 años, calcular la antigüedad de dicho utensilio. (El cociente $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ en la atmósfera vale $1,3 \times 10^{-12}$.)

La ley de decaimiento exponencial en fenómenos radiactivos ha proporcionado un reloj para medir la edad de minerales, de meteoritos, incluso de la Tierra, utilizando el decaimiento de isótopos de semivida larga, como el ^{238}U o el ^{40}K . Para medir edades de unos pocos miles de años en muestras arqueológicas se utiliza el decaimiento del ^{14}C . Este problema tiene como objetivo ilustrar este método de datación.

Se sabe que el número de núcleos radiactivos decae exponencialmente según la ecuación

$$N(t) = N(0) e^{-0,693t/T_{1/2}}$$

donde $T_{1/2}$ vale 5730 años (unos $1,8 \times 10^{11}$ s) para el carbono radiactivo ^{14}C . Por otro lado, el número de núcleos radiactivos presentes se relaciona con la actividad \dot{N} (número de desintegraciones por unidad de tiempo) mediante

$$\dot{N}(t) = (0,693/T_{1/2}) N(t)$$

Si sabemos que se producen 11,6 desintegraciones por minuto, debidas al ^{14}C , se puede calcular el número de núcleos de este isótopo presentes en un gramo de carbono de la madera (que contiene a la vez ^{14}C y ^{12}C , este último isótopo no es radiactivo). Dicho número se obtiene a partir de la ecuación anterior y vale

$$\begin{aligned}N(t) &= \dot{N}(t) (T_{1/2}/0,693) = (11,6 \text{ des/min})(60 \text{ s min}^{-1})(1,8 \times 10^{11} \text{ s}/0,693) = \\ &= 5,0 \times 10^{10} \text{ núcleos de } ^{14}\text{C}\end{aligned}$$

En el instante inicial en que el árbol fue cortado para fabricar el utensilio, se supone que el cociente $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ en la madera era la misma que en la at-

mósfera actual, ya que el árbol vivo intercambia aire con la atmósfera mediante respiración y fotosíntesis. Así pues, el número inicial de núcleos de ^{14}C era

$$N(0) = (^{14}\text{C}/^{12}\text{C})(\text{número total de núcleos por gramo de C}) = \\ = (^{14}\text{C}/^{12}\text{C})(6 \times 10^{23} \text{ núcleos/mol})(1 \text{ mol}/12 \text{ g}) 1 \text{ g} = 6,52 \times 10^{10} \text{ núcleos}$$

Como ahora conocemos $N(t)$ y $N(0)$, los números actual e inicial de núcleos de ^{14}C radiactivo, y conocemos además su semivida, podemos aplicar la primera ecuación mencionada en este problema, según la cual

$$t = (T_{1/2}/0,693) \ln N(0)/N(t) = \\ = (5730 \text{ años}/0,693) \ln (6,52 \times 10^{10} \text{ núcleos}/5,022 \times 10^{10} \text{ núcleos}) = 2161 \text{ años}$$

Este sencillo esquema es la base del célebre método de datación mediante carbono 14, que ha sido eficazísimo instrumento en arqueología en las últimas décadas.

Hans Suess propuso utilizar la medida de la proporción relativa de los isótopos de ^{14}C y ^{12}C para discernir si el aumento de la concentración atmosférica de dióxido de carbono se debía a causas humanas o bien a causas naturales. Si el dióxido de carbono producido como consecuencia de la combustión de combustibles fósiles, como el carbón, el petróleo y el gas natural va a parar a la atmósfera y se pierde en ella durante un cierto tiempo, la proporción relativa de $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ disminuirá, dado que el carbono de origen fósil contiene menos ^{14}C . Estas medidas se llevaron a cabo a mediados del siglo xx, apreciándose entonces la signatura del carbono fósil. Posteriormente las pruebas nucleares dieron al traste con este método, que se ha sustituido por la medida de las proporciones relativas de $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$, que tiene unos fundamentos distintos.

8.6. Dosimetría física y biológica

Desde el punto de vista físico, la dosis física de una radiación ionizante (es decir, de una radiación cuyos cuantos tienen energía suficiente para ionizar un átomo con el que choquen) se define como la energía de radiación absorbida por unidad de masa, y su unidad es el *Gray* (Gy) = 1 julio kg^{-1} o el *rad*, 10^{-2} julios kg^{-1} . Dicha dosis depende de tres factores: a) el número de desintegraciones por segundo; b) la energía de cada radiación; c) el tiempo de exposición.

La dosis física no informa directamente sobre los efectos biológicos. Una misma cantidad de energía puede producir diferentes efectos según cual sea el tipo de radiación de que se trate. Para definir una dosimetría que dé una idea directa de las implicaciones biológicas se acostumbra a tomar como patrón los rayos X de 250 keV de energía y se define la *eficacia biológica relativa* (EBR) de las demás radiaciones con respecto a este patrón (Tabla 8.2). La dosimetría biológica es así la dosimetría física multiplicada por este factor

comparativo, y su unidad es el *Sievert*, correspondiente a una dosis física de un Gray con eficacia biológica relativa igual a la unidad, es decir,

Tabla 8.2. Eficacia biológica relativa (EBR) para diversos tipos de radiaciones

Radiación	EBR
Rayos X y gamma	1
Beta	1
Protones	10
Neutrones	10
Alfa	20

$$1 \text{ Sv} = \text{EBR} \times 1 \text{ Gy} \quad (\text{con EBR} = 1)$$

La centésima parte del Sievert se conoce como *rem* (*radio equivalent man*).

La eficacia biológica relativa depende básicamente de la transferencia lineal de energía de la radiación en cuestión, es decir, de la energía depositada en el tejido por unidad de longitud del recorrido de la radiación: cuanto mayor esta última, mayor la EBR de la radiación.

Los efectos biológicos de la radiación están relacionados estrechamente con la dosis recibida. Así, por ejemplo, una dosis de 0 a 250 mSv (milisieverts) parece tener pocas consecuencias; de 250 a 1 000 mSv se observan ligeros cambios en la sangre; de 1 000 a 2 000 mSv los perjuicios son ya observables, pero es posible una recuperación al menos parcial; a partir de 2 000 y hasta 6 000 mSv la probabilidad de morir crece rápidamente, por afecciones de la médula ósea, síndromes gastrointestinales y lesiones en el sistema nervioso; dicha probabilidad supera el 90 por 100 a partir de los 6 000 mSv. Los efectos pueden depender, además, de otros factores, como el tiempo total en que se ha administrado la dosis o la presencia de radiosensibilizadores (O_2) o radioprotectores (SH). La gran eficacia destructora de pequeñas energías de radiación proviene de que dicha energía está concentrada en unas pocas partículas muy energéticas, que tienen una gran capacidad de acción directa o indirecta sobre partes importantes de la célula (ácidos nucleicos, enzimas, mitocondrias, membranas internas, etc.), dada la fuerte localización de los paquetes de energía. Si dicha energía se suministrara en forma deslocalizada, en forma de calor, por ejemplo, los efectos serían imperceptibles. Una analogía que ayuda a entender esta situación es la diferencia entre recibir una cierta energía cinética concentrada en una bala o repartida entre muchas moléculas del aire en forma de viento.

Ejemplo 8.10.

Para destruir el 60 por 100 de una determinada población de bacterias se necesita una dosis de 400 rad de rayos X de 200 keV. Si 100 rad de partículas β^- de cierta energía destruyen casi el mismo tanto por ciento de la población de bacterias, ¿cuál es la eficacia biológica relativa de dichas partículas β^- ? (Se toma como $\text{EBR} = 1$ la de los rayos X de 200 keV.)

La dosis biológicamente eficaz es el producto de la dosis física (rad) por la eficacia biológica relativa (EBR), llamada también factor de calidad. Como los efectos debidos a ambas dosis del enunciado son los mismos, tendremos:

$$(EBR)_X \text{ dosis}_X = (EBR)_\beta \text{ dosis}_\beta$$

Así pues,

$$(EBR)_\beta = (EBR)_X (\text{dosis}_X / \text{dosis}_\beta) = 1(400 \text{ rad} / 100 \text{ rad}) = 4$$

Este sencillo ejemplo ilustra de forma muy explícita el significado de la EBR de una radiación.

Para describir los efectos de una dosis D determinada de radiación sobre una cierta población de organismos y bacterias se acostumbra a representar los efectos de la dosis (por ejemplo, tanto por ciento de la población superviviente tras una determinada dosis) en función de dicha dosis. El modelo más simple es un modelo exponencial de la forma

$$C(D) = C(0)e^{-D/D_0} \tag{8}$$

donde D_0 es una dosis característica, que depende del tipo de radiación y del tipo de población, y $C(D)$ el número de individuos de la población supervivientes tras recibir la dosis D . Esta ecuación es adecuada, por ejemplo, para la descripción de la inactivación de virus y de enzimas y, en general, refleja que sólo es necesario un impacto para inactivar un blanco.

En cambio, si para inactivar el blanco son necesarios r impactos, la población superviviente a una dosis D viene descrita por la ecuación

$$C(D) = C(0) [1 - (1 - e^{-D/D_0})^r] \tag{9}$$

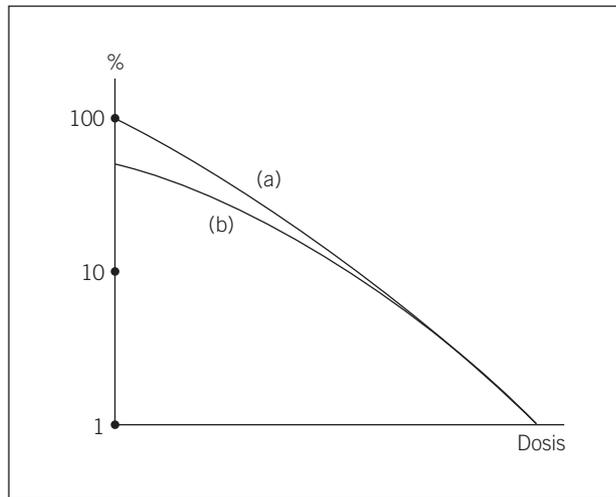


Figura 8.6. Fracción de población de bacterias superviviente (en tanto por ciento) en función de la dosis recibida. La curva (a) corresponde al caso en que un solo impacto es suficiente para producir la desactivación o la muerte; la curva (b) corresponde al caso en que son necesarios diversos impactos. Obsérvese la diferencia de comportamiento a bajos valores de la dosis.

Este tipo de curvas acostumbran a ser más adecuadas que la anterior para describir los efectos de la radiación sobre bacterias u organismos superiores. A bajas dosis los efectos son menores que en el caso con $r = 1$ (caso exponencial), pero tienden al caso exponencial para dosis elevadas.

En algunas ocasiones, si la población está compuesta por dos o más especies de resistencias diferentes, se puede tener curvas mucho más complicadas. Incluso puede darse el caso de que algunas especies resulten estimuladas en vez de perjudicadas por bajos niveles de radiación.

Ejemplo 8.11.

Se pretende destruir un tumor de 10^{10} células mediante una radiación γ de alta energía. La intensidad de la dosis recibida es de $1800 \text{ rad hora}^{-1}$. ¿Cuánto tiempo de exposición será necesario para reducir el tumor a tan sólo 10 células? Se supone que la destrucción del tumor obedece a una ecuación del tipo $C(D) = C(0)e^{-D/D_0}$, con $D_0 = 200 \text{ rad}$.

Se sabe que $C(0) = 10^{10}$ células, y se pretende calcular la D necesaria para que $C(D) = 10$ células. Según la ecuación de disminución de la población se tiene

$$C(D) = 10 = 10^{10} e^{-D/D_0}$$

Tomando logaritmos en cada miembro de esta expresión queda

$$D/D_0 = \ln(10^{10}/10)$$

o sea,

$$D = (9 \ln 10) D_0 = 1800 \ln 10 \text{ rad}$$

Como la intensidad de la dosis es de $1800 \text{ rad hora}^{-1}$, será necesario un tiempo de

$$T = (1800 \ln 10 \text{ rad}) / (1800 \text{ rad hora}^{-1}) = \ln 10 \text{ horas} = 2,30 \text{ horas}$$

En general, esta dosis no se suministra en una sola sesión larga, sino en una serie de sesiones cortas algo separadas para que el tejido sano pueda recuperarse al menos parcialmente de los efectos secundarios de la radiación entre sesión y sesión. Este problema constituye un buen ejemplo de aplicación de la fórmula de supervivencia de poblaciones tratadas en el problema anterior.

Ejemplo 8.12.

Una población celular homogénea absorbe una dosis de 1000 rad de rayos X de 200 keV . Después de esta irradiación sólo sobrevive el 37 por 100 de la población. a) Calcular la dosis letal 50. b) Si se pretende conseguir la misma dosis letal con una radiación de eficacia biológica relativa 0,85, ¿cuál será la dosis necesaria?

Se supone que la población que sobrevive a una dosis D de radiación, $C(D)$, es una función exponencial decreciente de la dosis recibida; es decir,

$$C(D) = C(0)e^{-D/D_0}$$

En esta fórmula, muy utilizada, $C(0)$ es la población inicial y D_0 una dosis característica cuyo valor depende del tipo de población y de radiación. D_0 es, según esta ecuación, la dosis necesaria para reducir la población a un $e^{-1} = 0,37 = 37$ por 100 de su valor inicial. Se denomina dosis letal 50 la dosis necesaria para reducir la población a un 50 por 100 de su valor inicial.

Según el enunciado

$$C(1\,000\text{ rad}) = 0,37 C(0) = e^{-1} C(0)$$

Así pues, comparando el exponente de e en esta expresión con el correspondiente en la expresión general tenemos

$$1 = D/D_0 = 1\,000\text{ rad}/D_0$$

y, por consiguiente, $D_0 = 1\,000\text{ rad}$.

La dosis letal 50, o D_{50} , será aquella que reduce la población al 50 por 100; o sea,

$$C(D_{50}) = 0,50 C(0) = C(0)e^{-D_{50}/D_0}$$

Por tanto,

$$-D_{50}/D_0 = \ln(1/2)$$

o bien $D_{50} = (\ln 2) D_0 = 0,693 D_0$, lo cual da en nuestro caso

$$D_{50} = 693\text{ rad}$$

En realidad, en vez de utilizar directamente la dosis recibida D , es necesario utilizar el producto de la dosis por la eficacia biológica relativa de la radiación, ya que no todas las radiaciones producen el mismo efecto. Si queremos hallar la dosis de EBR = 0,85 que produzca los mismos efectos, hemos de considerar

$$\text{EBR}' \times D'_0 = \text{EBR} \times D_0 = 1 \times 1\,000\text{ rad}$$

Obtenemos pues,

$$D'_0 = (1/0,85) \times 1\,000\text{ rad} = 1\,177\text{ rad}$$

Se observa que, al ser menor la eficacia biológica relativa de la radiación, se necesita mayor cantidad de radiación para producir los mismos efectos que los rayos X de 200 keV.

Ejemplo 8.13.

La semivida física de un determinado radioisótopo utilizado para exploración biológica es de 8 días. Sin embargo, es eliminado del cuerpo por los procesos biológicos según una semivida de 3 días. ¿Cuál será la semivida efectiva

del isótopo en el cuerpo? Si la dosis original es de 100 microcurios, ¿qué dosis permanecerá al cabo de 24 días?

El radioisótopo tiene dos caminos de desaparición: por desintegración (proceso físico) o por excreción (proceso biológico). Como ambos caminos se presentan simultáneamente y son mutuamente independientes, la situación es análoga a la de un circuito eléctrico con dos resistencias en paralelo. Así como en dicho circuito la inversa de la resistencia efectiva es la suma de las inversas de cada una de las resistencias por separado, en nuestro caso la semivida efectiva viene regida por una relación análoga, es decir,

$$T_{\text{ef}}^{-1} = T_{\text{física}}^{-1} + T_{\text{biológica}}^{-1}$$

Según el enunciado,

$$T_{\text{física}} = 8 \text{ días}, T_{\text{biológica}} = 3 \text{ días}$$

y, por tanto,

$$T_{\text{efectiva}} = (8 \times 3)/(8 + 3) \text{ días} = (2,18) \text{ días}$$

La actividad decae exponencialmente con el tiempo según la expresión, ya estudiada,

$$\dot{N}(t) = \dot{N}(0) e^{-0,693t/T_{1/2\text{ef}}}$$

Así, la actividad al cabo de 24 días será

$$\begin{aligned} \dot{N}(24 \text{ días}) &= \dot{N}(\text{inicial}) e^{-0,693 \times 24 \text{ días}/(2,18 \text{ días})} = \\ &= 100 \mu\text{Ci} e^{-0,693 \times 11} = 0,049 \mu\text{Ci} \end{aligned}$$

La consideración de la eliminación biológica es importante en la mayoría de los problemas de investigación médica y biológica. Ello hace que este problema tenga un gran interés práctico.

Ejemplo 8.14.

El ^{60}Co decae con una semivida de 5,27 años ($1,66 \times 10^8 \text{ s}$), emitiendo dos rayos γ , los cuales se utilizan en el tratamiento del cáncer. a) ¿Cuál es la masa de ^{60}Co correspondiente a una actividad de 1000 curios? b) La energía de cada uno de dichos rayos es 1,33 MeV. Suponiendo que la quinta parte de dichos rayos atraviesa el cuerpo sin reaccionar, ¿cuál es la dosis recibida por el paciente durante un minuto de irradiación? (peso del paciente, 70 kg; 1 MeV, $1,6 \times 10^{-13} \text{ J}$). c) ¿Qué aumento de temperatura producirá esta energía si es absorbida homogéneamente por todo el cuerpo y si el calor específico de éste fuera el del agua?

a) Un curio corresponde a una actividad de $3,7 \times 10^{10}$ desintegraciones/segundo. En función de la semivida $T_{1/2}$, el número de desintegraciones N por unidad de tiempo es

$$\dot{N} = (0,693/T_{1/2})N$$

con N el número de núcleos de la muestra radiactiva.

En nuestro caso, $\dot{N} = 10^3 \text{ Ci} = 3,7 \times 10^{13}$ desintegraciones/segundo y obtenemos

$$N = (T_{1/2}/0,693)\dot{N} = (1,66 \times 10^8 \text{ s}/0,693)(3,7 \times 10^{13}) = 8,86 \times 10^{21} \text{ núcleos}$$

La muestra debe contener $8,86 \times 10^{21}$ átomos de ^{60}Co para tener una actividad de 1000 curios (Ci). La masa atómica del Co es 60, es decir, $6,0 \times 10^{23}$ átomos de ^{60}Co (un mol), pesan 60 gramos. Por consiguiente, la masa de la muestra debe ser $m = (8,86 \times 10^{21} \text{ átomos})(6,0 \times 10^{23} \text{ átomos/átomo gramo})^{-1}$ ($60 \text{ gramos/átomo gramo}$) = 0,866 g.

Observamos que la masa correspondiente a una cierta actividad depende de la masa molecular o atómica de la sustancia correspondiente, así como de su semivida. Naturalmente, en los problemas de radiactividad interesa más dicha actividad que la propia masa de la muestra.

b) La dosis es la cantidad de energía radiactiva absorbida por el individuo. En general se da la dosis referida a la unidad de masa del cuerpo, y se utiliza como unidad el rad o el Gray.

La energía emitida en cada desintegración vale

$$\begin{aligned} \text{energía/desintegración} &= (2 \text{ rayos } \gamma/\text{desintegración}) \times (1,33 \text{ MeV/rayos } \gamma) \times \\ &\times (1,6 \times 10^{-13} \text{ J/1 MeV}) = 4,256 \times 10^{-13} \text{ J/desintegración} \end{aligned}$$

Como en cada segundo se producen $3,7 \times 10^{13}$ desintegraciones, y como sólo las 4/5 partes de éstas son absorbidas por el cuerpo, ya que la 1/5 parte restante escapa del cuerpo sin reaccionar, el cuerpo absorbe por segundo

$$\begin{aligned} \text{desintegraciones absorbidas/segundo} &= (4/5) \times (3,7 \times 10^{13}) = \\ &= 2,96 \times 10^{13} \text{ des s}^{-1} \end{aligned}$$

Durante un minuto se absorben pues

$$\begin{aligned} \text{desintegraciones absorbidas/segundo} &= (60 \text{ seg/min}) \times \\ &\times (2,96 \times 10^{13} \text{ des/s}) = \\ &= 177,6 \times 10^{13} \text{ des min}^{-1} \end{aligned}$$

y la dosis será finalmente

$$\begin{aligned} \text{dosis} &= \text{energía absorbida/masa} = (\text{energía/des}) \times \\ &\times (\text{des absorbidas/min})/\text{masa} = (4,256 \times 10^{-13} \text{ J/des}) \times \\ &\times (177,6 \times 10^{13} \text{ des/min})/70 \text{ kg} = 10,80 \text{ J kg}^{-1} \end{aligned}$$

o bien, en rad,

$$\text{dosis} = (10,80 \text{ J kg}^{-1}) \times (1 \text{ rad}/10^{-2} \text{ J kg}^{-1}) = 10,8 \text{ Gy}$$

c) Si toda esta energía fuera absorbida uniformemente en forma de calor y si el calor específico de los tejidos fuera igual al del agua ($c = 10^3 \text{ cal kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} = 4184 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$), el aumento de temperatura sería

$$\Delta t = Q/Mc = (10,80 \text{ J kg}^{-1})/(4184 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) = 2,6 \times 10^{-3} \text{ K}$$

¡El aumento sería totalmente imperceptible! Ello nos demuestra que con cantidades muy pequeñas de energía se puede conseguir efectos biológicos muy considerables, incluso letales. Esto se debe a que la energía radiactiva

no se reparte uniformemente por todo el tejido, sino que actúa de forma más «granular», depositando cantidades relativamente grandes de energía en algunos puntos vitalmente estratégicos: material cromosómico, por ejemplo. Este es el fundamento de la bomba de neutrones: no son necesarios los efectos térmicos (que destruyen los edificios) para aniquilar una población. Los seres vivos sucumben a los efectos puramente radiactivos, aunque su equivalente calorífico sea despreciable.

8.7. Efectos biológicos de la radiación ionizante

Se denomina *radiación ionizante* aquella radiación la energía de cuyos cuantos es suficiente para ionizar o romper moléculas de interés biológico. Los efectos de la radiación pueden ser directos o indirectos. Los efectos directos son fáciles de imaginar: un cuanto de radiación rompe una molécula o la afecta en una zona especialmente relevante para su función biológica. Pero debido a su carácter aleatorio y estadístico, este tipo de perjuicio puede parecer relativamente casual e improbable. Sin embargo, la radiación puede tener también efectos indirectos. Por ejemplo, puede ionizar o excitar la materia de los alrededores de las regiones de interés, producir así compuestos químicos intermediarios activos y éstos, a su vez, pueden perjudicar macromoléculas o estructuras de importancia biológica. Naturalmente, los efectos indirectos dependen de las condiciones del entorno de los centros sensibles (concentraciones, composición química, etc.). Así, por ejemplo, al chocar contra moléculas de agua, los cuantos de radiación pueden ionizarla o disociarla y dar lugar a un incremento de radicales H' , OH' , y de agua oxigenada H_2O_2 , que pueden afectar centros de interés,

La radiación puede afectar las proteínas, los ácidos nucleicos y las estructuras de las membranas. *In vitro*, las proteínas son menos alterables que en vivo, y las dosis necesarias para producir efectos relevantes son del orden de los 10 Gray, especialmente a través de efectos indirectos en que el radical OH' afecta rápidamente los aminoácidos aromáticos y los que contienen azufre (metionina, cisteína, cistina). Los ácidos nucleicos, por su lado, son considerados como el elemento determinante de vulnerabilidad a los efectos de radiación, ya que o bien conservan la información genética o bien juegan un papel decisivo en la síntesis de proteínas. Efectivamente, la ruptura de un solo par de bases puede ser catastrófica si contiene una información relevante para el organismo. En vivo prevalece la acción directa de la radiación contra el ADN, mientras que éste es protegido de la acción indirecta por las histonas. En cuanto a las membranas, su perforación puede tener efectos muy negativos a nivel de mitocondrias, de cloroplastos o de lisozimas; en los primeros casos se inhibirá la fosforilación oxidativa o fotosintética, y en el tercero se liberarán enzimas destructoras de la célula.

Finalmente, en cuanto al organismo en conjunto se refiere, se observa una sensibilidad mucho mayor a los efectos de la radiación en las células que se están reproduciendo, ya que en éstas el ADN está más desplegado, es decir, menos compactado, que durante la vida usual de las células, en período no reproductivo. Este efecto, descubierto en 1906 por Bergonie y

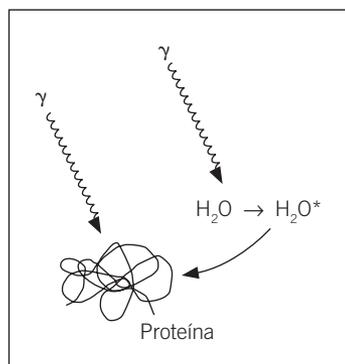


Figura 8.7. La radiación ionizante puede actuar ya sea de forma directa sobre moléculas de interés biológico decisivo (enzimas, ácidos nucleicos), ya sea de forma indirecta, activando moléculas de agua que después atacarán a aquellas moléculas.

Tribondeau, es aprovechado para luchar contra las células cancerosas mediante radioterapia, ya que éstas, al tener un ritmo de proliferación mucho mayor que el de las células sanas, son más sensibles que éstas a la radiación.

Ejemplo 8.15.

En un tubo de un televisor una diferencia de potencial de 1000 V acelera los electrones desde una fuente hasta la pantalla, donde supondremos que se detienen bruscamente. a) Calcular la frecuencia de la radiación de frenado de los electrones. b) Si chocan contra la pantalla 10^6 electrones por segundo y si ésta no tuviera una protección especial, ¿cuánta energía de radiación atravesaría la pantalla por segundo? c) ¿Cuántas horas podría ver televisión sin peligro una persona de 60 kg si supusiéramos que la dosis máxima de radiación es de 10^{-3} rad? ($e = 1,6 \times 10^{-19}$ C; $h = 4,14 \times 10^{-15}$ eV s).

a) Un electrón que atraviesa una diferencia de potencial de 1000 V adquiere una energía de 1000 eV. Si al frenar pierde toda su energía en forma de radiación (despreciaremos la energía de excitación de las moléculas de la pantalla), dicha radiación, según el postulado de Planck, tendrá una energía dada por

$$E = hf$$

donde h es la constante de Planck y f la frecuencia. Por tanto, ésta valdrá

$$f = E/h = 10^3 \text{ eV}/(4,14 \times 10^{-15} \text{ eV s}) = 2,4 \times 10^{17} \text{ Hz}$$

b) Si chocan contra la pantalla 10^6 electrones por segundo y si cada electrón cede una energía de 1000 eV, la energía total que atraviesa la pantalla por segundo es

$$\begin{aligned} E &= 10^6 \text{ el/s} \times 10^3 \text{ eV/el} = 10^9 \text{ eV s}^{-1} = \\ &= 10^9 \text{ eV s}^{-1} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J eV}^{-1} = 1,6 \times 10^{-10} \text{ W} \end{aligned}$$

c) Si la dosis límite permisible es de 10^{-3} rad, equivalente a 10^{-5} J kg⁻¹ una persona de 60 kg puede recibir como máximo una energía de 60×10^{-5} J. Si cada segundo atraviesan la pantalla $1,6 \times 10^{-10}$ J, el tiempo máximo que se podría permanecer sin peligro frente a la pantalla en estas condiciones sería

$$t = (60 \times 10^{-5} \text{ J})/(1,6 \times 10^{-5} \text{ J s}^{-1}) = 37,5 \times 10^5 \text{ s} \approx 43 \text{ días}$$

En un cálculo más riguroso se debería tener en cuenta la distancia del observador a la pantalla, ya que no toda la radiación incidiría sobre aquél, sino que buena parte de ella se distribuiría por la habitación sin alcanzarle directamente. Aquí pretendemos hacer notar la necesidad de que la pantalla de televisión esté recubierta por un vidrio suficientemente grueso para absorber dicha radiación de frenado.

Ejemplo 8.16.

Una determinada central nuclear vierte a un río 50 curios al día de ^{137}Cs (la semivida de dicho elemento es 30 años). El caudal del río es de 50000 litros/

segundo. Calcular la actividad por litro de agua del río. Los peces de dicho río acumulan en su cuerpo materia radiactiva, con una actividad unas cinco veces superior a la del agua por gramo de sustancia. Calcular la dosis ingerida por una persona de 70 kg que come 1 kg de pescado por semana. Si cada radiación transporta 1 MeV de energía y si la máxima dosis aconsejable es de 0,5 rems/año y si la EBR de dicha radiación es 2, ¿qué tanto por ciento de la dosis máxima supone la dosis ingerida?

a) En un día (86400 s) pasan por el río 5×10^4 l/s \times 86400 s = $4,32 \times 10^9$ litros de agua. Si los 50 curios se reparten homogéneamente en dicha cantidad de agua, la actividad resultante por litro será

$$\text{actividad/litro} = 50 \text{ Ci} / 4,32 \times 10^9 \text{ l} = 1,16 \times 10^{-8} \text{ Ci litro}^{-1}$$

b) La actividad por kilo de pescado es cinco veces la de un kilo de agua. Según el apartado anterior, la actividad resultante del pescado es

$$\text{actividad/kilo de pescado} = 5 \times 1,16 \times 10^{-8} \text{ Ci kg}^{-1} = 5,8 \times 10^{-8} \text{ Ci kg}^{-1}$$

c) Como el individuo en cuestión come 1 kg de pescado por semana, la actividad ingerida es $5,8 \times 10^{-8}$ Ci por semana. La dosis será

$$\begin{aligned} \text{dosis} &= \text{energía/masa} = (5,8 \times 10^{-8} \text{ Ci})(3,7 \times 10^{10} \text{ des s}^{-1} \text{ Ci}^{-1}) \\ &(1 \text{ MeV/des}^{-1})(1,6 \times 10^{-13} \text{ J MeV}^{-1}) \times (7 \times 86400 \text{ s/semana})(70 \text{ kg}) = \\ &= 297 \times 10^{-6} \text{ J kg}^{-1} = 2,97 \times 10^{-4} \text{ J rad} \end{aligned}$$

Si la EBR es 2, la dosis semanal será de $5,94 \times 10^{-4}$ rems. Como un año tiene unas 52 semanas, ello supone $3,12 \times 10^{-2}$ rems, es decir, en función de la dosis máxima permitida, $3,12 \times 10^{-2} / 0,5$ rems = 0,06 = 6 por 100. Como puede observarse, la dosis recibida queda muy por debajo de la dosis peligrosa.

Ejemplo 8.17.

Si la intensidad de un haz de rayos X de 50 keV es 300 W m^{-2} , calcular la dosis recibida por un paciente durante una exposición de 0,25 s. Supóngase que el cuerpo tiene un grosor medio de unos 10 cm, una altura de 1,70 cm y una anchura media de 50 cm. La capa de semiatenuación correspondiente a los rayos X en el cuerpo es $L_{1/2} = 3,12 \text{ cm}$. El paciente pesa 70 kg.

Se ha de calcular en primer lugar qué tanto por ciento de radiación es absorbida por el cuerpo. La cantidad de radiación que lo atraviesa viene dada por la ecuación

$$N_x(L) = N_x(0)e^{-0,693 L/L_{1/2}}$$

Así, $N_x(L)$, con $L = 10 \text{ cm}$ (el grosor del cuerpo) y $L_{1/2} = 3,12 \text{ cm}$, nos indica el tanto por ciento de radiación que no interacciona con el cuerpo al atravesarlo. Este tanto por ciento vale

$$N_x(L)/N_x(0) = \exp(-0,693 \times 10 \text{ cm}/3,12 \text{ cm}) = 0,11 = 11 \text{ por } 100$$

Por tanto, la fracción de radiación absorbida es un $(100 - 11)$ por $100 = 89$ por 100 , es decir, la radiación total menos la que no interacciona.

El área frontal del cuerpo vale, según las simplificaciones del enunciado del problema,

$$\text{área} = 1,70 \text{ m} \times 0,50 \text{ m} = 0,85 \text{ m}^2$$

Así pues, la energía absorbida será

$$E_{\text{absorbida}} = (89 \%) (300 \text{ W m}^{-2}) (0,85 \text{ m}^2) (0,25 \text{ s}) = 56,74 \text{ J}$$

La dosis de radiación será, pues, expresada, como es habitual, por unidad de masa

$$\text{dosis} = (56,74 \text{ J}) / (70 \text{ kg}) = 0,81 \text{ J/kg} = 81 \times 10^{-2} \text{ J kg}^{-1} = 81 \text{ rad}$$

Hemos utilizado la unidad de radiación $1 \text{ rad} = 10^{-2} \text{ J kg}^{-1}$. Así hemos relacionado la intensidad de la fuente, las características físicas del paciente y el tiempo de exposición con la dosis recibida. Cálculos de este tipo nos podrían indicar, procediendo a la inversa, a partir de una dosis peligrosa, el máximo tiempo de exposición para no llegar a dicha dosis, o bien el grosor de la capa protectora (grosor de un delantal de un médico o de la pared de una nave espacial) para que un cierto usuario no reciba una cantidad perjudicial de radiación en un tiempo dado.

Problemas propuestos

1. Calcular las energías de enlace por nucleón de los siguientes núcleos sabiendo que su masa respectiva es la indicada entre paréntesis: ${}^2_1\text{H}$ (2,0141 u.m.a.), ${}^{12}_6\text{C}$ (12,0000 u.m.a.), ${}^{16}_8\text{O}$ (15,9949 u.m.a.), ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ (55,9349 u.m.a.), ${}^{238}_{92}\text{U}$ (238,0508 u.m.a.). La masa de un protón es $m_p = 1,0073$ u.m.a., la de un neutrón es $m_n = 1,0087$ u.m.a. y $1 \text{ u.m.a.} = 931,48 \text{ MeV}$.

Resultados: (${}^2_1\text{H}$) 0,88 MeV/nucleón; (${}^{12}_6\text{C}$) 7,45 MeV/nucleón; (${}^{16}_8\text{O}$) 7,75 MeV/nucleón; (${}^{56}_{26}\text{Fe}$) 8,58 MeV/nucleón; (${}^{238}_{92}\text{U}$) 7,40 MeV/nucleón.

2. Comparar la energía de dos núcleos de número mágico 8 y de números atómicos 4 y 6, respectivamente. Supóngase, por comodidad, que los niveles de energía de protones y neutrones corresponden a energías de 1 GeV, 2 GeV, 3 GeV, 4 GeV, etc., y que se desprecia la repulsión electrostática entre protones. Recuérdese que, debido al principio de exclusión de Pauli, sólo puede haber dos protones (o dos neutrones) como máximo en cada nivel, uno de ellos con espín hacia arriba y el otro con espín hacia abajo.

Resultados: $E(A = 8, Z = 4) = 12 \text{ GeV}$; $E(A = 8, Z = 6) = 14 \text{ GeV}$.

3. Una de las causas de las desintegraciones radiactivas es la tendencia de los núcleos pequeños a tener aproxi-

madamente el mismo número de protones que de neutrones, por razones fácilmente comprensibles gracias al problema anterior. Según ello, ¿qué tipo de radiación emitirán los núcleos inestables ${}^{12}_5\text{B}$ y ${}^{12}_7\text{N}$? ¿Qué tipo de radiación sería de esperar para el ${}^9_3\text{Li}$?

Resultados: ${}^{12}_5\text{B} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + \beta^-$; ${}^{12}_7\text{N} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + \beta^+$; ${}^9_3\text{Li} \rightarrow {}^9_4\text{Be} + \beta^-$.

4. Las masas respectivas del ${}^3_1\text{H}$ (tritio) y del ${}^3_2\text{He}$ (helio) son 3,01700 y 3,01695 u.m.a., respectivamente. Si la diferencia entre los valores de ambas energías se atribuye a la repulsión electrostática entre los dos protones del helio, evalúese la distancia entre dichos protones; es decir, las dimensiones nucleares medias.

Resultado: $3,1 \times 10^{-14} \text{ m}$.

5. La energía solar proviene de las reacciones termónucleares del interior del Sol, que consisten, esencialmente, en el paso de hidrógeno a helio mediante diversas reacciones nucleares en cuyos detalles no entramos. Para proceder a una evaluación de órdenes de magnitud, supongamos, para simplificar, la reacción siguiente:



Calcular la energía liberada en esta reacción si la masa del ${}^4_2\text{He}$ vale 4,0039 u.m.a. y la del protón 1,0073 u.m.a.

Considérese despreciable la masa del positrón y nula la del neutrino ν . ¿Cuánto hidrógeno está convirtiéndose en helio en el Sol por segundo si la intensidad recibida en la Tierra (a $1,5 \times 10^8$ km del Sol) es de $1,35 \text{ kW m}^{-2}$?

Resultados: a) $3,77 \times 10^{12} \text{ J}$; b) $6,75 \times 10^{14} \text{ g s}^{-1}$.

6. Calcular la energía producida en la fisión de un núcleo de ^{235}U por absorción de un neutrón suponiendo la reacción



que es uno de los cuarenta modos posibles de desintegración del uranio. Expresar el resultado en julios/mol. (Nota: masa neutrón = 1,009 u.m.a., $m^{235}\text{U} = 235,124$ u.m.a., $m^{95}\text{Mo} = 94,945$ u.m.a., $m^{139}\text{La} = 138,955$ u.m.a.).

Resultados: $E = 200,27 \text{ MeV/átomo} = 1,92 \times 10^{13}$ julios $\text{mol}^{-1} = 8,18 \times 10^{10}$ julios gramo^{-1} .

7. Comparar la energía liberada en la fusión de un gramo de ${}^2_1\text{H}$ (deuterio) para dar helio ($m_1^2\text{H} = 2,0147$ u.m.a., $m_2^4\text{He} = 4,0039$ u.m.a.) y la energía liberada por un gramo de ^{235}U calculada según el problema anterior.

Resultado: $5,7 \times 10^{11} \text{ J g}^{-1}$.

8. El curio se definió originalmente como la actividad de 1 g de radio 226. Si el período de semidesintegración o vida media de éste es de 1620 años, ¿cuántas desintegraciones por segundo le corresponden?

Resultado: $3,7 \times 10^{10}$ des s^{-1} .

9. ¿Cuánto valen las masas de un curio de ^{32}P y de ^{212}Po si sus respectivas vidas medias de semidesintegración son 14,2 días y 3×10^6 s?

Resultados: 1 Ci $^{32}\text{P} = 3,46 \times 10^{-6} \text{ g}$; 1 Ci de $^{212}\text{Po} = 5,64 \times 10^{-17} \text{ g}$.

10. Un emisor β^- de 10 curios se halla a 2 m de distancia de la mano de un individuo. ¿Cuántos electrones chocan por segundo contra cada centímetro cuadrado de la piel?

Resultado: $7,36 \times 10^5$ electrones $\text{s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$.

11. Se inyectan a un paciente 4 cm^3 de sangre marcada con ^{51}Cr . La actividad de dicha muestra de sangre es de 50000 desintegraciones por minuto. Al cabo de unas horas, la actividad de muestras de sangre del mismo volumen se estabiliza en un valor de 40 desintegraciones

por minuto. Hallar el volumen total de sangre en el cuerpo del paciente. Supóngase que la semivida del ^{51}Cr es muy larga en comparación con el tiempo que dura el experimento.

Resultado: 5 l.

12. El ^{60}Co se desintegra emitiendo dos rayos gamma de 1,33 MeV de energía (cada uno de ellos). Suponiendo que dichos rayos no se atenúan en el aire, calcular qué grosor de plomo se ha de colocar frente a la fuente de cobalto para que a 1 m de distancia de la misma la dosis recibida sea de $0,005 \text{ rad hora}^{-1}$. Si no hay protección, la dosis a esta distancia es de $1,33 \text{ rad hora}^{-1}$. El grosor de semiatenuación de los rayos gamma del ^{60}Co en plomo es de 1 cm.

Resultado: $l = 5,58 \text{ cm}$.

13. Se inyecta a un paciente 20 milicurios de ^{99}Tc para una exploración cerebral. La energía de los rayos gamma emitidos por este núcleo es de 0,143 MeV. Suponiendo que la mitad de los rayos gamma escapan del cuerpo sin reaccionar, ¿cuál es la dosis de radiación recibida por un paciente de 60 kg? (Sugerencia: debido a su corta semivida, 6 horas, suponemos que todo el Tc se desintegra mientras está en el cuerpo.)

Resultado: $4,4 \times 10^{-3} \text{ Gy}$.

14. El ^{60}Co emite al decaer dos rayos gamma de 1,33 MeV de energía. Suponiendo que sólo el 20 por 100 de los rayos gamma producidos llegan a un enfermo de 80 kg, y si de éstos sólo son absorbidos por el paciente el 75 por 100, ¿cuál ha de ser el tiempo de exposición de éste si la dosis recibida debe ser de 0,1 rad? ¿Cuál es la actividad de la fuente expresada en curios? (1 MeV = $1,6 \times 10^{-13} \text{ J}$; 1 Ci = $3,7 \times 10^{10}$ des s^{-1} ; semivida $^{60}\text{Co} = 1,66 \times 10^8 \text{ s}$; $N = 1 \text{ mol}$.)

Resultados: $t = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$; $\dot{N} = 6,8 \times 10^4 \text{ Ci}$.

15. Si para causar la muerte de una célula es suficiente un solo impacto de radiación en un determinado centro vital, la población superviviente al cabo de una dosis D viene dada por

$$P(D) = P(0) \exp(-D/D_0)$$

Si son necesarios 2, 3, 4, ..., r impactos, la población superviviente viene dada por

$$P(D) = P(0) [1 - (1 - e^{-D/D_0})^r]$$

Supóngase que $D_0 = 100 \text{ rad}$. Compárense las poblaciones supervivientes para $r = 1, 2, 3$ para dosis de 100 y 200 rad.

Resultados:

$$a) D = 100 \text{ rad}, r = 1, \frac{P(100)}{P(0)} = 0,368;$$

$$r = 2, \frac{P(100)}{P(0)} = 0,600; r = 3, \frac{P(100)}{P(0)} = 0,747.$$

$$b) D = 200 \text{ rad}, r = 1, \frac{P(200)}{P(0)} = 0,135;$$

$$r = 2, \frac{P(200)}{P(0)} = 0,253; r = 3, \frac{P(200)}{P(0)} = 0,354.$$

16. Se denomina factor de riesgo a la probabilidad de presentar cáncer mortal como consecuencia de los efectos de una irradiación ionizante en el plazo de unos diez años tras la irradiación. El factor de riesgo por Sievert para diversos órganos es el siguiente:

Gónadas:	4×10^{-3} por Sievert
Mama:	2×10^{-3} por Sievert
Médula ósea:	2×10^{-3} por Sievert

Si una población de 50000 personas ha recibido una irradiación de 0,5 sievert por persona, ¿cuántos casos de cáncer de gónadas, mama y médula ósea se presentarían por encima de lo habitual en el término de diez años?

Resultados: gónadas: 100; mama: 63; médula ósea: 50. Normalmente, algunos de estos casos podrán coincidir en la misma persona. El número total máximo será de 213 casos en el período mencionado.

17. ¿A qué temperatura debe estar la zona central del Sol para que en ella se pueda dar la reacción de fusión del hidrógeno dando helio? Cuando haya terminado el hidrógeno, ¿qué temperatura deberá alcanzar para iniciar la fusión nuclear de tres núcleos de ^4He dando uno de ^{12}C ? (Indicación: calcular la energía cinética que deben tener los núcleos cargados para llegarse a tocar, venciendo la repulsión electrostática de sus cargas, e igualar esta energía media a $(3/2)k_B T$, con k_B la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta; tómesese para el radio de un núcleo de número másico A el valor $r = 1,3 \times 10^{-15} A^{1/3} \text{ m}$).

18. Un electrón se mueve en el vacío con una velocidad de 80000 m/s. a) Cuánto vale la longitud de onda asociada a su movimiento? b) Qué diferencia de potencial es necesaria para acelerar al electrón desde el reposo hasta esta velocidad? c)Cuál es el radio de su trayectoria si entra en una zona en que hay un campo

magnético homogéneo de $B = 2$ tesla perpendicular a su velocidad?

Resultados: a) $9,1 \times 10^{-9} \text{ m}$; b) 0,182 mV;
c) $45,5 \times 10^{-8} \text{ m}$

19. En un jardín caen 3 mg de ^{137}Cs , de semivida 30 años. a) ¿Cuánto vale la actividad del terreno? b) Cuánto valdrá la actividad dentro de 30 años si no se retira artificialmente el Cs? c) Supongamos que una persona de unos 60 kg absorbe el 10 por 100 de la radiación. Si cada radiación tiene una energía de 1,2 MeV y una eficacia biológica relativa de 1,3, qué dosis radiactiva (física y biológica) recibirá por minuto la persona? d) ¿Cuánto tiempo puede pasar en el jardín sin que supere el umbral de 250 mSv (o 25 rem) a partir del cual comienza a haber riesgos biológicos perceptibles a corto plazo?

Resultados: a) $9,6 \times 10^{-9} \text{ Bq}$; b) $4,8 \times 10^{-9} \text{ Bq}$; c) $1,8 \times 10^{-2} \text{ rads}$ i $2,4 \times 10^{-2} \text{ rem}$; d) 104 min.

20. La longitud de onda de los fotones que llegan mayoritariamente del Sol es de unos 500 nm. a) ¿Cuánto vale la energía de cada fotón? b) Del Sol llega un flujo de radiación de unos 1400 W/m². Si toda la radiación llegara en fotones de 500 nm, cuántos fotones llegarían por segundo y metro cuadrado? c) Consideremos ionizantes los fotones con energía superior a 50 eV (radiación ultravioleta). ¿Qué longitud de onda han de tener? d) Supongamos que el número de fotones de la radiación ultravioleta que llegan a la superficie de la Tierra es una fracción 10^{-12} del total de fotones; supóngase que si se toma el sol sin crema protectora se absorbe un 5 por 100 de los fotones ultravioletas que se recibe. ¿Qué dosis física de radiación ionizante recibe durante una hora una persona que toma el sol en la playa y expone a la luz una superficie cutánea de 1 m²? (supóngase que la zona superficial del cuerpo donde puede penetrar la radiación tiene una masa de 2 kg).

Resultados: a) $3,97 \times 10^{-19} \text{ J}$; b) $3,5 \times 10^{21}$; c) $24 \times 10^{-9} \text{ m}$; d) $7 \times 10^3 \text{ rad}$.

21. Un método para esterilizar alimentos es la irradiación con radiaciones ionizantes. A dosis bajas (hasta 10^3 Gy) se inhibe la germinación, se retarda la maduración y se ejerce un efecto insecticida; a dosis medias (de 10^3 a 10^4 Gy) se reduce la población microbiana y el número de agentes patógenos no esporulados; en dosis elevadas (de 10^4 a 5×10^4 Gy) se eliminan los virus y se produce esterilización completa. Queremos inhibir la germinación de una tonelada (10^3 kg) de alimentos con este método. ¿Qué cantidad de ^{60}Co necesitaríamos para suministrar la dosis correspondiente en una sesión de veinte minutos

de irradiación, suponiendo que los alimentos absorben el 50 por 100 de la radiación que les llega? (la semivida del ^{60}Co val $1,7 \times 10^8$ segundos, y cada núcleo emite, al decaer, 2 rayos gamma de 1,33 MeV cada uno).

Resultado: 96 g.

22. Para comprobar que la subida de potencial en un potencial de acción está producida por una entrada de iones sodio, se sitúa una neurona en una disolución de sodio radiactivo ^{24}Na (cuya semivida vale 15,5 horas), y se provoca un potencial de acción. A continuación, se

saca la neurona de la disolución y se mide la radiactividad que desprende, debida al sodio radiactivo que ha entrado en ella. Supongamos que en un potencial d'acción entran a la neurona 6×10^9 iones de sodio radiactivo. *a)* ¿Cuántas desintegraciones per segundo emitirá el sodio incorporado a la neurona? *b)* ¿Qué dosis física recibirá la neurona durante media hora si absorbe el 10 por 100 de la radiación emitida por el sodio absorbido y si cada radiación tiene una energía de 1,2 MeV? (la masa de la neurona vale 5×10^{-7} g).

Resultados: *a)* $7,45 \times 10^4$ Bq; *b)* 5 l 49,44 Gy.

Tabla de algunas constantes físicas

Aceleración de la gravedad	g	$9,81 \text{ m s}^{-2}$
Calor latente de ebullición ($100 \text{ }^\circ\text{C}$) del agua		539 kcal kg^{-1}
Calor latente de fusión ($0 \text{ }^\circ\text{C}$) del agua		$79,7 \text{ kcal kg}^{-1}$
Capacidad calorífica específica del agua ($25 \text{ }^\circ\text{C}$)		$0,998 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Capacidad eléctrica por unidad de área de membrana:		
axón con mielina		$5 \times 10^{-5} \text{ F} \leftrightarrow \text{m}^2$
axón sin mielina		$1 \times 10^{-2} \text{ F} \leftrightarrow \text{m}^2$
Carga del electrón	$-e$	$-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Biot y Savart	k'	$10^{-7} \text{ T} \leftrightarrow \text{m A}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
Constante de Coulomb	k	$9,00 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J s} = 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV s}$
Constante de Stefan		$5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Constante dieléctrica (vacío)		$8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Constante gravitatoria	G	$6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Constante universal de los gases	R	$8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Densidad:		
del agua pura ($0 \text{ }^\circ\text{C}$)		1000 kg m^{-3}
del aire ($20 \text{ }^\circ\text{C}$)		$1,20 \text{ kg m}^{-3}$
de la sangre ($25 \text{ }^\circ\text{C}$)		$1059,3 \text{ kg m}^{-3}$
del plasma ($25 \text{ }^\circ\text{C}$)		$1026,9 \text{ kg m}^{-3}$
Masa de la Tierra		$5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Masa del electrón		$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa del neutrón		$1,675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del protón		$1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa molecular media del aire		$29,03 \text{ g mol}^{-1}$
Número de Avogadro		$6,023 \times 10^{23} \text{ moléculas mol}^{-1}$
Presión atmosférica		$760 \text{ mm Hg} = 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} =$ $= 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1013 \text{ hPa}$
Resistividad eléctrica por unidad de área de membrana:		
axón mielinizado		40 ohm m^2
axón no mielinizado		$0,2 \text{ ohm m}^2$
Radio medio de la Tierra		$6,38 \times 10^6 \text{ m}$
Tensión superficial del agua ($20 \text{ }^\circ\text{C}$)		$7,28 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2,9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Velocidad del sonido:		
en aire seco		331 m s^{-1}
en agua		1480 m s^{-1}
Viscosidad:		
de la sangre		$2,1 \text{ cP} = 2,1 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$
del aire		$1,8 \times 10^{-2} \text{ cP} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$
del agua		$1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$
del plasma		$1,3 \text{ cP} = 1,3 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$
Unidad de masa atómica	u.m.a.	$1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Bibliografía

Bibliografía básica

- CAMERON, J. R., y SKOFRONICK, J. G.: *Medical Physics*, John Wiley, Nueva York, 1978.
- CROMER, A. H.: *Física para las ciencias de la vida*, 2.^a ed., Reverté, Barcelona, 1982.
- CUSSÓ F.; LÓPEZ C., y VILLAR R.: *Física de los procesos biológicos*, Ariel, Barcelona, 2004.
- DAMASK, A. C.: *Medical Physics*, Academic Press, Nueva York, 1978.
- DÍEZ DE LOS RÍOS, A.: *Introducción a la Biofísica y a la Física Médica*, Universidad de Málaga, Málaga, 1983.
- GONZÁLEZ IBEAS, J.: *Introducción a la física y a la biofísica*, Alhambra, Madrid, 1974.
- GREENBERG, L. H.: *Physics for biology and pre-med students*, Saunders, Filadelfia, 1975.
- KANE, J. W., y STERNHEIM, M. M.: *Física*, 2.^a ed., Reverté, Barcelona, 2000.
- MARION, J. B.: *General Physics with Bioscience Essays*, John Wiley, Nueva York, 1979.
- MCDONNALD, S. G., y BURNS, D. M.: *Física para las ciencias de la vida y de la salud*, Fondo Educativo Interamericano, Bogotá, 1978.
- ORTUÑO, M.: *Física para biología, medicina, veterinaria y farmacia*, Crítica, Barcelona, 1996.
- SEARS, F. W., y ZEMANSKY, M. W.: *Física General*, Aguilar, Madrid, 1970.

Bibliografía avanzada

- BENEDEK, G. B., y VILLARS, F. M. H.- *Physics: With Illustrative Examples from Biology I, II, III*, Springer, 2000.
- BLUMENFELD, L. A.: *Problems of Biological Physics*, Springer-Verlag, Berlín, 1981.
- GETTYS, W. E.; KELLER, F. J., y SKOVE, M. J.: *Física clásica y moderna*, McGraw-Hill, 1992.
- GOODSELL, D. S.: *Bionanotechnology. Lessons from nature*, Wiley-Liss, Hoboken, New Jersey, 2004.
- GOODSELL, D. S.: *Our molecular nature: the body's motors, machines and messages*, Springer, New York, 1996.
- HOBBIE, R. K.: *Intermediate Physics for Medicine and Biology*, (3rd ed.) John Wiley, Toronto, 1997.
- JOU, D., y LLEBOT, J. E.: *Introducción a la termodinámica de procesos biológicos*, Labor, Barcelona, 1989.
- METCALF, H. J.: *Topics in Classical Biophysics*, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1980.
- NELSON, P.: *Física biológica*, Ed. Reverté, Barcelona, 2005.
- NICOLIS, G., y PRIGOGINE, L.: *Self-organization in Non-equilibrium Systems*, John Wiley, Nueva York, 1977.
- REMIZOV, A. N.: *Física Médica y Biológica*, MIR, Moscú, 1987.
- SYBESMA, C.: *Biophysics. An introduction*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- TIPLER, P. A., y MOSCA, G.: *Física*, Reverté, Barcelona, 2005.
- TONNELAT, J.: *Biophysique I et II*, Masson Editeurs, París, 1973.
- VOGEL, S.: *Life in Moving Fluids*, Princeton University Press, 1981.
- VOGEL, S.: *Life's Devices*, Princeton University Press, 1988.
- VOGEL, S.: *Ancas y palancas*, Tusquets Editores, Barcelona, 2000.
- VOLKENSHTEIN, M. V.: *Biophysics*, Mir Publishers, Moscú, 1983.
- WEISS, T. F.: *Cellular biophysics* (2 vols), Bradford Books, MIT Press, Cambridge, Mass, 1996.

- Aberraciones
 - cromáticas, 386
 - esféricas, 386
- Abertura, 386
- Aceleración
 - angular, 19
 - centrífuga, 139, 140
 - centrípetas, 6, 12
 - lineal, 3
- Aceleradores de partículas, 306
- Acomodación, 378, 389, 413
- Actina, 32
- Actividad, 432, 433, 445
- Adaptación, 389
- ADN, 33
- ADP, 31, 32, 267, 284, 285
- aerogeneradores, 322, 323
- Agua, 82, 83, 89, 120, 121, 245
- Agudeza visual, 390, 391, 392
- Agujeros negros, 38, 39
- Aire, 29, 225, 226, 245, 322
- Aleteo, 103
- Alveolar, 65
- Alvéolo pulmonar, 65, 105, 125
- Aminoácidos, 190, 344, 345
- Amortiguación, 196
- Amortiguamiento, 196, 197, 202
- Amperio, 276, 315
- Amplitud, 194, 195, 198, 244, 245
 - de resonancia, 201, 202
- Análisis: armónico, 203, 204
 - de Fourier, 203, 236, 239
 - dimensional, 41, 42, 132, 133, 211
 - espectral, 203, 237
- Analizador de Fourier, 230, 239
- Anemometría, 103, 322
- Ángulo
 - de Brewster, 372
 - de contacto, 95
 - de difracción, 346, 347, 348, 387
 - de peralte, 14, 15
 - límite, 356, 357, 358, 359, 372
- Anticiclones, 23
- Aorta, 107, 146
- Apertura numérica, 406
- Apical, 240, 241
- Árbol(es), 52, 65, 74, 75, 147
- Área, 40, 41, 75
- Armónico(s), 228, 229, 230
- Arteria(s), 62, 65, 103, 112
- Arterioesclerótica(s), 103, 104
- Ascenso capilar, 104
 - de la savia, 99
- Astigmatismo, 401
- Atmósfera, 92, 104, 127, 158, 164, 177, 178, 190
- ATP, 31, 32, 267, 284, 285, 297
- ATPasa, 32, 267, 285, 326
- Atracción gravitacional, 22
- Audición, 240, 241, 242
- Aumento lateral, 379, 384, 396, 402, 404
- Autoinducción, 319
- Avestruz, 143
- Axón, 299, 300-304, 324, 325, 329
- Bacteria(s), 32, 128, 160, 328
- Ballena, 50, 128
- Barómetro(s), 104
- Basal, 240, 241
- Baterías, 281, 282
- Becquerel, 432
- Bergonie, 441
- Biomecánica, 1, 24-30
- Bohr, 328, 419
- Boltzmann, 123, 173
- Bomba(s)
 - de agua, 103, 105
 - de sodio-potasio, 297, 299, 326
 - de vacío, 103
 - moleculares, 115, 297, 326
- Borrascas, 24
- Cabello, 84
- Cabeza del fémur, 28
- Cachalote, 50
- Cadena de huesecillos, 240
- Calamar, 9
- Calor, 153, 154, 166, 170, 287
 - de fusión, 156, 157, 187
 - específico, 156, 175, 187
 - latente, 156, 157, 187
 - molar, 156, 175
- Caloría, 156

- Cámara fotográfica, 412
- Cambio de fase, 157
- Cambio climático, 164, 165
- Campo
 - eléctrico, 266, 267, 270, 271, 273
 - magnético, 305-309
- Canales iónicos, 301, 302, 304, 305, 327
- Canal auditivo, 209, 240, 260
- Cantidad de movimiento, 7, 8
- Capa de ozono, 190
- Capacidad, 274, 275
- Capilar(es), 96, 112
- Capilaridad, 95, 96
- Caracol, 240
- Carnot, 165, 166, 167, 168, 169, 189
- Caudal, 104, 110, 112, 442
- Cavidad
 - bucal, 229, 238, 239
 - resonante, 239, 240
- Celsius, 154, 186
- Célula, 187, 241
 - muscular, 272
 - nerviosa, 272
- Centipoise, 90
- Centrifugación, 139, 140
- Centrifugadora, 139, 140, 186
- Centro, 374
- Cerebro, 240
- Cero absoluto, 154, 182
- Choque elástico, 181
- Ciclo de Joule, 188, 189
- Ciclotrón, 325
- Cilios, 98
- Cinemática, 3-7
- Circuitos eléctricos, 276-278, 281, 283, 286, 288, 289, 318
- Citoplasma, 290
- Clausius, 165
- Cóclea, 240, 241
- Codones, 345
- Coefficiente
 - adiabático, 175
 - de arrastre, 130, 149
 - de dilatación, 155, 186
 - de filtración, 116
 - de resistencia, 130, 149
 - de rozamiento, 13
 - de rozamiento dinámico, 13
 - de rozamiento estático, 13
 - de sustentación, 142, 143, 145, 149
- Coherente, 338
- Cohesión interna, 94
- Cohete, 9
- Colimador, 308, 309
- Comportamiento elástico, 57
 - no lineal, 57
 - plástico, 57
- Compresión, 153
- Condensador, 273-275
- Conducción eléctrica, 275
- Conductancia, 276
- Conductividad térmica, 158-160
 - eléctrica, 276
- Conservación
 - de la cantidad de movimiento, 8
 - de la energía, 37, 268, 269
 - de la energía mecánica, 33-39
 - de la masa, 101
 - del ímpetu, 8
 - del momento angular, 20
- Constante
 - de Boltzmann, 123, 173, 174, 182, 183, 448
 - de difusión, 123, 303
 - de gravitación universal, 38, 267, 448
 - de los gases ideales, 175, 448
 - de Planck, 417, 418, 448
 - de Stefan, 158, 162, 163, 448
 - dieléctrica, 265, 274, 289, 448
 - elástica, 13, 59, 194
 - eléctrica, 267
- Contaminación, 246
- Contracción, 61
- Contraste de fases, 408, 409
- Convección forzada, 158, 159, 187
- Corazón, 84, 91, 107, 113-115, 146, 272, 280
- Coriolis, 22, 23
- Córnea, 388, 389, 398
- Coroides, 388, 389
- Corriente
 - alterna, 318-320
 - eléctrica, 276, 277, 289
- Corto alcance, 417
- Cristales, 182
- Cristalino, 377, 388, 412, 413
- Criterio
 - de Abbe, 406, 407
 - de Rayleigh, 391, 393, 394
- Cualidad del sonido, 236
- Cuanto, 417, 418, 434, 436
- Cuerdas bucales, 238, 239
- Cuerpo negro, 158, 162, 163
- Culombio, 265
- Curie, 432
- Curio, 432, 444
- De Broglie, 233, 419
- Decibelio, 232-234, 245, 246
- Defectos
 - de masa, 420, 421
 - ópticos, 397
 - visuales, 395

- Deformación
 - permanente, 57
 - tangencial, 76
 - unitaria, 58, 60
- Densidad, 89, 184, 222, 223, 244, 448
 - lineal de masa, 219
- Descarga, 279-281
- Desintegración
 - alfa, 428, 430, 444
 - β' , 428, 429, 444
- Desplazamiento, 61, 62, 123
- Despolarización, 272
- Diafragma(s), 386, 387
- Diferencia de potencial, 267, 274, 307
- Difracción, 247, 346-348
- Difusión, 123-125, 296, 297
 - de Rayleigh, 373
- Dilatación, 155, 156, 195
- Dinámica
 - de fluidos, 97-110
 - de rotación, 19-24
 - de traslación, 7-10
- Dioptrias, 385, 397, 398, 400
- Dipolo
 - cardiaco, 271, 272
 - eléctrico, 269-271
 - magnético, 311, 312
- Disipación, 197, 299
- Disolución, 276, 277, 298
- Disolvente, 277
- Dispersión de la luz, 361
- Distancia
 - focal, 376, 386, 387, 411, 412
 - imagen, 379
 - objeto, 379
- Dípteros, 198
- DNA, 78, 79, 190, 344, 345, 441
- DNA polimerasa, 32
- Dosis
 - radiactiva, 434-436, 445
- EBR, 434
- Ebullición, 180
- Eco, 243
- Ecografía, 243, 248, 253
 - Doppler, 248, 257, 258
- Ecolocalización, 243
- Ecuación(es)
 - cinemáticas, 4
 - de Bernoulli, 101, 102, 129
 - de continuidad, 97-100
 - de estado, 175, 179, 181, 182
 - de Goldmann, 302
 - de las lentes delgadas, 378
 - de Nernst, 296
 - del constructor de lentes, 376
 - del movimiento, 200, 420
 - dimensional, 41
 - fundamental de la dinámica, 7
- Efecto
 - Doppler, 249-252, 256, 257
 - invernadero, 164, 188
 - Joule, 277
 - Magnus, 107, 108
 - Tyndall, 373
- Eficacia biológica relativa, 434-436
- Einstein, 126, 127, 417
- Eje, 374
 - de transmisión, 370, 371
- Elasticidad, 55-85
- Elastina, 84
- Electricidad, 265-290
- Electrocardiografía, 271, 272
- Electrocardiogramas, 271
- Electromagnética, 266
- Elefante, 44, 45
- Emisividad, 158, 188
- Emisor, 158, 249-251
- Empuje
 - de Arquímedes, 93, 94, 134
- Endoscopia, 359
- Energía
 - cinética, 18, 182, 212
 - cinética de rotación, 182
 - de enlace, 421, 424, 444
 - de fusión, 422
 - eléctrica, 187
 - interna, 153, 171, 182, 183, 188
 - libre, 172
 - libre de Gibbs, 172
 - libre de Helmholtz, 172
 - mecánica, 36
 - nuclear, 421
 - potencial, 34, 35, 271, 274
 - potencial elástica, 34, 36, 81, 83, 182, 212
 - potencial electrostática, 266, 268, 271
 - potencial gravitatoria, 34, 35, 185
- Entalpía libre, 172
- Entropía, 165-167, 170, 171, 173, 188, 189
- Epíffisis, 76
- Equilibrio
 - de traslación, 24
 - mecánico, 24, 64, 72
 - termodinámica rotacional, 24, 28, 29
 - traslacional, 24, 28, 29
- Eritrocito, 255, 256, 261
- Escala
 - Absoluta o Kelvin, 154, 165, 169, 182

- Celsius, 154
- decibélica, 193, 230-233, 261
- Fahrenheit, 154
- Esclerótica, 388
- Esfuerzo(s)
 - de compresión, 57, 58, 60
 - de flexión, 68
 - de torsión, 57, 58, 77, 78
 - de tracción, 57, 58
 - laterales, 66
 - máximo, 57
 - tangencial, 57, 58, 76, 90
 - transversales, 221
 - volumétrico, 61
- Espectro
 - de Fourier, 220
 - de frecuencias, 204, 237, 334
- Espectrógrafo de masa, 306, 307
- Espectrografía, 306
- Espectroscopia, 306
- Espín, 311, 312
- Esponjas de mar, 98, 99
- Estacionario, 174
- Estribo, 240
- Estructuras disipativas, 174
- Expansión, 153
- Experimento(s)
 - de Young, 337-339
- Factor
 - de escala, 44
 - de riesgo, 446
- Fahrenheit, 154, 186
- Faraday, 266
- Faradio, 274
- Fase, 200, 214, 215
- Fémur, 27, 28, 76
- Fibra(s)
 - de vidrio, 410
 - óptica, 359, 360
- Fisión
 - nuclear, 423, 424
- Física
 - del habla, 238-240
 - nuclear, 417
- Flagelos, 32, 148, 328
- Flexión, 65-76
- Fluido(s)
 - ideal, 91
 - incompresible, 98
 - newtoniano, 90
 - no newtoniano, 90
 - viscoso, 90
- Flujo
 - de difusión, 123, 124
 - de Poiseuille, 108-112
 - eléctrico, 295, 298
 - estacionario, 100
 - laminar, 128, 129
 - turbulento, 126, 127
- Fórmula
 - de Einstein, 126, 127
 - de Torricelli, 102, 103
 - del constructor de lentes, 376, 377
 - general de las lentes delgadas, 378, 380, 411, 412
- Foco, 376
 - virtual, 383
- Fosfolípidos, 116
- Fosforilación
 - oxidativa, 284, 285, 326
- Fotón, 417, 418, 420
- Fóvea, 388, 389
- Frecuencia
 - característica, 200
 - de oscilación, 194, 199, 245, 250-252
 - de resonancia, 200, 201, 312
 - externa, 199, 200
 - fundamental, 228, 229
 - natural, 194, 200
- Frente de onda, 336, 351-353
- Fricción, 13
- Fuerza(s)
 - aerodinámica, 129
 - central, 20
 - centrífuga, 14, 15, 139
 - centrípeta, 17, 306, 307
 - conservativas, 34
 - de arrastre, 129, 130
 - de atracción gravitacional, 11
 - de cohesión, 94
 - de contacto, 13
 - de Coriolis, 22, 23
 - de fricción entre sólidos, 13
 - de la gravedad, 11, 12
 - de Lorentz, 306, 308
 - de reacción, 8, 9
 - de resistencia, 16
 - de resistencia del aire, 129, 130
 - de Stokes, 133, 134, 196
 - de sustentación, 129, 130, 142, 143
 - elástica, 57-59, 194, 195
 - electromotriz, 277, 278, 282, 283, 316, 317
 - electrostática, 267, 268, 308
 - exteriores, 8
 - externa(s), 20
 - ficticias, 22
 - gravitatoria, 267, 268

- inercial, 128
- interiores, 8
- magnética, 305, 306, 307
- muscular, 286, 287, 326
- tangencial, 90
- viscosa, 128
- Función
 - armónica, 203, 207
- Fusión
 - nuclear, 423, 424, 425, 427
- Gas(es)
 - ideal(es), 175, 181, 182
- Glóbulos rojos, 110, 118, 119, 139
- Gorrión, 145
- Gradiente adiabático, 177, 178
- Gravedad, 11, 12, 185
- Gray, 434
- Habla humana, 238, 239, 240
- Hélices alfa, 82, 83, 344, 345
- Hélices de DNA, 79, 81
- Helicotrema, 240, 241, 242
- Hemoglobina, 126, 141
- Hertz, 333
- Hidrostática 93, 178, 179
- Himenópteros, 198
- Hipermetropía, 397, 398, 412
- Hodgkin, 300
- Hormiga, 44, 45
- Hormonas, 51
- Hueso(s), 72, 76, 78, 79, 83
- Humedad relativa, 179, 180, 181
- Humor
 - acuoso, 388, 389
 - vítreo, 388, 389
- Huxley, 300
- Imagen
 - invertida, 379
 - real, 379
 - virtual, 382, 383
- Imán, 311
- Impedancia, 320
- Ímpetu, 7
- Impulso
 - mecánico, 17
 - nervioso, 198, 240, 299-305
 - y trabajo, 17, 18
- Incompresibilidad, 89
- Índice
 - de refracción, 334, 335, 361-363, 411, 412
- Inducción, 316, 317
- Insecto(s), 198, 259, 260, 261
- Intensidad
 - audible, 232, 233, 234, 245, 260
 - eléctrica, 276, 277
 - eficaz, 320
 - sonora, 230-232, 260
- Interacción
 - electromagnética, 10, 417
 - fundamental, 10, 417
 - nuclear débil, 10, 417
 - nuclear fuerte, 10, 417
- Interferencia, 337, 362, 407
 - constructiva, 338, 347, 365
 - destruktiva, 338, 347, 365
- Intestino, 84
- Inversión térmica, 178
- Iris, 392, 393
- Isobárico, 175, 176
- Isócoro, 175
- Isotérmico, 171, 175
- Isótopos, 183, 422, 423, 425, 438, 439
- Jirafas, 107
- Kelvin, 154, 165
- Laminar, 126, 127
- Láminas beta, 82, 83, 344, 345
- Largo alcance, 10, 417
- Láser, 337, 341, 360, 361, 366, 398
- Lentes, 375
 - «multifocales», 400
 - bicóncavas, 383
 - biconvexas, 375, 377, 383
 - bifocales, 398, 400
 - convergentes, 383, 393, 395
 - delgadas, 374, 376
 - divergentes, 383, 384, 400
- Ley(es)
 - de acción y reacción, 8
 - de Ampère, 314
 - de Biot y Savart, 315
 - de Coulomb, 265, 268, 315, 420
 - Dulong y Petit, 183
 - de escala, 40-50
 - de Faraday, 316
 - de Fick, 123, 124
 - de Fourier, 158, 159, 160, 168
 - de Hooke, 13, 59, 62, 83, 155, 193
 - de inercia, 7
 - de Kirchhoff, 281-283
 - de la gravitación universal, 11, 35
 - de la palanca, 20
 - de la reflexión, 349, 351
 - de Laplace, 63, 64, 118

- de Lenz, 317
- de Malus, 370
- de Newton, 7, 158, 159, 181
- de Newton de la viscosidad, 90
- de Ohm, 110, 111, 276, 277
- de Poiseuille, 108-115
- de Snell, 350, 353, 356, 361, 362
- de Stefan-Boltzmann, 158, 162
- de Stokes, 133, 134, 196
- de Weber-Fechner, 234
- de Wien, 162, 164, 401
- fundamental de la dinámica, 7
- Ligamento patelar, 28
- Límite de resolución, 387
- Línea de corriente, 100
- Lípidos, 326
- Líquido, 224, 225
 - sinovial, 13
- Litotricia, 258
- Litotritor, 258
- Longitud
 - de onda, 207, 209, 216, 217, 239, 251, 252, 334, 335, 418
 - de persistencia, 80
- Lucio, 52
- Lupa, 382, 383
- Luz
 - coherente, 338
 - monocromática, 338
 - polarizada, 368-370
 - ultravioleta, 334
 - visible, 334, 373
- Macroestado(s), 173, 174
- Mácula, 388
- Magnetismo, 305-310
- Mamíferos, 413
- Mancha
 - amarilla, 388
 - de difracción, 387, 391, 393
- Manómetro, 104
- Máquinas térmicas, 165-168
- Martillo, 240
- Masa, 7, 8, 11
- Máximos
 - primarios, 342, 347
 - secundarios, 342, 343, 347
- Maxwell, 266, 333
- Mecánica
 - cuántica, 417-420
 - estadística, 183, 184
- Mecanismo de Starling, 121, 122
- Medio elástico, 57
- Membrana
 - basilar, 240, 241
 - biológica, 84, 115-126, 288-305
 - celular, 64, 147
 - permeable, 116
 - semipermeable, 117
- Metabolismo, 41, 132, 160
- Meteorología, 24, 127, 158, 164, 177, 178
- Micoplasma, 39
- Microestados, 173, 174, 182, 185
- Microscopio, 80, 402, 403, 405, 407, 409, 412, 413
- Miopía, 398, 399, 412
- Mitocondrias, 285, 326, 435
- Modelo de Bohr, 419, 420
- Modo fundamental, 204, 220
- Modos, 204, 220
- Módulo
 - cortante, 76
 - de compresibilidad, 61, 186, 222
 - de Poisson, 61, 77
 - de rigidez, 76
 - de Young, 56, 60, 61, 72, 81, 155, 222
- Moléculas, 181, 190, 230
- Momento
 - angular, 19
 - de inercia, 20, 21
 - de inercia de la superficie neutra, 67, 70, 72
 - de inercia polar, 78, 79
 - de las fuerzas externas, 20
 - de un vector, 19
 - de una fuerza, 19
 - dipolar, 327
 - dipolar eléctrico, 270
 - flexor, 68, 73, 84, 85
 - lateral, 74
 - lineal, 7
 - torsor, 79, 84, 85
- Monocromática, 338
- Motores moleculares, 30-33
- Movilidad, 123, 148, 325
- Movimiento
 - armónico simple, 194
 - circular, 5, 6, 7
 - circular uniformemente acelerado, 5-6
 - oscilatorio armónico, 193, 194
 - oscilatorio forzado, 193
 - rectilíneo, 3-5
 - sinusoidal, 193, 194
 - uniformemente acelerado, 3-5
- Murciélagos, 243, 244, 253, 260, 261
- Músculo(s), 286, 287
 - abductores, 25, 27, 28
 - deltoides, 25, 26
- Nanomecánica, 30-33
- Nervio auditivo, 240
- Neurona(s), 301-305

- Neurotransmisores, 304, 305
 Neurorreceptores, 304, 305
 Neutrino, 429, 431
 Newton, 333
 Nivel acústico, 245
 Niveles de energía, 419, 420, 429
 Nodo(s), 215, 227, 293
 Número
 atómico, 421, 422
 de Avogadro, 181, 183, 184, 301, 448
 de Mach, 258
 de onda, 207, 209
 de Reynolds, 126, 127, 148, 149
 másico, 421, 422
- Objeto «virtual», 376
 Océano, 89
 Ocular, 403, 404
 Oído
 externo, 240, 241
 humano, 240
 medio, 240, 241
 Ojo, 349, 377, 388, 389, 390, 412, 413
 Oligomicina, 285
 Onda(s), 206
 acústicas, 221, 223, 225, 230
 armónica, 212, 214
 de choque, 258
 de presión, 209, 211, 242, 243
 electromagnética, 333, 334, 369
 esféricas, 336
 estacionaria, 215, 216, 226, 229, 239
 longitudinal, 210, 211
 planas, 336
 sinusoidales, 203, 208
 sonora, 209, 211, 221-227, 239, 243
 transversales, 210, 211
 Óptica, 333-413
 Órbita circular, 12, 52, 420
 Órgano de Corti, 240-242
 Oscilación(es), 194
 amortiguadas, 196
 periódicas, 194, 195, 208
 Oscilador
 amortiguado, 196, 198, 320
 armónico simple, 194, 195
 Ósmosis inversa, 120, 121
 Otolito(s), 201, 202
- Pandeo(s), 66, 68, 76
 Paralelo, 277, 293
 Partícula(s)
 alfa (α), 430
 libres, 10
- Pascal, 92
 Péndulo simple, 44, 194, 195, 200
 Pérdida
 de carga, 102, 286, 287
 Perfil parabólico, 109
 Perilinfia, 241, 242
 Período
 de oscilación, 42, 43, 207
 de rotación, 12
 orbital, 12
 Permeabilidad, 116, 302, 303, 304
 Permeable, 116
 Perturbaciones
 de densidad, 221
 de presión, 221
 Peso específico, 74
 Piezoeléctrico, 248, 258
 Pinzas ópticas, 80, 81
 Placa de fase, 408, 409
 Planck, 417
 Plancton, 91, 134
 Plano de polarización, 369, 370
 Plasma, 111, 120, 121, 139, 141, 146, 326
 Plegamiento, 345
 Poder de resolución, 349, 391, 406, 407
 Poise, 90
 Polarizabilidad, 270
 Polarización, 368, 369, 370, 371
 Polarizada, 368, 369, 407
 Polo, 374
 Poros, 289, 292
 Potasio, 294, 297, 299, 300, 301, 326
 Potencia, 113-115, 144, 145, 167, 168, 212, 234, 277
 de una lente, 385
 Potencial
 de acción, 299-305, 328, 329
 de Nernst, 296
 eléctrico, 265, 266
 Presbicia, 400
 Presión
 alveolar, 105, 106
 arterial, 106, 107
 atmosférica, 92, 106, 178, 179
 de vapor, 179, 180
 hidrostática, 92, 178, 179
 manométrica, 92, 106
 negativa, 154
 osmótica, 117, 118, 122, 147
 parietal, 64, 84
 sanguínea, 111
 termodinámica, 171, 175, 179, 226
 transmural, 65
 Primera ley, 153, 154, 171

Principio

- de acción y reacción, 8, 9
- de Arquímedes, 93, 94
- de conservación de la cantidad de movimiento, 8
- de conservación de la energía mecánica, 33
- de conservación de la masa, 101
- de conservación del ímpetu, 8
- de conservación del momento angular, 20
- de exclusión de Pauli, 429
- de Huygens, 333, 337
- de semejanza, 39
- de superposición, 61

Proceso

- adiabático, 175, 177, 178, 188, 225
- isotermo, 171, 175, 188
- reversible, 165, 166, 167, 170, 188
- irreversible, 168

Propagación de ondas, 206-208

Proteína(s), 79, 80, 81, 83, 84, 122, 314, 344, 345

Puente de Wheatstone, 324

Punto

- de estancamiento, 129
- lejano, 398
- próximo, 389, 390
- remoto, 389, 390

Pupila, 349, 350, 389, 393

Quimiosmótico, 326

Quinesina, 31, 32

Rad, 434

Radiación, 158, 159

- electromagnética, 154, 158
- gamma, 435
- ionizante, 310, 435, 441, 442
- sincrotrón, 346
- solar, 162-164, 188, 373

Radiactividad, 416, 428

Radio de curvatura, 68, 308, 309, 374

Rayo, 243, 244

Rayos

- gamma, 445
- paraxiales, 376, 383
- X, 310, 344, 345, 346, 443

Reactancias, 319, 320

Receptor, 249-252

Red de difracción, 343, 344, 410

Reflexión, 243, 244, 350, 357, 371

- total, 350, 356, 358

Refracción, 243, 244, 247, 350, 352

Refrigerador, 180, 181

Región

- elástica, 57
- lineal, 57

Reglas de Kirchhoff, 281, 282, 283

Relación

- de Einstein, 126, 127, 148
- de Mayer, 175

Rem, 435

Remolinos, 126

Rendimiento, 166, 167, 168, 169, 189, 286

Repulsión electrostática, 420

Resistencia(s)

- aerodinámica, 130, 131
- del aire, 130
- eléctrica, 276, 277, 278, 289
- equivalente, 277, 278
- hidrodinámica, 110, 111, 112
- interna, 278

Resistividad eléctrica, 276, 292

Resonancia, 199, 200, 321

- magnética nuclear, 310, 311, 312, 314

Retina, 349, 391, 392, 393

Reverberación, 243

Ritmo metabólico, 41, 132, 160, 161, 187

Rotura, 57, 58

Rozamiento, 13

Salinidad, 89

Sangre, 89, 111-115, 134

Savia, 99, 100, 117, 118, 147

Sedimentación, 133, 134, 135, 141, 185

Selector de velocidades, 307, 308

Semejanza

- cinemática, 39
- cinética, 39
- dinámica, 39
- geométrica, 39

Semiconductores, 276

Semipermeable, 116, 117

Semivida, 431, 432, 434

Serie, 277

Sievert, 435

Sinapsis, 305

Sistema

- aislado, 172
- auditivo, 240
- cardiovascular, 111-115, 127, 128
- cerrado, 171
- de referencia, 208
- no aislado, 171
- no inercial, 122

Sodio, 294, 299, 300, 301, 326

Solenoides, 319

Sonido(s), 182, 221-250, 259, 260

- audibles, 233-236

Sonómetros, 245-246

Superconductor, 315

- Superficie: neutra, 67, 68
- Superposición
 constructiva, 214, 338
 destructiva, 214, 338
- Temblor, 287, 288, 325
- Temperatura, 89, 154, 158, 160, 162, 172, 180, 186
 absoluta, 154, 165, 169, 182
 Celsius, 154
 Falirenheit, 154
- Tendón de Aquiles, 29
- Tensión
 de una cuerda, 218, 219
 parietal, 63, 64, 85
 superficial, 94-97
- Teorema
 de equipartición de la energía, 182, 183
 de Fourier del impulso, 204
 trabajo-energía, 33-35
- Teoría
 cinética, 181-186
 cuántica, 417-420
- Tercera ley
 de Kepler, 12
 de Newton, 8
- Termómetro, 154, 186, 187
- Termodinámica, 153-181
 Primera ley de, 176
 Segunda ley de, 165, 166, 172, 174
- Termografía, 158
- Tesla, 306
- Tibia, 28, 29, 79, 85
- Tiempo
 característico de amortiguamiento, 196, 199
 de descarga, 280, 287
 de inmersión, 50, 51
 de relajación, 196, 199
- Timbre, 230, 236
 de voz, 238, 239
- Tímpano, 240
- Tono(s), 230, 236
- Torr, 92
- Torsión, 77-79
- Trabajo, 17, 153, 166, 167
- Tracción, 58, 59
- Transductor, 255, 256
- Transporte
 de energía, 158, 159, 161, 193, 206
 de iones, 295, 296, 302
 de materia, 123, 124, 193, 206
- Trayectoria, 3, 17
- Tribondeau, 442
- Turbulencia, 126, 127
- Ultracentrifugación, 186
- Ultrasonido(s), 199, 241, 246, 247, 253, 260
- Uranio, 183
- Van der Waals, 179
- Vaso sanguíneo, 62, 63, 108, 112
- Vasodilatación, 62
- Vector de posición, 3, 19, 20
- Velocidad
 angular, 5, 21, 140, 141, 148
 cuadrática media, 182, 183, 184
 de despegue, 143, 144
 de propagación, 207, 208, 218, 241, 325
 del sonido, 90, 182, 221-226, 248, 250, 251
 instantánea, 3
 lineal, 3
 terminal, 134, 141
- Vencejo, 143
- Ventaja mecánica, 27
- Ventana oval, 240
- Ventrículo, 113, 114, 272
- Vientre, 215, 227
- Viscosidad
 cinemática, 90
 del agua, 91, 448
 del aire, 91, 448
 dinámica, 90, 109, 110, 116, 124, 127
- Vista cansada, 400, 401
- Voltaje eficaz, 320
- Voltio, 267
- Volumen, 89
 específico, 89
- Von Bekessy, 241, 242
- Von Helmholtz, 241, 242
- Vórtices, 126
- Vuelo de los insectos, 9, 198, 259, 260, 261
- Xilema, 99, 104
- Yunque, 240
- Zernike, 408



El contenido de esta obra corresponde a los cursos introductorios de la Física en estudios del ámbito de las Ciencias de la Vida (Biología, Farmacia, Medicina, Veterinaria, Ciencias Ambientales). Con un temario formalmente clásico y sin renunciar al rigor del razonamiento físico, se abordan numerosos temas de importancia en biología y medicina (biomecánica, sedimentación, membranas, circulación de la sangre, biomagnetismo, tamaño y forma, radiaciones ionizantes, etc.), tanto desde el punto de vista teórico como en sus aplicaciones prácticas y numéricas.

Este libro está pensado también para ayudar al estudiante en su aprendizaje práctico, ya que incluye más de 150 ejemplos prácticos resueltos y más de 200 problemas propuestos con sus soluciones. Todos los capítulos incluyen también secciones de ampliación y aplicación que en una lectura rápida del texto pueden omitirse. Se ha pretendido ofrecer una obra flexible, adaptable a la moderada diversidad, en cuanto a duración, de los nuevos planes de estudio de nuestras universidades.

La obra es fruto de la experiencia de los autores en la enseñanza y la investigación en estas disciplinas en la Universidad Autónoma de Barcelona, la Universidad de Girona y la Universidad de Navarra. Esta nueva edición incorpora breves introducciones a temas como la mecánica de máquinas moleculares, el efecto invernadero y el cambio climático, o la resonancia magnética nuclear, que incrementan su interés por referirse a temas de gran actualidad.

