3º Los veinte vértices de un dodecaedro son también los vértices de cinco tetraedros regulares (con el centro de figura común con el dodecaedro); su núcleo común es un icosaedro.

Los vértices de un dodecaedro pueden obtenerse, además, de dos grupos diferentes de cinco tetraedros cada uno, siendo los dos grupos *enantiomorfos* entre sí.

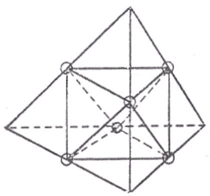

FIG. 38

4º Un grupo de cinco cubos puede dar también los veinte vértices del dodecaedro de modo que cada vértice de éste coincida con dos del cubo (si en cada cubo se inscriben dos tetraedros se obtienen de nuevo los dos juegos de tetraedros de que hemos hablado antes).

5º Los doce vértices de un icosaedro están sobre la superficie de un cubo (fig. 39) [21].

6º Si se prolongan todas las aristas (o caras) de un dodecaedro, los puntos de intersección son los doce vértices de un icosaedro [22].

7º Si se prolongan todas las aristas (o caras) de un icosaedro, se obtienen los veinte vértices de un dodecaedro [23].

Estos dos procesos de transformación por *brote* del icosaedro en dodecaedro y recíprocamente, están representados en la fig. de abajo de la lám. 14, en proyección simétrica ortogonal. El núcleo generador es un icosaedro que da origen al dodecaedro punteado y éste, a su vez, produce un icosaedro que lo envuelve todo.

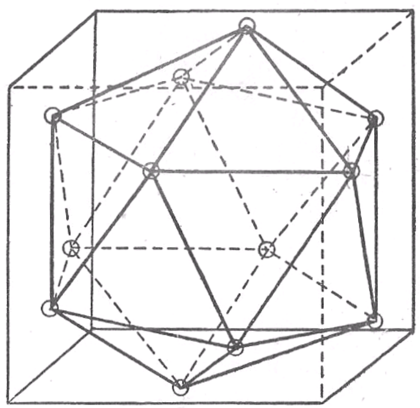

FIG. 39

Basta examinar el cuadro VII para observar que el icosaedro y el dodecaedro presentan, en todas sus proporciones numéricas, modulaciones sobre el tema de la sección áurea y desde este punto de vista parecen gozar en el espacio del mismo monopolio que el pentágono y el decágono en el plano.

(21) La razón entre la arista del cubo y la del icosaedro inscrito es Φ.

(22) La razón entre la arista del icosaedro envolvente y la del dodecaedro generador es Φ^2.

(23) La razón entre la arista del dodecaedro envolvente y la del icosaedro generador es Φ.

CUADRO VII

a longitud de la arista de un poliedro regular
r radio de la esfera circunscrita al polígono inscrito a un poliedro
R radio de una esfera circunscrita a un poliedro
ρ radio de la esfera tangente en los puntos medios de las aristas
S área total del poliedro
V volumen del poliedro

	R	r	ρ	S	V
Tetraedro	$\frac{a}{4}\cdot\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}\cdot\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}\cdot\sqrt{2}$	$a^2.\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\cdot\sqrt{2}$
Octaedro	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{\sqrt{6}}$	$\frac{a}{2}$	$2a^2.\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{3}\cdot\sqrt{2}$
Cubo	$\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$6a^2$	a^3
Icosaedro	$\frac{a}{4}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\Phi^2+1}$	$\frac{a}{4}\cdot\frac{(3+\sqrt{5})}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\,\Phi^2$	$\frac{a}{4}\,(\sqrt{5}+1) = \frac{a}{2}\cdot\Phi$	$5a^2.\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{12}\,(3+\sqrt{5}) = \frac{5a^3}{6}\cdot\Phi^2$
Dodecaedro	$\frac{a}{4}\,(\sqrt{15}+\sqrt{3}) = \frac{a.\sqrt{3}}{2}\cdot\Phi$	$\sqrt{\frac{25+11.\sqrt{5}}{10}} = \frac{a\Phi^2}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\Phi^2+1}$	$\frac{a}{4}\,(3+\sqrt{5}) = \frac{a}{2}\cdot\Phi^2$	$3a^2.\sqrt{5\ (5+2\sqrt{5})} = 3a^2\Phi.\sqrt{5}.\sqrt{\Phi^2+1}$	$\frac{a^3}{4}\,(15+7.\sqrt{5}) = \frac{a^3}{2}\cdot\Phi.\sqrt{3\Phi+1}$

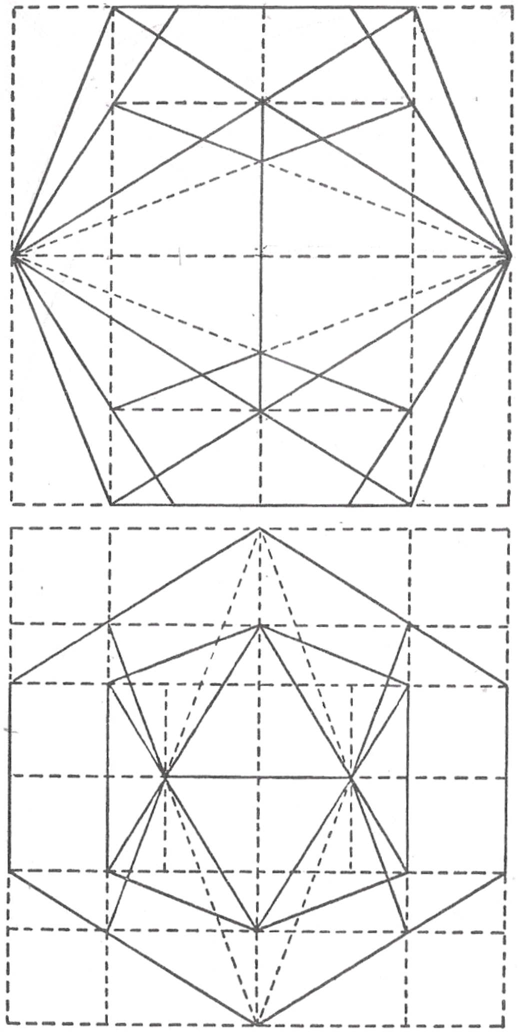

LÁMINA 13

ARRIBA: Proyección ortogonal de un icosaedro y de un dodecaedro inscrito en un cubo

ABAJO: Variante.

Geométricamente se comprende todo esto al examinar las siguientes láminas:

La lám. 13 (arriba), representa las proyecciones de un icosaedro y un dodecaedro, inscritos en un cubo de tal manera que sobre la superficie de éste se encuentran los doce vértices del icosaedro (y seis de sus aristas) y doce vértices (de los veinte) del dodecaedro (y seis de sus aristas).

Si a_i es la longitud de la arista del icosaedro, y a_d la longitud de la arista del dodecaedro, se tiene en este caso:

$$\frac{a_i}{a_d} = \Phi.$$

Los ocho vértices restantes del dodecaedro coinciden con los ocho del cubo interior (de lado $\frac{1}{\Phi}$ con respecto al del cubo mayor) cuya arista es igual a la del icosaedro.

La lám. 13 (abajo), representa una proyección análoga. Los doce vértices del icosaedro (y seis de sus aristas) se encuentran también sobre la superficie de un cubo, cuyos ocho vértices

coinciden con ocho de los vértices de un dodecaedro que tiene su arista igual a la del icosaedro. Los otros doce vértices y seis de las aristas del dodecaedro se encuentran sobre la superficie de un cubo envolvente tal que la longitud de su arista y la de la arista del otro cubo están en la razón Φ.

Si se colocan sobre la superfice del cubo menor los seis vértices de su octaedro recíproco y los cuatro vértices de un tetraedro coincidiendo estos últimos con cuatro de los vértices del cubo (que pertenecen también al dodecaedro) se obtiene una proyección de *todo a uno* de los cinco cuerpos platónicos (lámina 14, arriba).

Las figuras de las láminas 13 y 14 presentan todas modulaciones rectangulares en Φ que volveremos a encontrar en el estudio de los rectángulos dinámicos.

Se pueden todavía indicar, de acuerdo con el cuadro VII y las láminas 15 y 16, que representan las proyecciones simétricas del icosaedro y del dodecaedro, una serie de relaciones entre el pen-

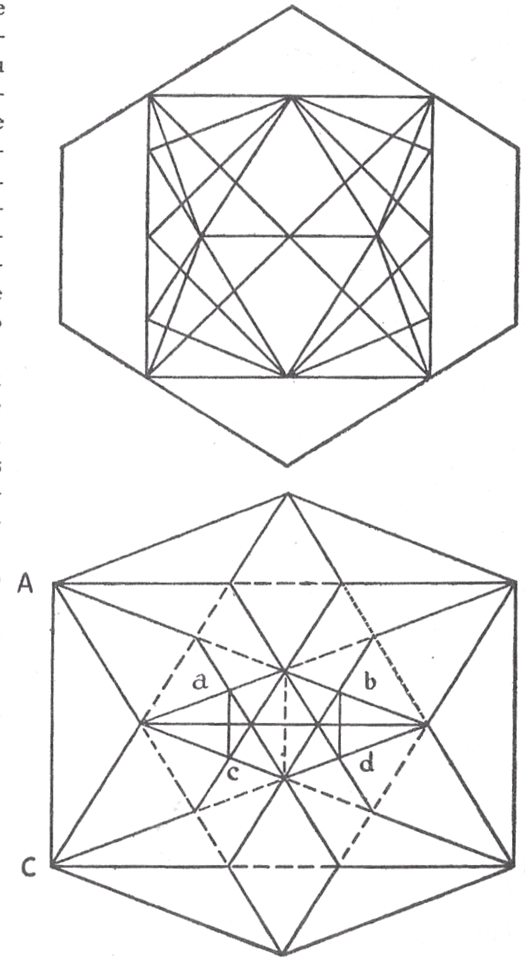

LÁMINA 14

ARRIBA: Proyección ortogonal de una misma figura de los cinco cuerpos platónicos

ABAJO: Paso del icosaedro al dodecaedro y recíprocamente prolongando las aristas tágono y el decágono, por un lado, y estos dos cuerpos, por el otro; por ejemplo:

El radio de la esfera circunscrita en un icosaedro regular es igual al lado del pentágono estrellado inscrito en un círculo de radio igual a la mitad de la arista del icosaedro;

El radio de la esfera tangente en los puntos medios de las aristas del

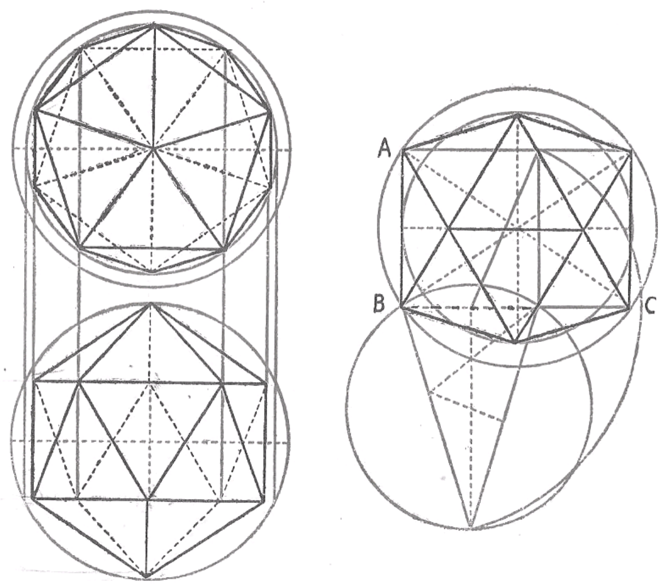

Lámina 15

Tres proyecciones ortogonales del icosaedro

icosaedro es igual al lado del decágono estrellado inscrito en el mismo círculo; etc.

Los veinte vértices del dodecaedro son también vértices de cuatro pentágonos regulares iguales dos a dos y situados en planos paralelos, siendo la razón entre las longitudes de los lados de los pentágonos igual a Φ, lo mismo que las razones entre las distancias respectivas de estos cuatro planos.

Los doce vértices del icosaedro coinciden con los de tres rectángulos de módulo Φ perpendiculares dos a dos, teniendo como diagonales longitudes iguales al diámetro de la esfera circunscrita al icosaedro.

Esta riqueza de correlaciones entre la sección áurea y los dos últimos cuerpos platónicos no escapó a Paccioli: el pentágono le había inspirado ternura; el dodecaedro le arranca acentos épicos y recuerda a propósito el pasaje del *Timeo* en que Platón, luego de haber atribuído a los elementos que componen el fuego, el aire, la tierra y el agua, las formas respectivas del tetraedro, octaedro, cubo e icosaedro, da al dodecaedro una importancia

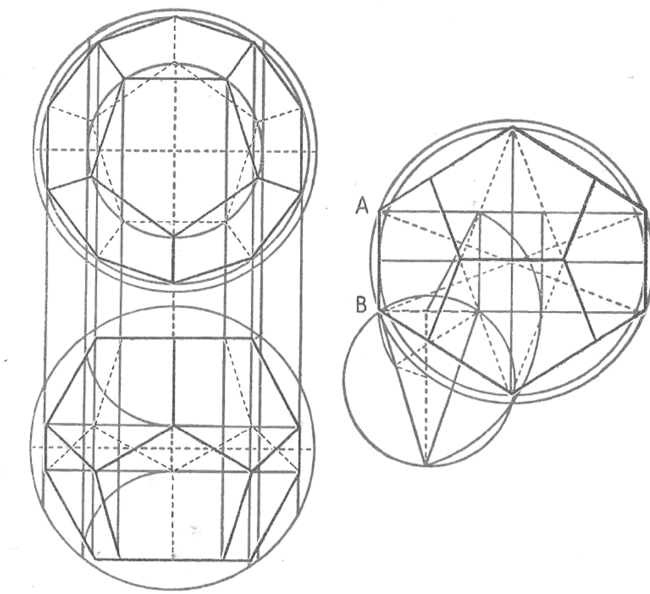

Lámina 16

Tres proyecciones ortogonales del dodecaedro

muy diferente ("Dios se sirvió de él para componer el orden final del Todo").

Y en el retrato del monje por Jacopo da Barbari es un dodecaedro de mármol blanco lo que sirve de lazo de unión mística entre el maestro vestido de burda saya y el discípulo de jubón veneciano.

Los cinco poliedros regulares son fáciles de construir en proyección y en la realidad. Basta dibujar, como lo hacía ya Durero en su *Tratado de las proporciones,* su desarrollo sobre el plano prolongado de una de las caras, recortar este dibujo y construir el cuerpo en el espacio doblando las caras hasta que sus aristas coincidan.

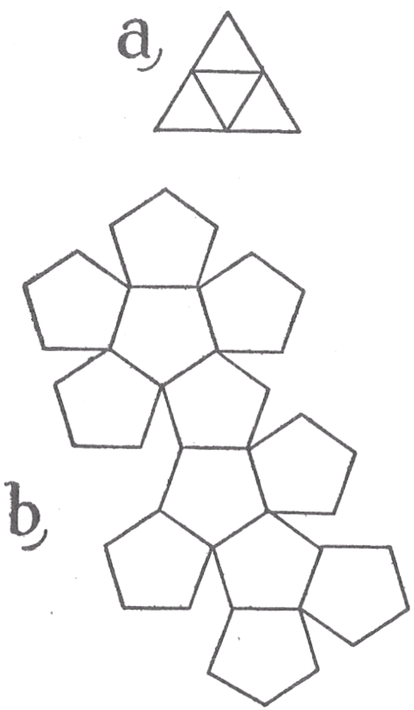

FIG. 40

Las figuras 40*a* y 40*b* representan los desarrollos del tetraedro y del dodecaedro.

Además de los cinco poliedros regulares convexos y continuos, existen también cuatro poliedros regulares continuos estrellados, derivados del dodecaedro y del icosaedro, dos de los cuales son los poliedros de vértices estrellados de Poinsot y los otros dos los poliedros estrellados de Kepler, o poliedros estrellados propiamente dichos, a saber:

1º El dodecaedro estrellado de veinte vértices, obtenido prolongando las caras (o las aristas) de un icosaedro regular convexo (fig. 41); sus vértices coinciden con los del dodecaedro regular envolvente obtenido por el mismo *brote.*

2º El dodecaedro estrellado de doce vértices obtenido prolongando las caras (o las aristas) de un dodecaedro regular convexo, (fig. 42); sus vértices coinciden con los del icosaedro regular envolvente obtenido por el mismo *brote.*

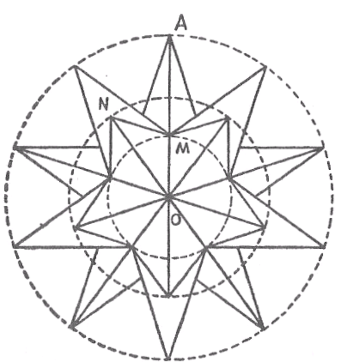

FIG. 41

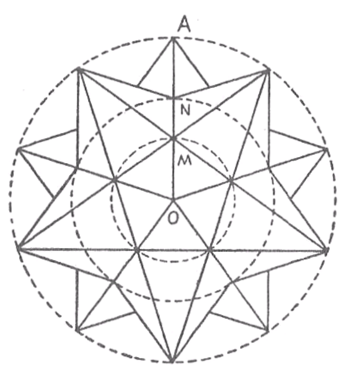

FIG. 42

Estos dos cuerpos, cuyo estado civil regular establecerá Kepler, inspiraron desde principios del Renacimiento las formas de las linternas estelares que todavía se encuentran en Toscana y en Venecia.

Las proyecciones simétricas de las figuras 41 y 42 demuestran su afinidad con el pentagrama, el decágono estrellado y la razón Φ. Se tiene, por ejemplo en una y otra proyección:

$$\frac{ON}{OM} = \frac{OA}{MA} = \Phi$$

El grupo de estos dos poliedros estrellados keplerianos constituye en el espacio una transposición desdoblada del pentagrama. Son propiamente dodecaedros en el sentido riguroso de la palabra, pues tanto uno como otro pueden obtenerse por la combinación y el ajuste en el espacio de doce pentagramas (pentágonos estrellados regulares planos).

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Volvamos a los poliedros convexos. Comprenden también, además de los cinco cuerpos platónicos (regulares convexos continuos), trece cuerpos igualmente inscriptibles en una esfera, llamados *poliedros semirregulares arquimedianos,* cada uno de los cuales tiene por caras polígonos regulares de aristas iguales, pero de dos (o en tres casos de tres) especies diferentes. Los ángulos sólidos de los vértices (a los que convergen tres, cuatro o cinco aristas) son superponibles en cada uno de estos trece poliedros cuyas características se dan en el cuadro VIII (pág. 88).

La fórmula de Euler $s + f = c + 2$ se aplica a los cuerpos arquimedianos como a todos los demás poliedros convexos.

Once de entre ellos pueden obtenerse muy fácilmente partiendo de los cinco poliedros platónicos. Si se toma el punto medio de cada una de sus aristas y se unen los puntos así determinados, se consiguen ya dos de ellos (el tetraedro no da origen a un cuerpo arquimediano, sino el octaedro; el octaedro y el cubo dan el mismo cuerpo arquimediano de doce vértices, con ocho caras triangulares y seis cuadradas, llamado *cuboctaedro;* el dodecaedro y el icosaedro también producen el mismo cuerpo arquimediano, con doce caras pentagonales y veinte triangulares, y treinta vértices, llamado *triakontágono*). Si en vez de un punto se toman dos sobre cada arista de un poliedro platónico, se obtienen otros cinco cuerpos arquimedianos y repitiendo estas dos operaciones con el cuboctaedro y el triakontágono, resultan cuatro más.

Los once poliedros semirregulares así obtenidos tienen tres o cuatro aristas que convergen en cada vértice. Los dos que quedan tienen cinco en cada vértice como el icosaedro.

CUADRO VIII

Los trece poliedros semirregulares arquimedianos

Número de vértices (el índice da el número de aristas por vértice)	*Número de lados*	*Número y características de las superficies*
12^{3a}	18	4 exágonos + 4 triángulos (equiláteros).
12^{4a}	24	6 cuadrados + 8 triángulos.
30^{4a}	60	12 pentágonos + 20 triángulos.
24^{3a}	36	8 exágonos + 6 cuadrados.
24^{3a}	36	6 octógonos + 8 triángulos.
60^{3a}	90	20 exágonos + 12 pentágonos.
60^{3a}	90	12 decágonos + 20 triángulos.
24^{4a}	48	18 cuadrados + 8 triángulos.
60^{4a}	120	12 pentágonos + 30 cuadrados + 20 triángulos.
48^{3a}	72	6 octógonos + 8 exágonos + 12 cuadrados.
120^{3a}	180	12 decágonos + 20 exágonos + 30 cuadrados.
25^{5a}	60	6 cuadrados + 32 triángulos.
60^{5a}	150	12 pentágonos + 80 triángulos.

Los números 2, 3, 8, 9, se sacan respectivamente del cubo (o del octaedro), del dodecaedro (o del icosaedro), del nº 2 y del nº 3 tomando un punto (el medio) para cada una de sus aristas. Los números 1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, se sacan del tetraedro, del octaedro, del cubo, del icosaedro, del dodecaedro, del nº 2 y del nº 3 tomando dos puntos sobre cada una de sus aristas.

A estos trece cuerpos arquimedianos propiamente dichos deben agregarse dos series infinitas, la de los prismas regulares rectos inscriptibles en una esfera (dos polígonos regulares idénticos y paralelos de n lados unidos por n cuadrados) y la de los antiprismas inscriptibles (dos polígonos regulares idénticos paralelos, pero desplazados un ángulo igual a $\frac{360°}{2n}$ y unidos por $2n$ triángulos equiláteros, siendo n el número de lados de los polígonos directores).

Los prismas y los antiprismas regulares así definidos tienen todas las propiedades de los poliedros arquimedianos y se adaptan a su definición general.

Sus características son las siguientes:

	Número de vértices	*Número de lados*	*Número de caras*
	s	c	f
Prismas	$2n$	$3n$	$n + 2$
Antiprismas	$2n$	$4n$	$2\ (n + 1)$ (24)

El prisma recto de base cuadrada es idéntico al cubo y el antiprisma de base triangular idéntico al octaedro.

Los prismas o antiprismas cuyo polígono de base no entra en los tres casos previstos por el teorema de Gauss, no pueden construirse *euclidianamente*.

Los trece poliedros arquimedianos, así como los prismas y antiprismas regulares, pueden representarse en desarrollo plano y construirse en seguida ajustando las caras por el método elemental de Durero.

Entre los poliedros arquimedianos, dos son lo bastante notables, debido a sus propiedades geométricas, para merecer especial mención. Son los siguientes:

1º El cuboctaedro que tiene doce vértices, veinticuatro aristas (iguales), catorce caras, ocho de las cuales son triángulos equiláteros y seis cuadrados.

$OA = AB = BC$, etc. (en realidad) arista $a = R$, $S = 2R^2\,(3+\sqrt{3})$,

$$V = \frac{5}{3}\,R^3\sqrt{2}.$$

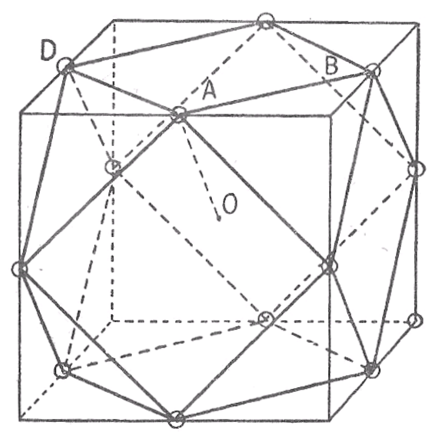

FIG. 43

Puede obtenerse tomando los puntos medios de las aristas de un cubo o de un octaedro. La figura 43 representa esta construcción aplicada al cubo. El cuboctaedro tiene la notable propiedad de que su arista es igual al radio de la esfera circunscrita, y corresponde —desde este punto de vis-

(24) La fórmula de Euler $s + f = c + 2$ se aplica a los prismas y antiprismas regulares lo mismo que a todos los poliedros convexos.

ta— al exágono regular que, como hemos dicho, goza de una propiedad análoga en el plano (su lado es igual al radio del círculo circunscrito).

Veremos en el capítulo siguiente [25] que tiene dos propiedades únicas correspondientes a las características del exágono. Si se considera la esfera que circunscribe, sus doce vértices coinciden con los de los tres exágonos determinados por las intersecciones de tres círculos máximos inclinados 60° uno sobre el otro.

El cuboctaedro tiene capital importancia en Cristalografía.

En Arquitectura suministra, con la esfera circunscrita, el diagrama de la construcción de una cúpula bizantina sobre pechinas. Los vértices del cuboctaedro coinciden, en efecto con los puntos de contacto de seis círculos tangentes ortogonales (inscritos en las seis caras cuadradas del cubo generador). Si se considera la mitad superior de la figura 44, los semicírculos verticales *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA*, son las posiciones de los arcos torales, el casquete esférico *MEFGH* representa la cúpula, y los triángulos esféricos *EBF*, *FCG*, *GDH* y *HAE* las pechinas que, en esta solución (la empleada por el arquitecto de Santa Sofía) forman parte de la misma esfera que la cúpula [26] (lám. 17, arriba).

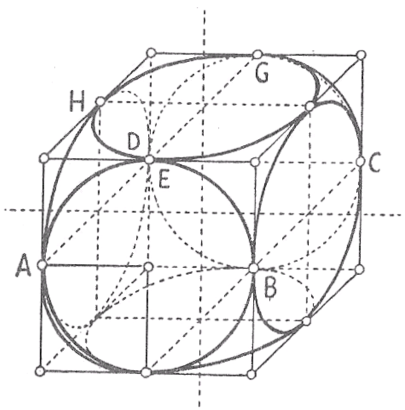

FIG. 44

2º El octaedro truncado o *tetrakaidecaedro* de lord Kelvin, o *eptaparaleloedro* de Fedorow, que tiene veinticuatro vértices, treinta y seis aristas iguales, catorce caras de las que ocho son exágonos y seis cuadrados.

Lo llamaremos *poliedro de Kelvin*. Puede obtenerse dividiendo en tres partes iguales todas las aristas de un octaedro; los dos puntos que sirven para esta división sobre cada arista dan los veinticuatro vértices del poliedro

(25) En el examen de los problemas:
1º Partición isótropa ideal de los puntos del espacio;
2º Cobertura isótropa del espacio por esferas tangentes, teniendo estos dos problemas como solución el mismo conjunto de puntos.

(26) Se sabe que existe otra solución en la que la cúpula es un hemisferio completo colocado sobre el círculo *EFGH* como círculo ecuatorial. En este caso, la cúpula y sus pechinas no forman parte de la misma esfera (lám. 17, abajo).

arquimediano buscado, que tiene ocho caras exagonales y seis cuadradas (fig. 45).

Como ha demostrado lord Kelvin posee la propiedad única entre los trece cuerpos arquimedianos (y reservada al cubo entre los cuerpos platónicos) de poder (por repetición) *llenar el espacio* sin dejar intersticios. El exágono tiene la propiedad plana correspondiente.

El prisma exagonal (y, *a fortiori*, su submúltiplo el prisma triangular) posee también esta propiedad heredada directamente del exágono.

Se puede decir que, lo mismo que el dodecaedro y el icosaedro representan la ampliación del pentágono regular en el espacio de tres dimensiones, el poliedro de Kelvin y el prisma exagonal son ampliaciones del exágono regular.

Se ve, pues, que a medida que se pasa a un espacio de mayor número de dimensiones, resulta una especie de especialización, de *división del trabajo*, para las propiedades concentradas en un solo individuo del espacio inferior. Por otro lado, tipos que —en dos dimensiones— no tienen ningún parentesco estructural o algebraico, como el cuadrado, el triángulo, el pentágono, descubren afinidades insospechadas cuando se generalizan con los correspondientes tipos superiores.

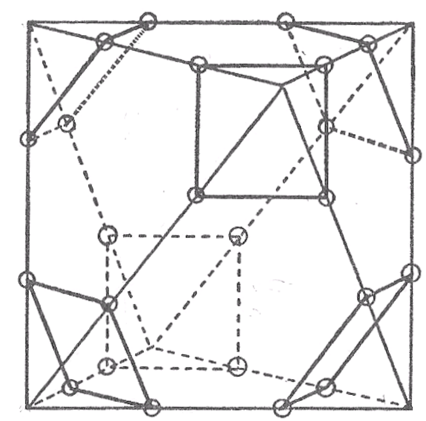

FIG. 45

Se puede construir también el poliedro de Kelvin partiendo de ocho cubos yuxtapuestos. En el centro de cada una de las seis caras del cubo así formado se encuentran cuatro aristas, y los puntos obtenidos al tomar las mitades de estas veinticuatro aristas son los vértices del poliedro buscado (lámina 18, arriba).

Antes de dar por terminado este estudio, consagraré todavía algunas líneas a otros dos poliedros arquimedianos:

Nº 3, el triakontágono

30 vértices;

60 aristas iguales;

32 caras de las cuales 12 son pentágonos y 20 triángulos equiláteros, obtenidos tomando como vértices los puntos medios de las treinta aristas del

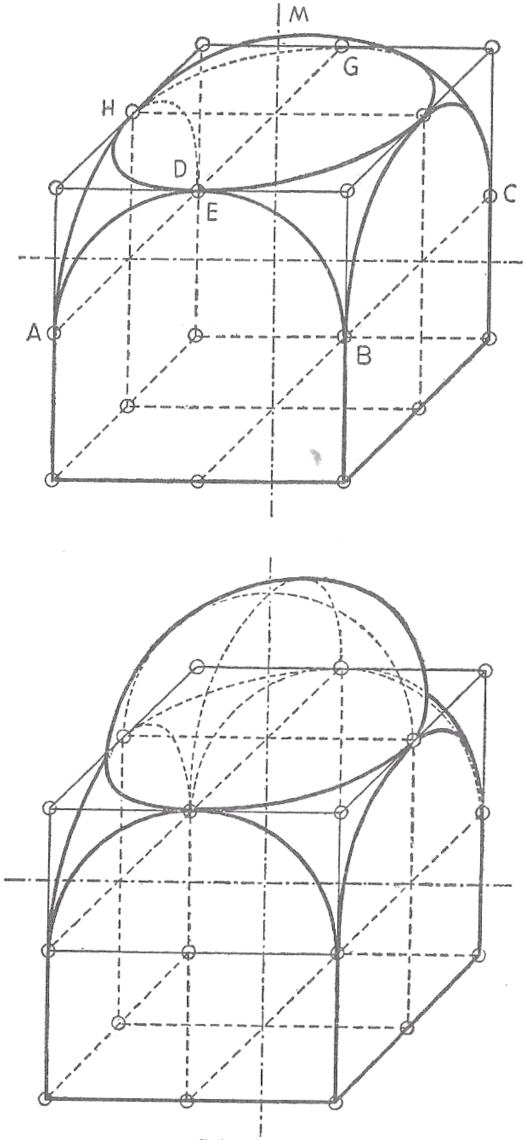

Lámina 17
Arriba: Cúpula bizantina sobre un cuboctaedro
Abajo: Variante con cúpula sobreelevada

dodecaedro o del icosaedro. En la lámina 18, abajo, no doy los detalles de esta derivación a partir del poliedro generador, porque complicaría mucho la figura, sino el resultado, es decir, el triakontágono en una proyección simétrica fácil de construir partiendo de un pentágono y de un decágono concéntricos y de lados iguales.

Siendo derivado del dodecaedro (o, a elección, del icosaedro), este cuerpo debe acusar la presencia de la sección áurea. Se tiene, en efecto, la relación $\frac{R}{t} = \Phi$ entre el radio R de la esfera circunscrita y la arista t del triakontágono, que es pues, en cierto modo, la ampliación del decágono regular a la tercera dimensión. Sus treinta vértices coinciden, por lo demás, con los vértices comunes de seis decágonos definidos por las intersecciones de seis círculos máximos sobre esta esfera circunscrita.

Y nº 4:

El cuerpo arquimediano de 24 vértices, 48 aristas iguales y 26 caras, de las que 8 son triángulos equiláteros y 18 son cuadrados.

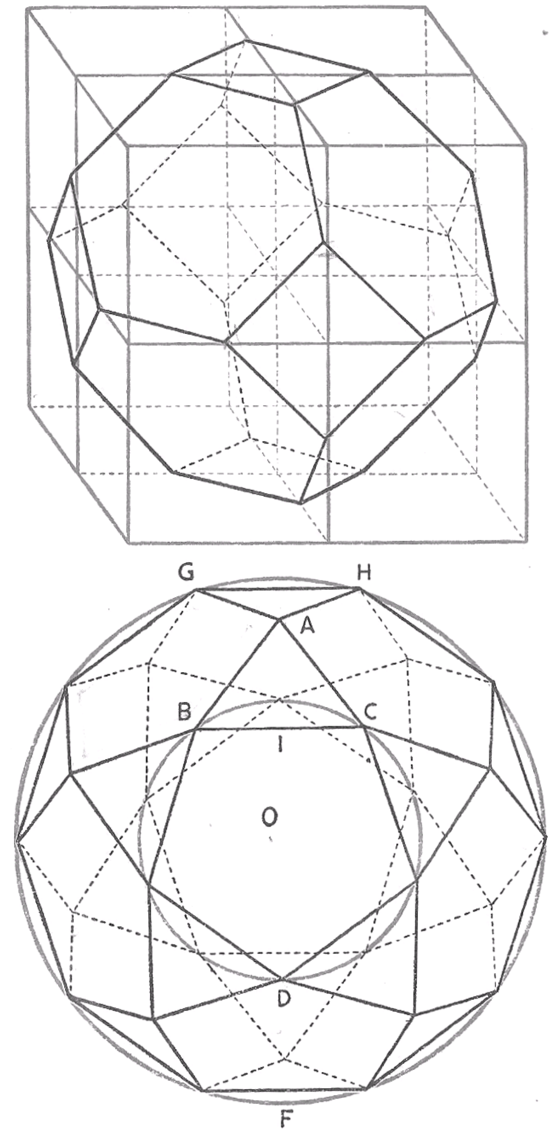

Lámina 18
Arriba: Poliedro de Kelvin. - Abajo: Triakontágono (proyección ortogonal)

Se deriva del cuboctaedro tomando como vértices los puntos medios de las veinticuatro aristas de este último. También se puede obtener combinando tres prismas regulares octogonales ortogonales dos a dos.

Es el poliedro de cristal que está flotando en el aire en el cuadro de Jacopo da Barbari. En general, no ofrece gran interés, si no es que, siendo muy fácil de construir, sirvió en otro tiempo de modelo para ciertos faroles de vidrio.

Prolongando las caras o las aristas o uniendo a través del cuerpo los lados de los poliedros arquimedianos convexos, se obtiene un cierto número de poliedros estrellados, semirregulares, que se pueden llamar *arquimedianos estrellados*. El más interesante es el icosadodecaedro, cuyas caras son pentágonos estrellados y triángulos equiláteros.

También se pueden construir los poliedros recíprocos de los trece arquimedianos tomando los centros de figura de todas sus caras. Se obtienen así trece poliedros que no son inscriptibles en una esfera, cada uno de los cuales tiene por caras polígonos iguales, pero no regulares; los ángulos sólidos en los vértices son, por el contrario, regulares pero no iguales (no superponibles). No doy el cuadro, pues puede deducirse del de los poliedros arquimedianos mediante una relación de reciprocidad (27).

Tienen nombres pintorescos: *granatoedros, leucitoedros, diamantoedros, giroedros;* pero ofrecen poco interés, salvo los dos granatoedros:

1º El granatoedro octaédrico, más comúnmente llamado *dodecaedro rómbico,* cuyas doce caras son rombos regulares. Tiene veinticuatro lados y catorce vértices (ocho de tres aristas convergentes, y seis de cuatro aristas). Es la figura recíproca del cuboctaedro (28).

Tiene la propiedad de poder (por repetición) llenar el espacio sin dejar intersticios (como en el plano el rombo regular, del que es su ampliación al espacio de tres dimensiones).

2º El granatoedro icosaédrico o *triakontaedro rómbico,* recíproco del triakontágono. Sus caras son treinta rombos y tiene sesenta aristas y treinta y dos vértices (veinte con tres aristas y doce de cinco aristas convergentes) (29).

(27) Cuando dos poliedros son recíprocos, el número de sus lados es el mismo; el de vértices de uno es igual al de caras del otro y el de lados de una cara corresponde al de aristas que concurren en el vértice correspondiente del otro poliedro. La figura recíproca de un poliedro puede obtenerse también haciendo pasar por cada vértice el plano normal al radio que une este vértice con el centro de figura.

(28) Si se construyen un cubo y un octaedro entrelazados de manera que los doce lados de uno sean perpendiculares a los doce lados del otro en sus puntos medios, estos doce pares de lados perpendiculares representan los doce pares de diagonales de las caras de un dodecaedro rómbico.

(29) Si se construye un dodecaedro y un icosaedro entrelazados de manera que los treinta lados de uno sean perpendiculares a los treinta lados del otro en sus puntos medios, estos treinta pares de lados perpendiculares representan los treinta pares de diagonales de las caras de un triakontaedro rómbico.

Como ya hemos dicho, el nombre de Platón está asociado al grupo de los cinco poliedros regulares propiamente dichos.

Piero della Francesca les consagró su tratado de *Quinque Corporibus* dedicado al duque de Urbino en 1492; Arquímedes estudió los trece cuerpos semirregulares que luego tomaron su nombre; Paccioli analizó, junto a los cuerpos platónicos, ciertos poliedros semirregulares, y, en particular, el cuboctaedro y el poliedro de Kelvin "il corpo de 14, cive 6 quadrate, 8 exagone", y, Durero construyó ocho de ellos por su método de desarrollo sobre el plano. Pero el autor del Renacimiento que más se dedicó a la representación de los cuerpos arquimedianos fue el omnisciente Daniel Barbaro, patriarca de Aquilea y diplomático veneciano. En su *Prattica de la Perspettiva* (Venecia, 1569), los obtuvo todos por ablación de los ángulos o de las aristas de los poliedros generadores (30); los desarrolló sobre el plano por el método de Durero, construyó los cuerpos estrellados obtenidos colocando pirámides regulares sobre sus diferentes caras, y reanudó también los estudios de Paolo Uccello (hacia 1400), el primer pintor geómetra del Quattrocento, sobre los anillos prismáticos conseguidos inscribiendo polígonos regulares en toros (31) que eriza a su vez de pirámides.

Por último, Kepler, matemático y astrónomo del emperador Rodolfo II, protector de los alquimistas, se ocupa extensamente de los cinco cuerpos regulares en su *Mysterium Cosmographicum,* inspirado tal vez por las pechinas estelares que, en la catedral de Hradschin, sirven de candelabros a la capilla de los Caballeros de la Estrella Roja, y estudia y bautiza (1619) los poliedros estrellados.

El siglo XIX reanudó el estudio matemático y la clasificación de los sólidos geométricos que, sirviendo de punto de partida a la teoría de las particiones homogéneas, permitieron establecer las bases de la Cristalografía. Observemos que, por un curioso efecto de *boomerang,* fue la consideración de los diversos movimientos posibles del icosaedro regular lo que permitió a Klein aplicar la teoría de grupos a la solución de la ecuación general de quinto grado (32).

(30) Existe un método rápido para obtener inmediatamente, sin intermedio de figuras, las características del poliedro derivado de otro, tomando uno o dos puntos sobre cada una de sus aristas. Este procedimiento, basado sobre una notación simbólica muy sencilla, permite orientarse sin confusión en esas abundantes filiaciones de poliedros más o menos regulares, a partir de sus cinco antepasados platónicos.

(31) Figura llamada *mazzochio,* aludiendo al nombre de un bonete de paño de esta forma que se usaba en aquella época.

(32) Las sustituciones de las raíces de la ecuación de quinto grado corresponden a los sesenta movimientos posibles del icosaedro.